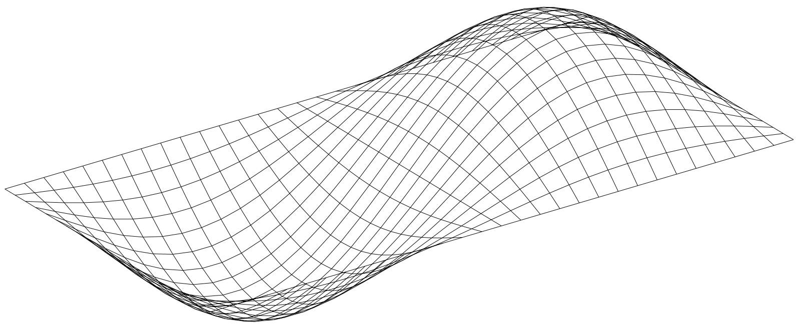
Knudelinien for Laplace-operatorens 2. egenfunktion



Aalborg Universitet

Institut for Matematiske Fag • Christian Robert Jacobsen • Juni 2007

Aalborg Universitet
Institut for Matematiske Fag

Titel:
Knudelinien for Laplace-operatorens 2. egenfunktion

Projektperiode:
Mat6, foråret 2007

Forfatter:
Christian Robert Jacobsen

Vejleder:
Thomas Østergaard Sørensen

Antal kopier: 6

Antal sider: 60

Synopsis:
I dette speciale behandles artiklen "On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$" af A.D. Melas, hvori det vises, at knudelinien for en 2. egenfunktion for Laplace-operatoren, med Dirichlets randbetingelse, på et begrænset domæne, ikke kan være en lukket kurve, hvis domænet er tilstrækkelig pænt.

Ydermere vises en række egenskaber for egenværdierne og -funktionerne for Laplace-operatoren.

Forord

Dette speciale er udarbejdet i forbindelse med Mat6-projektforløbet ved Institut for Matematiske Fag på Aalborg Universitet i foråret 2007. Forudsætningerne for at læse specialet er grundlæggende kendskab til matematisk analyse, samt funktionalanalyse og distributionsteori.

Kildehenvisninger angives i firkantede parenteser [ ], og henviser til litteraturlisten på side 59.

Jeg vil gerne takke min vejleder Thomas Østergaard Sørensen for et godt samarbejde.

Aalborg, den 6. juni 2007.

Christian Robert Jacobsen

Summary

In 1967 L. Payne published an article in which he among other things, listed a number of unproven conjectures concerning the boundary value problem used to descripe the vibration of a membrane with fixed boundary. The solutions of this boundary value problem are the eigenfunctions of the Laplacian with Dirichlet's boundary condition. We sort the eigenvalues according to their numerical values and in this way we also get a sorting of the corresponding eigenfunctions. The nodal line of any second eigenfunction divides their domain into exactly two sets and the conjecture of L. Payne is that this nodal line cannot be a closed curve.

In 1992 A.D. Melas proved Payne's conjecture in the case where the domain is convex, with a boundary that is C^∞. The purpose of this thesis has been to prove the result of A.D Melas. This aim has been fulfilled, and I have also managed to prove some of the results from Melas' article under less restrictive conditions.

Besides dealing with Payne's conjecture, I have devoted a chapter to an investigation of the eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian which is used throughout the thesis.

Indhold

Notationsliste

Elementer i $\mathbb{R}^n$ skrives med fed skrift som $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. I $\mathbb{R}^2$ benyttes både notationen $\boldsymbol{x} = (x, y)$ og $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Hvis s benyttes som variabel i en parameterfremstilling, er det den buelængdeparametriserede parameterfremstilling. Herunder er en oversigt over symboler, der ikke bliver indført løbende.

$\overline{\Omega}$	Aflukningen af mængden Ω.
Ω^o	De indre punkter i mængden Ω.
$\blacksquare$	Bevis slut-symbol.
$C(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{C} : f$ er kontinuert i ethvert $\boldsymbol{x} \in \Omega\}$.
$C^k(\Omega)$	$\{f \in C(\Omega) : D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x})$ eksisterer for alle $\boldsymbol{x} \in \Omega, D^{\boldsymbol{\alpha}} f \in C(\Omega)$ for alle $\boldsymbol{\alpha}$ med $\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert \leq k\}$.
$C_0^k(\Omega)$	$\{f \in C^k(\Omega) : \mathrm{supp}(f)$ er kompakt i $\Omega\}$.
∂_i	$\partial / \partial x_i$.
$D^{\boldsymbol{\alpha}}$	$\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, hvor $\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.
$\mathrm{Dm}(f)$	Defintionsmængden for funktionen f.
$\delta_{n,m}$	Kroneckers delta-funktion.
$\boldsymbol{n}$	Udadvendt enhedsnormalvektor.
$\lvert A\rvert$	Kardinaliteten af mængden A.
$\ker(f)$	$\{x \in \mathrm{Dm}(f) : f(x) = 0\}$.
$L^2(\Omega)$	$L^2(\Omega, \mathrm{d}x)$.
$L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	$\{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} : t \in [0, 1]\}$.
$\partial\Omega$	Randen af mængden Ω.
$\partial f / \partial \boldsymbol{v}$	$\nabla f \cdot \boldsymbol{v}$, hvor $\lvert\boldsymbol{v}\rvert = 1$.
$f\vert_A$	Restriktionen af f til $A \subset \mathrm{Dm}(f)$.
$\mathrm{Vm}(f)$	Billedmængden for funktionen f.
Ω_A	$\{x \in \Omega : A\}$, hvor A er et åbent udsagn.
$\mathrm{supp}(f)$	$\overline{\{x \in \mathrm{Dm}(f) : f(x) \neq 0\}}$.
$\mathbb{R}_+^n$	$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

1 Indledning

I mit speciale har jeg valgt at undersøge nogle af egenskaberne ved løsninger til følgende randværdiproblem. Givet et begrænset domæne* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betragter vi løsninger til egenværdiligningen $-\Delta u = \lambda u$ i Ω, hvor $\lambda \in \mathbb{R}$, med Dirichlets randbetingelse, $u \equiv 0$ på $\partial\Omega$. Her i indledningen bliver problemstillingen og rapportens struktur præsenteret og motiveret.

Interessen for dette randværdiproblem stammer blandt andet fra fysik, hvor det finder anvendelse i beskrivelse af en vibrerende membran. Først vises denne sammenhæng.

1.1 Fysisk baggrund

Vi forestiller os en vibrerende membran, der i sin ligevægtstilstand udspænder et område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, og som er fastgjort langs randen $\partial\Omega$. Membranens udsving $U(\boldsymbol{x}, t)$ i punktet $\boldsymbol{x} \in \Omega$ til tiden t beskrives ved bølgeligningen (se for eksempel [5, side 297]), der sammen med randbetingelsen

*Domæne benyttes i den topologiske betydning, det vil sige som betegnelse for en åben, sammenhængende mængde.

giver anledning til randværdiproblemet

$$\left.\begin{aligned} \Delta U = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U \qquad & \text{i } \Omega, \\ U = 0 \qquad & \text{på } \partial\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Ifølge [5, side 286] kan vi antage, at en løsning U er på formen $U(\boldsymbol{x}, t) = u(\boldsymbol{x})f(t)$, hvor $u : \Omega \to \mathbb{R}$ og $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dermed opfylder en løsning til (1.1), at

$$\frac{\Delta u(\boldsymbol{x})}{u(\boldsymbol{x})} = \frac{f''(t)}{f(t)} \qquad \text{i } \Omega.$$

Når venstresiden ikke afhænger af t, og højresiden ikke afhænger af $\boldsymbol{x}$, er de to kvotienter lig den samme konstant $-\lambda$. Vi vil i kapitel 2 se, at $\lambda > 0$. Den fuldstændige løsning til den ordinære differentialligning $f''(t) = -\lambda f(t)$ er

$$f(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}),$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Dermed har vi, at en løsning til (1.1) er på formen

$$U(\boldsymbol{x}, t) = u(\boldsymbol{x})\big(a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)\big).$$

Det ses, at $\sqrt{\lambda}$ er frekvensen for membranens svingning. Positionsfunktionen u opfylder randværdiproblemet

$$\left.\begin{aligned} \Delta u + \lambda u = 0 \qquad & \text{i } \Omega, \\ u = 0 \qquad & \text{på } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

som jeg er interesseret i.

1.2 Specialets problemstilling og opbygning

I kapitel 2 vises det, at egenværdierne λ i (1.2) er en reel følge $\{\lambda_n(\Omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, der opfylder, at

$$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \cdots.$$

Med denne sortering af egenværdierne, har vi også en ordning af de tilhørende egenfunktioner; $u_n(\Omega)$ betegner en vilkårlig egenfunktion hørende til $\lambda_n(\Omega)$, og vi refererer til $u_n(\Omega)$ som en n'te egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω. Vi benytter konventionerne $u_n := u_n(\Omega)$ og $\lambda_n := \lambda_n(\Omega)$. Vi kan antage, at egenfunktionerne er reelle, og ortogonale i $L^2(\Omega)$. Dette gælder for egenfunktioner hørende til såvel forskellige som ens egenværdier.

Det, der er i fokus i specialet, er knudelinierne for egenfunktionerne, som er mængden defineret ved

$$N(u_n) := \overline{\{\boldsymbol{x} \in \Omega : u_n(\boldsymbol{x}) = 0\}}.$$

Courant's nodal domain theorem, sætning A.1, giver os, at $N(u_n)$ højst kan dele Ω i n delmængder. Det medfører umiddelbart, at u_1 ikke skifter fortegn i Ω og, at u_2 skifter fortegn højst én gang. Da $(u_1, u_2)_{L^2(\Omega)} = 0$, skal u_2 skifte fortegn, og $N(u_2)$ deler derfor Ω i præcis to delmængder. I 1967 fremsatte L. Payne følgende formodning [17, Conjecture 5, side 467]:

Formodning 1.1. *En 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet kan ikke have en lukket knudelinie.*

I kapitel 2 vil det fremgå, at en ækvivalent formulering af formodning 1.1 er, at $N(u_2) \cap \partial\Omega$ består af præcis to punkter.

Det er lykkedes at vise formodning 1.1, når Ω er tilstrækkelig pæn. L. Payne viste selv sin formodning i [18], når Ω er symmetrisk omkring en linie, og konveks på den diagonale retning, samt udstyret med en rand, der er stykkevis C^2. C.-S. Lin viste i [15], at formodning 1.1 gælder, når Ω er rotationssymmetrisk, og har en C^∞-rand. Der er dog givet eksempler, hvor formodning 1.1 ikke gælder, når Ω ikke er simpelt sammenhængende – se for eksempel [7]. A. D. Melas viste i [16] følgende resultat:

Sætning 1.2. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et begrænset, konvekst domæne med C^∞-rand. Da gælder formodning 1.1.*

Målet med specialet var at vise sætning 1.2. Dette mål er opfyldt, og i slutningen af projektperioden er det lykkedes mig af vise nogle af resultaterne i [16] under svagere forudsætninger, og dermed forbedre sætning 1.2.

Undervejs i projektperioden er jeg blevet gjort opmærksom på, at Melas' resultat siden hen er blevet forbedret af G. Alessandrini, der i [1] viste, at formodning 1.1 gælder for generelle konvekse domæner. Dette resultat bliver ikke eftervist her.

Når der benyttes lidet kendte, eller ofte anvendte, sætninger, bliver disse formuleret før det bevis, hvori de benyttes første gang. Der vil naturligvis også være en henvisning til en artikel eller bog, hvor resultatet findes med bevis. Dette er ment som en service til læseren, der dermed ikke behøver at opsøge den benyttede litteratur for at finde resultaterne. Nogle af disse sætninger er oprindeligt fremsat i langt højere generalitet, end der er behov for i specialet. I de tilfælde vil jeg i specialet kun formulere de(t) tilfælde, der er nødvendige for at anvende sætningerne.

Kapitel 2 er dedikeret til at vise resultater, der er nødvendige for arbejdet i resten af specialet. Det drejer sig om eksistens af løsninger til Dirichlet-problemet på et vilkårligt domæne Ω, samt en række egenskaber for disse løsninger.

I kapitel 3 vises sætning 1.2 og fremgangsmåden følger i store træk [16]. Det vises først, at hvis formodning 1.1 ikke er sand, eksisterer der et domæne Ω_0, hvor $N(u_2) \cap \partial\Omega_0$ består af præcis ét punkt. Herefter vises det, at et sådant domæne ikke kan eksistere. I [16] bliver der i disse to sætninger gjort brug af et teknisk lemma, der kræver, at $\partial\Omega$ er C^∞. I kapitel 4 vises disse to sætninger fra kapitel 3 uden det tekniske lemma. Sætning 1.2 vil på denne måde være eftervist med mindre skrappe regularitetskrav.

I Appendix er der medtaget et bevis for Courant's nodal domain theorem, der benyttes adskillige gange i specialet. Desuden er der nogle asymptotiske vurderinger af analytiske funktioner, der bruges i det ovenfor nævnte tekniske lemma.

2 Indledende resultater

Som nævnt i indledningen, viser vi i dette kapitel egenskaber for løsningerne til Dirichlet-problemet, der benyttes senere. Randværdiproblemet

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_n + \lambda_n u_n = 0 &\qquad \text{i } \Omega, \\ u_n \equiv 0 &\qquad \text{på } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

kan også formuleres som følger: Lad $H_0^1(\Omega)$ betegne aflukningen af $C_0^\infty(\Omega)$ i H^1-normen, som stammer fra det indre produkt

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} := (f, g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{2} (\partial_n f, \partial_n g)_{L^2(\Omega)} \,.$$

Med dette indre produkt er $H_0^1(\Omega)$ et Hilbert-rum. Vi har, at $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, og det indre produkt, vi arbejder med i $H_0^1(\Omega)$, er $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$. Vi arbejder med $H_0^1(\Omega)$, da alle $f \in H_0^1(\Omega)$ har $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Egenfunktionerne for $-\Delta$ på $H_0^1(\Omega)$ er netop løsningerne til (2.1). Indledningsvist viser vi, at (2.1) faktisk har ikke-trivielle løsninger – i første omgang blot i distributionsforstand.

2.1 Eksistens af egenværdier og -funktioner

Først foretager vi nogle observationer vedrørende egenværdierne for $-\Delta$. Lad $f_1, f_2 \in H_0^1(\Omega)$. I $H_0^1(\Omega)$ kan vi lave partiel integration. Det vil sige, at hvis Δf_2 er en funktion og $f_1 \Delta f_2 \in L^1(\Omega)$, gælder der, at

$$\int_\Omega f_1(\boldsymbol{x}) \Delta f_2(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \nabla f_1(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

For beviset henvises der til [14, Theorem 7.7] (Denne sætning er fremsat for $H^1(\mathbb{R}^n)$, men gør kun brug af, at $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $H^1(\mathbb{R}^n)$. Tætheden af $C_0^\infty(\Omega)$ i $H_0^1(\Omega)$ har vi per definition).

Vi har, at $-\Delta$ er en selvadjungeret, positiv operator på $H_0^1(\Omega)$: Selvadjungeretheden følger af udregningen

$$(-\Delta f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\nabla g(\boldsymbol{x})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (f, -\Delta g)_{L^2(\Omega)}.$$

Det vil sige, at egenværdierne er reelle. Da $-\Delta$ er en lineær operator, medfører det, at $\operatorname{Re} u_n$ opfylder $\Delta \operatorname{Re} u_n + \lambda_n \operatorname{Re} u_n = 0$. Vi antager derfor, at egenfunktionerne er reelle. Det vil også af eksistensbeviserne fremgå, at egenfunktionerne kan antages at være reelle. Positiviteten følger på tilsvarende vis ved udregningen

$$(-\Delta f, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\nabla f(\boldsymbol{x})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Jagten på egenværdierne for $-\Delta$ foretages med funktionalet $\mathcal{E}_\Omega(\cdot)$ på $H_0^1(\Omega)$ defineret ved $\mathcal{E}_\Omega(\phi) := \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2$. Vi definerer

$$\lambda_1 := \inf\left\{ \mathcal{E}_\Omega\left(\frac{\psi}{\|\psi\|_{L^2(\Omega)}} \right) : \psi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

Det ses, at definitionen for λ_1 er skaleringsinvariant i den forstand, at værdien af funktionalet ikke ændres ved at betragte $c\psi$ i stedet for ψ, for $c \neq 0$. Det er derfor tilstrækkeligt at arbejde med de funktioner, der har $\|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1$:

$$\lambda_1 := \inf\left\{ \mathcal{E}_\Omega(\psi) : \psi \in H_0^1(\Omega), \|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}. \tag{2.3}$$

Der gælder følgende resultat om λ_1.

Sætning 2.1. *Værdien* λ_1 *antages af en funktion* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$*, der opfylder* $\Delta \operatorname{Re} u_1 + \lambda_1 \operatorname{Re} u_1 = 0$ *i distributionsforstand.*

Bevis. Lad $\{u_1[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $H_0^1(\Omega)$, der er normaliseret i $L^2(\Omega)$, og som minimerer $\mathcal{E}_\Omega(\cdot)$. Det vil sige, at $\|u_1[n]\|_{L^2(\Omega)} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\Omega(u_1[n]) \to \lambda_1$. Når følgen $\{\mathcal{E}_\Omega(u_1[n])\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, er den også begrænset. Dermed er $\|u_1[n]\|_{H^1(\Omega)} = (1 + \mathcal{E}_\Omega(u_1[n]))^{1/2}$ uniformt begrænset. Da $H_0^1(\Omega)$ er kompakt indlejret i $L^2(\Omega)$ (se for eksempel Rellich' kompakthedssætning, [11, Theorem 7.2.3]) har vi da, at der findes en delfølge $\{u_1[n_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ af $\{u_1[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, der konvergerer stærkt i $L^2(\Omega)$ mod en funktion u_1. Kontinuiteten af L^2-normen giver os, at

$$\|u_1\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u_1[n_k]\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Vi har tillige, at $\nabla u_1[n_k]$ konvergerer i L^2-norm: Fra parallellogramreglen har vi, at der for alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_1[n_{m_k}] - \nabla u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\|\nabla u_1[n_{m_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \|\nabla u_1[n_{m_k}] + \nabla u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le 2\|\nabla u_1[n_{m_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \lambda_1 \|u_1[n_{m_k}] + u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ulighedstegnet følger af, at der per definition gælder, at

$$\frac{\|\nabla u_1[n_{m_k}] + \nabla u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u_1[n_{m_k}] + u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)}} = \mathcal{E}_\Omega\left(\frac{u_1[n_{m_k}] + u_1[n_{m_\ell}]}{\|u_1[n_{m_k}] + u_1[n_{m_\ell}]\|_{L^2(\Omega)}}\right) \ge \lambda_1.$$

Kontinuiteten af det indre produkt giver, at

$$\begin{aligned}
\|u_1[n_{m_k}] + u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|u_1[n_{m_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\operatorname{Re}\left(u_1[n_{m_k}], u_1[n_{m_\ell}]\right)_{L^2(\Omega)} \to 4
\end{aligned}$$

for $k, \ell \to \infty$. Per antagelse vil $\|\nabla u_1[n_{m_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \to \lambda_1$ for $k \to \infty$. Det vil sige, at $\|\nabla u_1[n_{m_k}] - \nabla u_1[n_{m_\ell}]\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0$ for $k, \ell \to \infty$, og at $\{\nabla u_1[n_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ dermed er en Cauchy-følge. Da $L^2(\Omega)$ er et Hilbert-rum, konvergerer $\nabla u_1[n_k]$ mod et element $\boldsymbol{g} \in L^2(\Omega)$ for $k \to \infty$. Vi har altså, at $\{u_1[n_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer i H^1-norm, hvilket medfører, at $\boldsymbol{g} = \nabla u_1$. Vi har så, at

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_\Omega(u_1[n_k]) = \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_1[n_k]\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)} = \mathcal{E}_\Omega(u_1)\,.$$

Vi har dermed vist eksistensen af en minimerende funktion. Vi mangler at vise, at u_1 er en 1. egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω. Lad $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ og definer funktionen $R_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$\begin{aligned} R_1(\varepsilon) &:= \mathcal{E}_\Omega\biggl(\frac{u_1 + \varepsilon\phi}{\|u_1 + \varepsilon\phi\|_{L^2(\Omega)}}\biggr) \\ &= \frac{\varepsilon^2 \mathcal{E}_\Omega(\phi) + 2\varepsilon \operatorname{Re}\left(\nabla u_1, \nabla\phi\right)_{L^2(\Omega)} + \lambda_1}{\varepsilon^2\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon \operatorname{Re}\left(u_1, \phi\right)_{L^2(\Omega)} + 1}. \end{aligned}$$

For $|\varepsilon|$ tilstrækkelig lille er $\|u_1 + \varepsilon\phi\|_{L^2(\Omega)}$ begrænset og R_1 er derfor differentiabel i nærheden af 0. Fra den første del af beviset ved vi, at R_1 antager sit minimum i $\varepsilon = 0$ (med $R_1(0) = \lambda_1$), og derfor er $(\mathrm{d}R_1/\mathrm{d}\varepsilon)(0) = 0$. Det vil sige, at

$$0 = 2\operatorname{Re}\left(\nabla u_1, \nabla\phi\right)_{L^2(\Omega)} - 2\lambda_1 \operatorname{Re}\left(u_1, \phi\right)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Ved at foretage en partiel integration i det første indre produkt har vi, at

$$\int_\Omega \left(\Delta \operatorname{Re}\phi(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 \operatorname{Re}\phi(\boldsymbol{x})\right) \operatorname{Re} u_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Når denne lighed gælder for alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, gælder den specielt for funktionen $\operatorname{Im}\phi + i\operatorname{Re}\phi$. Lineariteten af integralet giver dermed, at

$$\int_\Omega \left(\Delta\phi(\boldsymbol{x}) + \lambda_1\phi(\boldsymbol{x})\right) \operatorname{Re} u_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \tag{2.4}$$

for alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Det vil sige, at $\Delta \operatorname{Re} u_1 + \lambda_1 \operatorname{Re} u_1 = 0$ i distributionsforstand. ■

Vi kan også vise, at $\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0$ i distributionsforstand ved et argument som det, der gav (2.4). Men da vi kun er interesserede i reelle egenfunktioner, er ovenstående tilstrækkeligt.

Antag, at vi ved, at de første $n-1$ egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, og tilhørende egenfunktioner $u_1, \dots, u_{n-1}$, eksisterer. Det giver da mening at definere

$$\lambda_n := \inf\Big\{\mathcal{E}_\Omega(\psi) : \psi \in H_0^1(\Omega), \|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1,\\ (\psi, u_k)_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ for } k = 1, \dots, n-1\Big\}. \tag{2.5}$$

Sætning 2.2. *Værdien λ_n antages af en funktion $u_n \in H_0^1(\Omega)$, der opfylder $\Delta \operatorname{Re} u_n + \lambda_n \operatorname{Re} u_n = 0$ i distributionsforstand.*

Bevis. Fra projektionssætningen for Hilbert-rum ved vi, at

$$L^2(\Omega) = \operatorname{span}\{u_1\} \oplus \operatorname{span}\{u_1\}^\perp .$$

Som ortogonalkomplement til et underrum er $\operatorname{span}\{u_1\}^\perp$ et lukket underrum, og dermed selv et Hilbert-rum. Så, når infimumet i (2.3) antages af en funktion i $H_0^1(\Omega)$, antages det også, når vi restringerer de tilladte funktioner til $\operatorname{span}\{u_1\}^\perp$. Således kan vi fortsætte ad infinitum. Når vi minimerer $\mathcal{E}_\Omega(\cdot)$ over færre funktioner, er $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Antag, at $\Delta \operatorname{Re} u_k + \lambda_n \operatorname{Re} u_k = 0$ i distributionsforstand for $k = 1, \dots, n-1$. For $m \in \{1, \dots, n\}$ lader vi T_m betegne distributionen $(\Delta + \lambda_m) \operatorname{Re} u_m$. Det vil sige, at

$$T_m(\phi) := \int_\Omega (\Delta\phi(\boldsymbol{x}) + \lambda_m \phi(\boldsymbol{x})) \operatorname{Re} u_m(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

for alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Per antagelse er $T_k \equiv 0$ for $1 \leq k < n$. For at vise at også $T_n \equiv 0$, starter vi ligesom i beviset for sætning 2.1. Lad $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ opfylde, at $(\psi, u_k)_{L^2(\Omega)} = 0$ for $k = 1, \dots, n-1$, og definer funktionen $R_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$R_n(\varepsilon) := \mathcal{E}_\Omega\bigg(\frac{u_n + \varepsilon\psi}{\|u_n + \varepsilon\psi\|_{L^2(\Omega)}}\bigg).$$

Da er $R_n(\varepsilon) \geq R_n(0)$ for alle ε, og da R_n er differentiabel i nærheden af 0, er $(\mathrm{d}R_n/\mathrm{d}\varepsilon)(0) = 0$. På samme måde som i beviset for sætning 2.1 giver det os, at $T_n(\psi) = 0$ for alle $\psi \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp$. Til forskel fra sætning 2.1 mangler vi nu at vise, at distributionen $T_n(\phi) = 0$ for *alle* $\phi \in$

$C_0^\infty(\Omega)$. Da $\bigcap_{k=1}^{n-1} \ker u_k \subset \ker T_n$, når u_k opfattes som distributioner, og distributioner er lineært afhængige, findes der konstanter $c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, således at

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k u_k.$$

Vi viser, at $T_n \equiv 0$, ved at vise, at alle $c_k = 0$. For $u_k \in H_0^1(\Omega)$, $1 \leq k \leq n$, findes en følge $\{u_k[i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $C_0^\infty(\Omega)$ med $\|u_k[i] - u_k\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ for $i \to \infty$. For $1 \leq k < n$, kan $\{u_k[i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ antages at være reel. Når vi har konvergens i H^1-norm, har vi også konvergens i L^2-norm. Lader vi $1 \leq j < n$, får vi det ønskede ved hjælp af kontinuiteten af det indre produkt, samt en dobbelt partiel integration:

$$\begin{aligned}
c_j &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(u_k, u_j\right)_{L^2(\Omega)} = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(u_k, u_j[i]\right)_{L^2(\Omega)} = \lim_{i\to\infty} T_n(u_j[i]) \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{i\to\infty} \int_\Omega (\Delta u_j[i](\boldsymbol{x}) + \lambda_n u_j[i](\boldsymbol{x})) \operatorname{Re} u_n[m](\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{i\to\infty} \int_\Omega (\Delta \operatorname{Re} u_n[m](\boldsymbol{x}) + \lambda_n \operatorname{Re} u_n[m](\boldsymbol{x})) u_j[i](\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (2.6) \\
&= \lim_{m\to\infty} T_j(\operatorname{Re} u_n[m]) = 0.
\end{aligned}$$

I (2.6) er det ikke nødvendigt med at betragte $\operatorname{Re} u_j[i]$, da $u_j[i]$ er reelle for alle $i \in \mathbb{N}$. ■

Antag, at ${u_n}^{(1)}, \dots, {u_n}^{(k)}$ er lineært uafhængige egenfunktioner hørende til λ_n. Enhver linearkombination af disse n'te egenfunktioner er også en n'te egenfunktion, da $-\Delta$ er en lineær operator. Ved anvendelse af Gram-Schmidt-algoritmen kan vi finde en ortogonal basis for underrummet $\operatorname{span}\{{u_n}^{(1)}, \dots, {u_n}^{(k)}\}$, som også er n'te egenfunktioner. Det vil sige, at vi kan antage, at alle egenfunktionerne er ortogonale.

2.2 Egenskaber for egenværdier og -funktioner

Fra sætning 2.1 og sætning 2.2 er vi kun sikret løsninger til (2.1) i distributionsforstand. Når vi nu er sikret eksistensen, kan vi med andre metoder afgøre, om egenfunktionerne faktisk har en højere regularitet. Egenfunktionernes regularitet i Ω er uafhængige af $\partial\Omega$. Regulariteten af $\partial\Omega$ er imidlertid afgørende for regulariteten af egenfunktionerne i $\overline{\Omega}$. Vi får brug for at arbejde med to forskellige definitioner af randregularitet, som er nedfældet i definition 2.4. For at fremsætte denne definition indfører vi først Hölder-rummene $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Disse rum bruges også i forbindelse med et apriori estimat i afsnit 3.1.

Definition 2.3. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ være en åben mængde. Vi siger, at f er uniformt Hölder-kontinuert med eksponent α $(0 < \alpha \leq 1)$ i Ω, hvis*

$$[f]_{\alpha;\Omega} := \sup\left\{\frac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\alpha} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}\right\} < \infty.$$

For $0 \leq k < \infty$ lader vi

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : [D^{\boldsymbol{\beta}} f]_{\alpha;\Omega} < \infty \textit{ for alle } \boldsymbol{\beta} \textit{ med } |\boldsymbol{\beta}| = k\}.$$

På $C^k(\Omega) = C^{k,0}(\Omega)$ benytter vi normen

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{j=0}^{k} \sup_{|\boldsymbol{\beta}|=j} \sup\{|D^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in \Omega\}.$$

På $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$, benytter vi normen

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^k(\Omega)} + \sup_{|\boldsymbol{\beta}|=k} [D^{\boldsymbol{\beta}} f]_{\alpha;\Omega}.$$

Hölder-rummene er Banach-rum.

Definition 2.4. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ være et begrænset domæne. Vi siger, at $\partial\Omega$ er $C^{k,\alpha}$, hvor $0 \leq k \leq \infty$, og $0 \leq \alpha \leq 1$, hvis der for alle $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ findes $\varepsilon > 0$, og en bijektiv funktion $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0} : B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \to D \subset \mathbb{R}^n$, som opfylder, at*

$$\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}(B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+; \qquad \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}(B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+;$$
$$\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0} \in C^{k,\alpha}(B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)); \qquad \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}^{-1} \in C^{k,\alpha}(D).$$

Bemærkning 2.5. *For $k \geq 1$ eksisterer funktionen $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}$, hvis og kun hvis $\partial\Omega$ i en omegn af $\boldsymbol{x}_0$ er billedet af en $C^{k,\alpha}$-funktion af $n-1$ af koordinaterne $x_1, \ldots, x_n$: Lad $\boldsymbol{x}^i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Antag, at der findes $\varepsilon_1 > 0$ og $f \in C^{k,\alpha}(B(\boldsymbol{x}_0^n, \varepsilon_1))$, således at $f(B(\boldsymbol{x}_0^n, \varepsilon_1)) \subset \partial\Omega$. For $j = 1, \ldots n$ og $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon_1)$ definerer vi*

$$(\Psi_{\boldsymbol{x}_0})_j := \begin{cases} x_j & \text{for } j < n, \\ x_n - f(\boldsymbol{x}^n) & \text{for } j = n. \end{cases}$$

Da opfylder $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0} := ((\Psi_{\boldsymbol{x}_0})_1, \ldots, (\Psi_{\boldsymbol{x}_0})_n)$ kravene i definition 2.4.

For at vise det konverse udsagn antager vi, at $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0} \in C^{k,\alpha}(B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon))$. Per definition er $(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0})_n(\boldsymbol{x}) = 0$, når $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \cap B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$. Da $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}$ er en diffeomorfi, giver kædereglen, at differentialet af $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}$ er bijektivt i $\boldsymbol{x}_0$. Det vil sige, at $\partial_i(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0})_n(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ for mindst ét $i \in \{1, \ldots, n\}$. Implicit funktionssætningen giver, at der findes $\varepsilon_2 > 0$ og en funktion $f \in C^{k,\alpha}(B(\boldsymbol{x}_0^i, \varepsilon_2))$, som opfylder

$$(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0})_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(\boldsymbol{x}^i), x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$$

for alle $\boldsymbol{x}^i \in B(\boldsymbol{x}_0^i, \varepsilon_2)$. Altså er $f(\boldsymbol{x}^i) \in \partial\Omega$ for alle $\boldsymbol{x}^i \in B(\boldsymbol{x}_0^i, \varepsilon_2)$.

I $\mathbb{R}^2$ har vi dermed, at definition 2.4 kan formuleres som følger, når $k \geq 1$: Vi siger, at $\partial\Omega$ er $C^{k,\alpha}$, hvis der findes en parameterfremstilling $\boldsymbol{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ med $Vm(\boldsymbol{r}) = \partial\Omega$, og $r_1, r_2 \in C^{k,\alpha}(I)$.

Sætning 2.6. *Lad $u \in H^1(\Omega)$ være en svag løsning til $\Delta u + \lambda u = 0$ i Ω. Da er $u \in C^\infty(\Omega)$ [6, Theorem 3, side 316]. Vi har følgende regularitetsresultater for u_n, $n \in \mathbb{N}$:*

(i) *Da u_n også tilhører $H_0^1(\Omega)$, er $u_n \in C^0(\overline{\Omega})$.*

(ii) *I Ω er u_n analytisk [10, Theorem 2, side 98].*

(iii) *Lad $k \geq 2$ og $0 \leq \alpha \leq 1$. Hvis $\partial\Omega$ er $C^{k,\alpha}$, er $u_n \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ [8, Theorem 6.19].*

(iv) *Hvis $\partial\Omega$ er C^∞, er $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ [6, Theorem 6, side 326].*

I tilfældet hvor $\partial\Omega$ er C^∞, er u_n også analytiske på $\overline{\Omega}$ for alle $n \in \mathbb{N}$: Vi ved fra den multidimensionelle udgave af Taylors formel (se for eksempel

[2, Theorem 12.14])*, at der for alle $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ findes $\boldsymbol{z} \in L(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})$, således at

$$u_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^i u_n(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{i} \frac{\partial^m u_n(\boldsymbol{z})}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i}_{R_m^{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})}.$$

Når u_n er analytisk, eksisterer $r > 0$, således at $R_m^{\boldsymbol{x}_0} \to 0$ uniformt i $B(\boldsymbol{x}_0, r)$ for $m \to \infty$. Da $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, kan alle partielle afledte af u_n udvides kontinuert til $\partial\Omega$. Det vil sige, at, hvis vi vælger $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$, vil $R_m^{\boldsymbol{x}_0} \to 0$ uniformt i en omegn omkring $\boldsymbol{x}_0$. For alle $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{\Omega}$ findes altså $\varepsilon > 0$, således at

$$u_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^i u_n(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

for alle $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \overline{\Omega}$.

Når vi ved, at egenfunktionerne faktisk er funktioner, kan vi med maksimumsprincippet indskærpe de mulige egenfunktioner yderligere. Maksimumsprincippet udtaler sig om løsninger til et bredt udvalg af differentialuligheder. For Laplace-operatoren lyder maksimumsprincippet som følger.

Sætning 2.7. *[Maksimumsprincippet] Lad $D \subset \mathbb{R}^n$ være et domæne. Antag, at $u \in C^2(D)$ opfylder differentialuligheden $\Delta u \geq 0$ i D. Hvis $M := \sup_{\boldsymbol{x} \in D} u(\boldsymbol{x})$ antages, er $u \equiv M$ i D.*

For beviset, se [19, Theorem 2, side 53].

Bemærkning 2.8. *Ved at anvende maksimumsprincippet for $-u$, ses det, at maksimumsprincippet også gælder, hvis ulighedstegnet vendes og* sup *erstattes med* inf.

*Den udgave af Taylors formel, der refereres til, er fremsat i tilfældet, hvor udviklingspunktet er et indre punkt. Dog ses det af beviset, at fremgangsmåden også er gyldig for punkter på $\partial\Omega$, når funktionen er $C^m(\overline{\Omega})$.

Med maksimumsprincippet kan vi konkludere, at egenfunktionerne ikke selv kan være $C_0^\infty(\Omega)$-funktioner: Hvis $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ er $\Omega \setminus \operatorname{supp}(u_n)$ en åben, ikke-tom mængde, hvor $u_n \equiv 0$. Men da u_n er subharmonisk (eller superharmonisk) op til ihvertfald en del af $\partial\Omega$, er u_n i så tilfælde identisk nul.

Maksimumsprincippet kan også bruge til at drage konklusioner om knudelinierne for egenfunktionerne.

Sætning 2.9. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et domæne. Antag, at $u \in C^2(\Omega) \setminus \{0\}$ opfylder ligningen $\Delta u + \lambda u = 0$, hvor $\lambda > 0$. Da har vi følgende:*

(i) *Antag, at $\boldsymbol{x}_0 \in N(u) \cap \Omega$. For alle $\varepsilon > 0$ antager u både positive og negative værdier i $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega$.*

(ii) *Knudelinien $N(u)$ kan ikke stoppe i Ω.*

(iii) *Hvis $N(u)$ skærer sig selv, skal den krydse sig selv.*

Bevis.

(i) Lad $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, og antag, at $u(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Antag, at der eksisterer $\varepsilon > 0$, således at $u \le 0$ i $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega$. Da er $\Delta u = -\lambda u \ge 0$ i $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega$. Eftersom $\sup\{u(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega\} = u(\boldsymbol{x}_0)$, giver maksimumsprincippet, at $u \equiv 0$ i $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega$. Hvis $u \equiv 0$ på en åben mængde i Ω, giver maksimumsprincippet også, er $u \equiv 0$ i Ω. Vi har dermed opnået en modstrid.

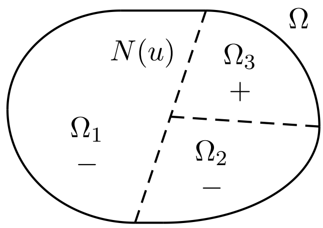
(ii) Hvis $N(u)$ stopper i punkt $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, findes $\varepsilon > 0$, således at u ikke skifter fortegn i $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, hvilket er i modstrid med punkt (i). Det vil sige, at $N(u)$ gennemskærer $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \Omega$ for alle $\varepsilon > 0$.

(iii) Antag, at $N(u)$ skærer sig selv, uden at krydse sig selv, som illustreret i figur 2.1. Da er der to disjunkte deldomæner Ω_1, Ω_2, med $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \subset N(u)$, hvor u har samme fortegn. Da u ikke skifter fortegn nær $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, er det i modstrid med punkt (i).

■

Med sætning 2.9 kan vi konkludere påstanden efter formodning 1.1 om, at $N(u_2)$ ikke er en lukket kurve, hvis og kun hvis $N(u_2)$ skærer $\partial\Omega$ i præcis to punkter.

Vi vender nu igen blikket mod egenværdierne. Den første egenværdi er strengt positiv: Hvis $\lambda_1 = 0$, er $\nabla u_1 = 0$ i Ω. Hvis $\nabla u_1 \equiv 0$, giver



Figur 2.1: Umulig knudelinie ifølge sætning 2.9.

randbetingelsen $u_n|_{\partial\Omega} \equiv 0$, at $u_n \equiv 0$ i $\overline{\Omega}$. Det er per antagelse ikke muligt.

I definitionen af de højere egenværdier, kræves det, at vi kender de lavere egenfunktioner. Det er ikke altid hensigtsmæssigt, og vi viser derfor max-min-princippet, som undgår dette problem.

Sætning 2.10. *[Max-min-princippet] Egenværdien λ_n kan udregnes som*

$$\lambda_n = \max_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}\in H_0^1(\Omega)} \min\{\mathcal{E}_\Omega(\phi_n) : \phi_n \in H_0^1(\Omega), \\ \|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, (\phi_n, \phi_k)_{L^2(\Omega)} = 0, k = 1, \ldots, n-1\}. \quad (2.7)$$

Bevis. Det er i (2.7) ikke nødvendigt at benytte max inf, da vi fra sætning 2.2 ved, at dette infimum antages. Af pladshensyn lader vi

$$\gamma_n(\Omega) := \min\{\mathcal{E}_\Omega(\phi_n) : \phi_n \in H_0^1(\Omega), \|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \\ (\phi_n, \phi_k)_{L^2(\Omega)} = 0, k = 1, \ldots, n-1\}.$$

Vælger vi $\phi_i = u_i$ for $i = 1, \ldots, n-1$ er $\gamma_n(\Omega) = \lambda_n$ ifølge sætning 2.2. Dermed er $\max\{\gamma_n(\Omega) : \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega)\} \geq \lambda_n(\Omega)$. For at vise den omvendte ulighed betragtes funktionen $\phi_n := \sum_{j=1}^n c_j u_j$, hvor $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ er konstanter, der opfylder, at $\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = 1$. For ethvert valg af funktioner $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ kan vi bestemme $c_1, \ldots, c_n$, således at $(\phi_n, \phi_i)_{L^2(\Omega)} = 0$ for $i = 1, \ldots, n-1$, da det er et homogent ligningssystem med $n-1$ ligninger og n variable. Normaliseringskravet $\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = 1$ kan altid efterleves ved at erstatte hvert c_j med $c_j / \sqrt{\sum_{j=1}^n |c_j|^2}$. Ved at foretage en partiel integration, udnytte at $(u_i, u_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{i,j}$ og egenværdiernes monotonicitet, har vi, at

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Omega(\phi_n) &= \int_\Omega \nabla\phi_n(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\nabla\phi_n(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \phi_n(\boldsymbol{x})\overline{\Delta\phi_n(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n c_j u_j(\boldsymbol{x})\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^n c_j \Delta u_j(\boldsymbol{x})\right)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n c_j u_j(\boldsymbol{x})\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j u_j(\boldsymbol{x})\right)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2 \int_\Omega |u_j(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \lambda_n \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \lambda_n.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Selvom $\lambda_1 < \lambda_k$ for alle $k \ge 2$, har vi ikke en skarp ulighed i (2.8), da vi ikke ved, hvorvidt $c_1 = 0$. Når denne ulighed gælder for et bestemt valg af ϕ_n, er også $\gamma_n(\Omega) \le \lambda_n$. Da uligheden (2.8) er opnået uafhængigt af valget af funktionerne $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$, kan vi konkludere, at $\max\{\gamma_n(\Omega) : \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega)\} \le \lambda_n$. ■

Med max-min-princippet kan vi vise hvordan egenværdierne afhænger af domænet for Dirichlet-problemet.

Korollar 2.11. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et domæne og $\Omega' \subset \Omega$ være en åben delmængde. Da er $\lambda_n(\Omega) \le \lambda_n(\Omega')$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $\Omega' \subsetneq \Omega$, er $\lambda_n(\Omega) < \lambda_n(\Omega')$ for alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Hvis $\Omega' \subset \Omega$, er $H_0^1(\Omega') \subset H_0^1(\Omega)$, og vi har vurderingen

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\Omega') &= \max\{\gamma_n(\Omega') : \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega')\} \\
&\ge \max\{\gamma_n(\Omega') : \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega)\} \\
&\ge \max\{\gamma_n(\Omega) : \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega)\} = \lambda_n(\Omega).
\end{aligned}$$

Det første ulighedstegn skyldes, at, hvis $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega)$ istedet for $H_0^1(\Omega')$, skal ϕ_n være ortogonal på flere funktioner. Andet ulighedstegn følger af, at vi skal minimere funktionalet over en større mængde.

Antag nu, at $\Omega' \subsetneq \Omega$. Vi ved, at $\lambda_n(\Omega')$ antages, når $\phi_k = u_k(\Omega')$ for $k = 1, \ldots, n-1$. Hvis $u_k(\Omega')$ er en egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω, skal $u_k(\Omega')$ være nul på $\Omega \setminus \Omega' \neq \emptyset$. Ifølge maximumsprincippet, sætning 2.7, er det ikke muligt, da vi så ville have, at $u_k(\Omega') \equiv 0$ på Ω. ■

Hvis Ω' og Ω er relateret til hinanden gennem en kontinuert deformation, har vi yderligere information om egenværdiernes opførsel. Fordi vi arbejder med Dirichlets randbetingelse, foretager vi kontinuerte deformationer, som følger: For ethvert $t \in [a, b]$ knytter vi et domæne $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$. Lad $\boldsymbol{r}_t : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være en parameterfremstilling for $\partial\Omega_t$ (det antages, at $\mathrm{Dm}(\boldsymbol{r}_t) = I$ for alle $t \in [a, b]$). Afbildningen $t \mapsto \Omega(t)$ siges at være en kontinuert deformation af $\Omega(a)$ til $\Omega(b)$, hvis der for alle $t_1 \in [a, b]$ gælder, at $\boldsymbol{r}_t \to \boldsymbol{r}_{t_1}$ punktvis for $t \to t_1$.

Sætning 2.12. *Lad $\Omega(t)$ være en kontinuert deformation af Ω. Da er funktionen $t \mapsto \lambda_n(\Omega(t))$ kontinuert for alle $n \in \mathbb{N}$.*

For beviset, se [5, Theorem 11, side 423]. Til sidst viser vi, at der ikke er andre egenværdier end dem, vi har fundet.

Lemma 2.13. *For $n \to \infty$ vil $\lambda_n \to \infty$, og der findes ikke andre egenværdier for $-\Delta$ end dem, der defineret ved (2.5). Hver egenværdi har endelig multiplicitet, og λ_1 har multiplicitet én.*

Bevis. Antag, at der findes $C > 0$, således at $\lambda_n \leq C$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er

$$\int_\Omega \nabla u_n(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u_n(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u_n(\boldsymbol{x}) \Delta u_n(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_n \int_\Omega {u_n}^2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq C.$$

Det vil sige, at $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C}$, og Rellich' kompakthedssætning ([11, Theorem 7.2.3]) giver, ligesom i sætning 2.1, at der findes en delfølge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ af $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, som er en Cauchy-følge i $L^2(\Omega)$. Men da $(u_n, u_m)_{L^2(\Omega)} = \delta_{n,m}$, har vi for $k \neq \ell$, at

$$\|u_{n_k} - u_{n_\ell}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_{n_k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{n_\ell}\|^2_{L^2(\Omega)} - (u_{n_k}, u_{n_\ell})_{L^2(\Omega)} = 2.$$

Det vil sige, at $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ikke kan være en Cauchy-følge. Altså vil $\lambda_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

Når vi nu ved, at $\lambda_n \to \infty$ for $n \to \infty$, er det tilstrækkeligt at vise, at vi ikke springer nogen egenværdier over. Antag, at der findes λ'_n, som opfylder $\lambda_{n-1} < \lambda'_n < \lambda_n$ $(0 < \lambda'_1 < \lambda_1)$, og at der findes ${u_n}' \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp$ $({u_1}' \in H_0^1(\Omega))$, som opfylder $\Delta {u_n}' + \lambda'_n {u_n}' = 0$ i Ω. Da har vi, at

$$\lambda'_n = -\int_\Omega {u_n}'(\boldsymbol{x}) \Delta {u_n}'(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathcal{E}_\Omega\big({u_n}'\big) > \lambda_n,$$

hvilket er en modstrid. At alle egenværdierne har endelig multiplicitet følger af, at $\lambda_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

Antag, at der findes to ortogonale 1. egenfunktioner u_1 og $\widetilde{u}_1$. Da en 1. egenfunktion ikke skifter fortegn, ifølge Courant's nodal domain theorem, kan $(u_1, \widetilde{u}_1)_{L^2(\Omega)}$ ikke være nul, medmindre $u_1 \equiv \widetilde{u}_1 \equiv 0$. Men egenfunktionerne kan ikke være identisk nul, så vi har opnået en modstrid. ■

2.3 Opsummering

I dette kapitel har vi vist følgende for Laplace-operatoren på $H_0^1(\Omega)$: Der er tælleligt mange, reelle egenværdierne $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, som opfylder, at $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$. Hver egenværdi har endelig multiplicitet, λ_1 er en simpel egenværdi, og $\lambda_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Egenværdien for en mængde, er aldrig større end egenværdien for en delmængde, og egenværdierne afhænger kontinuert af domænet, når dette deformeres kontinuert.

Egenfunktionerne kan vælges til at være relle, og de er analytiske på Ω. Hvis $\partial\Omega$ er $C^{k,\alpha}$, hvor $2 \le k \le \infty$ og $0 \le \alpha \le 1$, er $u_n \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Alle egenfunktionerne er ortogonale i $L^2(\Omega)$, uanset om de hører til forskellige eller samme egenværdi(er). For alle $n \in \mathbb{N}$ er $N(u_n)$'s opførsel i Ω er restingeret af, at $N(u_n)$ ikke kan stoppe, eller røre sig selv uden at skære sig selv.

Med disse tekniske resultater på plads, går vi nu videre med specialets hovedmål, nemlig beviset for sætning 1.2.

3 Knudelinien for 2. egenfunktion

Beviset for sætning 1.2 følger umiddelbart fra sætning 3.15 og sætning 3.16 i dette kapitel. Kapitlet består af to afsnit, som hver indeholder én af disse to sætninger. I resten af rapporten lader vi $\Omega^+ := \{\boldsymbol{x} \in \Omega : u_2(\boldsymbol{x}) > 0\}$, og $\Omega^- := \{\boldsymbol{x} \in \Omega : u_2(\boldsymbol{x}) < 0\}$.

3.1 Indskrænkning af mulighederne

I dette kapitel har vi brug for endnu et maksimumsprincip, det såkaldte Hopfs maksimumsprincip. Hopfs maksimumsprincip udtaler sig også om løsninger til differentialuligheder, og findes for eksempel som [19, Theorem 7, side 65]. I det tilfælde, vi behøver, lyder Hopfs maksimumsprincip, som følger.

Sætning 3.1. *[Hopfs maksimumsprincip] Lad $D \subset \mathbb{R}^n$ være et domæne, og lad $P \in \partial D$. Antag, at $u \in C^2(D)$ opfylder differentialuligheden $\Delta u \geq 0$ i D, at $u \leq M$ i D, og at $u(P) = M$. Antag endvidere, at $u \in C(D \cup$*

$\{P\}$), og at $(\partial u/\partial \boldsymbol{n})(P)$ eksisterer. Da er enten $(\partial u/\partial \boldsymbol{n})(P) > 0$, eller også er $u \equiv M$ i D.

Bemærkning 3.2. *En tilstrækkelig betingelse, for at $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ eksisterer overalt på ∂D, er, at ∂D er C^2. Så i det efterfølgende, hvor vi anvender Hopfs maksimumsprincip, antages det, at randen af det domæne, der betragtes, er C^2*

Bemærkning 3.3. *Anvendes Hopfs maksimumsprincip på funktionen $-u$ ses det, at sætning 3.1 gælder, hvis alle ulighedstegnene vendes. Jævnfør bemærkning 2.8, kan vi altså benytte maksimumsprincippet, sætning 2.7, og Hopfs maksimumsprincip på Ω^+ og Ω^-.*

Nu kan vi vise det første lemma.

Lemma 3.4. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et domæne, hvor $\partial\Omega$ er C^2, og lad $P \in \partial\Omega$. Da er $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(P) = 0$, hvis og kun hvis $P \in N(u_2)$.*

Bevis. Når $\partial\Omega$ er antaget at være C^2, har vi fra sætning 2.6, at $u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$. Antag, at $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(P) = c \neq 0$. Vælg koordinatsystemet, således at $P = \mathbf{0}$, at x-aksen er tangent til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$, og y-aksen er den udadvendte normal til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$. Da er $(\partial u_2/\partial y)(\mathbf{0}) = (\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(P) = c$. Vi ønsker at benytte implicit funktionssætningen til at konkludere, at ligningen $u_2(\boldsymbol{x}) = 0$ har en entydig løsning, når $|\boldsymbol{x}|$ er tilstrækkelig lille. Da $\mathbf{0}$ ikke er et indre punkt, skal vi dog først have udvidet $\mathrm{Dm}(u_2)$ på en sådan måde, at $\mathbf{0} \in \mathrm{Dm}(u_2)^o$. Fra [8, Lemma 6.37] har vi, at der eksisterer en åben mængde $\Omega' \supset \overline{\Omega}$, og en funktion $w \in C_0^2(\Omega')$, således at $w|_{\overline{\Omega}} = u_2$. Da er $(\partial w/\partial y)(\mathbf{0}) = c$. Implicit funktionssætningen giver, at der findes $\varepsilon > 0$ og en entydig funkion $f \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon))$, som opfylder $w(x, f(x)) = 0$ for alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Da $w|_{\partial\Omega} \equiv 0$, er $f(x) \in \partial\Omega$ for alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Det vil sige, at der eksisterer $\delta > 0$, således at $u_2(\boldsymbol{x}) \neq 0$ for $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \delta) \cap \Omega$.

Antag, at $P \notin N(u_2)$ – det vil sige, at $P \notin \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$. Antag, at $P \in \partial\Omega^+$. Da $u_2|_{\Omega^+} \not\equiv 0$ giver Hopfs maksimumsprincip giver da, at $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(P) \neq 0$. ∎

Fra Courant's nodal domain theorem ved vi, at u_2 højst kan skære $\partial\Omega$ i to punkter, og dermed giver lemma 3.4 umiddelbart nedenstående lemma.

Lemma 3.5. *Hvis $\partial\Omega$ er C^2, kan $\partial u_2/\partial\boldsymbol{n}$ højst have to nulpunkter på $\partial\Omega$.*

For at bevise sætning 1.2 skal vi bruge, at formodning 1.1 gælder for simple domæner. Sætning 3.6, som er baseret på den oprindelige sætning af L. Payne i [18], behandler dette tilfælde.

Sætning 3.6. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et begrænset, konvekst domæne med C^2-rand, der er symmetrisk omkring en linie. Da gælder formodning 1.1.*

Bevis. Vælg koordinatsystemet, således at Ω er symmetrisk omkring y-aksen. Vi viser først sætning 3.6 i de tilfælde, hvor u_2 er henholdsvis lige og ulige i x. Det vil sige, når u_2 opfylder henholdsvis $u_2(-x, y) = u_2(x, y)$ og $u_2(-x, y) = -u_2(x, y)$ for alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Når u_2 er ulige i x, er $u_2(\overline{\Omega_{x=0}}) \subset N(u_2)$, og denne linie deler Ω i to disjunkte deldomæner. Fra Courant's nodal domain theorem og sætning 2.9 ved vi derfor, at $N(u_2) = \overline{\Omega_{x=0}}$, og sætningen er bevist i dette tilfælde.

Antag nu, at u_2 er lige i x, og at formodning 1.1 ikke gælder. Generelt er $(\partial u_2/\partial\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}) = 0$ for $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, hvis og kun hvis $\boldsymbol{v}$ er normal og $\boldsymbol{x} \in N(u_2)$, eller $\boldsymbol{v}$ er tangent til $\partial\Omega$ i $\boldsymbol{x}$. Det første tilfælde følger af lemma 3.4, og det andet tilfælde følger af følgende udregning. Lad $\boldsymbol{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være den buelængdeparametriserede parameterfremstilling for $\partial\Omega$. Da er $u_2(\boldsymbol{r}(s)) \equiv 0$, hvilket medfører, at

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u_2(\boldsymbol{r}(s)) = \nabla u_2(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{r}'(s) = \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{r}'(s)}(\boldsymbol{r}(s))$$

for alle $s \in I$. Knudelinien for en lige 2. egenfunktion må nødvendigvis skære y-aksen, for at u_2 kan skifte fortegn. Når det er antaget, at formodning 1.1 ikke gælder, og u_2 er lige i x, kan $N(u_2) \cap \partial\Omega$ højst bestå af ét punkt, som ligger på y-aksen. Her er x-aksen tangent til $\partial\Omega$, og de to punkter på $\partial\Omega$, hvor normalen til $\partial\Omega$ er parallel med x-aksen, ligger dermed ikke i $N(u_2)$. Det vil sige, at $\partial u_2/\partial x$ ikke skifter fortegn på $\partial\Omega \cap \partial\Omega_{x\leq 0}$ og $\partial\Omega \cap \partial\Omega_{x\geq 0}$. Vi antager, at $(\partial u_2/\partial x)(\boldsymbol{x}) \geq 0$, når $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega_{x\leq 0} \cap \partial\Omega$.

Da $(\partial u_2/\partial x)(x, y) = -(\partial u_2/\partial x)(-x, y)$, skifter $\partial u_2/\partial x$ fortegn i Ω. Men vi kan også konkludere, at $\partial u_2/\partial x$ skifter fortegn i $\Omega_{x\leq 0}$: Lad (y'_Ω, y''_Ω) være projektionen af Ω på y-aksen, og lad $\widetilde{y} \in (y'_\Omega, y''_\Omega)$. Da Ω er konveks, skærer linien $y = \widetilde{y}$ kun $\partial\Omega$ i to punkter, og projektionen $\{x \in \mathbb{R} : (x, \widetilde{y}) \in \Omega\}$ er ét interval. Antag, at $\partial u_2/\partial x$ ikke skifter fortegn i $\Omega_{x\leq 0}$. Da er enhver snitfunktion $u_2(x, \widetilde{y})$ ikke-aftagende, og dette ville sammen med randbetingelsen $u_2|_{\partial\Omega} \equiv 0$ medføre, at $u_2 \geq 0$ på $\Omega_{x\leq 0}$. Da u_2 er antaget at være lige i x, ville vi så have, at $u_2(\boldsymbol{x}) \geq 0$ for alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Men det er i modstrid med, at u_2 skifter fortegn på Ω.

Lad $\Omega_*^- \subsetneq \Omega_{x\leq 0}$ være det område, som har $N(\partial u_2/\partial x) = \partial\Omega_*^-$, og lad $\Omega_* := \{(x, y) \in \Omega : (x, y) \in \Omega_*^- \vee (-x, y) \in \Omega_*^-\}$. Differentierer vi med hensyn til x i differentialligningen $\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0$, og udnytter, at de partielle afledte kommuterer, ses det, at $\partial u_2/\partial x$ opfylder ligningen

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = 0$$

i Ω, og dermed også i Ω_*. Da $\partial u_2/\partial x = 0$ på $\partial\Omega_*$, har vi dermed et Dirichlet-problem på mængden Ω_*. Dog er det ikke sikkert, at λ_2 er den 2. egenværdi på Ω_*. Da $\partial u_2/\partial x$ skifter fortegn på Ω_*, som følge af at være ulige i x, ved vi fra Courant's nodal domain theorem, at $\partial u_2/\partial x$ er mindst den 2. egenfunktion for Ω_*. Dermed er λ_2 mindst den 2. egenværdi for Ω_*, og vi har vurderingen $\lambda_2 \geq \lambda_2(\Omega_*)$. Men eftersom $\Omega_* \subsetneq \Omega$, giver korollar 2.11, at $\lambda_2 < \lambda_2(\Omega_*)$, hvilket er en modstrid. Det vil sige, at sætningen også gælder, hvis u_2 er lige. Argumentet virker også selvom Ω_* ikke er sammenhængende, da både korollar 2.11 og Courant's nodal domain theorem også gælder for ikke-sammenhængende mængder.

For en vilkårlig 2. egenfunktion u_2, er $u_2 = {u_2}^- + {u_2}^+$, hvor

$${u_2}^-(x, y) := \frac{u_2(x, y) - u_2(-x, y)}{2}$$

er ulige i x, og

$${u_2}^+(x, y) := \frac{u_2(x, y) + u_2(-x, y)}{2}$$

er lige i x. Eftersom Ω er symmetrisk omkring y-aksen, er $u_2(-x, y)$ også en 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω. Da $-\Delta$ er lineær, er ${u_2}^-$ og ${u_2}^+$ også 2. egenfunktioner.

Da ${u_2}^+$ er lige i x ved vi, at sætningen gælder i dette tilfælde. Endvidere er knudelinien ikke y-aksen, da ${u_2}^+$ så ikke ville skifte fortegn på Ω. Det vil sige, at der eksisterer to punkter $P = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ og $Q =$

$(-x_0, y_0) \in \partial\Omega$, så $N({u_2}^+) \cap \partial\Omega = \{P, Q\}$. Altså er $(\partial {u_2}^+/\partial \boldsymbol{n})(P) = (\partial {u_2}^+/\partial \boldsymbol{n})(Q) = 0$, ifølge lemma 3.4.

Da ${u_2}^-$ er ulige, er $N({u_2}^-) = \overline{\Omega_{x=0}}$, og ${u_2}^-$ har konstant fortegn på $\Omega_{x\leq 0}$ og $\Omega_{x\geq 0}$. Fra Hopfs maksimumsprincip har vi, at $\partial {u_2}^-/\partial \boldsymbol{n}$ har forskelligt fortegn i P og Q. Vi antager, at $(\partial {u_2}^-/\partial \boldsymbol{n})(P) > 0$, og $(\partial {u_2}^-/\partial \boldsymbol{n})(Q) < 0$. Dermed er $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(P) > 0$ og $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(Q) < 0$. Som følge af, at $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n}$ er kontinuert på $\partial\Omega$, eksisterer der to forskellige punkter $\widetilde{P}, \widetilde{Q} \in \partial\Omega \backslash \{P, Q\}$, således at $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(\widetilde{P}) = (\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(\widetilde{Q}) = 0$. Dermed er sætning 3.6 vist. ∎

Vi får også brug for at vurdere, hvornår u_2 er entydig. Til dette formål har vi følgende lemma.

Lemma 3.7. *Lad u_2 være en 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω, og antag, at $\partial\Omega$ er C^2. Hvis $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n}$ ikke skifter fortegn på $\partial\Omega$, er egenrummet hørende til λ_2 et-dimensionalt.*

Bevis. Antag, at $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n} \geq 0$, og at $\widetilde{u}_2$ er en anden 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω, som ikke er et multiplum af u_2. Vi kan vælge $\widetilde{u}_2$, så $(u_2, \widetilde{u}_2)_{L^2(\Omega)} = 0$. Da $\partial\Omega$ er C^2, er $u_2, \widetilde{u}_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ ifølge sætning 2.6.

Lad $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ være et fast punkt, og definer funktionen $T\widetilde{u}_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ved

$$(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) := (x - x_0)\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) + (y - y_0)\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}).$$

Det ses, at $(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x})$ er et multiplum af den retningsafledte af $\widetilde{u}_2$ i retningen givet ved $\boldsymbol{\nu} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$. Vi udregner $\Delta(T\widetilde{u}_2)$, og udnytter, at de blandede afledte kommuterer:

$$\begin{aligned}
\Delta(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) + (x - x_0)\frac{\partial^2 \widetilde{u}_2}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}) + (y - y_0)\frac{\partial^2 \widetilde{u}_2}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{x})\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left((x - x_0)\frac{\partial^2 \widetilde{u}_2}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}) + (y - y_0)\frac{\partial^2 \widetilde{u}_2}{\partial y^2}(\boldsymbol{x})\right) \\
&= 2\Delta\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x}) + (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x})) + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x})) \\
&= -2\lambda_2\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x}) - \lambda_2(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Dermed er $\Delta(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) + \lambda_2(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) = -2\lambda_2\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x})$. Ved at multiplicere med u_2, og integrere over Ω får vi, ved hjælp af ortogonalitetsantagelsen, at

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \big(u_2(\boldsymbol{x})\Delta(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 u_2(\boldsymbol{x})(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad = \int_\Omega \big(u_2(\boldsymbol{x})\Delta(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) - T\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x})\Delta u_2(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

Lad $\boldsymbol{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være den buelængdeparametriserede parameterfremstilling af $\partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ er C^2, kan vi benytte Greens 2. formel (se for eksempel [11, Lemma 1.1.1]). Med randbetingelsen $u_2|_{\partial\Omega} = 0$ giver det, at

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_I \left(u_2(\boldsymbol{r}(s))\frac{\partial T\widetilde{u}_2}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s)) - T\widetilde{u}_2(\boldsymbol{r}(s))\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))\right)\mathrm{d}s \\
&\qquad = -\int_I T\widetilde{u}_2(\boldsymbol{r}(s))\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))\,\mathrm{d}s. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Tangenten $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$ og normalen $\boldsymbol{n}(s) = \boldsymbol{r}''(s)$ til $\partial\Omega$ i punktet $\boldsymbol{r}(s)$ udgør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$ for alle $s \in I$. Vi får i de efterfølgende udregninger ikke brug for at udtrykke normalen ved parameterfremstillingen, så vi bibeholder notationen $\boldsymbol{n}$ for den udadvendte enhedsnormalvektor. I den ortonormale basis $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}\}$ har vi, at

$$
\begin{aligned}
(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{r}(s)) &= (\nabla\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{\nu} = [((\nabla\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \\
&\qquad + (\nabla\widetilde{u}_2(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{t}(s))\boldsymbol{t}(s)] \cdot [(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{t}(s))\boldsymbol{t}(s)] \\
&= \frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\widetilde{u}_2(\boldsymbol{r}(s))(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{t}(s)) \\
&= \frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n}), \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

da $\widetilde{u}_2 \equiv 0$ på $\partial\Omega$. Indsættes (3.2) i (3.1) får vi, at

$$
\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))\frac{\partial u_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))\,\mathrm{d}s = 0. \qquad (3.3)
$$

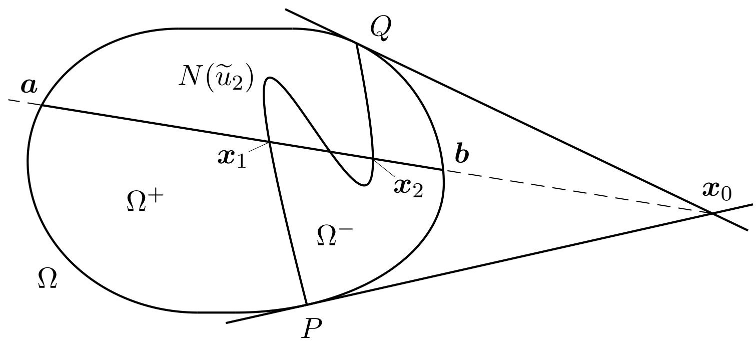
Lad $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$. Da Ω er konveks, er $\boldsymbol{\nu}$ og $\boldsymbol{n}$ aldrig ortogonale. Antag nu, at $\partial\widetilde{u}_2/\partial\boldsymbol{n}$ ikke skifter fortegn på $\partial\Omega$. Fra (3.3) ses det da, at

$$
\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (3.4)
$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Da u_2 og $\widetilde{u}_2$ ikke er konstante i Ω, er hverken $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n}$ eller $\partial \widetilde{u}_2/\partial \boldsymbol{n}$ konstant nul ifølge Hopfs maksimumsprincip. Lemma 3.4 giver os da, at (3.4) kun er opfyldt i de punkter, hvor $N(u_2)$ og $N(\widetilde{u}_2)$ skærer $\partial\Omega$. Fra lemma 3.5 ved vi, at det højst kan dreje sig om fire punkter. Dette er en modstrid. Da $\partial \widetilde{u}_2/\partial \boldsymbol{n}$ er kontinuert på $\partial\Omega$, skifter $\partial \widetilde{u}_2/\partial \boldsymbol{n}$ dermed fortegn mindst to gange. Ved hjælp af lemma 3.5 kan vi konkludere, at $\partial \widetilde{u}_2/\partial \boldsymbol{n}$ skifter fortegn præcis to gange, og lemma 3.4 giver os, at $N(\widetilde{u}_2) \cap \partial\Omega$ består af præcis to punkter, P og Q.

Antag, at tangenterne til $\partial\Omega$ i P og Q ikke er parallelle, og lad $\boldsymbol{x}_0$ være skæringspunktet mellem de to tangenter. Da Ω er konveks, er $\boldsymbol{x}_0 \notin \Omega$.

Vi vil vise, at $T\widetilde{u}_2$ ikke skifter fortegn på $\partial\Omega$. De eneste to linier gennem $\boldsymbol{x}_0$, som kun skærer $\partial\Omega$ i ét punkt, er tangenterne til $\partial\Omega$ i P og Q, og $(T\widetilde{u}_2)(P) = (T\widetilde{u}_2)(Q) = 0$. Betragt en vilkårlig linie gennem $\boldsymbol{x}_0$, som skærer $\partial\Omega$ i to punkter, $\boldsymbol{a} \in \partial\Omega \cap \partial\Omega^+$ og $\boldsymbol{b} \in \partial\Omega \cap \partial\Omega^-$. Da $\overline{\Omega}$ er



Figur 3.1: Domænet Ω, dets tangenter i P og Q samt deres skæringspunkt $\boldsymbol{x}_0$. Punkterne $\boldsymbol{x}_1 := (1-t_1)\boldsymbol{a} + t_1\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{x}_2 := (1-t_2)\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b}$ er de skæringspunkter mellem $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ og $N(\widetilde{u}_2)$, der er relevante i beviset.

konveks, er $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \subset \overline{\Omega}$, og $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cap N(\widetilde{u}_2) \neq \emptyset$ – se figur 3.1. Det er tilstrækkeligt at vise, at $T\widetilde{u}_2$ har samme fortegn i $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$, da

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{s \in I} \{\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Lad $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ være $\widetilde{u}_2|_{L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$, givet ved

$$f(t) := \widetilde{u}_2((1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}).$$

Vi har, at

$$f'(t) := \frac{(T\widetilde{u}_2)((1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})}{|(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|}$$

samt, at $f(0) = f(1) = 0$. Da $L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cap N(\widetilde{u}_2) \neq \emptyset$ eksisterer der $t_1, t_2 \in (0,1)$ med $t_1 \leq t_2$, hvor $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Endvidere har $f|_{(0,t_1)}$ og $f|_{(t_2,1)}$ konstant fortegn, og f's fortegn på $(0,t_1)$ er modsat f's fortegn på $(t_2,1)$. Dermed har

$$\frac{(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|} = f'(0) = \lim_{t\to 0^+} f'(t) \qquad \text{og} \qquad \frac{(T\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = f'(1) = \lim_{t\to 1^-} f'(t)$$

samme fortegn. Forudsætningen om, at $(\partial u_2/\partial \boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}) \geq 0$ for alle $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, giver da, sammen med (3.2) og (3.3), at

$$(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial\boldsymbol{n}}\frac{\partial u_2}{\partial\boldsymbol{n}} \equiv 0 \qquad \text{på } \partial\Omega.$$

Ligesom tidligere er dette i modstrid med Hopfs maksimumsprincip (faktoren $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n}$ udgør ikke et problem, da $\boldsymbol{\nu} \perp \boldsymbol{n}$ kun i P og Q). Sætningen er derfor vist i dette tilfælde.

Er tangenterne til $\partial\Omega$ i P og Q begge parallelle med en vektor $\boldsymbol{v}$, definerer vi funktionen $T^\star\widetilde{u}_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ved $T^\star\widetilde{u}_2 := \partial\widetilde{u}_2/\partial\boldsymbol{v}$. Vi kan konkludere, at $T^\star\widetilde{u}_2$ har konstant fortegn på $\partial\Omega$ på samme måde, som vi gjorde det for $T\widetilde{u}_2$. Funktionen $T^\star\widetilde{u}_2$ opfylder

$$\Delta(T^\star\widetilde{u}_2) + \lambda_2 T^\star\widetilde{u}_2 = 0 \tag{3.5}$$

i Ω, hvilket ses ved at differentiere den oprindelige egenværdiligning $\Delta\widetilde{u}_2 + \lambda_2\widetilde{u}_2 = 0$ med hensyn til x og y og udnytte lineariteten. Ved at multiplicere med u_2 og integrere over Ω i (3.5) fås, at

$$\int_\Omega u_2(\boldsymbol{x})\Delta(T^\star\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x}) - \Delta(u_2 T^\star)(\boldsymbol{x})\widetilde{u}_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Ved at benytte Greens 2. formel ligesom i (3.1) har vi så, at

$$\int_I (T^\star\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{r}(s))\frac{\partial u_2}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}(s))\,\mathrm{d}s = 0.$$

Da også $T^\star\widetilde{u}_2$ har konstant fortegn på $\partial\Omega$, er $(T^\star\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x})(\partial u_2/\partial\boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}) = 0$ for alle $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Opskriver vi $(T^\star\widetilde{u}_2)(\boldsymbol{x})$ i den ortonormale basis $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}\}$, får vi en modstrid på samme måde som tidligere. ■

Vi mangler et sidste teknisk lemma, der tillader os at kontrollere egenfunktionernes singulariteter på $\partial\Omega$. Vi skal i den forbindelse bruge [3, Theorem 1], der udtaler sig om graden af nulpunkter for løsninger til bestemte typer differentialuligheder.

Lad f være en kontinuert funktion på mængden $D \subset \mathbb{R}^n$. Da siges f enten at have et nulpunkt i $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{D}$ af orden $\alpha > 0$, eller at forsvinde af orden α i $\boldsymbol{x}_0$, hvis

$$f(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha) \quad \text{for } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in \overline{D}.$$

Hvis $\alpha \in \mathbb{N}$ og f er α gange differentiabel i en omegn omkring $\boldsymbol{x}_0$, ved vi fra den multidimensionelle udgave af Taylors formel (se for eksempel [2, Theorem 12.14]), at der findes $\boldsymbol{z} \in L(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})$, således at

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{\alpha-1} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\partial^m f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x^{m-k} \partial y^k} (x - x_0)^{m-k} (y - y_0)^k \\ + \frac{1}{\alpha!} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{z})}{\partial x^{\alpha-k} \partial y^k} (x - x_0)^{\alpha-k} (y - y_0)^k. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Når $f(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha)$ for $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, eksisterer der $\varepsilon, C > 0$, således at $|f(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha$, når $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \overline{D}$. For alle $k \geq 0$ er $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{n+k} = O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^n)$ for $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \to 0$. Dobbeltsummen i (3.6) er derfor nul for alle $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \overline{D}$. Det vil sige, at $D^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ for alle multiindex $\boldsymbol{\beta}$ med $|\boldsymbol{\beta}| < \alpha$.

Den anden slags nulpunkt knytter sig til L^p-normen. Vi siger, at f har et nulpunkt i $\boldsymbol{x}_0 \in D$ af orden $\alpha > 0$ i p-middel, hvis

$$\int_{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < r} |f(\boldsymbol{x})|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = O(r^{p\alpha + n}) \quad \text{for } r \to 0.$$

I begge tilfælde siger vi, at nulpunktet er af uendelig orden, hvis f forsvinder i $\boldsymbol{x}_0$ af orden α for alle $\alpha > 0$. Et nulpunkt af orden α er stærkere end et nulpunkt i p-middel af orden α, som det fremgår af følgende lemma.

Lemma 3.8. *Hvis f har et nulpunkt af orden α i $\boldsymbol{x}_0$, har f også et nulpunkt af orden α i $\boldsymbol{x}_0$ i p-middel for alle $p \in [1, \infty)$.*

Bevis. Når f har et nulpunkt af orden α i $\boldsymbol{x}_0$, findes der $\varepsilon, C > 0$, således at $|f(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha$, når $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$. For $0 < r < \varepsilon$ har vi dermed, at

$$\begin{aligned}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<r} |f(\boldsymbol{x})|^p \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &\leq C' \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<r} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{p\alpha} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\leq C' r^{p\alpha} \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<r} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = C'' r^{p\alpha+n},\end{aligned}$$

hvor $C', C'' > 0$. Det vil sige, at f har et nulpunkt af orden α i $\boldsymbol{x}_0$ i p-middel. ■

Theorem 1 i [3] gælder for et bredt udvalg af elliptiske differentialoperatorer, men i det tilfælde, vi behøver, kan den formuleres som følger.

Sætning 3.9. *[Aronszajns sætning om entydig udvidelse] Lad $M > 0$ og lad f opfylde differentialuligheden*

$$|\Delta f|^2 \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 + |f|^2 \right) \tag{3.7}$$

i et domæne $D \subset \mathbb{R}^n$. Funktionen f skal opfylde (3.7) i klassisk forstand, og $D^{\boldsymbol{\alpha}} f \in L^2_{loc}(D)$ for alle multiindex $\boldsymbol{\alpha}$ med $|\boldsymbol{\alpha}| \leq 2$. Hvis f har et nulpunkt af uendelig orden i $\boldsymbol{x}_0 \in D$ i 1-middel, er $f \equiv 0$ i D.

Endvidere får vi brug for følgende sætning, [12, Corollary, side 23], der udtaler sig om, hvordan man kan udvide holomorfe funktioner.

Sætning 3.10. *Lad $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ være simpelt sammenhængende, begrænsede domæner, med C^∞-rand. Hvis $f : D_1 \to D_2$ er en bijektiv, holomorf funktion, kan f og alle dens afledte udvides kontinuert til $\overline{D_1}$.*

Lemma 3.11. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et begrænset, konvekst domæne med C^∞-rand. Antag, at funktionen u opfylder*

$$\left.\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \qquad \text{i } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{på } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

hvor λ er en konstant. Antag, at tangenten til $\partial\Omega$ i punktet $Q \in \partial\Omega$ er parallel med x-aksen. Da gælder:

(i) *Funktionen u har ikke et nulpunkt af uendelig orden i Q.*

(ii) *Hvis $Q \in N(u)$, nærmer $N(u)$ sig Q ikke-tangentialt i forhold til $\partial\Omega$.*

(iii) *Der findes et $\varepsilon > 0$ således at $|u(\boldsymbol{x})| + |(\partial u/\partial x)(\boldsymbol{x})| > 0$ for $\boldsymbol{x} \in \Omega \cap B(Q, \varepsilon)$.*

Bevis. Vi kan ikke anvende sætning 3.9 direkte med $\boldsymbol{x}_0 = Q$, da $Q \notin \Omega$. Vi foretager derfor først en udvidelse af u på en sådan måde, at sætning 3.9 kan benyttes. Udvidelsen af u foregår ikke på samme måde som i lemma 3.4, da det udvidelsesresultat, der blev benyttet i lemma 3.4, ikke virker for glatte funktioner.

(i) Vi opfatter her også $\mathbb{R}^2_+$ som $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Lad $K > 0$ og lad $G \subset \mathbb{R}^2_+$ være en simpelt sammenhængende, begrænset mængde med C^∞-rand, hvor $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq K, y = 0\} \subset \partial G$. Fra Riemanns afbildningssætning (se for eksempel [4, Theorem 4.2, side 160]) er vi sikret eksistensen af en bijektiv, holomorf afbildning $f : G \to \Omega$, givet ved $f(\boldsymbol{z}) := f_1(\boldsymbol{z}) + i f_2(\boldsymbol{z})$, hvor $f_1, f_2 : G \to \mathbb{R}$ er C^∞. Sætning 3.10 giver os, at vi kan udvide $\operatorname{Dm}(f)$ til at være $\overline{G}$, på en sådan måde, at $f \in C^\infty(\overline{G})$. Vi antager desuden, at $f(\mathbf{0}) = Q$. Definer $v : \overline{G} \to \mathbb{R}$ ved $v(\boldsymbol{x}) := (u \circ f)(\boldsymbol{x})$. I resten af beviset lader vi $G_r := G \cap B(\mathbf{0}, r)$. Da $u = 0$ på $\partial\Omega$, findes r_1 med $0 < r_1 \leq K$, således at $v(x, 0) = 0$, når $|x| < r_1$. Da $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, er $v \in C^\infty(\overline{G_{r_1}})$.

Vi udregner Δv, og undlader variablene af pladshensyn. Dog skal det huskes, at u evalueres i $f(\boldsymbol{x})$, og f evalueres i $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right] \\
&\quad + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta f_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta f_2. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Ved at benytte Cauchy-Riemanns ligninger ses det, at

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\boldsymbol{z})\frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{z}) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{z})\frac{\partial f_2}{\partial y}(\boldsymbol{z}) \\ = -\frac{\partial f_1}{\partial x}(\boldsymbol{z})\frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{z}) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{z})\frac{\partial f_1}{\partial x}(\boldsymbol{z}) = 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Da de blandede afledte af f_1 og f_2 kommuterer, har vi endvidere fra Cauchy-Riemanns ligninger, at f_1, f_2 er harmoniske i G:

$$\begin{aligned}\Delta f_1(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(\boldsymbol{z}) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2}(\boldsymbol{z}) \\ = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_2}(\boldsymbol{z})\right) - \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(\boldsymbol{z})\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

På samme måde ses det, at $\Delta f_2 = 0$. Da $f_1, f_2 \in C^\infty(\overline{G_{r_1}})$, og $\overline{G_{r_1}}$ er en kompakt mængde, er de partielle afledte af f_1 og f_2 uniformt begrænsede på $\overline{G_{r_1}}$. Fra (3.9), (3.10) og (3.11) har vi derfor, at der findes $C > 0$, således at

$$|\Delta v(\boldsymbol{x})| \leq C|v(\boldsymbol{x})| \quad \text{for } \boldsymbol{x} \in \overline{G_{r_1}}. \tag{3.12}$$

Definer $\widetilde{v} : B(\mathbf{0}, r_1) \to \mathbb{R}$ ved

$$\widetilde{v}(x,y) := \begin{cases} v(x,y) & \text{for } y \geq 0, \\ -v(x,-y) & \text{for } y \leq 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

De partielle afledte af første og anden orden af $\widetilde{v}$ eksisterer, og er kontinuerte: Lad $(x^*, 0) \in \partial G_{r_1} \cap \partial \mathbb{R}^2_+$. Da $v \in C^\infty(\overline{G_{r_1}})$, ved vi, at

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\boldsymbol{x}) = D^{\boldsymbol{\alpha}} v(x^*, 0)$$

for alle multiindex $\boldsymbol{\alpha}$. Af samme grund skal eksistensen og kontinuiteten af $\widetilde{v}$'s partielle afledte kun eftervises på x-aksen. Tilmed har vi, at der for alle $\boldsymbol{\alpha}$ gælder, at

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \leq 0}} D^{\boldsymbol{\alpha}} v(x,-y) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} D^{\boldsymbol{\alpha}} v(x,y) \quad (= D^{\boldsymbol{\alpha}} v(x^*, 0)). \tag{3.14}$$

Da $\widetilde{v} \equiv 0$ på $\partial G_{r_1} \cap \partial \mathbb{R}^2_+$, eksisterer $\partial_1^\beta \widetilde{v}$ for $\beta = 1, 2$ på $\partial G_{r_1} \cap \partial \mathbb{R}^2_+$, og er identisk nul på denne mængde. Da $(\partial_1^2 \widetilde{v})(x^*, 0) = 0$ er $\partial_1^2 \widetilde{v}$ kontinuert, da vi fra (3.14) har, at

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} (\partial_1^2 v)(x, y) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} -(\partial_1^2 v)(x, y)$$
$$= \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \leq 0}} -(\partial_1^2 v)(x, -y).$$

At de partielle afledte $\partial_2 \partial_1^\alpha \widetilde{v}$ eksisterer for $\alpha = 0, 1$, ses ved, at

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\partial_1^\alpha v(x^*, h)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} -\frac{\partial_1^\alpha v(x^*, -h)}{h}.$$

De partielle afledte $\partial_2 \partial_1^\alpha \widetilde{v}$ er kontinuerte for $\alpha = 0, 1$, da vi fra (3.14) har, at

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} (\partial_2 \partial_1^\alpha v)(x, y) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \leq 0}} (\partial_2 \partial_1^\alpha v)(x, -y).$$

Da $\widetilde{v}(\boldsymbol{x}) \to 0$ for $\boldsymbol{x} \to (x^*, 0)$ har vi fra (3.12), at

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} |\Delta v(\boldsymbol{x})| = 0.$$

Eftersom også $(\partial_1^2 v)(\boldsymbol{x}) \to 0$, når $\boldsymbol{x} \to (x^*, 0)$, medfører det, at

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} (\partial_2^2 v)(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.15}$$

Den partielle afledte $\partial_2^2 \widetilde{v}$ eksisterer på $\partial G_{r_1} \cap \partial \mathbb{R}^2_+$, da (3.15) giver, at

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\partial_2 v(x, h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} -\frac{\partial_2 v(x, h)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{\partial_2 v(x, -h)}{h}.$$

Med (3.15) og (3.14) har vi, at $\partial_2^2 \widetilde{v}$ er kontinuert i $(x^*, 0)$ da

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} (\partial_2^2 v)(x, y) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \geq 0}} -(\partial_2^2 v)(x, y)$$
$$= \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to (x^*,0) \\ y \leq 0}} -(\partial_2^2 v)(x, -y).$$

Når de første- og andenordens partielle afledte af $\widetilde{v}$ er kontinuerte på $\overline{B(\mathbf{0}, r_1)}$, er $|\Delta\widetilde{v}| \leq C|\widetilde{v}|$ i $B(\mathbf{0}, r_1)$. Tilmed er $D^{\boldsymbol{\alpha}}\widetilde{v} \in L^2(B(\mathbf{0}, r_1))$, når $|\boldsymbol{\alpha}| \leq 2$. Sætning 3.9 giver os derfor, at $\widetilde{v}$ ikke har et nulpunkt af uendelig orden i $\mathbf{0}$ i 1-middel. Lemma 3.8 giver os, at $\widetilde{v}$ ikke har et nulpunkt af uendelig orden i $\mathbf{0}$. Da $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, har vi fra (3.6), at ikke alle partielle afledte af v i $\mathbf{0}$ er nul. Det vil sige, at v ikke forsvinder af uendelig orden i $\mathbf{0}$.

Da $f \in C^\infty(\overline{G})$, er f specielt Lipschitz-kontinuert. Antag, at u har et nulpunkt af uendelig orden i Q. Det vil sige, at der eksisterer $C, \varepsilon > 0$, således at

$$|v(\boldsymbol{x})| = |u(f(\boldsymbol{x}))| \leq C|f(\boldsymbol{x}) - Q|^\alpha = C|f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0})|^\alpha \leq C'|\boldsymbol{x}|^\alpha$$

for $\boldsymbol{x} \in G_\varepsilon$ og for alle $\alpha > 0$. Men det er i modstrid med, at v ikke forsvinder af uendelig orden i $\mathbf{0}$. Det vil sige, at u ikke forsvinder af uendelig orden i Q.

(ii) Vælg koordinatsystemet, således at $Q = \mathbf{0}$ og y-aksen er den indadvendte normal til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$. Fra punkt (i) og (3.8) ved vi, at u forsvinder af orden m i $\mathbf{0}$, hvor $1 \leq m < \infty$. Her er vi kun interesserede i $m \in \mathbb{N}$, så hvis $m \notin \mathbb{N}$, betragtes i stedet $\lfloor m \rfloor$. Da $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, er $(D^{\boldsymbol{\alpha}}u)(\mathbf{0}) = 0$ for alle $\boldsymbol{\alpha}$ med $|\boldsymbol{\alpha}| < m$. Her er kravet om, at $\partial\Omega$ er C^∞ nødvendigt, da det kun er under denne forudsætning, at alle de partielle afledte af u kan udvides kontinuert til $\partial\Omega$. De partielle afledte af orden mindst m er ikke alle nul. Da u er analytisk på $\overline{\Omega}$, findes der $r > 0$, således at

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(\mathbf{0}) x^{n-k} y^k \quad \text{for } \boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, r) \cap \overline{\Omega}.$$

Grunden til, at vi her ikke blot benytter Taylors formel er, at vi senere ønsker at differentiere dette udtryk. Med en endelig Taylorsum ville der opstå komplikationer i forbindelse med det ukendte punkt, som koefficienterne i restleddet afhænger af. Det første led i rækken er et polynomium, der er homogent af grad m, som vi betegner p_m. Vi lader $R := u - p_m$. Det vil sige, at

$$R(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(\mathbf{0}) x^{n-k} y^k.$$

Jævnfør bilag A.2, gælder der for $|\boldsymbol{\alpha}| \leq m+1$, at $D^{\boldsymbol{\alpha}} R(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{m+1-|\boldsymbol{\alpha}|})$ for $|\boldsymbol{x}| \to 0$, $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$. Dermed er

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= p_m(\boldsymbol{x}) + R(\boldsymbol{x}) \\ &= p_m(\boldsymbol{x}) + O(|\boldsymbol{x}|^{m+1}) \quad \text{for } |\boldsymbol{x}| \to 0, \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

For at vurdere vinklerne mellem $N(u)$ og $\partial\Omega$ omskriver vi p_m til polære koordinater. Når p_m er polynomium, der er homogent af grad m, er $p_m(r,\theta) = r^m g(\theta)$. For at finde et udtryk for $g(\theta)$, undersøges p_m yderligere. Antag først, at $m \geq 2$. Vi ved, at Δp_m er homogen af grad $m-2$, men vi har, at

$$\Delta p_m(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{m-1}) \quad \text{for } |\boldsymbol{x}| \to 0, \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}: \tag{3.17}$$

For alle $k \geq 0$ er $|\boldsymbol{x}|^{n+k} = O(|\boldsymbol{x}|^n)$ for $\boldsymbol{x} \to 0$. Så fra (3.8) har vi, at der findes $\varepsilon, C_1, C_2, C_3, C > 0$, således at

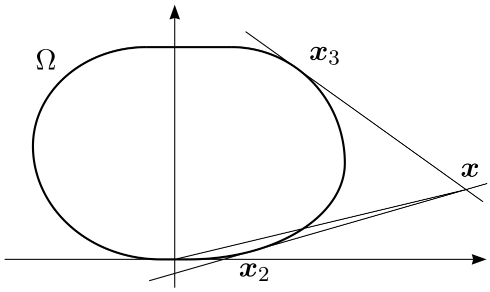
$$\begin{aligned} |\Delta p_m(\boldsymbol{x}) &\leq |\Delta R_m(\boldsymbol{x})| + |\lambda p_m(\boldsymbol{x})| + |\lambda R(\boldsymbol{x})| \\ &\leq C_1|\boldsymbol{x}|^{m-1} + C_2|\boldsymbol{x}|^m + C_3|\boldsymbol{x}|^{m+1} \leq C|\boldsymbol{x}|^{m-1} \end{aligned}$$

for $\boldsymbol{x} \in \Omega \cap B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Vi har samme vurdering på $\partial\Omega$, da (3.8) og (3.16) giver, at $\Delta p_m(\boldsymbol{x}) = -\Delta R(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{m-1})$ for $\boldsymbol{x} \to 0$ og $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$.

Vi kan derfor finde $\varepsilon, C > 0$, således at vi for $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{\Omega} \cap B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ har $|\Delta p_m(\boldsymbol{x}_0)| \leq C|\boldsymbol{x}_0|^{m-1}$. Vælger vi $k \in (0,1]$, er $k\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, da Ω er konveks. Desuden er $\Delta p_m(k\boldsymbol{x}_0) = k^{m-2}\Delta p_m(\boldsymbol{x}_0)$, og $C|k\boldsymbol{x}_0|^{m-1} = Ck^{m-1}|\boldsymbol{x}_0|^{m-1}$, hvilket medfører, at

$$|\Delta p_m(\boldsymbol{x}_0)| \leq kC|\boldsymbol{x}_0|^{m-1}.$$

Når denne ulighed gælder for alle $k \in (0,1]$, er $\Delta p_m(\boldsymbol{x}_0) = 0$. For alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+$ kan vi finde $K > 0$ og $\boldsymbol{x}_1 \in \overline{\Omega} \cap B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, så $\boldsymbol{x} = K\boldsymbol{x}_1$. Dette er oplagt, hvis $\boldsymbol{x}$ ikke ligger tæt på x-aksen. For at vise det for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+$ samtidig, gør vi som følger: Da Ω er C^∞, findes $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \partial\Omega$, således at tangenterne til $\partial\Omega$ i $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ går gennem $\boldsymbol{x}$ – se figur 3.2. Vi vælger $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, så $y_2 < y_3$. Alle linier mellem disse to tangenter skærer $\overline{\Omega}$. For alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+$ er $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^2_+$, og



Figur 3.2: Illustration til argumentet for at $\Delta p_m \equiv 0$ i $\mathbb{R}^2_+$.

skæringspunktet mellem y-aksen og tangenten til $\partial\Omega$ i $\boldsymbol{x}_2$ ligger derfor i den nedre halvplan. Det vil sige, at $L(\mathbf{0}, \boldsymbol{x})$ ligger mellem de to tangenter for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+$, og $\overline{\Omega} \cap L(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \neq \emptyset$. Vi har derfor, at

$$\Delta p_m(\boldsymbol{x}) = K^{m-2} \Delta p_m(\boldsymbol{x}_1) = 0.$$

Altså er p_m harmonisk i $\mathbb{R}^2_+$. Lad f være parametriseringen af $\partial\Omega$ nær $\mathbf{0}$. Det vil sige, at der eksisterer $\delta_1 > 0$, således at $f \in C^\infty((-\delta_1, \delta_1))$, og $f(-\delta_1, \delta_1) = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega : -\delta_1 < x < \delta_1\}$. Vi har specielt, at f er Lipschitz-kontinuert på $(-\delta_1, \delta_1)$ og $f(0) = 0$. Polynomiet p_m er kontinuert, og da x-aksen er tangent til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$, findes der for ethvert $\varepsilon > 0$ et $\delta \in (0, \delta_1)$, således at der for alle $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ med $|x| < \delta$ gælder, at $|p_m(x, 0) - p_m(x, f(x))| < \varepsilon$. Når $p_m(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{m+1})$ for $|\boldsymbol{x}| \to 0$ og $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, giver trekantsuligheden, at der findes $C, C' > 0$, således at der for alle $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ med $|x| < \delta_1$ gælder, at

$$\begin{aligned}
|p_m(x,0)| &\leq |p_m(x,0) - p_m(x, f(x))| + |p_m(x, f(x))| \\
&< \varepsilon + C\sqrt{x^2 + f(x)^2}^{\,m+1} \\
&\leq \varepsilon + C(|x| + |f(x)|)^{m+1} \leq \varepsilon + C'|x|^{m+1}.
\end{aligned}$$

Det vil sige, at $p_m(x, 0) = O(|x|^{m+1})$ for $x \to 0$. Ved at benytte et skaleringsargument som ovenover, kan vi slutte, at $p_m(x, 0) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi har nu den fornødne viden om p_m til at bestemme g. Da $\Delta =$

$\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$, og p_m er harmonisk, har vi, at

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 p_m}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial p_m}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\theta^2}(r,\theta) \\ &= m(m-1)r^{m-2}g(\theta) + mr^{m-2}g(\theta) + r^{m-2}g''(\theta) \\ &= r^{m-2}(g''(\theta) + m^2 g(\theta)). \end{aligned}$$

For at denne ligning kan gælde for alle $r \geq 0$, skal $g''(\theta) = -m^2 g(\theta)$. Det vil sige, at $g(\theta) = a\cos(m\theta) + b\sin(m\theta)$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Da $p_m \not\equiv 0$ per antagelse, er a og b ikke begge nul. Men, da $p_m(r,0) = p_m(r,\pi) = 0$ for alle $r \geq 0$, kan vi dog konkludere, at $a = 0$. Det vil sige, at

$$p_m(r,\theta) = br^m \sin(m\theta). \tag{3.18}$$

Hvis $m = 1$, kan vi eftervise (3.18) lettere: Der findes $c, d \in \mathbb{R}$, således at $p_1(x,y) = cx + dy$, som i polære koordinater er $p_1(r,\theta) = r(c\cos\theta + d\sin\theta)$. Ligesom ovenover kan vi slutte, at $c = 0$. I det efterfølgende kan vi derfor antage, at $m \in \mathbb{N}$.

Da Ω er konveks, findes der $r_2 > 0$, således at der for alle r med $0 < r < r_2$ findes entydige vinkler $\theta^-(r)$ og $\theta^+(r)$ med $0 \leq \theta^-(r) < \theta^+(r) \leq \pi$, således at $(r, \theta^\pm(r)) \in \partial\Omega$. Da tangenten til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$ er parallel med x-aksen, og $\partial\Omega$ er C^∞, vil $\theta^-(r) \to 0$ og $\theta^+(r) \to \pi$ for $r \to 0$. Hvis $0 < r < r_2$, og $(r, \theta_0(r)) \in N(u)$, er $\theta^-(r) < \theta_0(r) < \theta^+(r)$. Da vi har, at

$$u(r,\theta^-(r)) = u(r,\theta_0(r)) = u(r,\theta^+(r)) = 0,$$

ved vi fra Rolles sætning, at der eksisterer $\theta_1(r), \theta_2(r)$ med $\theta^-(r) < \theta_1(r) < \theta_0(r) < \theta_2(r) < \theta^+(r)$, hvor

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,\theta_1(r)) = \frac{\partial u}{\partial\theta}(r,\theta_2(r)) = 0.$$

Eftersom $\partial/\partial\theta = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$, er $\partial R/\partial\theta$ homogen af grad $m+1$. Det vil sige, at $(\partial R/\partial\theta)(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{m+1})$ for $|\boldsymbol{x}| \to 0$ og dermed at $(\partial R/\partial\theta)(r,\theta) = O(r^{m+1})$ for $r \to 0$. Vi har fra (3.16), at

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial\theta}(r,\theta) &= \frac{\partial p_m}{\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\partial R}{\partial\theta}(r,\theta) \\ &= bmr^m\cos(m\theta) + O(r^{m+1}) \quad \text{for } r \to 0, (r,\theta) \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Så, da $(\partial u/\partial\theta)(r,\theta_i)=0$, findes $C_i>0$, så $|\cos(m\theta_i(r))|\le C_i r$ for $i=1,2$. Lad $C:=\max\{C_1,C_2\}$. Vælger vi $r<(2C)^{-1}$, er

$$0<\frac{\pi}{3m}<\theta_1(r)<\theta_0(r)<\theta_2(r)<\pi-\frac{\pi}{3m}<\pi.$$

Det vil sige, at $N(u)$ nærmer sig $\mathbf{0}$ ikke-tangentialt i forhold til $\partial\Omega$, som ønsket.

(iii) Hvis $Q\notin N(u)$, kan vi finde $\varepsilon>0$, således at $B(Q,\varepsilon)\cap\Omega\cap N(u)=\emptyset$, hvilket betyder, at $u(\boldsymbol{x})\neq 0$, når $\boldsymbol{x}\in B(Q,\varepsilon)\cap\Omega$. Det vil sige, at resultatet gælder i dette tilfælde. Antag, at $Q\in N(u)$, og vælg koordinatsystemet, således at $Q=\mathbf{0}$, x-aksen stadig er tangent til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$ og y-aksen er den indadvendte normal til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$. Fra punkt (ii) ved vi, at vi kan finde $\kappa>0$ og c_1,c_2 med $0<c_1<c_2<\pi$, således at $c_1<\theta<c_2$, hvis $(r,\theta)\in\Omega\cap N(u)$, og $0\le r<\kappa$. Så $\sin\theta>c_3:=\min\{\sin c_1,\sin c_2\}$.

Fra (3.16) og (3.18) ses det, at hvis $(r,\theta)\in\Omega$, og $u(r,\theta)=0$, findes $C_1>0$, således at $|\sin(m\theta)|\le C_1 r$. Vi har, at $(\partial R/\partial x)(r,\theta)=O(r^m)$ for $r\to 0$. Så ved at udnytte, at $\partial/\partial x=\cos\theta\,\partial/\partial r-\sin\theta/r\,\partial/\partial\theta$, (3.16) og additionsformlen for sinus ses det, at

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(r,\theta)&=bmr^{m-1}\cos\theta\sin(m\theta)-bmr^{m-1}\sin\theta\cos(m\theta)+\frac{\partial R}{\partial x}(r,\theta)\\&=bmr^{m-1}\sin((m-1)\theta)+O(r^m).\end{aligned}$$

Hvis $(\partial u/\partial x)(r,\theta)=0$, findes $C_2>0$ således at $|\sin((m-1)\theta)|\le C_2 r$. Lad $C:=\max\{C_1,C_2\}$. Vi har følgende vurdering:

$$\begin{aligned}|\sin\theta|&=|\sin(m\theta-(m-1)\theta)|\\&\le|\sin(m\theta)||\cos((m-1)\theta)|+|\sin((m-1)\theta)||\cos(m\theta)|\\&\le|\sin(m\theta)|+|\sin((m-1)\theta)|\le 2Cr.\end{aligned}$$

Lad $\varepsilon:=\min\{\kappa,(2C)^{-1}c_3\}$. Vælger vi r og θ, så $0<r<\varepsilon$, og $|\sin\theta|\le c_3$, er $u(r,\theta)\neq 0$. Hvis $|\sin\theta|>c_3$, er enten $u(r,\theta)\neq 0$ eller $(\partial u/\partial x)(r,\theta)\neq 0$. Det vil sige, at $u(r,\theta)$ og $(\partial u/\partial x)(r,\theta)$ ikke begge kan være nul, når $(r,\theta)\in\Omega$ og $0<r<\varepsilon$. ■

Til hovedsætningen i dette afsnit får vi brug for en apriori vurdering. I denne forbindelse skal vi bruge Hölder-rummene, der blev indført i definition 2.3. Vi får brug for to resultater fra [8]. Den første sætning er fremsat for mere generelle randværdiproblemer, som [8, Theorem 6.6]. I den udgave vi behøver, lyder resultatet som følger.

Sætning 3.12. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ være et domæne med $C^{2,\alpha}$-rand, hvor $0 < \alpha \leq 1$, og lad $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Antag, at u opfylder $\Delta u + cu = 0$ i Ω og $u \equiv 0$ på $\partial\Omega$. Antag, at der findes $\Lambda > 0$, således at $\|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda$. Da findes $C(\alpha, \Lambda, \Omega) > 0$, således at*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\alpha, \Lambda, \Omega)\|u\|_{C^0(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Bemærkning 3.13. *Med notationen fra definition 2.4 af regularitet af randen, lader vi $\{\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}\}_{\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega}$ være en familie af funktioner, der lokalt repræsenterer $\partial\Omega$. På side 98 i [8] fremgår det, at*

$$\|\boldsymbol{\Psi}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} := \sup_{\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega} \|\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}\|_{C^{2,\alpha}(B(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon))} < \infty. \tag{3.20}$$

I beviset for sætning 3.12 i [8] ses det, at konstanten $C(\alpha, \Lambda, \Omega)$ i (3.19) kun afhænger af domænet Ω gennem $\|\boldsymbol{\Psi}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}$ og diameteren af Ω.

Det næste resultat findes som [8, Lemma 6.36].

Lemma 3.14. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ være et domæne med $C^{k,\alpha}$-rand, hvor $k \geq 1$ og $0 < \alpha \leq 1$. Da er $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ kompakt indlejret i $C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$, hvis $j + \beta < k + \alpha$.*

Nu er vi klar til at vise hovedsætningen i dette afsnit.

Sætning 3.15. *Antag, at $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ er et begrænset, konvekst domæne med C^∞-rand hvor formodning 1.1 ikke gælder. Da findes der et begrænset, konvekst domæne $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ med C^∞-rand, hvor $\partial u_2(\Omega_0)/\partial \boldsymbol{n}$ har præcis ét nulpunkt på $\partial\Omega_0$.*

Bevis. For $t \in [0, 1]$ lader vi $t \mapsto \Omega(t)$ være en kontinuert deformation af $\Omega =: \Omega(0)$ til en cirkel $\Omega(1)$. Vi deformerer Ω således, at $\Omega_{t_2} \subset \Omega_{t_1}$ for $t_1 \leq t_2$ og således at $\Omega(t)$ er et begrænset, konvekst domæne med C^∞-rand for alle $t \in [0, 1]$. Når $\Omega(t)$ har en $C^{2,\alpha}$-rand for alle $t \in [0, 1]$, sikrer den kontinuerte deformation og (3.20), at

$$\sup\{\|\boldsymbol{\Psi}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega(t))} : t \in [0, 1]\} < \infty. \tag{3.21}$$

Per antagelse gælder formodning 1.1 ikke for $\Omega(0)$, men ifølge sætning 3.6, gælder formodning 1.1 for $\Omega(1)$. Definerer vi

$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] : \text{Formodning 1.1 gælder ikke for } \Omega(t)\},$$

er $0 \leq t_0 < 1$. Vælg en følge $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ så $t_n \nearrow t_0$ for $n \to \infty$. Vi har dermed også en følge af domæner, $\{\Omega(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, og tilhørende følger af 2. egenværdier, $\{\lambda_2(\Omega(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ og 2. egenfunktioner, $\{u_2(\Omega(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vi vælger $u_2(\Omega(t_n))$, så de er normaliserede i C^0. Per antagelse gælder der for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$|N(u_2(\Omega(t_n))) \cap \partial\Omega(t_n)| \leq 1.$$

Det vil sige, at $\partial u_2(\Omega(t_n))/\partial \boldsymbol{n}$ har konstant fortegn på $\partial\Omega(t_n)$. Vi antager, at $\partial u_2(\Omega(t_n))/\partial \boldsymbol{n} \geq 0$ på $\partial\Omega(t_n)$. Vi ønsker at finde en konvergent delfølge af $\{u_2(\Omega(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ ved hjælp af lemma 3.14. Lemma 3.14 kan dog kun benyttes, hvis alle funktionerne i den følge, der betragtes, er definerede på samme mængde. Da det ikke er tilfældet her, foretager vi nogle krumspring, og udnytter, at $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega(t_n) = \Omega(t_0)$.

Fra sætning 2.12 ved vi, at $\lambda_2(\Omega(t_n)) \to \lambda_2(\Omega(t_0))$ for $n \to \infty$. Da $\{\lambda_2(\Omega(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, er den også begrænset. Vi lader $\Lambda := \sup\{\lambda_2(\Omega(t_n)) : n \in \mathbb{N}\}$. Da $\|u_2(\Omega(t_n))\|_{C^0(\overline{\Omega(t_n)})} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, giver sætning 3.12, at der eksisterer $K > 0$, således at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\begin{aligned}\|u_2(\Omega(t_n))\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega(t_0)})} &\leq \|u_2(\Omega(t_n))\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega(t_n)})} \\ &\leq C(\Lambda, \Omega(t_n))\|u_2(\Omega(t_n))\|_{C(\overline{\Omega(t_n)})} \leq K.\end{aligned}$$

Selvom $C(\Lambda, \Omega(t_n))$ afhænger af n, er $C(\Lambda, \Omega(t_n))$ uniformt begrænset ifølge bemærkning 3.13: Da $\Omega(0) \supset \Omega(t_n) \supset \Omega(1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er diameteren af $\Omega(t_n)$ uniformt begrænset. Da $\Omega(t_n) \to \Omega(t_0)$ og $\partial\Omega(t_0)$ er C^∞, er $\|\boldsymbol{\Psi}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega(t_n))}$ fra (3.21) også uniformt begrænset.

Det vil sige, at $\{u_2(\Omega(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en begrænset følge i $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega(t_0)})$. Fra lemma 3.14 har vi, at der findes en delfølge $\{u_2(\Omega(t_{n_k}))\}_{k\in\mathbb{N}}$ af $\{u_2(\Omega(t_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$, som konvergerer i $C^2(\overline{\Omega(t_0)})$ mod en funktion $u_2(\Omega(t_0))^\star$. Det vil sige, at $\{D^{\boldsymbol{\alpha}} u_2(\Omega(t_{n_k}))\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt i $\overline{\Omega(t_0)}$ for alle $\boldsymbol{\alpha}$ med $|\boldsymbol{\alpha}| \leq 2$. Dermed gælder der, at

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u_2(\Omega(t_0))^\star = \lim_{k\to\infty} D^{\boldsymbol{\alpha}} u_2(\Omega(t_{n_k}))$$

i $\overline{\Omega(t_0)}$, for alle $\boldsymbol{\alpha}$ med $|\boldsymbol{\alpha}| \leq 2$. Specielt har vi derfor, at

$$\Delta u_2(\Omega(t_0))^\star + \lambda_2(\Omega(t_0)) u_2(\Omega(t_0))^\star = 0 \quad \text{i } \Omega(t_0).$$

Da $\Omega(t_n) \to \Omega(t_0)$ og $u_2(\Omega(t_{n_k}))|_{\partial\Omega(t_{n_k})} \equiv 0$ for alle $k \in \mathbb{N}$, er også $u_2(\Omega(t_0))^\star|_{\partial\Omega(t_0)} \equiv 0$. Det vil sige, at $u_2(\Omega(t_0))^\star$ er en 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet på $\Omega(t_0)$.

Lad $\boldsymbol{n}(\Omega(t_0))(\boldsymbol{x})$ være den udadvendte enhedsnormalvektor til $\partial\Omega(t_0)$ i punktet $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega(t_0)$. Per antagelse er $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega(t_n)}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\Omega(t_n) \to \Omega(t_0)$ findes der for alle $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega(t_0)$ $N \in \mathbb{N}$, således at

$$\frac{\partial u_2(\Omega(t_n))}{\partial \boldsymbol{n}(\Omega(t_0))(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) \geq 0,$$

for alle $n \geq N$. Det vil sige, at

$$\frac{\partial u_2(\Omega(t_0))^\star}{\partial \boldsymbol{n}(\Omega(t_0))(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial u_2(\Omega(t_{n_k}))}{\partial \boldsymbol{n}(\Omega(t_0))(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) \geq 0$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \Omega(t_0)$. Fra sætning 3.7 har vi derfor, at den 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet på $\Omega(t_0)$ er entydig, og $u_2(\Omega(t_0)) = u_2(\Omega(t_0))^\star$.

Vælg nu en følge $\{\widetilde{t}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ så $\widetilde{t}_n \searrow t_0$ for $n \to \infty$. Igen har vi en følge af domæner, $\{\Omega(\widetilde{t}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, og tilhørende følger af 2. egenværdier, $\{\lambda_2(\Omega(\widetilde{t}_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ og normaliserede 2. egenfunktioner, $\{u_2(\Omega(\widetilde{t}_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per antagelse, gælder der for alle $n \in \mathbb{N}$, at

$$|N(u_2(\Omega(\widetilde{t}_n))) \cap \partial\Omega(\widetilde{t}_n)| = 2.$$

Vi kan ikke få samme vurderinger som før, da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega(\widetilde{t}_n) \neq \Omega(t_0)$. Men, da $\Omega(t_{n_1}) \subset \Omega(t_{n_2})$ for $n_1 \leq n_2$, kan vi for alle $m \in \mathbb{N}$ finde en delfølge $\{u_2(\Omega(\widetilde{t}_{n_k}))\}_{k=m_1}^\infty$ af $\{u_2(\Omega(\widetilde{t}_n))\}_{n=m}^\infty$ (hvor $n_{m_1} = m$), som konvergerer i $C^2(\overline{\Omega(\widetilde{t}_{n_m})})$. Eftersom $\Omega(\widetilde{t}_n) \to \Omega(t_0)$, kan vi opnå, at $\{u_2(\Omega(\widetilde{t}_{n_k}))\}_{k=m_1}^\infty$ konvergerer på en vilkårlig delmængde af $\Omega(t_0)$ ved at vælge m tilstrækkelig stor. Lader vi $\widetilde{u}_2(\Omega(t_0)) := \lim_{k\to\infty} u_2(\Omega(\widetilde{t}_{n_k}))$, betyder det, at

$$\Delta\widetilde{u}_2(\Omega(t_0)) + \lambda_2(\Omega(t_0))\widetilde{u}_2(\Omega(t_0)) = 0 \quad \text{i } \Omega(t_0).$$

Da $u_2(\Omega(\widetilde{t}_n))|_{\partial\Omega(\widetilde{t}_n)} \equiv 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er $\widetilde{u}_2(\Omega(t_0))|_{\partial\Omega(t_0)} \equiv 0$. Dermed er $\widetilde{u}_2(\Omega(t_0))$ en 2. egenfunktion på $\Omega(t_0)$. Da $u_2(\Omega(t_0))$ er entydig, betyder det, at $u_2(\Omega(t_0))$ også er grænseværdien af følgen $\{u_2(\Omega(\widetilde{t}_{n_k}))\}_{k\in\mathbb{N}}$. Lad $\{\boldsymbol{x}_{n,1}, \boldsymbol{x}_{n,2}\} = N(u_2(\Omega(\widetilde{t}_n))) \cap \partial\Omega(\widetilde{t}_n)$. Selvom $\boldsymbol{x}_{n,1} \neq \boldsymbol{x}_{n,2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er det muligt, at $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_{n,1} - \boldsymbol{x}_{n,2}| = 0$, således at $|N(u_2(\Omega(t_0))) \cap \partial\Omega(t_0)| = 1$. Antag, at $N(u_2(\Omega(t_0))) \cap \partial\Omega(t_0) = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ med $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$. Fra lemma 3.4 har vi, at

$$\frac{\partial u_2(\Omega(t_0))}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_1) = \frac{\partial u_2(\Omega(t_0))}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Ifølge punkt (i) i sætning 2.9 skifter u_2 fortegn nær $N(u_2)$. Det vil sige, at der findes $\varepsilon > 0$, således at $\partial\Omega(t_0)^+ \cap B(\boldsymbol{x}_1, \varepsilon)$ og $\partial\Omega(t_0)^- \cap B(\boldsymbol{x}_1, \varepsilon)$ er ikke-tomme og sammenhængende. Hopfs maksimumsprincip giver da, at $\partial u_2(\Omega(t_0))/\partial \boldsymbol{n}$ skifter fortegn på $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \cap \partial\Omega(t_0)$. Det er i modstrid med, at $\partial u_2(\Omega(t_0))/\partial \boldsymbol{n} \geq 0$ på $\partial\Omega(t_0)$. Det vil sige, at $|N(u_2(\Omega(t_0))) \cap \partial\Omega(t_0)| = 1$, og vi har dermed bevist sætning 3.15 med $\Omega_0 = \Omega(t_0)$. ■

Fra det ovenstående bevis ved vi kun, at $u_2(\Omega(t_0)) \in C^2(\overline{\Omega(t_0)})$. Men da $\partial\Omega(t_0)$ er C^∞, ved vi fra sætning 2.6, at $u_2(\Omega(t_0)) \in C^\infty(\overline{\Omega(t_0)})$.

Nu hvor vi er sikre på, at vi ikke behøver at tænke på de domæner, hvor knudelinien ikke skærer randen, går vi videre med at vise sætning 1.2.

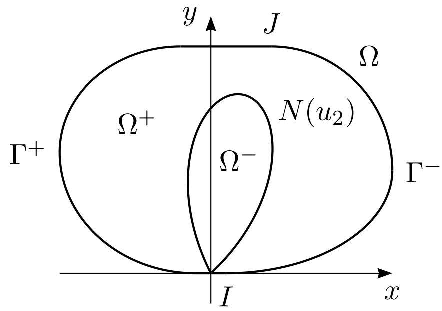
3.2 Reductio ad absurdum

I dette afsnit viser vi, at det ikke er muligt for $N(u_2)$ at skære $\partial\Omega$ i præcis ét punkt.

Sætning 3.16. *Hvis $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ er et begrænset, konvekst domæne med C^∞-rand, kan $N(u_2)$ ikke skære $\partial\Omega$ præcis én gang.*

Bevis. Antag, at $N(u_2)$ skærer $\partial\Omega$ én gang – det vil sige, at $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n}$ har ét nulpunkt på $\partial\Omega$. Vælg koordinatsystemet, således at dette nulpunkt er origo, at x-aksen er tangent til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$, og at y-aksen er den indadvendte normal til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$. Da giver lemma 3.4, at $N(u_2) \cap \partial\Omega = \{\mathbf{0}\}$. Vi antager, at $\partial\Omega^- = N(u_2)$, og $\partial\Omega^+ = N(u_2) \cup \partial\Omega$ – se figur 3.3. Endvidere er Ω^- simpelt sammenhængende, da $N(u_2)$ ellers ville dele Ω i tre disjunkte mængder, hvilket ikke er muligt ifølge Courant's nodal domain theorem.

Eftersom Ω er konveks, er de punkter på $\partial\Omega$, hvor tangenten til $\partial\Omega$ er parallel med x-aksen to lukkede liniestykker I og J. Det er muligt, at I og J, kun består af et enkelt punkt hver. Vi vælger I og J, således at $\mathbf{0} \in I$. Lad Γ^+ og Γ^- være de to mængder, der udgør $\partial\Omega \backslash (I \cup J)$. I den relative topologi induceret af $\partial\Omega$ er Γ^+ og Γ^- åbne.



Figur 3.3: Opdelingerne af Ω og $\partial\Omega$.

Lad $\boldsymbol{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være den buelængdeparametriserede parameterfremstilling for $\partial\Omega$. Per antagelse er $u_2(\boldsymbol{r}(s)) \equiv 0$, og dermed gælder der for alle $s \in I$, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u_2(\boldsymbol{r}(s)) = \nabla u_2(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{r}'(s) = 0.$$

Det vil sige, at $\nabla u_2(\boldsymbol{r}(s)) \perp \boldsymbol{r}'(s)$ for alle $s \in I$. Antag, at orienteringen af $\boldsymbol{r}$ er valgt så den udadvendte enhedsnormalvektor i punktet $\boldsymbol{r}(s)$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}(s))$, kan udregnes som $\boldsymbol{r}''(s)/|\boldsymbol{r}''(s)|$. Da $\boldsymbol{r}'(s) \perp \boldsymbol{r}''(s)$ for alle $s \in I$, er $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}(s))$ og $\nabla u_2(\boldsymbol{r}(s))$ parallelle. Fra Hopfs maksimumsprincip har vi, at $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n} < 0$ på hele $\partial\Omega$. Dermed er $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}(s)) = c(s)\nabla u_2(\boldsymbol{r}(s))$, hvor $c(s) < 0$ for alle $s \in I$. Da x-koordinaten til $\boldsymbol{n}$ er negativ på Γ^+, og positiv på Γ^-, er

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{\Gamma^+} > 0 \qquad \text{og} \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{\Gamma^-} < 0. \tag{3.22}$$

Da $\boldsymbol{n}|_{I\cup J} = (0, 1)$, har vi også, at

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{I\cup J} = 0. \tag{3.23}$$

For ethvert $t \in \mathbb{R}$ definerer vi funktionen $v_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ved

$$v_t(\boldsymbol{x}) := e^{-tx} \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{tx} u_2(\boldsymbol{x})\Big) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) + t u_2(\boldsymbol{x}).$$

Da de blandede afledte af u_2 kommuterer, er $\Delta(\partial_1 u_2) + \lambda_2 \partial_1 u_2 = 0$ i Ω. Dermed har vi også, at

$$\Delta v_t + \lambda_2 v_t = 0 \quad \text{i } \Omega. \tag{3.24}$$

Fra (3.22) ved vi, at v_t ikke er en 2. egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω. Vi har også fra (3.22), at v_t skifter fortegn på Ω for alle $t \in \mathbb{R}$. Fra (3.22) og (3.23) har vi, at $N(v_t) \cap \partial\Omega \subset I \cup J$.

Resten af beviset for sætning 3.16 er delt op i fire lemmaer vedrørende v_t, som leder til en modstrid. ■

Lemma 3.17. *For ethvert $t \in \mathbb{R}$ findes der mindst ét deldomæne $\Omega_t \subset \Omega$ med $\partial\Omega_t \subset N(v_t) \cup I \cup J$.*

Bevis. Fra punkt (iii) i lemma 3.11 ved vi, at der eksisterer et $\varepsilon > 0$, således at der for alle $\boldsymbol{x} \in N(u_2) \cap (B(\boldsymbol{0}, \varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ gælder, at

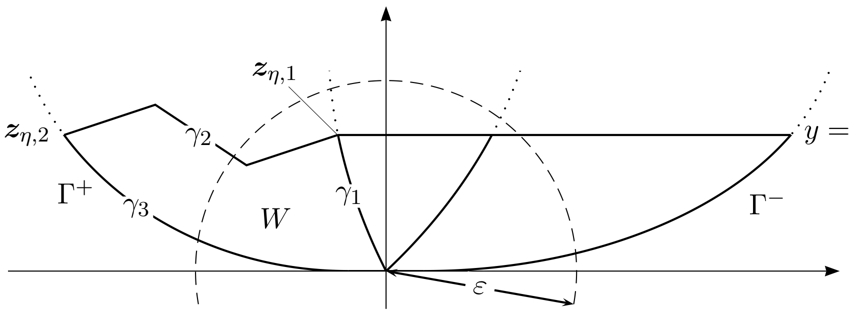
$$|u_2(\boldsymbol{x})| + \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right| = \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right| > 0. \tag{3.25}$$

Det vil sige, at $N(u_2)$ ikke er parallel med x-aksen i $B(\boldsymbol{0}, \varepsilon)$. Da Ω^- tilmed er simpelt sammenhængende, eksisterer der altså $\overline{\eta} > 0$, således at, hvis $0 < \eta \leq \overline{\eta}$, er

$$|N(u_2) \cap B(\boldsymbol{0}, \varepsilon) \cap \{\boldsymbol{x} \in \Omega : y = \eta\}| = 2$$

– se figur 3.4. Lad $\chi_\eta := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq \eta\}$. Mængden $N(u_2) \cap \chi_\eta$ består af to simple buer, der nærmer sig origo, og som har et endepunkt på linien $y = \eta$. Lad γ_1 være en af de to buer i $N(u_2) \cap \chi_\eta$, og lad $\boldsymbol{z}_{\eta,1}$ betegne γ_1's endepunkt.

Antag, at der eksisterer $t_0 \in \mathbb{R}$, således at der ikke findes et deldomæne $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ med $\partial\Omega_{t_0} \subset N(v_{t_0}) \cup I \cup J$. Det vil sige, at $N(v_{t_0}) \cup I \cup J$ ikke indeholder en lukket kurve, og $\overline{\Omega} \setminus (N(v_{t_0}) \cup I \cup J)$ består af to sammenhængende mængder $\Upsilon^+ := \{\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega} : v_{t_0}(\boldsymbol{x}) > 0\}$ og $\Upsilon^- := \{\boldsymbol{x} \in$



Figur 3.4: Den del af Ω, der betragtes i lemma 3.17.

$\overline{\Omega} : v_{t_0}(\boldsymbol{x}) < 0\}$. Både Υ^- og Υ^+ er åbne i den relative topologi induceret af $\overline{\Omega}$. Fra (3.22) har vi, at $\Gamma^+ \subset \partial\Upsilon^+$ og $\Gamma^- \subset \partial\Upsilon^-$. Vi har fra (3.25), at

$$N(v_{t_0}) \cap N(u_2) \cap (B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}) \\ = \{\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \cap \Omega : (\partial u_2/\partial x)(\boldsymbol{x}) = 0\} = \emptyset,$$

og vi kan derfor antage, at $\gamma_1 \subset \Upsilon^+$, og at $(N(u_2) \cap \chi_\eta) \setminus \gamma_1$ ikke ligger mellem Γ^+ og γ_1. Enhver relativt åben, sammenhængende mængde i $\mathbb{R}^2$ er kurvesammenhængende (se for eksempel [2, Theorem 4.43]. Denne sætning er fremsat for åbne, sammenhængende mængder i $\mathbb{R}^n$, men det ses af beviset, at resultatet også gælder for relativt åbne, sammenhængende mængder). Så der findes en kurve γ_2, som forbinder $\boldsymbol{z}_{\eta,1}$ og punktet $\boldsymbol{z}_{\eta,2} := \{\boldsymbol{x} \in \Gamma^+ : y = \eta\}$, således at $\gamma_2 \setminus \{\boldsymbol{z}_{\eta,1}, \boldsymbol{z}_{\eta,2}\} \subset (\Upsilon^+)^o$. Lad γ_3 være den lukkede delmængde af $\Gamma^+ \cup I$, der har endepunkterne $\boldsymbol{z}_{\eta,2}$ og $\mathbf{0}$. Da er $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ en simpel, lukket kurve. Ifølge Jordan kurve-sætningen findes der præcis ét begrænset domæne $W \subset \mathbb{R}^2$ med $\partial W = \gamma$. Eftersom $\partial W \subset \overline{\Omega}$, og Ω er simpelt sammenhængende, er $W \subset \Omega$. Da $v_{t_0} \geq 0$ på ∂W, er $\Gamma^- \cap \overline{W} = \emptyset$. Da Υ^- er sammenhængende, er også $\overline{W} \cap \Upsilon^- = \emptyset$, hvilket betyder, at $v_{t_0}(\boldsymbol{x}) \geq 0$ for alle $\boldsymbol{x} \in \overline{W}$. Når $v_{t_0} \geq 0$ i $\overline{W}$, er $\Delta v_{t_0} \leq 0$ i $\overline{W}$. Fra maksimumsprincippet har vi da, at $v_{t_0} > 0$ i W.

Da $\gamma_2 \setminus \{\boldsymbol{z}_{\eta,1}, \boldsymbol{z}_{\eta,2}\} \subset \Omega$, kan vi finde η_1 med $0 < \eta_1 < \eta$, således at linien $y = \eta_1$ skærer ∂W i præcis to punkter, $(x_1, \eta_1) \in \gamma_1$ og $(x_2, \eta_1) \in \gamma_3$. Per antagelse er $u_2(x_1, \eta_1) = u_2(x_2, \eta_1) = 0$, og funktionen $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) := e^{t_0 x} u_2(x, \eta_1)$ har derfor $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Rolles sætning giver os, at der findes mindst ét punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$, hvor

$$f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{t_0 x} u_2(x, \eta_1)\right)\Big|_{x=x_0} = e^{t_0 x_0} v_{t_0}(x_0, \eta_1) = 0.$$

Da $(x_0, \eta_1) \in W$, er dette i modstrid med, at $v_{t_0} > 0$ i W. ■

Vi viser nu en række elementære egenskaber vedrørende Ω_t og v_t. Til dette formål får vi brug for [9, Theorem 1].

Sætning 3.18. *[Hayman's inner radius formula] Hvis $D \subset \mathbb{R}^2$ er et begrænset, simpelt sammenhængende domæne, er*

$$\lambda_1(D) > \frac{1}{30d},$$

hvor d er radius i den største cirkel, der er indeholdt i D.

Vi har følgende egenskaber for v_t og Ω_t.

Lemma 3.19. *For alle $t \in \mathbb{R}$ gælder der følgende:*

(i) *Der findes præcis ét deldomæne $\Omega_t \subset \Omega$ med $\partial\Omega_t \subset N(v_t) \cup I \cup J$.*

(ii) *Funktionen v_t har konstant fortegn i Ω_t.*

(iii) $\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2$.

(iv) *Ω_t er simpelt sammenhængende.*

(v) *Der findes $\rho > 0$, kun afhængende af λ_2, således at Ω_t indeholder en kugle med radius ρ.*

Bevis. Lad $t \in \mathbb{R}$ være fast.

(i) Som følge af sætning 3.17, er det tilstrækkeligt at vise, at der højst findes et sådant domæne Ω_t. Beviset er ligesom beviset for Courant's nodal domain theorem: Antag, at der findes to disjunkte domæner $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ med $\partial\Omega_i \subset N(v_t) \cup I \cup J$ for $i = 1, 2$, og lad $\Omega' := \Omega_1 \cup \Omega_2$. Fra (3.22) ved vi, at $\Omega' \subsetneq \Omega$. Da $\Delta v_t + \lambda_2 v_t = 0$ i Ω_i, og $v_t \equiv 0$ på $\partial\Omega_i$ for $i = 1, 2$, er v_t en egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω'. Vi definerer funktionerne w_i for $i = 1, 2$ ved, at $w_i|_{\Omega_i} \propto v_t$, $w_i|_{\complement\Omega_i} \equiv 0$ og $\|w_i\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Vælg nu to konstanter c_1, c_2 således at $\phi := c_1 w_1 + c_2 w_2$ er normaliseret i $L^2(\Omega')$. Da $-\Delta$

er lineær, er ϕ en egenfunktion for Dirichlet-problemet på Ω', og vi får ved hjælp af en partiel integration, at

$$\mathcal{E}_{\Omega'}(\phi) = \int_{\Omega'} \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ = -\int_{\Omega'} \phi(\boldsymbol{x})\Delta\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \int_{\Omega'} \phi^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_2.$$

Fra Max-min-princippet, sætning 2.10, ved vi, at

$$\lambda_2(\Omega') = \max_{\psi \in H_0^1(\Omega')} \{\min\{\mathcal{E}_{\Omega'}(f) : f \in H_0^1(\Omega'), \\ (f,\psi)_{L^2(\Omega')} = 0, \|f\|_{L^2(\Omega')} = 1\}. \quad (3.26)$$

Ligningen $ac_1 + bc_2 = 0$ har en ikke-triviel løsning for alle $a, b \in \mathbb{R}$, og normaliseringskravet $\|\phi\|_{L^2(\Omega')} = 1$ kan altid efterleves. Det vil sige, at vi for alle $\psi \in H_0^1(\Omega')$ kan bestemme c_1, c_2, så $(\phi,\psi)_{L^2(\Omega')} = 0$, og derfor er ϕ en tilladelig funktion at benytte i (3.26). Men eftersom det ikke nødvendigvis er ϕ, der er den minimerende funktion, er

$$\lambda_2(\Omega') \leq \max_{\psi \in H_0^1(\Omega')} \{\mathcal{E}_{\Omega'}(\phi)\} = \lambda_2.$$

Ifølge korollar 2.11 er $\lambda_2(\Omega') > \lambda_2$, da $\Omega' \subsetneq \Omega$, hvilket er en modstrid.

(ii) Når vi fra (i) ved, at Ω_t er entydig, og $N(v_t) \cap \Omega_t = \emptyset$, kan v_t ikke skifte fortegn på Ω_t.

(iii) Fra (3.24) ved vi, at $\Delta v_t + \lambda_2 v_t = 0$ i Ω_t, og når v_t ikke skifter fortegn i Ω_t, giver Courant's nodal domain theorem, at v_t er den 1. egenfunktion for Ω_t. Det vil sige, at $\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2$.

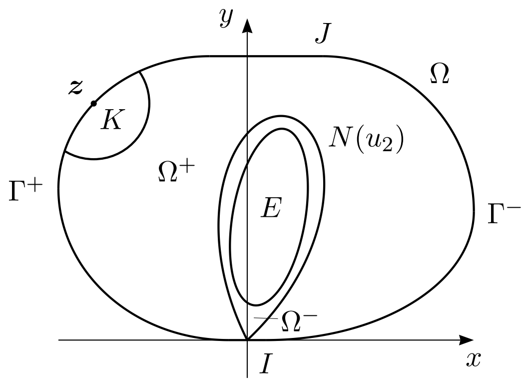
(iv) Fra (i) ved vi, at $\partial\Omega_t$ er en simpel kurve. Da $\overline{\Omega}$ er simpelt sammenhængende, og $\partial\Omega_t \subset \overline{\Omega}$, er Ω_t også simpelt sammenhængende.

(v) Dette følger af (iii), (iv) og sætning 3.18. ■

Lemma 3.20. *Der findes $C > 0$, således at $v_t < 0$ i Ω_t for alle $t > C$ og $v_t > 0$ i Ω_t for alle $t < -C$.*

Bevis. Lad $\boldsymbol{z} \in \Gamma^+$. Fra (3.22) ved vi, at $(\partial u_2/\partial x)(\boldsymbol{z}) > 0$. Dermed eksisterer der et $\delta > 0$, således at $(\partial u_2/\partial x)(\boldsymbol{x}) > 0$ for alle $\boldsymbol{x} \in K :=$

$B(\boldsymbol{z},\delta)\cap\overline{\Omega}$. Vi vælger δ så lille, at $B(\boldsymbol{z},\delta)\cap N(u_2)=\emptyset$. Da $\overline{\Omega}$ er simpelt sammenhængende, og $|\partial B(\boldsymbol{x},\delta)\cap\partial\Omega|=2$, er $\overline{\Omega}\setminus K$ også simpelt sammenhængende. Eftersom u_2 har konstant fortegn i Ω^+, og opfylder



Figur 3.5: Mængderne K og E i Ω.

$\Delta u_2+\lambda_2 u_2=0$, $u_2|_{\partial\Omega^+}\equiv 0$, er $\lambda_1(\Omega^+)=\lambda_2$. Korollar 2.11 giver os, at $\lambda_1(\Omega^+\setminus K)>\lambda_2$. Så med sætning 2.12 kan vi slutte, at der findes en kompakt mængde $E\subset\Omega^-$, således at også $\lambda_1(\Omega\setminus(K\cup E))>\lambda_2$. Definer

$$M:=\sup\left\{\left|\frac{\partial u_2}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|:\boldsymbol{x}\in\Omega\right\}\quad\text{og}\quad\alpha:=\max\{u_2(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in E\}.$$

Da $N(u_2)\cap E=\emptyset$ er $\alpha<0$. For $t>0$, har vi for alle $\boldsymbol{x}\in K$, at

$$v_t(\boldsymbol{x})=\frac{\partial u_2}{\partial x}(\boldsymbol{x})+tu_2(\boldsymbol{x})>0.$$

Da $u_2<0$ i E, har vi, at der for $t>-\alpha^{-1}M$ gælder, at

$$v_t(\boldsymbol{x})\leq M+t\alpha<0\quad\text{for }\boldsymbol{x}\in E.$$

Det vil sige, at v_t skifter fortegn på $\Omega\setminus(K\cup E)$, når $t>-\alpha^{-1}M$, og derfor at $N(v_t)\cup I\cup J\subset\overline{\Omega}\setminus(K\cup E)$. Eftersom $\overline{\Omega}\setminus K$ er simpelt sammenhængende, betyder det, at $\Omega_t\subset\Omega\setminus K$. Fra punkt (iii) i lemma 3.19 har vi derfor, at

$$\lambda_1(\Omega_t)<\lambda_1(\Omega\setminus(K\cup E)).$$

Korollar 2.11 giver, at $\Omega_t \nsubseteq \Omega \setminus (K \cup E)$. Det vil sige, at $\Omega_t \cap E \neq \emptyset$. Når $v_t < 0$ i E, har vi fra punkt (ii) i lemma 3.19, at $v_t < 0$ i Ω_t for alle $t > -\alpha^{-1}M$.

På tilsvarende vis kan vi for alle $\boldsymbol{w} \in \Gamma^-$ finde $\varepsilon > 0$, således at $(\partial u_2/\partial x)(\boldsymbol{x}) < 0$ for alle $\boldsymbol{x} \in K' := B(\boldsymbol{w}, \varepsilon) \cap \overline{\Omega}$ og $B(\boldsymbol{w}, \varepsilon) \cap N(u_2) = \emptyset$. Hvis $t < 0$, er $v_t < 0$ i K', og hvis $t < \beta^{-1}M$, hvor $\beta := \min\{u_2(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\} < 0$, er

$$v_t(\boldsymbol{x}) \geq -M + t\beta > 0 \quad \text{for } \boldsymbol{x} \in E.$$

Ligesom før har vi, at $E \subset \Omega_t$, og dermed at $v_t > 0$ i Ω_t for alle $t < \beta^{-1}M$. Vi har dermed vist lemma 3.20 med $C := \max\{|\alpha^{-1}M|, |\beta^{-1}M|\}$. ■

Lemma 3.21. *Mængderne* $A := \{t \in \mathbb{R} : v_t(\boldsymbol{x}) > 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_t\}$ *og* $B := \{t \in \mathbb{R} : v_t(\boldsymbol{x}) < 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_t\}$ *er begge lukkede.*

Bevis. Fra punkt (ii) i lemma 3.19 har vi, at $A \cup B = \mathbb{R}$. Antag, at A er åben. Der findes da en følge $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i A med $t_\infty := \lim_{n\to\infty} t_n \in B$. Det vil sige, at $v_{t_n} > 0$ i Ω_{t_n} for alle $n \in \mathbb{N}$, mens $v_{t_\infty} < 0$ i Ω_{t_∞}. Fra punkt (v) i lemma 3.19 ved vi, at der findes $\rho > 0$, så der for alle $n \in \mathbb{N}$ eksisterer $\boldsymbol{x}_n \in \Omega_{t_n}$, således at $B(\boldsymbol{x}_n, \rho) \subset \Omega_{t_n}$. Disse centre danner en følge $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\overline{\Omega}$. Da $\overline{\Omega}$ er kompakt, eksisterer der en konvergent delfølge $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ af $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, med $\boldsymbol{x}_\infty := \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_{n_k} \in \overline{\Omega}$. Der eksisterer derfor et $K \in \mathbb{N}$, således at $\boldsymbol{x}_\infty \in B(\boldsymbol{x}_{n_k}, \rho)$ for alle $k \geq K$, og derfor er $\boldsymbol{x}_\infty \in \Omega$ og $B(\boldsymbol{x}_\infty, \rho) \subset \overline{\Omega}$. Når $v_{t_{n_k}} > 0$ i $B(\boldsymbol{x}_{n_k}, \rho)$ for alle $k \in \mathbb{N}$, er $v_{t_\infty} = \lim_{k\to\infty} v_{t_{n_k}} \geq 0$ i $B(\boldsymbol{x}_\infty, \rho)$. Men, da $\Delta v_{t_\infty} \leq 0$ i $B(\boldsymbol{x}_\infty, \rho)$, og $\boldsymbol{x}_\infty \notin \partial B(\boldsymbol{x}_\infty, \rho)$, er $v_{t_\infty}(\boldsymbol{x}_\infty) > 0$ ifølge maksimumsprincippet. Antagelsen om, at $v_{t_\infty} < 0$ i Ω_{t_∞} giver, at $\boldsymbol{x}_\infty \notin \Omega_{t_\infty}$.

Da $\overline{\Omega}$ er konveks, er $\overline{\Omega}$ også kurvesammenhængende, og vi kan derfor finde en kontinuert funktion $\boldsymbol{\zeta} : [0,1] \to \overline{\Omega}$ med $\boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{x}_\infty$ og $\boldsymbol{\zeta}(1) \in \partial\Omega$. Da $\boldsymbol{x}_\infty \notin \Omega_{t_\infty}$, kan vi antage, at $\mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta}) \cap (N(v_{t_\infty}) \cup I \cup J) = \emptyset$. Da $\boldsymbol{x}_\infty \in B(\boldsymbol{x}_{n_k}, \rho) \subset \Omega_{t_k}$ for alle $k \geq K$, er $\mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta}) \cap (N(v_{t_{n_k}}) \cup I \cup J) \neq \emptyset$ for alle $k \geq K$. Det vil sige, at der findes $\boldsymbol{y}_k \in \mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta})$, hvor $v_{t_k}(\boldsymbol{y}_k) = 0$, når $k \geq K$. Af disse punkter danner vi følgen $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k=K}^{\infty}$ i $\mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta})$. Mængden $\mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta})$ er billedet af en kompakt mængde ved kontinuert funktion, og er derfor selv kompakt. Der eksisterer således en konvergent delfølge $\{\boldsymbol{y}_{k_\ell}\}_{\ell=K}^{\infty}$ af $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k=K}^{\infty}$. Grænseværdien $\boldsymbol{y}_\infty := \lim_{\ell\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_\ell} \in \mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta})$, og der gælder, at

$$v_{t_\infty}(\boldsymbol{y}_\infty) = \lim_{\ell\to\infty} v_{t_{k_\ell}}(\boldsymbol{y}_{k_\ell}) = 0.$$

Men dette er i modstrid med, at $\mathrm{Vm}(\boldsymbol{\zeta}) \cap (N(v_{t_\infty}) \cup I \cup J) = \emptyset$.

Vi kan gøre tilsvarende for B, ved at betragte en følge $\{\widetilde{t}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i B, som vi antager har $\widetilde{t}_\infty := \lim_{n\to\infty} \widetilde{t}_n \in A$. ■

Vi kan nu færdiggøre beviset for sætning 3.16: Lemma 3.20 giver os, at $A \neq \emptyset$ og $B \neq \emptyset$, og lemma 3.21 giver os, at A og B begge er lukkede. Punkt (ii) i lemma 3.19 giver os, at $A \cap B = \emptyset$, og $A \cup B = \mathbb{R}$. Men det er umuligt at skrive $\mathbb{R}$ som en disjunkt forening af to lukkede, ikke-tomme mængder.

Sætning 3.15 og sætning 3.16 giver sætning 1.2:

Sætning 1.2. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et begrænset, konvekst domæne med C^∞-rand. Da gælder formodning 1.1.*

4 Forbedrede resultater

I dette kapitel forbedrer vi resultatet i sætning 1.2, således at $\partial\Omega$ ikke behøver at være C^∞. Der, hvor kravet om, at $\partial\Omega$ skal være C^∞ er nødvendigt, er i lemma 3.11. Lemma 3.11 bliver brugt til at vise lemma 3.17 og i [16] bliver det også brugt til at vise resultatet i sætning 3.15. Dog ses det af beviset for sætning 3.15, at resultatet gælder, hvis $\partial\Omega$ er $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, da det ikke kræver højere regularitet at anvende apriori estimatet i sætning 3.12. Forskellen i beviset for sætning 3.15 er, at vi i den kontinuerte deformation $t \mapsto \Omega(t)$ for $t \in [0,1]$ kræver, at $\Omega(t)$ er et konvekst domæne med $C^{2,\alpha}$-rand for alle $t \in [0,1]$. Vi har dermed:

Sætning 4.1. *Lad $0 < \alpha \leq 1$. Antag, at $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ er et begrænset, konvekst domæne med $C^{2,\alpha}$-rand, hvor formodning 1.1 ikke gælder. Da findes der et begrænset, konvekst domæne $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ med $C^{2,\alpha}$-rand, hvor $\partial u_2(\Omega_0)/\partial \boldsymbol{n}$ har præcis ét nulpunkt på $\partial\Omega_0$.*

Vi viser nu resultatet i lemma 3.17 når $\partial\Omega$ har lavere regularitet end C^∞. Det, der her stiller krav til randen, er Hopfs maksimumsprincip. Vi antager derfor, at $\partial\Omega$ er C^2. Fra sætning 2.6 har vi da, at $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi betragter funktionen $v_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$v_t(\boldsymbol{x}) := e^{-tx}\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{tx}u_2(\boldsymbol{x})\Big) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) + tu_2(\boldsymbol{x}).$$

Når $\partial\Omega$ er C^2 har vi fra (3.22) og (3.23), at $N(v_t) \cap \partial\Omega \subset I \cup J$. Vi har valgt koordinatsystemet, således at $\{\mathbf{0}\} = N(u_2) \cap \partial\Omega$, og y-aksen er den indadvendte normal til $\partial\Omega$ i $\mathbf{0}$.

Lemma 4.2. *Lad $\partial\Omega$ være C^2. For alle $t \in \mathbb{R}$ findes der mindst ét deldomæne $\Omega_t \subset \Omega$ med $\partial\Omega_t \subset N(v_t) \cup I \cup J$.*

Bevis. Lad $t \in \mathbb{R}$ være fast. Lad $[0, y_\Omega]$ være projektionen af $\overline{\Omega}$ på y-aksen og lad $[0, y_N]$ være projektionen af $N(u_2)$ på y-aksen. For $y \in (0, y_\Omega)$ lader vi $x_{y,\Gamma^+} < x_{y,\Gamma^-}$ være elementerne i mængden $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \partial\Omega\}$. Da $\overline{\Omega}$ er konveks, er $L((x_{y,\Gamma^+}, y), (x_{y,\Gamma^-}, y)) \subset \overline{\Omega}$. For alle $y \in (0, y_\Omega)$ definerer vi funktionen $f_y^t : [x_{y,\Gamma^+}, x_{y,\Gamma^-}] \to \mathbb{R}$ ved $f_y^t(x) := e^{tx}u_2(x, y)$.

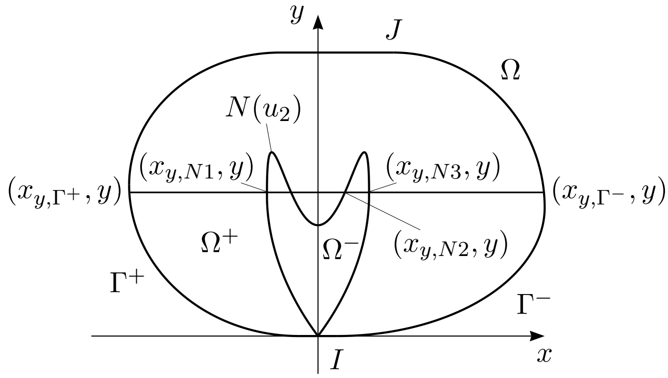
For $y \in (0, y_N)$ er $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in N(u_2)\} \neq \emptyset$. Hvis $|\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in N(u_2)\}| = 2$, benæver vi de to elementer $x_{y,N1}$ og $x_{y,N2}$. Er $|\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in N(u_2)\}| > 2$, ser $N(u_2)$ for eksempel ud som på figur 4.1. I dette tilfælde vælger vi tre elementer $x_{y,Ni} \in \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in N(u_2)\}$, $i = 1, 2, 3$, med $x_{y,N1} < x_{y,N2} < x_{y,N3}$, således at f_y^t har konstant fortegn på $(x_{y,\Gamma^+}, x_{y,N1})$, $(x_{y,N2}, x_{y,N3})$ og $(x_{y,N3}, x_{y,\Gamma^+})$. For at behandle begge situationer samtidig, benytter vi, i tilfældet hvor $|\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in N(u_2)\}| = 2$, konventionen $x_{y,N1} = x_{y,N2}$. For $i = 1, 2, 3$ er

$$f_y^t(x_{y,\Gamma^+}) = f_y^t(x_{y,Ni}) = f_y^t(x_{y,\Gamma^-}) = 0.$$

Rolles sætning giver os, at der findes x_y^1, x_y^2, x_y^3, som opfylder, at

$$x_{y,\Gamma^+} < x_y^1 < x_{y,N1} \leq x_{y,N2} < x_y^2 < x_{y,N3} < x_y^3 < x_{y,\Gamma^-},$$

og $(f_y^t)'(x_y^i) = e^{tx_y^i}v_t(x_y^i, y) = 0$, for $i = 1, 2, 3$. Fra sætning 2.9 har vi, at $\gamma_i := \{(x_y^i, y) : y \in (0, y_N)\}$ er en kontinuert kurve, som ikke stopper i Ω. For $y \in (0, y_\Omega) \setminus (y_N', y_N'')$ er vi på samme måde sikret eksistensen af et enkelt punkt $\widetilde{x}_y \in (x_{y,\Gamma^+}, x_{y,\Gamma^-})$, hvor $v_t(\widetilde{x}_y, y) = 0$.



Figur 4.1: De nulpunkter for f_y^t, der betragtes i beviset.

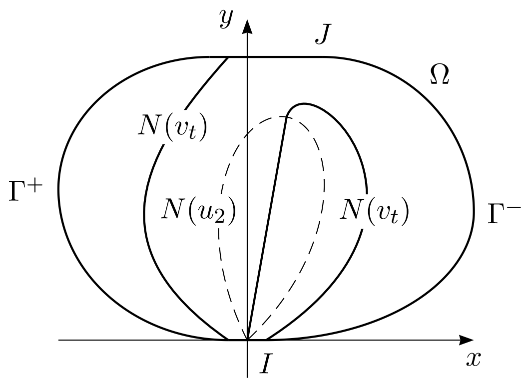
Lad $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \subset N(v_t)$ være fortsættelserne af de tre kurver γ_1, γ_2 og γ_3. Det vil sige, at ζ_i er kontinuert, og $\gamma_i \subset \zeta_i \cap \{\boldsymbol{x} \in N(v_t) : y \in (0, y_N)\}$ for $i = 1, 2, 3$. Vi har også, at $\zeta_i \cap I \neq \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$. Der er to muligheder for $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$:

- For $i \neq j$ er $\zeta_i \cap \zeta_j = \emptyset$. Men hver af kurverne skærer I og J én gang, eller I to gange. I dette tilfælde eksisterer Ω_t.
- Der findes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ med $i \neq j$, så $\zeta_i \cap \zeta_j \neq \emptyset$. Da $\zeta_i \cap I \neq \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$, eksisterer Ω_t også her.

Vi er altså i begge situationer sikre på, at Ω_t eksisterer. ∎

Bemærkning 4.3. *Vi kunne i beviset for lemma 4.2 have nøjedes med at arbejde med to af kurverne γ_1, γ_2 og γ_3. Grunden til at inddrage tre kurver var for her at demonstrere, at vi er ikke sikret eksistensen af to deldomæner $\Omega_t^1, \Omega_t^2 \subset \Omega$ med $\partial\Omega_t^i \subset N(v_t) \cup I \cup J$ for $i = 1, 2$. Et eksempel på $N(v_t)$, hvor vi kun har ét deldomæne Ω_t ses på figur 4.2.*

Det er muligt, at man kan slække yderligere på regularitetskravet for $\partial\Omega$ i sætning 4.2. Eksempelvis kræver Hopfs maksimumsprincip ikke, at $\partial\Omega$ er C^2, men at $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n}$ er defineret overalt på $\partial\Omega$. Her undersøger vi dog ikke, hvor lav en regularitet, vi kan nøjes med, da sætning 4.1 kræver $C^{2,\alpha}$-regularitet. Lemma 3.19 og lemma 3.21 stiller ikke nogen krav til regulariteten af $\partial\Omega$. I beviset for lemma 3.20 benyttes Hopfs maksimumsprincip til at vurdere fortegnet for $\partial u_2/\partial x$ på $\partial\Omega$, så her



Figur 4.2: En knudelinie for v_t som ikke er i modstrid med lemma 4.2, og hvor Ω_t er entydig.

kræver vi også, at $\partial\Omega$ er C^2. Vi har derfor:

Sætning 4.4. *Hvis $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ er et begrænset, konvekst domæne med C^2-rand, kan $\partial u_2/\partial \boldsymbol{n}$ ikke have præcis et nulpunkt på $\partial\Omega$.*

Ved hjælp af sætning 4.1 og sætning 4.4, har vi følgende sætning, som er en forbedring af Melas' resultat.

Sætning 4.5. *Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et begrænset, konvekst domæne med $C^{2,\alpha}$-rand, hvor $0 < \alpha \leq 1$. Da gælder formodning 1.1.*

5 Konklusion

I mit speciale har jeg arbejdet med Lapace-operatorens egenfunktioner. Indledningsvist har jeg vist en række resultater vedrørende spektret og egenfunktionerne for Laplace-operatoren.

Den primære del af specialet har omhandlet Paynes formodning om, at knudelinien for Laplace-operatoren 2. egenfunktion ikke kan være en lukket kurve, hvis Ω er et begrænset domæne. Med udgangspunkt i [16], har jeg vist, at formodningen er sand, hvis Ω er konveks, og har en glat rand. Beviset for dette hovedresultat i [16] bygger på to sætninger. Den første af disse sætninger siger, at hvis $\partial\Omega$ er tilstrækkelig regulær og Paynes formodning ikke gælder, så findes et domæne, hvis rand har samme regularitet, og hvor knudelinien skærer $\partial\Omega$ i præcis et punkt. Den anden af de to sætninger siger, at et sådant domæne ikke eksisterer.

I [16] benyttes der i beviset for de to nævnte sætninger et teknisk lemma, som kræver, at $\partial\Omega$ er C^∞. I det sidste kapitel i specialet er de to ovenfor nævnte sætninger bevist uden dette tekniske lemma. Det er på denne baggrund lykkedes mig at vise sætningerne, når $\partial\Omega$ er henholdsvis C^2 og $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ og Ω er konveks. Dermed er hovedresultatet i [16] vist i tilfældet, hvor $\partial\Omega$ er $C^{2,\alpha}$.

Appendix A

A.1 Courant's nodal domain theorem

Sætning A.1. *[Courant's nodal domain theorem] Lad egenværdierne λ_n, $n \in \mathbb{N}$ for Dirichlet-problemet på en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være ordnet, så $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$. Da deler $N(u_n))$ Ω i højst n disjunkte delmængder.*

Bevis. Antag modsætningsvist, at $N(u_n)$ deler Ω i mere end n domæner, $\Omega_1, \ldots, \Omega_n, \Omega_{n+1}, \ldots$, og lad $\Omega' := \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \subsetneq \Omega$. Definer $w_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ved, at $w_i|_{\Omega_i} \propto u_n$, $w_i|_{\complement\Omega_i} \equiv 0$, og $\|w_i\|_{L^2(\Omega)} = \|w_i\|_{L^2(\Omega_i)} = 1$. Vælg konstanter $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, således at funktionen $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ defineret ved $\phi := \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ opfylder, at $\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\phi\|^2_{L^2(\Omega')} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1$. Vi har et Dirichlet-problem på Ω', da

$$\begin{aligned} \Delta\phi + \lambda_n \phi &= 0 \qquad \text{i } \Omega', \\ \phi &= 0 \qquad \text{på } \partial\Omega'. \end{aligned}$$

Egenværdierne for Dirichlet-problemet på Ω' har vi i (2.3) defineret ved hjælp af funktionalet $\mathcal{E}_{\Omega'}(\phi) := \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega')}$. Da $\phi \in H^1_0(\Omega')$, kan vi foretage partiel integration:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\Omega'}(\phi) &= \int_{\Omega'} \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\nabla\phi(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= -\int_{\Omega'} \phi(\boldsymbol{x})\overline{\Delta\phi(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_n \int_{\Omega'} |\phi(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_n.\end{aligned}$$

Fra Max-min-princippet, sætning 2.10, ved vi, at

$$\begin{aligned}\lambda_n(\Omega') = \max_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}\in H_0^1(\Omega')} &\min\{\mathcal{E}_{\Omega'}(\phi_n) : \phi_n \in H_0^1(\Omega'), \\ &\|\phi_n\|_{L^2(\Omega')} = 1, (\phi_n, \phi_k)_{L^2(\Omega')} = 0, k = 1, \ldots, n-1\}. \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

Det er tilladeligt at benytte $\phi_n = \phi$, da kravet $(\phi, \phi_k)_{L^2(\Omega')} = 0$, for $k = 1, \ldots, n-1$, er kravet om en ikke-triviel løsning til det homogene ligningssystem

$$\begin{aligned}0 &= (\phi, \phi_1)_{L^2(\Omega')} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(w_i, \phi_1)_{L^2(\Omega_i)}\,, \\ &\vdots \\ 0 &= (\phi, \phi_{n-1})_{L^2(\Omega')} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(w_i, \phi_{n-1})_{L^2(\Omega_i)}\,,\end{aligned}$$

med flere variable end ligninger, hvilket altid er opfyldt. Men da det ikke nødvendigvis er ϕ, der minimerer $\mathcal{E}_{\Omega'}(\cdot)$, har vi, at

$$\lambda_n(\Omega') \leq \max\left\{\mathcal{E}_{\Omega'}(\phi) : \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in H_0^1(\Omega')\right\} = \lambda_n(\Omega).$$

Fra korollar 2.11 ved vi imidlertid, at, når $\Omega' \subsetneq \Omega$, er $\lambda_n(\Omega') > \lambda_n(\Omega)$, og vi har derfor opnået en modstrid. Det vil sige, at $N(u_n)$ deler Ω i højst n deldomæner. ■

A.2 Vurdering af analytiske funktioner

For analytiske funktioner af én variabel er udregningerne i dette afsnit oplagte. I forbindelse med lemma 3.11, får vi brug for store-O estimater af en analytisk funktion af to variable. I dette afsnit eftervises disse estimater. For resultater vedrørende reelle analytiske funktioner af såvel en som flere variable, henvises der til [13].

Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ være et domæne med C^∞-rand, og antag, at $\mathbf{0} \in \overline{\Omega}$. Lad $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ være en analytisk funktion, med $D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{0}) = 0$ for $|\boldsymbol{\alpha}| \leq m \in \mathbb{N}$. Der eksisterer altså $r > 0$, således at

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n-k} y^k \quad \text{for } \boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, r) \cap \overline{\Omega}. \tag{A.2}$$

Det vil sige, at (A.2) specielt er absolut konvergent i punktet $(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)^n < \infty.$$

Så, da $x^{n-k} y^k \leq \max\{|x|, |y|\}^n \leq \sqrt{x^2 + y^2}^n = |\boldsymbol{x}|^n$, gælder der for alle $\boldsymbol{x}$ med $|\boldsymbol{x}| \leq r/\sqrt{2}$, at

$$f(\boldsymbol{x}) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} |\boldsymbol{x}|^n \leq \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)^n < \infty. \tag{A.3}$$

Når vi er sikret konvergensen af den første række i (A.3), har vi vurderingen

$$f(\boldsymbol{x}) \leq |\boldsymbol{x}|^m \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} |\boldsymbol{x}|^{n-m} = O(|\boldsymbol{x}|^m) \quad \text{for } |\boldsymbol{x}| \to 0.$$

De partielle afledte af f har samme konvergensradius som f, og

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=\alpha_2}^{n-\alpha_1} a_{n,k} (n-k) \cdots (n-k-\alpha_1+1) x^{n-k-\alpha_1} \\ k \cdots (k-\alpha_2+1) y^{k-\alpha_2}.$$

Vi får på samme måde som før, at $D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^b)$ for $|\boldsymbol{x}| \to 0$, hvor $b := \max\{0, m - |\boldsymbol{\alpha}|\}$.

Litteratur

[1] Giovanni Alessandrini. Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains. *Comment. Math. Helvetici*, 69:142 – 154, 1994.

[2] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis, second edition.* Addison-Wesley, 1974.

[3] N. Aronszajn. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl*, 36:235 – 249, 1957.

[4] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag, 1995.

[5] Richard Courant and David Hilbert. *Methods of Mathematical Physics I.* Interscience Publishers, New York, 1953.

[6] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* AMS, 1998.

[7] Søren Fournais. The nodal surface of the second eigenfunction of the laplacian in $\mathbb{R}^D$ can be closed. *Journal of Differential Equations*, 173(1):145 – 159, 2001.

[8] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2. edition.* Springer-Verlag, 1983.

[9] W. K. Hayman. Some Bounds for Principal Frequency. *Applicable Analysis*, 7:247 – 254, 1978.

[10] Günter Hellwig. *Partial Differential Equations An Introduction.* Blaisdell Publishing Company, 1964.

[11] Jürgen Jost. *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 2002.

[12] Steven G. Krantz and Steven R. Bell. Smoothness to the boundary of conformal maps. *Rocky Mountain J. Math.*, 17(1):23 – 40, 1987.

[13] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *A Primer of Real Aanlytic Functions.* Birkhäuser Verlag, 1992.

[14] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis, second edition.* AMS, 2001.

[15] Chang-Schou Lin. On the Second Eigenfunctions of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$. *Commun. Math. Phys.*, 111:161 – 166, 1987.

[16] Antonios D. Melas. On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$. *J. Differential Geom.*, 35:255 – 263, 1992.

[17] Lawrence E. Payne. Isoperimetric Inequalities and Their Applications. *SIAM Review*, 9:453 – 488, 1967.

[18] Lawrence E. Payne. On Two Conjectures in the Fixed Membrane Eigenvalue Problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 24:720 – 729, 1973.

[19] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer-Verlag, 1984.