

AALBORG UNIVERSITET

10.SEMESTER

ØKONOMI

SPECIALE

AKTIV INVESTERING

Multifaktor Treynor Black Model

03-06-2024



AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT



AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Aalborg University Business School

Økonomi

Fibigerstræde 2

9220 Aalborg Øst

<http://www.business.aau.dk>

Titel:

Multifaktor Treynor Black Model

Projekt:

Speciale

Projekt Periode:

01. februar 2023 - 03. juni 2024

Projekt gruppe:

Ageshan Manoharan
Mads Carøe Sørensen
Mathias Strøm Pedersen

Vejleder:

Frederik Steen Lundtofte

Sidetæl: 99 + forside

Afsluttet: 03-06-2024

Abstract:

This thesis investigates the performance of the Multifactor Treynor Black Model in comparison to the traditional Treynor Black Model, using selected stocks and those included in the S&P 500 index. The findings indicate that the Multifactor Treynor Black Model outperforms the Treynor Black Model out of sample by identifying significant alpha values more effectively. This is attributed to the Multifactor Treynor Black Model's foundation on the Fama French Five Factor Model, which provides a more comprehensive explanation of excess returns for the analyzed stocks. Specifically, the Sharpe ratio for the optimal portfolio using the Multifactor Treynor Black Model is 0.889, compared to 0.799 for the Treynor Black Model and 0.5 for the market portfolio for out of sample.

To further support the superiority of the Multifactor Treynor Black Model, it was found that when analyzing S&P 500 stocks with data available from 2010, the optimal portfolio had a higher Sharpe ratio than the market portfolio 96.7% of the time with the Multifactor Treynor Black Model, compared to only 28.1% with the Treynor Black Model out of sample.

Rapportens indhold er frit tilgængeligt, men offentliggørelse (med kildeangivelse) må kun ske efter aftale med forfatterne.

Forord

Dette specialeprojekt er udarbejdet af Agheshan Manoharan, Mads Carøe Sørensen og Mathias Strøm Pedersen, 10. semester på Økonomi ved det Humanistiske og Samfundsvidenskabelige Fakultet på Aalborg Universitet.

Specialeprojektets tema er aktiv investering ved brug af Multifaktor Treynor Black Modellen og Fama French Fem Faktor Modellen.

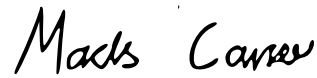
Der gives en særlig tak til vejleder Frederik Lundtofte for at være til rådighed under projektperioden, samt for at give konstruktiv feedback.

Modellerne er kodet i R, og kode og data er vedhæftet projektet som en zip-fil.

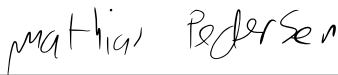
Referencer er skrevet i begyndelsen af hver sektion og de henviser til projektets litteraturliste. Henvisninger er skrevet efter Vancouvermetoden, og skrives derfor som [kildenummer].



Agheshan Manoharan
amanoh19@student.aau.dk



Mads Carøe Sørensen
mcsa19@student.aau.dk



Mathias Strøm Pedersen
mspe19@student.aau.dk

Indholdsfortegnelse

Forord	i
1 Indledning	1
1.1 Problemformulering	2
2 Litteratur gennemgang	3
2.1 Porteføljeteori	3
2.2 Markowitz model	4
2.3 Capital Asset Pricing Model	7
2.3.1 Security Market Line (SML)	7
2.3.2 Kritik og anvendelse af modellen	8
2.4 Faktormodeller	9
2.4.1 CAPM som faktor model	11
2.5 Fama French Fem Faktor Model	12
2.5.1 Fama French Faktorer	13
2.5.2 Konstruktion af Fama French Faktorerne	14
2.5.3 Kritik og anvendelse af modellen	16
2.5.4 Fama og French egen analyse	17
2.6 Effektive Markedshypoteser	20
2.6.1 Er aktiemarkedet efficient	20
2.7 Treynor Black Model	21
2.7.1 Multifaktor Treynor Black Model	28
3 Metode	29
3.1 Estimeringsmetoder	29
3.1.1 OLS estimat	29
3.1.2 Estimering af historisk data	32
3.2 Performance evaluering af porteføljer	32
3.2.1 Sharpe Ratio	32
3.2.2 Treynor Ratio	34
3.2.3 Sortino ratio	34
3.2.4 M2	34
3.2.5 Skewness og Kurtosis	35
4 Data præsentation	37
4.1 Fama French Faktorerne	37

4.2	Data til analyse af udvalgte aktier	38
4.3	Data til S&P 500 analyse	40
5	Resultater	41
5.1	Analyse af de udvalgte aktier	41
5.1.1	Resultater for CAPM	41
5.1.2	Resultater for Treynor Black Modellen	46
5.1.3	Resultater for Fama French Fem Faktor Model	53
5.1.4	Resultater for Multifaktor Treynor Black Modellen	59
5.1.5	Sammenligning	65
5.2	S&P 500 analyse	66
5.2.1	Resultater for CAPM	66
5.2.2	Resultater for Treynor Black Modellen	67
5.2.3	Resultater for Fama French Fem Faktor Model	71
5.2.4	Resultater for Multifaktor Treynor Black Modellen	72
5.2.5	Gennemsnitlig Performance af Treynor Black Model og Multifaktor Treynor Black Model	76
6	Diskussion	79
7	Konklusion	83
8	Litteratur	85
A	Tickersymboler fra S&P 500	89
B	Tabeller over overskydende porteføljeafkast	91
B.1	Treynor Black Modellen på de udvalgte aktier	91
B.2	Multifaktor Treynor Black Modellen på de udvalgte aktier	91
B.3	Markedsafkast	92
C	Gennemsnitlig Performance af Optimal Portefølje	95

1 | Indledning

Aktiemarkedet er en af de mest handlede markeder verden rundt. Det første aktiemarked blev grundlagt i 1600 tallet i Holland og har senere udviklet sig verden rundt. Det er der, hvor købere og sælgere mødes og får parret deres ordrer. En aktie er et værdipapir, som giver en andel af en virksomhed. Aktiens pris er drevet af udbud og efterspørgsel. I 1896 blev DOW Jones indekset grundlagt, og senere kom S&P 500 indekset i 1923, som er nogle af de største indekser i dag. [1]

I aktiemarkedet er der to former for investering, aktiv forvaltning og passiv forvaltning. Ved passiv investering, investeres der i f.eks. Dow Jones eller S&P 500. Ved aktiv forvaltning forsøger man at finde aktier som kan slå markedet, hvor man ofte anvender S&P 500. En aktiv forvalter ser på markedstendenser, ændringer i økonomien, politiske aspekter og specifikke nyheder om virksomheder. Som aktiv forvalter er formålet at slå markedet, og det kræver, at man tager en større risiko end markedsrisikoen [2].

I starten af 1960'erne introducerede William Sharpe med flere Capital Asset Pricing Model, som er en model, der fortæller hvor meget afkast, der kan forventes alt efter ens risikovillighed. Risikoen bliver udregnet ud fra, hvor tæt aktivet er korreleret med markedet, også kaldet markedsfaktoren. Investorer omtaler ofte alfa, når man taler om aktiv investering. Alfa er et udtryk for, hvor stort et merafkast, der er i en portefølje [3] og [4].

I 1992 videreudviklede F. Fama og Kenneth R. French på CAPM og introducerede Fama French Tre Faktor Modellen. Her blev faktoren small minus big (SMB) og high minus low (HML) introduceret, som to ekstra faktorer til at forklare afkastet. Fama og French fandt frem til at small cap aktier outperformede large cap aktier på lang sigt, og value aktier outperformede growth aktier på lang sigt [5].

Senere i 2015 udvidede Fama og French Tre Faktor Modellen til en fem faktor model, hvor robust minus weak (RMW) og conservative minus aggressive (CMA) blev introduceret som faktorer. Fama French Fem Faktor Modellen er en forbedring ift. tre faktor modellen, da den kunne forklare afkast bedre. Med Fama French Fem Faktor Modellen kan man med aktiv forvaltning finde aktier, som ville kunne slå markedet ved at finde aktier med signifikante alfa værdier [6].

I 1973 blev Treynor Black Modellen introduceret af Fischer Black og Jack Treynor. Treynor Black Modellen sammensætter en passiv portefølje med en aktiv portefølje ved at optimere det risikojusterede afkast, og derved kan ens afkast maksimeres ift. ens risiko. Her vil den aktive portefølje bestå af aktier med signifikante alfa værdier. Her kan CAPM benyttes til at finde aktier med signifikante alfa værdier [7].

I projektet udvides Treynor Black Modellen, så modellen er kompatibel med Fama French Fem Faktor Modellen og ikke kun CAPM. Dette gøres på baggrund af, at Fama French Fem Faktor Modellen er en mere omfattende model, der er bedre til at forklare aktiers overskydende afkast i forhold til CAPM. Treynor Black Modellen skal udvides, da den kun er kompatibel med en faktor, og Fama French Fem Faktor Modellen har fem faktorer.

1.1 Problemformulering

Hvordan kan udvidelsen af Treynor Black Modellen bidrage til at forbedre den optimale porteføljes præstation sammenlignet med den oprindelige Treynor Black Model?

- *Hvordan udvides Treynor Black Modellen med udgangspunkt i Fama French Fem Faktor Modellen?*
- *Er den udvidede Treynor Black Model, der integrerer Fama French Fem Faktor Modellen, mere effektiv end den oprindelige Treynor Black Model baseret på CAPM med hensyn til risikojusteret afkast?*

Projektet er inddelt således, at det næste kapitel introducerer og beskriver den relevante teori og de modeller, der anvendes i projektet. Kapitel tre præsenterer de metoder der anvendes til at estimere modellerne, samt de performance mål, som porteføljerne vurderes ud fra. Kapitel fire præsenterer den anvendte data, og kapitel fem fremviser resultaterne for projektet. Kapitel seks diskuterer resultaterne og kapitel syv er konklusionen.

2 | Litteratur gennemgang

I dette kapitel præsenteres teorien for projektet, hvor grundlæggende begreber og modeller inden for porteføljeteori vil præsenteres. Endvidere præsenteres CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen, som anvendes til at præsentere Treynor Black Modellen. Til sidst i kapitlet præsenteres Multifaktor Treynor Black Modellen.

2.1 Porteføljeteori

Denne sektion er baseret på [8] og [9].

Porteføljeteori udgør et fundamentalt koncept inden for finansiel teori og er et vigtigt redskab i sammensætningen af en portefølje. Det er derfor vigtigt at forstå det grundlæggende bag porteføljeteori for at kunne anvende porteføljeallokerende modeller som Markowitz Modellen og Treynor Black Modellen. Derfor bliver grundlæggende porteføljeteori introduceret i dette afsnit.

Betragt en portefølje af N aktiver, hvor hvert aktivs pris er $P_j(t) \geq 0$, $j = 1, \dots, N$. Der investeres i én periode fra starttidspunkt t_0 til et fremtidigt tidspunkt t_f . Så er Aktivernes afkast stokastisk og defineres på følgende måde

$$r_j = r_j(t_0, t_f) = \frac{P_j(t_f) + D_j(t_0, t_f) - P_j(t_0)}{P_j(t_0)}, \quad (2.1)$$

hvor $D_j(t_0, t_f)$ er aktivets udbytte i den angivne periode. Den forventede værdi af aktivets afkast, r_j , er

$$\bar{r}_j = \mathbb{E}[r_j] = \sum_{t=1}^T r_{t,j} x_t, \quad (2.2)$$

hvor x_t er sandsynligheden for at få afkast $r_{t,j}$, og variansen er givet ved:

$$\sigma_j^2 = \text{Var}[r_j] = \text{Var}[(r_j - \bar{r}_j)^2]. \quad (2.3)$$

Volatiliteten af afkastet er defineret som standardafvigelsen og er givet ved:

$$\sigma_j = \sqrt{\text{Var}[r_j]}. \quad (2.4)$$

Relationen mellem to stokastiske variable beskrives af kovariansen og er defineret ved:

$$\sigma_{ij} = \text{Kov}[r_i, r_j] = \mathbb{E}[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)]. \quad (2.5)$$

Eftersom kovariansen afhænger af enheden på de stokastiske variable, anvendes korrelationen, som er enhedsløs og ligger mellem $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$:

$$\rho_{ij} = \text{Korr}[r_i, r_j] = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (2.6)$$

Vægten af et aktiv i en portefølje beskriver andelen af porteføljens samlede kapital, der er investeret i aktivet. Vægten af et aktiv er defineret ved

$$w_j = \frac{q_j P_j}{V_p}, \quad \sum_{j=1}^N w_j = 1, \quad (2.7)$$

hvor q_j er mængden købt af aktiv j , P_j er prisen på aktiv j , og V_p er porteføljens samlede værdi. Porteføljens afkast er givet ved

$$r_p = \sum_{j=1}^N w_j r_j, \quad (2.8)$$

og den forventede værdi af porteføljens afkast er givet ved:

$$\bar{r}_p = E[r_p] = \sum_{j=1}^N w_j \bar{r}_j = \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

Variansen af porteføljen er defineret ved

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (2.10)$$

hvor Σ er kovariansmatricen for de N aktiver i porteføljen.

2.2 Markowitz model

Denne sektion er baseret på [8], [10] og [11].

I 1952 præsenterede Harry Markowitz en model, der beskriver hvordan en investors kapital skal fordeles over N forskellige aktiver for at skabe en efficient portefølje. En efficient portefølje er en samling af N aktiver, hvor porteføljen har det størst mulige forventede afkast givet et niveau af risiko. Risikoen af et aktiv er defineret som standardafvigelsen af aktivet. Afkast, forventet afkast og standardafvigelse for aktiver og porteføljer er defineret i Sektion 2.1. En portefølje kan visualiseres i et diagram med standardafvigelse på x-aksen og forventet afkast på y-aksen, kaldet MV-diagrammet, som ses på Figur 2.1.

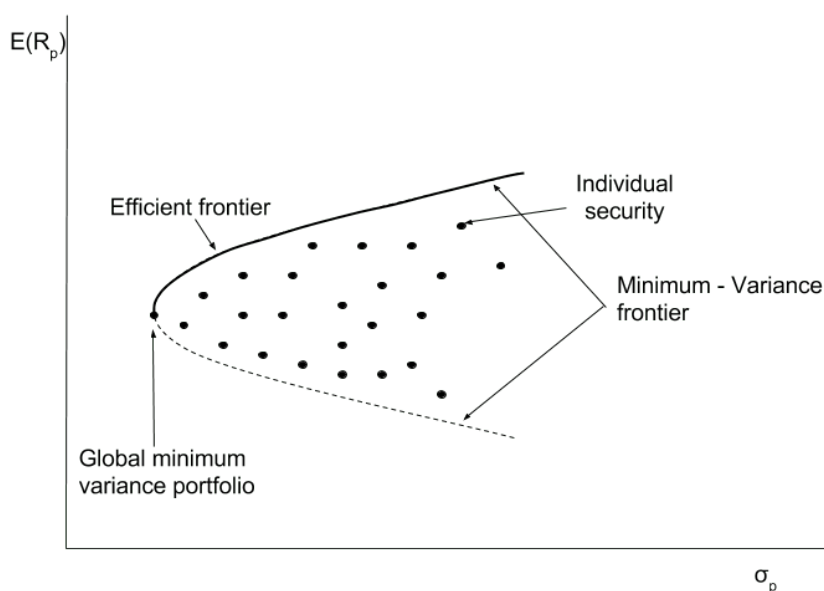
Der kan sammensættes mange forskellige porteføljer, alt efter hvordan aktiverne vægtes i porteføljen. De interessante porteføljer er de, som er en del af minimum varians mængden,

se Figur 2.1. Minimum varians mængden består af alle de porteføljer, som har den mindste risiko givet et forventet afkast. Porteføljen med den mindste risiko ligger længst til venstre i diagrammet og betegnes som den globale minimum varians portefølje. De interessante porteføljer for en investor er de porteføljer, som ligger på den øvre halvdel af minimum varians kurven. Denne del kaldes den efficiente frontier. Porteføljerne, der ligger på den efficiente frontier, er effektive porteføljer, og det er disse porteføljer, Markowitz Modellen finder. De effektive porteføljer findes ved at løse nedenstående optimeringsproblem

$$\text{MIN } \sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}} \quad (2.11)$$

$$\text{betinget af } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} = \mu, \quad (2.12)$$

hvor $\mathbf{1}$ er en vektor med ét taller i hver indgang, og μ er et givet forventet afkast.



Figur 2.1: Minimum varians mængde og efficient frontier [12].

Hvis man yderligere kombinerer sin portefølje af N aktiver med et risikofrit aktiv, ændres mængden af effektive porteføljer til en ret linje, se Figur 2.2. Det risikofrie aktiv har et deterministisk afkast, $\bar{r} = r_f$ og en standardafvigelse $\sigma_f = 0$. Den nye portefølje, der kombinerer porteføljen af risikofyldte aktiver og det risikofrie aktiv, har et forventet afkast på

$$\bar{r}_k = \omega_1 r_f + \omega_2 \bar{r}_p \quad (2.13)$$

og en standardafvigelse på

$$\sigma_k = \omega_2 \sigma_p, \quad (2.14)$$

hvor $\omega_1 + \omega_2 = 1$ er vægtene af det risikofrie aktiv og porteføljen. Ligning (2.14) kan omskrives til $\omega_2 = \frac{\sigma_k}{\sigma_p}$, hvilket medfører $\omega_1 = 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_p}$. Indsættes dette i (2.13) får man Capital Allocation Line (CAL):

$$\bar{r}_k = r_f + \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \sigma_k. \quad (2.15)$$

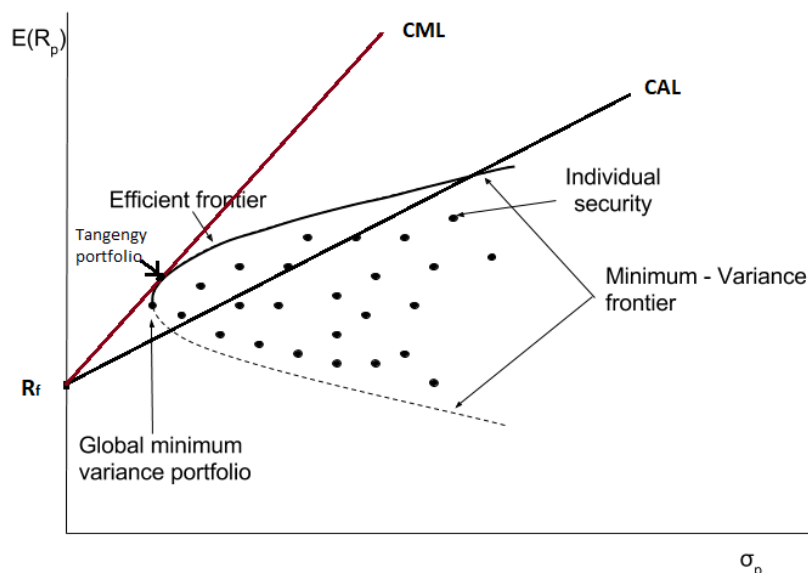
Hældningen af CAL linjen er givet ved ratioen

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}, \quad (2.16)$$

som kaldes Sharpe ratioen. Ratioen beskriver forholdet mellem det overskydende afkast af porteføljen med N aktiver og dens risiko. Det overskydende afkast er det forventede afkast af porteføljen minus det risikofrie aktivs afkast. En højere ratio betyder, at forholdet mellem overskydende afkast og risiko forbedres, og investoren får et større afkast givet et niveau af risiko. Porteføljen, der maksimerer Sharpe ratioen, kaldes tangent porteføljen, og porteføljen ligger på den efficiente frontier, se Figur 2.2. Den rette linje, der forbinder det risikofrie aktiv og tangent porteføljen, kaldes Capital Market Line, CML, og den er givet ved formelen

$$\bar{r}_k = r_f + \frac{\bar{r}_T - r_f}{\sigma_T} \sigma_k, \quad (2.17)$$

hvor $\bar{r}_T$ er det forventede afkast, og σ_T er volatiliteten af tangent porteføljen.



Figur 2.2: Capital Allocation Line og Capital Market Line [12].

2.3 Capital Asset Pricing Model

Denne sektion er baseret på [8], [10], [13], [14] og [15] medmindre andet er angivet.

I starten af 1960'erne publicerede William Sharpe, John Lintner og Jan Mossin Capital Asset Pricing Modellen. Modellen bygger videre på Markowitz Modellen beskrevet i forrige sektion og beskriver relationen mellem et aktivs risiko og aktivets forventede afkast.

I projektet gælder følgende antagelser omkring markedet og investorerne:

- *Investorer kan købe og sælge aktiver til markedspris, hvor der ikke tages hensyn til transaktionsomkostninger og skat.*
- *Investorer kan låne kapital til den risikofrie rente.*
- *Investorerne holder kun den effektive portefølje, som maksimerer ens forventede afkast for en given standardafvigelse.*
- *Alle investorer er rationelle og optimerer deres portefølje efter forventet afkast og standardafvigelse ved brug af Markowitz modellen.*
- *Investorer har homogene forventninger mht. volatilitet, korrelation og forventet afkast for aktiverne.*

På baggrund af antagelserne om, at investorerne har homogene forventninger, samt de optimerer deres portefølje efter forventet afkast og standardafvigelse ved brug af Markowitz Modellen, så vil alle investorer komme frem til den samme effektive mængde af porteføljer og dermed også den samme Capital Market Line. Alle investorer investerer derfor i en blanding af det risikofrie aktiv og tangentporteføljen. Tangentporteføljen kaldes markedsporteføljen. Markedsporteføljen består af alle aktiver i markedet, og hvert aktivs vægt i porteføljen er aktivets markedsværdi divideret med den totale markedsværdi. Capital Market Line kan da skrives som

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m} \sigma_p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m}, \quad (2.18)$$

hvor $\bar{r}_m$ er det forventet afkast, og σ_m er volatiliteten af markedsporteføljen. Det vil sige, at alle effektive porteføljer har den samme Sharpe ratio som markedsporteføljen.

2.3.1 Security Market Line (SML)

CAPM er beskrevet af følgende relation, som også kaldes for Security Market Line:

$$\bar{r}_j = r_f + \beta_j(\bar{r}_m - r_f) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{r}_j - r_f = \beta_j(\bar{r}_m - r_f). \quad (2.19)$$

(2.19) beskriver relationen mellem det forventede overskydende afkast af en investering og investeringens risiko. Investeringens risiko er målt med faktoren beta. Ifølge CAPM er det

overskydende afkast af en investering proportionelt med markedsporteføljens overskydende afkast med proportionalitetsfaktoren β , som er defineret ved:

$$\beta_j = \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)} = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}. \quad (2.20)$$

Beta måler, hvordan aktiv j kovarierer i forhold til markedsporteføljen r_m , skaleret med variansen af markedsporteføljen, som ses i (2.20). SML kan betragtes som en linje i $(\beta, \bar{r}_j - r_f)$ planet, hvor markedets overskydende afkast, $\bar{r}_m - r_f$, er hældningskoefficienten af linjen. Markedsporteføljen har en β på 1, og det risikofrie aktiv har en β på 0. Det vil sige, at hvis r_j har en stor korrelation med markedet, så er β stor, og dermed vil man forvente et større afkast på $\bar{r}_j$ end på $\bar{r}_m$, givet at $\bar{r}_m > 0$. Generelt kan værdierne af β fortolkes som:

- $\beta < 0$: Aktivets afkast vil bevæge sig modsat af markedets afkast.
- $\beta = 0$: Aktivet er ukorreleret med markedet.
- $\beta \in (0,1)$: Aktivets afkast bevæger sig i samme retning som markedets afkast med mindre volatilitet end markedet.
- $\beta = 1$: Aktivets afkast er det samme som markedets afkast.
- $\beta > 1$: Aktivets afkast bevæger sig i samme retning som markedets afkast med større volatilitet end markedet.

For et aktiv der er ukorreleret med markedet, $\beta_j = 0$, så vil aktivets forventede afkast være $\bar{r}_j = r_f$ ifølge modellen. Dette gælder også, selvom risikoen for aktivet er stor, $\sigma_j > 0$, og der vil ikke være nogen gevinst for at påtage sig den ekstra risiko. Forskellen på CML og SML linjen er, at CML beskriver effektive porteføljer, og det overskydende afkast afhænger af volatiliteten af aktivet, hvilket betyder, at man i det tilfælde med stor risiko også vil forvente et stort afkast. Derimod beskriver SML alle aktiver, og risikoen for et aktiv beskrives i stedet af korrelationen mellem aktivet og markedet. Endvidere for et aktiv med $\beta_j < 0$ og $r_m > r_f$, så vil $\bar{r}_j < r_f$, også selvom aktivet har en høj volatilitet.

2.3.2 Kritik og anvendelse af modellen

Denne sektion er baseret på [16] og [17].

Forskningsartiklen [16] er baseret på resultater fra USA, Spanien, Kina, Brasilien, Indien og Indonesien. I USA blev CAPM testet fra 2001-2011 på large cap aktier, hvor det blev påvist, at CAPM ikke kunne forklare afkastet. Dermed kunne den systematiske risiko ikke forklare det forventede afkast og afviser dermed CAPM. I Indien, som er et emerging marked, blev det påvist, at der er en negativ relation mellem beta og det forventede afkast. Derved er CAPM også ineffektiv i Indien.

I Kina derimod, fandt man en positiv korrelation mellem beta og det overskydende afkast, dog er skæringspunktet i modellen ikke nul. I Indonesien viste CAPM, at den tilnærmelsesvist kunne forklare det forventede afkast og påvise, at alfa er nul.

I artiklen ses der også på markedsporteføljen. I praksis anvendes et proxy af markedsporteføljen. Denne proxy er ikke på den efficiente frontier, som CAPM ellers antyder. I artiklen finder de frem til, at denne proxy ligger under den efficiente frontier. Det er ikke muligt at finde den sande markedsportefølje, da samtlige aktier skal inkluderes, og derved er det ikke muligt at teste CAPM. Derfor anvendes et proxy, som fx. *S&P 500*.

Et andet kritikpunkt af CAPM er modellens antagelser. Antagelsen om en rationel investor er påvist til ikke at være sandt. Investorer reagerer forskelligt på nye informationer i markedet, og antagelsen om, at investorer har homogene forventninger, holder ikke empirisk.

Konklusionen i artiklen er, at modellen viser forskellige resultater alt efter land og tidsperiode, og derved er der stor usikkerhed omkring modellen.

Rolf Banz skrev som en af de første i 1981 i *The relationship between return and market value of common stock* om, at small cap aktier outperformede large cap over en længere periode. Der er derefter lavet adskillige artikler om netop dette emne. Denne størrelsespræmium, der er, sætter også spørgsmålstegn ved CAPM, som siger, at det forventede afkast kun afhænger af β , altså hvor meget aktien er korreleret med markedet. Men en small cap portefølje har netop konsistent slået markedet, har Rolf Banz vist, samt mange andre senere hen. Small cap aktier har ofte større volatilitet og mindre gennemsigthed. Det er sværere at få informationer på mindre virksomheder i markedet, og det skyldes bl.a., at der er færre analytikere, der ser på small cap aktier, og small cap aktier får derved mindre opmærksomhed i medierne. Det kan resultere i, at alt information ikke er prissat i aktiekursen.

Selvom small cap outperformer large cap, er der stadig en stor del af small cap aktier, som går konkurs. I 2018 var der 45% af Russel 2000 selskaber, som havde negativ indtjening, sammenlignet med *S&P 500*, hvor kun 10% havde negativ indtjening. Derved handler det også om at finde de rigtige small cap aktier.

2.4 Faktormodeller

Denne sektion er baseret på [8], [9], [10] og [11].

Faktormodeller anvendes til at forklare variationen af afkastet på baggrund af fundamentale faktorer. For N aktiver kan afkastet for aktiv j , $j = 1, \dots, N$, beskrives med en faktormodel på formen

$$r_{t,j} - r_{t,f} = \alpha_j + \sum_{i=1}^p \beta_{i,j} F_{t,i} + \epsilon_{t,j}, \quad (2.21)$$

hvor responsvariablen, $r_{t,j}$, er afkastet af aktiv j til tid t , $t = 1, \dots, T$. Risikofaktorerne $F_{t,i}$, $i = 1, \dots, p$ er forklarende variable og beskriver forskellige typer af markedsrisici. $r_{t,f}$ er afkastet på det risiko frie aktiv. Fejlleddene $\epsilon_{t,j}$ antages at være uafhængige og identisk

fordelte stokastiske variable med middelværdi 0. Dermed antages det, at $\mathbb{E}[\epsilon_{t,j}] = 0$, samt $\text{Kov}(\epsilon_{t,j}, \epsilon_{t,i}) = 0$ og $\text{Kov}(\epsilon_{t,j}, F_{t,i}) = 0$.

Alfa måler, hvordan aktivet performer udover, hvad modellen forudsiger, eftersom alfa er forskellen mellem modellens prædikterede afkast og det faktiske afkast. Dertil betyder det, at hvis et aktiv har en positiv alfa, så har aktivet outperformat markedet i forhold til modellens forudsigelser, og aktivet har derved haft et merafkast. Parametrene β måler aktivernes sensitivitet i forhold til de enkelte faktorer i modellen. Faktormodeller kan derfor være et nyttigt værktøj i risikoanalyse og porteføljestyring, eftersom modellens parametre fortæller noget om aktivernes sensitivitet til de forskellige former for risici i markedet beskrevet af modellens faktorer.

Givet modellens antagelser kan kovariansen mellem to aktiver beskrives alene ud fra β parametrene og kovariansmatricen mellem faktorerne:

$$\text{Kov}[r_j, r_i] = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^p \beta_{l,j} \beta_{k,i} \text{Kov}[F_l, F_k]. \quad (2.22)$$

Det vil sige, at man kan udlede, hvordan afkastet af to aktiver kovarierer alene ud fra aktivernes faktorsensitivitet og faktorernes kovarians. Ydermere kan variansen af et aktivs afkast findes ved:

$$\text{Var}[r_j] = \sum_{k=1}^p \beta_{k,j}^2 \text{Var}[F_k] + \text{Var}[\epsilon_j]. \quad (2.23)$$

Variansen af et aktiv kan deles op i to dele. En faktorspecifik del, $\sum_{k=1}^p \beta_{k,j}^2 \text{Var}[F_k]$ og en firmaspecifik del, $\text{Var}[\epsilon_j]$. Den faktorspecifikke del kaldes for systematisk risiko, fordi det er den del af variansen, der kommer fra hændelser i markedet. Den firmaspecifikke del kaldes for den usystematiske risiko og er risikoen, der udelukkende kommer fra det enkelte aktiv.

Faktormodellen for N aktiver med overskydende afkast $R_{t,j} = r_{t,j} - r_{t,f}$ kan opstilles med følgende matrix notation:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,N} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \cdots & R_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{T,1} & R_{T,2} & \cdots & R_{T,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & F_{1,1} & F_{1,2} & \cdots & F_{1,p} \\ 1 & F_{2,1} & F_{2,2} & \cdots & F_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_{T,1} & F_{T,2} & \cdots & F_{T,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdots & \alpha_{0,N} \\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \cdots & \beta_{p,N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,1} & \epsilon_{1,2} & \cdots & \epsilon_{1,N} \\ \epsilon_{2,1} & \epsilon_{2,2} & \cdots & \epsilon_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{T,1} & \epsilon_{T,2} & \cdots & \epsilon_{T,N} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Varians kovarians matricen mellem aktiver er da givet ved

$$\Sigma = \boldsymbol{\beta}' \Sigma_F \boldsymbol{\beta} + \Sigma_{\epsilon}, \quad (2.26)$$

hvor Σ_F er varians kovarians matricen mellem faktorerne og Σ_{ϵ} er en diagonal matrix bestående af de enkelte aktivers usystematiske risiko.

2.4.1 CAPM som faktor model

CAPM kan betragtes som en faktor model bestående af én faktor, markedsfaktoren. Det kan skrives på følgende måde:

$$r_{t,j} - r_{t,f} = \alpha_j + \beta_j(r_{t,m} - r_{t,f}) + \epsilon_{t,j}, \quad \epsilon_{t,j} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon,j}^2). \quad (2.27)$$

Denne regressionsmodel kaldes for Security Characteristic Line (SCL), og hvis den fortolkes i forhold til SML, kan det overskydende afkast af aktiv j betragtes som en funktion af markedets overskydende afkast, hvor β er hældningskoefficienten af linjen. Alfa fortolkes som et mål for, om et aktiv er korrekt prissat i forhold til CAPM og skal derfor ifølge CAPM være lig med nul. Dermed vil investorer være interesseret i aktiver med en positiv alfa værdi, fordi det betyder, at de vil få et større afkast end de burde i forhold til den risiko de påtager sig ifølge modellen. Den forventede værdi af (2.27) er givet ved

$$\bar{r}_{t,j} - r_{t,f} = \alpha_j + \beta_j(\bar{r}_{t,m} - r_{t,f}), \quad (2.28)$$

hvilket er relationen for CAPM, hvis $\alpha = 0$. Ved at tage korrelationen i forhold til markedet på begge sider af ligningen med antagelserne om, at $\text{Kov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ og $\text{Kov}(\epsilon_i, r_m) = 0$, findes β af modellen:

$$\begin{aligned} \text{Kov}[r_{t,j} - r_{t,f}, r_m] &= \text{Kov}[\alpha_j + \beta_j(r_{t,m} - r_{t,f}) + \epsilon_{t,j}, r_m] \\ &\Downarrow \\ \sigma_{jm} &= \beta_j \sigma_m^2 \\ &\Downarrow \\ \beta_j &= \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Det vil sige, at β er defineret på samme måde som i SCL, og dermed kan SCL fortolkes som en generalisering af CAPM. SCL har ikke antagelsen om, at markedet er i ligevægt, og derfor kan alfa fortolkes som værende et mål for, om aktivet har et merafkast i forhold til CAPM. Variansen af afkastet til aktiv j er givet ved

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon,j}^2, \quad (2.30)$$

og kovariansen mellem aktiv j og aktiv i er givet ved:

$$\sigma_{ji} = \beta_j \beta_i \sigma_m^2. \quad (2.31)$$

Variansen af aktiv j er todelt. Den første del, $\beta_j^2 \sigma_m^2$, repræsenterer den systematiske risiko, som er den risiko, der påvirker hele markedet og ikke kan elimineres gennem diversificering. Den systematiske risiko er faktorer, som påvirker det samlede marked, og den kan ikke elimineres. Det er risikoen for at være i markedet. Det er ofte makroøkonomiske nyheder som f.eks. inflation og renter, der er indeholdt i den systematiske risiko. Den anden del er $\sigma_{\epsilon,j}^2$, som er den usystematiske risiko af aktivet. Den usystematiske risiko er den risiko, som

påvirker den enkelte virksomhed, men ikke det samlede marked. Ved at diversificere ens aktiver kan den usystematiske risiko elimineres.

For at illustrere, at den usystematiske risiko kan fjernes gennem diversificering, betragtes afkastet af en portefølje bestående af N aktiver, $r_{t,p}$. Ifølge SCL er det givet ved

$$r_{t,p} = r_{t,f} + \left(\sum_{j=1}^N w_j \beta_j \right) (r_{t,m} - r_{t,f}) + \sum_{j=1}^N w_j \epsilon_{t,j}, \quad (2.32)$$

hvor $\beta_p = \sum_{j=1}^N w_j \beta_j$ og $\epsilon_{t,p} = \sum_{j=1}^N w_j \epsilon_{t,j}$. Variansen af porteføljen kan derfor udtrykkes som:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon,p}^2. \quad (2.33)$$

Her fokuseres på den usystematiske risiko. Da fejlleddene er ukorrelerede gælder det, at:

$$\sigma_{\epsilon,p}^2 = \sum_{j=1}^N w_j^2 \sigma_{\epsilon,j}^2. \quad (2.34)$$

Ved antagelse om, at alle aktiver har samme vægt, $w_j = \frac{1}{N}$, fås

$$\sigma_{\epsilon,p}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \sigma_{\epsilon,j}^2}{N^2} = \frac{\bar{\sigma}_{\epsilon}^2}{N}, \quad (2.35)$$

hvor $\bar{\sigma}_{\epsilon}^2$ er gennemsnittet af $\sigma_{\epsilon,j}^2$, som antages at være konstant, så vil $\sigma_{\epsilon,p}^2$ gå mod nul, når N går mod uendeligt. Derfor vil man ved at holde mange aktiver i sin portefølje, $N \gg 0$, kunne reducere den usystematiske risiko i sin portefølje således, at der kun er den systematisk risiko tilbage beskrevet af faktorerne.

2.5 Fama French Fem Faktor Model

Denne sektion er baseret [16], [18], [19], [20], [21] og [22].

Fama French Fem Faktor Modellen er en udvidelse af CAPM, hvor der tilføjes fire faktorer udover markedsfaktoren, der kan hjælpe med at forklare afkastet. De fire faktorer er størrelsesfaktoren (SMB), value faktoren (HML), afkastningsgraden (RMW) og investeringsfaktoren (CMA). Fem faktor modellen kan opstilles således:

$$r_{t,j} - r_{t,f} = \alpha_{t,j} + \beta_{1,j}(r_{t,m} - r_{t,f}) + \beta_{2,j} \cdot SMB_t + \beta_{3,j} \cdot HML_t + \beta_{4,j} \cdot RMW_t + \beta_{5,j} \cdot CMA_t + \epsilon_{t,j}. \quad (2.36)$$

Fejlleddene antages at være uafhængige og identisk normalfordelte med middelværdi på 0. Tilføjjelsen af de ekstra faktorer er lavet, fordi disse faktorer historisk set har haft en indflydelse på afkastet på aktier, og derfor hjælper de til bedre at kunne forklare afkastet. Faktorerne beskrives i de kommende undersektioner.

2.5.1 Fama French Faktorer

Markedsfaktoren

Markedsfaktoren viser sammenhængen mellem afkastet på et aktiv og på markedet. Denne faktor er den samme, som anvendes i CAPM, og er beskrevet i Undersektion 2.3.1.

Størrelsesfaktoren (SMB)

SMB er størrelsesfaktoren og fortæller, hvordan small cap aktier performer i forhold til large cap aktier. SMB står for "small minus big", hvilket betyder, at en positiv værdi for SMB betyder, at small cap aktier outperformer large cap aktier. Idéen med SMB er, at en portefølje bestående af flere small cap aktier over lang tid vil outperforme en portefølje bestående af large cap aktier. SMB kan udregnes således

$$SMB = r_{\text{Small}} - r_{\text{Large}}, \quad (2.37)$$

hvor r_{small} er afkastet på en portefølje bestående af small cap aktier, og r_{Large} er afkastet på en portefølje bestående af large cap aktier. SMB er altså et mål for forskellen mellem at investere i small cap aktier mod large cap aktier. Porteføljesammensætningen har stor betydning, og derfor er det vigtigt, at porteføljerne er repræsentativt for markedet, da SMB ellers ikke vil afspejle den faktiske betydning af small cap aktier mod large cap aktier.

I small cap aktier har bestyrelsen ofte selv en vis aktieandel af selskabet og har derved et større incitament til at skabe langsigtet værdi for aktionærene. Da det er et mindre selskab, kan virksomheden nemmere og mere effektivt allokere sin kapital end større virksomheder. De har også nemmere ved at vækste, da det er et mindre selskab. Desto større virksomheden bliver, desto sværere bliver det at vækste på et højt niveau. De har også nemmere ved skifte retning i markedet og komme ind på nye markeder relativt hurtigt.

Value faktoren (HML)

HML er value faktoren og fortæller, hvordan value aktier performer i forhold til vækst aktier. Value aktier har en høj B/M ratio, hvor B/M ratioen udregnes således:

$$B/M = \frac{\text{Egenkapital}}{\text{Markedsværdi}}. \quad (2.38)$$

En B/M ratio større end 1 betyder, at en virksomhed har aktiver, der er mere værd end virksomhedens markedsværdi. En aktie med en høj B/M siges derfor at være billigt prissat, hvorfor man kalder dem value aktier. Vækst aktier er derimod aktier, hvor man forventer, at de får en større indtjening i fremtiden, og de er derfor prisfastsat højt grundet forventningerne og har derved en lav B/M værdi. HML står for "high minus low" og kan udregnes ved

$$HML = r_{\text{Value}} - r_{\text{Vækst}}, \quad (2.39)$$

hvor r_{value} er afkastet på en portefølje bestående af value aktier, og $r_{\text{vækst}}$ er en portefølje bestående af vækstaktier. Det er altså et mål for forskellen i afkast mellem value aktier og vækst aktier. Historisk set har value aktier outperformet vækst aktier, hvilket er grunden til, at den er med som en faktor.

Afkastningsgrad (RMW)

RMW er afkastningsgraden og fortæller, hvordan aktier med en høj EBIT performer i forhold til aktier med en lav EBIT. EBIT står for "earnings before interest and taxes", hvilket betyder, hvor meget en virksomhed har tjent efter driftsomkostninger, men før skat og renter. RMW står for "robust minus weak", hvor robuste virksomheder har en høj EBIT, og svage virksomheder har en lav EBIT. Historisk set performer robuste aktier bedre end svage aktier, hvilket er grunden til, at Fama og French har inkluderet det som en faktor i deres model. RMW kan udregnes således

$$RMW = r_{\text{Robust}} - r_{\text{Svag}}, \quad (2.40)$$

hvor r_{robust} er afkastet på en portefølje bestående af robuste aktier, og r_{svag} er en portefølje bestående af svage aktier.

Investeringsfaktor (CMA)

CMA er investeringsfaktoren og fortæller, hvordan aktier med en konservativ investeringsstrategi performer i forhold til aktier med en aggressiv investeringsstrategi. Ideén bag denne faktor er, at aktier med en konservativ investeringsstrategi performer bedre end dem med en aggressiv investeringsstrategi, fordi store investeringer sjældent forbedrer afkastet væsentligt på den korte bane, og det er ikke sikkert, at disse investeringer på den lange bane vil være positive. CMA står for "conservative minus aggressive" og kan udregnes således

$$CMA = r_{\text{Konservativ}} - r_{\text{Aggressiv}}, \quad (2.41)$$

hvor $r_{\text{konservativ}}$ er afkastet på en portefølje bestående af aktier med en konservativ investeringsstrategi, og $r_{\text{aggressiv}}$ er afkastet på en portefølje bestående af aktier med en aggressiv investeringsstrategi.

2.5.2 Konstruktion af Fama French Faktorerne

Denne undersektion er baseret på [23].

Markedsfaktoren udregnes ved at tage alle aktiers vægtede afkast på de tre børser, NYSE, AMEX og NASDAQ, og tager et gennemsnit af disse. Derefter trækkes det risikofrie aktiv fra, hvilket er en-månedes Treasury Bill renten i USA.

Til de fire andre faktorer konstrueres 18 porteføljer, hvor seks er delt op efter B/M og størrelse, seks er delt op efter EBIT og størrelse, og seks er delt op efter investeringsstrategi

og størrelse. Størrelsen er altid i forhold til small cap aktier og large cap aktier, der er delt op efter medianen, så de 50% største aktier målt på markedsværdi er large cap og de 50% mindste aktier er i small cap. Inddelingen af B/M ses på Figur 2.3.

	Median ME	
70th BE/ME percentile	Small Value	Big Value
	Small Neutral	Big Neutral
30th BE/ME percentile	Small Growth	Big Growth

Figur 2.3: Porteføljeinddeling i forhold til B/M [23].

B/M er altså inddelt i tre porteføljer efter 30% kvantilen og 70% kvantilen.

Det samme gør sig gældende for porteføljerne i forhold til EBIT, hvor Svag svarer til 30% kvantilen, Neutral svarer til de midterste 40%, og Robust svarer til de højeste 30%.

Det er også samme princip i forhold til investeringsstrategi, hvor der deles op efter 30% og 70% kvantilen. Her er den opdelt efter Konservativ, Neutral og Aggressiv.

Alle porteføljer revurderes hver juli, og det er disse porteføljers performance, der anvendes til at beregne faktorerne.

SMB er udregnet ud fra disse 18 porteføljer på følgende måde:

$$SMB_{B/M} = \frac{1}{3}(\text{Small Value} + \text{Small Neutral} + \text{Small Vækst}) - \frac{1}{3}(\text{Large Value} + \text{Large Neutral} + \text{Large Vækst}) \quad (2.42)$$

$$SMB_{EBIT} = \frac{1}{3}(\text{Small Robust} + \text{Small Neutral} + \text{Small Svag}) - \frac{1}{3}(\text{Large Robust} + \text{Large Neutral} + \text{Large Svag}) \quad (2.43)$$

$$SMB_{INV} = \frac{1}{3}(\text{Small Konservativ} + \text{Small Neutral} + \text{Small Aggressiv}) - \frac{1}{3}(\text{Large Konservativ} + \text{Large Neutral} + \text{Large Aggressiv}) \quad (2.44)$$

$$SMB = \frac{1}{3}(SMB_{B/M} + SMB_{EBIT} + SMB_{INV}). \quad (2.45)$$

SMB er altså udregnet ud fra alle 18 porteføljer, og der er taget et gennemsnit.

HML er ligeledes udregnet på følgende måde ud fra porteføljerne:

$$HML = \frac{1}{2}(\text{Small Value} + \text{Large Value}) - \frac{1}{2}(\text{Small Vækst} + \text{Large Vækst}). \quad (2.46)$$

RMW er udregnet således:

$$RMW = \frac{1}{2}(\text{Small Robust} + \text{Large Robust}) - \frac{1}{2}(\text{Small Svag} + \text{Large Svag}). \quad (2.47)$$

CMA er udregnet således:

$$CMA = \frac{1}{2}(\text{Small Konservativ} + \text{Large Konservativ}) - \frac{1}{2}(\text{Small Aggressiv} + \text{Large Aggressiv}). \quad (2.48)$$

2.5.3 Kritik og anvendelse af modellen

Denne sektion er baseret på [24] og [25].

Et kritikpunkt, der kan anvendes mod Fama French Fem Faktor Modellen er, hvorvidt faktorerne stadig er relevante i forhold til det nuværende marked. Dette kan for eksempel diskuteres ved afkastet på value aktier mod afkastet på vækst aktier. Historisk set har value aktier outperformet vækst aktier, men hvis der ses på afkast siden 2005, har vækst aktier outperformet value aktier. Dette kan ses i Figur 2.4.

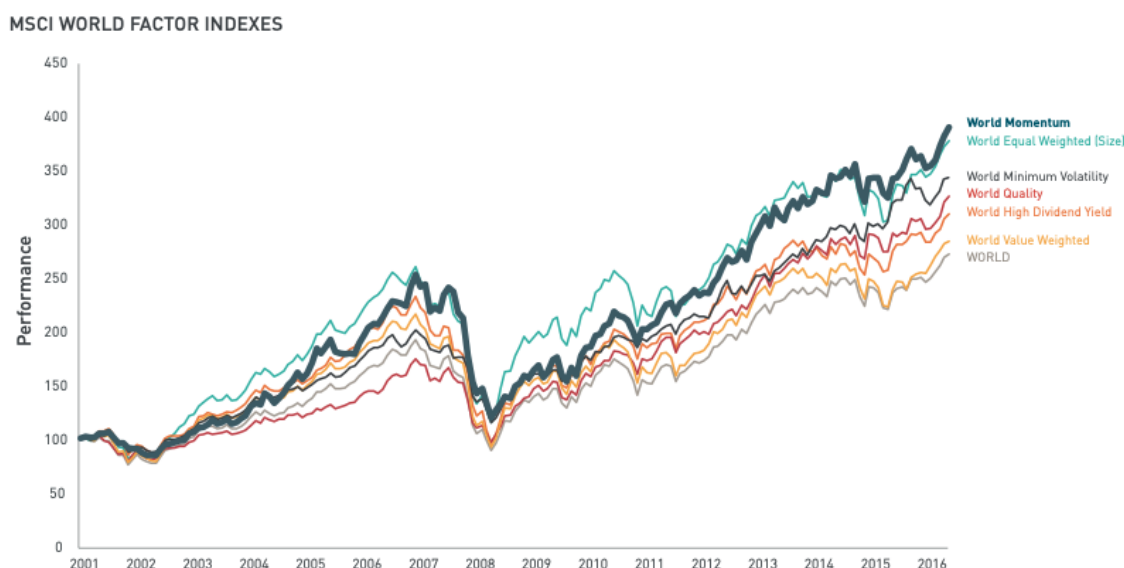


Figur 2.4: Afkastssammenligning mellem Vækst aktier S&P 500 Index og Value aktier S&P 500 Index fra 2005 til 2024. Data er fået fra Bloomberg.

I Figur 2.4 kan det ses, at vækst aktier har givet et afkast tæt på 600%, hvorimod value aktier har givet et afkast på omkring 300%. Disse tal gælder for vækst og value aktier i

S&P 500. Dette går imod faktoren HML, da den siger præcis det modsatte. Da dette er over en periode på 19 år, giver det et hint til, at der er sket en ændring i markedet, hvor vækst aktier outperformer value aktier.

Derudover er der også andre faktorer, der kan bidrage til at kunne forklare afkastet på en aktie. Det er for eksempel momentum faktoren, der er blevet en stor del af nutidens marked. Momentum faktoren fortæller, at hvis en aktie har momentum, det vil sige, at den stiger meget, vil den fortsætte med at stige, fordi flere og flere investorer vil ind i aktien, fordi de ikke vil gå glip af afkastet. Et eksempel på dette lige nu er tech-aktier og fedme-aktier. Disse typer aktier har momentum lige nu, og derfor er flere store aktier i disse markeder steget med over 80% i 2023. Dette gælder blandt andet Novo Nordisk, som er blevet Europas største børsnoterede selskab, og Nvidia, som er blevet et af verdens allerstørste selskaber. Det kan i Figur 2.5 ses, hvordan afkastet er på en strategi, hvor man investerer efter momentum.



Figur 2.5: Afkast i MSCI World Factor Indices fra 2001 til 2016. [25]

En investeringsstrategi i forhold til momentum giver altså fra 2001-2016 et højere afkast end de andre strategier i Figur 2.5. Det betyder, at momentum faktoren er relevant, da den kan være med til at forklare afkast, og man derfor efterlader noget ved ikke at tage den med i modellen.

2.5.4 Fama og French egen analyse

Dette underafsnit er baseret på [24].

I denne sektion ses der nærmere på Fama og French egen analyse af faktorerne og deres sammenhæng, som kommer fra artiklen "A five-factor asset pricing model". Figur 2.6 viser

sammenhængen mellem Size, B/M, OP og Inv. fra perioden 1963-2013, hvor der ses på månedlig afkast.

	Low	2	3	4	High
<i>Panel A: Size-B/M portfolios</i>					
Small	0.26	0.81	0.85	1.01	1.15
2	0.48	0.72	0.94	0.94	1.02
3	0.50	0.78	0.79	0.88	1.07
4	0.60	0.57	0.71	0.85	0.86
Big	0.46	0.51	0.48	0.56	0.62
<i>Panel B: Size-OP portfolios</i>					
Small	0.56	0.94	0.90	0.95	0.88
2	0.59	0.78	0.84	0.81	0.98
3	0.53	0.77	0.72	0.78	0.94
4	0.57	0.65	0.63	0.70	0.82
Big	0.39	0.33	0.43	0.47	0.57
<i>Panel C: Size-Inv portfolios</i>					
Small	1.01	0.98	0.99	0.89	0.35
2	0.92	0.91	0.92	0.90	0.48
3	0.90	0.93	0.81	0.82	0.50
4	0.79	0.72	0.71	0.75	0.54
Big	0.71	0.52	0.49	0.48	0.42

Figur 2.6: Sammenhæng mellem Size, B/M, OP(RMW) og investments [24].

På panel A ses der på sammenhængen mellem Size og B/M. Der er en tydelig tendens til, at når B/M stiger, så stiger det månedlige afkast også, hvilket indikerer, at value aktier slår growth aktier. Samtidig ses det også, at afkastet falder, når size stiger, hvilket indikerer, at small cap aktier performer bedre end large cap aktier. Derved fortæller panel A, at small cap value aktier giver et bedre afkast end large cap vækst aktier.

På Panel B ses der på sammenhængen mellem Size og Operating profit, som er RMW i projektet. På figuren fremgår det, at højere OP giver et bedre afkast, og at small cap aktier igen performer bedre end large cap aktier.

Panel C af Figur 2.6 viser forholdet mellem Size og Investment. Her ses det, at small cap aktier performer bedre end large cap aktier, og virksomheder, der investerer konservativt, laver et bedre afkast end virksomheder, der investerer aggressivt.

For at finde aktier, som giver det bedst mulige månedlige afkast, skal der findes small cap aktier, som er value aktier (høj B/M), samtidig med de har en høj operating profit,

og derudover skal de investere konservativt. Det viser Fama og French's egen analyse i perioden 1963-2013.

I Fama og French's egen artikel ses der også på korrelationerne mellem faktorene, som vist på Figur 2.7.

	$R_M - R_F$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>
$R_M - R_F$	1.00	0.28	-0.30	-0.21	-0.39
<i>SMB</i>	0.28	1.00	-0.11	-0.36	-0.11
<i>HML</i>	-0.30	-0.11	1.00	0.08	0.70
<i>RMW</i>	-0.21	-0.36	0.08	1.00	-0.11
<i>CMA</i>	-0.39	-0.11	0.70	-0.11	1.00

Figur 2.7: Korrelation mellem faktorene 1963-2013 [24]

Tabellen viser, at *SMB* er negativt korreleret med *HML*, *RMW* og *CMA*, men positivt med $r_m - r_f$. Det viser, at small cap aktier er mindre profitable og investerer mindre, men når markedet stiger, vil small cap aktier stige. Det ses, at $r_m - r_f$ er negativ korreleret med *HML*, *RMW* og *CMA*. Det betyder, at når markedet stiger, vil value aktier falde, de mest profitable aktier vil falde, og aktier med konservativ investeringer vil også falde.

På Tabel 2.1 ses korrelationerne mellem faktorene for perioden 2010 - 2019, som er perioden, der anvendes i projektet. Her sammenlignes de to korrelationsmatricer for at undersøge, om der er væsentlige ændringer i korrelationerne mellem faktorene. For $r_m - r_f$ ses det at *HML* er positiv med $r_m - r_f$, altså at value aktier stiger med markedet i stedet for at falde. Det ses også, at *SMB* er mere korreleret med markedet end før.

	Mkt-RF	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>
Mkt-RF	1.000000	0.394734	0.140631	-0.309337	-0.061214
<i>SMB</i>	0.394734	1.000000	0.226356	-0.436084	0.088216
<i>HML</i>	0.140631	0.226356	1.000000	-0.130838	0.613769
<i>RMW</i>	-0.309337	-0.436084	-0.130838	1.000000	0.040772
<i>CMA</i>	-0.061214	0.088216	0.613769	0.040772	1.000000

Tabel 2.1: Korrelation mellem faktorene fra 2010-2019.

For *SMB* gælder det, at der er kommet en positiv korrelation mellem small cap aktier og value aktier, samt at small cap aktier og profitabilitet er blevet positiv korreleret. *HML* er blevet negativ korreleret med *RMW*, dvs. når value aktier stiger, vil virksomheder med konservativ investeringer falde.

2.6 Effektive Markedshypoteser

Denne sektion er baseret på [26] og [27].

Den effektive markedshypotese fortæller, hvor godt markedet har indpriset alle informationer, der er i markedet. Hvis markedet er effektivt, kan man ikke slå markedet, og dermed vil det ikke være muligt at få et større afkast end markedsporteføljen. De tre former for effektive markeds hypoteser er beskrevet nedenfor.

Svag form

Svag form markedshypotesen fortæller, at aktiepriser reflekterer alt information i markedet, så som indtjeningsdata, historisk aktiekurs og volume. Derved kan teknisk analyse ikke anvendes til at forudsige aktiekursen. Her kan man stadig som fundamental analytiker slå markedet ved at finde undervurderede virksomheder. Den svage markedshypotese kaldes også for The random walk theory, da aktiens fremtidige pris er tilfældig og ikke er påvirket af fortidens hændelser.

Semi stærk form

Den semi stærke markedshypotese fortæller, at alt offentlig information omkring aktien er indpriset i aktien. Det er information som historiske aktiekurser, fundamental data omkring virksomheden, produkt linje, kvaliteten af ledelsen, regnskaber, forudsigelse af indtjening osv. Den semi stærke markedshypotese antager, at alt ny information i markedet hurtigt bliver indpriset i aktiekursen. Herved får aktierne et nyt ligevægtpunkt med de nye informationer indpriset i aktiekurserne. Den semi stærke markedshypotese fortæller, at hverken fundamental eller teknisk analyse vil slå markedet. Det er kun ved brug af insider information, at man ville kunne slå markedet, da alt offentlig information relateret til markedet og alle aktier er priset ind i aktiekurserne.

Stærk form

Ved den stærke markedshypotese er alt information indpriset i aktiekurserne. Det er både offentlig og insider information. I denne form for markedshypotese er det på ingen måde muligt at slå markedet, altså at få et afkast der er højere end markedsporteføljen.

2.6.1 Er aktiemarkedet efficient

Denne sektion er baseret på [28].

For at undersøge, hvorvidt markedet er effektivt, ses der på aktivt forvaltede fonde. Ses der på aktive amerikanske ejendomsfonde, har de slået de passive amerikanske ejendomsfonde 62% af tiden, men tager man alle omkostningerne fra, er det kun 25%. Også i obligationsmarkedet og emerging markeder slår de aktive forvaltere de passive fonde henholdsvis 59,5% og 58,3% af tiden.

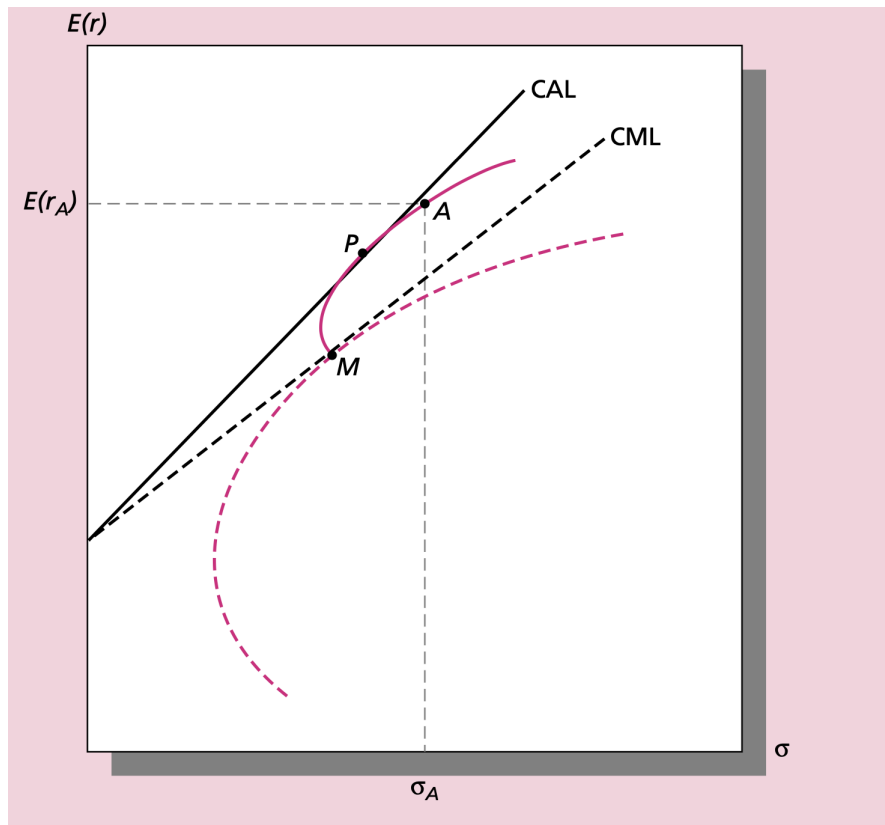
Ses der på amerikanske large cap aktier, er det kun 17,2% af de aktive forvaltede porteføljer, som outperformer de passivt forvaltede fonde, og inkluderes omkostningerne er tallet nede på 4,1%.

Resultaterne viser, at nogle markeder er mere efficiente end andre. Dette skyldes bl.a. likviditet, tilgængelighed af information og politik. Disse faktorer kan gøre, at nogle markeder ikke er efficiente. Det amerikanske large og mid cap er nogle af de markeder, som handles mest, og ny information er hurtigt inkorporeret i priserne, og derved er disse markeder mere efficiente end andre.

2.7 Treynor Black Model

Denne sektion er baseret på [15].

I porteføljeteori er der to former for strategier, passiv investering og aktiv investering. Ved passiv investering kopierer man vægtene af et markedsindeks, hvor hver aktie fylder dens andel af markedsværdien af det indeks. Her vil vægtene løbende opdateres ift. ændringer, der er sket i det pågældende indeks. Denne strategi stemmer overens med den effektive markedsteori, hvor alt information er prissat i aktierne, og man dermed ikke kan outperforme markedet. Aktiv investering ser bort fra den effektive markedsteori og antager, at alt information i markedet ikke er prissat i aktiekurserne, og derved kan man med en aktiv portefølje slå markedet. Treynor Black Modellen er en portefølje optimerende model, som optimerer Sharpe ratioen $S_p = \frac{R_p}{\sigma_P}$ ved at kombinere markedsporteføljen med en aktiv portefølje. Som nævnt tidligere er det overskydende afkast noteret ved $R_P = r_P - r_f$. I projektet er markedsporteføljen konstrueret af alle aktier i NYSE, AMEX og NASDAQ. For at den aktivt forvaltede portefølje skal kunne slå markedet, antages det, at markedet ikke er efficient, og der er aktier med $\alpha \neq 0$.



Figur 2.8: Aktiv og passiv portefølje [27].

På Figur 2.8 er CML linjen indtegnet, der ifølge CAPM er den CAL, der maksimerer Sharpe ratioen. Treynor Black Modellen viser derimod, at man ved at kombinere en aktiv portefølje med markedsporteføljen kan konstruere en portefølje, der giver CAL linjen en større Sharpe ratio end CML. Porteføljen A på figuren repræsenterer en aktiv portefølje af aktier, hvor det gælder at $\alpha \neq 0$. Den aktive porteføljes afkast er beskrevet af ligningen

$$R_{t,A} = \alpha_A + \beta_A R_{t,m} + \epsilon_{t,A}, \quad (2.49)$$

hvor porteføljen usystematiske risiko er $Var(\epsilon_{t,A}) = \sigma_{\epsilon,A}^2$. Ydermere er α_A , β_A og $\sigma_{\epsilon,A}^2$ givet ved:

$$\alpha_A = \sum_{j=1}^N w_j \alpha_j \quad (2.50)$$

$$\beta_A = \sum_{j=1}^N w_j \beta_j \quad (2.51)$$

$$\sigma_{\epsilon_A}^2 = \sum_{j=1}^N w_j^2 \sigma_{\epsilon_j}^2. \quad (2.52)$$

De optimale vægte af aktierne i den aktive portefølje findes ved at maksimere information ratioen af den aktive portefølje, der er givet ved $\frac{\sum_{j=1}^N w_j \alpha_j}{\sum_{j=1}^N w_j^2 \sigma_{\epsilon,j}^2}$. Information ratioen beskriver forholdet mellem porteføljens merafkast og dens usystematiske risiko. For at finde vægtene af aktiverne i den aktive portefølje skal følgende optimeringsproblem løses:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{w}'\Sigma_{\epsilon}\mathbf{w}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Optimeringsproblemet løses ved at bruge Lagrange optimering, og Lagrange funktionen er:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha}}{(\mathbf{w}'\Sigma_{\epsilon}\mathbf{w})^{\frac{1}{2}}} + \lambda(\mathbf{1}'\mathbf{w} - 1). \quad (2.54)$$

Ligningen differentieres i forhold til $\mathbf{w}$ og λ og sættes lig nul:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{w}'\Sigma_{\epsilon}\mathbf{w})^{-\frac{1}{2}} - (\mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{w}'\Sigma_{\epsilon}\mathbf{w})^{-\frac{3}{2}}\Sigma_{\epsilon}\mathbf{w} + \lambda\mathbf{1} = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{1}'\mathbf{w} - 1 = 0. \quad (2.56)$$

Løsningen til ligningssystemet er givet ved:

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma_{\epsilon}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{1}'\Sigma_{\epsilon}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}. \quad (2.57)$$

Dermed er vægtene for aktierne i den aktive portefølje givet ved (2.57), som for $j = 1, \dots, N$ kan skrives som:

$$w_j = \frac{\frac{\alpha_j}{\sigma_{\epsilon,j}^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\sigma_{\epsilon,i}^2}}. \quad (2.58)$$

Det gælder, at desto højere alfa er for en given aktie, desto højere vægt tildeles den. Omvendt gælder det, at hvis $\sigma_{\epsilon,i}^2$ er høj, tildeles aktien en mindre vægt. Ligeledes vil man shorte aktier, der har en negativ alfa.

Den optimale portefølje, der kombinerer en aktiv portefølje og en passiv portefølje, er givet ved vægtene til tangentporteføljen, fordi det er den portefølje, der optimerer Sharpe ratioen. For at bestemme vægtene til den optimale portefølje skal Sharpe ratioen af porteføljen optimeres. Optimeringsproblemet kan opstilles som

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - r_f}{(\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w})^{\frac{1}{2}}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1, \end{aligned} \quad (2.59)$$

hvor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_A \\ 1 - w_A \end{bmatrix}$.

Optimeringsproblemet løses ved at anvende Lagrange optimering, og Lagrange funktionen er:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - r_f}{(\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w})^{\frac{1}{2}}} + \lambda(\mathbf{1}'\mathbf{w} - 1). \quad (2.60)$$

Ligningen differentieres i forhold til $\mathbf{w}$ og λ og sættes lig nul:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w})^{-\frac{1}{2}} - (\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - r_f)(\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w})^{-\frac{3}{2}}\Sigma\mathbf{w} + \lambda\mathbf{1} = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{1}'\mathbf{w} - 1 = 0. \quad (2.62)$$

Løsningen til ligningssystemet er givet ved:

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - r_f \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - r_f \cdot \mathbf{1})}. \quad (2.63)$$

Dermed er vægtene for tangentporteføljen givet ved (2.63). For at udregne vægtene for den optimale portefølje, der kombinerer den aktive og passive portefølje, skal vægten w_A findes, som er vægten for den aktive portefølje. Vægten for den passive portefølje findes ved $1 - w_A$. Vægten w_A er ud fra (2.63) givet ved:

$$w_A = \frac{[\mathbb{E}(r_A) - r_f]\sigma_M^2 - [\mathbb{E}(r_M) - r_f]\sigma_{AM}}{[\mathbb{E}(r_A) - r_f]\sigma_M^2 + [\mathbb{E}(r_M) - r_f]\sigma_A^2 - [\mathbb{E}(r_A) - r_f + \mathbb{E}(r_M) - r_f]\sigma_{AM}}. \quad (2.64)$$

Følgende egenskaber gælder fra CAPM:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_A) - r_f &= \alpha_A + \beta_A \bar{R}_M, \quad \text{hvor } \bar{R}_M = \mathbb{E}(r_M) - r_f \\ \sigma_{AM} &= \beta_A \sigma_M^2 \\ \sigma_A^2 &= \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon, A}^2 \\ [\mathbb{E}(r_A) - r_f] + [\mathbb{E}(r_M) - r_f] &= \alpha_A + \bar{R}_M(1 + \beta_A). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ved at indsætte (2.65) i (2.64) kan det reduceres således:

$$w_A = \frac{(\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M)\sigma_M^2 - \bar{R}_M \beta_A \sigma_M^2}{(\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M)\sigma_M^2 + \bar{R}_M \sigma_A^2 - (\alpha_A + \bar{R}_M(1 + \beta_A))\beta_A \sigma_M^2}.$$

Der divideres med σ_M^2 i både tæller og nævner:

$$\begin{aligned}
 w_A &= \frac{(\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M) - \bar{R}_M \beta_A}{\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M + \bar{R}_M \frac{\sigma_A^2}{\sigma_M^2} - (\alpha_A + \bar{R}_M(1 + \beta_A)) \beta_A} \\
 &= \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M + \bar{R}_M \frac{\sigma_A^2}{\sigma_M^2} - \alpha_A \beta_A - \beta_A \bar{R}_M - \beta_A^2 \bar{R}_M} \\
 &= \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \bar{R}_M \frac{\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_M^2} - \alpha_A \beta_A \beta_A^2 \bar{R}_M} \\
 &= \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \bar{R}_M \frac{\sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_M^2} - \alpha_A \beta_A} \\
 &= \frac{\alpha_A}{(1 - \beta_A) \alpha_A + \bar{R}_M \frac{\sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_M^2}}. \tag{2.66}
 \end{aligned}$$

Den optimale vægt af den aktive portefølje kan udregnes ud fra (2.66). Derved bliver den optimale vægt i markedsporteføljen $w_M = 1 - w_A$.

Hvis det antages, at $\beta_A = 1$, reduceres (2.66) til:

$$w_{0,A} = \frac{\frac{\alpha_A}{\bar{R}_M}}{\frac{\sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_m^2}}. \tag{2.67}$$

Det betyder, at der investeres mere i den aktive portefølje desto større merafkast, der er i den aktive portefølje i forhold til afkastet af markedsporteføljen.

Ved at omskrive (2.66) med (2.67) kan w_A også skrives således

$$w_A = \frac{w_{0,A}}{1 + (1 - \beta_A)w_{0,A}}, \tag{2.68}$$

hvilket betyder, at desto større β_A er, desto større er w_A . Derfor vil en større β_A værdi betyde, at der investeres mere i den aktive portefølje for at drage fordel af de forkert prissatte aktier. For at summen af vægtene i den optimale portefølje er 1, skaleres vægtene w_j således, at de optimale vægte for aktiverne i den aktive portefølje er givet ved:

$$w_j^* = w_A w_j. \tag{2.69}$$

Optimering af Sharpe ratioen

Som skrevet tidligere er Sharpe ratioen givet ved:

$$S_p = \frac{\mathbb{E}(R_P)}{\sigma_P}. \tag{2.70}$$

Det kan vises, at Treynor Black Modellen optimerer Sharpe ratioen ved at kigge på den kvadrerede Sharpe ratio.

Den kvadrerede Sharpe ratio for den optimale portefølje er givet ved:

$$S_p^2 = \frac{(w_A(\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M) + (1 - w_A)\bar{R}_M)^2}{w_A^2(\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2) + (1 - w_A)^2 \sigma_M^2 + 2w_A(1 - w_A)\beta_A \sigma_M^2}. \quad (2.71)$$

(2.68) indsættes i (2.71):

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{\left(\frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}}(\alpha_A + \beta_A \bar{R}_M) + \left(1 - \frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}}\right)\bar{R}_M \right)^2}{\left(\frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} \right)^2 (\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2) + \left(1 - \frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}}\right)^2 \sigma_M^2 + 2 \frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} \left(1 - \frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}}\right) \beta_A \sigma_M^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha_A w_{0,A} + \beta_A \bar{R}_M w_{0,A} - \bar{R}_M w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} + \bar{R}_M \right)^2}{\frac{(w_{0,A})^2}{(1+(1-\beta_A)w_{0,A})^2} (\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2) + \left(\frac{1-\beta_A w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} \right)^2 \sigma_M^2 + 2 \frac{w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} \frac{1-\beta_A w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} \beta_A \sigma_M^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha_A w_{0,A} + \beta_A \bar{R}_M w_{0,A} - \bar{R}_M w_{0,A} + \bar{R}_M + \bar{R}_M w_{0,A} - \beta_A \bar{R}_M w_{0,A}}{1+(1-\beta_A)w_{0,A}} \right)^2}{\frac{w_{0,A}^2 \beta_A^2 \sigma_M^2 + w_{0,A}^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 + (1-\beta_A w_{0,A})^2 \sigma_M^2 + 2w_{0,A} \beta_A \sigma_M^2 - 2w_{0,A}^2 \beta_A^2 \sigma_M^2}{(1+(1-\beta_A)w_{0,A})^2}} \\ &= \frac{(\alpha_A w_{0,A} + \bar{R}_M)^2}{w_{0,A}^2 \beta_A^2 \sigma_M^2 + w_{0,A}^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 + (1 - \beta_A w_{0,A})^2 \sigma_M^2 + 2w_{0,A} \beta_A \sigma_M^2 - 2w_{0,A}^2 \beta_A^2 \sigma_M^2} \\ &= \frac{(\alpha_A w_{0,A} + \bar{R}_M)^2}{w_{0,A}^2 \beta_A^2 \sigma_M^2 + w_{0,A}^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 + \sigma_M^2 - 2\beta_A w_{0,A} \sigma_M^2 + \beta_A^2 w_{0,A}^2 \sigma_M^2 + 2w_{0,A} \beta_A \sigma_M^2 - 2w_{0,A}^2 \beta_A^2 \sigma_M^2} \\ &= \frac{\alpha_A^2 w_{0,A}^2 + 2\alpha_A \bar{R}_M w_{0,A} + \bar{R}_M^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2 w_{0,A}^2 + \sigma_M^2}. \quad (2.72) \end{aligned}$$

(2.67) indsættes i (2.72):

$$\begin{aligned}
S_p^2 &= \frac{\alpha_A^2 \left(\frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\bar{R}_M \sigma_{\epsilon,A}^2} \right)^2 + 2\alpha_A \bar{R}_M \frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\bar{R}_M \sigma_{\epsilon,A}^2} + \bar{R}_M^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2 \left(\frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\bar{R}_M \sigma_{\epsilon,A}^2} \right)^2 + \sigma_M^2} \\
&= \frac{\alpha_A^2 \frac{\alpha_A^2 \sigma_M^4}{\bar{R}_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^4} + \frac{2\alpha_A^2 \sigma_M^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2} + \bar{R}_M^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2 \frac{\alpha_A^2 \sigma_M^4}{\bar{R}_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^4} + \sigma_M^2} \\
&= \frac{\frac{\alpha_A^4 \sigma_M^4}{\bar{R}_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^4} + \frac{2\alpha_A^2 \sigma_M^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2} + \bar{R}_M^2}{\frac{\alpha_A^2 \sigma_M^4}{\bar{R}_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^4} + \sigma_M^2} \\
&= \frac{\frac{\alpha_A^4 \sigma_M^4 + 2\alpha_A^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^4 \bar{R}_M^4}{\sigma_{\epsilon,A}^4 \bar{R}_M^2}}{\frac{\alpha_A^2 \sigma_M^4 + \sigma_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2}{\bar{R}_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^2}} \\
&= \frac{\alpha_A^4 \sigma_M^4 + 2\alpha_A^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^4 \bar{R}_M^4}{\sigma_{\epsilon,A}^2 \left(\alpha_A^2 \sigma_M^4 + \sigma_M^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2 \right)} \\
&= \frac{\left(\alpha_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2 \right)^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2 \sigma_M^2 \left(\alpha_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2 \right)} \\
&= \frac{\alpha_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,A}^2 \bar{R}_M^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2 \sigma_M^2} \\
&= \frac{\bar{R}_M^2}{\sigma_M^2} + \frac{\alpha_A^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2} \\
&= S_M^2 + \frac{\alpha_A^2}{\sigma_{\epsilon,A}^2}. \tag{2.73}
\end{aligned}$$

(2.73) viser, at Sharpe ratioen for den optimale portefølje er større end Sharpe ratioen for markedet, da $\alpha_A > 0$ per definition ud fra (2.50), fordi $\alpha_j < 0$ medfører, at aktien bliver shortet, og derfor giver en negativ vægt. Treynor Black Modellen vægter derfor den aktive portefølje således, at Sharpe ratioen bliver optimeret. Ligningen beskriver også, hvorfor vægtene af aktiverne i den aktive portefølje maksimeres i forhold til information ratioen, eftersom den optimerede Sharpe ratio er lig med Sharpe ratioen af markedet plus information ratioen af den aktive portefølje. Dermed optimeres Sharpe ratioen af den optimale portefølje, når information ratioen maksimeres for den aktive portefølje.

2.7.1 Multifaktor Treynor Black Model

I ovenstående sektion blev den oprindelige Treynor Black Model beskrevet. Modellen tog udgangspunkt i aktiernes merafkast, alfa, samt markedsfaktoren, β_M , på baggrund af CAPM. I denne sektion præsenteres en udvidelse af den oprindelige Treynor Black Model. Treynor Black Modellen udvides, så den nu baseres på Fama French Fem Faktor Modellen i stedet for CAPM. I dette projekt kaldes den udvidede model for Multifaktor Treynor Black Modellen, mens den oprindelige Treynor Black Model, der anvender CAPM, fortsat kaldes Treynor Black Modellen.

Det første skridt i Treynor Black Modellen var at bestemme vægtene for aktierne i den aktive portefølje, ved at maksimere informationsratioen af den aktive portefølje. I Multifaktor Treynor Black Modellen vil det blive gjort på samme måde, og derfor findes vægtene for aktierne i den aktive portefølje med formlen:

$$w_j = \frac{\frac{\alpha_j}{\sigma_{\epsilon,j}^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\sigma_{\epsilon,i}^2}}. \quad (2.74)$$

Forskellen ligger i, at α_j og $\sigma_{\epsilon,j}^2$ vil blive estimeret på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen.

Det næste skridt er at bestemme vægten w_A , der optimerer Sharpe ratioen af den optimale portefølje bestående af den aktive portefølje og den passive portefølje. Dette gøres ved at bestemme vægten for tangentporteføljen, der ligger på den efficiente frontier bestående af den aktive og passive portefølje. Vægten for w_A er givet ved:

$$w_A = \frac{\sigma_M^2(\mathbb{E}(r_A) - r_f) - \sigma_{AM}(\mathbb{E}(r_M) - r_f)}{\sigma_M^2(\mathbb{E}(r_A) - r_f) + \sigma_A^2(\mathbb{E}(r_M) - r_f) - \sigma_{AM}[\mathbb{E}(r_A) - r_f + \mathbb{E}(r_M) - r_f]}. \quad (2.75)$$

For at bestemme w_A , skal følgende udtryk, der gælder for Fama French Fem Faktor Modellen anvendes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_A) - r_f &= \alpha_A + \beta'_A \mu_F \\ \mathbb{E}(r_M) - r_f &= R_M = \beta'_M \mu_F \\ \sigma_A^2 &= \beta'_A \Sigma_F \beta_A + \sigma_{\epsilon,A}^2 \\ \sigma_{AM} &= \beta'_A \Sigma_F \beta_M, \end{aligned} \quad (2.76)$$

hvor $\beta_M = \Sigma_F^{-1} \sigma_{F,r_M}$. Ved at indsætte (2.76) i (2.75) kan udtrykket skrives således:

$$w_A = \frac{\sigma_M^2(\alpha_A + \beta'_A \mu_F) - \beta'_A \Sigma_F \beta_M \beta'_M \mu_F}{\sigma_M^2(\alpha_A + \beta'_A \mu_F) + (\beta'_A \Sigma_F \beta_A + \sigma_{\epsilon,A}^2) \beta'_M \mu_F - \beta'_A \Sigma_F \beta_M (\alpha_A + \beta'_A \mu_F + \beta'_M \mu_F)}. \quad (2.77)$$

(2.77) giver vægten af den aktive portefølje, w_A , der optimerer Sharpe ratioen af den optimale portefølje. Vægten for den passive portefølje findes ved $w_M = 1 - w_A$.

3 | Metode

I dette kapitel præsenteres Ordinary Least Squares estimeringsmetoden, som anvendes til at estimere alfa, CAPM β og Fama French β , samt den usystematiske risiko σ_ϵ^2 . Derudover præsenteres evalueringsmetoder, som anvendes til at analysere, hvordan den optimale portefølje performer i forhold til markedsporteføljen.

3.1 Estimeringsmetoder

3.1.1 OLS estimat

Denne sektion er baseret på [29].

I denne sektion beskrives, hvordan parametrene i CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen estimeres. Metoden er den samme for begge modeller og præsenteres derfor kun for Fama French Modellen. Fama French Fem Faktor Modellen præsenteret i Sektion 2.5 er givet ved:

$$r_{t,j} - r_{t,f} = \alpha_{t,j} + \beta_{1,j}(r_{t,m} - r_f) + \beta_{2,j} \cdot SMB_t + \beta_{3,j} \cdot HML_t + \beta_{4,j} \cdot RMW_t + \beta_{5,j} \cdot CMA_t + \epsilon_{t,j}. \quad (3.1)$$

Modellen estimeres ved brug af Ordinary Least Squares Metoden. Notationen er tilpasset notationen for faktor modeller. Modellen opstilles derfor som en multipel lineær regressionsmodel

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{F}\beta_j + \epsilon_j, \quad (3.2)$$

hvor $\mathbf{R}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_f$, og matricerne er givet ved:

$$\begin{bmatrix} R_{1,j} \\ R_{2,j} \\ \vdots \\ R_{T,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & F_{1,1} & F_{1,2} & \cdots & F_{1,p} \\ 1 & F_{2,1} & F_{2,2} & \cdots & F_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_{T,1} & F_{T,2} & \cdots & F_{T,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{0,j} \\ \beta_{1,j} \\ \vdots \\ \beta_{p,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,j} \\ \epsilon_{2,j} \\ \vdots \\ \epsilon_{T,j} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Faktormatricen $\mathbf{F}$ skal have fuld rank, $\text{rank}(\mathbf{F}) = p + 1$, og fejlleddene skal være ukorrelerede med faktorerne, $\mathbb{E}[\epsilon_j | \mathbf{F}] = 0$. Ydermere antages det, at variansen af fejlleddet er konstant for alle t , $t = 1, \dots, T$. Det vil sige, at $\text{Var}[\epsilon_j | \mathbf{F}] = \sigma_{\epsilon,j}^2 \mathbf{I}_T$, hvor $\mathbf{I}_T$ er identitetsmatricen. Fejlleddene antages at være uafhængige og identisk normalfordelte, og fordelingen af det overskydende afkast er givet ved:

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{F}\beta_j + \epsilon_j \sim N_n(\mathbf{F}\beta_j, \sigma_{\epsilon,j}^2 \mathbf{I}_T). \quad (3.4)$$

Estimatet af β findes ved at minimere summen af kvadrerede residualer, som er bestemt ved

$$\text{SSR}(\beta_j) = \sum_{t=1}^T (R_{t,j} - \mathbf{F}_t \beta_j)^2, \quad (3.5)$$

givet en mulig $(p+1) \times 1$ parametervektor β_j , hvor $\mathbf{F}_t = [1 \ F_{1,1} \ F_{1,2} \ \dots \ F_{1,p}]$.

Estimatet af β_j , der minimerer $\text{SSR}_j(\beta_j)$ noteres $\hat{\beta}_j$ og bestemmes ved at løse ligningssystemet:

$$\frac{\partial \text{SSR}(\hat{\beta}_j)}{\partial \beta_j} = 0. \quad (3.6)$$

Løsningen til ligningssystemet er givet ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T(\mathbf{R}_j - \mathbf{F}\hat{\beta}_j) &= 0 \\ \Downarrow \\ (\mathbf{F}^T \mathbf{F})\hat{\beta}_j &= \mathbf{F}^T \mathbf{R}_j \\ \Downarrow \\ \hat{\beta}_j &= (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}_j. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Modellens fittede værdier bestemmes således ved formlen

$$\hat{\mathbf{R}}_j = \mathbf{F}\hat{\beta}_j, \quad (3.8)$$

hvilket medfører, at modellens residualer kan bestemmes ved:

$$\hat{\epsilon}_j = \mathbf{R}_j - \hat{\mathbf{R}}_j = \mathbf{R}_j - \mathbf{F}\hat{\beta}_j. \quad (3.9)$$

Variansen af $\hat{\epsilon}_j$ kan estimeres ved brug af formlen

$$\hat{\sigma}_{\epsilon,j}^2 = \frac{\hat{\epsilon}_j' \hat{\epsilon}_j}{T - P - 1}, \quad (3.10)$$

som er en central estimator.

Til at bestemme goodness of fit af den lineære regression anvendes determinationskoefficienten, R^2 , som er givet ved

$$R^2 = \frac{\left(\sum_{t=1}^T (R_{t,j} - \bar{R}_j)(\hat{R}_{t,j} - \bar{\hat{R}}_j) \right)^2}{\left(\sum_{t=1}^T (R_{t,j} - \bar{R}_j)^2 \right) \left(\sum_{t=1}^T (\hat{R}_{t,j} - \bar{\hat{R}}_j)^2 \right)}, \quad (3.11)$$

hvor $\hat{R}_{t,j}$ er den t 'te indgang i $\hat{\mathbf{R}}_j$. Værdien af R^2 kan fortolkes som den del af variationen i den afhængige variabel, som kan forklares af variationen i de forklarende variabler

i modellen. Dermed anvendes R^2 værdien i dette projekt til at beskrive, hvor godt faktorerne afkast, dvs. markedets afkast, afkastet for SMB osv., beskriver de enkelte aktiers overskydende afkast.

Variansen af $\hat{\beta}_i$ kan bestemmes ved formelen

$$Var[\hat{\beta}_i] = \frac{\sigma_{\epsilon,j}}{SST_i(1 - R_i^2)}, \quad (3.12)$$

for $i = 1, \dots, p$. Her er $SST_i = \sum_{t=1}^T (F_{t,i} - \bar{F}_i)^2$ den historiske variation i data for faktor i , og R_i^2 er determinationskoefficienten for den lineære regression med faktor i som den afhængige variabel og de resterende faktorer som de forklarende variable.

Det følger af (3.12), at en større varians af residualerne for modellen medfører en større varians af estimerne for parameterne. Mereover fortæller SST_i , at det er bedre for variansen af $\hat{\beta}_i$, hvis den historiske variation af faktor i er stor. Man kan forstørre den historiske variation i data ved at forstørre sit datasæt og dermed bruge flere informationer. Det betyder dermed også, at hvis man har få observationer i sit datasæt, så kan det gøre, at variansen af parameterestimerne bliver store og gør estimatet meget usikkert.

Endvidere spiller R_i^2 også en stor rolle for variansen af β_i . En stor R_i^2 betyder, at meget af variationen af faktor i kan forklares af de andre forklarende variable i modellen. Dermed vil en stor korrelation mellem de forklarende variable medføre, at variansen af β_i vil blive stor. Multikollineariteten mellem de forklarende variable i modellen vil blive beskrevet med VIF, som er givet ved $VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$. VIF beskriver, hvor meget af variansen af β , der skyldes korrelationen mellem de forklarende variable. I projektet anses det som et problem, hvis VIF_i er større end 10.

Variansen af parametervektoren $\hat{\beta}_j$ kan beregnes med formelen:

$$Var[\hat{\beta}_j | \mathbf{F}] = \sigma_{\epsilon_j}^2 (\mathbf{F}' \mathbf{F})^{-1}. \quad (3.13)$$

Til at bestemme om estimatet af parameterverdierne er signifikante anvendes t-testen. Nulhypotesen og den alternative hypotese for testen er:

$$H_0 : \hat{\beta}_i = 0 \quad (3.14)$$

$$H_A : \hat{\beta}_i \neq 0. \quad (3.15)$$

Teststørrelsen er givet ved

$$\text{Teststørrelse} = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{se(\hat{\beta}_i)} \sim t_{T-p-1}, \quad (3.16)$$

hvor $se(\hat{\beta}_i) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\epsilon}}{SST_i(1 - R_i^2)}}$, og teststørrelsen har sandsynlighedsfordelingen t_{T-p-1} , som er en t fordeling med $T - p - 1$ frihedsgrader. P værdien af t-testen beregnes ved

$$p \text{ værdi} = P(|X| > \text{teststørrelse}), \quad (3.17)$$

hvor X er en t-fordelt stokastisk variabel med $T - p - 1$ frihedsgrader.

I projektet anvendes et signifikansniveau på 95%. Testen vil anvendes til at vurdere, om de enkelte parameterverdier er signifikant forskellige fra nul. I resultatbehandlingen vil signifikante parameterverdier blive repræsenteret ved at have en stjerne, (*), stående bag ved parameterestimatet.

3.1.2 Estimering af historisk data

Til at beregne varianser og kovarianser mellem aktiver fremgår det af Sektion 2.4, at man skal bruge variansen af faktorerne samt kovariansen mellem dem. For at estimere varians kovarians matricen mellem faktorerne, skal den forventede værdi af faktorernes afkast først bestemmes. Til det, anvendes det historiske gennemsnit af afkast til at estimere den forventede værdi af afkastet. Her antages det, at der er observeret T data punkter for afkastet, og den estimerede forventede værdi er da givet ved

$$\hat{r}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{t,j}, \quad (3.18)$$

hvor det antages, at der er lige stor sandsynlighed for, at hver observation bliver et udfald. Dvs. $x_t = \frac{1}{T}$, jævnfør (2.2). Da kan variansen af et afkast baseret på historiske observationer udregnes med formlen:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{t,j} - \hat{r}_j)^2. \quad (3.19)$$

Ligeledes anvendes den forventede værdi af afkastet til at bestemme kovariansen mellem afkastene:

$$\hat{\sigma}_{ji} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{t,j} - \hat{r}_j)(r_{t,i} - \hat{r}_i). \quad (3.20)$$

3.2 Performance evaluering af porteføljer

Den optimale portefølje konstrueret med Treynor Black Modellen vil blive evalueret i forhold til markedsporteføljen. I denne sektion præsenteres de performance mål, som porteføljerne vil blive evalueret med. Porteføljerne sammensættes ud fra de vægte givet af Treynor Black Modellen og sammensættes som en 'buy and hold' portefølje.

3.2.1 Sharpe Ratio

Denne undersektion er baseret på [30].

Sharpe ratioen er som tidligere nævnt givet ved:

$$S_P = \frac{\mathbb{E}(R_P)}{\sigma_P}. \quad (3.21)$$

I dette projekt sammenlignes Sharpe ratioen mellem to porteføljer, og derfor anvendes en test for at undersøge, hvorvidt en forskel i Sharpe ratioerne er signifikant. Testen kræver, at det overskydende afkast for hver af de to porteføljer er stationære tidsrækker.

Det historiske gennemsnit af det overskydende afkast og andet moment af det overskydende afkast kan opskrives således:

$$\hat{m}_1^j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{t,j} \quad \text{og} \quad \hat{m}_2^j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{t,j}^2. \quad (3.22)$$

Disse er centrale estimatorer. Estimatoren for Sharpe ratioen af portefølje j kan da opskrives som:

$$\hat{S}_j = \frac{\hat{m}_1^j}{\sqrt{\hat{m}_2^j - (\hat{m}_1^j)^2}}. \quad (3.23)$$

$\hat{\mathbf{S}}$ er en vektor bestående af estimatorerne af de to Sharpe ratioer for hver af porteføljerne. Teststørrelsen er ud fra dette givet ved

$$\sqrt{T} \left(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S} \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}; D\Sigma D'), \quad (3.24)$$

hvor $\xrightarrow{d}$ viser konvergens i fordelingen og

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A & C \\ C' & B \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

hvor A er kovariansmatricen for de overskydende afkast for de to porteføljer, B er kovariansmatricen for andet moment af de overskydende afkast for de to porteføljer, og C er kovariansmatricen mellem det overskydende afkast og andet moment af det overskydende afkast. Derudover er D givet ved:

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{m_2^1}{(m_2^1 - (m_1^1)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{(m_2^2 - (m_1^2)^2)^{3/2}} \\ \frac{-m_2^1}{2(m_2^1 - (m_1^1)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2(m_2^2 - (m_1^2)^2)^{3/2}} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Nullhypotesen for denne test er, at Sharpe ratioerne er ens.

3.2.2 Treynor Ratio

Denne undersektion er baseret på [31].

Treynor ratioen er en modifikation af Sharpe ratioen. Her anvender Treynor ratioen β_P i nævneren i stedet for standardafvigelsen σ_P , og formen ser således ud:

$$\text{Treynor}_P = \frac{\mathbb{E}(R_P)}{\beta_P}. \quad (3.27)$$

Ved at anvende β_P , ser Treynor ratioen udelukkende på den systematiske risiko, hvorimod Sharpe ratioen ser på både den systematiske og usystematiske risiko. Desto højere Treynor ratioen er, desto bedre risikojusteret performance fås af porteføljen.

3.2.3 Sortino ratio

Denne undersektion er baseret på [31].

Formlen for Sortino ratioen er givet ved

$$\text{Sortino}_P = \frac{\mathbb{E}(R_P) - \text{MAR}}{DD_P}, \quad (3.28)$$

hvor MAR er minimum acceptable afkast, og DD_P er downside deviation. MAR afhænger af mange forskellige faktorer, alt efter hvor risikovillig man er som investor. DD_P er standardafvigelsen af de måneder, hvor afkastet er under MAR. Denne standard afvigelse konverteres til årlig basis ved at gange med $\sqrt{12}$. I dette projekt anvendes en MAR på 0%, og dermed vil en positiv værdi af Sortino ratioen betyde, at porteføljen har slået den risikofrie rente, da projektet anvender overskydende afkast.

3.2.4 M2

Denne undersektion er baseret på [32].

M^2 er ligesom Sharpe ratioen og fokuserer på den samlede volatilitet som et mål for risiko. Idéen bag M^2 er, at man har en aktiv portefølje sammensat med et risikofrit aktiv, og den sammenlignes med en passiv indeksfond. Man sammenligner deres standardafvigelser med hinanden. Er den aktive porteføljes standardafvigelse højere end den passive fond, vil man købe mere af det risikofrie aktiv, indtil den aktive porteføljes og passive porteføljes standardafvigelser er ens. Er den aktive porteføljes standardafvigelse lavere, låner man penge og investerer i den aktive portefølje, indtil standardafvigelsen er på niveau med den passive fond. Den justerede aktive portefølje noteres som P^* . Med samme standard standardafvigelser for den aktive og passiv portefølje, kan deres performance sammenlignes med følgende formel:

$$M_P^2 = R_{P^*} - R_M = (S_P - S_M)\sigma_M. \quad (3.29)$$

3.2.5 Skewness og Kurtosis

Denne undersektion er baseret på [15].

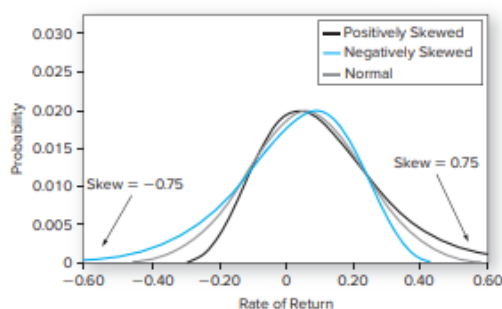
Ved brug af OLS metoden til at estimere parametrene i modellerne antages det, at aktivernes afkast er normalfordelte jævnfør Undersektion 3.1.1. Derfor anvendes skewness og kurtosis til at analysere, om afkastene for porteføljerne følger en normalfordeling. Formlen for skewness er givet ved

$$\text{Skewness} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{t,j} - \bar{r}_j)^3}{T \cdot \hat{\sigma}_j^3}, \quad (3.30)$$

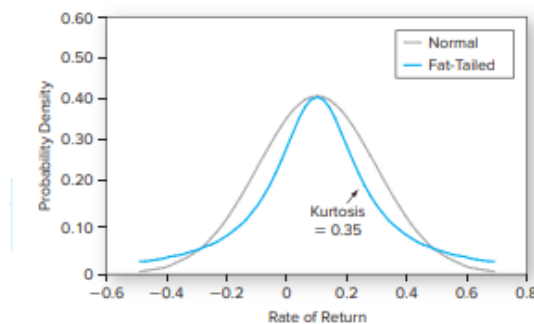
og formelen for overskydende kurtosis er givet ved:

$$\text{Overskydende kurtosis} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{t,j} - \bar{r}_j)^4}{T \cdot \hat{\sigma}_j^4} - 3. \quad (3.31)$$

Skewness og kurtosis kan bruges til at beskrive hvordan fordelingen af afkastet afviger fra normalfordelingen. Normalfordelingen er symmetrisk omkring middelværdien. Skewness er et mål for, om fordelingen af afkastet er asymmetrisk, og dermed om den ene hale af fordelingen er længere end den anden. Hvis skewness er positiv, har fordelingen en længere hale til højre for middelværdien end en normalfordeling og modsat for en negativ værdi af skewness, se Figur 3.1. Overskydende kurtosis er et mål for, hvor tykke halerne af fordelingen er. Hvis overskydende kurtosis er positiv vil fordelingen have tungere haler end normalfordelingen, og dermed er der en større sandsynlighed for at få et ekstremt udfald, se Figur 3.2.



Figur 3.1: Skewness af en fordeling i forhold til normalfordelingen [15].



Figur 3.2: Kurtosis af en fordeling i forhold til normalfordelingen [15].

Jarque Bera Test

Denne sektion er baseret på [33].

Jarque Bera Testen tester for normalitet i et datasæt. Mere specifikt tester det, om skewness og kurtosis passer overens med normalfordelingen. En normalfordeling har en skewness på nul dvs., at den er symmetrisk omkring middelværdien. Formlen for teststørrelsen er givet ved:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{K^2}{4} \right). \quad (3.32)$$

Her er n antal observationer, S er skewness og K er overskydende kurtosis. Nulhypotesen er, at data er normalfordelt, mens den alternative hypotese er, at data ikke er normalfordelt.

QQ-plot

Dette er baseret på [34].

Et QQ-plot anvendes ofte til at vurdere, om et datasæt følger en normalfordeling. For at konstruere et QQ-plot i forhold til en normalfordeling, starter man med at sortere data i stigende rækkefølge. For hvert datapunkt i det sorterede datasæt beregnes den tilsvarende kvantil fra normalfordelingen ved hjælp af den inverse kumulative fordelingsfunktion for normalfordelingen. Disse teoretiske kvantiler plottes på x-aksen, mens de observerede kvantiler fra datasættet plottes på y-aksen.

Hvis data er normalfordelte, vil punkterne i QQ-plottet falde tæt langs en ret 45 graders linje. Afvigelser fra denne rette linje kan indikere afvigelser fra normalfordelingen. For eksempel kan systematiske afvigelser, hvor punkterne danner en kurve, indikere, at dataene har en anden form for fordeling, såsom en skæv fordeling. Outliers, som punkter langt fra linjen, kan indikere tilstedeværelsen af ekstreme værdier i datasættet. Desuden kan afvigelser i de yderste kvantiler indikere tykkere eller tyndere haler end forventet ved en normalfordeling. Derfor er QQ-plot et værdifuldt redskab i statistisk analyse til at visualisere og vurdere, hvordan data fordeler sig i forhold til en normalfordeling.

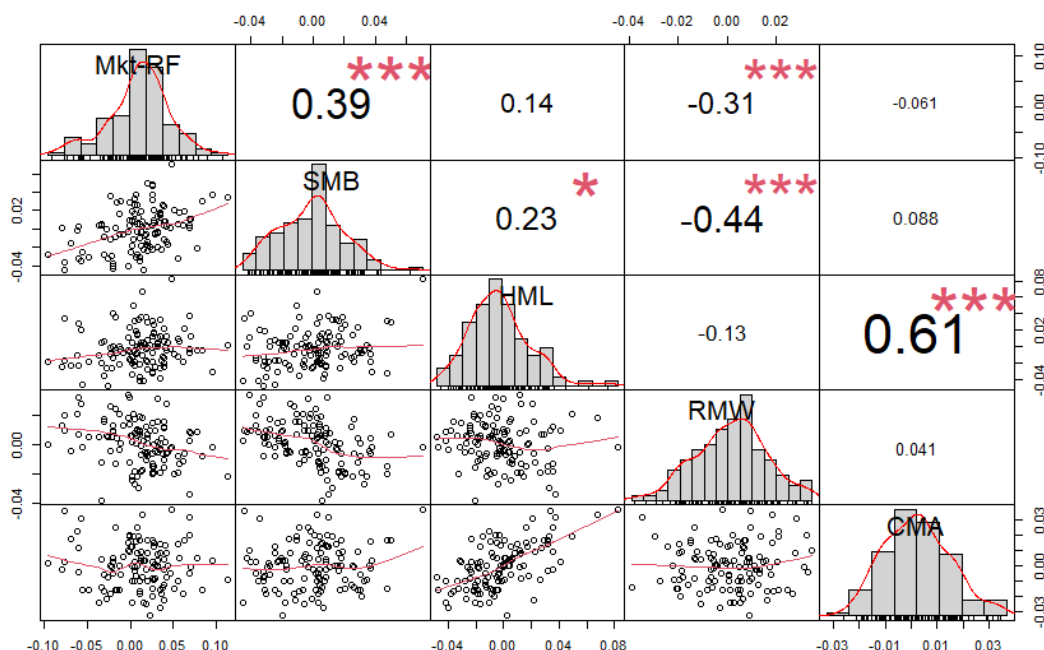
4 | Data præsentation

I dette kapitel præsenteres dataen, der anvendes til modellerne i projektet. CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen evalueres og konstrueres med data fra perioden 01-01-2010 til 31-12-2019. Porteføljerne evalueres både in sample, dvs. i perioden 01-01-2010 til 31-12-2019, og out of sample som er den fireårige periode fra 01-01-2020 til 31-12-2023. Kapitlet er delt op i tre sektioner, hvor data for Fama French faktorerne præsenteres først. Dernæst præsenteres data, der skal bruges til "analyse af udvalgte aktier" og til sidst præsenteres data til "S&P 500 analysen".

4.1 Fama French Faktorerne

Data for de fem Fama French faktorer, MKT-RF, SMB, HML, CMA, RMW, samt det risikofrie aktiv er hentet fra hjemmesiden https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html. Data hentes for perioden 01-01-2010 til 31-12-2023. Dataen består af afkastene for de fem porteføljer der repræsenterer faktorerne, som blev beskrevet i Undersektion 2.5.2, samt det risikofrie aktiv, der er en-månedes Treasury Bill renten i USA.

Det fremgår af Kapitel 3, at korrelationsmatricen $\mathbf{F}$ skal have fuld rank, hvilket er ensbetydende med, at faktorerne er lineært uafhængige af hinanden. Dermed må korrelationsmatricen bestående af de fem faktorer ikke være lineært afhængige af hinanden, da det vil bryde en af antagelser for den lineære regressionsmodel. Korrelationsmatricen beregnes på baggrund af data i perioden 01-01-2010 til 31-12-2019, eftersom det er den periode hvori data anvendes til at estimere CAPM og FAMA French Fem Faktor Modellen. Det fremgår af Figur 4.1, at der ikke er nogen af faktorerne, som er perfekt korrelerede, og derfor kan faktorerne anvendes i modellen. Den højeste korrelation mellem faktorerne er på 0,61 og er mellem CMA og HML. Ydermere ved at inspicere Figur 4.1 ser man også, at der ikke er nogle af faktorerne, som viser en stærk lineær tendens for deres scatterplots, bortset fra plottet mellem HML og CMA, hvor der er en mindre opadgående lineær tendens i plottet.



Figur 4.1: Korrelationsmatrix og scatterplot for Fama French Faktorerne.

Mereover tjekkes faktorerne for multikollinearitet. Til at tjekke for multikollinearitet anvendes VIF værdierne for Fama French faktorerne, og de kan ses i Tabel 4.1. Alle værdierne er under 1,8, hvilket betyder, at der ikke er stor multikollinearitet blandt de fem faktorer. Derved er variansen af estimaterne for faktorsensitiviteterne ikke særligt påvirket af korrelationen blandt faktorerne.

	MKF-RF	SMB	HML	RMW	CMA
VIF	1,252675	1,401793	1,741504	1,287625	1,685802

Tabel 4.1: VIF værdier for Fama French faktorerne.

4.2 Data til analyse af udvalgte aktier

I denne sektion præsenteres aktierne, som anvendes i projektet. I projektet har vi valgt 33 forskellige aktier fra 11 forskellige sektorer. De 33 valgte aktier er præsenteret i Tabel 4.2. Aktierne er valgt efter markedsværdierne og data er hentet fra <https://finance.yahoo.com/sectors/>. Her er hhv. nr. 1, nr. 50 og nr. 100 valgt fra hver sektor. I enkelte tilfælde er der valgt anderledes, da specifikke aktier ikke har data tilbage til 2010. Markedsværdierne for aktierne er hentet 24-04-2024. Fra tabellen fremgår det, at der er valgt aktier med forskellige markedsværdier for at have aktier fra large cap, medium cap og small cap. Der er også valgt aktier fra forskellige sektorer for at repræsentere aktier fra hele markedet.

Data, der er hentet for hver aktie, er de justerede lukkepriser. De justerede lukkepriser tager hensyn til udbytte og aktiesplit, hvilket sikrer, at aktiepriserne afspejler den sande aktiekurs for virksomhederne. Det giver et mere nøjagtigt syn på aktiekursen, når man ser over en længere tidshorisont. Dernæst beregnes de månedlige afkast for hver aktie jævnt (2.1), hvor $D_j(t_0, t_f) = 0$ eftersom udbyttet er medregnet i priserne. Efter de månedlige afkast er beregnet fratrækkes den risikofrie rente fra afkastet for at få de månedlige overskydende afkast for aktierne, som anvendes i modellerne. Da der arbejdes med månedlige afkast er der 120 observationer til hver model.

Sektor	Ticker Symbol	Aktiv	Markedsværdi (USD)
Technology	MSFT	Microsoft Corporation	3.028T
	GRMN	Garmin Ltd.	27.33B
	GEN	Gen Digital Inc.	13.171B
Financial Services	JPM	JPMorgan Chase & Co.	551.843B
	JEF	Jefferies Financial Group Inc.	9.455B
	WTW	Weight Watchers International, Inc.	26.963B
Healthcare	LLY	Eli Lilly and Company	708.977B
	COO	The Cooper Companies, Inc.	18.222B
	XRAY	Dentsply Sirona Inc.	6.407B
Consumer Cyclical	AMZN	Amazon.com, Inc.	1.868T
	HAS	Hasbro, Inc.	8.093B
	MGM	MGM Resorts International	13.584B
Industrials	GE	General Electric Company	178.005B
	EFX	Equifax Inc.	27.746B
	TREX	Trex Company, Inc.	9.8B
Communication Services	NFLX	Netflix, Inc.	248.953B
	TZOO	Travelzoo	123.178M
	TGNA	Tegna Inc.	2.416B
Consumer Defensive	WMT	Walmart Inc.	476.15B
	USNA	USANA Health Sciences, Inc.	861.012M
	DAR	Darling Ingredients Inc.	6.893B
Energy	XOM	Exxon Mobil Corporation	479.068B
	RES	RPC Inc.	1.73B
	MUR	Murphy Oil Corporation	7.043B
Basic Materials	LIN	Linde plc	214.33B
	LXU	LSB Industries, Inc.	586.876M
	FUL	H.B. Fuller Company	4.147B
Real Estate	PLD	Prologis, Inc.	96.973B
	RHP	Ryman Hospitality Properties, Inc.	6.483B
	EQC	Equity Commonwealth	1.99B
Utilities	NEE	NextEra Energy, Inc.	136.01B
	ELLO	Ellomay Capital Ltd.	194.845M
	MGEE	MGE Energy, Inc.	2.829B

Tabel 4.2: Aktierne der anvendes i modellen.

4.3 Data til S&P 500 analyse

Denne sektion præsenterer data der skal anvendes til S&P 500 analysen, hvilket er aktierne i S&P500 indekset over en tiårsperiode fra 01-01-2010 til 31-12-2019. Tickersymbolerne for de aktier der er inkluderet i S&P500 indekset er hentet i en CSV fil fra hjemmesiden <https://github.com/datasets/s-and-p-500-companies/blob/main/data/constituents.csv>. Dataene er hentet fra Yahoo Finance <https://finance.yahoo.com> og består af de justerede lukkepriser, da disse tager højde for udbytteudbetalinger, aktiesplit og andre relevante begivenheder, hvilket gør dem mere egnede til langsigtede analyser. Data er begrænset i det omfang, at det ikke er alle aktier, der har tilgængelig data tilbage til 01-01-2010, hvilket betyder, at de ikke er en del af analysen. Der er 492 aktier der har data tilgængeligt for hele in sample og out of sample perioden, og tickersymbolerne for disse er præsenteret i Bilag A. De resterende aktier der ikke har data for hele perioden er ekskluderet fra analysen. For alle de aktier der har data i hele perioden beregnes det overskydende afkast for dem alle på samme måde, som i ovenstående sektion. Dermed arbejdes der også med 120 observationer til at estimere modellerne.

5 | Resultater

I dette kapitel præsenteres resultaterne for performance af den optimale portefølje konstrueret med den oprindelige Treynor Black Model og Multifaktor Treynor Black Modellen. Resultaterne er delt op i to sektioner. I den første sektion præsenteres resultaterne for Analyse af de udvalgte aktier og i den anden sektion præsenteres resultaterne for S&P 500 analysen.

5.1 Analyse af de udvalgte aktier

I denne sektion præsenteres resultaterne for den optimale portefølje for den oprindelige Treynor Black Model og Multifaktor Treynor Black Modellen. Analysen er baseret på de 33 aktier der er præsenteret i Sektion 4.2. Sektionen er delt op således, at resultaterne for CAPM først præsenteres, efterfulgt af resultaterne for Treynor Black Modellen. Dernæst præsenteres resultater for Fama French Fem Faktor Modellen, som opfølges af resultaterne for Multifaktor Treynor Black Modellen. Sektionen afsluttes med at sammenligne performance af den optimale portefølje på baggrund af Treynor Black Modellen og Multifaktor Treynor Black Modellen in sample og out of sample perioden.

5.1.1 Resultater for CAPM

I denne undersektion præsenteres resultater for de forskellige aktier, der er estimeret med CAPM. I projektet anvendes månedlige afkast fra den 1. januar 2010 til 31. december 2019, og der er for hver aktie 120 observationer. I det følgende vil to aktier gennemgås i dybden, mens resultaterne for de resterende aktier præsenteres i en tabel. I projektet er *JPMorgan Chase & Co. (JPM)* fremhævet som en af de aktier, der gennemgås i dybden, da den har en insignifikant alfa værdi i CAPM og i Fama French Fem Faktor Modellen. Dernæst vil *NETFLIX (NFLX)* beskrives i dybden, da NFLX har en signifikant alfa i begge modeller.

Resultater for JPM

JPM er en large cap aktie og er en international finansiell institution, samt verdens største bank. På Tabel 5.1 er resultaterne for *JPM* præsenteret, hvor det fremgår, at markedsfaktoren er på 1,377 og er signifikant på et 95 % konfidensinterval, som er noteret med en stjerne i tabellen. Det betyder, at JPM er mere volatil end markedet, da den stiger 1,377, når markedet stiger med en enhed. Alfa er på $-0,001$ og er insignifikant, og CAPM for

JPM ser ud som følgende:

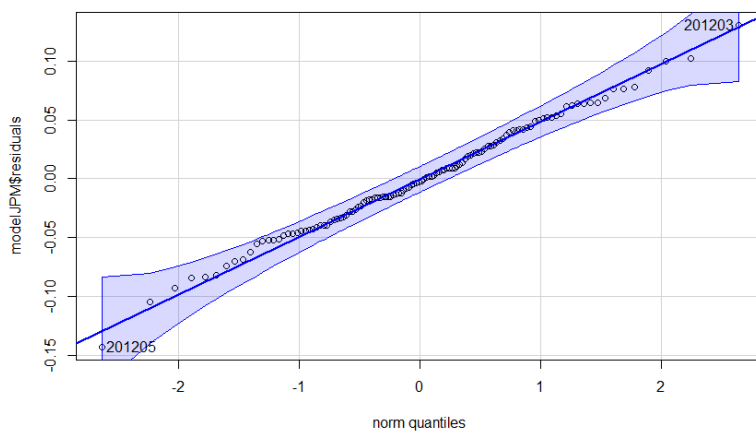
$$R_{t,JPM} = -0,001 + 1,377 \cdot (r_{t,m} - r_{t,f}). \quad (5.1)$$

Markedsfaktoren har en standardafvigelse på 0,116. Tabellen viser også, at alfa er negativ på $-0,001$, men har en standardafvigelse på 0,005. Alfa er meget tæt på 0, samt den har en standardafvigelse, der er større end alfa, hvilket også gør, at der er usikkerhed om, hvorvidt der er et merafkast i forhold til markedet. Da alfa også er insignifikant, benyttes JPM ikke i Treynor Black Modellen. Her er det kun signifikante alfa værdier der anvendes. Med en $R^2 = 0,544$ er det 54% af afkastet, der kan forklares af modellen.

<i>Afhængig variabel:</i>	
	JPM
‘Mkt-RF’	1.377(*) (0.116)
Alfa	-0.001 (0.005)
Observationer	120
R ²	0.544
Adjusted R ²	0.540
Residual Std. Error	0.047 (df = 118)
F Statistic	140.927(*) (df = 1; 118)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.1: Resultater for regressionsmodel af JPM.

QQ-plottet, som er vist på Figur 5.1 viser, at data for JPM er tilnærmelsesvist normalfordelt, hvilket er en af antagelserne for modellen.



Figur 5.1: QQ-plot for residualerne af regressionsmodellen på JPM.

Resultater for NFLX

På Tabel 5.2 ses resultaterne for NFLX, og modellen for NFLX ser ud som følgende:

$$R_{t,NFLX} = 0,032 + 1,211 \cdot (r_{t,m} - r_{t,f}). \quad (5.2)$$

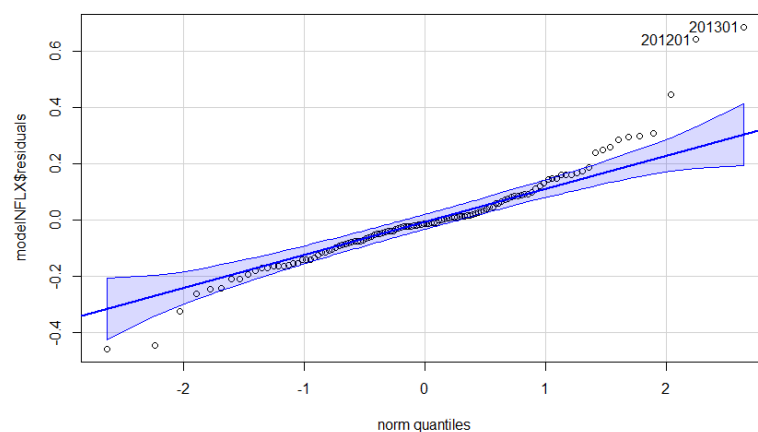
Markedsfaktoren er på 1,211 og er signifikant, og NFLX er derved mere volatil end markedet. Standardafvigelsen for aktien er på 0,410 og er højere end JPM's standardafvigelse. Modellen har en $R^2 = 0,069$ og forklarer derved kun 6,9% af afkastet, hvilket er lavere end JPM's R^2 værdi. Derudover har NFLX en signifikant alfa på 0,032 med en standardafvigelsen på 0,016, som også er større end JPM's standardafvigelse for alfa.

Selvom JPM har en større R^2 værdi og lavere Standardafvigelse sammenlignet med NFLX, anvendes NFLX til Treynor Black Modellen, da NFLX har en signifikant alfa.

	<i>Afhængig variabel:</i>
	NFLX
‘Mkt-RF’	1.21(*) (0.410)
Alfa	0.032(*) (0.016)
Observationer	120
R ²	0.069
Adjusted R ²	0.061
Residual Std. Error	0.167 (df = 118)
F Statistic	8.731(*) (df = 1; 118)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.2: Resultater for regressionsmodel af NFLX.

En af årsagerne til, at CAPM ikke kan forklare NFLX afkast bedre, kan skyldes, at dataen ikke er normalfordelt, som QQ-plottet antyder i Figur 5.2. Figuren viser, at halerne ikke ligger ved 45-graders linjen, og data for NFLX ikke er normalfordelt.



Figur 5.2: QQ-plot af residualerne for regressionsmodellen på NFLX.

Resultater for de resterende aktier

I Tabel 5.3 ses alfa, R^2 værdierne og markedsfaktoren for alle 33 aktier, som er inkluderet i projektet. Alfa værdier med en stjerne indikerer, at værdien er signifikant med et 95% konfidensinterval. Det ses, at NFLX har den højeste alfa værdi på 0,032. CAPM forklarer afkastet bedst for JPM med en værdi på $R^2 = 0,544$ og dårligst for NEE med en værdi på $R^2 = 0,046$. Gennemsnitsværdien for R^2 er på $= 0,285$. Aktier med alfa værdier, som er signifikante, anvendes senere i Treynor Black Modellen. NFLX, som har den højeste alfa værdi, har en $R^2 = 0,069$, og er en af de laveste R^2 værdier. Det kan skyldes, at afkastet for NFLX ikke er normalfordelte, og det kan muligvis afgive en lav R^2 værdi.

	Alpha	Mkt-RF	R^2
MSFT	0.006	0.999(*)	0.374
GRMN	0.004	0.954(*)	0.261
GEN	-0.003	1.049(*)	0.240
JPM	-0.001	1.377(*)	0.544
JEF	-0.014(*)	1.617(*)	0.532
WTW	0.003	0.775(*)	0.334
LLY	0.011(*)	0.293(*)	0.058
COO	0.014(*)	0.481(*)	0.082
XRAY	-0.006	1.070(*)	0.384
AMZN	0.012	1.208(*)	0.309
HAS	0.004	0.968(*)	0.263
MGM	-0.004	1.786(*)	0.400
GE	-0.010	1.250(*)	0.356
EFX	0.004	0.977(*)	0.353
TREX	0.010	1.962(*)	0.329
NFLX	0.032(*)	1.211(*)	0.069
TZOO	-0.008	2.008(*)	0.171
TGNA	-0.004	1.423(*)	0.372
WMT	0.005	0.368(*)	0.084
USNA	0.009	0.864(*)	0.081
DAR	-0.003	1.491(*)	0.351
XOM	-0.006	0.897(*)	0.481
RES	-0.002	1.067(*)	0.096
MUR	-0.016	1.864(*)	0.347
LIN	0.002	0.757(*)	0.433
LXU	-0.024	2.971(*)	0.301
FUL	-0.006	1.520(*)	0.539
PLD	0.002	1.215(*)	0.512
RHP	0.004	1.494(*)	0.382
EQC	0.002	0.551(*)	0.076
NEE	0.013(*)	0.236(*)	0.046
ELLO	0.004	0.683(*)	0.087
MGEE	0.008(*)	0.422(*)	0.120

Tabel 5.3: Koefficienter for regressionsmodellerne for alle aktiver samt deres R^2 værdier.

5.1.2 Resultater for Treynor Black Modellen

I denne sektion præsenteres resultaterne for porteføljesammensætningen af en aktiv- og passiv- portefølje ved brug af Treynor Black Modellen. I Tabel 5.4 er vægtene for porteføl-

jesammensætningen mellem den aktive og passive portefølje præsenteret. Investoren skal ifølge modellen investere 23,7% af sin kapital i markedsporteføljen og 76,3% i den aktive portefølje.

	Aktiv portefølje	Passiv portefølje
Vægt	0.763	0.237

Tabel 5.4: Vægtfordeling mellem den aktive portefølje og markedsporteføljen i den optimale portefølje.

Vægtene for aktierne i den aktive portefølje er vist i Tabel 5.5. Som nævnt tidligere anvendes kun de aktier med signifikante alfaer. Da JEF har en negativ alfa værdi, tildeles aktien en negativ vægt, dvs. aktien shortes. Mereover får *NFLX* tildelt en stor vægt, da denne aktie har en stor alfa værdi. I det følgende analyseres den optimale portefølje konstrueret med Treynor Black Modellen, både in sample og out of sample, og denne portefølje sammenlignes sideløbende med markedsporteføljen.

Aktiv	Vægt	Alfa
JEF	-0.226	-0.014
LLY	0.301	0.011
COO	0.205	0.014
NFLX	0.060	0.032
NEE	0.426	0.013
MGEE	0.235	0.008

Tabel 5.5: Porteføljevægte og alfa værdier for den aktive portefølje.

In sample resultater

Med en alfa værdi på 1,2% månedligt, er der et merafkast i den optimale portefølje, se Tabel 5.6. Med en beta på 0,481 indikerer det, at den optimale portefølje er positivt korreleret med markedet i denne periode, samt at den er mindre volatil end markedet, da beta er mindre end 1. Standardafvigelsen for den optimale portefølje er på 0,118, hvilket er lavere end markedsporteføljen, som er på 0.130.

<i>Afhængig variable:</i>	
Optimal porteføljes afkast	
‘Mkt-RF’	0.481(*) (0.071)
Alfa	0.012(*) (0.003)
Observationer	120
R ²	0.279
Adjusted R ²	0.273
Residual Std. Error	0.029 (df = 118)
F Statistic	45.737(*) (df = 1; 118)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.6: Resultater for CAPM regressionsmodel over den optimale in sample portefølje.

I Tabel 5.7 ses performance målene for den optimale portefølje, som består af 23,66% i markedsporteføljen og 76,34% i den aktive portefølje bestående af 6 aktier. Tabellen ser på in sample, som er perioden jan. 2010 - dec. 2019. Det kan ses, at den overskydende kurtosis er på 0,528, hvilket betyder, at fordelingen af det overskydende afkast fra modellen har lidt tykkere haler. Desuden er den overskydende skewness på 0,035, hvilket betyder, at fordelingen på det punkt minder meget om normalfordelingen. Jarque Bera testen anvendes til at teste for, om fordelingen af det overskydende afkast er normalfordelt. Ved at anvende denne test fås p-værdien 0,49, hvilket betyder, at nulhypotesen om, at fordelingen er normalfordelt, ikke kan forkastes. Det passer overens med, at det overskydende afkast fra modellen skal være normalfordelt.

Sharpe ratioen for den optimale portefølje er på 1,75 mod 0,989 for markedsporteføljen. Det var forventeligt, at den optimale portefølje har en højere Sharpe ratio, da det er formålet med Treynor Black Modellen. Derved vil den optimale portefølje give et højere risikojusteret afkast. Ved at teste for forskel i Sharpe ratioerne fås en p-værdi på 0,015, hvilket betyder, at der er en signifikant forskel mellem Sharpe ratioerne, da nulhypotesen om, at de er ens, forkastes. Dette betyder altså, at Sharpe ratioen for den optimale portefølje er signifikant bedre end Sharpe ratioen for markedsporteføljen.

Max Drawdown er på hhv. 0,107 og 0,177. Max Drawdown er nedgangen fra porteføljens højeste punkt til det laveste punkt og giver et mål for risikoen for porteføljen. Det fremgår af Tabel 5.7, at markedsporteføljen har en højere Max Drawdown på 17,7%, og derved er den optimale portefølje mindre volatil.

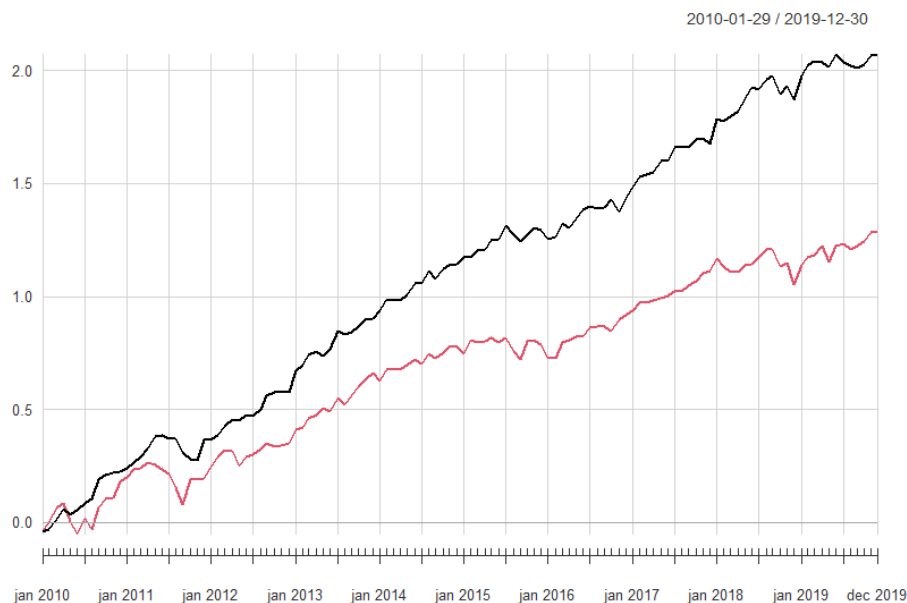
Den optimale portefølje har også en højere Sortino ratio med en MAR på 0%, og den optimale portefølje giver et højere risikojusteret afkast. Treynor ratioen, som ser på det systematiske afkast, viser også, at den optimale portefølje giver et højere risikojusteret afkast ift. markedsporteføljen.

Også M^2 fortæller, at den optimale portefølje giver et bedre afkast, når M^2 har justeret for standardafvigelsen. Det ses også i det årlige afkast, at den optimale portefølje performer bedre end markedsporteføljen.

In sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.207	0.128
Standardafvigelse (årlig)	0.118	0.130
Sharpe ratio (årlig)	1.750	0.989
Max Drawdown	0.107	0.177
Sortino ratio	1.095	0.467
Treynor Ratio	0.036	0.011
M^2	0.008	0
Overskydende Kurtosis	0.528	0.514
Skewness	0.035	-0.352

Tabel 5.7: In sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

På Figur 5.3 ses afkastet for de to porteføljer, hvor den sorte linje repræsenterer den optimale portefølje, og den røde linje repræsenterer markedsporteføljen. Det fremgår af figuren, at den optimale portefølje genererer et større akkumuleret afkast i forhold til markedsporteføljen. Markedsporteføljen genererer et afkast på 128,2%, mens den optimale portefølje genererer et afkast på 206,6%, og den optimale portefølje genererer dermed et afkast, der er 61,15% større end markedsporteføljen. På Tabel B.3 og Tabel B.1, ses afkastene for hver måned og år.



Figur 5.3: Akkumuleret overskydende afkast for den optimale portefølje (sort) og markedsporteføljen (rød).

Af Tabel 5.7 fremgår det, at den optimale portefølje slår markedsporteføljen på alle parametre i in sample. Det var forventeligt, at den optimale portefølje ville slå markedsporteføljen, da modellen er regnet i denne periode. I næste sektion vil out of sample resultaterne præsenteres.

Out of sample resultater

I Tabel 5.8 er CAPM for den optimale portefølje vist out of sample. Med en alfa på 0.9% og en parametervarians på 0,007 er alfa en ikke signifikant variabel out of sample for porteføljen. Dermed har den optimale portefølje ikke et merafkast. Porteføljen har en beta på 0,497, som er signifikant, og dermed er porteføljen mindre volatil end markedet.

<i>Afhængig variable:</i>	
Optimal porteføljes afkast	
‘Mkt-RF‘	0.497(*) (0.126)
Alfa	0.009 (0.007)
Observationer	48
R ²	0.254
Adjusted R ²	0.237
Residual Std. Error	0.051 (df = 46)
F Statistic	15.624(*) (df = 1; 46)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.8: Resultater for CAPM regressionsmodel over den optimale out of sample portefølje.

I Tabel 5.9 er performance målene for den optimale portefølje præsenteret for out of sample perioden. Det årlige afkast for den optimale portefølje er på 16,1% mod 10,2% for markedsporteføljen, hvilket fortæller, at den optimale portefølje outperformer markedsporteføljen. Standardafvigelsen for den optimale portefølje er på 0,201 mod 0,203 for markedsporteføljen, og viser, at markedsporteføljen er en smule mere volatil end den optimale portefølje. Max Drawdown og beta viser også, at markedsporteføljen er mere volatil end den optimale portefølje.

Det ses desuden, at den overskydende kurtosis og skewness ligger på henholdsvis $-0,240$ og $-0,341$, men ved brug af Jarque Bera testet kan det ikke forkastes, at det overskydende afkast er normalfordelt, da testet giver en p-værdi på 0,592.

Derudover er Sharpe ratioen for den optimale portefølje større end markedsporteføljen, hvilket fortæller, at den optimale portefølje også outperformer markedsporteføljen, når der ses på risikojusteret afkast. Sharpe ratioen for den optimale portefølje er 0,799, og 0,500 for markedsporteføljen. Dog er der ikke en signifikant forskel mellem Sharpe ratioerne, når der testes for det, da p-værdien for testen er på 0,55. Derfor er der altså ikke en signifikant forskel på Sharpe ratioerne for de to porteføljer out of sample, hvilket også betyder, at det ikke statistisk kan konkluderes, at man får et bedre risikojusteret afkast ved at benytte denne model.

Dog bekræfter Sortino ratio, Treynor ratio og M^2 også, at den optimale portefølje performer bedre end markedsporteføljen i forhold til det risikojusteret afkast i den valgte periode.

Herudfra fås der et resultat, hvor anvendelsen af Treynor Black Modellen giver bedre performance på både afkast og risikojusteret afkast.

Sammenlignes Sharpe ratio, Sortino ratio, Treynor ratio og M^2 med in sample, er ratioerne for in sample bedre end for out of sample. Det var forventeligt, da modellen er modelleret på in sample data.

Out of sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.161	0.102
Standardafvigelse (årlig)	0.201	0.203
Sharpe ratio (årlig)	0.799	0.500
Max Drawdown	0.167	0.255
Sortino ratio	0.368	0.224
Treynor Ratio	0.027	0.008
M^2	0.005	0
Overskydende Kurtosis	-0.240	-0.234
Skewness	-0.341	-0.163

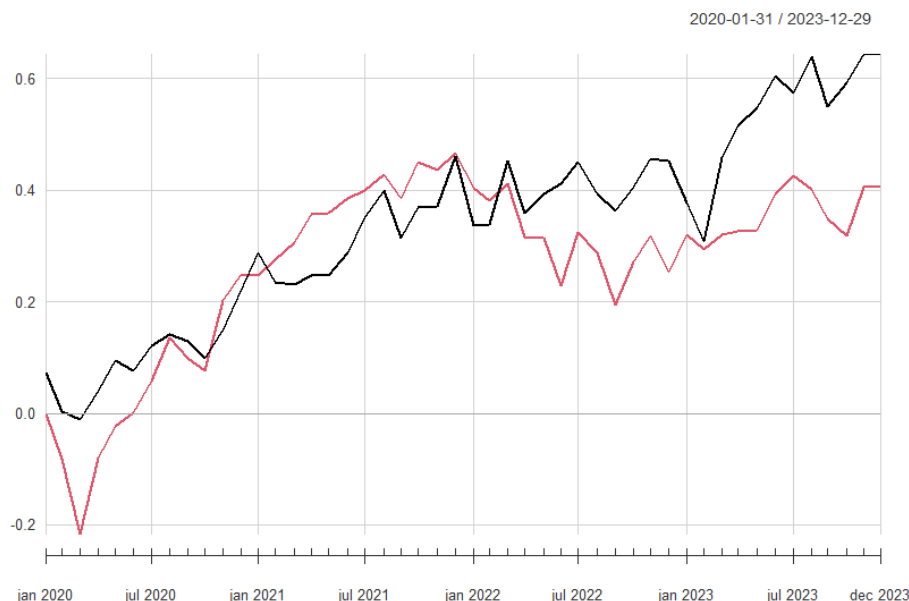
Tabel 5.9: Out of sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

På Tabel 5.10 og Tabel B.4 fremgår afkastene over de fire år. Her ses det, at den primære grund til, at den optimale portefølje outperformer markedsporteføljen, er nedgangen som sker i 2022. Her falder markedsporteføljen med -21.3% , hvor den optimale portefølje falder med -0.9% .

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt portefølje afkast
2020	7.2	-6.9	-1.3	5.0	5.6	-1.9	4.5	2.0	-1.3	-3.0	5.0	7.1	22.0
2021	6.8	-5.3	-0.4	1.5	0.1	4.0	6.3	4.9	-8.6	5.4	0.3	8.9	24.1
2022	-12.4	0.1	11.5	-9.3	3.4	1.7	3.9	-5.7	-3.1	4.4	5.0	-0.4	-0.9
2023	-7.4	-6.9	14.9	5.8	3.3	5.6	-3.1	6.6	-8.9	4.2	5.1	0.0	19.2

Tabel 5.10: Månedlige og årlige afkast for den optimale portefølje.

På Figur 5.4 ses afkastene over de 4 år. Her ses det, at den optimale portefølje giver et afkast på $64,4\%$ over de fire år, hvorimod markedsporteføljen giver et afkast på $40,6\%$, og den optimale portefølje giver et afkast der er $58,62\%$ bedre end markedet. På figuren fremgår det også, hvordan markedsporteføljen falder i 2022, mens den optimale portefølje ligger forholdsvis vandret i den periode.



Figur 5.4: Akkumuleret overskydende afkast for den optimale portefølje (sort) og markeds porteføljen (rød).

5.1.3 Resultater for Fama French Fem Faktor Model

I denne undersektion præsenteres resultaterne for Fama French modellerne, for de 33 aktier. Fama French Fem Faktor Modellerne for JPM og NFLX vil blive gennemgået i detaljer. Dertil præsenteres parameterestimaterne og forklaringsgraden for alle 33 aktier efterfølgende i en tabel.

Resultater for JPM

Tabel 5.11 præsenterer resultaterne for JPM, og Fama French Fem Faktor Modellen for JPM kan opstilles som følgende:

$$R_{t,JPM} = 0,005 + 1,203(r_{t,m} - r_{t,f}) - 0,433 \cdot SMB_t + 1,546 \cdot HML_t - 0,98 \cdot RMW_t - 1,058 \cdot CMA_t. \quad (5.3)$$

Det ses, at alle faktorer er signifikante bortset fra alfa, som også var tilfældet i CAPM. Alfa er positiv på 0,005. Modellen for JPM har en R^2 værdi på 0,746, hvilket betyder, at 74,6% af afkastet kan forklares af modellen. Sammenlignes det med CAPM modellen for JPM, giver fem faktor modellen en R^2 der er 37,13% bedre end CAPM, hvilket er en stor forbedring, og dermed kan Fama French Fem Faktor Model forklare afkastet for JPM bedre end CAPM.

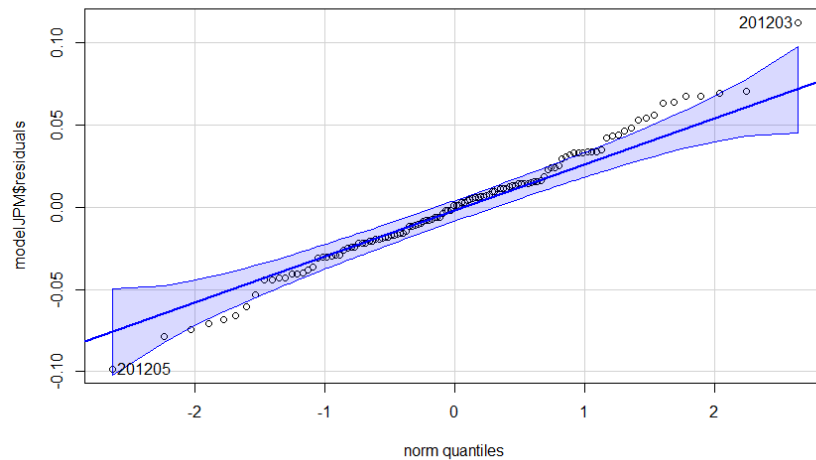
Det ses, at når markedsafkastet stiger med en enhed, vil JPM stige med 1,203, og derved er JPM positivt korreleret med markedsafkastet. Derimod, hvis SMB stiger med en enhed,

vil JPM falde med $-0,433$. Det stemmer overens med, at hvis small cap aktier performer bedre end large cap, vil JPM falde, da det er en large cap aktie. Derimod, hvis HML stiger en enhed, vil JPM stige $1,546$. Ved RMW ses det, at den er negativ, og det gælder også for CMA. På tabellen fremgår standardafvigelsen af residualerne for modellen, angivet som Residual Std. Error, som er på $0,036$ mod $0,047$ for CAPM. Det viser igen, at Fama French Fem Faktor Model modellerer afkastet for JPM bedre end CAPM.

	<i>Afhængig variabel:</i>
	JPM
‘Mkt-RF’	1.203(*) (0.099)
SMB	$-0.433(*)$ (0.169)
HML	1.546(*) (0.190)
RMW	$-0.980(*)$ (0.251)
CMA	$-1.058(*)$ (0.294)
Alfa	0.005 (0.004)
Observationer	120
R ²	0.746
Adjusted R ²	0.735
Residual Std. Error	0.036 (df = 114)
F Statistic	67.054(*) (df = 5; 114)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.11: Resultater for Fama French regressionsmodel over JPM.

På Figur 5.5 ses QQ-plottet for JPM, som viser, at data for JPM ligger tæt på 45-graders linjen, og at dataen er tilnærmelsesvis normalfordelt, hvilket er en af antagelserne for Fama French Fem Faktor Modellen.



Figur 5.5: QQ-plot for JPM

Resultater for NFLX

På Tabel 5.12 præsenteres resultaterne for NFLX, og modellen kan opstilles således:

$$R_{t,NFLX} = 0,040 + 0,817(r_{t,m} - r_{t,f}) - 0,113 \cdot SMB_t + 0,360 \cdot HML_t - 2,609 \cdot RMW_t - 2,869 \cdot CMA_t. \quad (5.4)$$

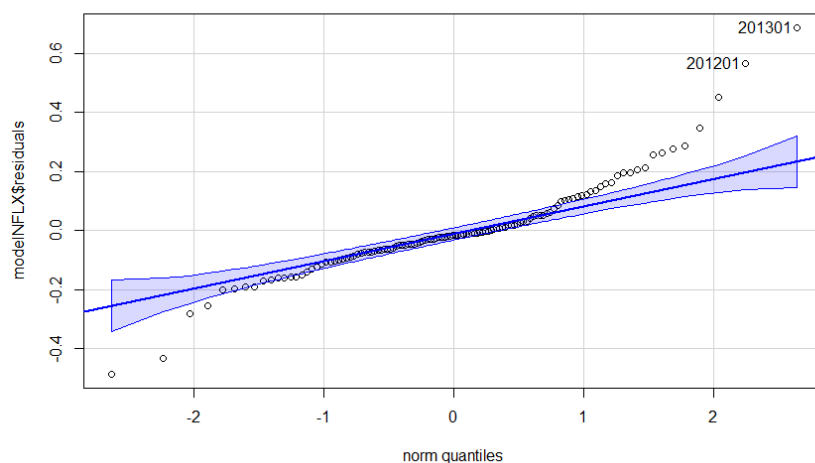
Her er MKT-RF, SMB og HML insignifikante, mens RMW, CMA og alfa er signifikante. Med en $R^2 = 0,164$ forklarer modellen minimalt NFLX's afkast. R^2 værdien for NFLX med CAPM er på 0.069, Så Fama French forklarer aktiens afkast mere end dobbelt så godt som CAPM. Det ses også på variansen af alle faktorer, at de er høje sammenlignet med JPM. Ser man på variansen af residualerne, som er på 0,163, er tallet højere end ved JPM, som er på 0,036.

Det fremgår af tabellen, at MKT-RF er på 0,817, og derved er NFLX mindre volatil end markedet. SMB er på $-0,133$, hvilket indikerer, at NFLX er negativ korreleret med small cap aktier, hvilket passer overens med, at NFLX er en large cap aktie. Det ses også, at NFLX's afkast er negativ korreleret med CMA og RMW.

	<i>Afhængig variabel:</i>
	NFLX
‘Mkt-RF’	0.817 (0.442)
SMB	−0.113 (0.759)
HML	0.360 (0.852)
RMW	−2.609(*) (1.125)
CMA	−2.869(*) (1.319)
Alfa	0.040(*) (0.016)
Observationer	120
R^2	0.164
Adjusted R^2	0.127
Residual Std. Error	0.161 (df = 114)
F Statistic	4.468(*) (df = 5; 114)
<i>Note:</i>	(*) $p < 0.05$

Tabel 5.12: Resultater for Fama French regressionsmodel over NFLX.

En af årsagerne til, at NFLX har en lav R^2 værdi, kan skyldes, at dataen ikke er normalfordelt, som QQ-plottet viser på Figur 5.6. QQ-plottet viser, at dataen for NFLX ikke er normalfordelt.



Figur 5.6: QQ-plot for NFLX

Resultater for de resterende aktier

På Tabel 5.13 er resultaterne for alle 33 aktier, hvor NFLX igen har den største alfa værdi på 0,042. Gennemsnits R^2 -værdien er på 0,356, hvilket er en forbedring ift. CAPM, der havde en gennemsnitsværdi på 0,285. Fama French Fem Faktor Modellen forbedrer R^2 værdien med 25,35%. En af grundene til, at modellen ikke performer bedre, kan skyldes, at flere af aktiernes afkast ikke er normalfordelte, og derved har modellen ikke de rette betingelser for at lave en bedre model. NFLX, som har den højeste alfa værdi, har en $R^2 = 0,164$, hvilket er en af de laveste R^2 værdier.

Ligeledes, som i CAPM, anvendes kun aktier med signifikante alfa værdier til Multifaktor Treynor Black Modellen. De er noteret med en stjerne i tabellen.

	Alfa	Mkt-RF	SMB	HML	RMW	CMA	R^2
MSFT	0.006	1.144(*)	-0.855(*)	0.596(*)	0.151	-1.258(*)	0.520
GRMN	0.003	0.957(*)	0.568(*)	-0.283	0.948(*)	-0.007	0.310
GEN	-0.004	1.149(*)	-0.537	-0.161	-0.341	-0.098	0.263
JPM	0.005	1.203(*)	-0.433(*)	1.546(*)	-0.980(*)	-1.058(*)	0.746
JEF	-0.010	1.480(*)	-0.052	1.005(*)	-0.420	-0.483	0.593
WTW	0.003	0.767(*)	0.002	-0.142	-0.202	0.206	0.339
LLY	0.010(*)	0.311(*)	-0.038	-0.763(*)	-0.636(*)	0.872(*)	0.169
COO	0.012(*)	0.559(*)	-0.076	-0.519	0.046	0.362	0.107
XRAY	-0.008	1.217(*)	-0.293	-0.308	0.265	0.667	0.416
AMZN	0.009	1.315(*)	-0.258	-0.524	0.247	-1.327(*)	0.446
HAS	0.002	1.093(*)	-0.327	0.169	0.527	-0.185	0.291
MGM	-0.000	1.598(*)	0.324	0.323	-0.643	-0.095	0.422
GE	-0.010	1.215(*)	0.154	0.188	-0.026	0.918	0.404
EFX	0.001	1.141(*)	-0.397	-0.753(*)	-0.041	0.310	0.438
TREX	0.014	1.709(*)	1.116(*)	0.713	0.571	0.401	0.394
NFLX	0.040(*)	0.817	-0.113	0.360	-2.609(*)	-2.869(*)	0.164
TZOO	-0.003	1.415(*)	2.505(*)	-1.351	-1.025	1.094	0.281
TGNA	-0.003	1.304(*)	0.426	-0.242	-0.547	1.298(*)	0.431
WMT	0.001	0.615(*)	-0.381	-0.409	0.798(*)	0.842(*)	0.253
USNA	0.014	0.533	1.244(*)	0.092	0.011	-0.922	0.141
DAR	-0.002	1.434(*)	0.351	-0.204	0.045	0.208	0.358
XOM	-0.007(*)	0.925(*)	0.036	0.086	0.190	0.856(*)	0.566
RES	-0.001	0.942(*)	1.128(*)	0.226	1.049	1.675	0.186
MUR	-0.011	1.530(*)	0.978(*)	0.646	-0.719	2.009(*)	0.530
LIN	0.001	0.807(*)	-0.022	-0.088	0.180	0.662(*)	0.477
LXU	-0.023	2.868(*)	1.375	1.343	3.027(*)	-1.080	0.357
FUL	-0.004	1.340(*)	0.868(*)	0.497	0.678	-0.394	0.607
PLD	0.002	1.180(*)	0.025	-0.191	-0.385	0.115	0.522
RHP	0.003	1.438(*)	0.776(*)	-0.321	0.580	1.409(*)	0.453
EQC	0.003	0.516(*)	-0.149	-0.152	-0.766	0.427	0.097
NEE	0.010(*)	0.409(*)	-0.376(*)	-0.446(*)	0.211	0.725(*)	0.155
ELLO	0.003(*)	0.775	-0.087	-0.300	0.213	0.803	0.100
MGEE	0.007	0.411(*)	0.465(*)	-0.321	0.458	0.739(*)	0.203

Tabel 5.13: Koefficienter for Fama French regressionsmodellen for alle aktiver, samt deres R^2 værdier for regressionsmodellen.

5.1.4 Resultater for Multifaktor Treynor Black Modellen

I denne sektion præsenteres resultaterne for porteføljesammensætningen af en aktiv og passiv portefølje ved brug af Multifaktor Treynor Black Modellen. I Tabel 5.14 er vægtene for porteføljesammensætningen mellem den aktive og passive portefølje præsenteret. Investoren skal ifølge modellen investere 40,15% af sin kapital i markedsporteføljen og 59,85% i den aktive portefølje.

I Tabel 5.15 ses aktierne med signifikante alfaer. XOM har en negativ alfa værdi, og derved shortes den. Det fremgår også, at NFLX har den største alfa værdi, men ikke får tildelt den største vægt.

	Aktiv portefølje	Passiv portefølje
Vægt	0.598	0.402

Tabel 5.14: Vægtfordeling mellem den aktive portefølje og markedsporteføljen i den optimale portefølje.

Aktiv	Vægt	Alfa
LLY	0.521	0.010
COO	0.307	0.012
NFLX	0.142	0.040
XOM	-0.587	-0.007
NEE	0.617	0.010

Tabel 5.15: Porteføljevægte og alfa værdier for aktierne.

In Sample

I Tabel 5.16 er Fama French Fem Faktor Modellen for den optimale portefølje præsenteret. Alfa er på 1,3% og er signifikant, hvilket betyder, at der er et merafkast i porteføljen. Derudover kan det også ses, at faktorerne MKT-RF og HML er signifikante. Det kan desuden ses, at betaerne for alle undtagen markedsfaktoren er negative, hvilket betyder, at porteføljen er negativt korreleret med disse faktorer.

<i>Afhængig variable:</i>	
Optimale porteføljes afkast	
‘Mkt-RF’	0.606(*) (0.100)
SMB	−0.032 (0.171)
HML	−0.418(*) (0.192)
RMW	−0.469 (0.254)
CMA	−0.515 (0.298)
Alfa	0.013(*) (0.004)
Observationer	120
R ²	0.395
Adjusted R ²	0.369
Residual Std. Error	0.036 (df = 114)
F Statistic	14.911(*) (df = 5; 114)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.16: Resultater for Fama French regressionsmodel over den optimale in sample portefølje.

I Tabel 5.17 kan performance målene for den optimale portefølje ses. Det årlige afkast er på 23,6%, hvor markedet har et årligt afkast på 12,8%. Standardafvigelsen og Max Drawdown viser, at den optimale portefølje er mere volatil end markedet. Ydermere viser Sortino ratioen, Treynor ratioen og M^2 , at det risikojusterede afkast for den optimale portefølje er bedre end markedet.

Det kan i Tabel 5.17 ses, at den overskydende kurtosis er på 1,51, hvilket betyder, at fordelingen af det overskydende afkast har tykke haler. Den overskydende skewness er −0,071, hvilket er forholdsvis tæt på 0. Ved at bruge Jarque Bera testen fås en p-værdi på 0,003, hvilket betyder, at nulhypotesen om, at det overskydende afkast er normalfordelt, forkastes.

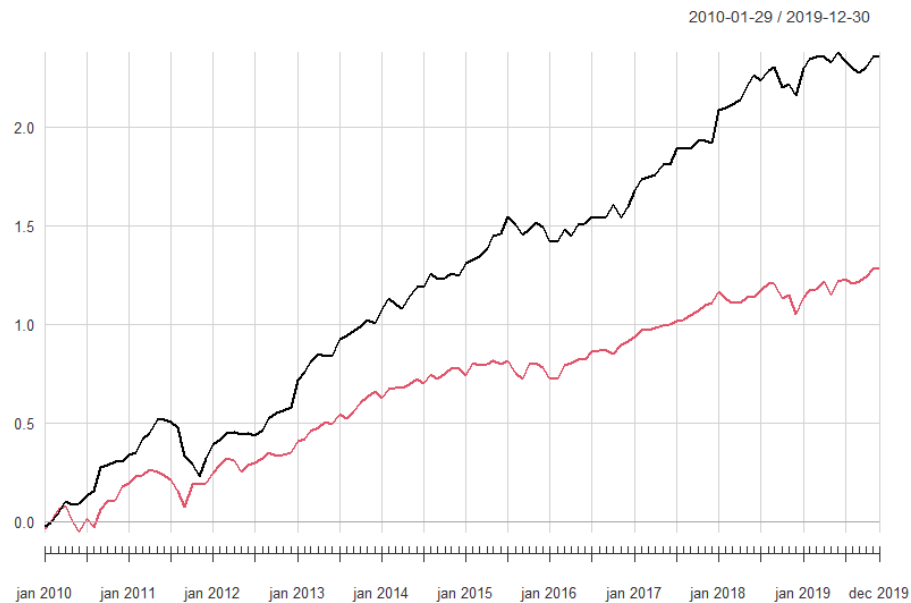
Dette strider mod antagelserne for modellen, da den kræver, at det er normalfordelt.

Sharpe ratioen, som Treynor Black Modellen optimerer, er på 1,486 mod 0,989 for markedet og viser, at den optimale portefølje har et højere risikojusteret afkast. Ved at teste for forskellen i Sharpe ratioerne fås dog, at nulhypotesen om, at de er ens, ikke kan forkastes med en p-værdi på 0,123, og der er derfor ikke en statistisk signifikant forskel i Sharpe ratioerne på trods af, at der er en numerisk forskel.

In sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.236	0.128
Standardafvigelse (årlig)	0.159	0.130
Sharpe ratio (årlig)	1.486	0.989
Max Drawdown	0.258	0.177
Sortino ratio	0.840	0.467
Treynor Ratio	0.031	0.011
M ²	0.005	0
Overskydende Kurtosis	1.510	0.514
Skewness	-0.071	-0.352

Tabel 5.17: In sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

På Figur 5.7 ses afkastet for den optimale portefølje og markedsporteføljen, og på Tabel B.2 ses afkastene for de forskellige år og måneder for den optimale portefølje. Det fremgår af Figur 5.7, at den optimale portefølje slår markedsporteføljen. Afkastet for den optimale portefølje er på 235,9%, og for markedet er afkastet på 128,2%. Dermed slår den optimale portefølje markedet med 84%. Treynor Black Modellen med CAPM lavede et afkast på 206,6%, og derved genererer Multifaktor Treynor Black Modellen et afkast, der er 14,2% større.



Figur 5.7: Akkumuleret overskydende afkast for den optimale portefølje (sort) og markedsporteføljen (rød).

Out of sample

I Tabel 5.18 kan Fama French Fem Faktor Modellen for den optimale portefølje ses. Porteføljen har en estimeret alfa på 1,1%, som er insignifikant. Dette betyder, at der ikke er statistisk evidens for, at der er et merafkast i porteføljen i denne tidsperiode. Derudover er det kun er markedsfaktoren og value faktoren, der er signifikante. Der er altså kun evidens for, at det er disse to faktorer, der har en indflydelse på det overskydende afkast af porteføljen. Det kan desuden ses, at modellen forklarer 54,3% af det overskydende afkast i porteføljen.

<i>Afhængig variable:</i>	
Optimale porteføljes afkast	
‘Mkt-RF’	0.673(*) (0.134)
SMB	−0.374 (0.292)
HML	−0.670(*) (0.219)
RMW	−0.048 (0.303)
CMA	0.187 (0.306)
Alfa	0.011 (0.007)
Observationer	48
R ²	0.543
Adjusted R ²	0.489
Residual Std. Error	0.047 (df = 42)
F Statistic	9.981(*) (df = 5; 42)
<i>Note:</i>	
(*)p<0.05	

Tabel 5.18: Resultater for Fama French regressionsmodel over den optimale out of sample portefølje.

I Tabel 5.19 er performance målene for den optimale portefølje og markedsporteføljen præsenteret for out of sample perioden januar 2020 - december 2023. I Tabel 5.19 kan det ses, at den overskydende kurtosis og skewness ligger på henholdsvis 0,485 og −0,819, men ved brug af Jarque Bera testen kan det ikke forkastes, at det overskydende afkast er normalfordelt, da testen giver en p-værdi på 0,054. Derfor antages afkastene altså at være normalfordelt.

Derudover ses det, at Sharpe ratioen for den optimale portefølje er større end markedsporteføljen, hvilket fortæller, at den optimale portefølje også outperformer markedsporteføljen, når der ses på det risikojusteret afkast. Sharpe ratioen for den optimale portefølje er 0,889,

og 0,500 for markedsporteføljen. Dog er der ikke en signifikant forskel mellem Sharpe ratioerne, når der testes for det, da p-værdien for testen er på 0,464. Derfor er der altså ikke en signifikant forskel på Sharpe ratioerne for de to porteføljer out of sample.

Standardafvigelsen og Max Drawdown indikerer, at den optimale portefølje er mere volatil end markedsporteføljen. Dog viser Sortino ratio, Treynor ratio og M^2 , at det risikojusterede afkast er bedre for den optimale portefølje. Det årlige afkast er også dobbelt så højt for den optimale portefølje sammenlignet med markedsporteføljen.

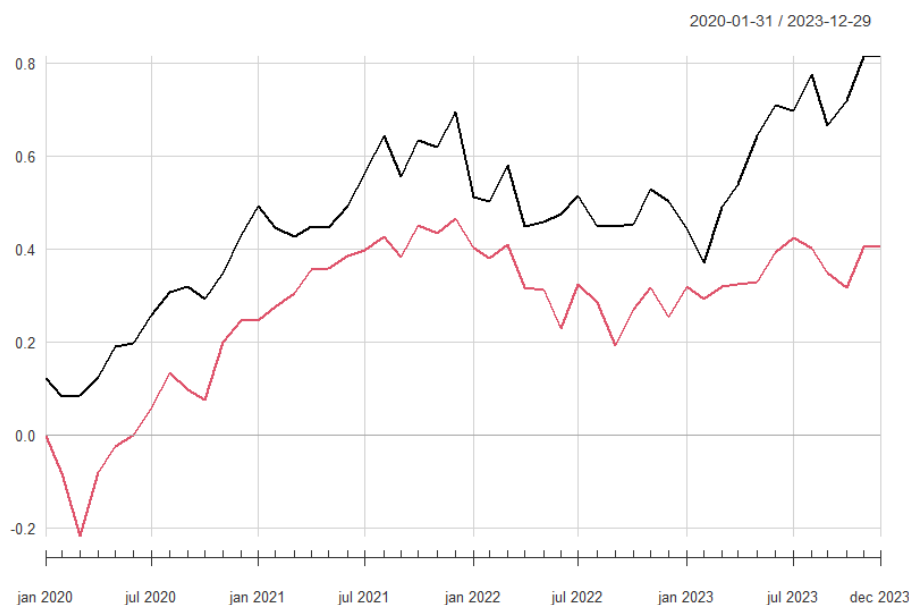
Out of sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.204	0.102
Standardafvigelse (årlig)	0.230	0.203
Sharpe ratio (årlig)	0.889	0.500
Max Drawdown	0.307	0.255
Sortino ratio	0.394	0.225
Treynor Ratio	0.031	0.008
M^2	0.007	0
Overskydende Kurtosis	0.485	-0.234
Skewness	-0.819	-0.163

Tabel 5.19: Out of sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

Endvidere fremgår det af Tabel 5.20 og Tabel B.4, at den optimale portefølje har et højere årligt afkast end markedsporteføljen i samtlige år. Dermed performer den optimale portefølje, konstrueret på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen, sig bedre end markedsporteføljen. Den optimale portefølje genererer et afkast på 81,5% på de 4 år, mens markedet genererer et afkast 40,6%, og derved genererer den optimale portefølje et afkast, der er mere end dobbelt så højt som markedsporteføljen.

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt portefølje afkast
2020	12.3	-3.8	0.2	3.8	6.5	0.7	6.2	5.0	1.1	-2.6	5.6	8.0	43.1
2021	6.3	-4.8	-1.8	2.2	-0.4	4.7	7.0	8.0	-8.7	7.7	-1.4	7.5	26.4
2022	-18.2	-1.1	7.9	-13.3	1.0	1.8	4.0	-6.6	0.0	0.4	7.7	-2.9	-19.3
2023	-5.9	-7.2	11.9	4.9	10.4	6.7	-1.3	7.8	-10.9	5.5	9.5	0.0	31.3

Tabel 5.20: Månedlige og årlige afkast for den optimale portefølje.



Figur 5.8: Akkumuleret afkast for den optimale portefølje (sort) og markedsporteføljen (rød).

5.1.5 Sammenligning

Ved at sammenligne de to optimale porteføljer fundet ved Treynor Black Modellen på baggrund af henholdsvis CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen er der en tydelig forskel ved, at den aktive portefølje på baggrund af CAPM indeholder seks aktier, hvilket betyder, at der er seks aktier med et signifikant alfa, hvorimod den aktive portefølje på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen indeholder fem aktier. Derudover er der også forskel på, hvor stor en vægt de aktive porteføljer har i den optimale portefølje afhængigt af modellen. Treynor Black Modellen på baggrund af CAPM allokerer 76% af den optimale portefølje til at bestå af den aktive portefølje, hvorimod Treynor Black Modellen på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen kun allokerer cirka 60% af den optimale portefølje til at bestå af den aktive portefølje.

Hvis der ses på in sample resultaterne er det overskydende afkast bedst for Treynor Black Modellen på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen, hvor den giver et årligt afkast på 23,6% mod et overskydende afkast på 20,7% for Treynor Black Modellen på baggrund af CAPM. Det giver dog det omvendte resultat, når der ses på risikojusteret afkast, hvor den oprindelige model har en Sharpe ratio på 1,750, og den udvidede model har en Sharpe ratio på 1,486. Dog kan det også ses, at Fama French Fem Faktor Modellen er bedre til at forklare det overskydende afkast in sample med en forklaringsgrad på 0,395 mod CAPM, der giver en forklaringsgrad på 0,279.

Hvis der derimod ses på out of sample er det gennemgående resultat, at den optimale

portefølje på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen performer bedre end den optimale portefølje på baggrund af CAPM. Dette kan f.eks. ses på overskydende afkast, hvor den optimale portefølje på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen giver et overskydende afkast, der er cirka 39% bedre end det overskydende afkast for den optimale portefølje på baggrund af CAPM over de fire år fra 2020 til 2023. Også hvis der ses på risikojusteret afkast performer Treynor Black Modellen på baggrund af Fama French Fem Faktor Modellen bedst med en Sharpe ratio på 0,889 mod en Sharpe ratio på 0,799 for Treynor Black Modellen på baggrund af CAPM.

Dog skal det også nævnes, at begge optimale porteføljer slår markedsporteføljen både in sample og out of sample på både overskydende afkast og risikojusteret afkast. Især den bedre performance out of sample viser, at Treynor Black modellen kan anvendes til at skabe et bedre afkast og risikojusteret afkast.

5.2 S&P 500 analyse

I denne sektion anvendes aktier fra S&P 500 indekset, som blev præsenteret i Sektion 4.3, til at indgå i den optimale portefølje. Resultaterne for den optimale portefølje præsenteret først på baggrund af den oprindelige Treynor Black Model og bagefter på baggrund af Multifaktor Treynor Black Modellen. Inden resultaterne for den optimale portefølje præsenteres i hvert tilfælde, præsenteres resultaterne for henholdsvis CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen for at begrunde, hvilke aktier der kommer til at indgå i den optimale portefølje på baggrund af henholdsvis CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen. For begge modeller vil det gælde, at den optimale portefølje vil inkludere syv aktier fra S&P500 indekset. Valget på syv aktier blev taget på baggrund af vægtfordelingen mellem den aktive og passive portefølje, hvilket beskrives til sidst i sektionen, hvor der vil blive præsenteret en gennemsnitlig performance af den oprindelige Treynor Black Model og Multifaktor Treynor Black Modellen.

5.2.1 Resultater for CAPM

For at bestemme hvilke syv aktier der skal indgå i den optimale portefølje konstrueret af Treynor Black Modellen, skal det først undersøges, hvilke af aktierne der har et signifikant merafkast. Derfor er hver af de 492 aktier, der anvendes til undersøgelsen, estimeret med CAPM. Af de 492 aktier var der ifølge CAPM 89 aktier, der havde en signifikant alfa værdi. De 89 aktier sorteres efter størrelsen af aktiernes alfa værdi. Sorteringen laves ved at undersøge de kvadrerede alfa værdier, da det er de numerisk største alfa værdier der anvendes. De syv aktier der vælges til at indgå i den optimale portefølje, er de syv aktier, der ifølge CAPM har de største signifikante alfa værdier af aktierne inkluderet i S&P500 indekset. De syv aktiers parameterestimater og signifikansniveau kan ses i Tabel 5.21. Det gælder for alle af aktierne, at modellen har en lav forklaringsgrad, hvor modellen for DVN har den største med $R^2 = 0,364$. Dertil gælder det, at modellen for alle aktierne har en signifikant markedsfaktor med et signifikansniveau på 95%.

	Alfa	Mkt-RF	R^2
NFLX	0.032(*)	1.211(*)	0.069
DXCM	0.028(*)	0.648(*)	0.033
DPZ	0.026(*)	0.700(*)	0.107
MKTX	0.026(*)	0.460(*)	0.052
APA	-0.023(*)	1.639(*)	0.327
DVN	-0.022(*)	1.805(*)	0.364
MTCH	0.021(*)	0.515(*)	0.044

Tabel 5.21: Koefficienter for regressionsmodellerne for de valgte aktiver samt deres R^2 værdier.

5.2.2 Resultater for Treynor Black Modellen

I denne sektion præsenteres resultaterne for den optimale portefølje konstrueret med Treynor Black Modellen med udgangspunkt i CAPM. Ifølge modellen skal den optimale portefølje sammensættes ved at investere 51,7% i den aktive portefølje og 48,3% i den passive portefølje, se Tabel 5.22.

	Aktiv portefølje	Passiv portefølje
Vægt	0.517	0.483

Tabel 5.22: Vægtfordeling mellem den aktive portefølje og markedsporteføljen i den optimale portefølje.

Vægtfordelingen for de syv aktier, som er inkluderet i den aktive portefølje, kan ses i Tabel 5.23. Der bliver investeret over 100% i aktierne MKTX og DPZ, mens aktierne APA og DVN shortes pga. deres negative alfa estimater.

Aktiv	Vægt	Alfa
NFLX	0.128	0.032
DXCM	0.183	0.028
DPZ	0.509	0.026
MKTX	0.530	0.026
APA	-0.332	-0.023
DVN	-0.306	-0.022
MTCH	0.288	0.021

Tabel 5.23: Porteføljevægte og alfa værdier for den aktive portefølje.

In sample

I Tabel 5.24 er in sample performance målene præsenteret for den optimale portefølje. Den årlige Sharpe ratio for den optimale portefølje er på 1,986, hvilket er større end Sharpe ratioen for markedsporteføljen, der er på 0,989. Dertil fås en p-værdi på 0,003 ved at teste for, om der er en forskel på Sharpe ratioerne af de to porteføljer. Dermed er der en signifikant forskel på Sharpe ratioerne, og den optimale portefølje har derved en signifikant større Sharpe ratio end markedsporteføljen. Meretil er den optimale portefølje også bedre, når man ser på de andre performance mål, som Max Drawdown, Sortino og Treynor ratio, samt M^2 . Specielt Sortino ratioen er større for den optimale portefølje end for markedsporteføljen, hvilket betyder, at afkastet for den optimale portefølje er bedre i forhold til den nedadgående risiko for porteføljen.

Derudover har fordelingen af den optimale portefølje tyndere haler end en normalfordeling, samt den også har længere haler til venstre i forhold til en normalfordeling, da overskydende kurtosis og skævness er på henholdsvis $-0,128$ og $-0,260$. Dertil, ved at teste for om afkastet for porteføljen er normalfordelt, fås en p-værdi for Jarque Bera Testen på 0,489, og dermed accepteres nulhypotesen om normalfordelte afkast for den optimale portefølje.

In sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.347	0.128
Standardafvigelse (årlig)	0.175	0.130
Sharpe ratio (årlig)	1.986	0.989
Max Drawdown	0.145	0.177
Sortino ratio	1.232	0.467
Treynor Ratio	0.042	0.011
M^2	0.011	0
Overskydende Kurtosis	-0.128	0.514
Skewness	-0.260	-0.352

Tabel 5.24: In sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

Out of sample

I Tabel 5.25 er out of sample performance målene for den optimale portefølje og markedsporteføljen præsenteret. Sharpe ratioen for out of sample for den optimale portefølje er dårligere end Sharpe ratioen for markedsporteføljen med en Sharpe ratio på 0,164 mod 0,5. Det kommer af, at den optimale portefølje både har en større standardafvigelse og et mindre afkast end markedsporteføljen. I forhold til at teste, om der er en forskel på Sharpe ratioerne af de to porteføljer, fås en p-værdi på 0,548. Dermed kan det ikke siges, at der er en signifikant forskel på out of sample Sharpe ratioerne af de to porteføljer. Den optimale portefølje har derudover en større Max Drawdown end markedsporteføljen og en dårligere sortino ratio, samt treynor ratio.

Den optimale porteføljes fordeling har tyndere haler end en normalfordeling og har længere haler til højre. Ved at teste for om afkastet er normalfordelt med Jarque Bera Testen, fås en p-værdi på 0,518, og derfor accepteres nulhypotesen om, at afkastet er normalfordelt.

Out of sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.067	0.102
Standardafvigelse (årlig)	0.409	0.203
Sharpe ratio (årlig)	0.164	0.500
Max Drawdown	0.703	0.255
Sortino ratio	0.072	0.224
Treynor Ratio	0.007	0.008
M ²	-0.008	0.084
Overskydende Kurtosis	-0.006	0
Skewness	0.746	-0.163

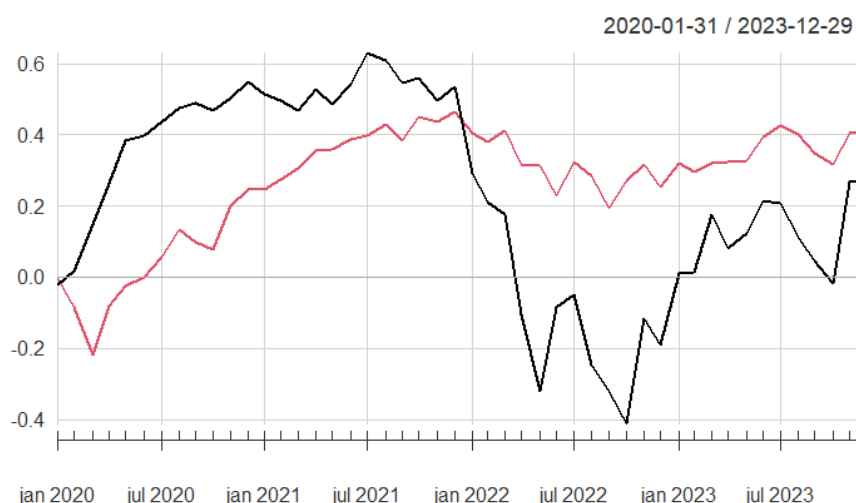
Tabel 5.25: Out of sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

I Tabel 5.26 er CAPM estimeret for den optimale portefølje. Porteføljens beta er på 0,787 og er signifikant. Det vil sige, at porteføljen er mindre volatil end markedet ifølge CAPM, men afkastet bevæger sig i samme retning som markedsporteføljen. Porteføljens alfa er estimeret til -0,002, og dermed har porteføljen underpræsteret i forhold til dens systematiske risiko. Dertil er det gældende, at alfa værdien ikke kan siges at være signifikant forskellig fra nul.

<i>Afhængig variabel:</i>	
Optimale porteføljes afkast	
‘Mkt-RF’	0.787(*) (0.272)
Alfa	−0.002 (0.016)
Observationer	48
R ²	0.154
Adjusted R ²	0.136
Residual Std. Error	0.110 (df = 46)
F Statistic	8.391(*) (df = 1; 46)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.26: Resultater for CAPM over den optimale portefølje out of sample.

På Figur 5.9 ses det akkumulerede overskydende afkast for den optimale portefølje og markedsporteføljen i out of sample perioden. Den optimale portefølje har et akkumuleret overskydende afkast på 26,8% mens markedsporteføljen har et akkumuleret overskydende afkast på 40,6%. Dermed performer den optimale portefølje sig dårligere end markedsporteføljen, hvilket også var forventet på baggrund af performance målene for den optimale portefølje. Det kan ses på Figur 5.9 samt i Tabel 5.27, at grunden til den optimale portefølje klarer sig dårligt er pga. år 2022. I den periode har den optimale portefølje et stort negativt afkast, hvor den taber 72,4%. Derudover klarer den sig bedre end markedsporteføljen i 2020 og 2023.



Figur 5.9: Akkumuleret overskydende afkast for den optimale portefølje (sort) og markeds porteføljen (rød).

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt porte- følje afkast
2020	-1.9	3.9	12.8	11.8	11.7	1.4	4.0	3.7	1.5	-2.2	3.6	4.5	54.8
2021	-3.4	-1.8	-2.6	5.8	-4.0	5.6	8.6	-2.1	-6.4	1.3	-6.1	3.8	-1.2
2022	-24.2	-8.3	-3.6	-28.0	-21.5	23.8	3.3	-19.6	-7.6	-8.9	29.4	-7.3	-72.4
2023	20.2	0.2	16.0	-9.4	4.2	9.0	-0.7	-9.3	-6.9	-6.2	28.5	0.0	45.6

Tabel 5.27: Månedlige og årlige afkast for den optimale portefølje.

5.2.3 Resultater for Fama French Fem Faktor Model

For at bestemme hvilke syv aktier der skal indgå i den optimale portefølje konstrueret af Multifaktor Treynor Black Modellen, undersøges det igen hvilke af aktierne, der har et signifikant merafkast. Derfor, for hver af de 492 aktier der anvendes til undersøgelsen, estimeres Fama French Fem Faktor Modellen. Af de 492 aktier, var der ifølge Fama French Modellen 63 forskellige aktier, der havde en signifikant alfa værdi. Aktierne sorteres i forhold til, hvilke aktier der har de største alfa værdier på samme måde som for CAPM. De syv aktier, der kommer til at indgå i den optimale portefølje, kan ses i Tabel 5.28, samt deres parameterestimer og signifikansniveauer. For alle af aktierne gælder det, at deres forklaringsgrad er lav, hvor APA har den største værdi på $R^2 = 0,393$. Generelt, er der ikke nogle af modellerne, der har mere end to signifikante faktorer af de fem, hvor der heraf kun er fire af aktierne, der har en signifikant markedsfaktor.

	Alfa	Mkt-RF	SMB	HML	RMW	CMA	R^2
NFLX	0.040(*)	0.817	-0.113	0.360	-2.609(*)	-2.869(*)	0.164
DXCM	0.031(*)	0.294	0.974	-1.508(*)	-1.796(*)	-1.055	0.205
AXON	0.028(*)	0.223	2.042(*)	-0.678	0.613	0.066	0.106
DPZ	0.026(*)	0.682(*)	0.326	-0.193	0.350	0.049	0.116
MKTX	0.025(*)	0.448(*)	0.159	-0.381	-0.020	-0.138	0.069
MTCH	0.020(*)	0.525(*)	-0.048	-0.568	-0.177	-1.226	0.137
APA	-0.019(*)	1.410(*)	0.674	0.623	-0.200	0.549	0.393

Tabel 5.28: Koefficienter for Fama French Modellen og R^2 værdier for udvalgte aktiver.

5.2.4 Resultater for Multifaktor Treynor Black Modellen

I denne sektion præsenteres resultaterne for den optimale portefølje konstrueret med Multifaktor Treynor Black Modellen. Ifølge modellen skal den optimale portefølje konstrueres ved at investere 81,6% i den aktive portefølje og 18,4% i den passive portefølje, se Tabel 5.29.

	Aktiv portefølje	Passiv portefølje
Vægt	0.816	0.184

Tabel 5.29: Vægtfordeling mellem den aktive portefølje og markedsporteføljen i den optimale portefølje.

Af de syv aktier, der er inkluderet i den aktive portefølje, er vægtfordelingen mellem aktierne ligeligt fordelt. Der investeres mest i MKTX og DPZ, mens APA shortes pga. den negative alfa værdi.

Aktiv	Vægt	Alfa
NFLX	0.110	0.040
DXCM	0.152	0.031
AXON	0.106	0.028
DPZ	0.308	0.026
MKTX	0.322	0.025
MTCH	0.187	0.020
APA	-0.185	-0.019

Tabel 5.30: Porteføljevægte og alfa værdier for den aktive portefølje.

In sample

In sample performance målene for den optimale portefølje og markedsporteføljen er præsenteret i Tabel 5.31. Den optimale portefølje har en Sharpe ratio på 1,923, og markedsporteføljen har en Sharpe ratio på 0,989. Den store Sharpe ratio for den optimale portefølje kommer af, at porteføljens årlige afkast er stort. Ved at teste, om der er signifikant forskel på Sharpe ratioerne, fås en p-værdi på 0,006, hvilket betyder der er signifikant forskel på de to Sharpe ratioer. Ligeledes performer den optimale portefølje bedre end markedsporteføljen i forhold til alle de andre performance mål.

Fordelingen af den optimale portefølje har overskydende kurtosis på $-0,082$ og en skewness på $-0,234$, så fordelingen udskiller sig ikke særligt fra en normalfordeling. Dette bekræftes også af Jarque Bera Testen, der giver en p-værdi på 0,569, og dermed accepteres nulhypotesen om, at afkastet er normalfordelt.

In sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.353	0.128
Standardafvigelse (årlig)	0.184	0.130
Sharpe ratio (årlig)	1.923	0.989
Max Drawdown	0.151	0.177
Sortino ratio	1.185	0.467
Treynor Ratio	0.043	0.011
M ²	0.011	0
Overskydende Kurtosis	-0.082	0.514
Skewness	-0.234	-0.352

Tabel 5.31: In sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

Out of Sample

Performance målene for den optimale portefølje og markedsporteføljen er for out of sample perioden præsenteret i Tabel 5.32. Sharpe ratioen er for den optimale portefølje mindre end for markedsporteføljen med værdier på henholdsvis 0,301 og 0,5. Det skyldes, at den optimale portefølje både er mere volatil, samt har et mindre afkast end markedsporteføljen. Der er derimod ikke en signifikant forskel i Sharpe rationerne mellem de to porteføljer, da testen for dette giver en p-værdi på 0,664. Den optimale portefølje klarer sig ligeledes dårligere end markedsporteføljen i forhold til de andre performance mål i tabellen.

Den optimale porteføljes fordeling har tykkere haler end en normalfordeling, samt den har en længere hale til venstre. Fordelingen antages at opfylde antagelsen om normalfordelte afkast, eftersom Jarque Bera Testen giver en p-værdi på 0,287.

Out of sample performance måling		
	Optimal portefølje	Markedsportefølje
Årligt afkast	0.088	0.102
Standardafvigelse (årlig)	0.293	0.203
Sharpe ratio (årlig)	0.301	0.500
Max Drawdown	0.524	0.255
Sortino ratio	0.129	0.224
Treynor Ratio	0.008	0.008
M ²	-0.003	0
Overskydende Kurtosis	0.836	-0.234
Skewness	-0.370	-0.163

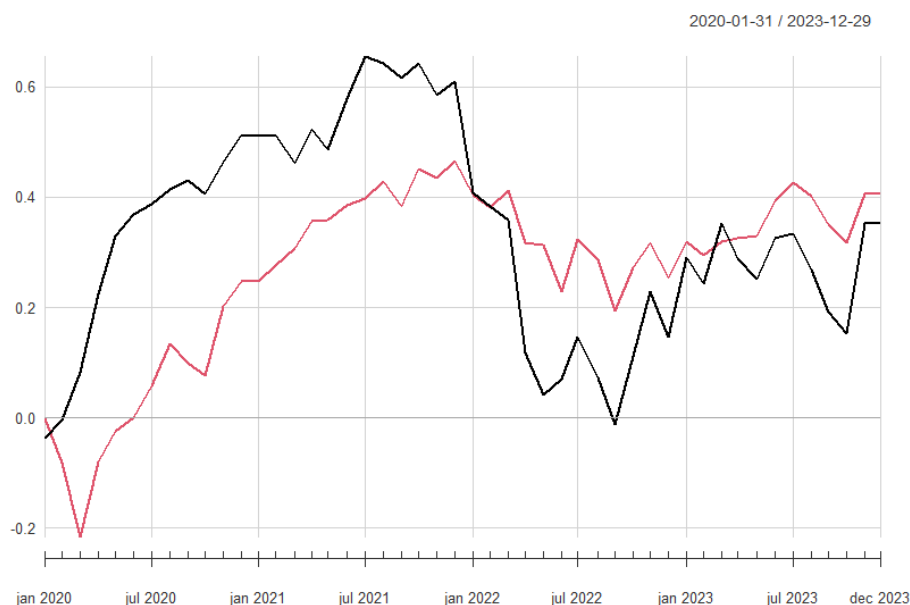
Tabel 5.32: Out of sample performance måling af den optimale portefølje og markedsporteføljen.

I Tabel 5.33 ses resultatet af estimerne for Fama French Modellen på den optimale portefølje. Modellen har et signifikant parameterestimat for markedsfaktoren og HML, mens de andre variable i modellen ikke kan siges at være signifikant forskellige fra nul. Estimatet for alfa er lille og negativt med en stor varians i forhold til estimatet. Den optimale portefølje genererer dermed ikke noget merafkast i forhold til dens systematiske risiko.

<i>Afhængig variabel:</i>	
Optimale porteføljes afkast	
‘Mkt-RF’	0.901(*) (0.157)
SMB	0.211 (0.342)
HML	−0.919(*) (0.257)
RMW	−0.062 (0.356)
CMA	0.194 (0.360)
Alfa	−0.0001 (0.008)
Observationer	48
R ²	0.613
Adjusted R ²	0.567
Residual Std. Error	0.056 (df = 42)
F Statistic	13.297(*) (df = 5; 42)
<i>Note:</i>	(*)p<0.05

Tabel 5.33: Resultater for Fama French regressionsmodel over den optimale out of sample portefølje.

Det fremgår på Figur 5.10, at den optimale portefølje performer bedre end markedsporteføljen i 2020 og 2021, men får et stort fald i 2022. Det gør, at det akkumulerede overskydende afkast for porteføljen er mindre end for markedet med akkumulerede overskydende afkast på henholdsvis 35,3% og 40,6%. Dette kan også ses i Tabel 5.34, hvor det er tydeligt, at porteføljen præsterer dårligt igennem 2022.



Figur 5.10: Akkumuleret overskydende afkast for den optimale portefølje (sort) og markeds porteføljen (rød).

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt porte- følje afkast
2020	-3.7	3.3	8.7	14.3	10.6	3.8	1.8	2.8	1.6	-2.4	5.7	4.9	51.4
2021	-0.3	0.2	-5.1	6.2	-3.8	9.3	7.7	-1.4	-2.6	2.7	-5.8	2.5	9.7
2022	-20.3	-2.4	-2.5	-24.3	-7.5	2.9	7.7	-7.5	-8.4	12.4	11.6	-8.2	-46.4
2023	14.4	-4.8	11.0	-6.5	-3.7	7.5	0.8	-6.6	-7.5	-3.9	20.0	0.0	20.6

Tabel 5.34: Månedlige og årlige afkast for den optimale portefølje.

5.2.5 Gennemsnitlig Performance af Treynor Black Model og Multifaktor Treynor Black Model

I det følgende præsenteres resultater, der opsummerer Treynor Black Modellens og Multifaktor Treynor Black Modellens performance over flere forskellige sammensatte optimale porteføljer ved brug af aktierne fra S&P 500 indekset. Aktierne der inkluderes i den optimale portefølje, er aktier der ifølge CAPM for Treynor Black Modellen og Fama French Fem Faktor Modellen for Multifaktor Treynor Black Modellen har et signifikant merafkast. Først præsenteres resultaterne for Treynor Black Modellen og dernæst for Multifaktor Treynor Black Modellen.

Treynor Black Model

Det blev fundet, at der var 89 aktier fra S&P 500 indekset, der ifølge CAPM har en signifikant alfa. Der er derfor i det følgende lavet 89 modeller med Treynor Black Modellen, som er struktureret på følgende måde. Aktierne der inkluderes i modellerne, sorteres efter størrelsen af deres estimerede alfa værdier, således de aktier, der har den største absolutte alfa værdi, vælges først. Der anvendes absolutte alfa værdier, så der kan ses bort for, om estimatet af alfa er negativt eller positivt. For den første model, der laves, model 1, vil den aktive portefølje kun indeholde en aktie, og det er aktien med den størst estimerede alfa værdi. Model 2 vil have to aktier i den aktive portefølje, og det er aktierne med de to største estimerede alfa værdier. Dette fortsættes, indtil alle 89 aktier er inkluderet i den aktive portefølje. Vægtfordelingen mellem den aktive og passive portefølje i den optimale portefølje for de 89 modeller kan ses i Tabel C.1. Her er det interessant at bemærke, at vægten for den aktive portefølje bliver større end én, hvis man inkluderer flere end 21 aktier i modellen. Dette sker også for modellen med fire aktier. Dermed vil modellen shorte markedsporteføljen, hvis man inkluderer mere end 21 aktier i sin aktive portefølje, og man vil ifølge modellen shorte markedet mere, desto flere aktier der inkluderes i porteføljen.

Ligeledes kan out of sample sharpe ratio, akkumuleret afkast og test af sharpe ratio ses i Tabel C.1 for alle 89 modeller. For out of sample perioden har den optimale portefølje en højere Sharpe ratio end markedsporteføljen 25 gange ud af de 89. Den gennemsnitlige Sharpe ratio for de 89 modeller er 0,423 mod markedets Sharpe ratio på 0,50. Modellen med syv aktier har den dårligste Sharpe ratio på 0,164 og modellen med 48 aktier har den bedste Sharpe ratio på 0,580. Dermed formår Treynor Black Modellen kun at slå markedet out of sample 28,09% af gangene i forhold til Sharpe ratio. Endvidere er det gennemsnitlige akkumulerede overskydende afkast fra modellerne for den optimale portefølje 37,8%, hvor markedets akkumulerede overskydende afkast var 40,6%. Modellen med syv aktier lavede det mindste akkumulerede afkast på 26,8%, og modellen med 10 aktier lavede det største afkast på 70,9%. Der var 30 modeller af de 89, som formåede at lave et akkumuleret overskydende afkast i out of sample perioden, der var større end markedets overskydende afkast. Dermed formår modellen at slå markedet 33,8% af gangene i forhold til akkumuleret afkast.

Der er også blevet testet for, om Sharpe ratioerne er statistisk forskellige out of sample, og der fremkommer det, at alle modellerne får p-værdier, der er større end 0,05. Dermed er der ikke nogle Sharpe ratioer for modellerne, der er signifikant forskellige fra markedets Sharpe ratio.

Multifaktor Treynor Black Model

Der var 63 aktier fra S&P 500 indekset, der havde en signifikant alfa værdi, ifølge Fama French Fem Faktor Modellen. Derved konstrueres der 63 Multifaktor Treynor Black Modeller. Modellerne sammensættes på samme måde, som for Treynor Black Modellen beskrevet ovenover. Vægtfordelingen mellem den aktive og passive portefølje i den optimale portefølje

kan for de 63 modeller ses i Tabel C.2. Endvidere kan man også se out of sample sharpe ratio, akkumuleret afkast og test af sharpe ratio for alle 63 modeller i tabellen. Bemærk at vægtene for den aktive portefølje er større end én, når der er inkluderet mere end otte aktier i porteføljen. Dertil har modellen med seks aktier i den aktive portefølje også en vægt, der er større end én. Igen gælder det, at flere aktier inkluderet i den optimale portefølje betyder, at vægten for den aktive portefølje bliver større. Den optimale portefølje for Multifaktor Treynor Black Modellen har i gennemsnit en Sharpe ratio på 0,681 i out of sample perioden for de 63 modeller. Dermed giver Multifaktor Treynor Black Modellen i gennemsnit en portefølje, der har en bedre Sharpe ratio end markedet, som har en Sharpe ratio på 0,5. Den optimale portefølje der inkluderer 31 aktier, har den største Sharpe ratio på 0,942. Porteføljen med den dårligste Sharpe ratio på 0,290 inkluderer seks aktier. I alt er der 58 af de 63 modeller, som har en Sharpe ratio, der er større end markedets Sharpe ratio. Dermed slår den optimale portefølje markedet i forhold til Sharpe ratio 96,7% af gangene. Ved at teste for, om Sharpe ratioerne for den optimale portefølje er statistisk forskellige fra markedets Sharpe ratio, gælder for alle 63 modeller, at nulhypotesen accepteres. Dermed er der ingen af modellerne, der har en Sharpe ratio, der er signifikant forskellig fra markedets Sharpe ratio. Der gælder for det overskydende afkast, at 61 de optimale porteføljer ud af de 63 optimale porteføljer genererer et akkumuleret overskydende afkast, der er større end markedets. Det gennemsnitlige akkumulerede overskydende afkast for modellerne er 58,9%, hvor markedet havde et på 40,6%. Den optimale portefølje med 31 aktier havde det bedste akkumulerede overskydende afkast på 80,7%, og porteføljen med seks aktier havde det dårligste på 34,1%.

6 | Diskussion

Det fremgår af Sektion 5.1, at for in sample genererer Treynor Black Modellen et overskydende afkast på 206,6%, mens Multifaktor Treynor Black Modellen genererer et overskydende afkast på 235,9%. Markedsporteføljen genererer et overskydende afkast på 128,2%. Da Treynor Black Modellen og Multifaktor Treynor Black Modellen er modelleret på in sample data, er det forventeligt, at begge modeller slår markedet, da modellerne specifikt er tilpasset til denne tidsperiode. Den optimale portefølje givet ved Treynor Black Modellen har en alfa på 1,2% samt en Sharpe ratio på 1,75, mens den optimale portefølje givet ved Multifaktor Treynor Black Modellen har en alfa på 1,3% og en Sharpe ratio på 1,486. Markedsporteføljen har en Sharpe ratio på 0,989. Det fremgår af resultaterne, at den optimale portefølje givet ved Treynor Black Modellen har en højere Sharpe ratio end den optimale portefølje givet ved Multifaktor Treynor Black Modellen. Det vil sige, at Treynor Black Modellen genererer et bedre risikojusteret afkast. Den optimale portefølje for Multifaktor Treynor Black Modellen har en højere alfa værdi og er bedre til at finde et merafkast. Begge optimale porteføljer slår markedsporteføljen, og samtlige performance målinger viser, at begge modeller laver et bedre risikojusteret afkast end markedsporteføljen. Da der ses på in sample, skulle resultaterne gerne være gode for de to modeller, da modellerne er modelleret på in sample data. Da der ses på in sample, kan de gode resultater skyldes, at modellerne er blevet overfittet. Det kan gøre, at modellerne er perfekt tilpasset netop denne periode og fanger alt støj, der er i denne periode. Det kan give høj præcision i in sample, men kan resultere i dårlige resultater i out of sample.

For den optimale portefølje givet ved Treynor Black Modellen fremgår det i Sektion 5.1, at der er signifikant forskel på Sharpe ratioen mellem porteføljen og markedsporteføljen. For den optimale portefølje givet ved Multifaktor Treynor Black Modellen er der ikke signifikant forskel mellem Sharpe ratioerne mellem porteføljen og markedsporteføljen. Det kan muligvis skyldes antagelsen om, at en normalfordeling ikke kan afvises for det overskydende afkast genereret af Treynor Black Modellen ifølge Jarque Bera Testen, mens Jarque Bera Testen for Multifaktor Treynor Black Modellen afviser, at det overskydende afkast er normalfordelt. En af antagelserne for modellen er, at data er normalfordelt, og derved har Multifaktor Treynor Black Modellen ikke de rette betingelser til at lave en god model. Det kunne også ses på QQ-plottet for Netflix aktien, som indikerer, at Netflix aktiens overskydende afkast ikke er normalfordelt. Derved holder antagelsen om, at det overskydende afkast skal være normalfordelt ikke. Mange af de statistiske modeller, der anvendes, bl.a. Sharpe ratioen, har antagelsen om normalfordeling, og det kan give skæve eller misvisende resultater, hvis det ikke er normalfordelt.

Af Sektion 5.1 for out of sample fremgår det, at Treynor Black Modellen genererer et over-

skydende afkast på 64,4%, Multifaktor Treynor Black Modellen genererer et overskydende afkast på 81,5%, mens markedsporteføljen har et overskydende afkast på 40,6%. Derved genererer begge modeller et overskydende afkast, der er bedre end markedsporteføljen. Den optimale portefølje givet ved Treynor Black Modellen har en alfa på 0,9% og en Sharpe ratio på 0,799, mens den optimale portefølje givet ved Multifaktor Treynor Black Modellen har en alfa på 1,1% og en Sharpe ratio på 0,889. Markedet har en Sharpe ratio på 0,5. Derved genererer begge modeller et bedre risikojusteret afkast end markedet, hvilket de andre performance målinger også bekræfter. Den optimale portefølje givet ved Multifaktor Treynor Black Modellen har en højere alfa værdi, en højere Sharpe ratio og et højere overskydende afkast out of sample end både den optimale portefølje givet ved Treynor Black Modellen og markedsporteføljen. Denne højere alfa værdi kan skyldes, at de fire ekstra faktorer, som Fama French Modellen inkluderer, forklarer variationen af afkastet bedre. Det må betyde, at disse ekstra faktorer bidrager til bedre at kunne forklare det overskydende afkast. Det samme gør sig gældende for Sharpe ratioen. De fire ekstra faktorer gør, at Multifaktor Treynor Black Modellen genererer et bedre risikojusteret afkast, og dermed er de fire faktorer relevante for aktiemarkedet. Disse fire faktorer fanger yderligere kilder til risiko og afkast, som ikke er dækket af markedsfaktoren. De ekstra faktorer i Fama French Modellen kan bidrage til en mere præcis vurdering af en akties risiko og potentielle afkast.

Det fremgår desuden af Sektion 5.1, at Sharpe ratioerne for de to modeller ikke er signifikant forskellige fra markedets Sharpe ratio. Den manglende signifikante forskel i Sharpe ratioerne sætter spørgsmålstegn ved, om modellerne kan levere et højere risikojusteret afkast end markedsporteføljen. Selvom det overskydende afkast har været bedre, er det risikojusterede afkast ikke signifikant bedre. Det kan skyldes tidsperioden, der ses på, da det er nogle volatile år i out of sample. Der skal ses på adskillige tidsperioder for at komme med en konklusion om, at modellerne konsistent kan slå markedet med et højere risikojusteret afkast.

Jarque Bera Testen afviser ikke, at det overskydende afkast er normalfordelt for nogle af modellerne out of sample, hvilket styrker modellens pålidelighed. Det er en vigtig egenskab, da de andre risikostyringsværktøjer har en antagelse om, at data skal være normalfordelt. Performancemålingerne, der anvendes i projekt, har antagelsen om, at afkastet skal være normalfordelt. Hvis det overskydende afkast ikke er normalfordelt, kan performancemålingerne give et misvisende resultat.

Resultaterne viser, at aktiemarkedet ikke er effektivt relativt til CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen, og at det er muligt at slå markedet med en aktiv forvaltet portefølje. Derved kan antagelse om, at alle investorer har homogene forventninger til markedet diskuteres. For homogene forventninger gør, at alle investorer har samme pris på samtlige aktier, og det vil medføre, at aktiemarkedet er effektivt. Det resulterer i, at det ikke er muligt at slå markedet, da alfa vil være nul for alle aktier. Da vi i projektet finder aktier med positiv alfa og slår markedet ved at lave et større overskydende afkast, er det oplagt, at det amerikanske aktiemarked ikke er effektivt i forhold til CAPM og Fama French Fem Faktor Modellen. Dog kan det ikke direkte konkluderes, at det amerikanske aktiemarked

ikke er effektivt, da de to modeller ikke beskriver markedet fuldstændigt, og derfor kan alfaerne komme fra, at modellerne ikke er optimale.

I projektet anvendes value faktoren, hvor faktoren tager højde for, at value aktier giver et bedre afkast end vækstaktier. De seneste år har vækstaktier performet bedre end value aktier, som beskrevet tidligere i projektet. Derved kunne der argumenteres for, at faktoren skulle være vækstaktier minus value aktier (LMH).

En anden faktor, som også er interessant i nutidens marked, er momentum faktoren, som har vist sig at være en god strategi. Her er Carhart Fire Faktor Model en model, som anvender markedsfaktoren, størrelsesfaktoren, value faktoren og momentum faktoren. Denne model kunne også være en alternativ model til Fama French Fem Faktor Modellen.

De fem faktorer, som anvendes i projektet, hjælper med at give et bedre risikojusteret afkast end ved kun at benytte markedsfaktoren. Dog kan det ses, at det kun er markedsfaktoren og value faktoren, der er signifikante for Multifaktor Treynor Black Modellen out of sample, hvilket kan betyde, at de tre ekstra faktorer er med til at overfitte modellen, og derfor ikke burde være en del af modellen. Derudover kunne modellen muligvis have været bedre, hvis vi havde anvendt f.eks. momentumfaktoren i projektet, da markedet har ændret sig de seneste år. Det er derfor relevant at se, hvordan markedet ændrer sig og hvilke nye potentielle faktorer, som vil dominere markedet. ESG, som er Environmental, Social and Governance, kan muligvis være en ny faktor, som kunne være interessant årene frem, da der er stor fokus på ESG i nutidens marked. ESG ser ikke kun på økonomisk profitabilitet, men ser også på, hvordan virksomheden agerer inden for bæredygtighed og etik.

I projektet anvendes in sample perioden på 2010-2019, som har været en særdeles god periode for aktiemarkedet. Det var lige efter finanskrisen og var en periode med økonomisk opsving. Det kan derfor diskuteres, om det er den rette periode at vælge som in sample.

Da perioden ikke indeholder nævneværdig økonomisk modgang, kan de udvalgte aktier måske være gode i perioder med opsving, men også være dårlige i perioder med modgang. Det kan være problematisk at få et mere generelt billede, da vi har valgt en periode med primært økonomisk opsving.

Out of sample perioden er fra 2020-2023 og har været en begivenhedsrig periode med coronapandemien, energikrisen, inflation og rentestigninger, samt krigen i Ukraine. Coronapandemien har været en volatil periode, hvor der var store forsyningskæde problemer globalt, som påvirkede aktiemarkedet. Generelt var det en periode med store usikkerheder. Selvom perioden har en høj volatilitet, viser resultaterne for Treynor Black Modellen og Multifaktor Treynor Black Modellen, at de to porteføljer performer bedre end markedsporteføljen. Det kunne indikere, at aktierne, som havde et mere afkast i form af alfa i in sample perioden, også har klaret det godt i out of sample perioden. Det kan indikere, at vores modeller er robuste og pålidelige, da porteføljerne klarer sig godt selv i svære markedsbetingelser.

Ved at anvende Treynor Black Modellen og Multifaktor Treynor Black Modellen på de syv aktier fra S&P 500 med de højeste numeriske alfa værdier fås, at begge modeller performer

dårligere end markedsporteføljen både på overskydende afkast og på risikojusteret afkast out of sample. Dette fremgår af Sektion 5.2. Dette må betyde, at det er meget vigtigt, hvilke aktier der er med i analysen, og hvordan disse aktier vælges. Eftersom de her syv aktier klarer sig dårligere end markedet, kan det altså diskuteres, om der anvendes den bedste måde at udvælge aktier på, da analysen af de udvalgte aktier giver væsentligt bedre resultater. Den største numeriske alfa værdi er derfor ikke nødvendigvis optimal i forhold til at få skabt den bedste portefølje out of sample. Dog kan det ses, at in sample performance for modellerne i S&P 500 analysen performer bedre end modellerne i analysen af de udvalgte aktier, hvilket betyder, at in sample performance ikke altid giver bedre performance out of sample. Derfor kan det også diskuteres, hvorvidt en del af den gode performance også relaterer sig til, hvilke aktier man tager med i analysen og specielt, hvordan disse vælges. Dette kunne f.eks. gøres ved at screene S&P 500 med en teknisk analyse for at finde 50 aktier, der skal med i analysen. Derefter kan man finde de signifikante alfa værdier for de valgte aktier og lave analysen ud fra dette. En anden måde at vælge aktier på kunne være ved hjælp af fundamental analyse, hvor der ses på specifikke sektorer, som kunne være interessante årene frem. Her vil man finde frem til en del aktier, hvor man derefter kunne finde aktier med signifikante alfa'er og konstruere en portefølje. På den måde er det ikke tilfældigt, hvilke sektorer man eksponerer sig mod, og dermed hvilke aktier man har.

Hvis der ses på Treynor Black Modellen i forhold til Multifaktor Treynor Black Modellen, performer Multifaktor Treynor Black Modellen bedst i langt de fleste tilfælde out of sample både ved overskydende afkast og risikojusteret afkast. Derudover performer 61 af de 63 Multifaktor Treynor Black Modeller fra S&P 500 analysen sig bedre end markedsporteføljen i forhold til overskydende afkast, og 58 ud af 63 modeller performer bedre i forhold til risikojusteret afkast. Derimod slår kun 30 ud af 89 Treynor Black Modeller markedsporteføljen på overskydende afkast og 25 ud af 89 modeller på risikojusteret afkast. Inkluderingen af de fire ekstra faktorer giver altså en fordel både i forhold til at slå Treynor Black Modellen, men også i forhold til at slå markedsporteføljen.

Det kan dog også ses i Tabel C.1 og Tabel C.2, at markedsporteføljen shortes, når der inkluderes mere end otte aktier i Multifaktor Treynor Black Modellen, mens det er gældende for over 22 aktier i Treynor Black Modellen. Det kan derfor diskuteres, hvorvidt det er fornuftigt at shorte markedsporteføljen, da markedet generelt set stiger over tid, og derfor om det i praksis giver mening at anvende modellerne. Dette er også med til at vise, at det ikke nødvendigvis er den mest optimale måde at vælge de aktier, der skal tages med i modellen.

Derudover tager modellerne heller ikke højde for transaktionsomkostninger og skat, da det er en del af antagelserne for modellerne. Hvis disse inkluderes i modellerne, vil det gøre det overskydende afkast mindre, da det er omkostninger, som man principielt ikke kan komme udenom. Derudover er der heller ikke omkostninger ved at shorte aktier, hvilket der også vil være, hvis man skulle investere i de optimale porteføljer.

7 | Konklusion

På baggrund af analysen af de udvalgte aktier og analysen af aktierne inkluderet i S&P 500 indekset kan det konkluderes, at Multifaktor Treynor Black Modellen performer bedre out of sample i forhold til Treynor Black Modellen. Multifaktor Treynor Black Modellen bidrager til at gøre den optimale portefølje bedre ved at finde og udnytte signifikante alfa værdier. Det skyldes, at modellen er baseret på Fama French Fem Faktor Modellen, der er bedre til at beskrive det overskydende afkast for de aktier, der er inkluderet i analyserne. Det er baseret på, at der out of sample for de udvalgte aktier findes frem til, at den optimale portefølje konstrueret med Multifaktor Treynor Black Modellen performer bedre end Treynor Black Modellen med hensyn til at estimere alfa, akkumuleret overskydende afkast og risikojusteret afkast. Dertil gælder det, at den optimale portefølje for Treynor Black Modellen, med en Sharpe ratio på 0,799, og den optimale portefølje for Multifaktor Treynor Black Modellen, med en Sharpe ratio på 0,889, performer bedre end markedsporteføljen, der har en Sharpe ratio på 0,5. Derudover performer den optimale portefølje for begge modeller bedre end markedsporteføljen, hvad angår akkumuleret overskydende afkast og risikojusteret afkast. Altså er Multifaktor Treynor Black Modellen bedre end Treynor Black Modellen, da de fire ekstra faktorer bidrager positivt til at finde aktier med signifikante alfaer. Aktierne med signifikante alfaer, som findes via Fama French Fem Faktor Modellen, bidrager til, at Multifaktor Treynor Black Modellen giver et bedre risikojusteret afkast. Dog er Sharpe ratioerne ikke signifikant forskellige fra Sharpe ratioen for markedet for de to modeller, men de overskydende afkast for de to modeller er højere end markedsporteføljen.

Ydermere til at styrke konklusionen om, at Multifaktor Treynor Black Modellen er bedre end Treynor Black Modellen, så performer Multifaktor Treynor Black Modellen i gennemsnit bedre end Treynor Black Modellen. Ved at analysere de aktier fra S&P 500 indekset med data tilgængeligt tilbage til 2010, fandtes det, at den optimale portefølje havde en bedre Sharpe ratio end markedsporteføljen 96,7% af gangene ved at bruge Multifaktor Treynor Black Modellen. For Treynor Black Modellen var det blot 28,1% af gangene. Derimod var der ingen af modellerne, som formåede at skabe en optimal portefølje, hvor Sharpe ratioerne var statistisk signifikant forskellige fra markedsporteføljens Sharpe ratio out of sample.

8 | Litteratur

- [1] A Brief History of the Stock Market [Internetside]. SOFI; 2024 [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.sofi.com/learn/content/history-of-the-stock-market/>.
- [2] Passive vs. Active Portfolio Management: What's the Difference? [Internetside]. Investopedia; 2021 [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.investopedia.com/ask/answers/040315/what-difference-between-passive-and-active-portfolio-management.asp#:~:text=The%20investor%20who%20follows%20an,or%20the%20Russell%201000%20Index.>
- [3] Capital Asset Pricing Model (CAPM) and Assumptions Explained [Internetside]. Investopedia; 2023 [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: [https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp#:~:text=The%20capital%20asset%20pricing%20model%20%2D%20or%20CAPM%20%2D%20is%20a%20financial,to%20the%20market%20\(beta\).](https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp#:~:text=The%20capital%20asset%20pricing%20model%20%2D%20or%20CAPM%20%2D%20is%20a%20financial,to%20the%20market%20(beta).)
- [4] Active vs Passive Investing [Internetside]. Financial Edge; 2021 [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.fe.training/free-resources/portfolio-management/active-vs-passive-investing/>.
- [5] Fama French Three Factor Model [Internetside]. Corporatefinanceinstitute; Ukendt [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/valuation/fama-french-three-factor-model/>.
- [6] Fama and French: The Five-Factor Model Revisited [Internetside]. CFA ISTITUTE; 2022 [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://blogs.cfainstitute.org/investor/2022/01/10/fama-and-french-the-five-factor-model-revisited/>.
- [7] Treynor-Black Model: Meaning and Examples [Internetside]. Investopedia; 2022 [besøgt d. 14-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.investopedia.com/terms/t/treynorblack.asp>.
- [8] Luenberger DG. In: Investment Science. Oxford University Press; 1998. p. 137–227.
- [9] Petters AO, Dong X. In: An Introduction to Mathematical Finance with Applications. Springer; 2016. p. 83–206.
- [10] Hiller D, Grinblatt M, Titman S. In: FINANCIAL MARKETS AND CORPORATE STRATEGY. McGraw-Hill; 2012. p. 83–201.

- [11] Ruppert D, Matteson DS. In: Statistics and Data Analysis for Financial Engineering. Springer; 2015. p. 465–552.
- [12] minimum variance efficient frontiers [Internetside]. IFT; 2024 [besøgt d. 06-03-2024]. Tilgængelig fra: <https://ift.world/concept1/concept-65-minimum-variance-efficient-frontiers/>.
- [13] Berk J, Demarzo P. In: Corporate Finance. Pearson; 2020. p. 354–393.
- [14] Bodie Z, Kane A, Marcus AJ. In: Investments. McGraw-Hill; 2003. p. 266–328.
- [15] Bodie Z, Kane A, Marcus AJ. In: Investments. McGraw-Hill; 2018. p. 117–373.
- [16] Jiang B. In: Investment Strategies. Palgrave Macmillan; 2022. p. 103–116.
- [17] Chen Y, She C, Wu Q, Wang H. The Ineffectiveness of Capital Asset Pricing Model and Its Possible Solutions. Atlantis Press; 2022. Tilgængelig fra: <https://www.atlantis-press.com/article/125971645.pdf>.
- [18] Fama and French Three Factor Model Definition: Formula and Interpretation [Internetside]. Investopedia; 2024 [besøgt d. 12-03-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.investopedia.com/terms/f/famaandfrenchthreefactormodel.asp>.
- [19] Small Minus Big (SMB): Definition and Role in Fama/French Model [Internetside]. Investopedia; 2020 [besøgt d. 29-02-2024]. Tilgængelig fra: https://www.investopedia.com/terms/s/small_minus_big.asp.
- [20] High Minus Low (HML): Definition and Uses in Finance [Internetside]. Investopedia; 2022 [besøgt d. 07-03-2024]. Tilgængelig fra: https://www.investopedia.com/terms/h/high_minus_low.asp.
- [21] Fama–French three-factor model [Internetside]. Wikipedia; 2024 [besøgt d. 07-03-2024]. Tilgængelig fra: https://en.wikipedia.org/wiki/Fama–French_three-factor_model.
- [22] Investment Factor [Internetside]. Quantpedia; 2024 [besøgt d. 07-03-2024]. Tilgængelig fra: <https://quantpedia.com/strategies/investment-factor/>.
- [23] Current Research Returns [Internetside]. Dartmouth, Kenneth R. French; 2024 [besøgt d. 12-03-2024]. Tilgængelig fra: http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html.
- [24] Fama EF, French KR. A five-factor asset pricing model. Fama-Miller Center for Research in Finance; 2014. Tilgængelig fra: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2287202.

- [25] FACTOR FOCUS: MOMENTUM [Internetside]. MSCI; 2017 [besøgt d. 14-03-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.msci.com/documents/1296102/1339060/Factor+Factsheets+Momentum.pdf>.
- [26] Malkiel BG. Is the Stock Market Efficient? American Association for the Advancement of Science; 1989. Tilgængelig fra: <https://www.jstor.org/stable/1703677>.
- [27] Bodie Z, Kane A, Marcus AJ. In: Essentials of Investments. McGraw-Hill; 2022. p. 111–283.
- [28] What Is the Efficient Market Hypothesis? [Internetside]. Forbes; 2022 [besøgt d. 21-03-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.forbes.com/advisor/investing/efficient-market-hypothesis/>.
- [29] Wooldridge JM. In: Introductory Econometrics A Modern Approach. South-Western Cengage Learning; 2012. p. 807–819.
- [30] Wright JA, Yam SCP, Yung SP. A test for the equality of multiple Sharpe ratios; 2012. Tilgængelig fra: <https://hub.hku.hk/bitstream/10722/202985/1/content.pdf?accept=1>.
- [31] Ang CS. Analyzing Financial Data and Implementing Financial Models Second Edition Using R. Springer; 2015.
- [32] ZVI BODIE AK, MARCUS AJ. In: Essentials of Investments. MC graw Hill; 2022. p. 587.
- [33] Jarque-Bera Test [Internetside]. Statisticshowto; 2024 [besøgt d. 08-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.statisticshowto.com/jarque-bera-test/>.
- [34] How to Interpret a Q-Q Plot [Internetside]. Learning Tree; 2021 [besøgt d. 19-05-2024]. Tilgængelig fra: <https://www.learningtree.com/blog/interpret-q-q-plot/>.

A | Tickersymboler fra S&P 500

Tickersymboler							
MMM	AOS	ABT	ABBV	ACN	ADBE	AMD	AES
AFL	A	APD	AKAM	ALB	ARE	ALGN	ALLE
LNT	ALL	GOOGL	GOOG	MO	AMZN	AMCR	AEE
AAL	AEP	AXP	AIG	AMT	AWK	AMP	AME
AMGN	APH	ADI	ANSS	AON	APA	AAPL	AMAT
APTV	ACGL	ADM	ANET	AJG	AIZ	T	ATO
ADSK	ADP	AZO	AVB	AVY	AXON	BKR	BALL
BAC	BK	BBWI	BAX	BDX	BBY	BIO	TECH
BIIB	BLK	BX	BA	BKNG	BWA	BXP	BSX
BMY	AVGO	BR	BRO	BLDR	BG	CDNS	CZR
CPT	CPB	COF	CAH	KMX	CCL	CTLT	CAT
CBOE	CBRE	CDW	CE	COR	CNC	CNP	CF
CHRW	CRL	SCHW	CHTR	CVX	CMG	CB	CHD
CI	CINF	CTAS	CSCO	C	CFG	CLX	CME
CMS	KO	CTSH	CL	CMCSA	CMA	CAG	COP
ED	STZ	COO	CPRT	GLW	CPAY	CTVA	CSGP
COST	CTRA	CCI	CSX	CMI	CVS	DHR	DRI
DVA	DAY	DECK	DE	DAL	DVN	DXCM	FANG
DLR	DFS	DG	DLTR	D	DPZ	DOV	DOW
DHI	DTE	DUK	DD	EMN	ETN	EBAY	ECL
EIX	EW	EA	ELV	LLY	EMR	ENPH	ETR
EOG	EPAM	EQT	EFX	EQIX	EQR	ESS	EL
ETSY	EG	EVRG	ES	EXC	EXPE	EXPD	EXR
XOM	FFIV	FDS	FICO	FAST	FRT	FDX	FIS
FITB	FSLR	FE	FI	FMC	F	FTNT	FTV
FOXA	FOX	BEN	FCX	GRMN	IT	GE	GEN
GNRC	GD	GIS	GM	GPC	GILD	GPN	GL
GS	HAL	HIG	HAS	HCA	DOC	HSIC	HSY
HES	HPE	HLT	HOLX	HD	HON	HRL	HST
HWM	HPQ	HUBB	HUM	HBAN	HII	IBM	IEX
IDXX	ITW	ILMN	INCY	IR	PODD	INTC	ICE
IFF	IP	IPG	INTU	ISRG	IVZ	INVH	IQV
IRM	JBHT	JBL	JKHY	J	JNJ	JCI	JPM
JNPR	K	KDP	KEY	KEYS	KMB	KIM	KMI
KLAC	KHC	KR	LHX	LH	LRCX	LW	LVS

LDOS	LEN	LIN	LYV	LKQ	LMT	L	LOW
LULU	LYB	MTB	MRO	MPC	MKTX	MAR	MMC
MLM	MAS	MA	MTCH	MKC	MCD	MCK	MDT
MRK	META	MET	MTD	MGM	MCHP	MU	MSFT
MAA	MRNA	MHK	MOH	TAP	MDLZ	MPWR	MNST
MCO	MS	MOS	MSI	MSCI	NDAQ	NTAP	NFLX
NEM	NWSA	NWS	NEE	NKE	NI	NDSN	NSC
NTRS	NOC	NCLH	NRG	NUE	NVDA	NVR	NXPI
ORLY	OXY	ODFL	OMC	ON	OKE	ORCL	PCAR
PKG	PANW	PARA	PH	PAYX	PAYC	PYPL	PNR
PEP	PFE	PCG	PM	PSX	PNW	PXD	PNC
POOL	PPG	PPL	PFG	PG	PGR	PLD	PRU
PEG	PTC	PSA	PHM	QRVO	PWR	QCOM	DGX
RL	RJF	RTX	O	REG	REGN	RF	RSR
RMD	RVTY	RHI	ROK	ROL	ROP	ROST	RCL
SPGI	CRM	SBAC	SLB	STX	SRE	NOW	SHW
SPG	SWKS	SJM	SNA	SO	LUV	SWK	SBUX
STT	STLD	STE	SYK	SMCI	SYF	SNPS	SYN
TMUS	TROW	TTWO	TPR	TRGP	TGT	TEL	TDY
TFX	TER	TSLA	TXN	TXT	TMO	TJX	TSCO
TT	TDG	TRV	TRMB	TFC	TYL	TSN	USB
UBER	UDR	ULTA	UNP	UAL	UPS	URI	UNH
UHS	VLO	VTR	VRSN	VRSK	VZ	VRTX	VTRS
VICI	V	VMC	WRB	WAB	WBA	WMT	DIS
WBD	WM	WAT	WEC	WFC	WELL	WST	WDC
WRK	WY	WMB	WTW	GWW	WYNN	XEL	XYL
YUM	ZBRA	ZBH	ZTS				

Tabel A.1: Tickersymboler for aktierne der anvendes i undersøgelse 2.

B | Tabeller over overskydende porteføljeafkast

B.1 Treynor Black Modellen på de udvalgte aktier

Nedenstående tabel er det overskydende afkast på månedlig og årlig basis for den optimale portefølje givet ved Treynor Black Modellen i perioden 01-01-2010 til 31-12-2019.

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt porte- følje afkast
2010	-3.8	0.8	4.6	4.4	-2.3	1.7	3.0	2.1	8.8	1.6	1.3	0.4	22.6
2011	1.3	2.8	2.4	3.7	5.4	0.2	-1.3	-0.1	-6.2	-2.7	-0.9	9.3	14.0
2012	-0.1	2.0	4.2	2.7	-0.3	2.3	-0.2	3.1	6.0	1.6	-0.2	-0.2	20.9
2013	9.5	2.7	4.3	1.7	-1.9	3.1	8.0	-1.4	0.8	2.5	3.0	0.3	32.6
2014	3.9	4.8	-0.4	-0.3	2.8	4.7	0.2	5.8	-3.5	4.1	1.7	0.2	24.0
2015	3.3	0.2	2.8	0.6	4.0	0.4	6.0	-3.9	-3.0	3.1	2.9	-1.1	15.3
2016	-3.8	1.1	5.7	-2.1	4.3	3.7	1.9	-1.3	0.7	3.7	-6.0	6.2	14.1
2017	4.8	4.5	0.9	1.2	4.8	0.0	6.2	0.3	-0.1	3.3	0.4	-2.2	24.2
2018	11.1	-1.4	2.3	2.5	5.5	5.1	-1.3	4.6	1.6	-7.8	3.2	-6.2	19.3
2019	10.8	4.4	2.2	-0.6	-2.0	5.7	-3.6	-1.8	-1.0	1.8	3.7	0.0	19.6

Tabel B.1: Månedlige og årlige afkast for den optimale portefølje fra Treynor Black Modellen på baggrund af CAPM.

B.2 Multifaktor Treynor Black Modellen på de udvalgte aktier

Nedenstående tabel er det overskydende afkast på månedlig og årlig basis for den optimale portefølje givet ved Multifaktor Treynor Black Modellen i perioden 01-01-2010 til 31-12-2019.

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt porte- følje afkast
2010	-2.4	2.1	5.2	5.7	-1.8	0.6	3.9	2.2	12.1	1.4	1.4	0.0	30.5
2011	3.3	1.2	7.4	2.7	6.7	0.1	-1.2	-2.7	-14.3	-4.3	-5.8	9.0	1.9
2012	7.0	1.9	3.8	0.6	-1.5	0.6	-1.1	3.0	5.5	3.0	1.2	1.6	25.6
2013	13.9	4.3	4.9	4.2	-1.3	0.1	8.7	1.5	2.2	2.3	3.6	-1.6	43.0
2014	6.8	5.4	-2.8	-2.3	5.8	5.3	0.2	6.5	-2.6	0.6	2.1	-0.8	24.0
2015	6.1	1.9	1.8	3.7	6.6	1.2	8.2	-3.8	-5.0	2.6	3.4	-2.3	24.6
2016	-7.4	0.0	6.1	-3.2	5.7	0.5	3.4	-0.3	0.5	6.0	-6.9	5.7	10.1
2017	8.2	5.7	1.1	1.6	5.2	-0.5	8.3	0.2	0.1	3.8	0.1	-1.2	32.4
2018	16.4	1.3	1.6	2.9	6.4	6.1	-3.2	5.6	1.5	-10.1	1.9	-5.8	24.3
2019	13.5	4.5	1.2	0.2	-2.9	5.3	-4.9	-3.1	-2.7	3.4	5.1	0.0	19.5

Tabel B.2: Månedlige og årlige afkast for den optimale portefølje fra Treynor Black Modellen på baggrund af Fama French Modellen.

B.3 Markedsafkast

Nedenstående tabeller er det overskydende afkast på månedlig og årlig basis for markedsporteføljen i perioden 01-01-2010 til 31-12-2019 og i perioden 01-01-2020-31-12-2023.

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt porte- følje afkast
2010	-3.4	3.4	6.3	2.0	-7.9	-5.6	6.9	-4.8	9.5	3.9	0.6	6.8	17.9
2011	2.0	3.5	0.5	2.9	-1.3	-1.7	-2.3	-6.0	-7.6	11.3	-0.3	0.7	1.7
2012	5.0	4.4	3.1	-0.8	-6.2	3.9	0.8	2.6	2.7	-1.8	0.8	1.2	15.7
2013	5.6	1.3	4.0	1.6	2.8	-1.2	5.6	-2.7	3.8	4.2	3.1	2.8	30.9
2014	-3.3	4.6	0.4	-0.2	2.1	2.6	-2.0	4.2	-2.0	2.5	2.6	-0.1	11.5
2015	-3.1	6.1	-1.1	0.6	1.4	-1.5	1.5	-6.0	-3.1	7.7	0.6	-2.2	0.9
2016	-5.8	-0.1	7.0	0.9	1.8	0.0	4.0	0.5	0.2	-2.0	4.9	1.8	13.1
2017	1.9	3.6	0.2	1.1	1.1	0.8	1.9	0.2	2.5	2.2	3.1	1.1	19.6
2018	5.6	-3.6	-2.3	0.3	2.6	0.5	3.2	3.4	0.1	-7.7	1.7	-9.6	-5.9
2019	8.4	3.4	1.1	4.0	-6.9	6.9	1.2	-2.6	1.4	2.1	3.9	0.0	22.8

Tabel B.3: Månedlige og årlige afkast for markedsporteføljen.

År	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec	Årligt porte- følje afkast
2020	-0.1	-8.1	-13.4	13.7	5.6	2.5	5.8	7.6	-3.6	-2.1	12.5	4.6	24.8
2021	0.0	2.8	3.1	4.9	0.3	2.8	1.3	2.9	-4.4	6.7	-1.5	3.1	21.8
2022	-6.2	-2.3	3.0	-9.5	-0.3	-8.4	9.6	-3.8	-9.4	7.8	4.6	-6.4	-21.3
2023	6.7	-2.6	2.5	0.6	0.4	6.5	3.2	-2.4	-5.2	-3.2	8.8	0.0	15.2

Tabel B.4: Månedlige og årlige afkast for markedsporteføljen.

C | Gennemsnitlig Performance af Optimal Portefølje

Tabel C.1: Out of sample resultater for den optimale portefølje med Treynor Black Modellen.

indeks	Vægt Aktiv portefølje	Årlig Sharpe Ratio	Akkumuleret Afkast	p-værdi Sharpetest
1	0.153	0.484	0.410	0.909
2	0.346	0.524	0.532	0.931
3	0.780	0.473	0.520	0.947
4	1.010	0.247	0.291	0.542
5	0.657	0.271	0.324	0.644
6	0.396	0.238	0.379	0.646
7	0.517	0.164	0.268	0.548
8	0.345	0.214	0.451	0.640
9	0.639	0.271	0.565	0.691
10	0.799	0.380	0.709	0.829
11	0.938	0.379	0.547	0.817
12	0.667	0.386	0.560	0.830
13	0.755	0.370	0.457	0.796
14	0.450	0.451	0.496	0.921
15	0.507	0.424	0.470	0.878
16	0.617	0.508	0.520	0.986
17	0.715	0.473	0.448	0.954
18	0.752	0.438	0.407	0.892
19	0.822	0.427	0.404	0.876
20	0.905	0.493	0.437	0.989
21	0.968	0.458	0.407	0.930
22	1.013	0.455	0.400	0.925
23	1.085	0.430	0.380	0.883
24	1.158	0.487	0.447	0.979
25	1.187	0.464	0.425	0.939
26	1.206	0.439	0.396	0.899
27	1.047	0.470	0.419	0.950

Fortsættes på næste side

Tabel C.1 – *Fortsat fra forrige side*

	Vægt Aktiv portefølje	Årlig Sharpe Ratio	Akkumuleret Afkast	p-værdi Sharpetest
28	1.059	0.441	0.372	0.902
29	1.076	0.409	0.343	0.847
30	1.077	0.387	0.313	0.809
31	1.021	0.383	0.320	0.809
32	1.043	0.358	0.296	0.769
33	1.048	0.369	0.293	0.785
34	1.068	0.352	0.273	0.757
35	1.078	0.351	0.271	0.755
36	1.128	0.362	0.283	0.771
37	1.151	0.411	0.314	0.852
38	1.181	0.435	0.339	0.891
39	1.204	0.439	0.349	0.896
40	1.231	0.428	0.342	0.878
41	1.283	0.423	0.339	0.869
42	1.361	0.472	0.385	0.951
43	1.365	0.450	0.361	0.913
44	1.365	0.452	0.360	0.918
45	1.369	0.422	0.334	0.865
46	1.406	0.421	0.339	0.864
47	1.406	0.575	0.443	0.870
48	1.432	0.579	0.442	0.864
49	1.419	0.563	0.423	0.892
50	1.417	0.549	0.412	0.915
51	1.430	0.535	0.405	0.940
52	1.431	0.517	0.391	0.970
53	1.468	0.555	0.419	0.904
54	1.503	0.550	0.416	0.914
55	1.514	0.560	0.426	0.898
56	1.513	0.545	0.415	0.922
57	1.542	0.568	0.434	0.882
58	1.564	0.547	0.421	0.918
59	1.552	0.529	0.406	0.949
60	1.547	0.505	0.387	0.990
61	1.539	0.492	0.374	0.986
62	1.583	0.472	0.362	0.953
63	1.579	0.456	0.351	0.926
64	1.574	0.441	0.340	0.900
65	1.597	0.441	0.338	0.901

Fortsættes på næste side

Tabel C.1 – *Fortsat fra forrige side*

	Vægt Aktiv portefølje	Årlig Sharpe Ratio	Akkumuleret Afkast	p-værdi Sharpetest
66	1.621	0.440	0.341	0.900
67	1.613	0.431	0.334	0.886
68	1.574	0.394	0.301	0.828
69	1.577	0.401	0.307	0.838
70	1.595	0.396	0.302	0.832
71	1.628	0.397	0.306	0.835
72	1.641	0.419	0.322	0.870
73	1.654	0.393	0.303	0.828
74	1.638	0.389	0.298	0.823
75	1.631	0.380	0.291	0.809
76	1.638	0.398	0.303	0.838
77	1.635	0.405	0.306	0.847
78	1.622	0.404	0.305	0.846
79	1.643	0.394	0.298	0.832
80	1.654	0.387	0.291	0.821
81	1.641	0.384	0.287	0.816
82	1.668	0.374	0.282	0.801
83	1.693	0.391	0.297	0.828
84	1.693	0.397	0.300	0.837
85	1.684	0.379	0.286	0.809
86	1.694	0.387	0.291	0.822
87	1.714	0.426	0.321	0.884
88	1.732	0.426	0.322	0.884
89	1.736	0.438	0.331	0.903

Tabel C.2: Out of sample resultater for den optimale portefølje med Multifaktor Treynor Black Modellen.

	Vægt Aktiv portefølje	Årlig Sharpe Ratio	Akkumuleret Afkast	p-værdi Sharpetest
1	0.153	0.484	0.410	0.909
2	0.315	0.524	0.517	0.927
3	0.427	0.628	0.634	0.665
4	0.797	0.593	0.640	0.601
5	1.000	0.404	0.463	0.557
6	1.065	0.289	0.341	0.713
7	0.816	0.301	0.353	0.724
8	0.983	0.531	0.597	0.873
9	1.230	0.573	0.660	0.693
10	1.027	0.534	0.648	0.820
11	1.162	0.513	0.619	0.830
12	1.260	0.517	0.577	0.641
13	1.357	0.515	0.559	0.612
14	1.393	0.463	0.488	0.696
15	1.488	0.572	0.524	0.705
16	1.240	0.562	0.527	0.735
17	1.298	0.566	0.512	0.711
18	1.468	0.580	0.541	0.743
19	1.524	0.578	0.568	0.692
20	1.601	0.614	0.623	0.655
21	1.286	0.646	0.633	0.614
22	1.007	0.678	0.647	0.607
23	1.071	0.729	0.678	0.629
24	1.091	0.686	0.614	0.574
25	1.117	0.662	0.592	0.653
26	1.274	0.718	0.658	0.710
27	1.280	0.708	0.630	0.706
28	1.380	0.778	0.697	0.712
29	1.426	0.756	0.680	0.706
30	1.493	0.748	0.683	0.712
31	1.481	0.942	0.807	0.710
32	1.502	0.936	0.804	0.706
33	1.532	0.919	0.790	0.713
34	1.518	0.881	0.745	0.706
35	1.515	0.863	0.710	0.708
36	1.512	0.842	0.675	0.708

Fort sættes på næste side

Tabel C.2 – *Fortsat fra forrige side*

	Vægt Aktiv portefølje	Årlig Sharpe Ratio	Akkumuleret Afkast	p-værdi Sharpetest
37	1.521	0.872	0.687	0.706
38	1.572	0.862	0.682	0.707
39	1.552	0.861	0.666	0.708
40	1.617	0.870	0.679	0.708
41	1.587	0.844	0.644	0.709
42	1.669	0.817	0.634	0.705
43	1.634	0.793	0.605	0.707
44	1.613	0.763	0.581	0.708
45	1.650	0.765	0.578	0.706
46	1.710	0.764	0.583	0.706
47	1.699	0.738	0.562	0.708
48	1.733	0.729	0.556	0.706
49	1.749	0.729	0.553	0.705
50	1.775	0.746	0.571	0.706
51	1.801	0.740	0.562	0.706
52	1.848	0.717	0.548	0.707
53	1.833	0.692	0.525	0.707
54	1.820	0.677	0.511	0.707
55	1.802	0.661	0.494	0.706
56	1.810	0.680	0.504	0.707
57	1.799	0.664	0.490	0.708
58	1.839	0.679	0.508	0.707
59	1.812	0.666	0.493	0.708
60	1.826	0.674	0.496	0.707
61	1.786	0.655	0.489	0.707
62	1.819	0.703	0.528	0.707
63	1.896	0.689	0.518	0.707