

# Knudelinjen for en anden Dirichlet-egenfunktion over pæne områder i $\mathbb{R}^2$

Af Louis Pedersen og Ann-Eva Christensen

Juni 2007

  
**AALBORG UNIVERSITET**  
Institut for Matematiske Fag





**Titel:**

Knudelinjen for en anden Dirichlet-egenfunktion over pæne områder i  $\mathbb{R}^2$

**Tema:**

Anvendt Matematik Analyse,

**Projektperiode:**

Mat6, foråret 2007

**Projektgruppe:**

G4-107

**Gruppemedlemmer:**

Ann-Eva Christensen

Louis Pedersen

**Vejleder:**

Thomas Østergaard Sørensen

**Kopier:** 7

**Antal sider:** 76

**Synopsis:**

Målet med denne rapport er at uddybe resultatet og bevisførelsen i [Melas, 1992]. Heri bevises, at knudelinjen for en anden egenfunktion til Laplace-operatoren (over et konvekst, begrænset område med glat rand), skærer randen i præcist to punkter. Derfor gives en grundig indførsel af de aktuelle egenverdier, eksistensen af tilhørende egenfunktioner bevises, og regulariteten af disse egenfunktioner diskuteres. Ydermere indføres knudelinjen for egenfunktionerne, og dennes skæring med randen karakteriseres. Desuden bevises relevante maksimumsprincipper for visse elliptiske differential-operatorer, herunder en version af Hopfs randpunktlemma. Desuden gives et bevis for Courants knudelinjesætning, og Haymans sætning om indre radius. Afslutningsvist bevises hovedsætningen fra [Melas, 1992].



# Forord

Dette speciale er udarbejdet af gruppe G4-107 i forbindelse med projektforløbet på gruppens 6. semester ved Institut for Matematiske Fag på Aalborg Universitet i perioden 1. februar til 6. juni 2007. Vi retter en tak til vores vejleder Thomas Østergaard Sørensen, Institut for Matematiske Fag på Aalborg Universitet, for hans engagement samt et godt og lærerigt samarbejde. Desuden har vi sat pris på vores medstuderendes hjælpsomhed med såvel praktiske, f.eks.  $\LaTeX$ , og faglige bump på vejen.

Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet den 6. juni 2007.

---

Louis Pedersen

---

Ann-Eva Christensen

# Indhold

0.1. Abstract . . . . .	1
0.2. Indledning . . . . .	3
0.3. Notation og begreber . . . . .	4
<b>1. Introduktion til Dirichlet-problemet</b>	<b>7</b>
1.1. Egenverdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$ . . . . .	7
1.1.1. Definition af egenverdier . . . . .	7
1.1.2. Egenfunktionerne kan antages at være reelle . . . . .	8
1.1.3. Eksistensen af den første egenfunktion . . . . .	10
1.1.4. Eksistensen af de højere egenfunktioner . . . . .	11
1.1.5. Min-max/max-min-principper . . . . .	15
1.2. Regularitet af egenfunktioner . . . . .	17
1.3. Egenverdier som funktioner af området . . . . .	19
1.3.1. Monotoniprincip for egenverdier mht. områder . . . . .	19
1.3.2. Haymans sætning om indre radius . . . . .	20
<b>2. Partielle differential-uligheder</b>	<b>26</b>
2.1. Maximumsprincipper . . . . .	26
2.1.1. Hopfs randpunkt-lemma . . . . .	32
<b>3. Egenfunktioner og knudelinjer</b>	<b>35</b>
3.1. Courants knudelinjesætning . . . . .	36
3.2. Lemmaer til hovedsætning . . . . .	40
3.2.1. Egenfunktioner og knudelinjers opførsel nær randen . . . . .	40
3.2.2. Karakterisering af rand - knudelinje skæringer . . . . .	48
3.2.3. Kriterium for entydighed af den anden egenfunktion . . . . .	50
<b>4. Hovedsætningen</b>	<b>56</b>
4.1. Dirichlet-problemet på cirklen . . . . .	56
4.2. Beviset for udsagn (A) . . . . .	59
4.3. Beviset for udsagn (B) . . . . .	60
4.4. Bevis for hovedsætningen . . . . .	69
<b>5. Konklusion</b>	<b>70</b>

<b>A. Appendices</b>	<b>72</b>
A.1. Den første egen værdi er simpel . . . . .	72
A.2. Laplaceoperatoren i polære koordinater . . . . .	73
A.3. Svage grænser er entydige . . . . .	74
<b>Litteratur</b>	<b>75</b>





## 0.1. Abstract

This paper is written by Ann-Eva Christensen and Louis Pedersen, during the authors sixth semester of mathematics at the Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, as a thesis in the field of Applied Mathematical Analysis. The writing period ran from february 1. to june 6., 2007. The associated mentor guiding the project was Thomas Østergaard Sørensen, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University.

This thesis revolves around an article written by Antonio D. Melas ([Melas, 1992]) in the year 1992. The main result in [Melas, 1992] article, is the following: The nodal line for a second eigenfunction of the laplacian with zero boundary conditions intersects the boundary of a convex bounded domain, with smooth boundary, in precisely two points.

The goal of this thesis is to elaborate on the techniques, arguments and results used during the proof of this theorem. These span several mathematical disciplines, and therefore the reader will not only get proofs of many needed results, but also useful references to relevant litterature for possible further study.

This paper contains a short introduction to the history of the classical Dirichlet-problem, and a thorough statement of the eigenvalue- and eigenfunction-problem for the laplacian defined on an open domain of finite lebesgue-measure in  $\mathbb{R}^2$  - in this paper referred to as the Dirichlet problem. Also most of the results are stated and proved for  $\mathbb{R}^2$ , but generalizations are possible, and if needed the reader should be able to extract useful information for other dimensions. At least if the references to the litterature are explored. During the paper we prove the existense of eigenvalues and eigenfunction for the Dirichlet problem, and establish results about the connection between the eigenvalue equation  $\Delta u + \lambda u = 0$  and the definition of eigenvalues as variational problems. Furthermore other results regarding the behaviour of egenvalues are discussed.

This paper also contains a brief discussion of the regularity of egenfunctions (and to some extent other solutions to elliptic partial differential equations). References regarding this subject are made, since the proofs are omitted.

The regularity leads to proving maximum-principles in the forms needed for the main theorem. This includes useful versions of a generic maximum-principle and versions of Hopfs Boundary Point Lemma, much needed in the further study of [Melas, 1992].

Another classic result proven in this text is the Courant Nodal Line Theorem, which is a pivotal point. As an added bonus of the Courant Nodal Line Theorem a proof that the first Dirichlet eigenvalues is simple is quite easy and therefore added in the appendices in the back.

We also prove the Hayman Inner Radius Theorem, which bounds a geometrical

## 0.1 Abstract

---

property, specifically the largest disc contained in a domain, with the first eigenvalue of the domain. The proof of Haymans inner radius theorem uses a version of Wirtingers Inequality which is therefore also proven in the paper.

We conclude the paper by informing the reader about, and referring to, later and similar results. Of course several relevant subjects are not fully elaborated in this paper. Therefore we sum up which topics, should be considered suited for further study.

## 0.2. Indledning

Det klassiske Dirichlet-problem er et gammelt matematisk problem, hvoraf relaterede problemer stadig optager matematikere. Mange matematiske problemer er fysisk motiveret, og det klassiske Dirichlet-problem blev formuleret af Dirichlet (1805-1859)<sup>1</sup> i 1830'erne, som følge af hans studie af stabiliteten af solsystemet. Det klassiske Dirichlet-problem er problemet at finde en funktion, der er harmonisk på et områdes indre, opfyldende givne randbetingelse - f.eks. find  $u$  så  $\Delta u = 0$  på  $\Omega$  åben, og  $u = f$  på  $\partial\Omega$  (Dette kan omskrives til problemet  $\Delta u = g$  på  $\Omega$  og  $u = 0$  på randen.)<sup>2</sup>

Dette modellerer en række fysiske problemer, f.eks. temperaturen i et objekt ved varmeveksling med omgivelserne, hvor randens temperatur er fastholdt, eller hvordan en membran over et område svinger, når den er fæstnet til randen af området. Fysiske problemer søges ofte løst ved minimering af det pågældende systems energi. Dette motiverer Dirichlets løsningsforslag til Dirichlet-problemet, som netop benytter variationsregning, og søger at minimere et integral på formen  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2$  over funktioner med  $u = f$  på  $\partial\Omega$ .

Førhen antog man blot eksistensen af en løsning, dvs. man overså at det pågældende infimum ikke nødvendigvis var et minimum. Dette blev udbedret af Hilbert omkring år 1900, der beviste eksistensen af løsninger (også ved hjælp af variationsregning) under passende forudsætninger på området, randen og funktionerne, der minimeres over. Dirichlet-problemet var i mellemtiden genstand for diskussion, med mod-eksempler og udbedrede løsningsmodeller<sup>3</sup>.

Relationen mellem det klassiske Dirichlet-problem og emnet for denne rapport er, at vi indfører såkaldte egenværdier  $\lambda$  og egenfunktioner  $u$  som hhv. minimum af et vist funktionale, og minimerende funktioner. Disse vises at opfylde

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

og sammenhængen med klassiske Dirichlet ses her. Dette kaldes i denne rapport for Dirichlet-problemet.

<sup>1</sup>For yderligere information om Dirichlet, se [O'Connor and Robertson, 2000].

<sup>2</sup>Egentlig kunne man mere generelt formulere Dirichlet-problemet som: „Find en funktion der opfylder en givet partial differential ligning og en givet randbetingelse“.

<sup>3</sup>For en mere detaljeret gennemgang af Dirichlet-problemets historiske udvikling med en tilhørende beskrivelse af de brugte løsningsmetoder se evt. side 277 og frem i [Kellogg, 1929]

### 0.3. Notation og begreber

Følgende notationer og koncepter anvendes igennem rapporten:

- Topologien der lægges på  $\mathbb{R}^n$  er altid den almindeligt brugte metriske topologi, defineret ud fra den euklidiske afstand.
- En åben kugle med radius  $r$  omkring et punkt  $\mathbf{x}$  skrives  $B_r(\mathbf{x})$ .
- Randen af en mængde  $A$ , noteret som  $\partial A$ , defineres ved<sup>4</sup>:

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^0, \quad (0.3.1)$$

hvor  $\overline{A}$  er aflukningen af  $A$  og  $A^0$  betegner mængden af indre punkter af  $A$ .

- For en mængde  $A$  i  $\mathbb{R}^n$  menes der med  $|A|$  Lebesgue-målet i  $\mathbb{R}^n$  af  $A$ .
- Såfremt andre mål ikke er nævnt, da er det benyttede mål Lebesgue-målet.
- Medmindre andet anføres da betegner  $\Omega$  altid åben delmængde af  $\mathbb{R}^n$ .
- Desuden benyttes funktionsrummet bestående af uendeligt ofte differentiable (i klassisk forstand) funktioner, over  $\Omega$ ;  $C^\infty(\Omega)$ .
- Med betegnelsen glat menes at være i et passende  $C^\infty$ -rum.
- Vi skriver  $C_0^\infty(\Omega)$  om funktioner i  $C^\infty(\Omega)$ , der ydermere har kompakt støtte indeholdt i  $\Omega$ <sup>5</sup>.
- En funktion  $f$  siges at ligge i  $C_{loc}^{1,\alpha}$  hvis der eksisterer en konstant  $C_K$  for alle kompakte mængder  $K$ , så

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha,$$

og  $f$  kaldes lokalt Hölder-kontinuert af orden  $\alpha$ .

- Vi skriver  $C^{k,\alpha}(\Omega)_{loc}$  om de funktioner der er lokalt Hölder-kontinuerte af orden  $\alpha$ , og har op til og med  $k$ 'te ordens afledte der er Hölder-kontinuerte af orden  $\alpha$ .
- Med  $D'$  menes rummet af distributioner, dvs. kontinuerte lineære funktioner på rummet af testfunktioner - se [Lieb and Loss, 2001, Chapter 6 - Distributions].

<sup>4</sup>Alternativt  $\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}$ .

<sup>5</sup>Støtten for en funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  er defineret som  $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$

**Funktionsrum**

Det viser sig, at det naturlige rum at arbejde i, for randværdien konstant nul for partielle differentiaalligninger på  $\Omega$ , er aflukningen af  $C_0^\infty(\Omega)$  i såkaldt  $H^1$ -norm som nedenfor.

**Definition 1.** For  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  så lad

$$H^1(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in L^2(\Omega), \partial_i f \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\},$$

hvor  $\partial_i$  betegner den  $i$ 'te svage afledte<sup>6</sup>. ◇

Rummet  $H^1(\Omega)$  er et Hilbertrum med det indre produkt  $(f, g)_{H^1(\Omega)} := (f, g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (\partial_i f, \partial_i g)_{L^2(\Omega)}$ . Hermed haves normen

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = (\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla f\|_{L^{2n}(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Se eventuelt [Lieb and Loss, 2001] afsnit 7.1-7.5 for yderligere uddybning.

Resultatet i [Lieb and Loss, 2001, 7.6 Theorem samt "remarks" side 174], er at  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  er tæt i  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , men dette gælder ikke generelt for  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Vi indfører nu rummet  $H_0^1(\Omega)$ , som værende  $C_0^\infty(\Omega)$  aflukket mht. tidligere nævnte  $H^1$ -norm. Dermed er  $H_0^1(\Omega)$  et lukket underrum af  $H^1(\Omega)$  per følgende argument: Hvis  $f, g \in H_0^1(\Omega)$ , dvs. både  $f$  og  $g$  kan approksimeres henholdsvis med følger  $\{f_n\}$  og  $\{g_n\}$  fra  $C_0^\infty(\Omega)$  da kan  $af + bg$  approksimeres med følgen  $\{af_n + bg_n\} \in C_0^\infty(\Omega)$ . Dette ses vha. trekantsuligheden, og  $af + bg$  er derfor også i  $H_0^1(\Omega)$ . Dermed er  $H_0^1(\Omega)$  et Hilbert-rum i sig selv, med samme indre produkt og norm som  $H^1(\Omega)$ .

Vi indfører endnu et funktionsrum, da dette rum benyttes i visse referencer.

**Definition 2.**

$$D^1(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \in L_{loc}^1(\Omega), \partial_i f \in L^2(\Omega), \\ i = 1, \dots, n, \forall a > 0, |\{x : f(x) > a\}| < \infty\},$$

igen med afledte i svag forstand. ◇

Dermed for  $|\Omega| < \infty$  gælder  $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega) \subseteq D^1(\Omega)$ , da  $f \in L^2(\Omega)$  medfører  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  ved Hölders ulighed.

<sup>6</sup>Se f.eks [Lieb and Loss, 2001, side 172] - bemærk  $H^1(\Omega)$  i litteraturen også er Sobolev-rummet  $W^{1,2}(\Omega)$

**Svag konvergens** Ved svag konvergens i  $D^1(\Omega)$  forstås, at  $f_j \rightharpoonup f$  i  $D^1(\Omega)$  hvis  $\partial_i f_j \rightharpoonup \partial_i f$  i  $L^2(\Omega)$  for  $i = 1, \dots, n$ .

Svag konvergens er et centralt begreb, så følgende overvejelser vil blive brugt. Der gælder at  $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ . Lad nu  $T$  være et lineært og begrænset funktional på  $L^2(\Omega)$  (Dvs.  $T \in L^2(\Omega)^*$ ). Dette betyder, at for alle  $\psi \in L^2(\Omega)$ , så gælder  $|T\psi| \leq C \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$ . Dermed gælder dette i særdeleshed også for  $\psi \in H^1(\Omega)$  og dermed for alle  $\psi \in H^1(\Omega)$  gælder, at  $|T\psi| \leq C \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$ . Dermed er et lineært, begrænset funktional på  $L^2(\Omega)$  også et lineært, begrænset funktional på  $H^1(\Omega)$  og  $H_0^1(\Omega)$  - dvs.  $(H_0^1)^*(\Omega) \supseteq (H^1)^*(\Omega) \supseteq (L^2)^*(\Omega)$ . Hermed haves at  $\psi_j \rightharpoonup \psi_0$  i  $H_0^1(\Omega)$  medfører  $\psi_j \rightharpoonup \psi_0$  i  $H^1(\Omega)$  og i  $L^2(\Omega)$ .

Hvis vi støtter os til [Lieb and Loss, 2001, side 141] mht. definitionen af  $H^1(\Omega)$ , så har vi, at svag konvergens i  $H^1(\Omega)$  her netop defineres som, at  $\psi_j$  konvergerer svagt mod  $\psi_0$  hvis  $\psi_j \rightharpoonup \psi_0$  i  $L^2(\Omega)$  og  $\partial_i \psi_j \rightharpoonup \partial_i \psi_0$  i  $L^2(\Omega)$  for  $i = 1, \dots, n$ . Herefter viser resultatet i [Lieb and Loss, 2001, side 165-166 og 6.24 Theorem], at dette er ækvivalent med den normale definition af svag konvergens vha. lineære kontinuerte funktionaler. Vi ser specielt fra [Lieb and Loss, 2001, 6.24 Theorem] at svag konvergens i  $L^2(\Omega)$  medfører svag konvergens i  $H^1(\Omega)$ .

# 1. Introduktion til Dirichlet-problemet

I denne rapport vises, at knudelinjen for en anden egenfunktion til Laplace-operatoren, defineret på et konvekst og begrænset område, skærer randen i præcist to punkter. Vi arbejder med egenfunktioner der er nul på randen af området. Man kan tænke på problemet, som beskrivende at knudelinjen tilhørende den første overtone, af et tilpas pænt trommeskind, skærer randen i to punkter. Kapitlet giver en grundig indførsel af Dirichlet-egenværdier og egenfunktioner med baggrund i variationsregning. Derefter vises, at disse kan opstilles i en egenværdiligning.

## 1.1. Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

Her samles generel information om egenværdier og egenfunktioner til Dirichlet-problemet, som defineres nedenfor. Vores fremgangsmåde følger [Lieb and Loss, 2001, Chapter 12].

### 1.1.1. Definition af egenværdier

Lad  $\Omega$  være en åben delmængde af  $\mathbb{R}^2$  med  $|\Omega| < \infty$ . For  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  definerer vi

$$\mathcal{E}(\varphi) := \int_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 dx$$

Vi definerer den første såkaldte Dirichlet-egenværdi,  $\lambda_1$ , ved:

$$\lambda_1 := \inf\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx = 1\} \quad (1.1.1)$$

Dette infimum viser sig at være et minimum, og en funktion  $u_1$ , hvor  $\mathcal{E}(u_1) = \lambda_1$ , kaldes for en (første) egenfunktion. Indfør induktivt den  $k$ 'te egenværdi,  $\lambda_k$ , (idet eksistensen af de  $k - 1$  forrige egenfunktioner antages),

$$\lambda_k = \inf\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{L^2} = 1, (\varphi, u_i)_{L^2} = 0 \text{ for } i = 0, \dots, k - 1\}. \quad (1.1.2)$$

## 1.1 Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

---

Dette infimum kan også bevises senere at være et minimum. En minimerende funktion  $u_k$ , dvs.  $\mathcal{E}(u_k) = \lambda_k$  kaldes en  $k$ 'te egenfunktion.

### 1.1.2. Egenfunktionerne kan antages at være reelle

Under antagelse af, at der vitterligt eksisterer  $k$ 'te egenfunktioner, vises det her, at de kan antages værende reelle. Vi skriver en  $k$ 'te egenfunktion,  $u_k$ , og et vilkårligt  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , som hhv.  $u_k = \operatorname{Re} u_k + i \operatorname{Im} u_k$  samt  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f =: f_1 + i f_2$ . Definer

$$u_k^\varepsilon := u_k + \varepsilon f.$$

Med  $Q(\varepsilon) := \frac{\mathcal{E}(u_k^\varepsilon)}{(u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)}}$ , udregnes  $Q'(0)$ . Denne konstruktion giver,  $Q(\varepsilon)$  har minimum for  $\varepsilon = 0$  så

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\mathcal{E}(u_k^\varepsilon)}{(u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)}} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Ved differentiation havs

$$\left( \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u_k^\varepsilon) (u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)} - \mathcal{E}(u_k^\varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon} (u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Med  $\varepsilon = 0$  indsat fås nu:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u_k^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \lambda_k \left. \frac{d}{d\varepsilon} (u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (1.1.3)$$

Ved at benytte formlen

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y), \quad (1.1.4)$$

følger

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_k^\varepsilon) &= \int_{\Omega} |\nabla u_k + \varepsilon \nabla f|^2 = \|\nabla \operatorname{Re} u_k + i \nabla \operatorname{Im} u_k + \varepsilon \nabla f_1 + i \varepsilon \nabla f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|\nabla \operatorname{Re} u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla \operatorname{Im} u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2i \operatorname{Re}(\operatorname{Re} \nabla u_k, \operatorname{Im} \nabla u_k)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \|\nabla f_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon^2 \|\nabla f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + i \varepsilon^2 \operatorname{Re}(\nabla f_1, \nabla f_2)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\operatorname{Re} \nabla u_k + i \operatorname{Im} \nabla u_k, \nabla f_1 + i \nabla f_2)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$



## 1.1 Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

---

Der differentieres mht.  $\varepsilon$  og med  $\varepsilon = 0$ , giver dette

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{E}(u_k^\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= 2 \operatorname{Re}((\operatorname{Re} \nabla u_k + i \operatorname{Im} \nabla u_k, \nabla f_1 + i \nabla f_2)_{L^2(\Omega)}) \\ &= 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Re} \nabla u_k, \nabla f_1)_{L^2(\Omega)} + 2 \operatorname{Re}(i(\operatorname{Re} \nabla u_k, \nabla f_2)_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(-i(\operatorname{Im} \nabla u_k, \nabla f_2)_{L^2(\Omega)}) + 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Im} \nabla u_k, \nabla f_2)_{L^2(\Omega)} \\ &= 2(\operatorname{Re} \nabla u_k, \nabla f_1)_{L^2(\Omega)} + 2(\nabla \operatorname{Im} u_k, \nabla f_2)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Tilsvarende udregnes

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} (u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)}|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \|u_k^\varepsilon\|^2 \\ &= 2(\operatorname{Re} u_k, f_1)_{L^2(\Omega)} + 2(\operatorname{Im} u_k, f_2)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ved indsættelse i (1.1.3) følger:

$$(\operatorname{Re} \nabla u_k, \nabla f_1)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{Im} \nabla u_k, \nabla f_2)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k ((\operatorname{Re} u_k, f_1)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{Im} u_k, f_2)_{L^2(\Omega)}). \quad (1.1.5)$$

For et vilkårligt  $g \in C_0^\infty(\Omega)$ , med  $g =: g_1 + ig_2$ , ( $g_1, g_2$  er reelle), gælder  $g_1, g_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ , og (1.1.5) for hhv.  $g_1 + i0$  og  $g_2 + i0$  sammenlagt giver:

$$(\operatorname{Re} \nabla u_k, \nabla g)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k (\operatorname{Re} u_k, g)_{L^2(\Omega)}.$$

Da  $\operatorname{Re} u_k \in H_0^1(\Omega)$  kan denne approksimeres med en følge i  $C_0^\infty(\Omega)$  i  $H^1$ -norm. Dermed gælder ved grænseovergang at

$$\|\operatorname{Re} \nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} = \lambda_k \|\operatorname{Re} u_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dvs.

$$\mathcal{E}\left(\frac{\operatorname{Re} u_k}{\|\operatorname{Re} u_k\|_{L^2(\Omega)}}\right) = \lambda_k.$$

Hermed kan den første egenfunktion  $u_1$  antages reel. Hvis  $u_1$  er reel og  $u_2 = \operatorname{Re} u_2 + i \operatorname{Im} u_2$  så  $0 = (u_1, \operatorname{Re} u_2 + i \operatorname{Im} u_2) = (u_1, \operatorname{Re} u_2) + i(u_1, \operatorname{Im} u_2)$ .

Dvs. specielt så  $(u_1, \operatorname{Re} u_2) = 0$ , og normaliseres  $\operatorname{Re} u_2$  er denne tilladelig. Ved dette argument kan den  $k$ 'te egenfunktion antages reel for alle  $k$  når de forrige er antaget reelle.

### 1.1.3. Eksistensen af den første egenfunktion

Her bevises eksistensen af en minimerende funktion til (1.1.1), dvs. af en første egenfunktion<sup>1</sup>.

**Sætning 3.** *Til minimeringsproblemet (1.1.1) eksisterer en funktion  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$  med  $\|u_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$  således at  $\mathcal{E}(u_1) = \lambda_1$ . Ydermere opfylder  $u_1$  at:*

$$-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 \quad , \quad i \quad D'(\Omega) \quad (1.1.6)$$

*Bevis.* Lad  $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  være en minimerende følge i  $H_0^1(\Omega)$  med  $\|u^j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ ; dvs.  $\mathcal{E}(u^j) \rightarrow \lambda_1$  for  $j \rightarrow \infty$ . Dermed eksisterer  $J$  så for  $j > J$  så  $|\lambda_1 - \mathcal{E}(u^j)| < 1$ . Dermed er  $\mathcal{E}(u^j)$  begrænset af  $A := \max\{\mathcal{E}(u^1), \mathcal{E}(u^2), \dots, \mathcal{E}(u^J), \lambda_1 + 1\}$ . Dermed er  $\|u^j\|_{H^1(\Omega)} = (\|u^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u^j\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + A^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ , dvs.  $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  er begrænset i  $H_0^1(\Omega)$ . Dermed findes ifølge Banach-Alaoglus sætning en svag konvergent delfølge, som vi lader overtage betegnelsen  $\{u^j\}$ . Dvs.  $u^j \rightharpoonup u^0 \in H_0^1(\Omega)$  Den svage konvergens af  $u^j$  mod  $u^0$  i  $H_0^1(\Omega)$  medfører svag konvergens af  $\nabla u^j$  mod  $\nabla u^0$  i  $L^2(\Omega)$  (se afsnit 0.3). Dermed følger det af [Lieb and Loss, 2001, 2.11 Theorem], at

$$\liminf \|\nabla u^j\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\nabla u^0\|_{L^2(\Omega)}$$

Med andre ord er  $\mathcal{E}(u)$  svagt nedre semikontinuert. Dermed haves at

$$\lambda_1 = \lim \mathcal{E}(u^j) = \liminf \mathcal{E}(u^j) \geq \mathcal{E}(u^0)$$

Vores problem er defineret over en mængde med endeligt mål, og dermed kan [Lieb and Loss, 2001, 8.6 Theorem] benyttes, som også gælder med et åbent  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  som i dette tilfælde<sup>2</sup>, til direkte at konkludere, at da  $\|u^j\|_{L^2(\Omega)} = 1$  for alle  $j$  så  $\|u^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Med  $u_1 := u^0$  er det første udsagn bevist.

Vi mangler stadig at vise (1.1.6). For et vilkårligt  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  og for  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  defineres nu følgende:

$$u_1^\varepsilon := u_1 + \varepsilon f$$

Betragt:

$$Q(\varepsilon) := \frac{\mathcal{E}(u_1^\varepsilon)}{(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon)_{L^2(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |\nabla(u_1 + \varepsilon f)|^2}{\int_\Omega |u_1 + \varepsilon f|^2} = \frac{\|\nabla u_1 + \varepsilon f\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1 + \varepsilon f\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

<sup>1</sup>Et pædagogisk eksempel fra [Lieb and Loss, 2001, 267] på hvad man kan rode sig ud i, hvis eksistensen (som nævnt i indledningen) af en "minimizer/maximizer" blot antages: Lad  $N$  være det største heltal. Da  $N \in \mathbb{N}$  så  $N^2 \in \mathbb{N}$ , og  $N^2 \geq N$ , men så  $N^2 = N$ . Dvs.  $N = 1$ !

<sup>2</sup>Den nysgerrige læser kan læse mere herom i bemærkningerne [Lieb and Loss, 2001, side 212-214]

## 1.1 Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

Ligesom tidligere benyttes  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\operatorname{Re}(a, b)$ , til at få

$$Q(\varepsilon) := \frac{\|\nabla(u_1 + \varepsilon f)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1 + \varepsilon f\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\operatorname{Re}\varepsilon(\nabla u_1, \nabla f)}{\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\operatorname{Re}\varepsilon(u_1, f)}$$

Da  $Q(\varepsilon)$  antager sit minimum i  $\varepsilon = 0$ , idet  $u_1$  er en minimerende funktion, så

$$0 = Q'(0) = \frac{2\operatorname{Re}(\nabla u_1, \nabla f) \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\operatorname{Re}(u_1, f) \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^4},$$

Hermed

$$\operatorname{Re}(\nabla u_1, \nabla f) = \lambda_1 \operatorname{Re}(u_1, f)$$

Da  $u_1$  kan antages værende reel, og  $f$  er vilkårligt valgt fra  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  haves resultatet for vilkårlige reelle testfunktioner. Skrives en kompleks testfunktion som summen af dens reeldel og imaginær-del fås resultatet. ■

### 1.1.4. Eksistensen af de højere egenfunktioner

Ligesom med den første egenværdi, ønsker vi at bevise eksistensen af  $k$ 'te egenfunktioner. Vi minder om definitionen i (1.1.2) af den  $k$ 'te egenværdi

$$\lambda_k = \inf\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{L^2} = 1, (\varphi, u_i)_{L^2} = 0 \text{ for } i = 1, \dots, k-1\}. \quad (1.1.7)$$

Følgende sætning giver, at et sådant infimum antages, dvs en  $k$ 'te egenfunktion  $u_k$  eksisterer. Desuden viser sætningen at  $u_k$  opfylder egenværdiligningen for Laplace-operatoren i distributionsforstand, samt det delvise konverse udsagn, at en løsning til egenværdiligningen er en linear-kombination af egenfunktioner.

**Sætning 4.** Hvis der eksisterer  $i$ 'te egenfunktioner,  $u_i, i = 1, \dots, k-1$  og  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  er åben med  $|\Omega| < \infty$ . Så gælder følgende fire udsagn:

1. Der eksisterer en  $k$ 'te egenfunktion  $u_k$  i  $H_0^1(\Omega)$ .

2. En  $k$ 'te egenfunktion  $u_k$  opfylder, at

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k \quad , \quad i \mathcal{D}'(\Omega). \quad (1.1.8)$$

3. Den  $k$ 'te egenværdi,  $\lambda_k$ , har endelig multiplicitet.

4. Hvis  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , ( $\varphi \neq 0$ ), således

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi \quad , \quad i \mathcal{D}'(\Omega),$$

er opfyldt, så er  $\varphi = \sum_{i=m}^{m+n} (u_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} u_i$  i  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , hvor  $u_i$  er  $i$ 'te egenfunktioner og  $\lambda_i = \lambda$ .

## 1.1 Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

*Bevis.* 1. Efter samme fremgangsmåde, som i beviset for, at der eksisterer en første egenfunktion (sætning 3), tages en minimerende følge  $\{u_k\}^n \subset H_0^1(\Omega)$  med  $\|u_k^n\|_{L^2} = 1$  og  $(u_k^n, u_i) = 0$  for  $i = 1, \dots, k-1$ . Her fås igen en svag grænse,  $u_k^0 \in H_0^1(\Omega)$  med  $\|u_k^0\|_{L^2} = 1$ . Da  $u_k^i$  konvergerer svagt mod  $u_k^0$  i  $H^1(\Omega)$ , konvergerer  $u_k^i$  svagt mod  $u_k^0$  i  $L^2(\Omega)$ . Riesz' repræsentations-sætning ([Johnsen, 2006, side 22]) giver, at alle funktionaler i dualrummet af  $L^2(\Omega)$  kan skrives som et indre produkt i  $L^2(\Omega)$ . Vi får, at for alle  $z \in L^2(\Omega)$  at

$$(u_k^i, z)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (u_k^0, z)_{L^2(\Omega)}.$$

Specielt gælder dette for  $z = u_i$  for hhv.  $i = 1, \dots, k-1$ , hvorfor

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} (u_k^i, u_i)_{L^2(\Omega)} = (u_k^0, u_i)_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Da  $\mathcal{E}(u_k^0) = \lambda_k$ , og  $u_k^0$  pr. ovenstående er tilladelig, haves resultatet med  $u_k := u_k^0$ .

2. For at vise, at (1.1.8) er opfyldt sættes  $u_k^\varepsilon := u_k + \varepsilon f$  for et  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  med  $(f, u_i)_{L^2(\Omega)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . Analogt med beviset for sætning 3, udregnes  $Q'(0)$  med  $Q(\varepsilon) := \frac{\mathcal{E}(u_k)}{(u_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{L^2(\Omega)}}$ , og man får

$$(-\Delta f, u_k)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k (f, u_k)_{L^2(\Omega)}, \quad (1.1.9)$$

hvormed  $D := (-\Delta - \lambda_k)u_k$  opfylder, at  $D(f) = 0$  i  $D'(\Omega)$ , for  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  med  $(f, u_i)_{L^2(\Omega)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ <sup>3</sup>. Ved brug af [Lieb and Loss, 2001, 6.14 Theorem] sluttet, at der eksisterer  $c_i$ 'er, så

$$D = \sum_{i=1}^{k-1} c_i u_i, \quad \text{i } D'(\Omega).$$

Tag en følge  $\{u_j^m\}$  i  $C_0^\infty(\Omega)$ , hvor  $u_j^m \rightarrow u_j$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ . Så vil (da stærk konvergens medfører svag konvergens)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(u_j^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} c_i \int_{\Omega} u_j^m u_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \int_{\Omega} u_j u_i = c_j \quad (1.1.10)$$

<sup>3</sup>Bemærk, at  $u_i$ erne er distributioner, da  $u_i \in L^2(\Omega)$  medfører  $u_i \in L_{loc}^1(\Omega)$  ved Hölders ulighed, da  $|\Omega| < \infty$ .

og samtidig ved definition af  $D$ :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} D(u_j^m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} -u_j^m \Delta u_k - \lambda_k \int_{\Omega} u_j^m u_k \\ &= \int_{\Omega} -u_j \Delta u_k - \lambda_k \int_{\Omega} u_j u_k \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_j \nabla u_k. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Ifølge (1.1.10) og (1.1.11) haves

$$\int_{\Omega} \nabla u_j \nabla u_k = c_j. \quad (1.1.12)$$

Ved partiel integration i (1.1.12):

$$c_j = \int_{\Omega} \nabla u_j \nabla u_k = - \int_{\Omega} \Delta u_j u_k = \lambda_j \int_{\Omega} u_j u_k = 0. \quad (1.1.13)$$

Dette viser, at  $c_j = 0$  for alle  $j = 1, \dots, k-1$ . Dermed er  $D$  nul for alle  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , og dermed opfylder  $u_k$  ligningen (1.1.8).

3. Egenværdierne har desuden endelig multiplicitet, hvilket her bevises: Antag modsætningsvist, at der eksisterer en egenværdi  $\lambda_l$ , der ikke har endelig multiplicitet. Det vil sige at  $\lambda_l = \lambda_{l+n}$ , for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Så eksisterer en ortonormal følge  $\{u_{l+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $L^2(\Omega)$ . En sådan følge konvergerer svagt mod 0 i  $L^2(\Omega)$ . Da  $\|u_{l+n}\|_{H^1(\Omega)} = (\|u_{l+n}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{l+n}\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$  haves for alle  $n \in \mathbb{N}$ , at

$$\|u_{l+n}\|_{H^1(\Omega)} = (\|u_{l+n}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{l+n}\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{1 + \lambda_l} < \infty. \quad (1.1.14)$$

Hermed er  $\{u_{l+n}\}$  en begrænset følge i  $H_0^1(\Omega)$ , så ifølge Banach-Alaoglu findes en delfølge (som overtager notationen  $\{u_{l+n}\}$ ), der konvergerer svagt imod et  $f \in H_0^1(\Omega)$ . Denne delfølge konvergerer ligeledes, svagt imod 0 i  $L^2(\Omega)$ . Svag konvergens imod  $f$  i  $H_0^1(\Omega)$  medfører specielt, at  $\{u_{l+n}\}$  konvergerer svagt imod  $f$  i  $L^2(\Omega)$ . Dermed er  $f = 0$ , da vi tidligere konkluderede, at  $\{u_{l+n}\}$  konvergerer svagt imod 0 i  $L^2(\Omega)$ , og svage grænser er entydige - se eventuel bilag A.3. Pga. antagelsen  $|\Omega| < \infty$ , medfører den svage konvergens mod 0, vha. [Lieb and Loss, 2001, 8.6 Theorem], at  $\{u_{l+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergerer stærkt imod 0. Dette strider mod normaliseringen, og resultatet om endelig multiplicitet haves.

4. Antag  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  opfylder

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 \quad \text{i } \mathcal{D}'(\Omega).$$

## 1.1 Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

---

Dermed (ved approksimation af  $u_j$  med en følge i  $C_0^\infty(\Omega)$ ) følger

$$\int_{\Omega} (\Delta\varphi + \lambda\varphi)u_j = 0 \quad , \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.1.15)$$

Desuden gælder ved punkt 2:

$$\Delta u_j + \lambda_j u_j = 0 \quad \text{i } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dermed

$$0 = \int_{\Omega} (\Delta u_j + \lambda_j u_j)\varphi = \int_{\Omega} (\Delta\varphi + \lambda_j\varphi)u_j \quad (1.1.16)$$

for alle  $j$ . Trækkes (1.1.15) fra (1.1.16) fås ved partiel integration:

$$0 = (\lambda - \lambda_j) \int_{\Omega} \varphi u_j = 0 \quad , \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.1.17)$$

Da  $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  udgør en ortonormal basis for  $L^2(\Omega)$ , haves ifølge [Johnsen, 2006, theorem 4.2.5], at

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} u_i. \quad (1.1.18)$$

Antag  $\varphi \neq 0$ , så giver (1.1.18), at der eksisterer  $N \subseteq \mathbb{N}$ , så

$$(u_j, \varphi)_{L^2(\Omega)} \neq 0, \quad j \in N \quad \text{og} \quad (u_j, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad j \in \mathbb{N} \setminus N. \quad (1.1.19)$$

Da (1.1.17) gælder for alle  $j$ , følger nu

$$\lambda_j - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = \lambda \quad , \quad j \in N$$

Ved monotonicitet af egenværdierne, haves at  $N$  er på formen  $N = n, n+1, \dots$ , dvs  $\varphi_j$ 'ere for  $j \in N$  er på hinanden følgende egenfunktioner. Den endelige multiplicitet af egenværdierne medfører, at  $N$  er en endelig mængde. Skriv  $N = n, \dots, n+m$ , og af (1.1.18) følger:

$$\varphi = \sum_{i \in N} (u_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} u_i + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus N} (u_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} u_i = \sum_{i=n}^{n+m} (u_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} u_i,$$

og resultatet haves. ■

### 1.1.5. Min-max/max-min-principper

Vi beviser her to ækvivalente formuleringer af egenværdi-problemet som et variationsproblem. Lad derfor som tidligere

$$\lambda_n = \inf\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1, (\varphi, u_i)_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ for } i = 1, \dots, n-1\}, \quad (1.1.20)$$

hvor  $u_1, \dots, u_{n-1}$  er de  $n-1$  første egenfunktioner.

**Sætning 5.** Med  $\lambda_n$  defineret som i (1.1.20), bemærk  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , så gælder

1. Max-min-princippet:

$$\lambda_n = \max_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \in H_0^1(\Omega) \\ (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, \dots, n-1}} \min\{\mathcal{E}(\varphi) : (\varphi, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} = 0, i = 1, \dots, n-1\} \quad (1.1.21)$$

2. Min-max-princippet:

$$\lambda_n = \min_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_0^1(\Omega) \\ (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, \dots, n}} \max\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\}. \quad (1.1.22)$$

*Bevis.* 1. Sæt

$$\gamma_n := \max_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \in H_0^1(\Omega) \\ (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, \dots, n-1}} \min\{\mathcal{E}(\varphi) : (\varphi, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} = 0, i = 1, \dots, n-1\}. \quad (1.1.23)$$

Da  $u_1, \dots, u_{n-1}$  er ortonormale er disse specielt blandt de  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ , der maksimeres over i (1.1.23), hvorved

$$\gamma_n \geq \min\{\mathcal{E}(\varphi) : (\varphi, u_i)_{L^2(\Omega)} = 0, i = 1, \dots, n-1\} = \lambda_n.$$

Givet  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \in H_0^1(\Omega)$ , kan man ved løsning af  $n-1$  lineære homogene ligninger med  $n$  ubekendte, vælge  $a_1, \dots, a_n$  således

$$f := \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

### 1.1 Egenværdier for Dirichlet-problemet i $\mathbb{R}^2$

---

opfylder, at  $(f, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , og  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ . Lav følgende udregning:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f) &= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n a_i \nabla u_i \right|^2 \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i^2 |\nabla u_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_{\Omega} \lambda_i u_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda_n \end{aligned}$$

Hermed også  $\gamma_n \leq \lambda_n$  og  $\lambda_n = \gamma_n$  høves så (1.1.21) er bevist.

2. For at vise (1.1.22), sæt

$$\tilde{\gamma}_n = \min_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_0^1(\Omega) \\ (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, \dots, n}} \max\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\}.$$

Tag nu specielt  $\varphi_i = u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . For alle  $h$  på formen:

$$h = \sum_{i=1}^n b_i u_i, \quad \text{hvor} \quad \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1,$$

gælder

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(h) &= \int_{\Omega} |\nabla h|^2 = \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n b_i \nabla u_i \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n b_i^2 \int_{\Omega} (\nabla u_i)^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 \lambda_i \int_{\Omega} u_i^2 \leq \lambda_n. \end{aligned}$$

Dermed også  $\tilde{\gamma}_n \leq \lambda_n$ . For et vilkårligt valg af  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , eksisterer  $g \in \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , dvs.  $g = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$ , således de  $n-1$  lineære homogene ligninger  $\int_{\Omega} g u_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , er opfyldt og  $\sum_{j=1}^n c_j^2 = 1$ . Dermed er  $g \in \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  med  $\|g\|_{L^2(\Omega)} = 1$  blandt de funktioner, der minimeres over i (1.1.20), således

$$\mathcal{E}(g) \geq \lambda_n.$$

Dermed også  $\tilde{\gamma}_n \geq \lambda_n$ , og sætningen er vist. ■



## 1.2. Regularitet af egenfunktioner

Egenfunktioner til Laplace-operatoren over et åbent område  $\Omega$  med  $|\Omega| < \infty$ , har som udgangspunkt visse differentiability-egenskaber, men umiddelbart kun i den svage forstand. Et meget vigtigt resultat for det videre arbejde er, at en tilpas regularitet  $\partial\Omega$ , giver en vis grad af differentiability, i klassisk forstand, af egenfunktionerne over det lukkede område  $\bar{\Omega}$ .

Vi behandler emnet forholdsvis kursorisk - dvs. de anvendte sætninger formuleres uden bevis, men med kommentarer og henvisninger. Dette gøres da regularitet er et omfangsrigt og forholdsvis teknisk emne. Den nysgerrige læser opfordres til at følge henvisninger til litteraturen, såfremt yderligere information om metoder og beviser ønskes. Desuden formuleres resultaterne ikke i største generalitet.

Hele problemet er indtil nu, defineret i svag forstand. Dvs. vores "funktioner" egentligt er ækvivalens-klasser, under relationen at være ens næsten overalt, dvs. undtaget på en nulmængde. Da  $\partial\Omega$  er en nulmængde i  $\mathbb{R}^2$ , og regularitets-egenskaber ønskes på randen, skal vi derfor give mening til, at  $u$  har en værdi på  $\partial\Omega$ . Dette gøres vha. trace-operatoren  $T$  (idet vi benævner  $Tu$ , trace af  $u$ ).

$$T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Ifølge [Evans, 1998, theorem 1, side 258] eksisterer en sådan operator  $T$ , som en lineær begrænset operator, med  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  i det tilfælde hvor  $u$  er uniform kontinuitet, hvor vi ellers kunne give mening til randværdier. Vi kan nu sætte

$$u = \begin{cases} u & \text{på } \Omega \\ Tu & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Der gælder følgende sætning (se evt. [Evans, 1998, theorem 2, side 259]).

**Sætning 6.** For  $u \in H^1(\Omega)$  med  $\Omega$  begrænset og med glat rand, gælder

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ på } \partial\Omega.$$

Vi kan derfor tænke på Dirichlet-problemet, som omhandlende egenverdier  $\lambda$  og egenfunktioner  $u$ , der i svag forstand opfylder egenværdiligningen

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Følgende sætning vinder os yderligere to svage afledte af en egenfunktion, i forhold til regulariteten af det inhomogene led på det indre.

I [Evans, 1998, afsnit 6.3] vises det, at egenfunktionerne er glatte på  $\Omega$ .

**Sætning 7.** Lad  $u \in H_0^1$  være en svag løsning til

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

i betydningen, at  $u|_{\partial\Omega} := Tu = 0$ . Med  $f \in H^m(\Omega)$  og  $\partial\Omega \in C^{m+2}$ . Så vil

$$u \in H^{m+2}(\Omega)$$

og følgende ulighed holder

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (1.2.2)$$

Følgende sætning er med “ $p = 2$ ” [Evans, 1998, Theorem 6 (ii), side 270], som er en mere generel Sobolev-ulighed<sup>4</sup>.

Forudsætninger til side giver sætningen, at en funktion  $g \in H^k$  er  $k - 2$  gange Hölder-kontinuert (af enhver orden) differentiabel. Løst sagt - har man nok svage afledte, har man også klassiske afledte.

**Sætning 8.** Lad  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  være åbent og begrænset og lad  $\partial\Omega$  være  $C^1$ . For  $u \in H^k(\Omega)$ ,  $k > 1$  og for alle  $0 \leq \gamma < 1$  gælder

$$u \in C^{k-2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Lad  $u \in H_0^1(\Omega)$  med  $\Omega$  begrænset og  $\partial\Omega$  glat, således at  $u$  i svag forstand opfylder

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

som før i den betydning, at  $u|_{\partial\Omega} := Tu = 0$ .

Sætning 7 giver, at  $u \in H^m$  for vilkårligt  $m \geq 0$ , og ifølge sætning 8 gælder nu at  $u \in C^k(\overline{\Omega})$  for alle  $k \geq 0$  - dvs.  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .

For differentiable funktioner er de svage afledte lig de respektive klassiske afledte, så regulariteten af egenfunktioner giver nu sammen med [Lieb and Loss, 2001, 6.5 Theorem], at (1.2.1) er

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

i klassisk forstand.

---

<sup>4</sup>Denne bygger på den såkaldte Gagliardo-Nirenberg-Sobolev ulighed - se [Evans, 1998, afsnit 5.6] for mere information.

**Analyticitet af egenfunktioner** Med glatheden af egenfunktionerne på plads er det muligt ydermere at vise analyticitet af egenfunktionerne over  $\Omega$ . En måde beror sig på som følge af glatheden af en egenfunktion  $u$ , at vise at restleddet i en vilkårlig ordens Taylor-udvikling af  $u$  konvergerer mod 0 i en omegn af sit udviklingspunkt - se f.eks. [Wade, 2004, theorem 7.43] i en variabel.

I [Hellwig, 1964, side 96] vises analyticitet for harmoniske funktioner ( $\Delta u = 0$ ) vha. middelværdi-egenskaben for disse. Analogt med dette kan man bevise analyticitet for  $u$  hvorom  $\Delta u + \lambda u = 0$ , såfremt man etablerer en tilsvarende middelværdi-egenskab for  $u$  hvorom  $\Delta u + \lambda u = 0$ . Vi fører ikke beviset her, men analyticitet af løsninger til partielle differentiaalligninger er velkendt i stor generalitet i litteraturen.

### 1.3. Egenværdier som funktioner af området

I dette afsnit overvejes hvorledes egenværdierne for forskellige områder  $\Omega' \subseteq \Omega$  forholder sig til hinanden. Desuden bevises en nedre grænse, kun afhængig af radius af den største cirkel indeholdt i et simpelt sammenhængende område, på den første egenværdi for området.

#### 1.3.1. Monotoniprincip for egenværdier mht. områder

**Sætning 9.** *Antag  $\Omega' \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  er åbne mængder og  $|\Omega| < \infty$ . Betegn den  $k$ 'te egenværdi for  $\Omega'$  som  $\lambda_k(\Omega')$  og en  $k$ 'te egenfunktion for  $\Omega'$  som  $u_k$ , og tilsvarende for  $\Omega$ , så  $\lambda_k(\Omega) = \mathcal{E}(u_k)$ . Der gælder*

$$\lambda_k(\Omega) \leq \lambda_k(\Omega') \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.3.1)$$

*Bevis.* Betragt injektionen  $J : C_0^\infty(\Omega') \hookrightarrow C_0^\infty(\Omega)$  givet ved:

$$\tilde{f} := J(f) := \begin{cases} f & , \Omega' \\ 0 & , \Omega \setminus \Omega', \end{cases} \quad (1.3.2)$$

haves  $\|f\|_{H^1(\Omega')} = \|\tilde{f}\|_{H^1(\Omega)}$ , så ved aflukningerne i  $H^1$ -norm, dvs.  $H_0^1(\Omega')$  og  $H_0^1(\Omega)$ , gælder også at  $f \in H_0^1(\Omega') \Rightarrow \tilde{f} \in H_0^1(\Omega)$ . Lad os derfor redefinere injektionen  $J$  til  $J : H_0^1(\Omega') \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$  givet ved (1.3.2).

Nu benyttes resultatet i (1.1.22) (fra sætning 5), således den  $n$ 'te egenværdi for et område  $G$  er

$$\lambda_n(G) = \min_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_0^1(G) \\ (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(G)} = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, \dots, n}} \max\{\mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \|\varphi\|_{L^2(G)} = 1\}$$

### 1.3 Egenværdier som funktioner af området

Hvis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  er ortonormale i  $L^2(\Omega')$  er  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$  ortonormale i  $L^2(\Omega)$ . Yderligere med

$$A := \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subseteq H_0^1(\Omega')$$

$$B := \text{Span}\{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N\} \subseteq H_0^1(\Omega)$$

er  $J(A) = B$ . Dermed er  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$  tilladelige i  $\lambda_n(\Omega)$ -problemet. Lad  $f_1, \dots, f_n$  være funktioner for hvilke minimumet antages. Det ses at:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Omega') &= \max\{\mathcal{E}^{\Omega'}(\varphi) : \varphi \in \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\}, \|\varphi\|_{L^2(\Omega')} = 1\} \\ &= \max\{\mathcal{E}^{\Omega}(\varphi) : \varphi \in \text{Span}\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\}, \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} = 1\} \\ &\geq \min_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_0^1(\Omega) \\ (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, \dots, n}} \max\{\mathcal{E}^{\Omega}(\varphi) : \varphi \in \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\} = \lambda_n(\Omega). \end{aligned}$$

■

#### 1.3.2. Haymans sætning om indre radius

Et andet resultat om sammenhængen mellem områder og egenværdierne over disse, er Haymans sætning om indre radius. Denne siger, at et begrænset og simpelt sammenhængende område altid har en indskrevet cirkel, hvor radius kun afhænger af den første egenværdi for det pågældende område. Hermed etableres en generel sammenhæng imellem en geometrisk parameter for et område, og dets første egenværdi. For at bevise denne får vi brug for Wirtingers ulighed på formen i det følgende afsnit.

#### Wirtingers Ulighed

Her bevises en ulighed, der undertiden kaldes Wirtingers ulighed, dog går flere uligheder går under dette navn - se eventuelt [Hardy et al., 1978, side 185]. Først et mindre lemma:

**Lemma 10.** *Antag  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  og  $f \in L^p([0, a])$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$ . Definer*

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

Der gælder, at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{q}}} \right| = 0 \quad ^5$$

<sup>5</sup>Dette skrives ofte som  $F(x) = o(x^{\frac{1}{q}})$  for små  $x$ .

*Bevis.* Ved Hölders ulighed gives:

$$\begin{aligned} |F(x)|^p &\leq \left( \int_0^x |f(t)| dt \right)^p \leq \left( \left( \int_0^x 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^x |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &= x^{p-1} \int_0^x |f(t)|^p dt. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Da  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$  gives

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{q}}} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \int_0^x |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

og resultatet gives. ■

**Sætning 11.** Lad  $y' \in L^2([0, \pi])$ , med  $y(0) = 0$  og  $y(\pi) = 0$ . Da gælder følgende ulighed:

$$\int_0^\pi (y')^2(x) dx \geq \int_0^\pi y^2(x) dx.$$

*Bevis.* Sæt

$$\varphi(x) := \frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = -(1 + \varphi^2(x)). \quad (1.3.4)$$

Der gælder:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\pi (y'(x) - y(x)\varphi(x))^2 dx \\ &= \int_0^\pi ((y')^2(x) - y^2(x)) dx + \int_0^\pi (y^2(x)(1 + \varphi^2(x)) - 2y'(x)y(x)\varphi(x)) dx. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

indsættes (1.3.4) i (1.3.5) gives ved Analysens fundamentalsætning ([Wade, 2004, 5.28 Theorem]):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\pi ((y')^2(x) - y^2(x)) dx + \int_0^\pi (y^2(x)(-\varphi'(x)) - 2y'(x)y(x)\varphi(x)) dx \\ &= \int_0^\pi ((y')^2(x) - y^2(x)) dx - \int_0^\pi (y^2\varphi)'(x) dx \\ &= \int_0^\pi ((y')^2(x) - y^2(x)) dx - (y^2(\pi)\varphi(\pi) - y^2(0)\varphi(0)). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

### 1.3 Egenværdier som funktioner af området

---

Da  $y' \in L^2([0, \pi])$ , siden  $y(0) = 0$  og  $y(\pi) = 0$  høves, ved at benytte Analysens fundamentalsætning, at

$$F(x) = \int_0^x y'(t) dt = y(x) - y(0) = y(x), \quad (1.3.7)$$

og tilsvarende omkring  $x = \pi$ . Der gælder, at  $y'_\tau := y'(\pi - \cdot) \in L^2([\pi - a, \pi]) \Leftrightarrow y' \in L^2([0, a])$ , idet

$$\int_0^a |y'_\tau(t)|^2 dt = \int_0^a |y'(\pi - t)|^2 dt = - \int_\pi^{\pi-a} |y'(u)|^2 du = \int_{\pi-a}^\pi |y'(u)|^2 du < \infty. \quad (1.3.8)$$

Ifølge lemma 10

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{y'_\tau(x)}{x^{\frac{1}{2}}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{y'(\pi - x)}{x^{\frac{1}{2}}} \right|, \quad (1.3.9)$$

med  $z := \pi - x \Leftrightarrow x = z - \pi$  høves, at

$$\lim_{z \rightarrow \pi^-} \left| \frac{y'(z)}{(z - \pi)^{\frac{1}{2}}} \right| \quad (1.3.10)$$

Dermed

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad , \quad \text{for } b \in \{0, \pi\}.$$

Desuden ved brug af L'Hopitals regel (se evt. [Wade, 2004, 4.18 Theorem]), er

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{x'}{\tan' x} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1. \quad (1.3.11)$$

Hermed høves

$$\lim_{x \rightarrow b} (y^2 \varphi)(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{y^2}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow b} \left( \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{y^2}{x} \frac{x}{\tan x} = 0^2 \cdot 1, \quad (1.3.12)$$

så i ovenstående ikke er problemer i endepunkterne, og  $y^2(\pi)\varphi(\pi) - y^2(0)\varphi(0) = 0$ , således resultatet følger af 1.3.6. ■

#### Haymans sætning om indre radius

Vi beviser her sætningen i to dimensioner med samme fremgangsmåde som i (se evt. [Hayman, 1978]), og benytter følgende to lemmaer. Vi lader i det følgende det være underforstået, at en første egenfunktion  $u_1^*$  på  $\Omega$  udvides med  $u_1 \equiv 0$  uden for  $\Omega$ .

**Lemma 12.** *Lad  $u_1$  være en første egenfunktion på et begrænset og simpelt sammenhængende område  $\Omega$ . For et vilkårligt punkt  $\mathbf{z}_0 \in \partial\Omega$ , gælder*

$$\int_{\overline{B_r(\mathbf{z}_0)}} |\nabla u_1|^2 d\mathbf{x} \geq \frac{1}{4r^2} \int_{\overline{B_r(\mathbf{z}_0)}} |u_1|^2 d\mathbf{x}.$$

*Bevis.* Lad  $0 < \rho \leq r$ . Med  $T : (x_1, x_2) \mapsto (\rho, \theta)$  værende koordinatskiftet fra rektangulære til polære koordinater. Med  $\tilde{u}_1(\rho, \theta) := u_1(T^{-1}(\rho, \theta))$ , følger det af kædereglen, at

$$|\nabla_{x_1, x_2} u_1|^2 = \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \theta} \right)^2.$$

Da  $u_1 = 0$  på  $\Omega^C$ ,  $\Omega$  er simpelt sammenhængende, og  $\overline{B_r(\mathbf{z}_0)}$  har centrum i et  $\mathbf{z}_0 \in \partial\Omega$ , eksisterer et  $\theta_0$  således  $\tilde{u}_1(\rho, \theta_0) = 0 = \tilde{u}_1(\rho, 2\pi + \theta_0)$ . Sæt  $\tilde{\theta} := \frac{\theta - \theta_0}{2}$ , og lav følgende udregning ved at benytte Wirtingers ulighed (sætning 11)<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} u_1(\rho, \theta)^2 d\theta &= 2 \int_0^\pi u_1(\rho, 2\tilde{\theta} + \theta_0)^2 d\tilde{\theta} \leq 2 \int_0^\pi \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} u_1(\rho, 2\tilde{\theta} + \theta_0) \right)^2 d\tilde{\theta} \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left( 2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Således er

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} u_1(\rho, \theta)^2 d\theta \leq 4 \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right)^2 d\theta.$$

Hitidige udregninger er for et vilkårlig fast  $r$  og integreres  $r$  nu op havest resultatet:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B_r(\mathbf{z}_0)}} u_1^2 d\mathbf{x} &= \int_0^r \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} u_1(\rho, \theta)^2 \rho d\theta d\rho \\ &\leq 4\rho^2 \int_0^r \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta}(\theta) \right)^2 \rho d\theta d\rho \\ &\leq 4\rho^2 \int_0^r \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} |\nabla u_1|^2 d\theta d\rho \\ &= 4\rho^2 \int_{\overline{B_r(\mathbf{z}_0)}} |\nabla u_1|^2 d\mathbf{x} \leq 4r^2 \in_{\overline{B_r(\mathbf{z}_0)}} |\nabla u_1|^2. \end{aligned}$$

■

<sup>6</sup>Da  $u_1 \in H_0^1$ , findes en i  $H^1$ -norm approksimerende følge fra  $C_0^\infty$ , og da Wirtingers ulighed holder for alle elementer i følgen, gælder uligheden for  $u_1$ .

**Lemma 13.** *Antag  $\Omega$  er begrænset og simpelt sammenhængende, og sæt*

$$d := \sup_{x \in \Omega} \{r : B_r(x) \subseteq \Omega\} \quad \text{og} \quad r := d(1 + \sqrt{2}). \quad ^7$$

*For hver endelig overdækning af  $\Omega$  med en familie  $\{C_\nu(r)\}$  af lukkede cirkelskiver med radius  $r$  <sup>8</sup>, eksisterer  $k$ , således  $\{C_\nu(r)\}$  kan opdeles i  $k$  delmængder, betegnet  $C_{\nu_k}$ , der opfylder, at for  $B_1, B_2 \in C_{\nu_k}$  er  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  - udsagnet er nu, at*

$$\min_{\{C_\nu(r)\}} \{k\} \leq 36.$$

*Bevis.* Lad kvadraterne  $Q_{m,n}$  med sidelængde  $d$  være beskrevet ved

$$Q_{m,n} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : md \leq x_1 < (m+1)d, \quad nd \leq x_2 < (n+1)d\},$$

med  $m, n \in \mathbb{N}$ . Betragt  $A := \{(m, n) : Q_{m,n} \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$ . Bemærk, at

$$\partial\Omega \subseteq \cup_{(m,n) \in A} Q_{m,n}. \quad (1.3.13)$$

For ethvert  $(m_0, n_0) \in A$  vælg  $z_{m_0, n_0} \in Q_{m_0, n_0} \cap \partial\Omega$ . Indfør den tilhørende lukkede cirkelskive

$$C_{m_0, n_0} := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - z_{m_0, n_0}| \leq d(1 + \sqrt{2})\}. \quad ^9$$

For et vilkårligt  $z_0 \in \Omega$  eksisterer  $z_1 \in \partial\Omega$  så  $|z_0 - z_1| \leq d$ . Ifølge (1.3.13) eksisterer ydermere  $z_{m,n}$  så  $|z_1 - z_{m,n}| \leq d\sqrt{2}$ , for  $z_1 \in Q_{m,n}$ . Dermed haves

$$|z_0 - z_{m,n}| \leq |z_0 - z_1| + |z_1 - z_{m,n}| = d(1 + \sqrt{2}),$$

hvorved  $z_0 \in C_{m,n}$ , og det ses, at  $\Omega \subseteq \cup_{(m,n) \in A} C_{m,n}$ .

Inddel  $\{C_{m,n}\}_{(m,n) \in A}$  i 36 ækvivalensklasser ved at regne  $(m, n) \pmod{6}$ . Tag nu to elementer  $C_{m,n}$  og  $C_{m',n'}$  i samme ækvivalensklasse, dvs.  $|m - m'| \geq 6$  og  $|n - n'| \geq 6$ . Da haves, som følge af konstruktionen af  $Q_{m,n}$ 'erne, at

$$\begin{aligned} |z_{m,n} - z_{m',n'}| &= \sqrt{(x_{m,n} - x_{m',n'})^2 + (y_{m,n} - y_{m',n'})^2} \\ &\geq \sqrt{(m - m' - 1)^2 d^2 - (n - n' - 1)^2 d^2} \\ &> 5d > d(1 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Dermed er  $C_{m,n}$  og  $C_{m',n'}$  disjunkte. Med  $C_{\nu_k}(r)$  værende den  $k$ 'te ækvivalensklasse af  $\{C_{m,n}\}_{(m,n) \in A}$ , som overfor,  $k = 1, \dots, 36$ , og lemmaet er vist.  $\blacksquare$

<sup>7</sup>I ord,  $d$  er radius i den største cirkel indeholdt i det begrænsede og simpelt sammenhængende område  $\Omega$ .

<sup>8</sup>Bemærk, at der for alle faste radier  $\rho$  eksisterer endelige overdækninger af  $\Omega$ , med lukkede cirkelskiver af radius  $\rho$ , idet  $\Omega$  er begrænset.

<sup>9</sup>Bemærk, at så er  $Q_{m_0, n_0}$  selv overdækket af cirkelskiven  $C_{m,n}$ .



Nu kan vi bevise Haymans sætning om indre radius.

**Sætning 14** (Haymans sætning om indre radius). *Lad  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  er et begrænset og simpelt sammenhængende område, med  $\lambda_1$  som første egenværdi. Med, som før,  $d := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \{s : B_{s,x} \subseteq \Omega\}$ . Da gælder følgende ulighed:*

$$\lambda_1 > \frac{1}{(30d)^2}. \quad (1.3.14)$$

*Bevis.* Det følger af lemma 13, at vi kan tage en familie af cirkler  $\{C_\nu\}$  der overdækker  $\Omega$  opdelt i 36 delfamilier  $\{C_{\nu_k}\}$  (med cirkler i samme delfamilie disjunkte),  $k = 1, \dots, 36$ ).

Ved at benytte lemma 12 gælder for cirkelskiverne i hver ækvivalensklasse, dvs. for hvert  $k$ , gælde

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 d\mathbf{x} \geq \sum_{\nu=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} \int_{C_\nu} |\nabla u_1|^2 d\mathbf{x} \geq \sum_{\nu=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} \frac{1}{4(d(1+\sqrt{2}))^2} \int_{C_\nu} |u_1|^2 d\mathbf{x}.$$

Idet  $C_{\nu_k}$  er en overdækning af  $\Omega$  for  $k = 1, \dots, 36$ , have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_1|^2 d\mathbf{x} &\leq \sum_{k=1}^{36} \sum_{\nu=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} \int_{C_\nu} |u_1|^2 \leq 4(d(1+\sqrt{2}))^2 \sum_{k=1}^{36} \sum_{\nu=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} \int_{C_\nu} |\nabla u_1|^2 \\ &\leq 4 \cdot d^2 (3+2\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \leq 36 \cdot 4 \cdot d^2 (3+2\sqrt{2}) \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2. \end{aligned}$$

Da  $\lambda_1 := \inf\{\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 / \int_{\Omega} |u_1|^2 : u_1 \in H_0^1(\Omega)\}$  og  $36 \cdot 4 \cdot (3+2\sqrt{2}) < (30)^2$  er sætningen vist. ■

## 2. Partielle differential-uligheder

Problemstillingen i denne rapport omhandler den partielle differentiaalligning

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (2.0.1)$$

over et begrænset område  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Dette afsnit omhandler derfor differential-uligheder, hvor Laplace-operatoren er de højst ordens indgående afledte. Resultaterne kan vises i en større generalitet - for såkaldte 2. ordens elliptiske differential-operatorer: Vi henviser læseren til [Protter and Weinberger, 1999, chapter 2], hvis resultaterne ønskes i større generalitet.<sup>1</sup> Desuden kan resultaterne og beviserne sagtens benyttes for andre dimensioner end to, som vi her nøjes med til vores formål.

### 2.1. Maximumsprincipper

Vi følger i dette afsnit primært fremgangsmåden i [Protter and Weinberger, 1999, Chapter 2]. Operatoren  $\Delta + \lambda$  er veldefineret for funktioner i  $C^2(\Omega)$ , og tilfældet vi er interesseret i, hvor  $u \in C^\infty(\Omega)$  - se afsnit 1.2. Antagelse om glathed gælder derfor videre i dette afsnit, medmindre andet er nævnt. Overvej følgende eksempel: hvis  $u$  på  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  opfylder

$$\Delta u + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad (2.1.1)$$

kan  $u$  ikke antage et maksimum i  $\Omega$ . Antag modsætningsvist  $u$  har et maksimum i  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \Omega$ , så gælder følgende:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad , \quad k = 1, 2 \quad (2.1.2)$$

Dette er i modstrid med, at  $u$  opfylder (2.1.1) på  $\Omega$ .

---

<sup>1</sup>En central ingrediens hertil er at finde et koordinat-skift således at leddet med afledte af anden orden, den såkaldte "principal part", i definitionen af operatoren, netop bliver til Laplace. Desuden arbejder vi kun med konstante koefficienter - se evt. [Protter and Weinberger, 1999, Chapter 2.2].

Det næste mål bliver nu at bevise et tilsvarende resultat, hvis uligheden i (2.1.1) ikke er skarp.

**Sætning 15.** *Lad  $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2)$  opfylde:*

$$L(u) := \Delta u + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

*i et åbent område  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , med  $b_i \in \mathbb{R}$ . Da gælder følgende: hvis  $u$  antager et maksimum  $M$  i  $\Omega$  så  $u \equiv M$  på  $\Omega$ .*

*Bevis.* Antag modsætningsvist at der eksisterer  $P \in \Omega$  så  $u(P) = M$ , med  $P \in \Omega$ , og at  $u(Q) < M$ , med  $Q \in \Omega$ . Konstruer nu en kurve  $\gamma^*$  der forbinder  $Q$  med  $P$  parametriseret ved  $\gamma(t)$  med  $t \in [0, 1]$  så  $\gamma(0) = Q$  og  $\gamma(1) = P$ . Definer

$$t_0 := \min\{t \in [0, 1] : u(\gamma(t)) = M\},$$

og  $R := \gamma(t_0)$  (med andre ord har vi dannet en kurve, der løber fra  $Q$  til  $P$  hvor  $R$  er det første punkt herpå, hvor  $u$  antager maksimumsværdien  $M$ ). Definer desuden den største nedre grænse for afstanden imellem et punkt på kurven  $\gamma^*$  og  $\partial\Omega$ , og kald den  $d$  :

$$d := \inf\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x} \in \gamma, \mathbf{y} \in \partial\Omega\}.$$

Vælg  $P_1 \in \gamma$  mellem  $Q$  og  $R$ , med  $|P_1 - R| < \frac{d}{2}$ . Da  $u$  er kontinuert kan den største åbne kugle  $K$  centreret i  $P_1$ , hvorom der gælder at  $u$  er skarpt mindre end  $M$ , dannes (se evt. figur 2.1). Lad derfor

$$r_0 := \sup\{r : u(\mathbf{x}) < M, \forall \mathbf{x} \in B_r(P_1)\}.$$

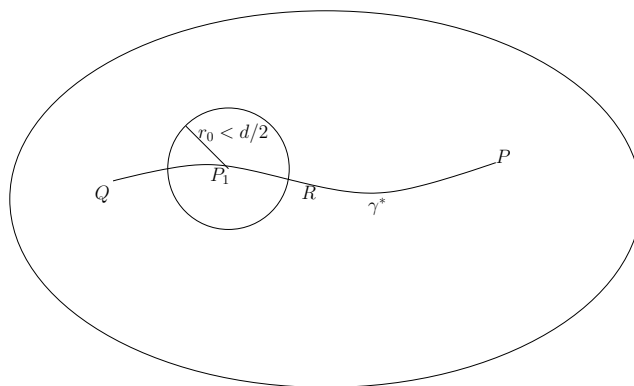
Bemærk  $r_0 < \frac{d}{2}$  ud fra valget af  $P_1$ , samt definitionen af  $R$ , da  $u(R) = M$ . Nu kan skrives  $K = B_{r_0}(P_1)$ . Muligvis eksisterer der et eller flere punkter, hvor  $M$  antages tættere på  $P_1$  end  $R$ , men vi noterer os, at  $r_0 < \frac{d}{2}$  gælder. Dermed haves at  $K \subset \Omega$ . Ifølge definitionen af  $K$  eksisterer der mindst ét punkt, kaldet  $S$  med  $S \in \partial K$  og  $u(S) = M$ . Vi konstruerer den åbne kugle  $K_1 := B_{r_1}(\tilde{\mathbf{x}})$  med  $\partial K_1 \cap \partial K = S$  og  $K_1 \subseteq K$  (dvs  $\tilde{\mathbf{x}}$  ligger på radiallinien ud til  $S$  i  $K$ ). Radius  $r_1$  af  $K_1$  sættes til  $r_1 := \frac{r_0}{4}$ .

Vi fortsætter med endnu en konstruktion og danner  $K_2 = B_{r_2}(S)$  med  $r_2 = \frac{r_1}{2}$ . Også  $K_2$  er helt indeholdt i  $\Omega$ , da  $r_0 + r_2 < 2r_0 < d$ .

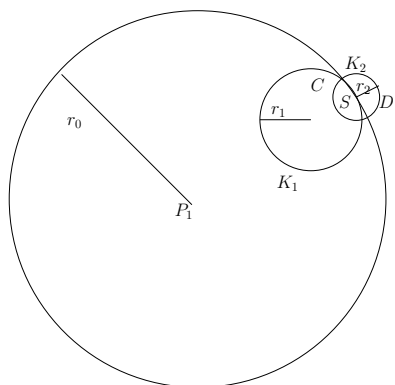
Definer de to mængder  $C$  og  $D$  som følger:

$$C := \partial K_2 \cap (K_1 \cup \partial K_1) \quad \text{og} \quad D := \partial K_2 \setminus C.$$

Dermed er  $C$  den del af randen af  $K_2$ , der ligger indenfor  $K_1$ , samt de to punkter



Figur 2.1.: Illustration af konstruktionen med  $\gamma^*$ .



Figur 2.2.: Illustration af konstruktionen af  $K_1$  og  $K_2$ .

## 2.1 Maximumsprincipper

i  $\partial K_2 \cap \partial K_1$ , mens  $D$  er den del af randen, der ligger strengt udenfor  $\partial K_1$  (se evt. figur 2.2). Bemærk, at  $C$  er en lukket og begrænset (kompakt) mængde. Det følger af definitionen af  $K$ , samt at  $K_1 \setminus S \subseteq K$ , at  $u < M$  på  $C$ . Da  $C$  er kompakt, og  $u$  er kontinuert, antager  $u$  et maksimum  $M_1$ , med  $M_1 < M$  så  $\zeta := M - M_1 > 0$ , og på  $C$  haves  $u \leq M_1$ . Hermed gælder der:

$$u \leq M - (M - M_1) = M - \zeta, \quad \text{i } C. \quad (2.1.3)$$

På  $D$  haves specielt at  $u \leq M$ . Definer hjælpefunktionen  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (hvor  $\tilde{\mathbf{x}}$ , som tidligere, er centrum for  $K_1$ ) ved

$$z(\mathbf{x}) := e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2} \quad (2.1.4)$$

Betragt nu de tre tilfælde med  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  henholdvist i  $K_1$ , på randen af  $K_1$  samt udenfor  $\overline{K_1}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in K_1 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2 < r_1^2 \\ \mathbf{x} \in \partial K_1 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2 = r_1^2 \\ \mathbf{x} \in (K_1 \cup \partial K_1)^C & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2 > r_1^2 \end{aligned}$$

For de tre tilfælde gælder henholdsvis at det første led i (2.1.4) er strengt større end, lig med og strengt mindre det andet led i (2.1.4). Det vil sige

$$z(\mathbf{x}) > 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in K_1 \quad (2.1.5)$$

$$z(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in \partial K_1 \quad (2.1.6)$$

$$z(\mathbf{x}) < 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in (K_1 \cup \partial K_1)^C \quad (2.1.7)$$

Anvendes operatoren  $L$  på hjælpefunktionen  $z$  fås følgende:

$$\begin{aligned} (Lz)(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} + b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2}) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (-2\alpha (x_i - \tilde{x}_i) e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2}) - 2\alpha b_i (x_i - \tilde{x}_i) e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( [-2\alpha (x_i - \tilde{x}_i)]^2 e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} - 2\alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha b_i (x_i - \tilde{x}_i) e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} \right) \\ &= \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} \sum_{i=1}^2 (4\alpha (x_i - \tilde{x}_i)^2 - 2 - 2b_i (x_i - \tilde{x}_i)) \quad (2.1.8) \end{aligned}$$

## 2.1 Maximumsprincipper

---

Da  $r_2 = \frac{r_1}{2}$  haves

$$\sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2 > \frac{r_1^2}{4} \quad (2.1.9)$$

i  $K_2^2$ .

Vi benytter nu vurderingen (2.1.9) i (2.1.8) og ser at

$$(Lz)(\mathbf{x}) > \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} \left( \alpha r_1^2 - 4 - 2 \sum_{i=1}^2 b_i (x_i - \tilde{x}_i) \right) \quad (2.1.10)$$

Vælges  $\alpha$  tilstrækkeligt stort<sup>3</sup>, så:

$$(Lz)(\mathbf{x}) > 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in K_2. \quad (2.1.11)$$

Vælg et  $\varepsilon$  der opfylder ulighederne

$$0 < \varepsilon < \frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha r_1^2}},$$

og sæt

$$w(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \varepsilon z(\mathbf{x})$$

Ifølge (2.1.5) og (2.1.6) er  $0 \leq z < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$  på  $C$ , hvilket medfører, at  $0 \leq \varepsilon z < \zeta$  på  $C$ . Desuden, som i (2.1.3), er  $u \leq M - \zeta$  i  $C$  og disse uligheder giver følgende

$$w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon z(\mathbf{x}) < (M - \zeta) + \zeta = M \quad , \quad \mathbf{x} \in C$$

I (2.1.7) blev det konstateret, at  $z(\mathbf{x}) < 0$  for  $\mathbf{x} \in (K_1 \cup \partial K_1)^C$ . Dermed specielt for  $\mathbf{x} \in D$ . Heraf følger

$$w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon z(\mathbf{x}) \leq M + \varepsilon z(\mathbf{x}) < M \quad , \quad \mathbf{x} \in D$$

Idet  $u(S) = M$ , og  $z(S) = 0$ , er

$$w(S) = u(S) + \varepsilon z(S) = M + \varepsilon 0 = M. \quad (2.1.12)$$

Da  $w$  er en kontinuert funktion på en kompakt mængde  $K_2 \cup \partial K_2$ , antager  $w$  et maksimum herpå. Dette maksimum er ifølge (2.1.12) mindst lig  $M$ , og punkter

---

<sup>2</sup>Her ville ellipticiteten anvendes i det mere generelle tilfælde. Ellipticitet er netop defineret således elliptiske operatorer "opfører sig" som Laplace, så størrelsen på venstresiden i (2.1.9) fremkommer, da koefficienterne kan "kontrolleres".

<sup>3</sup>Størrelsen  $\sum_{i=1}^2 b_i (x_i - \tilde{x}_i)$  er endelig og uafhængig af  $\alpha$ .

herfor ligger dermed ikke på  $\partial K_2 = C \cup D$ , da  $w$  her er strengt mindre end  $M$ . Vi betragter nu følgende udregning:

$$(Lw)(\mathbf{x}) = (Lu)(\mathbf{x}) + \varepsilon(Lz)(\mathbf{x}) \geq 0 + \varepsilon(Lz)(\mathbf{x}) > 0$$

Modstriden ses nu, da et maksimum for  $w$  ikke kan opnås på  $K_2$ , som overvejet først i dette afsnit. ■

Vi skal især benytte følgende variant af dette resultat. Beviset benytter en teknik fra [Gidas et al., 1979].

**Sætning 16.** *Antag, at  $u$  opfylder*

$$(Lu)(\mathbf{x}) := (\Delta u)(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + cu(\mathbf{x}) \geq 0$$

for  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $b_i, c \in \mathbb{R}$ . Hvis  $u$  antager sit maksimum 0 i  $\Omega$  så er  $u \equiv 0$  på  $\Omega$ .

*Bevis.* Definer funktionen:

$$v := e^{-\alpha x_1} u \quad , \quad \alpha > 0 \tag{2.1.13}$$

Hermed kan skrives:

$$\begin{aligned} 0 \leq L(u) &= L(e^{\alpha x_1} v) = \Delta(e^{\alpha x_1} v) + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial(e^{\alpha x_1} v)}{\partial x_i} + ce^{\alpha x_1} v \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha e^{\alpha x_1} v + e^{\alpha x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(e^{\alpha x_1} v) + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial(e^{\alpha x_1} v)}{\partial x_i} + ce^{\alpha x_1} v \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x_1} v + 2\alpha e^{\alpha x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + e^{\alpha x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + e^{\alpha x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial(e^{\alpha x_1} v)}{\partial x_i} + ce^{\alpha x_1} v \\ &= e^{\alpha x_1} (\alpha^2 v + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x_1} + \Delta v + b_1 \alpha v + b_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + cv) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Uligheden i (2.1.14) ganges igennem med  $e^{-\alpha x_1} > 0$ , og

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha^2 + b_1 \alpha + c)v + \left( \Delta v + (2\alpha + b_1) \frac{\partial v}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \\ &=: (\alpha^2 + b_1 \alpha + c)v + L'(v) \end{aligned}$$

## 2.1 Maximumsprincipper

---

Vælg nu  $\alpha$  så  $(\alpha^2 + b_1\alpha + c) > 0$ , og vi har da, per antagelse,  $v \leq 0$ , at:

$$0 \leq L'(v). \quad (2.1.15)$$

Her er  $L'$  på en sådan form at sætning 15 giver, at hvis  $v = e^{-\alpha x_1}u$  antager sit maksimum 0 så er  $v \equiv 0$  på  $\Omega$ . Da  $u = 0 \Leftrightarrow v = 0$  haves dette også om  $u$ . ■

### 2.1.1. Hopfs randpunkt-lemma

**Sætning 17.** *Antag  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  med glat rand samt  $u$  opfylder*

$$L(u) := \Delta u + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0, \quad \text{på } \Omega. \quad (2.1.16)$$

*Hvis yderligere fire følgende udsagn er opfyldt:*

- $u \leq M$  i  $\Omega$  og  $u(P) = M$  med  $P \in \partial\Omega$ ,
- Der eksisterer en åben kugle  $K_1 \subseteq \Omega$  med  $P \in \partial K_1$ ,
- $u \neq M$  og kontinuert i  $\Omega \cup P$ ,
- En udadrettet retningsafledt  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  eksisterer i  $P$ ,

så gælder, at

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) > 0 \quad (2.1.17)$$

*Bevis.* Igen vil vi støtte os op af beviset for sætning 15. Ifølge antagelserne eksisterer en cirkelskive  $K_1$  i  $\Omega$  med  $P$  på dets rand. Hvis  $\partial K_1 \cap \partial\Omega$  indeholder flere punkter end  $P$ , kan vælges en mindre cirkelskive, så det antages at  $\partial K_1 \cap \partial\Omega = \{P\}$ . Nu konstrueres cirkelskiven  $K_2 := B_{r_2}(P)$  hvor  $r_2 := \frac{r_1}{2}$  med  $r_1$  radius i  $K_1$ . Vi definerer, som i beviset for sætning 15, hjælpefunktionen  $z$  (se (2.1.4)), hvor  $\alpha$  vælges så  $(Lz)(x) > 0$  for  $x \in K_2$ . Lad igen:

$$w := u + \varepsilon z \quad (2.1.18)$$

Ifølge sætning 15 gælder at  $u$  ikke konstant lig  $M$  medfører  $u(\mathbf{x}) < M$  for  $\mathbf{x} \in \overline{K_1} \setminus P$ . Vi vælger en konstant  $\zeta$ , ligesom i sætning 15, og herudfra vælges igen et  $\varepsilon > 0$ , således  $w < M$  i  $C$ , på samme vis som i 15. Vi husker vores betragtninger omkring funktionen  $z$  bl.a. at  $z = 0$  på  $\partial K_1$ . Hermed er  $w \leq M$  i  $\partial(K_1 \cap K_2)$ . Da  $L(w) > 0$  i  $(K_1 \cap K_2)$ , må maksimum af  $w$  være i  $P$  med  $w(P) = M$ , og dermed hvis man nærmer sig  $P$  indefra området, må man se en stigning - det vil sige

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(P) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial \nu}(P) \geq 0 \quad (2.1.19)$$



Vises at  $\frac{\partial z}{\partial \nu}(P) < 0$  haves resultatet at  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) > 0$  herfra. For nemhed skyld, så vælges origo i vores koordinatsystem til at være centrum for  $K_1$ , som tidligere betegnet  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ . Så

$$z(x_1, x_2) := e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2} \quad (2.1.20)$$

Vi udregner de partielle afledte:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2) = -2\alpha x_i e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (x_i - \tilde{x}_i)^2} \quad (2.1.21)$$

Med  $\nu$  værende en udadrettet enhedsvektor, og  $P = (p_1, p_2)$  haves

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(P) = (\nabla z)(P) \cdot \nu = -2\alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^2 (p_i - \tilde{x}_i)^2} \sum_{i=1}^2 p_i \nu_i < 0 \quad (2.1.22)$$

Hvor uligheden indses da  $\nu$  og  $P$  begge "peger udad". ■

Vi kan bygge videre på dette resultat, på lignende vis som i beviset for sætning 16.

**Sætning 18** (Hopfs Lemma). *Antag  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  med glat rand, samt at  $u$  opfylder*

$$L(u) := \Delta u + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \geq 0. \quad (2.1.23)$$

*Hvis yderligere fire følgende udsagn er opfyldt;*

- $u \leq 0$  i  $\Omega$  og  $u(P) = 0$  med  $P \in \partial\Omega$ .
- Der eksisterer en åben kugle  $K_1 \subseteq \Omega$  med  $P \in \partial K_1$ .
- $u$  er kontinuert, og  $u(x) \not\equiv 0$  i  $\Omega \cup P$ .
- Den retningsafledte i den udadrettede normals retning  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  eksisterer i  $P$ .

så gælder at

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) > 0 \quad (2.1.24)$$

*Bevis.* Vælg  $x_1$ -aksen tangentielt til  $\partial\Omega$  i  $P$ . Definer funktionen:

$$v := e^{-\alpha x_1} u \quad , \quad \alpha > 0 \quad (2.1.25)$$

## 2.1 Maximumsprincipper

---

Udregn som i (2.1.14) følgende

$$0 \leq L(u) = e^{\alpha x_1} \left( \alpha^2 v + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x_1} + \Delta v + b_1 \alpha v + b_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + cv \right) \quad (2.1.26)$$

Uligheden (2.1.26) ganges igennem med  $e^{-\alpha x_1} > 0$  og vi har

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha^2 + b_1 \alpha + c)v + \left( \Delta v + (2\alpha + b_1) \frac{\partial v}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \\ &=: (\alpha^2 + b_1 \alpha + c)v + L'(v) \end{aligned}$$

Vælg nu  $\alpha$  så  $(\alpha^2 + b_1 \alpha + c) > 0$ , og da  $v \leq 0$  er antaget, gives

$$0 \leq L'(v), \quad (2.1.27)$$

med  $L'$  på en sådan form, at sætning 17 og valget af koordinatsystem giver

$$0 < \frac{\partial v}{\partial \nu}(P) = \frac{\partial(e^{-\alpha x_1} u)}{\partial \nu}(P) = e^{-\alpha x_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(P).$$

Da  $e^{-\alpha x_1} > 0$ , gives resultatet

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) > 0.$$

■

### 3. Egenfunktioner og knudelinjer

Efter diskussionen af egenfunktionernes opførsel mht. regularitet (i afsnit 1.2), vil vi udtale os om det centrale aspekt ved egenfunktionerne for denne tekst - den såkaldte knudelinje:

**Definition 19.** For en funktion  $f : U \rightarrow V$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}$ , defineres knudelinjen  $N_f$  som

$$N := \overline{\{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}}. \quad (3.0.1)$$

◇

Maximumsprincippet fra sætning 15, samt glatheden af egenfunktion, medfører strenge begrænsninger på udseendet af egenfunktionernes knudelinjer.

**Knudelinjen er glat når gradienten af  $u$  ikke er nul** Dette indses vha. implicit funktionssætning på følgende vis: der haves, at  $u$  er glat i  $\bar{\Omega}$ . Antag  $\nabla u(x_0, y_0) \neq 0$ , dvs. antag uden tab af generalitet, at  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ . Da haves et åbent interval  $U$  indeholdende  $x_0$  og et åbent interval  $V$  indeholdende  $y_0$ , samt en glat entydig funktion  $y : U \rightarrow V$  så  $(x, y) = (x, y(x))$  for  $(x, y) \in U \times V$ , og  $u(x, y(x)) = 0$ . Hermed parametriseres  $N$  med den glatte kurve  $N(t) := (t, y(t))$  i en omegn af  $(x_0, y_0)$ .

Dermed er  $N$  glat i  $\Omega$  bortset muligvis fra punkter med  $\nabla u = 0$ .

**Hvordan knudelinjen stopper** Andre geometriske egenskaber ved knudelinjer fås ved at gøre sig følgende betragtning. Konstater, at hvis en egenfunktion  $u$  på  $\Omega$  har konstant fortegn på en mængde åben mængde  $A$  og antager sit maksimum i et punkt  $\mathbf{p} \in A$ , da er ifølge sætning 15  $u \equiv 0$  på  $\Omega$ . Dermed haves specielt, at  $u$  skifter fortegn henover  $N$ . Der gælder følgende:

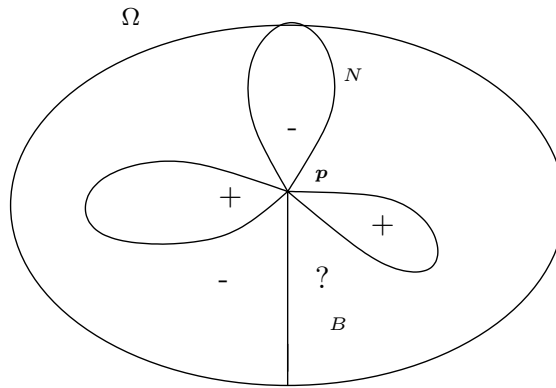
- $N$  for en egenfunktion har ingen indre punkter (dvs. ordet *knudelinje* er velvalgt.). Antag modsætningsvist, at  $N$  havde et indre punkt  $\mathbf{p}$ . Lad  $B$  være et, til  $N$  tilstødende, område nær  $\mathbf{p}$ , hvorpå  $u > 0$ . Lad nu  $A := (B \cup N)^0$ . Så er  $u \geq 0$  på  $A$ . Dermed vil  $u \equiv 0$  på  $A$ , og vi har en modstrid.
- $N$  kan ikke stoppe i  $\Omega$ . Antag modsætningsvist, at  $N$  stoppede i  $\mathbf{p}$ . Så eksisterer et  $r_0 > 0$  så  $u$  har konstant fortegn på  $A := B_{r_0}(\mathbf{p}) \subseteq \Omega$ . Ved

### 3.1 Courants knudelinjesætning

---

samme argument som før medfører dette, at  $u \equiv 0$  på  $\Omega$ , og vi har en modstrid.

- $N$  stopper ikke på sig selv - dvs. hvis  $N$  laver en løkke i et punkt  $p$ , så vil  $N$  skære sig selv. Antag  $N$  laver  $m$  løkker i  $p$ , og antag modsætningsvist, at punktet  $p$  gennemløbes af knudelinjen  $2m + 1$  gange, svarende til, at  $N$  starter i et punkt  $q \neq p$  og stopper på sig selv efter  $m$ 'te løkke (se evt. figur 3.1). Da  $N$  gennemløber  $p$  et ulige antal gange, og  $u$  skifter fortegn hen over  $N$ , vil der eksisterer et område  $B$  hvorpå  $u > 0$  og  $u < 0$  (se igen figur 3.1). og vi har en modstrid.



Figur 3.1.: En knudelinje, der modsætningsvist stopper på sig selv efter tre løkker. Plus og minus illustrerer fortegnet af  $u$ .

### 3.1. Courants knudelinjesætning

I dette afsnit vises Courants knudelinjesætning, der giver en øvre grænse på antallet områder, knudelinjen for en  $n$ 'te egenfunktion opdeler det pågældende område i. Vi giver her det oprindelige bevis fra [Courant, 1953, side 452], og får brug for følgende sætning fra [Gladwell and Zhu, 2002], der medtages uden bevis.

**Sætning 20.** *Lad  $u \in H_0^1(G)$  opfylde  $\Delta u + \lambda u = 0$ . Lad  $G' \subseteq G$  være åben. Hvis  $u = 0$  på  $G'$  så er  $u \equiv 0$  på  $G$ .*

**Sætning 21** (Courants knudelinjesætning). *Lad  $\Omega$  være et sammenhængende område og lad*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots,$$

### 3.1 Courants knudelinjesætning

være egenverdier som i afsnit 1.1.1. Hvis  $u_n$  er den  $n$ te egenfunktion tilhørende egenværdien  $\lambda_n$ , da opdeler knudelinjen  $N$  for  $u_n$  højst  $\Omega$  i  $n$  områder.

*Bevis.* Lad egenværdierne for  $\Omega$  være ordnet, så

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad (3.1.1)$$

Idet vi nu modsætningsvist antager, at knudelinjen opdeler  $\Omega$  i mere end  $n$  disjunkte og åbne områder  $D_1, \dots, D_n, \dots$ , indføres  $w_i$  for  $i = 1, \dots, n$  ved

$$w_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} b_i u_n(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in D_i \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor

$$b_i := \frac{1}{\int_{D_i} |u_n|^2},$$

således

$$\int_{\Omega} w_i w_i = \int_{D_i} |w_i|^2 = b_i^2 \int_{D_i} |u_n|^2 = 1,$$

Da  $D_i$ 'erne er disjunkte, gælder

$$\int_{\Omega} w_i w_j = \int_{D_i} w_i \cdot 0 + \int_{D_j} 0 \cdot w_j = 0 \quad , \quad 1 \leq j < i \leq m.$$

Indfør funktionen

$$v := \sum_{i=1}^m c_i w_i,$$

med  $c_i$ 'erne således, at

$$\int_{\Omega} |v|^2 = \sum_{i=1}^m c_i^2 \int_{D_i} |w_i|^2 = \sum_{i=1}^m c_i^2 = 1.$$

Ved partiel integration (se evt. Greens første sætning side 557 i [Courant and John, 2000]), hvor det benyttes, at  $w_i = 0$  på  $\partial D_i$  og  $\boldsymbol{\nu}$  er den udadrettede normalvektor til  $\partial\Omega$ , følger

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w_i|^2 &= \int_{\Omega} -(\Delta w_i) w_i + \int_{\partial\Omega} w_i \frac{\partial w_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} \\ &= - \sum_{i=1}^m \int_{D_i} b_i^2 (\Delta u_n) u_n = \lambda_n \int_{D_i} \sum_{i=1}^m b_i^2 |u_n|^2 = \lambda_n. \end{aligned}$$

### 3.1 Courants knudelinjesætning

Så gælder

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \sum_{i=1}^m c_i^2 \int_{\Omega} |\nabla w_i|^2 = \sum_{i=1}^m c_i^2 \lambda_n = \lambda_n, \quad (3.1.2)$$

$$\mathcal{E}(v) = \lambda_n. \quad (3.1.3)$$

Lad

$$D^{(1)} := \cup_{i=1}^n D_i$$

Da man kan vælge  $c_1, \dots, c_n$ , så de  $n-1$  lineære, homogene ligninger  $\int_{D^{(1)}} v u_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  er opfyldt, gælder om den  $n$ 'te egenværdi  $\lambda_n^{(1)}$  på  $D^{(1)}$ , at

$$\lambda_n^{(1)} = \inf \{ \mathcal{E}(\varphi) : \varphi \in H_0^1(D^{(1)}), \|\varphi\|_{L^2(D^{(1)})} = 1, (\varphi, u_i)_{L^2(D^{(1)})} = 0, i = 1, \dots, n-1 \} \\ \leq \mathcal{E}(v) = \lambda_n.$$

I følge sætning 9 gælder også  $\lambda_n^{(1)} \geq \lambda_n$ , hvor ved  $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n$ .

Nu vises, at det ikke er muligt for et område at have et delområde med samme  $n$ 'te egenværdi, så delområdet er strengt indeholdt i området i passende forstand<sup>1</sup>.

Lav en følge af områder  $D^{(k)} \subseteq \Omega$  så  $D^{(k-1)} \subseteq D^{(k)}$  og især  $D^{(1)} \subseteq D^{(2)}$ . Lad  $\lambda_n^{(k)}$  være den  $n$ 'te egenværdi på  $D^{(k)}$ , så gælder fra sætning 9, at

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \geq \lambda_n^{(k)} \geq \lambda_n,$$

således  $\lambda_n^{(k)} = \lambda_n$  for alle sådanne  $D^{(k)}$ . Da vi har ordnet egenværdierne som i (3.1.1) eksisterer et  $m > n$  således

$$\lambda_m > \lambda_n. \quad (3.1.4)$$

Betragt nu  $D^{(1)}, \dots, D^{(m)}$ . Den  $n$ 'te egenværdi på hver af disse områder er  $\lambda_n$ . Tag nu  $\tilde{u}_n^{(1)}, \dots, \tilde{u}_n^{(m)}$ , så  $u_n^{(i)}$  er en tilhørende egenfunktion på  $D^{(i)}$ , og sæt

$$u_n^{(i)} = \begin{cases} \tilde{u}_n^{(i)} & \text{på } D^{(i)} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ved at benytte sætning 20 fås, at  $u_n^{(j)} \not\equiv 0$  på åbne  $D \subseteq D^{(j)}$ . Med et induktivt argument kan det indses, at  $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(m)}$  er lineært uafhængige. Betragt derfor  $\sum_{i=1}^m k_i u_n^{(i)} = 0$ . På  $D^{(m)} \setminus D^{(m-1)}$  er  $u_n^{(1)} = \dots = u_n^{(m-1)} = 0$ , så

$$0 = \sum_{i=1}^m k_i u_n^{(i)} = k_m u_n^{(m)} \quad \Leftrightarrow \quad k_m = 0 \quad \text{på } D^{(m)} \setminus D^{(m-1)},$$

<sup>1</sup>Hermed bevises faktisk streng monotonicitet af egenværdierne mht. områder strengt indeholdt i hinanden.

da  $u_n^{(m)} \not\equiv 0$  herpå. Dermed er

$$0 = \sum_{i=1}^{m-1} k_i u_n^{(i)} \quad \text{på } \Omega.$$

Antag nu, at  $k_{j+1} = 0, \dots, k_m = 0$ , så er også  $k_j = 0$ , da på  $D^{(j)} \setminus D^{(j-1)}$  gælder

$$0 = \sum_{i=1}^j k_i u_n^{(i)} = k_j u_n^{(j)} \quad \Leftrightarrow \quad k_j = 0, \quad \text{på } D^{(j)} \setminus D^{(j-1)},$$

idet  $u_n^{(j)} \not\equiv 0$  herpå. Dermed haves

$$0 = \sum_{i=1}^m k_i u_n^{(i)} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = \dots = k_m = 0,$$

således  $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(m)}$  er lineært uafhængige. Lad derfor

$$\tilde{v} := k_1 u_n^{(1)} + \dots + k_m u_n^{(m)}.$$

Da ikke alle  $k_1, \dots, k_m$  er lig nul kan  $k_1, \dots, k_m$  vælges således de  $m-1$  lineære, homogene ligninger

$$\int_{\Omega} \tilde{v} u_i = \int_{D^{(m)}} \tilde{v} u_i = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, m-1.$$

er opfyldt. Og da  $\tilde{v} \not\equiv 0$  kan vi yderligere vælge  $k_1, \dots, k_m$ , således  $\tilde{v}$  er normaliseret. Dermed er

$$\mathcal{E}(\tilde{v}) \geq \lambda_m.$$

Lav følgende udregning ved partiel integration, hvor det udnyttes at  $u_n^{(i)}|_{\partial D^{(i)}} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tilde{v}) &= \int_{\Omega} (\nabla(k_1 u_n^{(1)} + \dots + k_m u_n^{(m)}))^2 \\ &= \int_{\Omega} (k_1 \lambda_n (u_n^{(1)})^2 + \dots + k_m \lambda_n (u_n^{(m)})^2) = \lambda_n, \end{aligned}$$

hvor led på formen  $\int_{\Omega} k_j \lambda_n u_n^{(j)} u_n^{(l)} = 0$ , da  $u_n^{(i)}$ 'erne er egenfunktioner. Dermed er  $\lambda_n \geq \lambda_m$ , men da  $m$  er valgt i (3.1.4) så  $\lambda_m > \lambda_n$  haves en modstrid, hvorved knudelinjen for den  $n$ 'te egenfunktion ikke inddeler  $\Omega$  i mere end  $n$  områder. ■

**Bemærkning 22.** *En konsekvens af sætning 21 er, at man for en anden egenfunktion kan slutte, at denne opdeler det pågældende område i to. Argumentet*

er som følger: Fra sætning 21 vil den første egenfunktion,  $u_1$ , ikke skifte fortegn hen over  $\Omega$ . Den anden egenfunktion,  $u_2$ , er defineret så  $\int_{\Omega} u_1 u_2 = 0$ . Dermed må  $u_2$  nødvendigvis skifte fortegn hen over  $\Omega$ . Da  $u_2$  er kontinuert på  $\Omega$  vil områderne med forskellig fortegn være adskilt af knudelinjen. Der er mindst to af disse områder. Fra sætning 21 er der samtidig højst to af disse områder. Derfor opdeler knudelinjen for  $u_2$   $\Omega$  i præcist to områder, og  $u_2$  har forskelligt fortegn på hver af disse.  $\circ$

## 3.2. Lemmaer til hovedsætning

I dette kapitel samler vi nogle værktøjer, i form af lemmaer, vi benytter til at vise vores hovedsætning.

### 3.2.1. Egenfunktioner og knudelinjers opførsel nær randen

I dette afsnit bevises, et for de efterfølgende sætninger, centralt lemma. Først defineres for glatte funktioner hvad det vil sige at forsvinde af uendelig orden.

**Definition 23.** Lad  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hvor  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  er åben, med  $f \in C^\infty(D)$ . Da siges  $\mathbf{x}_0$  at være et nulpunkt for  $f$  af orden  $k \in \mathbb{N}$ , hvis for alle  $j \in \{0, \dots, k-1\}$

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_1^i \partial x_2^{j-i}}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i = 0, \dots, j$$

Hvis  $\mathbf{x}_0$  er et nulpunkt for  $f$  af orden  $k$ , da siges  $f$  at forsvinde af orden  $k$  i  $\mathbf{x}_0$ . Hvis  $f$  forsvinder af enhver orden  $k \in \mathbb{N}$ , da siges  $f$  at forsvinde af uendelig orden i  $\mathbf{x}_0$ .  $\diamond$

En lignende definition for funktioner, der blot er målelige, er følgende

**Definition 24.** Lad  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  hvor  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  er åben, være en målelig funktion,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  samt  $1 \leq p < \infty$ . Da siges  $\mathbf{x}_0$  at være et nulpunkt af orden  $\alpha$  i  $L^p$ -middel, hvis

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<r} |g(\mathbf{x})|^p = O(r^{p\alpha+n}).$$

Hvis  $\mathbf{x}_0$  er et nulpunkt for  $g$  af orden  $\alpha$  i  $L^p$ -middel, da siges  $g$  at forsvinde af orden  $\alpha$  i  $L^p$ -middel i  $\mathbf{x}_0$ . Hvis  $g$  forsvinder af enhver orden  $\alpha > 0$  i  $L^p$ -middel i  $\mathbf{x}_0$ , da siges  $g$  at forsvinde af uendelig orden i  $L^p$ -middel i  $\mathbf{x}_0$ .  $\diamond$

**Bemærkning 25.** Vi viser her, at hvis  $g$  er en glat funktion med et nulpunkt i  $\mathbf{x}^0$  af orden  $k$ , så er  $\mathbf{x}_0$  også et nulpunkt af orden  $k$  i  $L^p$ -middel for alle  $1 \leq p < \infty$ . Antag  $g \in C^\infty(D)$  med  $\mathbf{x}^0$  et nulpunkt af orden  $k$ . I Taylor-udviklingen (se evt.



[Wade, 2004, 11.37 Theorem]) af  $g$  omkring  $\mathbf{x}^0$  af orden  $k$ , falder alle led med afledte af orden skarpt mindre end  $k$  væk, og restleddet står tilbage dvs.

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k g}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\mathbf{z})(x_1 - x_1^0)^i (x_2 - x_2^0)^{m-i}, \quad (3.2.1)$$

for et  $\mathbf{z} \in L[x, x_0] := \{(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}_0) : \lambda \in [0; 1]\}$ . Da  $g$  er glat så

$$C := \sup_{\substack{x \in B_\delta(x^0), \\ i \in \{0, \dots, k\}}} \left\{ \left| \frac{\partial^k g}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\mathbf{x}) \right| \right\} < \infty, \quad (3.2.2)$$

gælder for  $r < \delta$

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r} |g(\mathbf{x})|^p &= \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r} \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k g}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\mathbf{z})(x_1 - x_1^0)^i (x_2 - x_2^0)^{m-i} \right|^p \\ &\leq \frac{|C|^p}{(k!)^p} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r} \left| \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (x_1 - x_1^0)^i (x_2 - x_2^0)^{m-i} \right|^p \\ &= \frac{|C|^p}{(k!)^p} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r} |((x_1 - x_1^0) + (x_2 - x_2^0))^k|^p \\ &\leq C' r^{pk+2} = O(r^{pk+2}), \end{aligned}$$

og resultatet høves. ◦

Følgende sætning fra [Aronszajn, 1957, s. 235-236], her formuleret for  $\mathbb{R}^2$  og Laplace-operatoren, istedet for en generel elliptisk partiel differential-operator, medtages uden bevis.

**Sætning 26.** Antag  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , med  $h \in C^2(D)$  med første- og anden-ordens partielle afledte i  $L^2(D)$ , for et  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ , opfylder

$$|\Delta h(\mathbf{x})|^2 \leq M \left( \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|^2 + |h(\mathbf{x})|^2 \right). \quad (3.2.3)$$

Hvis  $h$  forsvinder af uendelig orden i  $L^1$ -middel i  $\mathbf{x}_0$ , så er  $h \equiv 0$  på  $D$ .

**Lemma 27.** Lad  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , hvor  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  er et begrænset, konvekst område med glat rand, opfylde egenværdiligningen, dvs.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Hvis  $\mathbf{q} \in \partial\Omega$ , gælder om  $u$  følgende 3 udsagn:

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

1.  $u$  forsvinder ikke af uendelig orden i  $\mathbf{q}$
2. Lad  $N$  betegne knudelinjen for  $u$ . Hvis  $\mathbf{q} \in N$  går  $N$  ikke mod  $\mathbf{q}$  tangentielt til  $\partial\Omega$  i  $\mathbf{q}$ .
3. Der eksisterer  $\varepsilon > 0$ , så

$$|u| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| > 0 \quad \text{på } \Omega \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{q}| < \varepsilon\}$$

*Bevis.* 1. I beviset for det første punkt foretages en udglatning af randen, idet dette giver en mere håndgribelig måde at omtale en udvidelse af  $u$  til den anden side af randen. Sæt nu  $H = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$  og lad  $f : H \rightarrow \Omega$  være en konform afbildning. Eksistensen af en sådan afbildning følger af Riemann mapping theorem, se [Krantz, 1999, Chapter 6.4]. Dette følger af antagelserne om  $\Omega$ , da  $\Omega$  specielt er homeomorf med enhedskuglen, og der eksisterer konforme afbildninger fra enhedskuglen til halvplaner - se f.eks. Cayley-transformationen  $z \mapsto \frac{i+z}{i-z}$  i [Krantz, 1999, side 85]. Ifølge [Steven R. Bell and Steven G. Krantz, 1987, side 23 og Theorem A] udvider  $f$  og alle dens afledte kontinuert til funktioner på  $\overline{H}$ , og vi lader udvidelsen af  $f$  overtage betegnelsen  $f$ . Antag nu  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{q}$ . En konform afbildning, set som en funktion fra  $\mathbb{C}$  til  $\mathbb{C}$ , er specielt holomorf [Krantz, 1999, s.25]. Skrives

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) =: (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

gælder Cauchy-Riemann-ligningerne

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \quad (3.2.5)$$

Lad  $v = u \circ f$ . Så gælder at  $v \in C^\infty(\overline{B_{r_0}(\mathbf{q})} \cap \overline{H})$  og  $v = 0$  på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{q})} \cap \partial H$ , idet  $v$  "arver" disse egenskaber fra  $u$ . Udfør nu følgende udregning.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} u(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Således

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1^2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_2^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Tilsvarende fås ved anvendelse af Cauchy-Riemann-ligningerne (3.2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}_2^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1^2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_2^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_2^2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Ved at benytte at realdelen og imaginærdelen af en holomorfe funktion er harmoniske<sup>2</sup>, fås fra de to ovenstående formellinjer, at

$$\Delta v = \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1^2} \left( \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_2^2} \left( \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) = \Delta u(f)|f'|.$$

Da den kontinuerte funktion  $|f'|$  antager sit maksimum på den kompakte mængde  $B_{r_0}(\mathbf{q}) \cap \overline{H}$  og da  $\Delta u = -\lambda u$ , se (3.2.4), fås

$$|\Delta v| = |\Delta u(f)||f'|^2 \leq C|v| \quad \text{på } \overline{B_{r_0}(\mathbf{q})} \cap \overline{H}. \quad (3.2.6)$$

Indfør følgende funktion

$$\tilde{v}(x_1, x_2) = \begin{cases} v(x_1, x_2) & \text{for } x_2 \geq 0 \\ -v(x_1, -x_2) & \text{for } x_2 < 0. \end{cases}$$

Da  $v \in C^\infty(\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \overline{H})$  eksisterer de partielle afledte i hele  $\mathbb{R}^2$ . Da

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}_+} \frac{\partial v(x_1, h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}_+} \frac{v(x_1, h) - v(0, 0)}{h} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} \\ &= \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}_-} \frac{-v(x_1, -h) + v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}_-} \frac{-v(x_1, -h)}{h}, \end{aligned}$$

og det udelukkende er i punkter  $(\cdot, 0)$ , at der kan være problemer med kontinuiteten (idet denne ellers følger af glathed af  $v$ ), haves at  $\partial \tilde{v} / \partial x_2$  er kontinuert. For et fast  $x_2$  arver  $\tilde{v}$  glathedsegenskaberne fra  $v$ , hvormed

$$\partial \tilde{v} / \partial x_1, \quad \partial^2 \tilde{v} / \partial x_1 \partial x_2 \quad \text{og} \quad \partial^2 \tilde{v} / \partial x_1^2$$

<sup>2</sup>Hvilket egentligt også følger direkte fra Cauchy-Riemann-ligningerne.

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

er kontinuerte. For at have kontinuitet af  $\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_2^2}$  skal  $\partial^2 \tilde{v} / \partial x_2^2(\cdot, 0) = 0$ , da  $\partial \tilde{v} / \partial x_2$  er lige. Da  $v = 0$  på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \partial H$ , så er  $\partial v / \partial x_1(\cdot, 0) = 0$  på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \partial H$ . Dermed er  $\partial^2 \tilde{v} / \partial x_1^2 = 0$  på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \partial H$ . Fra (3.2.6) følger

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right| = \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right| = |\Delta v| \leq C|v| = 0, \quad \text{på } \overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \partial H,$$

og kontinuiteten af  $\partial^2 \tilde{v} / \partial x_2^2$  på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})}$  er vist. Dermed haves  $\tilde{v} \in C^2(\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})})$ . Bemærk nu, at

$$|\Delta v| \leq C|v| \quad \text{på } \overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \overline{H} \quad \text{og} \quad |\Delta v| \leq C|v| \quad \text{på } \overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \cap \overline{H^C}$$

Dermed gælder

$$|\Delta \tilde{v}| \leq C|\tilde{v}| \quad \text{på } \overline{B_{r_0}(\mathbf{0})}.$$

Dette viser, at  $\tilde{v}$  opfylder en ulighed på formen i (3.2.3). Yderligere medfører  $\tilde{v} \in C^2(\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})})$ , at de afledte af første og anden orden antager maksimum og minimum på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})}$ , hvorfor disse er i  $L^2(\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})})$ . Da  $\tilde{v} \not\equiv 0$  på  $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})}$  medfører sætning 26, at  $\tilde{v}$  ikke forsvinder af uendelig orden i  $\mathbf{0}$  i  $L^1$ -middel. Dermed forsvinder  $v$  ikke af uendelig orden i  $\mathbf{0}$  i  $L^1$ -middel. Kommentaren 25 giver, at da  $v$  ikke forsvinder af uendelig orden i  $L^1$ -middel i  $\mathbf{0}$ , så forsvinder  $u$  ikke af uendelig orden i  $\mathbf{q}$ <sup>3</sup>.

2. Da  $u$  ikke forsvinder af uendelig orden i  $\mathbf{q}$ , eksisterer et  $m$  og en  $m$ 'te ordens partiel afledt af  $u$  der ikke er lig 0 i  $\mathbf{q}$ , med alle partielle afledte, af orden mindre end  $m$ , lig 0 i  $\mathbf{q}$ .  $i < m$ . Sæt  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Taylorudviklingen for  $u$  i  $\mathbf{0}$  er som følger

$$u(\mathbf{x}) = p_m(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \quad \text{for } |\mathbf{x}| < \delta < 1, \quad (3.2.7)$$

hvor  $p_m$  er et homogent polynomium af grad  $m$  og  $f \in O(|\mathbf{x}|^{m+1})$  er restleddet. Bemærk, at  $\Delta f \in O(|\mathbf{x}|^{m-1})$  for  $|\mathbf{x}| \leq \delta < 1$  pga. af formen af  $f$  (se evt. udregninger ved kommentar 25). Da  $p_m$  er et homogent polynomium af grad  $m$ , vil  $\Delta p_m$  være et homogent polynomium af grad  $m - 2$ . Og det haves, at

$$\Delta u = \Delta p_m(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}).$$

Benyttes  $\Delta u + \lambda u = 0$ , fås

$$-\lambda p_m(\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}) = -\lambda u(\mathbf{x}) = \Delta u = \Delta p_m(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) \quad \text{for } |\mathbf{x}| < \delta < 1.$$

Hvis  $|\mathbf{x}| < 1$  vil  $|\mathbf{x}|^{m-1} > |\mathbf{x}|^m > |\mathbf{x}|^{m+1}$ , således, at

$$\Delta p_m(\mathbf{x}) = -\lambda p_m(\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}) - \Delta f(\mathbf{x}) \in O(|\mathbf{x}|^{m-1}) \quad \text{for } |\mathbf{x}| < \delta < 1. \quad (3.2.8)$$

<sup>3</sup>Her tillader vi os at benytte definitionerne af nulpunkter af en vis orden på randen af et område. Dette kan gøres da vi her arbejder med glathed op til og med en glat rand.

Bemærk specielt, at  $p_m \in O(|\mathbf{x}|^{m-1})$ , hvilket indses ved at anvende binomialformlen og konveksiteten af  $t \mapsto t^2$ . Udfra (3.2.8) kan vi med et scalingsargument indse, at

Givet  $\mathbf{x} \in H := \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ <sup>4</sup>, så følger det af (3.2.8), at der eksisterer  $K \in \mathbb{R}$ , så for alle  $k > K > 0$  gælder følgende

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{m-2} \Delta p_m(\mathbf{x}) = \Delta p_m\left(\frac{1}{k}\mathbf{x}\right) \leq C\left(\frac{1}{k}|\mathbf{x}|^{m-1}\right) \leq C\left(\frac{1}{k}\right)^{m-1} |\mathbf{x}|^{m-1},$$

hvilket medfører

$$k\Delta p_m(\mathbf{x}) \leq C|\mathbf{x}|^{m-1}.$$

Dette er umuligt for tilstrækkeligt store  $k$ . Dermed  $\Delta p_m(\mathbf{x}) = 0$  for  $\mathbf{x} \in H = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ , idet  $\Delta p_m$  er et homogent polynomium. Da  $u = 0$  specielt på  $\partial\Omega \cap B_{r_0}(\mathbf{0})$ , er  $p_m = 0$  på  $\partial\Omega \cap B_{r_0}(\mathbf{0})$ . Idet  $p_m$  er et homogent polynomium haves så, at  $p_m(x_1, x_2) = 0$  på  $\partial H$ . Ideen er nu, at omskrive  $p_m$  til polære koordinater. Indse nu, at homogeniteten af  $p_m$  giver

$$(r, \theta) = r^m g(\theta),$$

hvor  $g = \sum_{i=0}^m a_i \cos^i(\theta) \sin^{m-i}(\theta)$ . Så fås

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta p_m(r, \theta) = r^{m-2} (m(m-1)g(\theta) + mg(\theta) + g''(\theta)) \\ &= r^{m-2} (m^2 g(\theta) + g''(\theta)), \end{aligned}$$

da  $p_m$  er harmonisk. Et generelt resultat om løsningsformen af ordinære differentialligninger (se evt. [Jensen, 2000, sætning 5.3]) haves,

$$g(r, \theta) = b \cos(m\theta) + c \sin(m\theta).$$

Da  $p_m = 0$  på  $\partial H$  er  $b = 0$  og den polære repræsentation af  $p_m$  bliver

$$p_m(r, \theta) = cr^m \sin(m\theta) \quad , \quad c \neq 0. \quad (3.2.9)$$

Betragt et  $r$ ,  $0 < r < r_0$ . Kald skæringspunkterne mellem  $B_r(\mathbf{0})$  og  $\partial\Omega$  for henholdsvis  $(r, \theta^-)$  og  $(r, \theta^+)$ , så

$$0 \leq \theta^- < \theta^+ \leq \pi.$$

Lad  $(r, \theta)$  være punktet hvor  $N \cap \Omega$  skærer  $B_r(\mathbf{0})$ . Da  $\Omega$  er konveks haves

$$0 \leq \theta^- < \theta < \theta^+ \leq \pi.$$

<sup>4</sup>Idet  $x_1$ -aksen er valgt tangentielt til  $\partial\Omega$  i  $\mathbf{0}$  og  $x_2$  langs den indadrettede normal i  $\mathbf{0}$ .

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

---

Målet er at vurdere  $\theta$  skarpt væk fra 0 og  $\pi$  for alle tilstrækkeligt små radier. Da  $u$  specielt er nul på  $\partial\Omega \cap B_r(\mathbf{0})$  og på  $N$  er

$$u(r, \theta^-) = u(r, \theta) = u(r, \theta^+) = 0.$$

Ved at benytte Rolles sætning ([Wade, 2004, 4.12 lemma]), idet  $u$  er glat, følger eksistensen af  $\theta_1$  og  $\theta_2$ , med

$$0 \leq \theta^- < \theta_1 < \theta < \theta_2 < \theta^+ \leq \pi, \quad (3.2.10)$$

så

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta_1) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta_2) = 0.$$

Lav følgende udregning ved at benytte (3.2.9)

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta_i) = cmr^m \cos(m\theta_i) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta_i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

hvor  $\tilde{f}(r, \theta)$  er den polære repræsentation af  $f$ . Fra formen af  $\tilde{f}$  haves, at  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \in O(r^{m+1})$ . Så er

$$\cos(m\theta_i) < \frac{-kr^{m+1}}{cr^m} = Cr \quad , \quad i = 1, 2$$

hvor  $i = 1, 2$ .

$$|\cos(m\theta_i)| \leq C_1 r \quad , \quad \text{med } C_1 > 0 \quad , \quad i = 1, 2. \quad (3.2.11)$$

For  $r < (2C_1)^{-1}$  gælder vha. (3.2.11), at

$$\cos(m\theta_1) \leq |\cos(m\theta_1)| \leq \frac{C_1}{2C_1} = \frac{1}{2}$$

og samtidigt med  $c_1 := \frac{\pi}{m^4}$  er

$$\cos(mc_1) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} > \cos(m\theta_1),$$

Da  $\cos \theta$  er aftagende for  $\theta \in [0, \pi]$  er  $\theta_1 > c_1$ . Tilsvarende fås for  $c_2 := \pi/m - \pi/4m$ , at

$$\cos(mc_2) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{2} < \cos(m\theta_2),$$

og dermed  $c_2 > \theta_2$ . Da  $c_1 > 0$ ,  $c_2 < \pi$ , fås ved indsættelse i 3.2.10, at

$$0 < c_1 < \theta_1 < \theta < \theta_2 < c_2 < \pi. \quad (3.2.12)$$

Da nu (3.2.12) gælder for alle  $0 < r < (2C_1)^{-1}$  viser dette, at  $0 < \theta < \pi$  for alle disse radier, således at  $N$  ikke nærmer sig  $\mathbf{0}$ , dvs.  $\mathbf{q}$ , tangentielt.

3. Lad igen  $\mathbf{q} = \mathbf{0} \in \partial\Omega$ . Hvis  $\mathbf{0} \notin N$ , er  $|u| > 0$  på en omegn om  $\mathbf{0}$ , og der er ikke være noget at vise. Antag derfor, at  $\mathbf{0} \in N$ . Dermed kan vi, vha. beviset for punkt 2 ovenfor, slutte, at for et punkt  $(r, \theta) \in N$  (så  $u(r, \theta) = 0$ ) eksisterer  $\delta > 0$  og vinkler  $\theta_1, \theta_2$  så for  $0 < r < \delta$  er  $0 < \theta_1 < \theta < \theta_2 < \pi$ , således at

$$\sin \theta > c_3 > 0,$$

med  $c_3 = \min\{\sin \theta_1, \sin \theta_2\}$ . Kald koordinatskiftet fra rektangulære koordinater til polære koordinater  $T : (x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$ , så  $p_m(x_1, x_2) = p_m(T_1^{-1}(r, \theta), T_2^{-1}(r, \theta))$  med  $x_1 = T_1^{-1}(r, \theta) = r \cos \theta$  og  $x_2 = T_2^{-1}(r, \theta) = r \sin \theta$ . Differentier udtrykket i (3.2.7) ved at benytte (3.2.9) og kædereglen

$$\frac{\partial p_m}{\partial r} = \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \frac{\partial T_1^{-1}}{\partial r} + \frac{\partial p_m}{\partial x_2} \frac{\partial T_2^{-1}}{\partial r},$$

så

$$mcr^{m-1} \sin m\theta = \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial p_m}{\partial x_2} \sin \theta. \quad (3.2.13)$$

Tilsvarende

$$\frac{\partial p_m}{\partial \theta} = mcr^m \cos m\theta = \frac{\partial p_m}{\partial \theta} = -r \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \sin \theta + r \frac{\partial p_m}{\partial x_2} \cos \theta. \quad (3.2.14)$$

For  $\cos \neq 0$ , og  $\sin \neq 0$  haves

$$mcr^{m-1} \sin m\theta \cos \theta = \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \cos^2 \theta + \frac{\partial p_m}{\partial x_2} \cos \theta \sin \theta \quad (3.2.15)$$

og

$$-mcr^{m-1} \cos m\theta \sin \theta = \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \sin^2 \theta - \frac{\partial p_m}{\partial x_2} \sin \theta \cos \theta. \quad (3.2.16)$$

Ved at addere (3.2.15) og (3.2.16) fås

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_1} = mcr^{m-1} (\sin m\theta \cos \theta - \cos m\theta \sin \theta) = mcr^{m-1} \sin(m-1)\theta, \quad (3.2.17)$$

idet

$$(\sin m\theta \cos \theta - \cos m\theta \sin \theta) = \sin(m-1)\theta. \quad (3.2.18)$$

Ved at betragte (3.2.13) i tilfældet  $\sin \theta = 0$ , fås

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_1} = mcr^{m-1} \sin m\theta = mcr^{m-1} \sin(m-1)\theta,$$

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

hvilket følger af (3.2.18). Tilsvarende betragtes (3.2.14) i tilfældet  $\cos \theta = 0$ . Dermed gælder (3.2.17) for alle  $\theta$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(r, \theta) = cmr^{m-1} \sin(m-1)\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(r, \theta), \quad (3.2.19)$$

hvor  $\tilde{f} \in O(r^{m+1})$  er den polære repræsentation af  $f$  (se (3.2.7)), og  $\partial \tilde{f} / \partial x_1 \in O(r^m)$  ved at betragte formen af  $f$ . Hvis  $u(r, \theta) = \partial u / \partial x_1(r, \theta) = 0$ , er

$$0 = u(r, \theta) = cr^m \sin m\theta + \tilde{f}(r, \theta),$$

så

$$|\sin m\theta| \leq Cr,$$

og tilsvarende

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(r, \theta) = cmr^{m-1} \sin(m-1)\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(r, \theta)$$

medfører

$$|\sin(m-1)\theta| \leq Cr.$$

Nu fås, at

$$\begin{aligned} |\sin m\theta| &= |\sin((m-1)+1)\theta| = |\sin(m-1)\theta \cos \theta + \sin \theta \cos(-1)\theta| \\ &\leq \|\sin(m-1)\theta\| |\cos \theta| + |\sin \theta| |\cos(m-1)\theta| \leq 2Cr. \end{aligned}$$

Vi har, altså, at  $u(r, \theta) = \partial u / \partial x_1(r, \theta) = 0$ , vil medføre, at

$$c_3 < \sin \theta \leq |\sin \theta| \leq 2Cr \quad , \quad 0 < r < \delta.$$

Men så er  $u(r, \theta)$  og  $\partial u / \partial x_1(r, \theta)$  ikke begge nul for  $r < c_3/2C$ . Påstanden er nu vist, med  $\varepsilon = \min\{\delta, c_3/2C\}$ . ■

#### 3.2.2. Karakterisering af rand - knudelinje skæringer

Følgende lemma fra [Lin, 1987] karakteriserer for et givent område, skæringspunkter mellem knudelinjen for en egenfunktion og randen.

**Lemma 28.** *Antag  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  er begrænset, konvekst og har glat rand. Lad  $P \in \partial\Omega$  og lad  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  være den retningsafledte af en egenfunktion  $u$  i retning af den udadrettede normal af  $\partial\Omega$  i  $P$ . Da gælder, at*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) = 0 \Leftrightarrow P \in N, \quad (3.2.20)$$

hvor  $N$  er knudelinjen for  $u$ .



*Bevis.* Antag  $P = (0, 0)$  og vælg tangent-retningen af  $\partial\Omega$  i  $P$  som  $x$ -akse og  $y$ -aksen i den udadrettede normals retning.

- $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow P \in N$ : Antag  $P \notin N$ . Af Hopfs lemma (sætning 18), følger at  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \neq 0$ .
- $P \in N \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(P) = 0$ :

Antag  $\frac{\partial u}{\partial y}(P) = c \neq 0$ . Fra afsnit 1.2 haves  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Udglat nu  $\partial\Omega$  i en åben omegn  $U \subset \mathbb{R}^2$  af  $P$  med et koordinatskift<sup>5</sup>  $T : U \rightarrow V$ , givet ved  $T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y)) =: (\tilde{x}, \tilde{y})$ , med  $V \subset \mathbb{R}^2$  en åben omegn af  $T(P)$ . Sæt

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) := u(T^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y})). \quad (3.2.21)$$

Der haves  $T(\bar{\Omega} \cap U) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in V : \tilde{y} \leq 0\}$ . Reflekter  $\tilde{u}$  omkring  $\tilde{x}$ -aksen vha. af funktionen  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$ , givet ved

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}) := \begin{cases} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \tilde{y} \leq 0 \\ -\tilde{u}(\tilde{x}, -\tilde{y}) & \tilde{y} > 0. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

Da  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , indsæt evt. konkret ved at betragte differential-kvotienter, at  $v \in C^1(V)$ <sup>6</sup>

Ved brug af kædereglen, da  $u \equiv 0$  på  $\partial\Omega$  og dermed  $\tilde{u} \equiv 0$  langs  $\tilde{x}$ -aksen, så haves  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(T(P)) = 0$ , og vi får:

$$\begin{aligned} 0 \neq c &= \frac{\partial u}{\partial y}(P) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(T(P)) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(T(P)) \frac{\partial T_1}{\partial y}(P) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(T(P)) \frac{\partial T_2}{\partial y}(P) \\ &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(T(P)) \frac{\partial T_2}{\partial y}(P). \end{aligned}$$

Dermed er  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(T(P)) = k \neq 0$ .

Det kan uden tab af generalitet antages at  $T(P) = 0$ . Da  $v \in C^1(V)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}}(x, 0) = 0$  og  $v(T(P)) = 0$ , eksisterer  $\varepsilon > 0$  så

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}) = v(0, 0) + 0\tilde{x} + k\tilde{y} + f(|\tilde{x}|^2 + |\tilde{y}|^2) \quad , \quad |\tilde{x}|^2 + |\tilde{y}|^2 < \varepsilon,$$

<sup>5</sup>Se [Evans, 1998, Appendix C, side 626] - bemærk, at koordinatskiftet har samme regularitetsegenskaber som randen.

<sup>6</sup>Se eventuelt de lignende betragtninger i beviset for punkt 1 i lemma 27

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

hvor  $f = O(|\tilde{x}|^2 + |\tilde{y}|^2)$ . Dermed eksisterer der, ifølge Implicit funktions-sætning [Wade, 2004, side 365], et åbent interval  $W$  og en entydigt bestemt funktion  $\tilde{y} : W \rightarrow \mathbb{R}$ , med  $\tilde{y} \in C^1(W)$ , så

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})) = 0 \quad , \quad \text{for alle } \tilde{x} \in W. \quad (3.2.23)$$

Da  $v = 0$  på  $\tilde{x}$ -aksen er  $\tilde{y} = 0$  denne entydige løsning. Hvis  $v(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 0$  med  $\tilde{x}_0 \in W$  og  $\tilde{y}_0 \neq 0$ , så strider funktionen

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = \begin{cases} 0 & \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 & \tilde{x} = \tilde{x}_0, \end{cases}$$

som også opfylder  $v(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$  imod førnævnte entydighed. Hermed eksisterer en åben kugle  $B_r(T(P))$ , hvor  $v(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$  kun på  $\tilde{x}$ -aksen i denne. Dermed er  $\tilde{u}$  ikke nul i  $D := B_{\tilde{P}, r} \cap \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{y} > 0\}$ . Heraf følger, da  $T^{-1}(D)$  er en åben omegn af  $P$  (idet koordinatskiftet er kontinuert), er  $u \neq 0$  i  $T^{-1}(D)$ . Knudelinien for  $u$  er dermed ikke vilkårligt tæt på  $P$ , så  $P \notin N$ . ■

Herved kan bevises følgende sætning, der udtaler sig om antallet af skæringer mellem knudelinjen for en anden egenfunktion og randen.

**Lemma 29.** *Antag  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  er begrænset, konvekst og har glat rand. For en anden egenfunktion  $u_2$  til Dirichlet-problemet i  $\Omega$ , har  $\partial u_2 / \partial \nu$  højst to nulpunkter.*

*Bevis.* Fra Courants knudelinjesætning (21) opdeler knudelinjen for  $u_2$  højst  $\Omega$  i to områder, men i så fald skærer knudelinjen højst  $\partial\Omega$  i to punkter. Fra lemma 29 følger at  $\partial u_2 / \partial \nu$  højst har to nulpunkter på randen. ■

#### 3.2.3. Kriterium for entydighed af den anden egenfunktion

Følgende lemma fra [Lin, 1987], omhandler entydigheden af en anden egenfunktion.

**Lemma 30.** *Antag  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  er begrænset, konvekst og har glat rand. Lad  $u_2$  være en anden egenfunktion. Hvis  $u_2 \neq 0$  og  $\partial u_2 / \partial \nu \geq 0$ , da er  $u_2$ , op til skalarmultiplikation, den entydige anden egenfunktion for Dirichlet-problemet.*

*Bevis.* Antag modsætningsvist, at der eksisterer endnu en anden egenfunktion  $\psi$  til Dirichlet-problemet, dvs. således  $\psi$  opfylder (1.2.3) Vi antager  $\psi$  og  $u_2$  til at være ortogonale. Ellers, skriv  $\psi = a_1 u_2 + a_2 f$  med  $\int_{\Omega} u_2 f = 0$ <sup>7</sup>. Lad i så

<sup>7</sup>se [Johnsen, 2006, Theorem 4.4.1]

fald  $\psi_1 = \psi - a_1 u_2$ , som er ortogonal på  $u_2$  og lad herefter  $\psi := \psi_1$  (se desuden sætning 4). Dermed

$$\int_{\Omega} u_2 \psi = 0.$$

Indfør nu operatoren  $T : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  givet ved

$$T = (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \nabla, \quad (3.2.24)$$

hvor  $(x_0, y_0)$  er et fast punkt, der vælges senere. Nu udregnes  $\Delta(T\psi)$ .

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T\psi = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + (x - x_0) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (y - y_0) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.2.25)$$

$$= 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (x - x_0) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + (y - y_0) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y}, \quad (3.2.26)$$

Samt helt analogt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} T\psi = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (y - y_0) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (x - x_0) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x}. \quad (3.2.27)$$

Da en vilkårlig anden egenfunktion er glat, vil de kommuterer de partielle afledte. Adderes (3.2.25) og (3.2.27) ser vi følgende

$$\Delta(T\psi) = 2\Delta\psi + T(\Delta\psi).$$

Dermed også

$$\Delta(T\psi) + \lambda_2 T\psi = -2\lambda_2 \psi.$$

Integreres der nu op mod  $u_2$  over  $\Omega$ , fås

$$\int_{\Omega} (\Delta(T\psi)u_2 - T(\Delta\psi)u_2) = -2\lambda_2 \int_{\Omega} \psi u_2 = 0.$$

Benyttes Greens anden sætning (se [Courant and John, 2000, side 557]) fås

$$0 = \int_{\partial\Omega} u_2 \frac{\partial T\psi}{\partial \nu} - \int_{\partial\Omega} T\psi \frac{\partial u_2}{\partial \nu},$$

hvor  $\nu$  er den udadrettede normalvektor til  $\partial\Omega$ . Da  $u_2$  opfylder (1.1.8) vil  $u_2 = 0$  på  $\partial\Omega$  således, at

$$0 = \int_{\partial\Omega} T\psi \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \quad (3.2.28)$$

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

Ved koordinatskift til  $(\nu, \eta)$ , med  $\nu$ -aksen i retning af den udadrettede enhedsnormalvektor  $\boldsymbol{\nu}$ , og  $\eta$ -aksen i retning af enhedstangentvektoren  $\boldsymbol{\eta}$ , i et fast vilkårligt punkt, haves

$$(x - x_0, y - y_0) \mapsto ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}, (x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\eta}), \quad (3.2.29)$$

og

$$\nabla\psi \mapsto (\nabla\psi \cdot \boldsymbol{\nu}, \nabla\psi \cdot \boldsymbol{\eta}). \quad (3.2.30)$$

Skalarproduktet mellem (3.2.29) og (3.2.29) giver, da  $\psi = 0$  på  $\partial\Omega$  (så den afledte i tangentretningen er nul), samt  $\eta$  og  $\nu$  er ortogonale, følgende:

$$\begin{aligned} T\psi &= ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}, (x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\eta}) \cdot (\nabla\psi \cdot \boldsymbol{\nu}, \nabla\psi \cdot \boldsymbol{\eta}) \\ &= ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu})(\nabla\psi \cdot \boldsymbol{\nu}) + ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\eta})(\nabla\psi \cdot \boldsymbol{\eta}) \\ &= ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu})(\nabla\psi \cdot \boldsymbol{\nu}). \end{aligned}$$

Af (3.2.28) følger yderligere:

$$0 = \int_{\partial\Omega} T\psi \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \int_{\partial\Omega} ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}}. \quad (3.2.31)$$

Antag  $\partial\psi/\partial\boldsymbol{\nu}$  har konstant fortegn på  $\partial\Omega$ , og uden tab af generalitet at  $\partial\psi/\partial\boldsymbol{\nu} \geq 0$ . Vælg  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Så gælder  $((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}) \neq 0$  for  $(x, y) \in \partial\Omega$ , som følge af konveksiteten af  $\Omega$ . Samtidigt, er  $(x - x_0, y - y_0)$  dermed udadrettet for en konveks mængde, så  $(x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}$  har samme fortegn på hele  $\partial\Omega$ , og

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\nu} > 0.$$

Fra lemma 29 gælder at  $\partial\psi/\partial\boldsymbol{\nu}$  højst har to nulpunkter, derfor gælder med  $A := \{(x, y) \in \partial\Omega : \partial\psi/\partial\boldsymbol{\nu}(x, y) = 0\}$  at  $|A| = 0$ , således højresiden i (3.2.28) nu giver

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} T\psi \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \int_{\partial\Omega} ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} \\ &= \int_{\partial\Omega \setminus A} ((x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu}) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}}. \end{aligned}$$

Dette medfører

$$\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} \equiv 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega \setminus A,$$

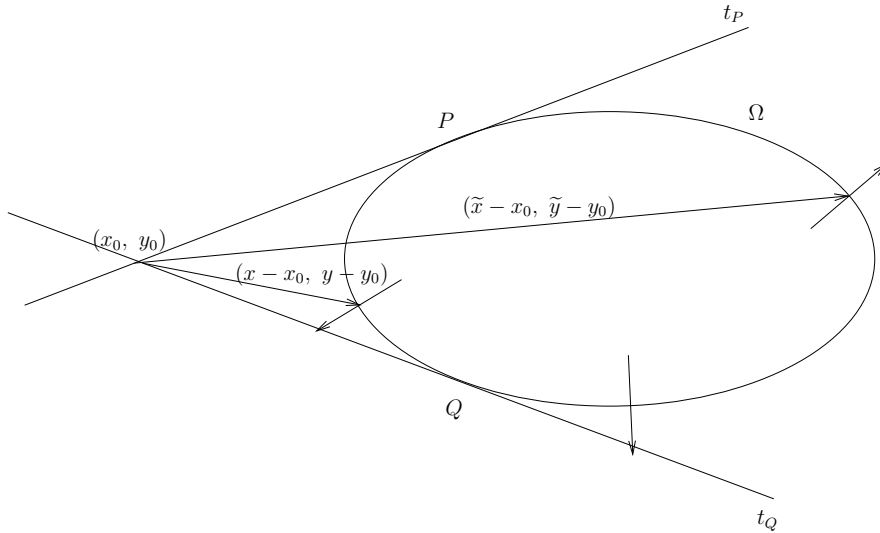
da  $(x - x_0, y - y_0) \cdot \boldsymbol{\nu} > 0$  og  $\partial\psi/\partial\boldsymbol{\nu} > 0$  på  $\partial\Omega \setminus A$ . Dermed som følge af kontinuiteten af  $\partial u_2/\partial\boldsymbol{\nu}$ , gælder

$$\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} \equiv 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega,$$

hvilket strider mod udsagnet sæning 18 (Hopfs randpunkt-lemma).

Dermed skifter  $\partial\psi/\partial\nu$  fortegn på  $\partial\Omega$ . Desuden har  $\partial\psi/\partial\nu$  højst to nulpunkter på randen af  $\Omega$  ifølge lemma 29. Da en anden egenfunktion er glat på  $\Omega$  og dermed specielt glat langs  $\partial\Omega$ , har  $\partial\psi/\partial\nu$  præcis to nulpunkter på  $\partial\Omega$ . Kald disse  $P$  og  $Q$ . Fra lemma 28 følger, at  $P$  og  $Q$  ligger på knudelinjen (mht.  $\psi$ ). Hvis tangentlinjerne  $t_P$  og  $t_Q$  til  $\partial\Omega$  i hhv.  $P$  og  $Q$  ikke er parallelle, eksisterer et skæringspunkt mellem  $t_P$  og  $t_Q$  udenfor  $\Omega$  pga. konvexiteten heraf. Betegn dette punkt  $(x_0, y_0)$ .

Fortegnet af  $(x-x_0, y-y_0)\cdot\nu$  og  $\partial\psi/\partial\nu$  skifter begge præcist i  $P$  og  $Q$ , og vi kan derfor antage, at  $T\psi \geq 0$  på  $\partial\Omega$ . Konvexiteten af  $\Omega$  medfører  $(x-x_0, y-y_0)\cdot\nu = 0$



Figur 3.2.: De små pile illustrerer  $\nu$ .

netop i punkterne  $P$  og  $Q$ , da det er netop her, at  $(x-x_0, y-y_0)$  er tangentlinje til randen. Det er også udelukkende i  $P$  og  $Q$  at  $\partial\psi/\partial\nu = 0$ , og der gælder

$$(T\psi)(x, y) = 0 \quad \text{hvis og kun hvis} \quad P = (x, y) \quad \text{eller} \quad Q = (x, y).$$

Da  $T\psi$  kun er nul på nulmængden  $\{P, Q\}$ , giver (3.2.28), at

$$0 = \int_{\partial\Omega} ((x-x_0, y-y_0) \cdot \nu) \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \frac{\partial u_2}{\partial\nu} = \int_{\partial\Omega/\{P, Q\}} ((x-x_0, y-y_0) \cdot \nu) \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \frac{\partial u_2}{\partial\nu},$$

hvormed

$$\frac{\partial u_2}{\partial\nu} \equiv 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega/\{P, Q\},$$

### 3.2 Lemmaer til hovedsætning

---

idet  $T\psi > 0$  herpå. Kontinuiteten af  $\partial u_2 / \partial \nu$  giver

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \equiv 0 \quad \text{på } \partial\Omega.$$

Igen modstrid med Hopfs randpunkt-lemma. Dermed er det ikke muligt at  $t_p$  og  $t_q$  skærer hinanden. Betragt tilfældet hvor  $t_Q$  og  $t_P$  er parallelle, og lad dem ligge i  $x$ -aksens retning. Lad

$$T' = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Udregn som tidligere:

$$\Delta T' \psi = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = T' \Delta \psi$$

så

$$0 = \Delta T' \psi - T' \Delta \psi = \Delta T' \psi + \lambda_2 T' \psi \tag{3.2.32}$$

$$\tag{3.2.33}$$

Multipliceres der i (3.2.32) med  $u_2$  og integreres der over  $\Omega$  gives:

$$\int_{\Omega} (u_2 \Delta T' \psi + \lambda_2 u_2 T' \psi) = \int_{\Omega} (u_2 \Delta T' \psi - \Delta u_2 T' \psi) = 0.$$

Ved Greens sætning, helt analogt med (3.2.28), fås:

$$\int_{\partial\Omega} T' \psi \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0. \tag{3.2.34}$$

Da  $\psi$  er antaget til at være en anden egenfunktion, skifter  $\psi$  fortegn hen over  $\Omega$ , og områderne

$$\Omega_{\psi}^{+} := \{\mathbf{x} \in \Omega : \psi(\mathbf{x}) > 0\} \quad \text{og} \quad \Omega_{\psi}^{-} := \{\mathbf{x} \in \Omega : \psi(\mathbf{x}) < 0\},$$

indføres. Vi har at  $\Omega_{\psi}^{+}$  og  $\Omega_{\psi}^{-}$  adskilles af knudelinjen for  $\psi$ , der skærer  $\partial\Omega$  i  $P$  og  $Q$ . Da  $\psi = 0$  på  $\partial\Omega$  har  $\partial\psi/\partial x$  konstant fortegn, ved kontinuiteten af  $\psi$ , samt at  $\psi > 0$  på  $\Omega_{\psi}^{+}$  og  $\psi < 0$  på  $\Omega_{\psi}^{-}$ . Yderligere er  $P$  og  $Q$  de eneste punkter på  $\partial\Omega$ , der har tangentvektorer parallelle med  $x$ -aksen pr. konstruktion, da  $\Omega$  er konveks. Dermed gælder

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{kun i } P \text{ og } Q.$$

Vi har, at (3.2.34) giver

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega \setminus \{P, Q\}} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial \nu}.$$

Dermed gælder  $\partial u_2 / \partial \nu \equiv 0$  på  $\partial\Omega / \{P, Q\}$ , idet  $\partial\psi / \partial x$  har konstant fortegn på  $\partial\Omega / \{P, Q\}$ . Ligesom tidligere, giver kontinuiteten af  $\partial u_2 / \partial x$ , at

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \equiv 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega.$$

Igen fås en modstrid med Hopfs randpunkt-lemma, og resultatet haves. ■

## 4. Hovedsætningen

Hidtil har vi beskrevet en række nyttige værktøjer i forbindelse med egenverdier, egenfunktioner og knudelinjer for Dirichlet-problemet. I dette kapitel beskæftiger vi os med hovedsætningen: Knudelinjen for en anden Dirichlet-egenfunktion skærer randen af et konvekst, begrænset område af  $\mathbb{R}^2$  med glat rand, i præcist to punkter.

Bevisstrategien er først at vise udsagnet: hvis der eksisterer et sådan område, hvori knudelinjen for en anden egenfunktion ikke skærer randen i to punkter, så eksisterer et område (opfyldende samme krav, dvs. konveks og begrænset med glat rand) hvori knudelinjen for dette områdes anden egenfunktion skærer randen i præcist et punkt - betegn dette udsagn (A).

Derefter vises udsagnet: Knudelinjen skærer ikke randen i præcist et punkt for noget område af den omtalte art - betegn dette udsagn (B), og resultatet haves. Alt dette præciseres i det følgende.

### 4.1. Dirichlet-problemet på cirklen

I dette afsnit viser vi, at knudelinjen for en anden egenfunktion på en cirkelskive skærer randen i præcist to punkter. Vi benytter samme fremgangsmåde som [Courant, 1953, s.303]. Man kan eksplicit løse den differentiaalligning, der er tilknyttet det pågældende egenverdiproblem for en cirkelskive vha. polære koordinater. Antag  $\Omega$  er en enhedscirkelskive. Lad  $u$  være en egenfunktion med tilhørende egenverdi  $-\lambda$ , så er den aktuelle differentiaalligning med randbetingelser følgende:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{på } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Ved at benytte den polære repræsentation af Laplace-operatoren, fundet i A.2, er egenverdiligningen i polære koordinater

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \lambda u = 0. \quad (4.1.2)$$



#### 4.1 Dirichlet-problemet på cirklen

Vi gætter på en løsning  $v(r, \theta) = f(r)h(\theta)$ , som opfylder randbetingelserne, at  $v(1, \theta) = 0$ , og benytter separation af de variable. Indsættes dette i (4.1.2) fås

$$f''(r)h(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)h''(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)h(\theta) + \lambda f(r)h(\theta) = 0$$

og dermed

$$\frac{r^2(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r))}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)}.$$

Da højresiden er uafhængig af  $r$  og venstresiden uafhængig af  $\theta$  gælder, for en konstant  $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{r^2(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r))}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = k. \quad (4.1.3)$$

Vi har dermed to differentiaalligninger

$$h''(\theta) + kh(\theta) = 0, \quad (4.1.4)$$

og

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + \lambda r^2 f(r) - k f(r) = 0 \quad \text{med} \quad f(1) = 0. \quad (4.1.5)$$

Da  $v$  er en funktion er  $h$   $2\pi$ -periodisk i  $\theta$ .

Vi betragter nu (4.1.4), med den tilhørende karakterligning

$$R^2 = -k, \quad k > 0,$$

således en løsning, ifølge [Jensen, 2000, sætning 5.3], er på formen

$$h(\theta) = a \cos(\sqrt{k}\theta) + b \sin(\sqrt{k}\theta).$$

Da  $h$  er  $2\pi$ -periodisk medfører dette at  $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ , så skriv  $k = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . For at løse (4.1.5) indføres transformationen  $r = \rho/\sqrt{\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ . Indsat i (4.1.5) gives dermed

$$\frac{\rho^2}{\lambda} \frac{d^2 f}{dr^2} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \frac{df}{dr} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \lambda \frac{\rho^2}{\lambda} f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) - n^2 f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) = 0.$$

Ved kædereglen

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{\lambda} \frac{d^2 f}{dr^2} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \frac{df}{dr} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \lambda \frac{\rho^2}{\lambda} f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) - n^2 f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) = \\ \rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \rho \frac{df}{d\rho} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \rho^2 f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) - n^2 f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) = 0, \end{aligned}$$

#### 4.1 Dirichlet-problemet på cirklen

---

som medfører, at

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) f \left( \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}} \right) = 0. \quad (4.1.6)$$

Dette er en Bessel-differentia ligning, og løsningerne vi søger skal være ikke-singulære. De i 0 ikke-singulære løsninger hertil, er de såkaldte Bessel-funktioner af første slags - se [Courant, 1953]. Bessel-funktioner af første slags,  $J_n$ , er på formen

$$J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{2^n n!} \left( 1 - \frac{\rho^2}{2(2n+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right)$$

(se evt. [Courant, 1953, side 303]). Da  $\rho = kr = \sqrt{\lambda}r$ , gælder

$$f_n(r) = J_n(kr).$$

Bemærk her, at løsningen afhænger af  $n$ . Vores begyndelsesbetingelse  $f_n(1) = 0$  medfører, at  $0 = J_n(k) = J_n(\sqrt{\lambda})$ . Med andre ord, er kvadratroden af en egen-værdi et nulpunkt for Bessel-funktionerne af første slags. Betegn disse nulpunkter  $k_{n,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Sammenlagt er løsningen til (4.1.3), og dermed specielt egenfunktionerne, på formen

$$v(r, \theta) = f(r)h(\theta) = J_n(k_{n,m}r)(a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta)). \quad (4.1.7)$$

Produktet i højresiden i (4.1.7) medfører at knudelinjer består af

- radiallinjer, svarende til  $\theta$  der løser  $a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta) = 0$  og
- cirkler af radius  $r$ , hvor  $J_n(k_{n,m}r) = 0$ .

For et vilkårligt  $n$  så bidrager  $a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta)$  i (4.1.7) med  $n$  radiallinjer, og dermed opdeles området i mindst  $2n$  områder. Dermed kan en anden egenfunktion, ifølge Courants knudelinje-sætning (sætning 21), ikke være på formen i (4.1.7) med  $n > 1$ . Det er kun for  $n = 0$  at højresiden i (4.1.7) har konstant fortegn, så  $n = 0$  omfatter første egenfunktioner, men ikke anden egenfunktioner. Dermed kan anden egenfunktioner skrives på formen (4.1.7) med  $n = 1$ .

Per definition har  $J_1$  ingen nulpunkter mellem  $k_{1,1}$  og  $k_{1,2}$ . Da  $k_{1,1} = 0$ , og  $0 \leq r \leq 1$  medfører  $k_{1,2}r \leq k_{1,2}$  bidrager  $J_1(k_{1,2}r)$  ej til knudelinjen, da 0 allerede er i radiallinjen.

Dermed består en, for en cirkelskive, anden egenfunktionens knudelinje præcist af en radiallinje, og udsagn (C) for holder for en cirkelskive.

## 4.2. Beviset for udsagn (A)

I dette afsnit bevises ovenfor nævnte udsagn (A).

Lad som før (C) betegne udsagnet: “knudelinjen for en anden egenfunktion  $u_2$  til Dirichlet-problemet over  $\Omega$  skærer randen i præcis to punkter.” Konstateringen, at (C) er sand, når  $\Omega$  er en cirkelskive i afsnit 4.1 kan benyttes til at vise følgende sætning, der er den første ingrediens i beviset for hovedresultatet (at udsagn (C) holder for et generelt begrænset og konvekst område med glat rand). Vi benytter samme fremgangsmåde, som i [Melas, 1992].

**Sætning 31.** *Lad  $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$  være konvekst, begrænset og havende glat rand. Hvis (C) ikke holder for  $\Omega_0$ , eksisterer et konvekst og begrænset område  $\Omega$  med glat rand og en anden egenfunktion  $u_2$  på  $\Omega$ , så knudelinjen for  $u_2$  skærer  $\partial\Omega$  i præcis et punkt.*

*Bevis.* Start med at lave en kontinuert deformation  $t \mapsto \Omega(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , af området  $\Omega_0 = \Omega(0)$ , således randen af  $\Omega(t)$  er glat og  $\Omega(1) = B_1(\mathbf{0})$ <sup>1</sup>. Udsagn (C) er sand for  $\Omega(1)$ , som set i afsnit 4.1. Da den antagelsesvist, er falsk for  $\Omega(0)$  giver følgende definition mening

$$t_0 := \sup\{t : (C) \text{ er falsk for } \Omega(t)\}.$$

Tag to følger  $\{t_i\}$  og  $\{\tilde{t}_i\}$  med  $t_i \rightarrow t_0$  og  $\tilde{t}_i \rightarrow t_0$ , hvor  $t_i \leq t_0 \leq \tilde{t}_i$ . For alle  $t_i$ 'er eksisterer til området  $\Omega(t_i)$  en tilknyttet anden egenfunktion  $u_i$ , som kan vælges normaliseret. Tilsvarende er der en normaliseret anden egenfunktion  $\tilde{u}_i$  på  $\Omega(\tilde{t}_i)$  for alle  $\tilde{t}_i$ .

Fra lemma 28 haves, at  $\partial u_i / \partial \nu$  højst har to nulpunkter på  $\partial\Omega$ . Desuden haves for alle  $t_i$  at (C) ikke gælder for  $\Omega(t_i)$ , og dermed har  $\partial u_i / \partial \nu$  ikke to nulpunkter. Da  $u_i$  er en anden egenfunktion og dermed  $u_i \in C^\infty(\partial\Omega(t_i))$ , skifter den så ikke fortegn på  $\partial\Omega(t_i)$ . Antag derfor, at

$$\partial u_i / \partial \nu \geq 0 \text{ på } \partial\Omega(t_i).$$

Da (C) holder for  $\tilde{u}_i$  har  $\partial \tilde{u}_i / \partial \nu$  to nulpunkter på randen, ifølge lemma 28.

Ved hjælp af elliptiske estimater fås, at  $u_0$  og  $\tilde{u}_0$  er anden egenfunktioner på  $\Omega_0$ . Desuden giver konvergens<sup>2</sup> af egenfunktioner, at også  $\partial u_0 / \partial \nu \geq 0$  samt  $\partial \tilde{u}_0$  har mindst et nulpunkt på  $\partial\Omega_0$ . Se [Courant, 1953, side 421] for kontinuiteten af egenverdierne for kontinuerte deformationer af området der indgår i overvejelserne, samt [Stollmann, 1995] for konvergens af egenfunktionerne.

<sup>1</sup>F.eks, op til translation, kan  $\partial\Omega$  “trækkes sammen” til en cirkel indeholdt i  $\Omega$  med radius  $r$  ved at benytte  $tr \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + (1-t)\mathbf{x}$  på  $\Omega$  for  $t \in [0; 1]$

<sup>2</sup>I passende forstand, men diskussionen af dette emne medtages ikke i denne tekst.

### 4.3 Beviset for udsagn (B)

---

Fra sætning 30 kan ved en evt. skalering antages, at

$$u_0 = \tilde{u}_0.$$

Der gælder nu, at  $\partial u_0 / \partial \nu \geq 0$  og at denne har mindst et nulpunkt på  $\partial\Omega(t_0)$ . Da  $u_0$  er en anden egenfunktion på  $\Omega(t_0)$ , gælder der, at  $u_0 = 0$  på  $\partial\Omega(t_0)$ . Ifølge lemma 27 nærmer knudelinjen  $N_{u_0}$ , for  $u_0$ , sig ikke et vilkårligt punkt på  $\partial\Omega(t_0) \cap N_{u_0}$  tangentielt mht. randen. Dermed eksisterer præcist et  $P$  så  $\partial\Omega(t_0) \cap N_{u_0} = \{P\}$ . Fra lemma 28 haves, at nulpunkterne for  $\partial u_0 / \partial \nu$  ikke udgør et stykke af  $\partial\Omega(t_0)$  - dvs. nulpunkterne er isolerede.

Det følger af bemærkning 22, at  $N_{u_0}$  opdeler  $\Omega(t_0)$  i to områder  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$ , og ortogonaliteten med den første egenfunktion (som ikke skifter fortegn) medfører, at  $u_0$  har forskelligt fortegn på  $\Omega^+$  og  $\Omega^-$ . Antag derfor

$$\Omega^+(t_0) = \{x \in \Omega(t_0) : u_0(x) > 0\}, \quad \text{og} \quad \Omega^-(t_0) = \{x \in \Omega(t_0) : u_0(x) < 0\}.$$

Da  $u_0 = 0$  på  $\partial\Omega(t_0)$ , haves  $\partial u_0 / \partial \nu \leq 0$  på  $\partial\Omega^+(t_0)$ . Da samtidig  $\partial u_0 / \partial \nu \geq 0$  på  $\partial\Omega$ , er

$$\partial u_0 / \partial \nu = 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega^+(t_0).$$

Hermed er nulpunkterne for  $\partial u_0 / \partial \nu$  både sammenhængende og isolerede, hvor af det følger, at  $\partial u_0 / \partial \nu$  har præcist et nulpunkt. Med

$$\Omega = \Omega(t_0) \quad \text{og} \quad u_2 = u_0,$$

er sætningen vist. ■

### 4.3. Beviset for udsagn (B)

I dette afsnit bevises udsagn (B) - at det ikke er muligt for knudelinjen  $N$  for en anden egenfunktion  $u_2$  på et konvekst begrænset område  $\Omega$  med glat rand, at skære randen i præcist et punkt (eller ækvivalent, at  $\partial u_2 / \partial \nu$  har præcist et nulpunkt på  $\partial\Omega$  ifølge lemma 28). Dette giver en modstrid med sætning 31 og giver sammen med denne et bevis for at knudelinjen skærer randen i præcist to punkter. Ifølge bemærkning 22 efter Courants knudelinjesætning opdeler knudelinjen  $\Omega$  i to områder, hvorpå  $u_2$  har forskelligt fortegn. Indfør

$$\Omega^- := \{x \in \Omega : u_2(x) < 0\} \quad \text{og} \quad \Omega^+ := \{x \in \Omega : u_2(x) > 0\}, \quad (4.3.1)$$

Vi vælger senere et punkt, og udfra dette fastlægge koordinatsystemet, således  $x_1$ -aksen peger i retning af tangentvektoren til  $\partial\Omega$  i det pågældende punkt og  $x_2$ -aksen peger i den indadrettede normalvektors retning i det pågældende punkt.

Da  $\Omega$  er konveks er der præcis to liniestykker,  $I, J \subset \partial\Omega$ , der har tangenter, som er parallelle med  $x_1$ -aksen.  $I$  og/eller  $J$  kan eventuelt være punkter

Da  $u_2 = 0$  på  $\partial\Omega$ , så

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \text{ på } I \cup J.$$

Der gælder at  $I$  og  $J$  er lukkede, hvilket indses ved følgende argument: Tag en følge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $I$  (eller  $J$ ), dvs.  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_n) = 0$  for alle  $n$ , og således at  $x_n \rightarrow x_0$ . Da er  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_0) = 0$ , idet  $u_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . af  $\Omega$ . Ved brug af Hopfs lemma (sætning 18) sluttet, at en udadrettet retningsaffledt af  $u_2$  opfylder

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0 \text{ på } \partial\Omega \setminus (I \cup J). \quad (4.3.2)$$

Hermed er det vist, at  $I$  og  $J$  er lukkede. Indfør nu hjælpefunktionen  $v_t$  givet ved

$$v_t := e^{-tx_1} \frac{\partial e^{tx_1} u_2(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + tu_2. \quad (4.3.3)$$

Bemærk, at denne opfylder

$$\Delta v_t + \lambda v_t = 0, \quad (4.3.4)$$

Definer også en knudelinje for  $v_t$

$$N_t := \overline{\{x \in \Omega : v_t(x) = 0\}}. \quad (4.3.5)$$

Da  $u_2 = 0$  på  $\partial\Omega$  og  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$  er 0 på netop  $I$  og  $J$ , og ellers forskellig fra nul, ser vi fra definitionen af  $v_t$ , at punkter på randen, hvor  $v_t$  er lig nul, er indeholdt i  $I$  eller  $J$  - med andre ord

$$N_t \cap \partial\Omega \subseteq I \cup J.$$

Desuden gælder  $v_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$  da  $u_2$  er det.

I lyset af sætning 31 ønsker vi at vise, under passende forudsætninger, vha. en fremkommen modstrid, at  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  ikke har præcist et nulpunkt på  $\partial\Omega$ . Derfor bevises tre lemmaer, der udtaler sig om konsekvenser af en sådan situation. Først nogle indledende overvejelser vedrørende en sådan situation. Når  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  har netop et nulpunkt, kald det  $\mathbf{o}$ , ved vi vha. lemma 28, at  $N$  kun rører randen i  $\mathbf{o}$ . Vælg dette punkt som origo, med  $x_1$ -aksen i retning af tangenten til  $\partial\Omega$  i  $\mathbf{o}$  og  $x_2$ -aksen i retning af normalvektoren til  $\partial\Omega$  i  $\mathbf{o}$ . Mængden  $\partial\Omega \setminus (I \cup J)$  består af to buestykker. Det antages, uden tab af generalitet, at  $\mathbf{o} \in I$ , og at  $\partial\Omega^- = N$ . Dermed ligger begge linjestykkerne der udgør  $\partial\Omega \setminus (I \cup J)$ , på  $\partial\Omega^+$ . Ved brug af Hopfs lemma (18), ser vi, at  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$  har forskelligt fortegn på disse to "sider". Navngiv disse  $\Gamma^+$  og  $\Gamma^-$  således, at

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0 \text{ på } \Gamma^+ \quad \text{og} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} < 0 \text{ på } \Gamma^-.$$

**Lemma 32.** *Lad  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  være åben, begrænset og konveks med glat rand. Antag  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  har præcist et nulpunkt på  $\partial\Omega$ . Så eksisterer for alle  $t$  en mængde  $\Omega_t$  således, at denne er omsluttet af  $N_t$ , dvs. således, at  $\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J$ .*

*Bevis.* For punkter  $P$  med  $(\nabla u)(P) \neq 0$  er  $N$  glat, specielt  $C^1$ , som set i starten af afsnit 3. Fra lemma 27 (ii), haves, at  $N$  ikke nærmer sig  $\mathbf{o}$  tangentielt, og fra lemma 27 (iii), at der eksisterer  $\varepsilon > 0$ , så

$$|u_2| + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right| > 0 \quad \text{på} \quad N \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < \varepsilon\}.$$

Dermed haves på  $A := N \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < \varepsilon\}$

$$\left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right| > 0 \quad \text{på} \quad A.$$

Da

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(p) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad N \text{ er } C^1 \text{ i } p,$$

ifølge starten af afsnit 3, er  $N$   $C^1$  på  $A$ , og  $N$  ikke tangenter parallelle med  $x_1$ -aksen her.

Der eksisterer et  $0 < \eta \leq \varepsilon$  sådan, at med

$$\Sigma_\eta := \{(x_1, x_2) : x_2 \leq \eta\},$$

har  $N \cap \Sigma_\eta$  ikke tangenter parallelle med  $x_1$ -aksen, som derfor består af to kurvestykker der nærmer sig  $\mathbf{o}$  uden at inkludere dette. Kald skæringen mellem  $x_2 = \eta$  og  $N$  for  $(x_0, \eta)$  og lad  $\gamma_1$  være den ene kurve, der løber langs  $N$  med endepunkter i  $(x_0, \eta)$  og  $\mathbf{o}$  (se figur 4.1).

Antag nu modsætningsvist, at der eksisterer et  $t_0$ , således der ikke findes et område  $\Omega_{t_0}$  så

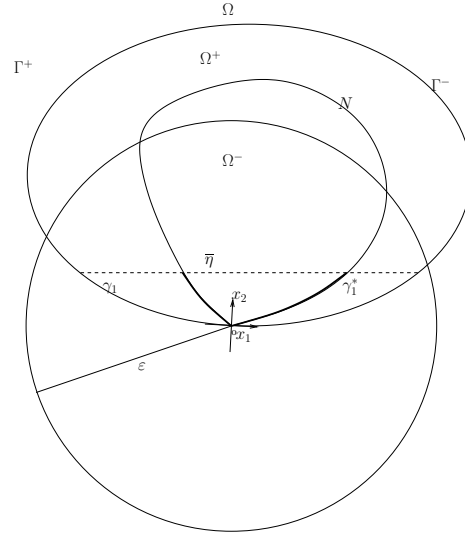
$$\partial\Omega_{t_0} \subseteq N_{t_0} \cup I \cup J.$$

Det haves, at  $N_{t_0}$  skærer  $\partial\Omega$  i både  $I$  og  $J$ , idet  $v_{t_0} > 0$  på  $\Gamma^+$  og  $v_{t_0} < 0$  på  $\Gamma^-$ . Dermed deles  $\overline{\Omega} \setminus I \cup J$  af  $N_{t_0}$  i to sammenhængende områder:

$$U^+ = \{x \in \Omega : v_{t_0}(x) > 0\} \quad \text{og} \quad U^- = \{x \in \Omega : v_{t_0}(x) < 0\}.$$

Vi kan antage, at  $\gamma_1$  er helt indeholdt i  $U^+$  <sup>3</sup>. Da  $U^+$  er sammenhængende og  $\overline{\gamma_1} \cap \partial U^+ = \{\mathbf{o}\}$  og  $\gamma_1$  er simpel, er  $U^+ \setminus \gamma_1$  sammenhængende, da så kun punktet  $\mathbf{o}$  er fjernet fra randen af den sammenhængende mængde  $U^+$ . Betragt igen linjen  $x_2 = \eta$  og kald dennes skæring med  $\Gamma^+$  for  $(y_0, \eta)$ , vi minder om, at skæringen

<sup>3</sup>Bemærk, at  $N_{t_0}$  ikke skærer  $N$  på  $N \cap B_\varepsilon(\mathbf{o})$  da  $|\partial u_2 / \partial x_1| \neq 0$  herpå.


 Figur 4.1.: Illustration af konstruktionen for at få  $\gamma_1$ .

mellem  $\gamma_1$  og linjen  $x_2 = \eta$  betegnes  $(x_0, \eta)$ . Det er nu muligt at forbinde  $(y_0, \eta)$  og  $(x_0, \eta)$  med en simpel polygonisk kurve således denne ikke skærer linjen  $x_2 = 0$ , da  $\Omega$  er konveks. Betegn denne for  $\gamma_2$  og bemærk, at  $\gamma_2 \subseteq U^+$ . Betragt den del af  $\Gamma^+ \cup I$ , der løber fra  $(y_0, \eta)$  til  $\mathbf{o}$  (begge punkter inkluderet) og kald denne for  $\gamma_3$ . Konstruktionen er illustreret i figur 4.2.

Den lukkede kurve

$$\gamma = \overline{\gamma_1} \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

skærer ikke sig selv i noget punkt, så den er en simpel lukket kurve. Jordans kurvesætning (se evt. [Veblen, 1905]) giver, at  $\gamma$  omslutter en entydig begrænset mængde. Denne kalder vi  $W$ . Altså er  $\partial W := \gamma$ .

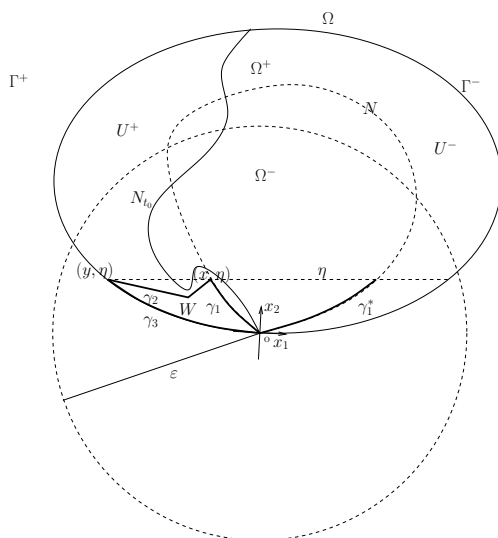
Da  $\Omega$  er simpelt sammenhængende - dvs. " $\Omega$  har ingen huller" - så da  $\partial W \subseteq \overline{\Omega}$  er  $W \subseteq \Omega$ .

Samtidig er  $v_{t_0} \geq 0$  på  $\gamma_1$ , så  $\overline{W} \cap U^- = \emptyset$ . Da  $U^-$  er sammenhængende gælder

$$v_{t_0} \geq 0 \text{ på } W.$$

Ved at benytte Maksimums-princippet (sætning 16) på  $-v_{t_0}$  (se (4.3.4)) sluttet, at  $v_{t_0}$  ikke kan antage sit minimum på det indre af  $W$ . Altså haves

$$v_{t_0} > 0 \text{ på } W.$$


 Figur 4.2.: Illustration af konstruktionen af  $W$ .

Der eksisterer et  $\eta_2$ ,  $0 < \eta_2 < \eta$  så linjen  $x_2 = \eta_2$  skærer  $\Gamma^+$  i et punkt  $\mathbf{p}_1 := (\bar{x}, \eta_2)$  og  $\gamma_1$  i  $\mathbf{p}_2 := (\bar{y}, \eta_2)$  således at linjestykket mellem  $\mathbf{p}_1$  og  $\mathbf{p}_2$ , benævnt  $L[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$ , opfylder, at

$$L[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] \cap \gamma_2 = \emptyset.$$

(se figur 4.3)

Der gælder, at  $L[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] \subset \overline{W}$ . Betragt funktionen

$$h(\mathbf{x}) := e^{t_0 x_1} u_2(\mathbf{x}). \quad (4.3.6)$$

Denne opfylder, at

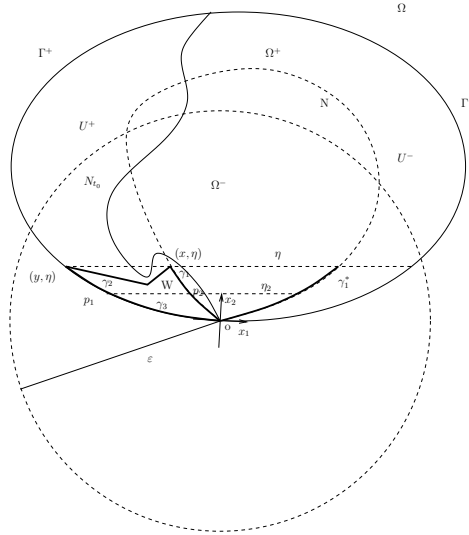
$$h(\mathbf{p}_1) = h(\mathbf{p}_2) = 0.$$

Det følger af Rolles sætning [Wade, 2004, 4.12 Lemma], at der eksisterer et  $(z, \eta_2) \in [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$ , så  $\partial h / \partial x_1(z, \eta_2) = 0$ , men det vil ud fra (4.3.3) og (4.3.6) sige, at  $v_{t_0}(z, \eta_2) = 0$ . Da samtidig  $(z, \eta_2) \in W$  og  $v_{t_0} > 0$  på  $W$  har vi nået en modstrid, og lemmaet er vist.  $\blacksquare$

**Lemma 33.** *Lad  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  være åben, begrænset og konveks med glat rand. Antag  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  har netop ét nulpunkt på  $\partial\Omega$ . For et vilkårligt  $t \in \mathbb{R}$  eksisterer der præcist én delmængde  $\Omega_t$  med  $\Omega_t \subseteq \Omega$  og  $\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J$ .*

Ydermere gælder der følgende fire udsagn om området  $\Omega_t$ .





Figur 4.3.: Illustration af linjestykket  $L[p_1, p_2]$ .

1. Enten er  $v_t > 0$  i  $\Omega_t$  eller  $v_t < 0$  i  $\Omega_t$ .
2. Den første egen værdi med Dirichlet rand-betingelser hørende til  $\Omega_t$ , er lig den anden egen værdi for hele  $\Omega$ , dvs.  $\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2$ .
3.  $\Omega_t$  er simpelt sammenhængende.
4. Der eksisterer  $\rho(\lambda_2) > 0$ , så  $\Omega_t$  indeholder en cirkelskive med radius  $\rho(\lambda_2)$ .

*Bevis.* Fasthold  $t \in \mathbb{R}$ . Fra lemma 32 ved vi der eksisterer mindst ét område med  $\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J$ . Antag nu modsætningsvist, at der eksisterer mere end ét sådant område med rande i  $N_t \cup I \cup J$ . Dermed ville der være to disjunkte områder  $\Omega_1$  og  $\Omega_2$ , så  $v_t = 0$  på  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ . Lad

$$w_i = \begin{cases} b_i v_t & \text{på } \Omega_i \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2,$$

og lav analoge udregninger med bevis for sætning 21. Så fås, at den anden egen værdi på  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  er lig  $\lambda_2(\Omega)$ . Igen argumenteres som i sidste del af beviset for 21, og man opnår en modstrid. Dermed er det vist, at knudelinjen for  $v_t$  omslutter præcist et område  $\Omega_t$  for alle  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Det følger af definitionen af  $N_t, I$  og  $J$   $v_t$ , at  $v_t$  kun er 0 på randen af  $\Omega_t$ . Da  $v_t$  er glat, har  $v_t$  konstant fortegn på entydige område  $\Omega_t$

### 4.3 Beviset for udsagn (B)

2. Udsagn 2 følger af overvejelserne for beviset af entydigheden, da  $\lambda_2(\Omega)$  hermed (fra sætning 4) er en egenværdi for  $\Omega_t$ , men  $\lambda_2(\Omega) < \lambda_2(\Omega_t) \leq \lambda_3(\Omega_t) \dots$ . Hermed er  $\lambda_2(\Omega)$  den første egenværdi for  $\Omega_t$ , dvs.  $\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2(\Omega)$ .
3. Da  $\Omega$  er konveks, og dermed simpelt sammenhængende, er også  $\Omega_t$  simpelt sammenhængende.
4. Eksistensen af en indre radius, der kun afhænger af  $\lambda_2$  følger af 2 og 3 ved brug af Haymans sætning om indre radius (14).

■

**Lemma 34.** *Antag  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  har præcist et nulpunkt. Lad  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  være begrænset og konveks med glat rand, med  $\Omega_t$  den, for et givent  $t \in \mathbb{R}$ , entydigt bestemte delmængde  $\Omega_t \subseteq \Omega$  hvor  $\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J$  (ifølge lemma 33). Da gælder følgende:*

1. Der eksisterer  $c_1 > 0$ , så for alle  $t > c_1$  er  $v_t > 0$  i  $\Omega_t$ .
2. Der eksisterer  $c_2 > 0$ , så for alle  $t < -c_2$  er  $v_t < 0$  i  $\Omega_t$ .

*Bevis.* Betragt et punkt  $\mathbf{z} \in \Gamma^+$ , dvs. at  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathbf{z}) > 0$ . Da  $u_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , så eksisterer  $\delta > 0$  så  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$  i  $\overline{\Omega} \cap B_\delta(\mathbf{z})$ . Da  $\mathbf{z} \in \Gamma^+ \subseteq \partial\Omega^+$ , medfører kontinuiteten af  $u$ , at  $\delta$  kan antages værende valgt således at  $B_\delta(\mathbf{z}) \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$ . Vi bemærker, at  $\lambda_1(\Omega^+) = \lambda_2(\Omega)$ , da  $u_2 > 0$  i  $\Omega^+$ , og samtidigt opfylder egenværdiligningen samt Dirichlet-randbetingelsen. Med  $K := \overline{\Omega} \cap B_\delta(\mathbf{z})$  følger det af overvejelserne i afsnit 1.3.1, at  $\lambda_2(\Omega) = \lambda_1(\Omega^+) < \lambda_1(\Omega^+ \setminus K)$ . Den første egenværdi af et område ændres kontinuert, under kontinuerede deformationer af området - [Courant, 1953, side 421]. Dermed kan vi vælge en tilstrækkelig stor kompakt delmængde  $E \subseteq \Omega^-$ , og dermed approksimere  $\Omega^+ \setminus K$  med  $\Omega \setminus (K \cup E)$ , således at også  $\lambda_1(\Omega \setminus (K \cup E)) > \lambda_2(\Omega)$ . Sæt

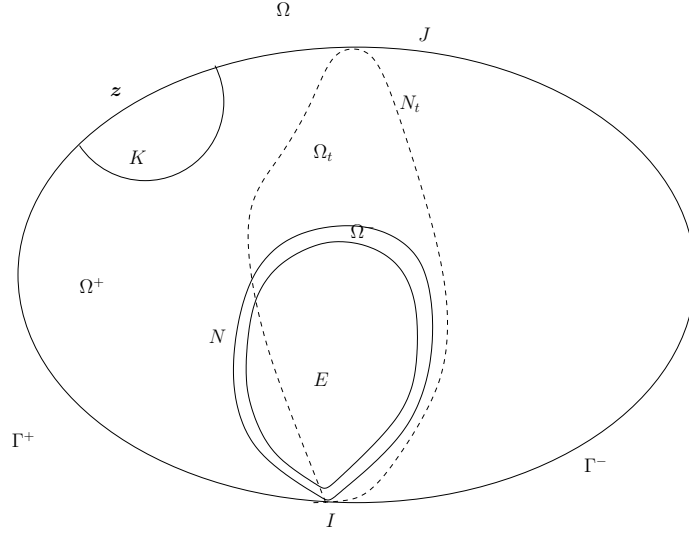
$$\alpha := \inf\{|u_2(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in E\} \quad \text{og} \quad \beta := \sup\left\{\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right| : \mathbf{x} \in \Omega\right\}.$$

Bemærk  $\alpha > 0$ , da  $|u_2(\mathbf{x})|$  er kontinuert og  $E$  er kompakt, så  $\alpha$  som infimum er et minimum, og  $u_2 \neq 0$  på  $E$ . Både  $u_2 > 0$  og  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$  på  $K$ , og med  $t > \frac{\beta}{\alpha} > 0$  gælder altså

$$v_t > 0 \text{ i } K. \tag{4.3.7}$$

Betragt nu også  $v_t$  på  $E$  med et  $t > \frac{\beta}{\alpha} > 0$ . Da  $u_2 < 0$  på  $E$ , så  $\frac{u_2}{\alpha} = \frac{-|u_2|}{\alpha} \leq -1$ . Dermed haves:

$$v_t = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + t u_2 < \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\beta}{\alpha} |u_2| \leq \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \left|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| < 0, \quad \text{i } E. \tag{4.3.8}$$


 Figur 4.4.: Illustration af approksimationen af  $\Omega^-$  med  $E$ .

Da  $v_t = 0$  i  $I \cup J$ , og  $N_t$  er disjunkt fra  $K \cup E$  (per konstruktion), følger det af (4.3.7) og (4.3.8) at  $N_t \cup I \cup J \subseteq \overline{\Omega} \setminus (K \cup E)$ . Der gælder at

$$\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J \subseteq \overline{\Omega} \setminus (K \cup E). \quad (4.3.9)$$

Da  $\Omega \setminus K$  er simpelt sammenhængende, konkluderes det at

$$\Omega_t \subseteq \Omega \setminus K. \quad (4.3.10)$$

(Her fraregnes  $E$  ikke som i (4.3.9) da  $E$  omslutes af  $\partial\Omega_t$  per antagelse.) Ifølge punkt 2 i lemma 33 gælder

$$\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2(\Omega) < \lambda_1(\Omega \setminus (K \cup E)). \quad (4.3.11)$$

Antag  $\Omega_t \subseteq \Omega \setminus (K \cup E)$ , da haves  $\lambda_1(\Omega_t) \geq \lambda_1(\Omega \setminus (K \cup E))$ , ifølge afsnit 1.3.1, og vi har en modstrid med (4.3.11). Vi konkluderer at

$$\Omega_t \not\subseteq \Omega \setminus (K \cup E).$$

Ifølge (4.3.10) gælder  $\Omega_t \subseteq \Omega \setminus K$ . Konklusionen heraf er, at  $\Omega_t \cap E \neq \emptyset$ . Ifølge (4.3.8) og punkt 1 i lemma 33 er  $v_t < 0$  på  $\Omega_t$ , for alle  $t > \frac{\beta}{\alpha} =: c_1$ .

Det ønskede  $c_2$  findes ved at gennemløbe hele beviset igen, blot med  $z$  valgt i  $\Gamma^-$ . ■

### 4.3 Beviset for udsagn (B)

**Lemma 35.** *Lad  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  være begrænset og konveks med glat rand, med  $\Omega_t$  den entydigt bestemte delmængde  $\Omega_t \subseteq \Omega$  med  $\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J$ .*

*Antag  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  har netop ét nulpunkt på  $\partial\Omega$ . Sæt  $A := \{t \in \mathbb{R} : v_t > 0 \text{ i } \Omega_t\}$  og  $D := \{t \in \mathbb{R} : v_t < 0 \text{ på } \Omega_t\}$ . Da er  $A$  og  $B$  lukkede.*

*Bevis.* Antag modsætningsvist, at  $A$  er åben, dvs. antag, der eksisterer en følge  $\{t_j\} \in A$ , med  $t_j \rightarrow t_0$ , hvor  $t_0 \notin A$ . Så er  $v_{t_j} > 0$  i  $\Omega_{t_j}$  for alle  $j \in \mathbb{N}$ , men  $v_{t_0} < 0$  i  $\Omega_{t_0}$  ifølge lemma punkt 1 i lemma 33.

Fra punkt 4 i lemma 33 haves desuden cirkelskiver  $B_j$ , således at

$$B_j := B_\rho(\mathbf{x}_j) \subseteq \Omega_{t_j} \subseteq \Omega$$

Da  $\Omega$  er begrænset er følgen  $\{\mathbf{x}_j\}$  begrænset ekstraheres en konvergent delfølge, der lades overtage betegnelsen  $\{\mathbf{x}_j\}$  istedet, med  $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ . For alle  $j$  haves  $B_j \subseteq \Omega$  så ved overgangen til grænsen  $B_0$  "rammes"  $\partial\Omega$  muligvis, men der haves, at  $B_0 \subseteq \overline{\Omega}$ . For alle punkter  $\mathbf{x} \in B_0$ , kan skrives  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$ , og dette er grænsepunktet for følgen af tilsvarende punkter i de tidligere cirkelskiver,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \{\mathbf{x}_j + \mathbf{z}\} = \mathbf{x}$ . Idet  $v_t$  er kontinuert i  $\mathbf{x}$ , og  $v_{t_j} > 0$  i  $B_j$ , haves  $v_{t_j} \geq 0$  i  $B_0$ . Kontinuitet af  $v_t$  i  $t$  giver nu, at

$$v_{t_0}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in B_0.$$

Hvis  $v_{t_0}(\mathbf{x}) = 0$  for et  $\mathbf{x} \in \Omega$ , er dette et minimum. Da  $v_{t_0} \not\equiv 0$  på  $\Omega$ , og  $\Delta(-v_{t_0}) + \lambda_2(-v_{t_0}) \geq 0$  på  $\Omega$ , giver maksimumsprincippet (sætning 15) anvendt på  $-v_{t_0}$ , at

$$v_{t_0} > 0 \quad \text{på} \quad B_0. \quad (4.3.12)$$

Så  $v_{t_0}(\mathbf{x}_0) > 0$  specielt. Da  $v_{t_0} < 0$  i  $\Omega_{t_0}$ , kan det entydigt bestemte område  $\Omega_{t_0}$  ej indeholde  $\mathbf{x}_0$ . Dermed separerer  $N_{t_0}$  ikke  $\mathbf{x}_0$  fra  $\partial\Omega \setminus (I \cup J)$ . Hermed kan konstrueres en kurve  $\zeta^*$  parametriseret ved  $\zeta : [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}$ , med  $\zeta(0) = \mathbf{x}_0$  og  $\zeta(1) \in \partial\Omega \setminus (I \cup J)$ , så

$$\zeta^* \cap (N_{t_0} \cup I \cup J) = \emptyset. \quad (4.3.13)$$

For  $j$  tilstrækkeligt stort, haves  $\mathbf{x}_0 \in B_j \subseteq \Omega_{t_j}$  og dermed  $\zeta^* \cap (N_{t_j} \cup I \cup J) \neq \emptyset$ . Da  $v_{t_j} = 0$  på netop mængden  $N_{t_j} \cup I \cup J$ , haves  $\mathbf{y}_j \in \zeta^*$ , med  $v_{t_j}(\mathbf{y}_j) = 0$ . Da  $\zeta^*$  er en lukket og begrænset mængde, kan vi fra følgen  $\{\mathbf{y}_j\} \in \zeta^*$  udtage en konvergent delfølge, der lades overtage samme betegnelse som den oprindelige følge,  $\{\mathbf{y}_j\}$ , med  $\mathbf{y}_j \rightarrow \mathbf{y}_0 \in \zeta^*$ . Dermed per kontinuitet i  $t$  og  $\mathbf{y}$ , haves  $v_{t_0}(\mathbf{y}_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_{t_j}(\mathbf{y}_j) = 0$ . Dermed gælder  $\mathbf{y}_0 \in (N_{t_0} \cup I \cup J)$ , så

$$\mathbf{y}_0 \in \zeta^* \cap (N_{t_0} \cup I \cup J), \quad (4.3.14)$$

og vi ser nu en modstrid med (4.3.13). Et tilsvarende argument kan føres for mængden  $D$ . ■

Det tunge forarbejde er gjort i de foregående lemmaer, og vi kan nu bevise vores andet hovedresultat, der sammen med sætning 31 benyttes i beviset for hovedsætningen i denne rapport.

**Sætning 36.** *Lad  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  være åben, begrænset og konveks med glat rand. Da kan  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$  ikke have netop et nulpunkt på  $\partial\Omega$ .*

*Bevis.* Lemma 33 giver os om  $A$  og  $B$ , som i lemma 35, at

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}$$

Ifølge lemma 34 haves

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset.$$

Da lemma 35 giver os, at  $A$  og  $B$  er lukkede, og da  $A^C = B$  og  $B^C = A$ , haves at  $A$  og  $B$  er en åben disjunkt overdækning af  $\mathbb{R}$ , med  $A$  og  $B$  ikke-tomme. Dette er i modstrid med, at  $\mathbb{R}$  er sammenhængende<sup>4</sup>. ■

## 4.4. Bevis for hovedsætningen

Kanonerne er kørt i stilling til at bevise følgende sætning, der er målet for denne rapport.

**Sætning 37** (Hovedsætning). *For en anden egenfunktion  $u_2$  til Dirichlet-problemet på et konvekst, åbent, begrænset område  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  med  $\partial\Omega$  glat, gælder, at knudelinjen for  $u_2$  skærer  $\partial\Omega$  i præcist to punkter.*

*Bevis.* Antag modsætningsvist, at knudelinjen ikke skærer randen af et sådan område  $\Omega$  i to punkter. Så eksisterer ifølge sætning 31 et konvekst område med glat rand, hvorpå knudelinjen, for egenfunktionen på dette område, skærer randen i præcist et punkt. Ifølge sætning 36 er dette ej muligt, og vi har nået en modstrid. ■

---

<sup>4</sup>Beviskitse for, at  $\mathbb{R}$  er sammenhængende: Antag  $\mathbb{R}$  overdækkes af åbne, disjunkte, ikke-tomme mængder. Så findes et grænsepunkt på randen af den ene mængde  $A$ , som nødvendigvis så er inkluderet i en af de andre,  $B$ . Da  $B$  åben er dette punkt er et indre punkt, og vi får en modstrid med disjunktheden.

## 5. Konklusion

I dette afsnit opsummerer vi de centrale punkter og metoder for denne tekst. Da denne tekst er skrevet som del i en projektforløb, lader vi også et par ord falde, om hvad vi herved har lært. Desuden ønsker vi at gøre læseren opmærksom på emner, der er interessante og relevante for lignende problemstillinger, men som der her ikke er blevet tid til at studere.

### Konklusion

Hovedresultatet, der er blevet gjort rede for i denne tekst er, at knudelinjen for en anden egenfunktion, for et begrænset, konvekst område i  $\mathbb{R}^2$  med glat rand, skærer randen i præcist to punkter. En delkonklusion må være, at dette er et meget interessant resultat, idet vi i denne rapport har set, hvor vidt man kommer omkring blandt diverse matematiske emner og discipliner, for at få en grundig og tilfredsstillende gennemarbejdning af emnet. I denne tekst er blevet benyttet relativt abstrakte analytiske resultater, men også mere geometriske fortolkninger, ideer og argumenter.

### Perspektivering

Desuden er selve udviklingen af matematiske resultater interessant. I emnet for denne rapport, ligesom mange andre, var der i starten, dvs. for ca. 100 år siden, en vis forvirring omkring formuleringen af problemerne og løsningerne, omend man havde en vis intuitiv forståelse for, hvad der måtte gælde. Disse problemer tilhørende løsninger er løbende blevet mere stringent og præcist formuleret, og diverse argumenter og beviser er blevet fortættede og strømlinede. Disse fremstår gerne som sætninger med elegante beviser i lærebøger. Også det matematiske sprog i sig selv har udviklet sig.

Konkret synliggøres denne udvikling, hvis man kigger i de ældre værker, som [Courant, 1953]. Denne kræver tilvænning at læse og forstå og man aner den fysiske tilgang, der førhen har været dominerende. Derfor ser man også at klassiske resultater "genbevises" og udgives i nyere mere stringente udgaver.

Denne udvikling fortsætter med endnu mere præcise udsagn, og skærping af resultaterne. Eksempelvis ser man hvorledes lignende resultater gradvist er blevet opbygget, fra [Payne, 1973] (med forudsætning om, at området er konvekst, og

symmetrisk om den ene akse) til [Lin, 1987] (Igen forudsættes passende symmetri af området, der desuden antages at være konvekst og begrænset) og senere [Melas, 1992] (her er symmetri-antagelsen forsvundet). Yderligere er det siden udgivelsen af artiklen [Melas, 1992] blevet vist det samme resultat i [Alessandrini, 1994] for områder med en rand, der blot er kontinuert differentiabel, omend her benyttes anderledes og mere analytiske metoder. I den forbindelse er det interessant at bemærke, hvorledes artiklerne fungerer som en viderebygning på de forrige. Eksempelvis henviser [Melas, 1992] til mange resultater beskrevet i [Lin, 1987].

### Videre arbejde/fordybning

Denne tekst er, som nævnt i forordet, skrevet i løbet af et semester, og derfor har vi naturligvis ikke kunne gennemarbejde alt der vedrører emnet. Lad os derfor her nævne interessante emner, vi gerne ville have medtaget i større grad, såfremt tiden havde tilladt det, og hermed ligge op til muligt videre arbejde og fordybelse i disse emner:

En grundig bevisførelse for regulariteten af løsninger til elliptiske partial differential ligninger af anden orden, hvor [Evans, 1998] og [Gilbarg and Trudinger, 2001] kunne være et startpunkt mht. litteratur.

Herunder også analyticiteten af løsningerne. Dette er interessante emner, der bygger på vigtige analytiske resultater. Hertil kommer også potential-teori, i en mulig udredning af analyticitet som i [Hellwig, 1964].

Område deformation og hvordan egenfunktioner afhænger heraf, samt et passende konvergens begreb er også interessant. En mulig tilgang hertil er via spektral- og operator-teori i f.eks [Stollmann, 1995].

Herudover er der rig mulighed for fordybning i problemstillinger generelt angående egenverdier. Man kunne eksempelvis undersøge de geometriske sammenhænge mellem disse og området nærmere.

Efter dette oplæg til den yderligere interesserede læser, afsluttes her med følgende kommentar: Arbejdet med denne tekst, og de indgående omfangsrige og klassiske matematiske emner, har været yderst lærerig og interessant.

# A. Appendices

## A.1. Den første egenværdi er simpel

Ifølge Courants knudelinjesætning (21) og maksimumsprincippet (16) haves om en første egenfunktioner,  $\psi_0 \not\equiv 0$  for et sammenhængende område  $\Omega$  med  $|\Omega| < \infty$ , at  $\psi_0 > 0$  eller  $\psi_0 < 0$  i  $\Omega$ . Antag både  $u$  og  $\tilde{u}$  er egenfunktioner og dermed begge tilhører  $L^2(\Omega)$ . Så haves vha. Hölders ulighed, at  $u, \tilde{u} \in L^1(\Omega)$ , og vi kan skrive:

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \neq 0 \quad , \quad \int_{\Omega} u \neq 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Dermed måder findes en konstant  $K \in \mathbb{R}$ , så

$$\int_{\Omega} u - K \int_{\Omega} \tilde{u} = \int_{\Omega} (u - K\tilde{u}) = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Lineariteten af  $\Delta$  giver, at  $u - K\tilde{u}$  også er en første egenfunktion, så hvis  $u - K\tilde{u} \not\equiv 0$  haves  $u - K\tilde{u} \leq 0$  hvilket strider imod (A.1.2). Dermed gælder

$$u - K\tilde{u} \equiv 0 \Leftrightarrow u = K\tilde{u}, \quad (\text{A.1.3})$$

og den første egenværdi er simpel for et sammenhængende område. Med andre ord - egenrummet tilhørende den første egenværdi er én-dimensionelt.



## A.2. Laplaceoperatoren i polære koordinater

Vi vil i dette afsnit vise hvordan man kan omskrive Laplace-operatoren til polære koordinater ved gentagen brug af kædereglen.

Lad  $T$  være koordinat-skiftet fra rektangulære til polære koordinater, og sæt

$$x := T_1^{-1}(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{og} \quad y := T_2^{-1}(r, \theta) = r \sin \theta.$$

Lav følgende udregning

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial T_1^{-1}}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial T_2^{-1}}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \quad (\text{A.2.1})$$

Således

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta. \quad (\text{A.2.2})$$

Og tilsvarende (A.2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta.$$

Så er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta. \quad (\text{A.2.3})$$

Ved at addere (A.2.2) og (A.2.3), fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2 \theta \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{r} \sin \theta - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{r} \cos \theta \\ &= \Delta_{x,y} u (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Ved at benytte (A.2.1), ses dette at være

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \Delta_{x,y} u - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r},$$

således at

$$\Delta_{x,y} u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (\text{A.2.4})$$

### A.3. Svage grænser er entydige

Her vises, at svage grænser er entydige, som benyttet i beviset for punkt 3 i sætning 4. Antag at  $\{f_n\}$  konvergerer svagt mod  $f$  og  $\tilde{f}$  i  $L^2(\Omega)$ . Ved hjælp af Riesz' repræsentationssætning, så for alle  $g \in L^2(\Omega)$  så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - f, g)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - \tilde{f}, g)_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (\text{A.3.1})$$

Da disse begge er konvergente, da kan vi trække dem fra hinanden, og for alle  $g \in L^2(\Omega)$  gælder så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f} - f, g)_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (\text{A.3.2})$$

Heraf ses det at  $f = \tilde{f}$ .

# Litteratur

- [Alessandrini, 1994] Alessandrini, G. (1994). Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains. *Comment. Math. Helv.*
- [Aronszajn, 1957] Aronszajn, N. (1957). A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equation or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl.* 36, 235-249.
- [Courant, 1953] Courant, R. (1953). *Methods of mathematical physics, Vol. 1.* Interscience Publishers, Inc.
- [Courant and John, 2000] Courant, R. and John, F. (2000). *Introduction to Calculus and Analysis II/2.* Springer Verlag.
- [Evans, 1998] Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.
- [Gidas et al., 1979] Gidas, B., Wei-Ming, and Nirenberg, L. (1979). Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. *Communications in Mathematical Physics.*
- [Gilbarg and Trudinger, 2001] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer.
- [Gladwell and Zhu, 2002] Gladwell, G. M. L. and Zhu, H. (2002). Courant's Nodal Line theorem And Its Discrete Counterparts. *Q. JI Mech. Appl. Math.* 55(1), 1-15.
- [Hardy et al., 1978] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1978). *Inequalities.* Cambridge University Press.
- [Hayman, 1978] Hayman, W. (1978). Some Bounds for Principal Frequency. *Applicable Analysis*, 1978, Vol 7, pp. 247-254.
- [Hellwig, 1964] Hellwig, G. (1964). *Partial Differential Equations (An introduction).* Blaisdell Publishing Company.
- [Jensen, 2000] Jensen, H. E. (2000). *Matematisk Analyse I (fjerde udgave).* Matematisk Institut, Danmarks Tekniske højskole.

- [Johnsen, 2006] Johnsen, J. (2006). Notes on Functional Analysis. <http://www.math.aau.dk/~johansen/Teaching/Notes/hilbert.pdf> per 5. juni 2007.
- [Kellogg, 1929] Kellogg, O. D. (1929). *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag.
- [Krantz, 1999] Krantz, S. G. (1999). *Handbook of Complex Variables*. Birkhäuser.
- [Lieb and Loss, 2001] Lieb, E. H. and Loss, M. (2001). *Analysis, second edition*. Georgia Institute of Technology - AMS.
- [Lin, 1987] Lin, C.-S. (1987). On the Second Eigenfunctions of the Laplacian in  $\mathbb{R}^2$ . *Comm. Math. Phys.* 111 (1987), no. 2, 161–166.
- [Melas, 1992] Melas, A. D. (1992). On the nodal line of the second eigenfunction of the laplacian in  $\mathbb{R}^2$ . *J. Differential Geom.* 35 (1992), no. 1, 255–263.
- [O'Connor and Robertson, 2000] O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. (2000). Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Dirichlet.html> per 5. juni 2007.
- [Payne, 1973] Payne, L. E. (1973). On Two Conjectures in the fixed Membrane Eigenvalue Problem. *Journal of Applied Mathematic and Physics*, Vol. 24.
- [Protter and Weinberger, 1999] Protter, M. H. and Weinberger, H. F. (1999). *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer.
- [Steven R. Bell and Steven G. Krantz, 1987] Steven R. Bell and Steven G. Krantz (1987). *Smoothness to the boundary of conformal maps*. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Volume 17, Number 1, Winter 1987.
- [Stollmann, 1995] Stollmann, P. (1995). *A convergence theorem for Dirichlet-forms with applications to boundary value problems with varying domains*. *Math. Z.* 219, 275-287.
- [Veblen, 1905] Veblen, O. (1905). Theory On Plane Curves In Non-Metrical Analysis Situs. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 6, No. 1., pp. 83-98.
- [Wade, 2004] Wade, W. R. (2004). *An Introduction to Analysis (Third Edition)*. Pearson Prentice Hall.