Separabilitet og Graden af Entanglement for Endeligt Dimensionale Hilbertrum

MED FOKUS PÅ $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ OG $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$

AALBORG UNIVERSITET

INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG • Gruppe G4-109 • MAT10• Foråret 2013

AALBORG UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

OVERORDNET TEMA:

Matematisk Analyse

TITEL:

Separabilitet og Graden af Entanglement for Endeligt Dimensionale Hilbertrum-med fokus på $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$

PROJEKT PERIODE:

MAT10,

Forårssemesteret 2013

PROJEKT AFSLUTTET:

28. maj 2013

PROJEKTGRUPPE: G4-109

Dennis Hansen

Alexander B. Ottesen

VEJLEDER:

Horia Cornean

OPLAGSTAL: 5

ANTAL SIDER: 60

SYNOPSIS:

Dette speciale omhandler en matematisk beskrivelse entanglement, hvor emnerne separabilitet og graden af entanglement bearbejdes med hovedfokus på endeligtdimensionale tilfælde i særdeleshed rummene $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$.
Indledningsvis bliver der defineret en række matematiske begreber der er nødvendige for det fortsatte arbejde herunder tensorprodukt af Hilbertrum, tæthedsmatricer og en definition af entanglement.
Der bliver efterfølgende arbejdet med kriterier, der kan benyttes til at beskrive, hvorvidt tilstande er separable, og derved også hvorvidt de er entanglede. For specialtilfældene $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$, viser det sig at der findes et simpelt kriterium, der siger, at hvis en tilstand har PPT da er den separabel.
Herefter ses der på kriterier for, hvordan mål for entanglement kan konstrueres, både gennem deres praktiske anvendelighed og derefter via en aksiomatisk tilgang. Det bliver vist, at to mål, entanglement omkostningen og entanglement destilleringen, virker som grænser for entanglement mål.
Til slut gennemregnes eksempler, der viser, hvordan resultaterne kan anvendes i forbindelse med fysiske tilstande.

© MAT10- Gruppe G4-109

Abstract

This thesis will be a mathematical description of the physical phenomenon entanglement, where the subjects separability and entanglement measures with the main focus being finite dimensional Hilbert spaces, especially the spaces $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ and $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$.

The subjects: Tensor products and density matrices are introduced to create a foundation for the rest of the thesis. Following these introductions we define the term entanglement.

We then describe a number of criteria which can be used to determine whether a state is separable or entangled. In the special cases of states on $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ and $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$, it is shown that if the state has PPT then the state i separable

Afterwards we take a look at criteria that describe how entanglement measures can be constructed, both through practical usability, and through a axiomatic approach. It is shown that the measures entanglement distillation and entanglement cost, can be used as bound for entanglement measures.

Finally the results will be used in relation to physical examples.

FORORD

Dette speciale er udarbejdet af gruppe G4-109 og er skrevet på matematik studiets 10. semester på Aalborg Universitet. Specialet er udarbejdet i samarbejde med vejleder Horia Cornean og har titlen "Separabilitet og Graden af Entanglement for Endeligt Dimensionale Hilbertrum med fokus på $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$".

I dette speciale bliver emnerne separabilitet og Graden af entanglement bearbejdet, for at kunne beskrive det kvantemekaniske fænomen entanglement. For at nå til dette, vil der også blive arbejdet med emnerne tensorprodukt af Hilbertrum og tæthedsmatricer. Afslutningsvist vil der blive lavet beskrivende eksempler, hvor hovedresultaterne fra de forskellige kapitler vil blive anvendt.

Specialet henvender sig til alle med interesse for emnet, men læses bedst med en forståelse for fysik og matematik svarende til henholdsvis 5. semester på fysik uddannelsen og 6. semester på matematik uddannelsen begge på Aalborg Universitet.

Der skal til sidst lyde en stor tak til vejleder Horia Cornean for kyndig vejledning og Ole Keller fra Institut for Fysik og Nanoteknologi for hjælp med den fysiske forståelse af emnet.

Aalborg den 28/5 2013

Dennis Hansen

Alexander B. Ottesen

Læsevejledning

Igennem rapporten vil der fremtræde kildehenvisninger, som henviser til en litteraturliste bagerst i rapporten. Kildehenvisningerne i rapporten vil være angivet efter Havard metoden. Der vil i rapporten refereres til kilderne ved [Efternavn, År, Evt. sidetal m.m.]. Bagerst i rapporten findes en litteraturliste, hvor der er angivet mere detaljerede oplysninger for de forskellige kilder.

Hvis kildehenvisningen er skrevet før punktum, henviser kilden til den pågældende linje. Hvis kildehenvisningen derimod står efter punktum, henvises der til hele det forudgående afsnit, medmindre andet er angivet.

Vektornotationen vil generelt gennem rapporten blive betegnet med bra-ket notation (også kendt som Dirac notation) og i enkelte tilfælde små bogstaver og fed skrift eksempelvis $\boldsymbol{x}$. Hvis der i rapporten skrives ”vi”, henføres der alle steder til projektgruppen. Tabeller, figurer m.m. er alle fortløbende nummereret efter hvilket kapitel, de er placeret i, og hvor i kapitlet de står. Derfor vil der nogle steder eksempelvis stå en reference i teksten, såsom ”(4.7)”, hvilket angiver den 7. formel i kapitel 4 eller ”Figur 6.33”, som angiver den 33. figur i kapitel 6. Billeder, figurer og tabeller uden kildeangivelse, er produceret af gruppens medlemmer.

INDHOLDSFORTEGNELSE

KAPITEL 1

INDLEDNING

Er det muligt at kommunikere fuldstændigt sikkert, lave ubrydelige koder og teleporterer objekter?

Svaret på dette findes ikke i den klassiske fysik, men hvis kvantefysikken benyttes kan dette lade sig gøre. I 1935 skrev Einstein, Podolsky og Rosen en artikel, der havde til formål at vise, at kvantemekanikken ikke var en fuldstændig teori. Dette lykkedes ikke for dem, men de fik i stedet opstillet et tankeeksperiment, der endte med at have konsekvenser der rakte langt ud over deres forventninger. Dette tankeeksperiment var med til at fremhæve et af de mest utrolige fænomener inden for kvantefysikken: Entanglement.

I denne rapport vil der blive arbejdet med en matematisk tilgang til entanglement, for at opnå en baggrundsviden for, hvad entanglement betyder for kvantefysikken. Dette er en videreføres af arbejdet fra [Hansen og Ottesen, 2012], hvor der blev arbejdet med en fysisk beskrivelse af emnet. Når der i matematikken bliver bearbejdet emnet entanglement er to af de store spørgsmål i denne forbindelse de følgende:

- Hvordan undersøges det om en tilstand er entanglet?
- Hvor entanglet er en given tilstand?

Disse to spørgsmål er vigtige i forbindelse med anvendelsen af entanglement, eg. i forbindelse med kvantekryptering og -teleportation. Der vil i denne rapport udelukkende blive arbejdet med endeligt dimensionale Hilbertrum.

I forbindelse med beskrivelsen af entanglement vil der først blive set på tensorprodukter af Hilbertrum og på tæthedmatricer, der vil være udgangspunktet for at beskrive kvantetilstandene. Da separabilitet spiller en vigtig rolle i forbindelse med definitionen af entanglement, vil dette efterfølgende blive defineret, hvorefter entanglement defineres. Herefter vil der blive opstillet kriterier til undersøgelse af om en tilstand er separabel, hvor hovedfokus vil blive lagt på $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$. Efter dette vil værktøjer til bestemmelse af, hvor entanglet en tilstand er blive opstillet, her under bliver der set på forskellige mål for graden af entanglement. Afslutningsvist vil der blive set på, hvordan entanglement bliver brugt i fysikken, samt nogle eksempler på entanglede systemer.

KAPITEL 2

GRUNDLÆGGENDE TEORI

I dette kapitel vil en række emner, der ligger til grund for de efterfølgende kapitler, blive gennemgået, så som teori for tensorprodukter af Hilbertrum og teori for tæthedsmatricer, for til sidst, at kunne definerer entanglement. Der vil desuden blive beskrevet enkelte grundlæggende egenskaber ved entanglement.

2.1 Tensorprodukt af Hilbertrum

Der vil i dette afsnit blive beskrevet tensorprodukter af Hilbertrum. Dette afsnit er skrevet på baggrund af [Reed og Simon, 1980,Side 49-51] og [Cornean, 2013]

Der vil nu blive defineret tensorproduktet af to Hilbertrum $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$. Lad der først blive defineret tensorproduktet af vektorerne $\left|\phi_A\right\rangle \in \mathscr{H}_A$ og $\left|\phi_B\right\rangle \in \mathscr{H}_B$. Tensorproduktet defineres som den afbildning der afbilder en vektor fra $\mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B$ over i en bilineær afbildning F, hvor

$$\mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B \ni \left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) \to F\left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) = F_{AB}$$

med

$$F_{AB} : \mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B \to \mathbb{C}$$

og

$$F_{AB}\left(\left|\psi_A\right\rangle, \left|\psi_B\right\rangle\right) = \left\langle\phi_A|\psi_A\right\rangle_A \left\langle\phi_B|\psi_B\right\rangle_B$$

hvorom der gælder, at $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ er det indre produkt hørende til $\mathscr{H}_A$, og $\langle\cdot|\cdot\rangle_B$ er det indre produkt hørende til $\mathscr{H}_B$. Endvidere gælder der, at:

$$F\left(\left|\phi_A\right\rangle + \left|\psi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) = F\left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) + F\left(\left|\psi_A\right\rangle, \left|\psi_B\right\rangle\right) \tag{2.1}$$

$$F\left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle + \left|\psi_B\right\rangle\right) = F\left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) + F\left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\psi_B\right\rangle\right) \tag{2.2}$$

$$F\left(a\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) = aF\left(\left|\phi_A\right\rangle, \left|\phi_B\right\rangle\right) = F\left(\left|\phi_A\right\rangle, a\left|\phi_B\right\rangle\right) \tag{2.3}$$

hvor $\left|\phi_A\right\rangle, \left|\psi_A\right\rangle \in \mathscr{H}_A$, $\left|\phi_B\right\rangle, \left|\psi_B\right\rangle \in \mathscr{H}_B$ og $a \in \mathbb{C}$. Lad mængden $\mathscr{E}$ være vektorrummet bestående af alle endelige linearkombinationer af afbildninger F_{AB}.

Lad $\left\{\left|\phi_{Ai}\right\rangle\right\}_{i=1}^{n}$ være en basis for $\mathscr{H}_A$ og $\left\{\left|\phi_{Bj}\right\rangle\right\}_{j=1}^{m}$ en basis for $\mathscr{H}_B$. Da $\mathscr{E}$ er et vektorrum, kan et tilfældigt element $|\Psi\rangle \in \mathscr{E}$ skrives på formen:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k F_k \tag{2.4}$$

hvor $F_k \in \mathscr{E}$ og $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Idet der gælder, at alle vektorer i $\mathscr{H}_A$ ($\mathscr{H}_B$) kan skrives som en linear kombination af vektorerne $\{|\phi_{Ai}\rangle\}_{i=1}^{n}$ $\left(\{|\phi_{Bj}\rangle\}_{j=1}^{m}\right)$, og idet afbildningerne $F(\cdot,\cdot)$ overholder Ligning (2.1), (2.2) og (2.3), kan (2.4) omskrives til:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} F(\phi_{Ai}, \phi_{Bj})$$

Der vil nu blive defineret det indre produkt af to vektorer i $\mathscr{E}$. Det indre produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ defineres, for vektorerne $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathscr{H}$, som:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{m,n,m',n'} a_{mn} b^*_{m'n'} \langle\phi_{Am}|\phi_{Am'}\rangle_A \langle\phi_{Bn}|\phi_{Bn'}\rangle_B$$

hvor m og m' løber fra og 1 til og med $\dim(\mathscr{H}_A)$ og n og n' løber fra og med 1 til og med $\dim(\mathscr{H}_B)$. Det skal nu vises, at $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ udgør et indre produkt. Sesqui-lineariteten følger straks fra sesqui-lineariteten af $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ og $\langle\cdot|\cdot\rangle_B$.

Dernæst skal det vises, at der gælder, at $\langle\Psi|\Phi\rangle_{\mathscr{H}} = \langle\Phi|\Psi\rangle^*_{\mathscr{H}}$. At dette er tilfældet ses ved at se på $\langle\Phi|\Psi\rangle^*_{\mathscr{H}}$:

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\Psi\rangle^*_{\mathscr{H}} &= \left(\sum_{m,n,m',n'} b_{m'n'} a^*_{mn} \langle\phi_{Am'}|\phi_{Am}\rangle_A \langle\phi_{Bn'}|\phi_{Bn}\rangle_B\right)^* \\
&= \sum_{m,n,m',n'} \left(b_{m'n'} a^*_{mn}\right)^* \langle\phi_{Am'}|\phi_{Am}\rangle^*_A \langle\phi_{Bn'}|\phi_{Bn}\rangle^*_B \\
&= \sum_{m,n,m',n'} a_{mn} b^*_{m'n'} \langle\phi_{Am}|\phi_{Am'}\rangle_A \langle\phi_{Bn}|\phi_{Bn'}\rangle_B
\end{aligned}$$

hvilket var det ønskede.

Det sidste der ønskes vist er, at det indre produkt er positiv semi-definit, hvilket tydeligt ses ved at anvende egenskaberne af $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ og $\langle\cdot|\cdot\rangle_B$.

Det er nu muligt at definere tensorproduktet af to Hilbertrum.

Definition 2.1
Lad der være givet Hilbertrummene $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$, da er tensorproduktet $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B = \mathscr{H}$ defineret som aflukningen af mængden $\mathscr{E}$, under det indre produkt defineret som:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{m,n,m',n'} a_{mn} b^*_{m'n'} \langle\phi_{Am}|\phi_{Am'}\rangle_A \langle\phi_{Bn}|\phi_{Bn'}\rangle_B$$

hvor m og m' løber fra og 1 til og med $\dim(\mathscr{H}_A)$ og n og n' løber fra og med 1 til og med $\dim(\mathscr{H}_B)$, og for $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathscr{H}$.

En konsekvens af foregående definition er, at tensorproduktet af Hilbertrum også udgør et Hilbertrum. Det er desuden også muligt at bestemme en basis for $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$. Den følgende sætning følger direkte af det ovenstående

Sætning 2.2
Hvis der gælder, at $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$ har $\{|\psi_j\rangle\}_{i=1}^{n}$ og $\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^{m}$ som deres respektive orthonormale baser, da udgør $\{|\psi_j\rangle \otimes |\phi_i\rangle\}_{ij}$ en orthonormal basis for $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$.

Denne sætning giver desuden, at hvis der gælder, at Hilbertrummet $\mathscr{H}_A$ har dimension n, og $\mathscr{H}_B$ har dimension m, da har $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ dimension mn.

Der vil nu blive set på lineære operatorer virkende på tensorprodukter af Hilbertrum. Lad K_A være en operator virkende på elementer i $\mathscr{H}_A$. Det er ønskeligt, at associerer denne operator med en operator K'_A virkende på elementer i $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$. Operatoren K'_A vil blive benævnt som K_A's udvidelse til $\mathscr{H}$. Denne operator vil blive karakteriseret ved:

$$K'_A \left(\left|\phi_A\right\rangle \otimes \left|\phi_B\right\rangle\right) = \left(K_A \left|\phi_A\right\rangle\right) \otimes \left|\phi_B\right\rangle$$

hvilket, for et tilfældigt element $\left|\psi\right\rangle \in \mathscr{H}$, vil sige, at $K'_A \left|\psi\right\rangle$ kan skrives som:

$$K'_A \left|\psi\right\rangle = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} c_{ij} \left(K_A \left|\phi_{Ai}\right\rangle\right) \otimes \left|\phi_{Bj}\right\rangle$$

Analoge betragtninger kan gøres for operatoren K_B virkende på $\mathscr{H}_B$. Hvis der antages, at $\mathbb{1}_A$ og $\mathbb{1}_B$ er identitets operatorerne for henholdsvis $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$, kan K'_A og K'_B skrives på formen:

$$K'_A = K_A \otimes \mathbb{1}_B$$
$$K'_B = \mathbb{1}_A \otimes B$$

Endvidere skrives der, at:

$$K_A \otimes K_B = K'_A K'_B$$

hvilket tydeligt giver, at K'_A og K'_B kommuterer.

Der vil nu blive set på sporet af operatorer.

Definition 2.3
Lad der gælde, at $\mathscr{H}$ er et separabelt Hilbertrum med tilhørende orthonormal basis $\left\{\left|\psi_j\right\rangle\right\}_{j=1}^{n}$, hvor $n = \dim(\mathscr{H})$, da defineres sporet af A til:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \psi_j \right| A \left| \psi_j \right\rangle$$

Det ses, ud fra definitionen, at der må gælde, at $\mathrm{Tr}(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$, og at $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A)$ for alle $\lambda \geq 0$ samt, at når $0 \leq A \leq B$ så gælder der, at $\mathrm{Tr}(A) \leq \mathrm{Tr}(B)$. Endvidere viser det sig, at sporet er uafhængig af den valgte basis:

Sætning 2.4
Lad A være en lineær operator virkende på det endeligt dimensionale Hilbertrum $\mathscr{H}$. Sporet af operatoren A er uafhængig den valgte basis for $\mathscr{H}$.

Bevis:
Lad der være givet to forskellige baser, $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^n$ og $\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^m$, hørende til Hilbertrummet $\mathcal{H}$. Der gælder derved, at:

$$A|\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^m A|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle$$

hvilket giver:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_i|A|\psi_i\rangle &= \sum_{j=1}^m \langle\psi_i|A|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle \langle\phi_j|\psi_i\rangle^* \psi_i\right|A\left|\phi_j\right\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle\langle\psi_i|\phi_j\rangle\psi_i\right|A\left|\phi_j\right\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

Lad der nu blive summeret over i:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \left\langle\langle\psi_i|\phi_j\rangle\psi_i\right|A\left|\phi_j\right\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \left\langle\langle\psi_i|\phi_j\rangle\psi_i\right|A\left|\phi_j\right\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle \sum_{i=1}^n \langle\psi_i|\phi_j\rangle\psi_i\right|A\left|\phi_j\right\rangle\langle\phi_j|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \langle\phi_j|A|\phi_j\rangle
\end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede. ■

Hvis der ses på sporet af tensorproduktet af to operatorer, kan der opskrives følgende sætning:

Sætning 2.5
Lad der være givet en operator $A\otimes B$ virkende på $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$. Da gælder der, at sporet er givet som

$$\mathrm{Tr}(A\otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$$

Bevis:
Det antages, at $\mathcal{H}_A$ og $\mathcal{H}_B$ er separable Hilbertrum, med $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1}^n$ og $\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^n$ som deres respektive baser. Lad $\{|\psi_k\rangle\otimes|\phi_j\rangle\}_{k,j=1}^{n,m}$ udgøre en basis for $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$. Der defineres nu operatoren $A\otimes B$ der er en operator virkende på $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$.

Der vil da gælde, at:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A\otimes B) &= \sum_{k=1,j=1}^{n,m} \langle\psi_k|\otimes\langle\phi_j|A\otimes B|\psi_k\rangle\otimes|\phi_j\rangle = \sum_{k=1,j=1}^{n,m} \langle\psi_k|\otimes\langle\phi_j|A|\psi_k\rangle\otimes B|\phi_j\rangle \\
&= \sum_{k=1,j=1}^{n,m} \langle\psi_k|A|\psi_k\rangle\langle\phi_j|B|\phi_j\rangle = \sum_{k=1}^n \langle\psi_k|A|\psi_k\rangle\sum_{j=1}^m\langle\phi_j|B|\phi_j\rangle \\
&= \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)
\end{aligned}$$

som det var ønsket. ■

Desuden er det vigtigt, at operatorer kan skrives på "matrixform". Lad $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^n$ være en basis til Hilbertrummet $\mathscr{H}$. En lineær, endeligt dimensional, operator $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ kan skrives på formen:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle|\psi_j\rangle\langle\psi_i| \tag{2.5}$$

hvor $\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle$, betegnes som det j,i'te matrixelement. At dette gælder, ses ved at lade operatoren virke på vektoren $|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle|\psi_j\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle\left\langle\psi_i\middle|\sum_{k=1}^{n}\langle\psi_k|\phi\rangle\middle|\psi_k\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle\sum_{k=1}^{n}\langle\psi_k|\phi\rangle\langle\psi_i|\psi_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\langle\psi_i|\phi\rangle\psi_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\left\langle\psi_j\middle|A\middle|\sum_{i=1}^{n}|\langle\psi_i|\phi\rangle\psi_i\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\phi\rangle \\
&= A|\phi\rangle
\end{aligned}$$

At kunne skrive operatorer på matrixform er nyttigt, for eksempel i forbindelse med tætheds-matricer, og især reducerede tæthedsmatricer, som det kommende afsnit vil omhandle.

2.2 Tæthedsmatricer

I kvantemekanikken bliver fysiske objekter beskrevet ved Hilbertrum $\mathscr{H}$. Disse Hilbertrum beskriver nogle af objektets egenskaber, eg. beskriver $\mathscr{L}_2$ elektronens positions egenskaber og $\mathbb{C}_2$ beskrive elektronens spin egenskaber. Ethvert system, kan til enhver given tid, beskrives ved en tilstand. Det er disse tilstande der beskriver systemets egenskaber på det givende tidspunkt. Rent matematisk beskrives disse tilstande ved tæthedsmatricer ρ, og det er dem dette afsnit vil beskæftige sig med. Afsnittet er skrevet på baggrund af [Nakahara et al., 2007,Side 92-93 & 97-98], [Blum, 2012,Side 38-43] og [Cornean, 2013].

Tæthedsmatricer er operatorer virkende på systemets Hilbertrum $\mathscr{H}$, der er defineret som føl-gende:

Definition 2.6
En operator ρ, der virker på et Hilbertrum $\mathscr{H}$, kaldes en tæthedsoperator, hvis den overholder følgende:

1. Hermitisk: $\rho^\dagger = \rho$,
2. Positiv semi-definit: $\mathbf{0} \leq \rho$, og
3. $\text{Tr}(\rho) = 1$

En tæthedsoperator kaldes også for en tæthedsmatrix eller en tilstand.

Rummet der indeholde alle tæthedmatricer virkende på Hilbertrummet $\mathscr{H}$ kaldes for tilstandsrummet og betegnes $S(\mathscr{H})$.

Hvis der, for forskellige tilstandsvektorer $\left|\psi_n\right\rangle$, gælder, at sandsynligheden for at være i den fysiske tilstand svarende til tilstandsvektor $\left|\psi_n\right\rangle$ er $P\left(\left|\psi_n\right\rangle\right) = p_n \geq 0$ og, at $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, så kan tæthedsmatricen skrives som:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right| \tag{2.6}$$

At dette er en tæthedsmatrix kan ses ved at undersøge, om den overholder punkt 1.-3. i Definition 2.6:

1. Hermitisk:

$$\begin{aligned}\rho^\dagger &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right)^\dagger = \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right)^\dagger = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right)^\dagger \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right| = \rho\end{aligned}$$

2. Positiv semi-definit: Lad $|v\rangle \in \mathscr{H}$. Det skal vises, at $\mathbf{0} \leq \rho$, hvilket betyder, at det skal vises, at følgende gælder:

$$\begin{gathered}\langle v|\mathbf{0}|v\rangle \leq \langle v|\rho|v\rangle \\ \Updownarrow \\ 0 \leq \left\langle v\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right)\right| v\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \langle v|\psi_n\rangle\langle\psi_n|v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|\langle\psi_n|v\rangle\right|^2\end{gathered}$$

Dette gælder, idet $p_n \geq 0$, og $|\cdot|^2 \geq 0$.

3. Tr(ρ) = 1:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\rho) &= \text{Tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{Tr}\left(\left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \langle\psi_n|\psi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1\end{aligned}$$

Altså udgør udtrykket Ligning (2.6) en tæthedsmatrix.

Sætning 2.7
Enhver endeligt dimensional tæthedsmatrix kan diagonaliseres i sin egenbasis, således at:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i \left|e_i\right\rangle \left\langle e_i\right|$$

hvor $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ er egentilstandsvektorer og p_i er sandsynligheden for at systemet befinder sig i egentilstandsvektorer $|e_i\rangle$.

Bevis:
Dette følger direkte af spektralsætningen (se [Axler, 1997,Side 132-137]). ■

Hvis der ses på det tilfælde, hvor der kun er én tilstandsvektor, så er tæthedsmatricen på formen:

$$\rho = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$$

Disse tilstande kaldes rene tilstande. De tilstande der ikke er rene kaldes blandede tilstande. En måde hvorved det er muligt at bestemme hvorvidt en tilstand er ren, er ved at bruge følgende sætning:

Sætning 2.8
En tilstand er ren, hvis og kun hvis

$$\rho^2 = \rho$$

Bevis:
Lad der blive antaget, at $\rho = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$, da gælder der, at:

$$\rho^2 = \left(\left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|\right)^2 = \left(\left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|\right)\left(\left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|\right) = \left|\psi\right\rangle \left(\left\langle\psi|\psi\right\rangle\right)\left\langle\psi\right| = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right| = \rho$$

hvilket viser den ene del af sætningen. Lad der nu blive antaget, at $\rho^2 = \rho$. Der gælder i dette tilfælde, at:

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|\right) \sum_{j=1}^{\infty} p_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \\
&= \sum_{i=1,j=1}^{\infty} p_i p_j \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|
\end{aligned}$$

Men idet der gælder, at $\rho^2 = \rho$ kan der skrives, at:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} (p_i^2 - p_i) \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

Hvis der multipliceres med $|\psi_1\rangle$ på begge sider af lighedstegnet, og derefter $\langle\psi_1|$, fås der, at:

$$p_1^2 = p_1$$

Dette medfører, at p_1 enten er lig 1 eller lig 0. Hvis der gælder, at $p_1 = 1$ da gælder der, idet $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ =1, at alle andre p_i'er er lig 0, og sætningen er vist. Hvis der gælder at $p_1 = 0$, gentages ovestående procedure for de resterende $|\psi_i\rangle$ og $\langle\psi_i|$, indtil et p_i bestemmes der er lig 1. Med andre ord er ρ på formen $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, og sætningen er bevist. ■

Når der haves en endelig tæthedsmatrix, så kan den dekomponeres på flere måde. En dekomposition kunne være lavet af en tilfældig følge af egentilstandsvektorer $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{n}$, der hver har sandsynligheden p_i, eller en anden tilfældig følge af egentilstandsvektorer $\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^{m}$, der hver har sandsynligheden q_j, sådan at:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho = \sum_{j=1}^{m} q_i |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

Der er dog en speciel dekomposition, for rene tilstande, med mange forskellige anvendelsesmuligheder. Denne måde kaldes Schmidt Dekomposition:

Sætning 2.9 (Schmidt Dekomposition)
Lad $|\psi\rangle \in \mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ være en ren tilstandsvektor. Da eksisterer der orthonormal mængder $\{|i_A\rangle\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{H}_A$ og $\{|i_B\rangle\}_{i=1}^{m} \in \mathscr{H}_B$, sådan at

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_{i=1} |i_A i_B\rangle$$

hvor $\lambda_i \geq 0$ er reelle tal der opfylder $\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i^2 = 1$. Disse λ_i'er kaldes også Schmidt Koefficienterne.

[Nielsen og Chuang, 2010,Side 109]

Bevis:
Dette bevis vil kun blive ført for $n = m$. Lad $\{|j\rangle\}_{j=1}^{n}$ og $\{|k\rangle\}_{k=1}^{n}$ være tilfældige faste baser for henholdsvis $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$. Da kan $|\psi\rangle$ skrives som:

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} a_{jk} |jk\rangle \tag{2.7}$$

hvor koefficienterne a_{jk} danner den komplekse matrix A. Det vides, at A kan skrives som UDV, hvor D er en diagonal matrix med ikke negative elementer, og U og V er unitære matricer. Dermed kan (2.7) omskrives til:

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ji} d_{ii} v_{ik} |j\rangle |k\rangle$$

Hvis der nu defineres $|i_A\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_{ji} |j\rangle$, $|i_B\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} |k\rangle$, og $\lambda_i = d_{ii}$, fås:

$$|\psi\rangle = \sum_{i} \lambda_i |i_A, i_B\rangle$$

Da U er unitær vil $|i_A\rangle$ være en orthonormal mængde i $\mathcal{H}_A$ idet $|j\rangle$'erne er en orthonormal basis. For at vise dette ses der på følgende ligning:

$$\begin{aligned}\langle i'_A|i_A\rangle &= \left(\sum_{j=1}^{n} u_{j,i'}{}^{*}\langle j|\right)\sum_{j=1}^{n} u_{j,i}|j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_{j,i'}{}^{*} u_{j,i} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Det set, at Ligning (2.8) svarer til at gange den i'te søjle i U med den i' 'te søjle i U^*, hvilket, idet U er unitær, giver, at $\langle i'_A|i_A\rangle = 0$ for alle $i \neq i'$, og lig 1 for $i = i'$. Tilsvarende gælder for $|i_B\rangle$. Dermed er sætningen bevist. ■

Som en tilføjelse til ovenstående, kan det bemærkes, at der for en mængde af orthogonale vektorer, ligeledes gælder at mængden er lineært uafhængige, at dette er tilfældet ses ved at antage, at der eksistere en orthogonal mængde $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{n}$. Der antages nu, at der eksisterer koefficenter $a_1, a_2, \ldots, a_n$, således at:

$$a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle + \cdots + a_n|\psi_n\rangle = 0$$

Orthogonaliteten giver:

$$\|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_n\|^2 = 0$$

hvilket medfører, at $a_i = 0$ for $i = 1, \ldots, n$, som det var ønsket.

Inden der ses yderligere på tæthedsmatricer, vil der blive set på et eksempel med en kbit (Kvante bit), hvilket kunne være en elektrons ellers en fotons spin-op/-ned tilstand:

Eksempel 2.10:
Hvis der ses på en ren kbit tilstandsvektor kan den skrives som:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

hvor $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Tæthedsmatricen for denne er givet som:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}$$ ◊

For at kunne beskrive entanglement skal der ses på mere end et Hilbertrum, i og med at enhver egenskab for hvert objekt beskrives af hvert sit Hilbertrum. For at se på tæthedsmatricerne af flere Hilbertrum, skal der bruges tensorprodukt formalismen. Det vil sige, at der bliver set på $\rho_{AB} \in S(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Hvis der kun skal ses på et delsystem, $\mathcal{H}_A$, af hele systemet skal der bruges den reducerede tilstand(tæthedsmatrix) ρ_A.

Lad $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ været et Hilbertrummet, og lad $\{|g_{ij}\rangle\}_{i=1,j=1}^{m,n} = \{|e_i f_j\rangle\}_{i=1,j=1}^{m,n} \in \mathcal{H}$ være egentilstandsvektorer til $\mathcal{H}$, $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ være egentilstandsvektorer i $\mathcal{H}_A$ og $\{|f_j\rangle\}_{j=1}^{m}$ være egentilstandsvektorer i $\mathcal{H}_B$. Lad $\rho_{AB} \in S(\mathcal{H})$. Sporet af en tilstand er generelt defineret som:

$$\mathrm{Tr}(\rho_{AB}) = \sum_{i=1,j=1}^{\dim(\mathcal{H}_A),\dim(\mathcal{H}_B)} \langle g_{ij}|\rho_{AB}|g_{ij}\rangle$$

som set i Definition 2.3. Hvis det kun ønskes, at der ses på sporet i forhold til Hilbertrummet $\mathcal{H}_B$, skal der kun summeres over j og så fås:

$$\left\{\mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})\right\}_{i,i'} = \sum_{j=1}^{\dim(\mathcal{H}_B)} \left\langle g_{ij}\middle|\rho_{AB}\middle|g_{i'j}\right\rangle \tag{2.9}$$

hvilket er matrixelementerne af det partielle spor. Der ønskes, som beskrevet ovenfor, at den reducerede tilstand ρ_A bestemmes, dette gøres ved at samle alle matrixelementerne af det partielle spor, så det giver en matrix på formen:

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(A) \equiv \sum_{i,i'} \left\{\mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})\right\}_{i,i'} |e_i\rangle\langle e_{i'}|$$

En ækvivalent måde at definerer reducerede tæthedsmatricer på, er som de operatorer ρ_A der opfylder, at:

$$\mathrm{Tr}_A(\rho_A X) = \mathrm{Tr}(\rho_{A,B} X \otimes \mathbb{1})$$

for alle lineærer operatorer X virkende på $\mathcal{H}_A$. Basalt set betyder det, at det er den eneste måde at repræsenterer de reducerede tilstande, sådan at en måling på systemet kan blive set som en måling på delsystemet [Nakahara et al., 2007,Side 97-98].

I tilfældet hvor der haves to endeligt dimensionale Hilbertrum, kan det partielle spor bestemmes på en simpel måde. Lad der blive set på et Hilbertrum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, hvorom der gælder, at $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$ er en basis til $\mathcal{H}_A$, og $\left\{|j\rangle\right\}_{j=1}^{m}$ er en basis til $\mathcal{H}_B$. Der gælder som bekendt, at $\left\{|ij\rangle\right\}_{i,j}$ er en basis for $\mathcal{H}$, og enhver tilstand kan derfor skrives som en $nm \times nm$ matrix.

Lad der nu være givet et tilstand ρ virkende på $\mathcal{H}$. Denne matrix vil da kunne skrives på formen:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11,11} & \rho_{11,12} & \cdots & \rho_{11,1m} & \rho_{11,21} & \cdots & \rho_{11,nm} \\ \rho_{12,11} & \rho_{12,12} & \cdots & \rho_{12,1m} & \rho_{12,21} & \cdots & \rho_{12,nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1m,11} & \rho_{1m,12} & \cdots & \rho_{1m,1m} & \rho_{1m,21} & \cdots & \rho_{1m,nm} \\ \rho_{21,11} & \rho_{21,12} & \cdots & \rho_{21,1m} & \rho_{21,21} & \cdots & \rho_{21,nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{nm,11} & \rho_{nm,12} & \cdots & \rho_{nm,1m} & \rho_{nm,21} & \cdots & \rho_{nm,nm} \end{bmatrix}$$

Denne matrix kan skrives på blokmatrix formen:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho'_{1,1} & \rho'_{1,2} & \cdots & \rho'_{1,n} \\ \rho'_{2,1} & \rho'_{2,2} & \cdots & \rho'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho'_{n,1} & \rho'_{n,2} & \cdots & \rho'_{n,n} \end{bmatrix}$$

Det vides, at elementet på plads i, i' i det partielle spor er givet ved Ligning (2.9). Se nu på elementet $1, 1$, der er givet som:

$$\left\{\mathrm{Tr}_B(\rho)\right\}_{1,1} = \sum_{j=1}^{m} \left\langle 1j\middle|\rho\middle|1j\right\rangle$$

hvilket tydeligvis er sporet af blok $\rho'_{1,1}$ i blok matricen. Det ses let, at for tilfældigt i, i' er det tilsvarende element i $\mathrm{Tr}_B(\rho)$, lig med sporet af $\rho'_{i,i'}$ blokken. Dette gør, at der i det endeligt dimensionale tilfælde kan skrives det følgende:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}\left(\rho'_{1,1}\right) & \mathrm{Tr}\left(\rho'_{1,2}\right) & \dots & \mathrm{Tr}\left(\rho'_{1,n}\right) \\ \mathrm{Tr}\left(\rho'_{2,1}\right) & \mathrm{Tr}\left(\rho'_{2,2}\right) & \dots & \mathrm{Tr}\left(\rho'_{2,n}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Tr}\left(\rho'_{n,1}\right) & \mathrm{Tr}\left(\rho'_{n,2}\right) & \dots & \mathrm{Tr}\left(\rho'_{n,n}\right) \end{bmatrix}$$

Dermed kan det være lettere at bestemme det partielle spor. Ligeledes er det muligt at anskue det partielle spor $\mathrm{Tr}_A(\rho)$, der generelt er givet som:

$$\left\{\mathrm{Tr}_A(\rho)\right\}_{j,j'} = \sum_{i=1}^{m} \langle ij|\rho|ij'\rangle$$

Dette svarer til, at 1,1 elementet af $\mathrm{Tr}_A(\rho)$ er givet som summen af 1,1 elementerne i blok matricerne på diagonalen, $\rho'_{1,1}.\rho'_{2,2},\dots,\rho'_{n,n}$, og tilsvarende for alle andre mulige j, j' par.

2.3 Definition af Entanglement

Med de to foregående afsnit er det nu muligt at opskrive en matematisk definition af begrebet entanglement. Efter det vil der i et eksempel blive set på, hvad det betyder rent fysisk. Først defineres begrebet separabilitet i forbindelse med tilstande:

Definition 2.11
Lad der være givet mængden, M, af alle tilstande $\rho \in S(\mathcal{H})$ med $\mathcal{H} = \bigotimes_{i}^{n} \mathcal{H}_i$, hvor $\mathcal{H}_i$, for $i = 1, 2, \dots, n$ er Hilbertrum, der kan skrives på formen

$$\rho = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \rho_1^{(j)} \otimes \rho_2^{(j)} \otimes \cdots \otimes \rho_n^{(j)} \tag{2.10}$$

hvor $\rho_i^{(j)}$ er en tilstand hørende til Hilbertrummet $\mathcal{H}_i$. En tilstand ρ der er indeholdt i aflukningen, $\overline{M}$, af M siges at være separabel, og $\overline{M}$ er mængden af separable tilstande.

[Horodecki et al., 1996,Side 2]

Denne definition gør det muligt at definerer entanglement:

Definition 2.12
En tilstand der ikke er separabel kaldes entanglet.

For at se på entanglement, ses der først på et simpelt tilfælde med en ren to-delt tilstandsvektor. Hvis der haves to systemer A og B så, der skrives $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, med

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j} |ij\rangle_{AB}$$

hvor $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$ og $\{|j\rangle\}_{j=1}^{m}$ er orthonormale baser for henholdsvis $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$, og $a_{i,j}$ er en kompleks koefficient, som opfylder, at $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = 1$. Hvis disse rene tilstandsvektorer er separable betyder det, at disse kan skrives som:

$$|\psi\rangle = |a_A\rangle \otimes |b_B\rangle$$

Separable rene tilstandsvektorer kaldes også for produkt tilstandsvektorer.

For at se på entanglement er det vigtigt at vide hvornår en tilstandsvektor er maksimalt entanglet. Dette vil blive defineret her:

Definition 2.13
Lad der blive set på et to-delt system med et Hilbertrum $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$, hvor der gælder at $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$ er isomorfe med $\mathbb{C}^d$. Antag, at der er valgt isomorfier mellem $\mathscr{H}_A$, $\mathscr{H}_B$ og $\mathbb{C}^d$. For en valgt orthonormal basis $\{|\psi_i\rangle\} \in \mathbb{C}^d$ lad

$$\left|\psi_+\left(\mathbb{C}^d\right)\right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{d}} |\psi_i \psi_i\rangle \in \mathscr{H}$$

Tilstanden $|\psi_+(\mathbb{C}^d)\rangle$ er maksimalt entanglet. Alle andre maksimalt entanglede tilstande i $\mathscr{H}$ kan frembringes ved anvendelse af en unitær operator på formen $\mathbb{1}_A \otimes U_B$ på $|\psi_+(\mathbb{C}^d)\rangle$, hvor U_B er en unitær operator på $\mathscr{H}_B$. Den rene tilstand, hørende til $|\psi_+(\mathbb{C}^d)\rangle$, noteres med $P_+(\mathbb{C}^d) = |\psi_+(\mathbb{C}^d)\rangle\langle\psi_+(\mathbb{C}^d)|$.

Når der i et arbitrært to-delt system beskrives en tilstandsvektor med samme Schmidt koefficienter som $|\psi_+(\mathbb{C}^d)\rangle$ er det en repræsentation af $|\psi_+(\mathbb{C}^d)\rangle$ og for den tilhørende rene tilstand er det en representation af $P_+(\mathbb{C}^d)$.

[Donald et al., 2002,Side 4258-4259]

Eksempel 2.14:
Et eksempel på en ren tilstand, der er entanglet er:

$$|\psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

der er indeholdt i $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$(dette kan ses som en tilstand af to entanglede spin-$\frac{1}{2}$ partikler). At denne tilstand ikke kan dekomponeres til en produkt tilstand kan let ses. Dette er en maksimalt entanglet tilstand jævnfør Definition 2.13.

Hvis de reducerede tæthedsmatricer bestemmes, da fås der, at:

$$\rho_A = \rho_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

hvilket, idet de allerede er givet i deres egenbasis, giver at entanglement medfører at de lokale tilstande er blandede[Nakahara et al., 2007,Side 99]. $\Diamond$

I eksemplet bliver der brugt den rene tilstand

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Denne tilstand kaldes en Bell-tilstandsvektor. For to-kbit tilstande er i alt fire Bell-tilstande defineret som:

$$\begin{aligned}
\left|\psi^{\pm}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right) \\
\left|\phi^{\pm}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle \pm |01\rangle\right)
\end{aligned}$$

Disse tilstande er vigtige inden for entanglement, da disse tilstande, jævnfør Definition 2.13 og Schmidt Dekompositionen, Sætning 2.9, er maksimalt entanglede. Men hvordan kan det så undersøges om en tilstand er entanglet? Dette gøres ved at undersøge om den er separabel eller ikke, hvilket er formålet med det næste kapitel.

KAPITEL 3

SEPARABILITET

Når der tales om entanglement er en af de store problemstillinger, hvordan det kan afgøres, hvorvidt en tilstand er separabel eller entanglet. I dette kapitel vil der blive set på, hvordan entanglement kan bestemmes for systemer sammensat af to Hilbertrum.

Dette kapitel er skrevet på baggrund af [Horodecki et al., 1996] og [Horodecki et al., 2009,Side 882-884]

3.1 Det partielle spor af separable tilstande

Der vil nu blive set på en egenskab for det partielle spor af separable tilstande.

Lad der være givet et Hilbertrum $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$, hvor $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$ og $\{|j\rangle\}_{j=1}^{m}$ udgør baser for henholdsvis $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$. Lad der blive antaget, at en tilstand $\rho_{AB} \in S(\mathscr{H})$ er separabel, og derfor kan skrives på formen

$$\rho_{AB} = \sum_{k=1}^{\infty} p_i \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)}$$

Lad der nu blive bestemt indgangene til $\mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right)$:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right)\right\}_{i,i'} &= \sum_{j=1}^{m} \left(\langle i| \otimes \langle j|\right) \rho_{AB} \left(|i'\rangle \otimes |j\rangle\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle i| \otimes \langle j|\right) p_k \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)} \left(|i'\rangle \otimes |j\rangle\right)
\end{aligned}$$

Idet der arbejdes med det endeligt dimensionale tilfælde kan der skrives, at

$$\begin{aligned}
\left\{\mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right)\right\}_{i,i'} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} p_k \left(\langle i| \otimes \langle j|\right) \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)} \left(|i'\rangle \otimes |j\rangle\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=1}^{m} \langle i| \rho_A^{(k)} |i'\rangle \langle j| \rho_B^{(k)} |j\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \langle i| \rho_A^{(k)} |i'\rangle \sum_{j=1}^{m} \langle j| \rho_B^{(k)} |j\rangle
\end{aligned}$$

Hvis definitionen af sporet bliver benyttet, fås der:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right)\right\}_{i,i'} &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \langle i| \rho_A^{(k)} |i'\rangle \mathrm{Tr}\left(\rho_B^{(k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \langle i| \rho_A^{(k)} |i'\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left\{\rho_A^{(k)}\right\}_{i,i'}
\end{aligned}$$

hvilket giver, at

$$\mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rho_A^{(k)}$$

Tilsvarende kan vises for $\mathrm{Tr}_A\left(\rho_{AB}\right)$.

Idet entanglede tilstande er vigtige i forbindelse med blandt andet kvantekryptering [Brandão og Vianna, 2004], er det vigtigt at kunne bestemme om en tilstand er entanglet. Som følge af definitionen af entanglement, Definition 2.12, kan dette gøres ved at vise, at tilstanden ikke er separabel.

I tilfælde hvor tilstandene for systemet er blandede kan det være besværligt umiddelbart at bestemme hvorvidt en tilstand er separabel, eller entanglet, og det er denne problemstilling som dette kapitel omhandler. Før der kan blive opstillet egentlige separabilitets kriterier skal der defineres en række begreber.

3.2 Indledende definitioner

Lad der være givet to Hilbertrum $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$ samt det sammensatte Hilbertrum $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$. Der vil nu blive defineret mængderne $\mathscr{F}_A$ og $\mathscr{F}_B$ som mængderne af lineære operatorer virkende på henholdsvist $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$. Mængderen $\mathscr{F}_A$ og $\mathscr{F}_B$ udgør Hilbertrum, med skalarproduktet defineret som:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^\dagger A)$$

[Horodecki et al., 1996,Side 2]. Der vil nu blive bevist, at $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(B^\dagger A\right)$, hvor der gælder, at A og B er endeligt dimensionale operatorer virkende på det endeligt dimensionale Hilbertrum $\mathscr{H}$, er et indreprodukt. Der skal vises, at $\langle A, B\rangle$ er symmetrisk, sesqui-lineær og positiv semidefinit. Symmetrien følger direkte af definitionen på sporet.

Sesqui-lineariteten vises ved at se, at der for førstekomponenten gælder.

$$\begin{aligned}
\left\langle \alpha A + \beta B, C\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left(C^\dagger\left(\alpha A + \beta B\right)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\alpha C^\dagger A + \beta C^\dagger B\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\alpha C^\dagger A\right) + \mathrm{Tr}\left(\beta C^\dagger B\right) \\
&= \alpha \mathrm{Tr}\left(C^\dagger A\right) + \beta \mathrm{Tr}\left(C^\dagger B\right) \\
&= \alpha \langle A, C\rangle + \beta \langle B, C\rangle
\end{aligned}$$

og, at der for andenkomponenten gælder:

$$\begin{aligned}
\left\langle A, \beta B + \gamma C\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left(\left(\beta B + \gamma C\right)^\dagger A\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\beta^* B^\dagger A + \gamma^* C^\dagger A\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\beta^* B^\dagger A\right) + \mathrm{Tr}\left(\gamma^* C^\dagger A\right) \\
&= \beta^* \mathrm{Tr}\left(B^\dagger A\right) + \gamma^* \mathrm{Tr}\left(C^\dagger A\right) \\
&= \beta^* \langle A, B\rangle + \gamma^* \langle A, C\rangle
\end{aligned}$$

Dernæst vil der blive vist, at $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(B^\dagger A\right)$ er positivt semi-definit. Lad $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^n$ være en vilkårlig basis, da gælder der

$$\begin{aligned}\langle A,A\rangle &= \mathrm{Tr}\left(A^\dagger A\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i|\,A^\dagger A\,|e_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n \|A|e_i\rangle\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

hvor der gælder lighed kun når A er nul-afbildningen. Altså er $\langle A,B\rangle$ et indre produkt. For at vise, at $\mathscr{F}_A(\mathscr{F}_B)$ er Hilbertrum mangler der blot at blive vist, at alle konvergente Cauchyfølger konvergerer mod et punkt i mængden. Lad der blive antaget, at der eksistere en Cauchyfølge $\{T_n\}_n$ indeholdt i mængden af lineære operatorer. Lad der endvidere blive antaget, at denne konvergerer med en operator T. Det skal nu vises, at T er lineær. Der gælder at:

$$\begin{aligned}T\left(\alpha|\phi\rangle+\beta|\psi\rangle\right) &= T\left(\alpha|\phi\rangle+\beta|\psi\rangle\right)+T_n\left(\alpha|\phi\rangle+\beta|\psi\rangle\right)-T_n\left(\alpha|\phi\rangle+\beta|\psi\rangle\right)\\ &= (T-T_n)\left(\alpha|\phi\rangle+\beta|\psi\rangle\right)+\alpha T_n|\phi\rangle+\beta T_n|\psi\rangle\\ &\quad +\alpha T|\phi\rangle+\beta T|\psi\rangle-\alpha T|\phi\rangle-\beta T|\psi\rangle\\ &= (T-T_n)\left(\alpha|\phi\rangle+\beta|\psi\rangle\right)+\alpha(T_n-T)|\phi\rangle\\ &\quad +\beta(T_n-T)|\psi\rangle+\alpha T|\phi\rangle+\beta T|\psi\rangle\end{aligned}$$

Da $\{T_n\}_n$ konvergerer imod T, gælder der, at T er lineær, hvilket giver, at $\mathscr{F}_A(\mathscr{F}_B)$ er Hilbertrum.

Mængden af alle lineære afbildninger, fra $\mathscr{F}_A$ ind i $\mathscr{F}_B$, vil blive skrevet som $\mathscr{L}(\mathscr{F}_A,\mathscr{F}_B)$. En afbildning $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathscr{F}_A,\mathscr{F}_B)$ siges at være positiv, hvis der gælder, at Λ afbilder positive operatorer over i en positiv operator. Der gælder med andre ord, at for $A \geq 0$, hvor $A \in \mathscr{F}_A$, da er $\Lambda(A) \geq 0$. Endvidere siges en afbildning at være fuldstændigt positiv(ofte skrevet CP i litteraturen), hvis der gælder, at afbildningen:

$$\Lambda_n = \Lambda \otimes \mathbb{1}_n : \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{M}_n \longrightarrow \mathscr{F}_b \otimes \mathscr{M}_n$$

er positiv for alle n, hvor $\mathbb{1}_n$ er $n\times n$ enhedsmatricen og $\mathscr{M}_n$ er mængden af alle komplekse $n\times n$ matricer.[1] Det er her vigtigt at bemærke, at det ikke er alle positive afbildninger der er CP.

3.3 Positivitet og separabilitet

Der vil nu blive set på en sammenhæng mellem positivitet og separabilitet. Først bevises det følgende Lemma:

Lemma 3.1
Lad der være givet en ikke tom, lukket og konveks delmængde K af Hilbertrummet $\mathscr{H}$ og et punkt $x \in \mathscr{H}$, da eksisterer der et unikt punkt $y \in K$, således at y er tættere på x end alle andre punkter i K.

[Lax, 2002,Side 54]

[1] En speciel klasse af CP afbildninger er dem, hvor sporet er bevaret under afbildning, disse siges at være TPCP hvilket svarer til ”Trace Preserving Completely Positive”.

Bevis:
Lad der være defineret, at

$$\inf_{z\in K} \|x - z\| = d \tag{3.1}$$

og lad der endvidere gælde, at $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en minimerende følge, således at:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d \tag{3.2}$$

hvor $d_n = \|x - y_n\|$. Der vil nu blive benyttet den såkaldte parallelogram identitet, [Lax, 2002,Side 53], der siger, at:

$$\|k+h\|^2 + \|k-h\|^2 = 2\|k\|^2 + 2\|h\|^2 \tag{3.3}$$

hvor h sættes lig $\frac{x-y_n}{2}$ og k sættes lig $\frac{x-y_m}{2}$, hvilket giver, at

$$\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|y_n - y_m\|^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right) \tag{3.4}$$

Da der gælder, at K er en konveks mængde, må der gælde, at $\frac{y_n+y_m}{2}$ er indeholdt i K. Som følge af Ligning (3.1) må der gælde, at $\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geq d$, hvilket kombineret med Ligning (3.2) og (3.4) giver, at følgen $\{y_n\}$ er Cauchy. Idet $\mathscr{H}$ er et Hilbertrum og K er lukket, gælder der, at $y = \lim y_n$ er indeholdt i K, og idet $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d$, er y et element med den mindste afstand til x. At y er unik vises ved antage, at y' også har minimum afstand til x, og dernæst indsætte $x - y$ og $x - y'$ i Ligning (3.3) på henholdsvis h's og k's plads:

$$\|x - y + x - y'\|^2 + \|x - y - x - y'\|^2 = 2\left(\|x - y\|^2 + \|x - y-\|^2\right)$$

Da $\|x - y\| = \|x - y'\| = d$, hvor d er den minimale afstand kan der i stedet skrives:

$$\begin{aligned} 4d^2 &= \|2x - (y + y')\|^2 + \|y - y'\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{1}{2}(y + y')\right\|^2 + \|y - y'\|^2 \end{aligned}$$

Idet $\frac{y+y'}{2}$ er en konveks kombination, vil der gælde, at $\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\| \geq d$, dermed fås:

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 4\left\|x - \frac{1}{2}(y + y')\right\|^2 + \|y - y'\|^2 \\ &\geq 4d^2 + \|y - y'\|^2 \end{aligned}$$

hvilket giver, at

$$0 \geq \|y - y'\|^2$$

Da $\|y - y'\|^2$ også er støre end eller lig 0, betyder det, at $\|y - y'\|^2 = 0$, og der med er $y = y'$ og entydigheden er også bevist. ■

Lemma 3.1 sammen med Hahn-Banach Sætning giver følgende korollar:

Korollar 3.2
Lad W_1 og W_2 være to disjunkte, lukkede og konvekse delmængder af et reelt Banachrum, hvor der gælder, at den ene mængde er kompakt. Der eksister da et kontinuert funktional f og et reelt tal α, således at der for alle par w_1 og w_2, hvor $w_1 \in W_1$ og $w_2 \in W_2$, gælder, at:

$$f(w_1) < \alpha \leq f(w_2)$$

[Horodecki et al., 1996,Side 3]

Dette korallar bruges i beviset af følgende lemma:

Lemma 3.3
For enhver entanglet tilstand $\tilde{\rho} \in \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$ eksisterer der en Hermitisk operator $\tilde{A}$, således at:

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{\rho}) < 0$$

samt at der for enhver separabel tilstand σ gælder, at:

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}\sigma) \geq 0$$

Bevis:
Det bemærkes først, at der for mængden, bestående af kun et element, gælder, at denne mængde er kompakt og lukket. Der skal nu vises, at mængden bestående af de separable tilstande er lukket og konveks. At mængden af separable tilstande er lukket følger direkte af definitionen af de separable tilstande, Definition 2.11. Konveksiteten vises ved at vise, at hvis der haves to separable tilstande ρ og σ, da er $\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$, hvor $0 < \alpha<1$, også en separabel tilstand.

Først skal der vises, at der er tale om en tilstand. Hemiticiteten følger direkte af, at α er reel og, at ρ og σ er Hermitiske. At $\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ er positivt semi-definit er ligeledes indlysende, og der mangler blot at blive vist, at sporet er lig med 1. Der gælder, at:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma\right) &= \mathrm{Tr}\left(\alpha\rho\right) + \mathrm{Tr}\left((1-\alpha)\sigma\right) = \alpha\mathrm{Tr}\left(\rho\right) + (1-\alpha)\mathrm{Tr}\left(\sigma\right)\\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1\end{aligned}$$

som ønsket. Der mangler nu at blive vist, at $\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ også er separabel. Idet ρ og σ er separable kan der skrives, at:

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}$$
$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sigma_A^{(j)} \otimes \sigma_B^{(j)}$$

hvor $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, og $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1$. Lad der nu blive set på $\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$. Det er tydeligt, at

$$\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha) q_j \sigma_A^{(j)} \otimes \sigma_B^{(j)}$$

hvilket kan omskrives til:

$$\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \eta_A^{(k)} \otimes \eta_B^{(k)}$$

hvor $\eta_A^k(\eta_B^{(k)})$ er en tætheds matrix virkende på $\mathscr{H}_A(\mathscr{H}_B)$, og det skal blot vises, at $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = 1$. Der gælder, at:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} p_i + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} q_j = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

som ønsket.

Der bliver endvidere benyttet, at rummet $\mathscr{A}$, bestående af Hermitiske operatorer i $\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$, er et reelt Hilbertrum. For at vise dette skal der først vises, at $\mathscr{A}$ er et reelt underrum af $\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$. Lad der være givet elementerne $T, T' \in \mathscr{A}$. Der vil da gælde:

$$\left(\alpha T + \beta T'\right)^\dagger = \alpha^* T^\dagger + \beta^* \left(T'\right)^\dagger = \alpha^* T + \beta^* T'$$

hvilket vil sige, at $\left(\alpha T + \beta T'\right)^\dagger$ kun er indeholdt i $\mathscr{A}$, når $\alpha = \alpha^*$, og $\beta^* = \beta$, for alle α og β, i.e. når $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hvilket giver, at der er tale om et reelt underrum.

Der mangler nu blot at blive vist, at $\mathscr{A}$ er et Hilbertrum. Dette gøres ved at vise, at hvis der haves en Cauchyfølge $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{A}$, da vides det, at der findes en operator $T \in \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$, da dette er et Hilbertrum, således at:

$$\| T - T_n \| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Der mangler nu blot at blive vist, at T er Hermitisk. Lad $\psi, \phi \in \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$, da gælder der, at

$$\begin{aligned}
\langle T\psi, \phi \rangle &= \langle T_n\psi | \phi \rangle + \langle (T - T_n)\, \psi | \phi \rangle \\
&= \langle \psi | T_n\phi \rangle + \langle (T - T_n)\, \psi | \phi \rangle + \langle \psi | T\phi \rangle - \langle \psi | T\phi \rangle \\
&= \langle \psi | \,(T - T_n)\, \phi \rangle + \langle (T - T_n)\, \psi | \phi \rangle + \langle \psi | T\phi \rangle
\end{aligned}$$

Lades $n \to \infty$ fås der, at

$$\langle T\psi | \phi \rangle = \langle \psi | T\phi \rangle$$

som ønsket.

Som følge af det ovenstående, og Korollar 3.2, kan det siges, at der eksisterer et reelt funktional g på det reelle Hilbertrum $\mathscr{A}$, således at:

$$g(\tilde{\rho}) < \beta \leq g(\sigma)$$

for alle separable tilstande σ, idet der som mængden W_1 vælges den lukkede og kompakte delmængde bestående af $\tilde{\rho}$ og som W_2 rummet bestående af separable tilstande. Som følge af Riez-Freschet's repræsentations sætning vides det, at det er muligt at repræsentere et kontinuert funktional på et Hilbertrum ved hjælp af en vektor fra Hilbertrummet. Idet der gælder, at $\mathscr{A}$ er et Hilbertrum, da kan funktionalet g skrives på formen:

$$g(\tilde{\rho}) = \mathrm{Tr}(A\tilde{\rho})$$

hvor $A = A^\dagger$ er en operator i $\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$. Bemærk, at der, som følge af tæthedsmatricernes egenskaber, gælder, at:

$$\mathrm{Tr}(\beta \mathbb{1} \tilde{\rho}) = \mathrm{Tr}(\beta \mathbb{1} \sigma) = \beta$$

Lad nu $\tilde{A}$ blive valgt som:

$$\tilde{A} = A - \beta \mathbb{1}$$

da må der gælde, at:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{\rho}) &= \mathrm{Tr}((A - \beta\mathbb{1})\tilde{\rho}) = \mathrm{Tr}(A\tilde{\rho}) - \beta \\ &= g(\tilde{\rho}) - \beta \end{aligned}$$

Idet der gælder, at $g(\tilde{\rho}) < \beta$, må der gælde, at:

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{\rho}) < 0$$

som ønsket. Den anden ulighed, $\mathrm{Tr}(A\sigma) \geq 0$, kan vises analogt, og derved er sætningen vist. ■

Med Lemma 3.3 er det nu muligt at bevise den følgende sætning:

Sætning 3.4
En tilstand $\rho \in \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$ er separabel, hvis og kun hvis der gælder, at

$$\mathrm{Tr}(A\rho) \geq 0 \tag{3.5}$$

for enhver Hermitisk operator A der overholder, at $\mathrm{Tr}(A(P \otimes Q)) \geq 0$, hvor P og Q er projektioner virkende på henholdsvist $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$.

Bevis:
Som følge af definitionen af tæthedsmatricer og separabiliteten af tilstande gælder der, at uligheden i (3.5) er overholdt for separable tilstande. Dette gælder, idet der gælder, at enhver tæthedsmatrix i $\mathscr{F}_A$ kan skrives i den basis, der er givet som mængden af operatorer $\{P_{ij}\}_{ij}$, hvor $i, j = 1, 2, \ldots, \dim(\mathscr{H}_A)$, der er defineret ved:

$$P_{ij} |e_l\rangle = \delta_{jl} |e_i\rangle$$

for en vilkårlig orthonormal basis $\{|e_l\rangle\}_{l=1}^{\dim(\mathscr{H}_A)}$ i $\mathscr{H}_A$[Horodecki et al., 1996,Side 4]. Tilsvarende kan gøre for $\mathscr{F}_B$. Hvis dette kombineres med uligheden $\mathrm{Tr}(A(P \otimes Q)) \geq 0$, fås uligheden i (3.5).

Der mangler nu blot at blive vist, at (3.5) medfører, at tilstanden er separabel. Dette gøres ved hjælp af et modstrids bevis. Antag, at (3.5) gælder men, at ρ er entanglet. Det vil medføre, at der, som følge af Lemma 3.3, findes en Hermitisk operator C for, hvilken der gælder, at $\mathrm{Tr}(C\rho) < 0$, på trods af, at $\mathrm{Tr}(C\sigma)$ for alle separable tilstande σ eller tilsvarende for alle projektioner $P \otimes Q$. Dette giver tilsammen en modstrid, og sætningen er bevist. ■

Den ovenstående sætning kan omformuleres til at omhandle positive afbildninger, hvilket giver sætningen:

Sætning 3.5
Lad ρ være en tilstand virkende på $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$. Tilstanden ρ er da separabel, hvis og kun hvis der, for enhver positiv afbildning $\Lambda : \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_A$, gælder, at operatoren $\mathbb{1} \otimes \Lambda(\rho)$ er positiv, hvor $\mathbb{1} \otimes \Lambda : \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_A$.

Bevis:
Lad der være givet en arbitrær orthonormal basis $\{E_i\}_{i=1}^{\dim(\mathscr{F}_A)}$ til $\mathscr{F}_A$. Der vil nu, som i[de Pillis, 1967,Proposition 1.1], blive defineret en isomorfi:

$$Y : \mathscr{L}(\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B) \to \mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B$$

hvor

$$Y(\tilde{\Lambda}) := \sum_i E_i^\dagger \otimes \tilde{\Lambda}(E_i) \tag{3.6}$$

med $\tilde{\Lambda} \in \mathscr{L}(\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B)$. Der gælder, at en afbildning $\tilde{\Lambda} \in \mathscr{L}(\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B)$ er positiv, hvis og kun hvis $Y(\tilde{\Lambda})$ er Hermitisk og overholder:

$$\operatorname{Tr}(Y(\tilde{\Lambda})(P \otimes Q)) \geq 0 \tag{3.7}$$

for alle projektions operatorer $P \in \mathscr{F}_A$ og $Q \in \mathscr{F}_B$(se [Jamiolkowski, 1972,Theorem 1]).

Der vil nu som, basis til $\mathscr{F}_A$, blive valgt mængden af operatorer $\{P_{ij}\}_{ij}$, hvor $i, j = 1, 2, \ldots, \dim(\mathscr{H}_A)$, der er defineret ved:

$$P_{ij} |e_l\rangle = \delta_{jl} |e_i\rangle$$

for en vilkårlig orthonormal basis $\{|e_l\rangle\}_{l=1}^{\dim(\mathscr{H}_A)}$ i $\mathscr{H}_A$. Dermed er (3.5) ensbetydende med, at der gælder følgende:

$$\operatorname{Tr}\left(\left(\left(\mathbb{1} \otimes \tilde{\Lambda}\right) \sum_{ij} P_{ji} \otimes P_{ij}\right) \rho\right) \geq 0 \tag{3.8}$$

som følge af ulighederne (3.6) og (3.7). Det er ligeledes ensbetydende med, at der gælder:

$$\operatorname{Tr}\left(\left(\left(\mathbb{1} \otimes \tilde{\Lambda} T\right) \sum_{ij} P_{ji} \otimes T P_{ij}\right) \rho\right) \geq 0$$

hvor $T : \mathscr{F}_A \to \mathscr{F}_A$ er givet ved $TP_{ij} = P_{ji}$, hvilket betyder, at T er transponeringen af en operator skrevet i en $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^n$ basis. Det ses tydeligt, at T er positiv, idet der grundet definitionen gælder, at hvis P_{ij} er positiv, da må P_{ji} også være positiv, idet:

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle v | P_{ij} | v \rangle &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \left\langle e_k \middle| P_{ij} \sum_{l=1}^n \alpha_l \middle| e_l \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \alpha_j \langle e_k || e_i \rangle \\
&= \alpha_i^* \alpha_j \langle e_i || e_i \rangle \\
&= \alpha_i^* \alpha_j \geq 0
\end{aligned}$$

hvilket medfører, at $\alpha_i \alpha_j^* \geq 0$.

Transponeringen T er desuden idempotent. Det vil sige, at enhver positiv afbildning $\tilde{\Lambda} : \mathscr{F}_A \to \mathscr{F}_B$ kan skrives på formen $\Lambda' T$, hvor Λ' er en positiv afbildning. Lad der nu blive defineret

$$P_0 = \frac{1}{d} \sum_{ij} P_{ji} \otimes P_{ij}$$

hvor $d = \dim(\mathscr{H}_A)$ og hvor $i, j = 1, 2, \ldots, d$. Grundet definitionen af skalarproduktet kan der, ved hjælp af definitionen af P_0, samt uligheden i (3.8), skrives følgende:

$$\left\langle \rho, \left(\left(\mathbb{1} \otimes \tilde{\Lambda} \right) P_0 \right)^\dagger \right\rangle \geq 0$$

Der gælder dog, at positive afbildninger bevarer Hermiticitet, hvilket medfører, at tensorproduktet $\mathbb{1} \otimes \tilde{\Lambda}$ ligeledes bevarer Hermiticiteten[Jamiolkowski, 1972]. Da der gælder, atter som følge af definitionen af P_{ij}, at P_{ij} er Hermitisk, må der gælde, at:

$$\left\langle \rho, \left(\mathbb{1} \otimes \tilde{\Lambda} \right) P_0 \right\rangle \geq 0$$

Dette er, ved at se på den adjungerede, det samme som, at

$$\left\langle \left(\mathbb{1} \otimes \Lambda \right) \rho, P_0 \right\rangle \equiv \mathrm{Tr}\left(P_0 \left(\mathbb{1} \otimes \Lambda \right) \rho \right) \geq 0 \tag{3.9}$$

for enhver positiv afbildning $\Lambda : \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_A$.

Hvis der gælder, at en tilstand er separabel, da må der gælde, at operatoren $(\mathbb{1} \otimes \Lambda)\rho$ er positiv for enhver positiv afbildning Λ, hvilket viser den ene retning af beviset. Omvendt da gælder der, at hvis $\mathbb{1} \otimes \Lambda\rho$ er positiv for ethvert Λ, så er betingelsen i (3.9) opfyldt, idet P_0 er en projektions operator, hvilket giver, at ρ er separabel, og sætningen er bevist. ■

Med denne sætning bliver det muligt at karakterisere mængderne af separable tilstande i 2×2 og 2×3 systemer.

3.4 PPT og separabilitet

I det forrige blev der udledt kriterier til bestemmelse af, hvorvidt tilstande er separable ved hjælp af positive afbildninger. Disse kriterier er dog ikke praktisk anvendelige, og det er derfor nødvendigt at bestemme nogle mere simple og brugbare kriterier. I tilfældet hvor der er tale om $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ eller $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3$ systemer kan der konstrueres et kriterium ved hjælp af det der kaldes for "Positive Partial Transpose" også skrevet PPT. PT (Partial Transpose) defineres på følgende måde:

Definition 3.6

Lad der være givet en tilstand $\rho \in \mathscr{F}_{\mathscr{A}} \otimes \mathscr{F}_B$, da defineres de partielt transponerede som:

$$\rho^{T_A} = T \otimes \mathbb{1}\rho$$
$$\rho^{T_B} = \mathbb{1} \otimes T\rho$$

hvor T er transponerings operatoren.

Dette leder nu til den følgende sætning

Sætning 3.7
En tilstand ρ virkende på $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'}$, hvor $d = 2$ og $d' = 2, 3$, er separabel, hvis og kun hvis der gælder, at dens PT, er en positiv operator, altså at den er PPT.

Bevis:
Beviset gennemføres for ρ^{T_B}, idet beviset for ρ^{T_A} er tilsvarende. Det ses, at hvis der gælder, at ρ er separable, da må ρ^{T_B} være positiv, idet der gælder, at T er en positiv afbildning (her benyttes Sætning 3.5). For at vise, at positiviteten af ρ^{T_B} medfører separabilitet, bliver der benyttet, at alle positive afbildninger $\Lambda : \mathscr{F}_A \to \mathscr{F}_B$, for hvilke der gælder, at $\mathscr{H}_A = \mathbb{C}^2$, og $\mathscr{H}_B = \mathbb{C}^d$, hvor $d = 2$ eller $d = 3$, kan skrives på formen:

$$\Lambda = \Lambda_1^{CP} + \Lambda_2^{CP} T$$

hvor Λ_i^{CP} er fuldstændigt positive[Horodecki et al., 1996,Side 5]. Som følge af, at Λ_i^{CP} er CP må der gælde, at:

$$\Lambda_i = \mathbb{1} \otimes \Lambda_i^{CP}$$

er positiv. Hvis der gælder, at den partielt transponerede, ρ^{T_B}, er positiv, da er $\Lambda_1 \rho + \Lambda_2 \rho^{T_B}$ også positiv, hvilket i følge Sætning 3.5 giver, at ρ er separabel som ønsket. ■

Denne sætning giver derfor, at det i disse specialtilfælde er muligt at bestemme, hvorvidt en tilstand er separabel, ved hjælp af tilstandens partielt transponerede. Det er dog ikke mulig at bruge dette kriterium generelt, idet det kan vises, at der for rum af højere dimension, er tale om en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for separabilitet[Horodecki et al., 1996].

3.5 PPT anvendt

I dette afsnit vil der blive set på, hvorledes PPT kan anvendes til beskrivelse af separabiliteten af tilstande. Lad der til tensorprodukt rummet $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ være valgt som basis $\{|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle\}_{i,j}$, hvor $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^n \left(\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^m\right)$ er basis for $\mathscr{H}_A(\mathscr{H}_B)$. Da er den partielt transponerede til tætheds-matricen ρ, i forhold til $\mathscr{H}_B$, givet som den matrix der overholder, at:

$$\langle \psi_i | \otimes \langle \phi_k | \rho^{T_B} | \psi_j \rangle \otimes | \phi_l \rangle = \langle \psi_i | \otimes \langle \phi_l | \rho | \psi_j \rangle \otimes | \phi_k \rangle$$

Den ovenstående metode til at opskrive elementerne af matricen ρ^{T_B} medfører, at hvis ρ skrives på den følgende blok form:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,n-1} & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,n-1} & \rho_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1,1} & \rho_{n-1,2} & \cdots & \rho_{n-1,n-1} & \rho_{n-1,n} \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \cdots & \rho_{n,n-1} & \rho_{n,n} \end{bmatrix}$$

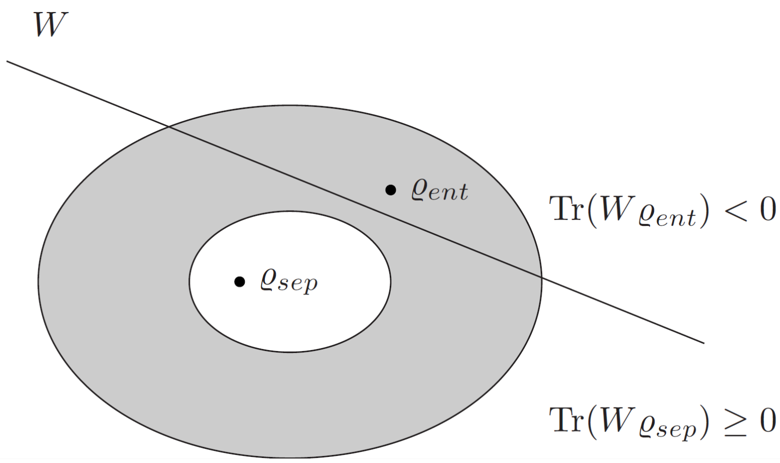
da kan ρ^{T_B} skrives på den følgende blok form:

$$\rho^{T_B} = \begin{bmatrix} \rho_{1,1}^T & \rho_{1,2}^T & \cdots & \rho_{1,n-1}^T & \rho_{1,n}^T \\ \rho_{2,1}^T & \rho_{2,2}^T & \cdots & \rho_{2,n-1}^T & \rho_{2,n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1,1}^T & \rho_{n-1,2}^T & \cdots & \rho_{n-1,n-1}^T & \rho_{n-1,n}^T \\ \rho_{n,1}^T & \rho_{n,2}^T & \cdots & \rho_{n,n-1}^T & \rho_{n,n}^T \end{bmatrix}$$

Denne opskrivning er nyttig i tilfælde, hvor der haves en matrix, hvortil den partielt transponerede, skal bestemmes.

3.6 Entanglementvidner

I dette afsnit vil der blive set på det der kaldes entanglement vidner(Entanglement Witnesses). Entanglementvidner er operatorer der kan "bestemme", hvorvidt en given tæthedsoperator er separable eller entanglet. Entanglementvidner kan introduceres ved hjælp af Lemma 3.3. Et entanglementvidne defineres som en Hermitisk operator W der opfylder at $\mathrm{Tr}(W\rho) \geq 0$ for alle separable tilstande ρ.



Figur 3.1: *Illustration af hvordan entanglementvidner adskiller entanglede tilstande og separable tilstande. Illustration taget fra [Horodecki et al., 2009,FIG. 2, Side 884]*

En geometrisk måde at forstå dette på er, at vidnet W beskriver en hyperplan der, som set i Figur 3.1, adskiller separable tilstande fra entanglede tilstande. Det siges at en tilstand ρ's entanglement opfanges af W, hvis der gælder, at $\mathrm{Tr}(W\rho) < 0$.

Det ses, at det ikke er alle vidner der opfanger alle entanglede tilstande, og det giver derfor mening at sige, at et vidne er bedre en et andet. Et vidne W_1 siges, at være bedre end W_2, hvis der gælder, at alle de entanglede tilstande der opdages af W_2 også opdages af W_1. Et vidne W_{op} siges, at være optimal, hvis der ikke findes et vidne der er bedre en W_{op}.

3.7 Eksempler

Der vil nu blive set på eksempler på tilstande i systemet bestående af to spin-$\frac{1}{2}$ partikler, altså for Hilbertrummet $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, hvor separabiliteten af disse vil blive undersøgt. Der vil blive defineret de følgende fire basis vektorer,

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &= |e'_1\rangle \otimes |e'_1\rangle \\
|e_2\rangle &= |e'_1\rangle \otimes |e'_2\rangle \\
|e_3\rangle &= |e'_2\rangle \otimes |e'_1\rangle \\
|e_4\rangle &= |e'_2\rangle \otimes |e'_2\rangle
\end{aligned} \tag{3.10}$$

hvor der gælder, at $|e'_1\rangle$ er basisvektoren, i spin-rummet $\mathbb{C}^2$, svarende til spin-op og $|e'_2\rangle$ er basisvektoren svarende til spin-ned.

Der vil her blive set på to eksempler, hvor der undersøges, hvorvidt disse tilstande er separable eller entanglede.

Eksempel 3.8:
Lad der nu blive defineret den følgende tilstand:

$$\rho = \frac{1}{2} \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \left\langle\uparrow\uparrow\right| + \frac{1}{2} \left|\psi^+\right\rangle \left\langle\psi^+\right| \tag{3.11}$$

hvor $\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle)$, der er en linear kombination af rene tilstandsvektorer. At der er tale om en tilstand vil blive vist senere. Tilstanden i Ligning (3.11) ønskes nu skrevet i basen givet i (3.10). Der gælder, at

$$\left|\psi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_2\rangle + |e_3\rangle)$$

hvilket medfører, at

$$\left|\psi^+\right\rangle \left\langle\psi^+\right| = \frac{1}{2} (|e_2\rangle + |e_3\rangle) (\langle e_2| + \langle e_3|)$$

Dette givet, at tilstanden ρ kan skrives som:

$$\rho = \frac{1}{2} |e_1\rangle \langle e_1| + \frac{1}{4} (|e_2\rangle \langle e_2| + |e_3\rangle \langle e_2| + |e_2\rangle \langle e_3| + |e_3\rangle \langle e_3|)$$

hvilket svarer til

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der vil nu blive vist, at der er tale om en tilstand. Sporet er tydeligvist lig 1, og idet der er tale om en symmetrisk reel matrix, da er ρ Hermitisk. At der er tale om en positiv semi-definit matrix, ses idet der haves egenværdierne $\frac{1}{2}$ og 0 begge med multiplicitet 2.

For at bestemme om denne tilstand er separabel skal den partielt transponerede bestemmes. Den partielt transponerede, ρ^{T_B}, bliver da:

$$\rho^{T_B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For at bestemme positiviteten af denne afbildning skal egenværdierne bestemmes. Ved udregning bestemmes det, at der haves egenværdierne $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{8}}$, hvor det ses, at egenværdien $\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{8}}$ er mindre end 0, hvilket medfører, at denne tilstand ikke er separabel. $\diamondsuit$

Her er tilstanden en ren entanglet tilstand. Der vil nu blive set på et eksempel, hvor tilstanden er separabel for givne x værdier.

Eksempel 3.9:
Definer nu den følgende tilstand

$$\rho = x\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right| + (1-x)\frac{1}{4}\mathbb{1}$$

hvor der gælder, at $0 \leq x \leq 1$. Der gælder desuden, at

$$\left|\psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle - |e_3\rangle\right)$$

hvilket medfører, at tilstanden kan skrives som:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{x}{2}\left(|e_2\rangle\langle e_2| - |e_3\rangle\langle e_2| - |e_2\rangle\langle e_3| + |e_3\rangle\langle e_3|\right) + \frac{1-x}{4}\mathbb{1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{2}+\frac{1-x}{4} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2}+\frac{1-x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Der gælder, at den partielt transponerede er på formen:

$$\rho^{T_2} = \begin{bmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{x}{2}+\frac{1-x}{4} & 0 & 0 \\ 0 & & \frac{x}{2}+\frac{1-x}{4} & 0 \\ -\frac{x}{2} & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{bmatrix}$$

Der skal nu bestemmes egenværdier. For denne gælder der, at egenværdierne bliver $\frac{1+x}{4}$ med multiplicitet 3, og $\frac{1-3x}{4}$. Det ses, at den fjerde egenværdi er ikke-negativ, når der gælder, at $x \leq \frac{1}{3}$, hvilket vil sige, at for $x > \frac{1}{3}$ er tilstanden entanglet. $\diamondsuit$

Det er derved muligt i visse tilfælde at bestemme, hvorvidt en tilstand er separabel eller entanglet. Det næste spørgsmål som der kan spørges er da: Hvor entanglet er en entanglet tilstand? Det er dette spørgsmål som vil blive undersøgt i det næste kapitel.

KAPITEL 4

GRADEN AF ENTANGLEMENT

I det forrige kapitel er der blevet set på, hvordan det afgøres, om en tilstand er entanglet eller ej. I dette kapitel vil der blive set på, hvor entanglet en sådan tilstand i så fald er. Tag for eksempel følgende to-kbit tilstand:

$$|\psi\rangle = \sqrt{1-\delta}\,|00\rangle + \sqrt{\delta}\,|11\rangle$$

hvor $\delta \in [0,1]$. Det er tydeligt, at denne tilstand ikke er entanglet, hvis δ enten er 0 eller 1. Hvis δ der i mod er $\frac{1}{2}$ er det også tydeligt, at tilstanden er entanglet. Jævnfør Definition 2.13 er tilstanden, hvor $\delta = \frac{1}{2}$, den maksimalt entanglede tilstand. Men hvad hvis $\delta \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[$, hvor meget er tilstanden så entanglet? Det er det som dette kapitel vil handle om. Kapitlet er skrevet på baggrund af [Nakahara et al., 2007,Side 103-108], [Horodecki et al., 2009,Side 908-910], [Plenio og Virmani, 2007,Side 1-4 & 6-8] og [Donald et al., 2002,Side 4259, 4266-4267, 4269 & 4271] med mindre andet er angivet.

Inden der bliver arbejdet med graden af entanglement bliver der først introduceret begrebet ”lokale operationer og klassisk kommunikation”. Der vil blive indført forskellige mål for graden af entanglement, herunder entanglement destillering og entanglement omkostning. Der vil desuden blive set på generelle betingelser for mål for entanglement. Til sidst vil der blive set på sammenhængen mellem entanglement destillering, entanglement omkostning og de generelle betingelser for entanglementmål.

4.1 Lokale operationer og klassisk kommunikation

Når graden af entanglement ønskes bestemt bruges der lokale (kvante) operationer og klassisk kommunikation (LOCC(LQCC), fra det engelske local (quantum) operations and classical communkcation). Kort fortalt handler det om, at der haves et to-kbit system, hvor den ene kbit gives til Alice, og den anden kbit gives til Bob. Alice måler på sin kbit og får resultatet 0, men da der ikke vides, hvilken Bell-tilstand systemet er i, vides det ikke, hvilken tilstand Bobs kbit er i. Alice og Bob befinder sig ikke i samme position og skal derfor kommunikerer via klassiske kanaler, så som e-mail, telefon ect. Alice ringer til Bob og fortæller at hun har målt 0. Bob foretager sin måling og måler sin kbit til at være i tilstanden 0 og ved derfor, at systemet er i Bell-tilstanden

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Mere matematisk kan det blive set som en situation, hvor et system er bredt ud på flere delsystemer, hvor der kan foretages en separat måling det enkelte delsystem. For et system på Hilbertrummet $\mathscr{H} = \bigotimes_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n$, er LOCC afbildninger operatorer, der består af kombinationer af lokale CPTP afbildninger på de individuelle delsystemer og klassisk kommunikation[Nakahara et al., 2007,side 104]. En sådan afbildning kan skrives på følgende måde:

$$\Lambda : S(\mathscr{H}) \to S(\mathscr{H})$$

hvilket også kan skrives som $\Lambda\left(\rho\right) = \phi$, hvor $\phi \in S(\mathscr{H})$. I denne rapport vil Nielsens Sætning blive brugt som definition på en LOCC afbildning. Inden denne sætning kan opskrives skal begrebet majorisering defineres:

Definition 4.1
Antag, at $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, og $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ er reelle vektorer, hvor der gælder, at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

og lad $d = \min(n, m)$, så er $\boldsymbol{x}$ majoriseret af $\boldsymbol{y}$, skrevet som $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$, hvis der for et hvert $1 \le k \le d$ gælder, at

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^{\downarrow} \le \sum_{j=1}^{k} y_j^{\downarrow}$$

hvor der gælder lighed ved $k = d$, når $m = n$, og hvor $\downarrow$ indikerer at elementerne i den givne vektor er ordnet i faldende orden, i.e. x_1 er største element, og x_n er mindste element i $\boldsymbol{x}$.

Der gælder desuden, at $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ og $\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x}$, hvis og kun hvis $\boldsymbol{x}^{\downarrow} = \boldsymbol{y}^{\downarrow}$.

[Horodecki et al., 2009,Side 881], [Donald et al., 2002,s. 4257]

Dermed kan Nielsens Sætning skrives op:

Sætning 4.2 (Nielsens Sætning)
Lad $\mathscr{H}_A$ og $\mathscr{H}_B$ være Hilbert rum henholdsvis med dimension N og M. Lad

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{m=1}^{d} \sqrt{p_m} \left|\chi_m \kappa_m\right\rangle \quad , \quad \left|\phi\right\rangle = \sum_{m=1}^{d} \sqrt{q_m} \left|\chi_m \kappa_m\right\rangle$$

hvor $d = \min(M, N)$, være Schmidt dekompositioner af de normaliserede vektorer $\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle \in \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ med $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_d$ og $q_1 \ge q_2 \ge \cdots \ge q_d$. Så kan $\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|$ blive konverteret over i $\left|\phi\right\rangle\left\langle\phi\right|$ ved hjælp af LOCC operationer hvis og kun hvis $\left\{q_i\right\} \prec \left\{p_i\right\}$.

[Donald et al., 2002,Side 4257], [Nielsen, 1999,Side 436]

Der er mange forskellige former for LOCC afbildninger, men eksemplet i begyndelsen af kapitlet, med Alice og Bob, er en klassisk måde at se på LOCC afbildninger. At LOCC afbildninger er nyttige i forbindelse med entanglede systemer skyldes, at de ikke gør entanglede systemer mere entanglede[Plenio og Virmani, 2007,Side 4]. Dette skyldes, at LOCC afbildninger kun transformerer entaglede tilstande over i sebarable tilstande, men ikke separable tilstande over i entanglede, hvilket giver følgende.

Antag, at tilstanden ρ kan transformeres over i tilstanden σ ved hjælp af en LOCC afbildning. Så gælder der, at alt der kan gøres ved at benytte σ og LOCC afbildninger, kan også opnås med ρ og LOCC afbildninger. Dette gør, at ρ er lige så entanglet som tilstanden σ. Af dette følger det direkte, at lokale unitære operationer ikke har nogen effekt på entanglement, idet at entanglementen ikke stiger under LOCC afbildninger, så to tilstande, der er relaterede via unitære operationer, er lige entanglede.[Plenio og Virmani, 2007,Side 4]

4.2 Mål for entanglement

Generelt findes der to fremgangsmåder til at bestemme mål for entanglement. Enten kan det gøres aksiomatisk, med en abstrakt tilgang, eller så kan det blive defineret i forhold til, hvor brugbare tilstandene er i kvanteinformations opgaver. Der vil her blive startet ud med den sidste tilgang, inden der bliver gået over til en aksiomatisk tilgang. Men først vil der blive defineret sporklassenormen, der er et vigtigt redskab i forbindelse med mål for entanglement:

Definition 4.3
Lad A være en begrænset operator på Hilbertrummet $\mathscr{H}$, og lad $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{n}$, hvor $n = \dim(\mathscr{H})$, være en orthonormal basis for $\mathscr{H}$, så er sporklassenormen(trace class norm) defineret som:

$$\|A\|_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{Tr}(|A|) \equiv \sum_k \left\langle \left(A^* A\right)^{\frac{1}{2}} e_k, e_k \right\rangle$$

[Reed og Simon, 1980,Side 209]

4.2.1 Entanglement omkostning og entanglement destillering

Et af de vigtigste mål for entanglement er entanglement omkostning $E_C(\rho)$. Den fortæller om, hvor mange maksimalt entanglede tilstande der er nødvendige for at lave en kopi af tilstanden ρ udelukkende ved hjælp af LOCC afbildninger.

Definition 4.4
For en given tilstand ρ er entanglement omkostning givet som:

$$E_C(\rho) = \inf\left\{ r : \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{\Lambda} \left\| \rho^{\otimes n} - \Lambda\left(P_+\left(\mathbb{C}^d\right)\right) \right\|_{\mathrm{Tr}} \right) = 0 \right\}$$

hvor $P_+\left(\mathbb{C}^d\right)$ er den maksimalt entanglede tilstand på $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, med dimension $d = 2^{rn}$(hvilket er ækvivalent til, at der er rn maksimalt entanglede tilstande af kbitter), $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$ er sporklassenormen og Λ'erne er en LOCC afbildninger.

Når der nu haves et mål for, hvor mange maksimalt entanglede tilstande der er nødvendige for at lave en kopi af tilstanden ρ udelukkende ved hjælp af LOCC afbildninger, kunne det også være interessant at have et mål for, hvor mange maksimalt entanglede tilstande der kan produceres ved hjælp af LOCC afbildninger, hvis der haves et antal kopier af kvantetilstande. Dette kaldes entanglement destillering.

Definition 4.5
For en given tilstand ρ er entanglement destillering givet som:

$$E_D(\rho) = \sup\left\{r : \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{\Lambda}\left\|\Lambda\left(\rho^{\otimes n}\right) - P_+\left(\mathbb{C}^d\right)\right\|_{\mathrm{Tr}}\right) = 0\right\}$$

hvor $P_+\left(\mathbb{C}^d\right)$ er den maksimalt entanglede tilstand på $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, med dimension $d = 2^{rn}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$ er sporklassenormen og Λ'erne er en LOCC afbildninger.

I disse to definitioner bliver der kun brugt 2-kbit maksimalt entanglede tilfælde. En ækvivalent definition af entanglement destillering og entanglement omkostning findes i [Donald et al., 2002,Side 4264-4256].

Hvis der arbejdes med udelukkende rene tilstande der skal transformeres med LOCC afbildninger så vil der gælde, at $E_C = E_D$, og samtidig vil de begge være lig med entanglement entropien E, der er givet ved den reducerede von Neumann entropi, dette vil blive uddybet senere. Det er entanglement entropien som der vil blive arbejdet med i det næste afsnit.

4.2.2 Entanglement entropien

Som der blev skrevet tidligere, kan målet, for hvor meget et system er entanglet, også tilgås via en aksiomatisk tilgang. Her kan mål for entanglement defineres på følgende måde:

Definition 4.6
Ethvert mål for entanglement er en afbildning $E : S\left(\bigotimes_{i=1}^{N}\mathscr{H}_i\right) \to \mathbb{R}^+$, hvor $\mathscr{H}_i$, for $i = 1, 2, \dots, N$, er Hilbertrum, der overholder følgende:

- Monoton under LOCC afbildninger Λ: $E(\Lambda(\rho)) \leq E(\rho)$. Mere præcist betyder det, at entropien skal falde, hvis der midles over flere tilstande, altså:

$$E(\rho) \geq \sum_{i=1}^{\infty} p_i E(\sigma_i)$$

  hvor $\{p_i, \sigma_i\}$ er et ensemble opnået ud fra tilstande ρ ved brug af en LOCC afbildning.
- Er forsvindende for separable tilstande: $E(\rho_s) = 0$, for alle separable tilstande ρ_s.

Funktioner der overholder dette kaldes en entanglement monoton funktion.

Disse aksiomer definerer mål for entanglement.Foruden de ovenstående aksiomer, kan der defineres et antal tillægsaksiomer, hvor nogle af disse vil blive defineret senere. Før tillægsaksiomerne defineres vil der blive set på et eksempel på et mål.

Et eksempel på et mål for entanglement er den relative entanglement entropi, der er defineret som:

$$E_R(\rho) = \min_{\omega}\left(D(\rho,\omega)\right)$$

hvor ω er en separabel tilstand, det vil sige at der tages minimum af alle separable tilstande, og $D(\rho,\omega) = \mathrm{Tr}\left(\rho\left(\log_2(\rho) - \log_2(\omega)\right)\right)$ er den relative afstand. Dette er et afstands lignende mål for entanglement, hvor den nærmeste separable tilstand findes med en afstands lignende funktion.

Der vil nu blive set på en række tillægsaksiomer til mål definitionen der ofte benyttes til at opnå specielle resultater.

Definition 4.7
Et mål for entanglement E, der overholder Definition 4.6, kaldes

- normaliseret, hvis der for P_+^d, en enhver repræsentant af $P_+\left(\mathbb{C}^d\right)$, gælder, at $E\left(P_+^d\right) = \log_2(d)$, for $d = 1, 2, 3, \ldots,$
- kontinuert, hvis der, for følgerne af Hilbertrum $\{\mathcal{H}_n^A\}$ og $\{\mathcal{H}_n^B\}$, med $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^A \otimes \mathcal{H}_n^B$, og for alle følger af tilstande $\{\rho_n\}$ og $\{\sigma_n\}$, med $\rho_n, \sigma_n \in S(\mathcal{H}_n)$, så sporklassenormen $\|\rho_n - \sigma_n\|_{\mathrm{Tr}} \to 0$ for $n \to \infty$, gælder, at

$$\frac{E(\rho_n) - E(\sigma_n)}{1 + \log_2(\dim(\mathcal{H}_n))} \to 0$$

- og additivt, hvis der for alle $n \geq 1$ og $\rho \in S(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ gælder, at

$$\frac{E\left(\rho^{\otimes n}\right)}{n} = E(\rho)$$

At disse aksiomer er nyttige, kan ses i de følgende.

4.2.3 Grænser for mål

Hvis der vendes tilbage til entanglement destillering og entanglement omkostning kan det vises at, ethvert mål E, der overholder visse aksiomer, er begrænset af E_D og E_C.

Sætning 4.8
Antag, at E er et mål for entanglement af blandede tilstande, der ud over at overholde Definition 4.6 også skal være normaliseret, kontinuert og additivt. Da gælder der, for alle tilstande $\rho \in S(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, at

$$E_D(\rho) \leq E(\rho) \leq E_C(\rho)$$

Bevis:
Antag, at $\epsilon > 0$. Først vil der blive vist, at der eksisterer et heltal $N_1 > 0$, sådan at $n \geq N_1$ medfører

$$\frac{E(\rho^{\otimes n})}{n} \geq E_D(\rho) - \epsilon$$

Om nødvendigt vil der blive set på en delfølge.

Betragt en følge af LOCC afbildninger $\{\Lambda_n\}_n$. Ud fra definitionen af entanglement destillering (fra [Donald et al., 2002,Side 4264]) fås der, at der eksisterer en følge af LOCC afbildninger

$\{\Lambda_n\}_n$, sådan, hvis der muligvis ses på en delfølge, at

$$\left\| P_+\left(\mathbb{C}^d\right) - \Lambda_n(\rho^{\otimes n}) \right\|_{\mathrm{Tr}} \to 0$$

for $n \to \infty$, samt at hvis der ses på $d = 2^{rn} \Rightarrow r = \frac{log_2(d)}{n}$, og idet r er den værdi der tages supremum over, må der desuden gælde, at

$$\left| E_D(\rho) - \frac{\log_2(d)}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1}$$

for $n \geq N_1'$. Kontinuiteten af målet giver:

$$\left| \frac{E(\Lambda_n(\rho^{\otimes n})) - E(P_+\left(\mathbb{C}^d\right))}{1 + n\log_2(d')} \right| \to 0$$

for $n \to \infty$ og $d' = \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Hvis n bliver tilstrækkeligt stor kan der ses bort fra 1-tallet og $\log_2(d')$, da de blive forsvindende i forhold til n'ets størrelse. Dermed følger det, at der kan vælges et N_1'', sådan at det for $n \geq N_1''$ medfører

$$\left| \frac{E(\Lambda_n(\rho^{\otimes n}))}{n} - \frac{E(P_+\left(\mathbb{C}^d\right))}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{4.2}$$

Ved at bruge, at målet er monotont, for $n \geq N_1 = \max\left\{N_1', N_1''\right\}$, fås:

$$\frac{E(\rho^{\otimes n})}{n} \geq \frac{E(\Lambda_n(\rho^{\otimes n}))}{n}$$

Ud fra (4.2) fås, at:

$$\frac{E(\Lambda_n(\rho^{\otimes n}))}{n} \geq \frac{E(P_+\left(\mathbb{C}^d\right))}{n} - \frac{\epsilon}{2}$$

Da målet er normaliseret gælder der, at

$$\frac{E(P_+\left(\mathbb{C}^d\right))}{n} - \frac{\epsilon}{2} = \frac{log_2(d)}{n} - \frac{\epsilon}{2}$$

idet $\left|\phi^+_{2^{rn}}\right\rangle$ er en ren tilstandsvektor i $\mathbb{C}^d$. Til sidst giver (4.1), at

$$\frac{log_2(d)}{n} - \frac{\epsilon}{2} \geq E_D(\rho) - \epsilon$$

hvilket betyder, at

$$\frac{E(\rho^{\otimes n})}{n} \geq E_D(\rho) - \epsilon$$

På samme måde kan det vises, at der gælder, at

$$\frac{E(\rho^{\otimes n})}{n} \leq E_C(\rho) + \epsilon$$

hvilket ikke vil gøres her. Idet at målet er additivt gælder der, at $\frac{E(\rho^{\otimes n})}{n} = E(\rho)$, hvilket giver, at

$$E_D(\rho) \leq E(\rho) \leq E_C(\rho)$$

Dette beviser sætningen. ■

Det er ikke sikkert, at der findes mål, hvorom Sætning 4.8 gælder, så derfor kan sætningen modificeres en smule. I stedet for addivitet kan der indsættes den betingelse, at $E(\rho) = E^{\infty}(\rho)$, hvor $E^{\infty}(\rho)$ kaldes regulationen af E og er defineret ved:

$$E^{\infty}(\rho) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{E(\rho^{\otimes n})}{n}$$

Med dette i mente kan der i stedet skrives:

$$E_D(\rho) \leq E^{\infty}(\rho) \leq E_C(\rho)$$

Ud fra dette følger det klart, at

$$E_D(\rho) \leq E_C(\rho) \tag{4.3}$$

hvilket er vigtigt i forbindelse med, at vise, at $E_D(\rho) = E_C(\rho)$, hvis ρ er en ren tilstand. Fra [Donald et al., 2002,Theorem 23] fås det, at hvis der tages målet af entanglement for en ren tilstand ρ, hvor der gælder, at målet overholder Definition 4.6, og at det er normaliseret, kontinuert og additivt, så er målet lig med den reducerede von Neumann entropi:

$$E(\rho) = S_{\mathrm{vN}}(\rho) \equiv -\mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_B(\rho))) \tag{4.4}$$

Når ρ er ren, kan den skrives som $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Ved hjælp af Schmidt dekomposition, kan det vises, at:

$$-\mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_B(\rho))) = -\mathrm{Tr}_B(\mathrm{Tr}_A(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_A(\rho))) = -\sum_i p_i \log_2(p_i) \tag{4.5}$$

hvor p_i er kvadratroden af Schmidt koefficienterne til $|\psi\rangle$. Det vil kun blive vist i tilfældet, hvor $\dim(\mathscr{H}_A) = \dim(\mathscr{H}_B) = n$. Når $|\psi\rangle$ er Schmidt dekomponeret, kan ρ skrives som:

$$\rho = \sum_{i=1,i'=1}^{n,n} p_i |i_A i_B\rangle\langle i_A i_B| = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_n \end{bmatrix}$$

hvor P_i'erne er blok matricer, hvorom der gælder, at

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \quad P_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_n^2 \end{bmatrix}$$

Ses der nu det partielle spor, $\mathrm{Tr}_B(\rho)$, vides det, at det bliver en matrix på formen

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_n^2 \end{bmatrix}$$

Da dette er en diagonal matrix bliver den reducerede von Neuman entropi:

$$E_{vN}(\rho) = -\mathrm{Tr}_A\left(\sum_i^n \left(p_i^2 \log_2(p_i^2)\,|i\rangle\langle i|\right)\right) = -\sum_i^n p_i^2 \log_2(p_i)$$

som ønsket. Tages der derimod det partielle spor, $\mathrm{Tr}_A(\rho)$, vides det, idet P_i'erne har de forme de har, at det bliver en matrix på samme form som for $\mathrm{Tr}_B(\rho)$. Derved er $\mathrm{Tr}_A(\rho) = \mathrm{Tr}_B(\rho)$, i tilfælet hvor ρ er ren, og der gælder da, at:

$$-\mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_B(\rho))) = -\mathrm{Tr}_B(\mathrm{Tr}_A(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_A(\rho)))$$

som det var ønsket.

Hvis målet ikke er additivt, men der i stedet gælder, at $E(\rho) = E^{\infty}(\rho)$, så gælder der, at $E^{\infty} = S_{\mathrm{vN}}$. Dette leder op til følgende sætning, der ikke vil blive bevist.

Sætning 4.9
Lad ρ være en ren tilstand. Da gælder det, at

$$E_D(\rho) = S_{\mathrm{vN}}(\rho) = E_C(\rho)$$

[Donald et al., 2002,Theorem 24]

Det vil altså sige, at når der er tale om rene tilstande, så er det nok at se på den reducerede von Neumann entropi, for at se, hvor entanglet en tilstand er.

4.3 Afsluttende eksempel

Det vil nu blive set på to eksempler der viser, hvordan graden af entanglement kan udregnes ved hjælp af entropien.

Eksempel 4.10:
Lad $(H) = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$. Der vil nu blive set på følgende Bell-tilstand

$$\left|\phi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$$

hvor 1 og 0 er de to egentilstandsvektorer i $\mathbb{C}^2$. Dermed fås følgende tilstand:

$$\begin{aligned}\rho = \left|\phi^-\right\rangle\left\langle\phi^-\right| &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 10| - \langle 01|)\\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dette udgør en tilstand, hvilket ses, idet ρ er Hermitisk, har spor lig 1 og er positiv semidefinit, idet ρ har egenværdierne 1 og 0, henholdsvis med multiplicitet 1 og 3, og og derved overholder ρ Definition 2.6. Det ses tydeligt, ρ er også idempotent, og derved er det en ren tilstand. Dermed kan graden af entanglement, der er givet som den reducerede von Neuman entropi, nu bestemmes:

$$E(\rho) = -\mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_B(\rho)))$$

Først bestemmes $\mathrm{Tr}_B(\rho)$:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) & \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) & \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dermed kan entropien udregnes:

$$E(\rho) = -\mathrm{Tr}_A\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \log_2\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)\right) = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

hvilket gør denne tilstand maksimalt entanglet. $\Diamond$

Her følger et andet eksempel, hvor graden af entangelment er afhængig af en variabel.

Eksempel 4.11:
Der fortsættes med at arbejde i samme rum som i det ovenstående eksempel. Lad der blive set på den tilstandsvektor der blev nævnt i indledningen af dette kapitel:

$$|\psi\rangle = \sqrt{1-\delta}\,|00\rangle + \sqrt{\delta}\,|11\rangle$$

hvor $\delta \in [0,1]$. Hvis tilstanden opskrives fås:

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= \left(\sqrt{1-\delta}\,|00\rangle + \sqrt{\delta}\,|11\rangle\right)\left(\sqrt{1-\delta}\,\langle 00| + \sqrt{\delta}\,\langle 11|\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 & 0 & \sqrt{\delta(1-\delta)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\delta(1-\delta)} & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det er tydeligt, at denne er Hermitisk og sporet er lig 1. For at tjekke om denne også er positiv semi-definit skal egenværdierne findes. For ρ er egenværdigerne 0 med multiplicitet 3 og 1. Dermed er denne en ρ en tilstand i følge Definition 2.6. At denne tilstand er entanglet og separabel for forskellige værdier af δ, er blevet beskrevet i indledningen af dette kapitel, så derfor vil der nu blive undersøgt, hvor entanglet denne tilstand er med hensyn til δ. At dette er en ren tilstand er klart da $\rho = \rho^2$, og derfor kan graden af entangeltment bestemmes ved den reducerede von Neumann entropi:

$$E(\rho) = -\mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_B(\rho)))$$

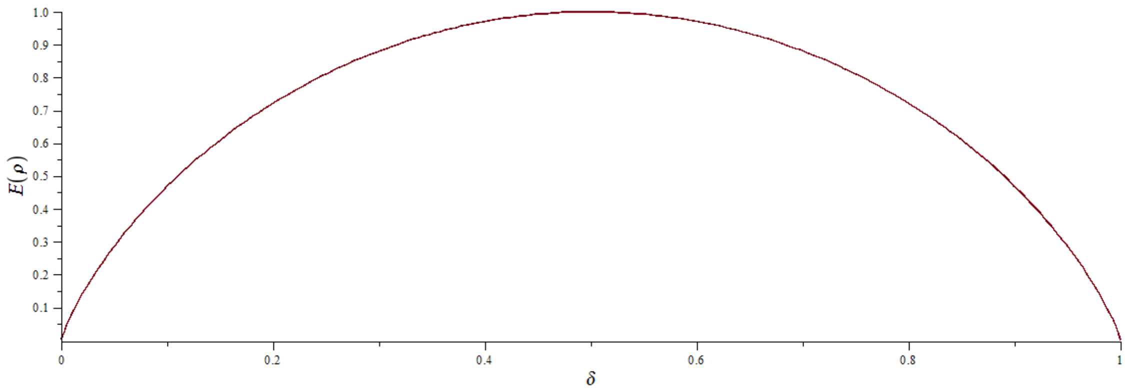
Først bestemmes $\mathrm{Tr}_B(\rho)$:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

Dermed er det muligt at beregne entropien:

$$E(\rho) = -\mathrm{Tr}_A\left(\begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\log_2\left(\begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\right)\right) = -(1-\delta)\log_2(1-\delta) - \delta\log_2(\delta)$$

hvilket giver en funktion der er afhængig af δ.



Figur 4.1: *Graf over entropifunktionen $E(\rho)$.*

Et plot af $E(\rho)$ ses i Figur 4.1. På figuren kan det ses at grafen er symmetrisk, og ved at løse ligningen $\frac{d}{d\delta}E(\rho) = 0$ ses det, at det er $\delta = \frac{1}{2}$ der giver den maksimalt entanglede tilstand, hvilket stemmer overens med det der blev beskrevet i indledningen af kapitlet. For $\delta = \frac{1}{2}$ er entropien $E(\rho) = 1$. Samtidig kan det ses at, hvis $\delta = 0$ og $\delta = 1$ indsættes så er tydeligt at $E(\rho) = 0$, idet følgen $\{\delta_n\}$ går imod 0 hurtigere end $\log_2(\{\delta_n\})$ går imod minus uendelig. Det samme gælder for $1-\delta$. Tilstandsvektoren er, når tilstanden er mest entanglet, givet som:

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) \qquad \diamondsuit$$

Dette var to eksempler hvor der ikke blev set på hvordan entanglement virker i fysikken. Dette vil der til gængæld blive set på i det næste kapitel.

KAPITEL 5

FYSISKE BETRAGTNINGER

Entanglement et begreb der er næsten lige så gammelt som kvantemekanikken selv. Første gang entanglement blev beskrevet, dog uden at begrebet bliver nævnt, var i Einstein, Podolsky og Rosens artikel *"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?"*[1]. Her antog de tre forfattere, at der med sandsynligheden 1 kunne måles på det ene delsystem, af et helt system, uden af målingerne påvirkede resten af systemet. Denne præmisse medfører at entanglement ikke kan finde sted. Bohr ville rette op på denne fejlantagelse som Einstein Podolsky og Rosen havde lavet, så han udsendte senere samme år en artikel under samme navn: *"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?"*[2]. I denne artikel redegør Bohr for, at et kvantesystem ikke kun består af de partikler og elementer der indgår i forsøget, men også af de måleinstrumenter, hvormed der foretages målinger på det pågældende system. Et eksempel på dette er Youngs dobbeltspalte forsøg:

Hvis der foretages en måling af, hvor elektronerne bliver detekteret på en plade, der er i en afstand d fra spalterne, vil der opstå et interferensmønster. Hvis der i stedet ønskes bestemt, hvilken en af de to spalter elektronerne er kommet i gennem, kan det gøres ved at måle impulsen af pladen med de to spalter. Gøres dette, bliver der ikke noget interferensmønster, og derved haves der reelt ingen viden om, hvordan elektronerne har bevæget sig. Altså den måling der foretages af impulsen ødelægger interferensmønsteret, og derved har målingen påvirket en anden del af det samlede system.

I Youngs dobbeltspalte forsøg bliver mønsteret tilfældigt når impulsen bestemmes, og det er netop dette, at det at foretage en måling på én del af et system påvirker resten af systemet, der leder imod entanglement. For hvis 2 partikler er entanglede, på den rigtige måde, og der foretages en måling på den ene, så vil det øjeblikkeligt være bestemt, i hvilken tilstand den anden partikel er. Et eksempel på dette er, hvis der haver et system med følgende tilstandsvektor:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

hvor $\uparrow$ og $\downarrow$ betyder henholdsvis spin-op og spin-ned. Hvis der måles spin-op på den ene partikel, vil der altid blive målt spin-ned på den anden. Dette er en vigtig egenskab for entanglement i fysikken.

[1] [Einstein et al., 1935]
[2] [Bohr, 1935]

5.1 Entanglement i fysik

Afsnittet er skrevet på bagrund af [Horodecki et al., 2009,Side 867-877] og [Hansen og Ottesen, 2012,Side 26-29]

Entanglement er et af de store emner indenfor fysikken i det 21. århundrede. Som skrevet i det ovenstående blev entanglement, dog ikke under den betegnelse, først beskrevet i forbindelse med artiklen af Einstein, Podolski og Rosen. Da entanglement førstegang blev beskrevet var et af problemerne, at entanglement øjensynligt tillader "kommunikation" der er hurtigere end lyset. Dette sker eksempelvis, idet der, for to identiske partikler eg. elektroner, under visse omstændigheder, kan siges, at hvis tilstanden af den ene del af systemet er kendt, da kendes den anden del af systemets tilstande også, uanset afstanden mellem de to delsystemer. Det kan derfor siges, at der foregår "kommunikation" mellem de to partikler der er hurtigere end lyset, hvilket giver problemer i forbindelse med relativitetsteorien. En måde hvorpå dette "problem" blev forklaret var, at kvantemekanikken var ufuldstændig, og at denne sammenhæng måtte komme som følge af såkaldte skjulte variable.

I året 1964 da Bell udgav artiklen "On The Einstein Podolski Rosen Paradoks"[3] var der stadig mange der troede på teorien om skjulte variable. I artiklen opstillede Bell uligheder, der senere skulle blive benyttet af blandt andet Chauser[4], til at opstille uligheder, der kunne benyttes, i forbindelse med eksperimenter, til at bekræfte eller afvise skjulte variable teorien. De første der udførte et sådant eksperiment var Aspect, Dalibard og Roger[5], der viste, at Bells ulighed ikke blev overholdt, og at kvantemekanikken stadig var korrekt. Der er siden hen blevet udført flere forskellige eksperimenter, designet til at teste hvorvidt Bells ulighed var overholdt, og indtil videre er skjulte variable teorien ikke blevet bekræftet.

Det problem, at entanglement øjensynligt tillader kommunikation hurtigere end lysets hastighed, kommer som følge af en misforståelse. Misforståelsen ligger i, at se på to entanglede partikler ses som to system af hver en partikel, hvor det bør ses som ét to-partikel system uanset afstanden mellem de to partikler. Når der ses på et to-partikel system, frem for to et-partikel systemer, haves der en fælles bølgefunktion for hele systemet, der bevirker, at der ved en måling på et delsystem, bliver bestemt en bølgefunktion for hele systemet.

Fænomenet entanglement har en række af interessante anvendelsesmuligheder, heriblandt kvantekommunikation og kvanteteleportation. En måde hvorpå kvantekommunikation kan foretages er ved at benyttede entanglede tilstande til at sende krypterings koder. Hvis for eksempel, at hvis Alice sender en krypterings kode til Bob ved hjælp af entanglede kvantetilstande, da gælder der, at hvis en tredjeperson, Eve, opsnapper krypterings koden, da vil de sendte tilstande overholde Bells ulighed. Der gælder derimod, at tilstandene ikke vil overholde Bells ulighed i tilfældet, hvor en tredjeperson har opsnappet kommunikationen.

Kvanteteleportation går ud på, at Alice ønsker at sende en kvantebit til Bob. Dette gøres ved, at Alice "dræber" k-bitten hos hende og derefeter overfører dens information til Bob, der så kan genskabe bitten. Denne overførsel af data skal ske via klassiske kanaler.

Disse er nogle af de anvendelsesmuligheder der er med til at gøre det et specielt og interessant fænomen, der er værd at arbejde med.

[3] [Bell, 1964]
[4] [Clauser et al., 1969]
[5] [Aspect et al., 1982]

5.2 Eksempler på entanglement

Der vil nu blive set på to eksempler på entanglement, hvor det ene tager udgangspunkt i et fysisk tankeeksperiment involverende to spin-$\frac{1}{2}$ partikler, og det andet involverer en spin-$\frac{1}{2}$ partikel og en spin-1 partikel. I begge tilfælde vil to tilstande blive defineret og deres tæthedsmatricer blive opstillet. Dernæst bliver separabiliteten af de pågældende tilstande undersøgt ved at bestemme, hvorvidt den partielt transponerede er positiv. Efterfølgende vil graden af entanglement for det pågældende system blive undersøgt, ved hjælp af resultater fra Afsnit 4.2.3. Der startes ud med eksemplet omhandlende en spin-$\frac{1}{2}$ partikel og en spin-1 partikel.

5.2.1 En spin-1 og en spin-$\frac{1}{2}$ partikel.

Her vil der blive set på et tilfælde hvor en spin-$\frac{1}{2}$ og en spin-1 partikel dannet et kvantesystem. Da $\mathbb{C}^2$ beskriver spin egenskaberne for spin-$\frac{1}{2}$ partikler eg. elektroner, og da $\mathbb{C}^3$ beskriver spin egenskaberne for spin-1 partikler eg. gluoner vil der her blive arbejdet med Hilbertrummet $\mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$. I dette rum vil der blive benyttet følgende basis:

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\
|e_2\rangle &= |\uparrow 0\rangle \\
|e_3\rangle &= |\uparrow\downarrow\rangle \\
|e_4\rangle &= |\downarrow\uparrow\rangle \\
|e_5\rangle &= |\downarrow 0\rangle \\
|e_6\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned} \tag{5.1}$$

hvor $\uparrow$ refererer til spin-op, $\downarrow$ refererer til spin-ned og 0 refererer til 0-spin, hvor 0-spin kun forekommer for spin-1 partiklen. Antag nu at der haves følgende tilstandsvektor:

$$|\psi\rangle = \frac{i}{2}|e_1\rangle - \frac{i}{2}|e_6\rangle - \frac{1}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_5\rangle$$

Denne tilstandsvektor er normeret, idet

$$\left|\frac{i}{2}\right|^2 + \left|-\frac{i}{2}\right|^2 + \left|-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = 1$$

For denne tilstandsvektor opskrives nu tæthedsmatricen:

$$\rho = \begin{bmatrix}
\frac{1}{4} & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & \frac{i}{4} & -\frac{1}{4} \\
\frac{i}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{i}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{i}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{i}{4} \\
-\frac{1}{4} & \frac{i}{4} & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}$$

At dette er en tilstand ses idet, at den overholde punkt 1.-3. i Definition 4.6. Det er tydeligt, at den er Hermitisk og at sporet er lig 1. For at den er positivt semi-definit må ingen af egenværdierne være mindre end 0, hvilket også gælder idet egenværdierne er 0, med multiplicitet 5, og 1. Det er også en ren tilstand da $\rho^2 = \rho$, hvilket ikke vil blive gennemregnet her. For at finde ud af om denne tilstand er entanglet, undersøges der om tilstanden er separabel. Dette gøres ved at finde ρ's partielt transponerede:

$$\rho^{T_B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{i}{4} & -\frac{i}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{i}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Egenværdierne for den partielt transponerede er:

$$\lambda = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Da der er en negativ egenværdi er ρ ikke separabel og dermed entanglet. Men hvor entanglet er denne tilstand så? Da tilstanden er ren kan graden af entangelment findes ved hjælp af den reducerede von Neumann entropi, (4.4):

$$E_{vN}(\rho) = -\mathrm{Tr}_A\left(\mathrm{Tr}_B\left(\rho\right)\log_2\left(\mathrm{Tr}_B\left(\rho\right)\right)\right)$$

Først findes $\mathrm{Tr}_B(\rho)$:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Da det er nemmere at tage logaritmen af en diagonal matrix, kan $\mathrm{Tr}_B(\rho)$ skrives som:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

i sin egenbasis. Der må da gælde, at

$$\begin{aligned} E_{vN}(\rho) &= -\mathrm{Tr}_A\left(\mathrm{Tr}_B\left(\rho\right)\log_2\left(\mathrm{Tr}_B\left(\rho\right)\right)\right) \\ &= -\mathrm{Tr}_A\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{4}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\approx 0,8113 \end{aligned}$$

Dermed haves der et mål for, hvor entanglet denne tilstand er. Hvis der undersøges andre entanglede tilstande i samme rum, kunne disse entanglede tilstande sammenlignes og der kunne undersøges, hvilken tilstand der er mest entanglet.

5.2.2 To elektroner interagerer

Der vil i dette eksempel blive arbejdet videre ud fra [Hansen og Ottesen, 2012,Eksempel 4.1]. Her blev der set på et tankeeksperiment hvor to elektroner, med hver sin spin-rentning bliver sendt mod hinanden og interagerer, for derefter at ende med at være mere eller mindre entanglede. Det ender med, at systemet bliver beskrevet ved følgende tilstandsvektor:

$$\left|\psi\right\rangle = \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$$

hvor ω er vinkelfrekvensen og T den tid, hvortil interaktionen, mellem elektronerne, er sluttet. Uden tab af generalitet kan $\frac{\omega T}{e}$ sættes til x. Hvis der anvendes basen beskrevet i (3.10), kan denne tilstandsvektor skrives som:

$$\left|\psi\right\rangle = \cos(x)\left|e_2\right\rangle - i\sin(x)\left|e_3\right\rangle \tag{5.2}$$

Der vil nu blive undersøgt i hvilke tilfælde tilstanden, hørende til tilstandsvektoren i Ligning (5.2), er separabel, og hvor entanglet tilstanden er, når den ikke er separabel. Først opskrives tilstanden:

$$\begin{aligned}
\rho = \left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right| &= (\cos(x)\left|e_2\right\rangle - i\sin(x)\left|e_3\right\rangle)(\cos(x)\left\langle e_2\right| + i\sin(x)\left\langle e_3\right|) \\
&= \cos^2(x)\left|e_2\right\rangle\left\langle e_2\right| + \sin^2(x)\left|e_3\right\rangle\left\langle e_3\right| + i\cos(x)\sin(x)\left|e_2\right\rangle\left\langle e_3\right| - i\cos(x)\sin(x)\left|e_3\right\rangle\left\langle e_2\right| \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(x) & i\cos(x)\sin(x) & 0 \\ 0 & -i\cos(x)\sin(x) & \sin^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

At dette er en tilstand, ses ved at undersøge, hvorvidt den overholder punkt 1.-3. i Definition 2.6. Hermiticiteten følger klart og det samme gælder for, at sporet skal være 1, idet $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Dermed skal der kun undersøges om ρ er positiv semi-definit, hvilket kan gøres ved at se om egenværdierne er større end eller lig 0. Tilstanden ρ har følgende egenværdier $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ og $\lambda_4 = 1$, ergo er ρ positiv semi-definit. Det er altså en tilstand, hvilket også skulle gælde. Denne tilstand er ren for alle x værdier, hvilket ses ved det følgende:

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(x) & i\cos(x)\sin(x) & 0 \\ 0 & -i\cos(x)\sin(x) & \sin^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^4(x) + \cos^2(x)\sin^2(x) & i\sin^3(x)\cos(x) + i\cos(x)\sin^3(x) & 0 \\ 0 & -i\cos^3(x)\sin(x) - i\cos(x)\sin^3(x) & \sin^4(x) + \cos^2(x)\sin^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(x) & i\cos(x)\sin(x) & 0 \\ 0 & -i\cos(x)\sin(x) & \sin^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

For at undersøge om ρ er separabel skal det undersøges om ρ^{T_B} har negative egenværdier, da der gælder at en separabel tilstand ikke har negative egenværdier. Den partielt transponerede af ρ er givet som:

$$\rho^{T_B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\cos(x)\sin(x) \\ 0 & \cos^2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(x) & 0 \\ i\cos(x)\sin(x) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dermed har ρ^{T_B} følgende egenværdier:

$$\lambda_{T_B} = \begin{cases} \cos^2(x) \\ \sin^2(x) \\ \cos(x)\sin(x) \\ -\cos(x)\sin(x) \end{cases}$$

Da $\cos(x)\sin(x) \in [-0,5;0,5]$ for alle x, vil der altid være en negativ egenværdi med mindre $\cos(x) = 0$ eller $\sin(x) = 0$. Der gælder derfor, at ρ er entanglet, så længe, at $x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, hvis der udelukkende ses på en periode på 2π. Hvor entaglet er denne tilstand så? Det er det næste spørgsmål der presser sig på. Da tilstanden er ren er entropien givet ved den reducerede von Neumann entropi, (4.4):

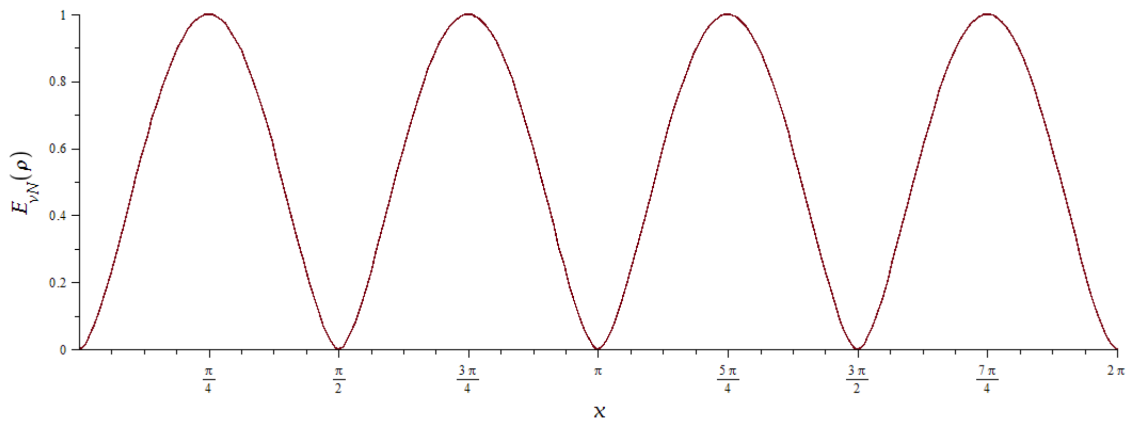
$$E_{\nu N}(\rho) = -\mathrm{Tr}_A(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2(\mathrm{Tr}_B(\rho)))$$

Det første der skal findes er $\mathrm{Tr}_B(\rho)$:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \begin{bmatrix} \cos^2(x) & 0 \\ 0 & \sin^2(x) \end{bmatrix}$$

Dermed fås:

$$\begin{aligned} E(\rho) &= -\mathrm{Tr}_A\left(\begin{bmatrix} \cos^2(x) & 0 \\ 0 & \sin^2(x) \end{bmatrix} \log_2\left(\begin{bmatrix} \cos^2(x) & 0 \\ 0 & \sin^2(x) \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= -\mathrm{Tr}_A\left(\begin{bmatrix} \cos^2(x)\log_2\left(\cos^2(x)\right) & 0 \\ 0 & \sin^2(x)\log_2\left(\sin^2(x)\right) \end{bmatrix}\right) \\ &= -\cos^2(x)\log_2\left(\cos^2(x)\right) - \sin^2(x)\log_2\left(\sin^2(x)\right) \end{aligned}$$



Figur 5.1: *Graf der viser $E_{\nu N}(\rho)$ i forhold til x i en periode på 2π.*

I Figur 5.1 ses en graf der viser, hvordan entropien af tilstanden ρ udvikler sig i forhold til x. Det er tydeligt at se, at der er flere punkter, hvor der er maksimal entropi og minimal entropi. Ved at differentierer entropien i forhold til x og sætter det lig 0, kan disse ekstrema findes:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dx}\left(E_{\nu N}(\rho)\right) &= \frac{d}{dx}\left(-\cos^2(x)\log_2\left(\cos^2(x)\right) - \sin^2(x)\log_2\left(\sin^2(x)\right)\right) \\ &= 2\cos(x)\sin(x)\log_2\left(\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right) \end{aligned}$$

Dette gælder når enten $\cos(x) = 0$, $\sin(x) = 0$ eller $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1$. At det gælder for $\sin(x) = 0$ skyldes, at $\sin(n) \to 0$ for $n \to 0$ hurtigere end $\log_2\left(\frac{1}{\sin^2(n)}\right) \to \infty$ for $n \to 0$. Dermed gælder der, at tilstanden ρ er enten mest eller mindst entanglet når

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$$

hvis der ses på en enkelt periode. Indsættes dette i $E_{vN}(x)$, ses det, at

$$E_{vN}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{, for } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \\ 1 & \text{, for } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

hvilket passer med, at $E_{vN}\left(\rho\right) = 0$, de steder hvor funktionen er separabel, hvilket stemmer overens med Definition 4.6. Hvis der ønskes de maksimalt entanglede tilstandsvektorer kan x-værdierne for $E_{vN}\left(\rho\right) = 1$ sættes ind i (5.2), og der fås:

$$\left|\psi\right\rangle_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - i\,|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$\left|\psi\right\rangle_{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\downarrow\rangle - i\,|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$\left|\psi\right\rangle_{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$\left|\psi\right\rangle_{\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

Disse er altså de maksimalt entanglede tilstandsvektorer.

KAPITEL 6

OPSUMERING OG PERSPEKTIVERING

Dette speciale er udarbejdet som en videreførsel af arbejdet påbegyndt i projektgruppens forrige rapport, [Hansen og Ottesen, 2012], der beskæftigede sig med en fysisk forklaring af entanglement, hvorimod der i dette speciale arbejdes med en matematisk tilgang til emnet. Det har i denne forbindelse været interessant at arbejde med, hvordan det undersøges om en er entanglet, og hvor entanglet en given tilstand er?

For i det hele taget at kunne bearbejdet emnet entanglement, har det indledningsvist været nødvendigt at beskrive, hvordan tensorproduktet af Hilbertrum defineres. Dette gøres, idet fysiske egenskaber beskrives ved Hilbertrum, og systemerne der bruges i e.g. entanglement er beskrevet af delsystemer, der er sammensat ved hjælp af tensorprodukter af Hilbertrum. Derudover er der også blevet arbejdet med tilstandsoperatorer, der bruges som en matematisk beskrivelse af de fysiske tilstande for kvantemekaniske systemer. Disse tilstandsoperatorer bruges også i forbindelse med bestemmelsen af, hvorvidt en given tilstand er entanglet eller ej, og de bruges også til at undersøge, hvor entanglede en sådan tilstand er. Tensorprodukt af Hilbertrum og tilstandsoperatorer bruges til definitionen af en separabel tilstand, hvor en hver separabel tilstand $\rho \in S(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n)$ kan skrives på formen:

$$\rho = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \rho_1^{(j)} \otimes \rho_2^{(j)} \otimes \cdots \otimes \rho_n^{(j)}$$

hvor $\rho_i^{(j)}$ er en tilstandsoperator der virker på Hilbertrummet $\mathcal{H}_i$, og hvor

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$$

Dermed er det muligt at definere de entanglede tilstande, som alle de tilstande der ikke er separable.

For at bestemme hvorvidt en tilstand er entanglet, blev der arbejdet med kriterier til bestemmelse af, hvornår en tilstand er separabel. Et af kriterierne involverer det der kaldes entanglementvidner. Et vidne er en Hermitisk operator, $\tilde{A}$, der har den egenskab, at

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{\rho}) < 0$$

når $\tilde{\rho}$ er entanglet, og for alle separable tilstande, σ, gælder der, at

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}\sigma) \geq 0$$

Da dette kriterium ikke er praktisk anvendeligt, er der i stedet blevet fokuseret på specieltilfælde, hvor Hilbertrummene er $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$. For disse specialtilfælde gælder der, at tilstande er separable når deres partielle transponerede og positiv. Det vil med andre ord sige, at når blot én af egenværdierne for den partielle transponerede af tilstanden er negativ, så er tilstand entanglet.

Hvis der skal undersøges, hvor entanglet en tilstand er, kan det gøres på to måder en praktisk og en aksiomatisk. Den praktiske måde består i to mål; entanglement omkostningen $E_C(\rho)$ og entanglement destilleringen $E_D(\rho)$. Entanglement omkostningen er et mål for, hvor mange maksimalt entanglede tilstande der er nødvendige for at lave en kopi af en tilstand udelukkende ved hjælp af LOCC afbildninger. LOCC afbildninger er lokale operationer udført på de enkelte delsystemer, hvorefter outputtet af disse operationer er kommunikeret over klassiske kanaler. Entanglement destillering er et mål for, hvor mange maksimalt entanglede tilstande der kan produceres ved hjælp af LOCC afbildninger, hvis der haves et antal kopier af kvantetilstanden. Ved aksiomatiske tilgang bliver der opstillet en række egenskaber for mål, $E(\rho)$, herunder, at målet skal være monotont under LOCC afbildninger og forsvindende for separable tilstande. Derudover kan målet også være normaliseret, kontinuert og additiv. For mål der overholder alle disse egenskaber, siges det, at disse er afgrænset af entanglement destilleringen og entanglement omkostninger.

$$E_D(\rho) \leq E(\rho) \leq E_C(\rho)$$

Desuden gælder der, for rene tilstande, at $E_D(\rho) = E(\rho) = E_C(\rho)$, der alle sammen er lig den reducerede von Neuman entropi:

$$E_{vN}(\rho) = -\mathrm{Tr}_A\left(\mathrm{Tr}_B(\rho)\log_2\left(\mathrm{Tr}_B(\rho)\right)\right) = -\mathrm{Tr}_B\left(\mathrm{Tr}_A(\rho)\log_2\left(\mathrm{Tr}_A(\rho)\right)\right) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log_2(p_i)$$

hvor $\mathrm{Tr}_j(\cdot)$ er det partielle spor med hensyn til Hilbertrum j og p_i er Schmidt koefficienterne til Schmidt dekompositionen af tilstandsvektoren.

Afslutningsvist er der blevet set på eksempler, hvor der for nogle givende tilstandsvektorer er blevet undersøgt, hvorvidt de er entanglede og hvor entanglede de i så fald er.

Dette speciale ridser kun i overfladen af dette enorme emne, hvor nogle af problemstillinger der ellers kunne være interessante at arbejde med, kunne være en dybere forklaring af kvantekryptering, og hvordan de forskellige mål for entanglement benyttes deri. Desuden kunne det også være interessant at se dybere ned i emnet omkring kvanteteleportation, da dette tyder på at have potentiale i forbindelse med nye former for kommunikation. Derudover kunne det ligeledes være interessant at udvide undersøgelserne af separabilitet og graden af entanglement for mange-delte Hilbertrum af, endelig, uendelig eller utællelig dimension.

Litteratur

Aspect, Dalibard og Roger, 1982. Alain Aspect, Jean Dalibard og Gérard Roger. *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers.* Physical Review Letters, 49(25), 1804–1807, 1982.

Axler, 1997. Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right.* ISBN: 0-387-98259-0. Springer, 1997.

Bell, 1964. J. S. Bell. *On The Einstein Podolski Rosen Paradoks.* Physics, 1, 195–200, 1964.

Blum, 2012. Karl Blum. *Density Matrix Theory and Applications.* ISBN: 978-3-642-20560-6. Springer, 2012.

Bohr, 1935. N. Bohr. *Can Quantum-Mecanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Physical Review, 48, 969–702, 1935.

Brandão og Vianna, 2004. Fernando G. S. L. Brandão og Reinaldo O. Vianna. *Separable Multipartite Mixed States: Operational Asymptotically Necessary and Sufficient Conditions.* Physical Review Letters, 93(22), 220503–220503, 2004.

Clauser, Horne, Shimony og Holt, 1969. J. F Clauser, M. A. Horne, A. Shimony og R. A. Holt. *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories.* Physical Review Letters, 23 (15), 880–884, 1969.

Cornean, 2013. Horia Cornean. *Oplæg om relevante emner.* Vejledermøde, 2013.

de Pillis, 1967. John de Pillis. *Linear transformation which preserve Hermitian and positive semidefinite operators.* Pacific Jounal of Mathematics, 23(1), 129–137, 1967.

Donald, Horodecki og Rudolph, 2002. Matthew J. Donald, Micha? Horodecki og Oliver Rudolph. *The uniqueness theorem for entanglement measures.* Journal of Mathematical Physics, 43, 4252–4272, 2002.

Einstein, Podolsky og Rosen, 1935. A. Einstein, B. Podolsky og N. Rosen. *Can Quantum-Mecanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Physical Review, 47, 777–780, 1935.

Hansen og Ottesen, 2012. Dennis Hansen og Alexander B. Ottesen. *Entanglement,* 2012. Semesterraport.

Horodecki, Horodecki og Horodecki, 1996. M. Horodecki, P. Horodecki og R. Horodecki. *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions.* Physical Letters, 223, 1–8, 1996.

Horodecki, Horodecki, Horodecki og Horodecki, **2009**. Ryszard Horodecki, Pawe? Horodecki, Micha? Horodecki og Karol Horodecki. *Quantum entanglement.* Reviews Of Modern Physics, 81, 865–942, 2009.

Jamiolkowski, **1972**. A. Jamiolkowski. *Linear transformation which preserve trace and positive semidefiniteness of operators.* Reports on Mathematical Physics, 3(4), 275–278, 1972.

Lax, **2002**. Peter D. Lax. *Functional Analysis.* ISBN: 0-471-55604-1. Wiley, 2002.

Nakahara, Rahimi og SaiToh, **2007**. Mikio Nakahara, Robabeh Rahimi og Akira SaiToh. *Matematical Aspects Of Quantum Computing 2007.* ISBN: 981-281-447-7. World Scientific, 2007.

Nielsen, **1999**. M. A. Nielsen. *Conditions for a Class of Entanglement Transformations.* Physical Review Letters, 83(2), 436–439, 1999.

Nielsen og Chuang, **2010**. Michael A. Nielsen og Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* ISBN: 978-1-107-00273. Cambridge University Press, 2010.

Plenio og Virmani, **2007**. Martin B. Plenio og S. Virmani. *An introduction to entanglement measures.* Quantum Information and Computation, 7, 1–51, 2007.

Reed og Simon, **1980**. Michael Reed og Barry Simon. *Functional Analysis.* ISBN: 0-12-585050-6. Academic Press, 1980.