

Listefarvninger af planare grafer uden små kredse

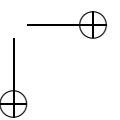
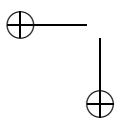
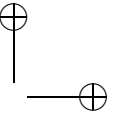
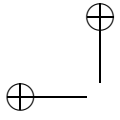
Line Juhl
Casper Thomsen

Aalborg Universitet



Institut for Matematiske Fag • Gruppe G3-115

Juni 2007



Institut for Matematiske Fag

Aalborg Universitet

**Titel:**

Listefarvninger af planare grafer uden små kredse

Projektperiode:

Mat6, 2007

31. januar – 6. juni

Projektgruppe:

G3-115

Gruppemedlemmer:

Line Juhl

Casper Thomsen

Vejleder:

Leif Kjær Jørgensen

Kopier: 7

Antal sider: 86

Synopsis:

Dette speciale omhandler listefarvninger af grafer. Listefarvninger er farvninger af grafer, hvor farven til hvert punkt skal vælges fra en givet liste af farver.

Første halvdel af specialet omhandler acyklisk listefarvning, som er farvninger, hvor ingen kredse i grafen kun har to farver. Vi beskæftiger os med en stadig ubekræftet formodning fra 2002, som siger, at alle planare grafer er acyklisk 5-listefarvbare. I denne del af specialet bevises en række sætninger, som ligner formodningen.

I anden halvdel beskæftiger vi os først med Grötzschs sætning, som siger, at enhver planar graf uden trekantede kan farves ved brug af blot tre farver. Det viser sig nemlig, at denne sætning (forholdsvist kort) kan vises vha. et listefarvningsresultat. Bevisstrategien brugt i dette bevis, bruges til at bevise en nedre grænse for antallet af forskellige listefarvninger af grafer med kredse af længde mindst fem.

Indhold

| | |
|---|------------|
| Forord | iii |
| English Summary | 1 |
| 1 Introduktion | 2 |
| 2 Acyklisk listefarvning af planare grafer | 4 |
| 2.1 Acyklisk 7-listefarvbarhed | 5 |
| 2.2 Acyklisk 5-listefarvbarhed | 19 |
| 2.3 Acyklisk defekt listefarvning | 38 |
| 3 Grötzschs sætning | 41 |
| 4 Antal L-farvninger i særlige grafer | 49 |
| 5 Afrunding | 83 |
| Litteratur | 85 |

Forord

Dette speciale er skrevet af gruppe G3-115 på specialesemestret, mat6, foråret 2007, på Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet.

Bagerst i specialet findes en litteraturliste med alle kilder, som har været anvendt i specialet. Kildehenvisninger er noteret med (efternavn(e), årstal), og hvis der refereres til enten en specifik side, sætning, lemma eller lignende, da noteres det med (efternavn(e), årstal, side). Henvisningen er gjort mest mulig specifik. Dvs. der henvises til et sætningsnummer/-navn eller lignende, hvor det er muligt; er det ikke muligt, specificeres blot sidenummeret.

Gennem specialet benyttes en del notation, som det antages, at læseren er bekendt med. Definitioner, som er emnespecifikke, altså som ikke er basale med grafteoretiske øjne, er selvsagt medtaget. På side 2 findes en kortfattet introduktion; for yderligere definitioner og notation i øvrigt henvises til (Diestel, 2005) (som på side 409-410 indeholder en udførlig notationsliste).

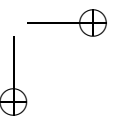
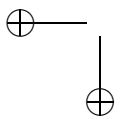
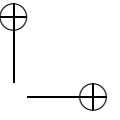
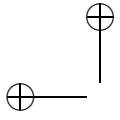
Kilder brugt til sætninger er angivet i slutningen af sætningen; det samme gælder lemmaer, formodninger etc. Beviser afsluttes som vanligt med \square .

Hvor der indføres begreber, er det indførte begreb understreget med en stiplede linje og samtidig gengivet i margin. Hvor der defineres matematiske entiteter, er de også gengivet i margin, for nemmere at kunne finde tilbage til hvor de indføres; dog kun steder, hvor vi har ment, det er relevante.

Slutteligt vil vi gerne rette en tak til Leif Kjær Jørgensen for faglig sparring.

Line Juhl

Casper Thomsen



English Summary

This thesis concerns choosability (also known as list colouring) of planar graphs. A list colouring of a graph is a colouring, where every vertex is given a list of colours, to which the colour chosen for the vertex must belong. If it is possible to list colour the graph for every possible list with at least k colours, then the graph is called k -list-colourable or k -choosable. Since a normal colouring is a list colouring where all lists are equal, all k -colourable graphs are k -list-colourable. The contrary is not true.

An acyclic colouring is a coloring where no cycle is coloured with only two colours. This concept applies to both list colourings and normal colourings. In 1979 it was shown that every planar graph is acyclic 5-colourable. In 2002, this theorem was generalized to the following conjecture: Every planar graph is acyclic 5-choosable. The conjecture still stands. However, we prove that every planar graph is acyclic 7-choosable—today this is the closest we get to acyclic 5-choosability without adding restrictions to the graphs. In 2006 it was proven that every planar graph without 4- and 5-cycles or 4- and 6-cycles is acyclic 5-choosable. This result is shown as well.

In the second half of this thesis, further properties of graphs without small cycles are examined. A well-known theorem of Grötzsch is that every planar graph without 3-cycles is 3-colourable. This theorem can be proved with a relatively short proof using a result from choosability. For that purpose it is proven that every planar graph without 3- and 4-cycles is 3-choosable.

Another interesting aspect concerning choosability is how many different colorings there exists using a given list assignment. We modify the above stated theorem and proof of the 3-choosability of planar graphs without 3- and 4-cycles, and show the following: Every planar graph G without 3- and 4-cycles has at least $\lceil 2^{|G|/10000} \rceil$ different list colourings, given a list assignment. Based on that proof we find a tighter bound, that is: every such graph has at least $\lceil 2^{|G|/1600} \rceil$ different list colourings. However, the essence is the same, that is, the number of different list colourings depends exponentially on the number of vertices in the graph.

1 Introduktion

Her introduceres basale termer og notation, som vil blive brugt gennem hele specialet. Flere definitioner dukker op i de efterfølgende afsnit, hvis det ikke har været relevant at indføre dem tidligere.

Definition 1

Lad $G := (V, E)$ være en graf. En afbildning $\mathcal{C} : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ siges at være en **farvning** (k -farvning) af G , hvis $\mathcal{C}(v) \neq \mathcal{C}(w)$ for alle $vw \in E$. Det **kromatiske tal** af G er det mindste tal k , så der findes en k -farvning af G .

Når en graf er **farvbar** (dvs. har en farvning), kan der lægges en betingelse på farvningerne. Følgende definition er et eksempel herpå.

Definition 2

Lad G være en graf. En graf $G[\{v : \mathcal{C}(v) \in \{c_1, \dots, c_n\}\}]$ er for vilkårlige farver c_1, \dots, c_n en **n -kromatisk delgraf** af G . En farvning \mathcal{C} af G siges at være en **acyklisk farvning**, hvis ingen 2-kromatisk delgraf indeholder en kreds.

Begrebet listefarvning blev indført uafhængigt af hinanden i (Erdős et al., 1979) og (Vizing, 1976). I "almindelig" farvning har man samme mulighed for valg af farver til hvert punkt. I listefarvning har hvert punkt sine egne farver, hvorfra farven skal vælges.

Definition 3

Lad $G := (V, E)$ være en graf. En **listetildeling** L til G er en afbildning $L : V \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, K\})$. En **k -listetildeling** L er en listetildeling, hvor $|L(v)| \geq k$ for alle $v \in V$. Grafen G siges at være

KAPITEL 1. INTRODUKTION

L -farvbar for en listetildeling L , hvis der findes en farvning \mathcal{C} af G , hvor $\mathcal{C}(v) \in L(v)$ for alle $v \in V$. Ydermere er en graf k -listefarvbar, hvis den er L -farvbar for enhver k -listetildeling L . Det mindste tal k , så G er L -farvbar for en vilkårlig k -listetildeling L , siges at være det listekromatiske tal.

L -farvbar
 k -listefarvbar
 listekromatiske tal

Almindelig farvning er således et specialtilfælde af listefarvning, nemlig hvor alle listerne er ens. Derfor er en k -listefarvbar graf naturligvis også k -farvbar, så listefarvbarhed er en stærkere egenskab. Betingelsen om at en farvning skal være acyklisk kan overføres til listefarvning:

Definition 4

En graf $G := (V, E)$ er acyklisk L -farvbar for en listetildeling L , hvis der findes en acyklisk farvning \mathcal{C} så $\mathcal{C}(v) \in L(v)$ for alle $v \in V$. Grafen G er acyklisk k -listefarvbar, hvis den er acyklisk L -farvbar for enhver k -listetildeling L .

acyklisk L -farvbar
 acyklisk
 k -listefarvbar

Gennem hele specialet benytter vi følgende notation.

Definition 5

Et n -punkt er et punkt med valens n . En n -kreds er en kreds af længde n , dvs. en kreds med n kanter. En n -region er en region afgrænset af n kanter. Betegnelsen $\leq k$ -punkter er punkter med valens k eller mindre, tilsvarende for $\geq k$ -punkter, $\leq k$ -kredse, etc.

n -punkt, n -kreds
 n -region
 $\leq k$ -punkter

2

Acyklisk listefarvning af planare grafer

Dette og det følgende kapitel omhandler acyklisk listefarvning. Vi ser på en række sætninger, der kan ses som skridt på vej til at bevise formodning 7. Sidst i kapitlet undersøger vi, om det kan hjælpe os på vej, hvis vi tillader, at et antal naboer kan have samme farve (defekt farvning).

I 1973 publicerer Grünbaum følgende formodning:

Formodning 6

Enhver planar graf er acyklisk 5-farvbar. (Grünbaum, 1973)

I samme artikel viser han, at enhver planar graf er acyklisk 9-farvbar. Allerede i 1974 vises det i (Mitchem, 1974), at enhver planar graf også er acyklisk 8-farvbar. Det bliver senere vist, at man kan nøjes 6 farver, nemlig i (Kostochka, 1976). En smule senere, i 1977, bliver det vha. en anden bevisteknik vist, at enhver planar graf er acyklisk 7-farvbar (Albertson og Berman, 1977). Den endelige bekræftelse af, at formodningen er sand, kom i 1979, hvor Borodin beviser formodning 6 (Borodin, 1979). At denne grænse er bedst mulig vises i (Kostochka og Mel'nikov, 1976), hvor de konstruerer en planar graf, som ikke er acyklisk 4-farvbar.

I 70'erne var begrebet listefarvning stort set ikke behandlet, så acyklisk listefarvbarhed var endnu ikke taget op til overvejelse.

Først i 2002 bliver formodning 6 generaliseret til listefarvbarhed i artiklen (Borodin et al., 2002).

Acyklisk 7-listefarvbarhed

Formodning 7

Enhver planar graf er acyklisk 5-listefarvbar.

(Borodin et al., 2002, Conj. 2, s. 84)

Denne formodning kan ses som en generalisering/styrkelse af Thomassens sætning fra (Thomassen, 1994a), som siger, at enhver planar graf er 5-listefarvbar. Eftersom grænsen i formodning 6 er bedst mulig, giver formodning 7 også den mindste grænse, hvis den viser sig at være sand.

De to følgende sætninger er (så vidt vi er bekendt med) de to nærmeste resultater på vejen mod at bevise ovenstående formodning. Først vises at enhver planar graf er acyklisk 7-listefarvbar og derefter to sætninger, som omhandler acyklisk 5-listefarvbarhed af planare grafer uden kredse af specielle længder. Til dette benyttes følgende notation:

Definition 8

En **tur** af længde k (en k -tur) i en graf $G = (V, E)$ er en følge af punkter og kanter $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$, hvor $v_i \in V$ og $e_i \in E$ og hvor $e_i = v_i v_{i+1}$.

En tur adskiller sig dermed fra en vej ved at turen kan indeholde samme punkter og kanter flere gange.

Definition 9

Lad f være en region. Notationen $b(f)$ betegner en korteste tur, som netop medtager samtlige punkter på randen af f . Er denne tur en kreds (på nær en kant), kaldes f en **simpel region**.

Et n -punkt vil altid ligge på randen af netop n regioner, hvis vi tillader, at disse regioner kan være ens. Et punkt kan derfor ligge på randen af samme region mere en én gang, hvis denne region ikke er simpel. Med andre ord er $|b(f)|$ antal punkter på randen af f regnet med multiplicitet.

Definition 10

For $v \in V$ defineres $n_i(v)$ som antallet af nabo- i -punkter til v .

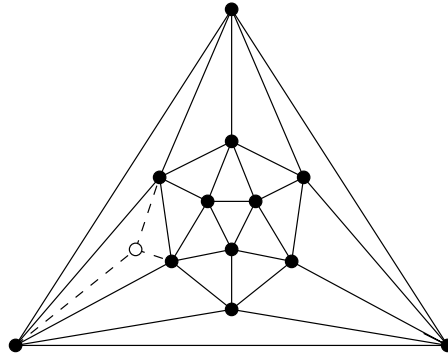
2.1 Acyklisk 7-listefarvbarhed

I (Borodin et al., 2002), hvori formodning 7 er at finde, vises det, at enhver planar graf er acyklisk 7-listefarvbar. Det har (så vidt vi ved) endnu ikke været muligt at vise resultater om acyklisk k -listefarvning af planare grafer for $k < 7$ uden at have restriktioner på grafen. Vi vil derfor vise følgende:

Sætning 11

Enhver planar graf er acyklisk 7-listefarvbar.

(Borodin et al., 2002, Thm. 1)



Figur 2.1: I hver region indsættes et nyt punkt, som forbindes med punkterne på randen.

For at vise sætningen benyttes et lemma, hvori følgende notation benyttes:

Definition 12

Med småpunkter menes ≤ 5 -punkter. Vægten ω af en region f udregnes som $\omega(f) := \sum_{v \in b(f)} d(v)$.

Lemma 13

Lad $G = (V, E)$ være en plan triangulering, hvor F betegner mængden af regioner. Hvis G opfylder, at

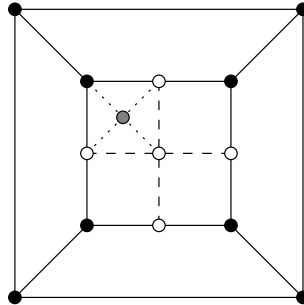
1. G ikke indeholder ≤ 3 -punkter,
2. intet 4-punkt har et ≤ 6 -punkt som nabo, og
3. intet 7-punkt har et 4-punkt og to andre småpunkter som naboer,

så har G en region f med $\omega(f) \leq 17$. (Borodin et al., 2002, Thm. 2)

Det er i (Borodin, 1990) vist, at betragtes en plan triangulering uden ≤ 4 -punkter, vil denne altid have en region med vægt højst 17. Denne grænse er mindst mulig. I lemma 13 tillades også punkter med valens 4, men af den grund tilføjes krav 2 og 3 i lemmaet. Det viser sig, at vi ikke kan slække på disse tre krav. Følgende tre modeksempler viser hvorfor:

1. Ved at tillade 3-punkter, kan der dannes en trianguleret graf, hvori alle regioner har vægt 23. Dette gøres ved at indsætte et ekstra punkt i hver region i grafen set i figur 2.1 og forbinde dette punkt med alle punkter på randen af den region punktet indsættes i. På figuren er de sorte punkter de originale punkter, mens det hvide punkt og de stiplede linjer markerer,

Acyklisk 7-listefarvbarhed



Figur 2.2: Der indsættes nye punkter af to omgange – først de hvide, dernæst de grå punkter.

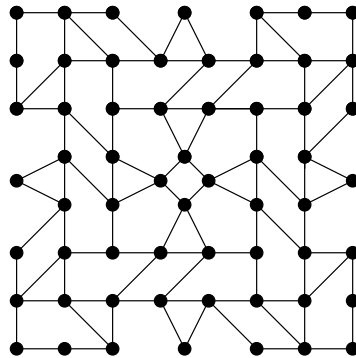
hvordan der tilføjes nye punkter. De sorte punkter har herefter valens 10, mens de hvide har valens 3. Det giver for hver ny region en vægt på 23.

2. Betragt grafen på figur 2.2 kun bestående af de sorte punkter. Der indsættes nu et punkt i hver 4-region (også den ydre), og disse punkter forbindes med midten af hver kant på randen, således at der her opstår nye punkter. På figuren er de nye punkter markeret med et hvidt punkt. Grafen består nu af 4-kredse, hvor de sorte punkter har valens 3 og de hvide valens 4.

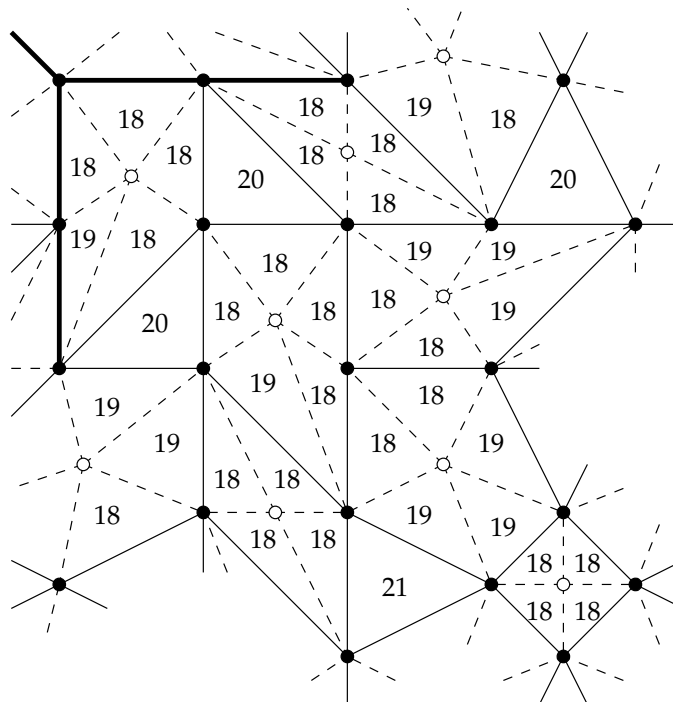
I hvert af de nye regioner indsættes endnu et punkt, som forbindes med hvert punkt på randen af regionen. Dette vises på figuren med et gråt punkt. Nu haves en triangulering, hvor de sorte punkter har valens 6, de hvide har valens 8 og de grå har valens 4. Bemærk at vi her har, at et 4-punkt er nabo til at ≤ 6 -punkt og at ingen punkter er ≤ 3 -punkter. Vægten af de regioner, hvor randen består af et sort, et gråt og et hvidt punkt, er $6 + 8 + 4 = 18$ og de resterende regioner (to hvide og et gråt punkt på randen) har en vægt på $8 + 8 + 4 = 20$.

3. Her betragtes figur 2.3. Denne figur indsættes i de 6 oprindelige regioner, der findes i grafen fra figur 2.2, som kun består af de sorte punkter. Dette gøres således, at en kant og dens to endepunkter i figur 2.2 erstattes af de syv punkter, der udgør en af siderne i figur 2.3. Indsæt nu et punkt i hver region, som er en 3-region, og forbind dette punkt med punkterne på randen.

Herefter er grafen en triangulering, både uden ≤ 3 -punkter og hvor intet 4-punkt er nabo til et ≤ 6 -punkt. Til gengæld eksisterer der 7-punkter, som har et 4-punkt samt to andre småpunk-



Figur 2.3: Grafen, som indsættes seks steder i figur 2.2.



Figur 2.4: Et hjørne af figur 2.3, som er indsat i figur 2.2. De markerede kanter svarer til en kant i figur 2.2. Desuden er der indsat hvide punkter i hver ≥ 4 -region, og vægtene af de nye regioner er beregnet. Alle regioner, som optræder i den endelige graf, er med præcis én gang.

Acyklisk 7-listefarvbarhed

ter som naboer (et punkt, som oprindeligt var et 4-punkt og lå på randen af tre regioner f , hvor $|b(f)| > 3$ og én 3-region). Det ses på figur 2.4, at $\omega(f) \geq 18$ for alle $f \in F$.

Nu til det egentlige bevis for lemma 13.

Bevis for lemma 13. Antag at grafen $G = (V, E)$ er et modeksempel, altså at G er en plan triangulering som opfylder krav 1-3 i lemmaet, men at ingen regioner i G har vægt under 18. Bevisteknikken, der anvendes, er afladning, hvilket vi også senere (i beviserne for sætning 14 og 15) vil gøre brug af.

Lad $|V| = n$, $|E| = m$ og $F = r$, hvor F er mængden af regioner i G . Da vi har at gøre med en plan triangulering, giver hver region anledning til 3 kanter og hver kant giver anledning til 2 regioner. Dette giver, at $r = \frac{2}{3}m$. Indsættes dette i Eulers formel (Diestel, 2005, Thm. 4.2.9), som siger, at $n - m + r = 2$, fås $m - 3n = -6$. Da $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, omskrives det førnævnte til

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) = -12. \tag{2.1}$$

En vægtfunktion ω defineres ved $\omega(v) := d(v) - 6$ for alle $v \in V$. En ny vægtfunktion ω^* defineres vha. følgende afladsregler:

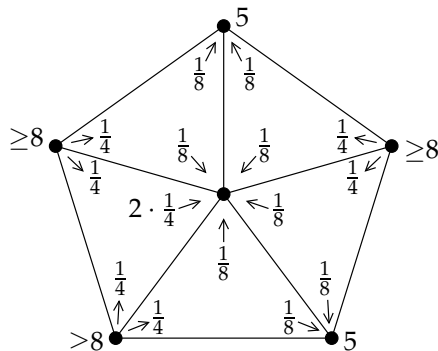
R1 Hvert punkt v med $d(v) \geq 7$ giver til hver region f , som v ligger på randen af

- $\frac{1}{6}$, hvis $d(v) = 7$ og f har et 5-punkt på randen,
- $\frac{1}{4}$, hvis $d(v) = 7$ og f har et 4-punkt på randen og
- $\frac{1}{4}$, hvis $d(v) \geq 8$ og f har et småpunkt på randen.

R2 Ladningen som tilføres hver region deles enten ligeligt mellem de to 5-punkter, som ligger på randen, eller også gives hele ladningen til det eneste småpunkt på randen.

Bemærkning B1. Der kan ikke opstå andre muligheder end beskrevet i R2, eftersom $|b(f)| = 3$ for alle $f \in F$ og G ikke indeholder 3-punkter og ej heller indeholder 4-punkter, der har et småpunkt som nabo.

Da den samlede sum af vægtene er ens for både ω og ω^* , må der gælde, at $\sum_{v \in V} \omega(v) = \sum_{v \in V} \omega^*(v) = -12$ jf. lighed (2.1). Kan vi imidlertid vise, at $\omega^*(v) \geq 0$ for alle $v \in V$, vil vi have opnået den ønskede modstrid. Vi opdeler punkterne efter deres valens og undersøger alle tilfælde.



Figur 2.5: Et 5-punkt med $n_5(v) = 2$ og dertilhørende afladninger.

$d(v) \geq 8$: Punktet v kan i værste fald give $\frac{1}{4}$ til hver af dens $d(v)$ naboregioner. Dette giver, at

$$\omega^*(v) \geq \omega(v) - \frac{1}{4}d(v) = d(v) - 6 - \frac{1}{4}d(v) = \frac{3(d(v) - 8)}{4} \geq 0.$$

$d(v) = 7$: Vi har, at $\omega(v) = 1$. Hvis v er nabo til et 4-punkt w , kan v , pr. pkt. 3 i lemma 13, højst være nabo til ét yderligere småpunkt w' (hvor $ww' \notin E$ pr. pkt 2 i lemma 13). De to punkter w og w' ligger på randen af netop 4 af naboregionerne til v , og dermed er $\omega^*(v) \geq 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 0$.

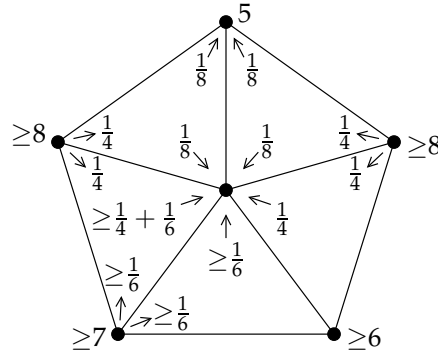
Hvis v derimod ikke er nabo til et 4-punkt, kan den højst være nabo til tre 5-punkter. Dette følger, da v ikke kan have en naboregion, hvor de to sidste punkter begge har valens 5, da denne region så ville have vægt 17. Disse tre punkter støder op til 6 af naboregionerne til v , hvilket giver, at $\omega^*(v) \geq 1 - \frac{1}{6} \cdot 6 = 0$.

$d(v) = 6$: Dette punkt hverken afgiver eller optager ladning, ergo er $\omega^*(v) = \omega(v) = 0$

$d(v) = 5$: Her er $\omega(v) = -1$. Et 5-punkt kan ikke have et 4-punkt som nabo jf. pkt. 2 i lemma 13. Det kan desuden højst have to 5-punkter som nabo, da vi som før ikke kan have, at v er nabo til en region, hvor de to andre punkter i regionen også er 5-punkter, for så er vægten af regionen kun 15.

Hvis $n_5(v) = 2$ ser situationen ud som på figur 2.5. De resterende tre naboer til v er nødvendigvis ≥ 8 -punkter, da vi ellers igen ville have en region med vægt mindre end 18. Disse tre ≥ 8 -punkter giver hver $\frac{1}{4}$ til de to naboregioner, som også har v

Acyklisk 7-listefarvbarhed



Figur 2.6: Et 5-punkt med $n_5(v) = 1$ og dertilhørende afladninger.

på randen. Denne vægt gives enten direkte til v eller deles mellem to 5-punkter. I alt haves, at $\omega^*(v) \geq -1 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 0$.

Hvis $n_5(v) = 1$, er de resterende nabopunkter to ≥ 8 -punkter, et ≥ 7 -punkt og et ≥ 6 -punkt, for at vægtene af regioner ikke bliver under 18. Se figur 2.6. Vi har, at $\omega^*(v) \geq -1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2 > 0$.

Hvis $n_5(v) = 0$ er mindst 3 af nabopunkterne ≥ 7 -punkter, for at vægten af regionerne mindst er 18. Disse tre ≥ 7 -punkter giver mindst $\frac{1}{6}$ til hver af de 6 regioner de i alt støder op til indeholdende v . Ergo er $\omega^*(v) \geq -1 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 0$.

$d(v) = 4$: Vi har, at $\omega(v) = -2$. Alle nabopunkter er ≥ 7 -punkter (pr. pkt 2 i lemma 13), og dermed er $\omega^*(v) = -2 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 0$.

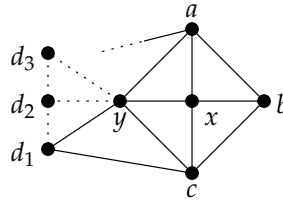
□

Nu til beviset for sætningen.

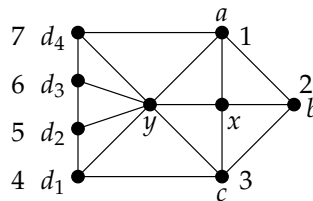
Bevis for sætning 11. Antag modsætningsvist, at T er et punktminimalt modeksempel, dvs. en triangulering, med en 7-listetildeling L , således at T ikke acyklisk kan L -farves. Først en række resultater som opsummeres i følgende påstande.

Påstand 1. For alle $v \in V(T)$ er $d(v) \geq 4$.

Bevis. Antag omvendt at x er et 3-punkt med naboerne x_1, x_2 og x_3 ; hvis x er et 2-punkt følger resultatet af de samme argumenter. Pga. minimaliteten af T er $T - x$ acyklisk $L|_{T-x}$ -farvbar. Fordi x_i alle er farvet forskelligt, vælges til x blot en farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{x_1, x_2, x_3\})$, hvilket således udgør en acyklisk L -farvning af hele T . □



Figur 2.7: Et 4-punkt med et ≤ 6 -punkt som nabo.



Figur 2.8: Et 7-punkt med et 4-punkt som nabo.

Påstand 2. Intet 4-punkt i T er nabo til et ≤ 6 -punkt.

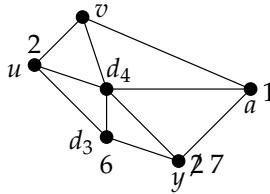
Bevis. Lad modsætningsvist x være et 4-punkt og y være et ≤ 6 -punkt, som er nabo til x ; navngiv de resterende punkter som på figur 2.7. Hvis $ac \notin E(T)$, lad $T' := T - x + ac$, ellers lad $T' := T - x$. Fordi T er minimal, findes en acyklisk $L|_{T'}$ -farvning \mathcal{C} af T' . Lad $L_x := L(x) \setminus \mathcal{C}(N_T(x))$; x skal farves med en farve fra L_x . Hvis $\mathcal{C}(b) \neq \mathcal{C}(y)$ farves x blot med en farve fra L_x . Ellers hvis $\mathcal{C}(b) = \mathcal{C}(y)$, vælges en farve fra $L_x \setminus N_{T'}(y)$, hvilket er muligt fordi $|\mathcal{C}(N_T(x) \cup N_{T'}(y))| \leq 6$. På den måde undgår vi en 2-kromatisk kreds gennem yx . \square

Påstand 3. Hvis et 7-punkt er nabo til et 4-punkt, så er ingen af 7-punktets andre naboer småpunkter.

Bevis. Antag modsætningsvist at et 7-punkt y er nabo til et 4-punkt x samt et andet småpunkt; lad de resterende punkter være navngivet som i figur 2.8. Hvis $ac \notin E(T)$ betragtes $T' := T - x + ac$, ellers betragtes $T' := T - x$. Lad igen \mathcal{C} være en acyklisk $L|_{T'}$ -farvning af T' – som findes fordi T er punktminimal. Antag i dette tilfælde gerne at $L(x) = \{1, \dots, 7\}$ og at $\mathcal{C}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3\}$; se igen figur 2.8. Argumenterne fra påstand 2 er tilstrækkelige også her, på nær hvor $\mathcal{C}(y) = 2$ og $\mathcal{C}(\{d_1, \dots, d_4\}) = \{4, \dots, 7\}$. I dette tilfælde, vil der nemlig kunne opstå en 2-kromatisk kreds hvor $d_i y x b$ (for et $i \in \{1, \dots, 4\}$) er en del af kredsen; antag derfor at en sådan kreds opstår for ethvert valg af $\mathcal{C}(x) \in \{4, \dots, 7\}$.

Hvis $L(y) \neq L(x)$, så kan y omfarves med en farve fra $L(y) \setminus L(x)$, så farvningen stadig er en acyklisk $L|_{T'}$ -farvning af T' . Derpå

Acyklisk 7-listefarvbarhed



Figur 2.9: Punktet d_4 fra figur 2.8, hvor $d(d_4) = 5$.

kan x farves med en farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{a, b, c, y\})$ og derved opnå en acyklisk L -farvning af T .

Antag derfor at $L(y) = L(x)$. Mindst ét af punkterne d_i er et småpunkt – hverken a eller c er småpunkter jf. påstand 2, fordi de begge er naboer til x , som er et 4-punkt. Lad d_4 være et småpunkt. Vi omfarver y , $\mathcal{C}(y) := 7$, og derpå d_4 , fordi også $\mathcal{C}(d_4) = 7$.

Hvis $d(d_4) = 4$ kan en vilkårlig farve fra $L(d_4) \setminus \mathcal{C}(N(d_4))$ vælges, fordi naboerne alle er farvet indbyrdes forskelligt – hvilket er tilfældet pga. omfarvningen.

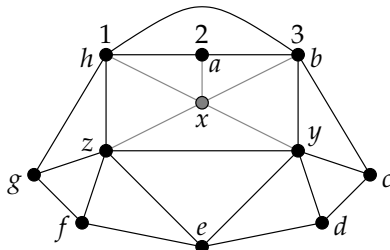
Hvis $d(d_4) = 5$, lad så naboerne være som i figur 2.9. Eftersom vi har antaget, at der er en 2-kromatisk vej mellem d_4 og b i T , som en del af en 2-kromatisk kreds $C_{2,7}$ farvet med 2 og 7, så er enten $\mathcal{C}(u) = 2$ eller $\mathcal{C}(v) = 2$; antag at $\mathcal{C}(u) = 2$. Farv så d_4 med en farve fra $L(d_4) \setminus \{1, 2, 6, 7, \mathcal{C}(v)\}$. Der kan ikke fremkomme en 2-kromatisk kreds (med farverne $\mathcal{C}(d_4)$ og 6) med vd_4d_3 som en del af kredsen, fordi denne kreds skulle have fælles punkter med vejen $bC_{2,7}u \not\cong x, y$. Dette er ikke muligt fordi $\mathcal{C}(C_{2,7}) = \{2, 7\}$ og $\mathcal{C}(d_4) \notin \{2, 7\}$. Farv så blot x fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{a, b, c, y\})$. \square

Ifølge disse tre påstande, 1, 2 og 3, opfylder T betingelserne i lemma 13; ergo indeholder T en region med vægt højst 17. Vi viser, at dette ikke kan lade sig gøre, hvis T er et modeksempel, hvilket vil afslutte beviset. Følgende to påstande vises efterfølgende:

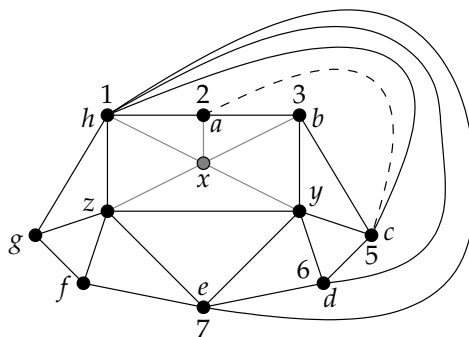
Påstand 4. Der eksisterer ikke en region i T med et 5-punkt og to ≤ 6 -punkter på randen.

Påstand 5. Der eksisterer ikke en region i T med et 7-punkt og to 5-punkter på randen.

Fordi T er en triangulering, består randen af enhver region af netop 3 punkter; lad x, y og z være randen af en vilkårlig region f i T . Jf. påstand 1 er $d(x), d(y), d(z) \geq 4$. Hvis ét af punkterne har valens 4, så er ingen af de to andre ≤ 6 -punkter jf. påstand 2. Ergo er $\omega(f) \geq 4 + 7 + 7 > 17$. Hvis ét af punkterne, lad det være x , har valens 5, så er $d(y) + d(z) \geq 7 + 4$ jf. påstand 4, men jf. påstand 3 udgør intet 7-punkt, et 4-punkt og et andet småpunkt en region



Figur 2.10: En region med et 5-punkt og to 6-punkter på randen.



Figur 2.11: Linjerne fra h til c , d og e er $P_{1,\alpha}$, for $\alpha = 5, 6, 7$, mens den stiplede linje er den mulige vej fra a til c .

i T ; dvs. $d(y) + d(z) \geq 7 + 5$, men jf. påstand 5 har ingen region i T en rand bestående af et 7-punkt og to 5-punkter. Ergo er $\omega(f) \geq 5 + 7 + 6 > 17$.

Således har enhver region vægt mindst 18, hvilket er i modstrid med sætning 13. Tilbage er derfor blot at bevise påstand 4 og 5.

Bevis for påstand 4. Resultatet bevises for 6-punkter og ikke for ≤ 6 -punkter; argumenterne dækker de resterende tilfælde.

Lad modsætningsvist xyz være en 3-region i T , hvor $d(x) = 5$ og $d(y) = d(z) = 6$. Navngivningen af de resterende punkter ses i figur 2.10.

T' Lad $T' := T - x + bh$, hvis kanten bh ikke allerede er i T , ellers lad blot $T' := T - x$. Pga. minimaliteten af T findes der en acyklisk $L|_{T'}$ -farvning \mathcal{C} af T' . Antag gerne at $\mathcal{C}(h) = 1$, $\mathcal{C}(a) = 2$ og at $\mathcal{C}(b) = 3$, som angivet på figuren.

Hvis y og z er farvet, således at $|\mathcal{C}(N(x))| = 5$, kan x problemfrit farves uden risiko for at en 2-kromatisk kreds opstår. Bemærk i øvrigt at ikke både $\mathcal{C}(y) = 1$ og $\mathcal{C}(z) = 3$, fordi \mathcal{C} er en acyklisk $L|_{T'}$ -farvning.

Acyklisk 7-listefarvbarhed

Vi ser på to tilfælde; hvor $2 \notin \mathcal{C}(\{y, z\})$ og hvor $2 \in \mathcal{C}(\{y, z\})$.

Hvis $2 \notin \mathcal{C}(\{y, z\})$: Antag gerne at $\mathcal{C}(y) = 1$ og $\mathcal{C}(z) = 4$. Vi skal tage højde for, at hxy ikke bliver en del af en 2-kromatisk kreds. Tilbage i $L(x) \setminus \mathcal{C}(N(x))$ er mindst tre farver. Antag gerne at disse tre er 5, 6 og 7 og at $|L(x) \setminus \mathcal{C}(N(x))| = 3$. Hvis $\mathcal{C}(\{c, d, e\}) \neq \{5, 6, 7\}$, kan x problemfrit farves med en tiloversbleven farve. Vi antager derfor, at $\mathcal{C}(c) = 5$, $\mathcal{C}(d) = 6$ og $\mathcal{C}(e) = 7$, og at der findes tre 2-kromatiske veje fra h til c , d og e , som hver især er farvet med 1 og $\alpha \in \{5, 6, 7\}$. Kald disse tre 2-kromatiske veje for $P_{1,\alpha}$, for $\alpha = 5, 6, 7$. Vi omfarver y :

Hvis $2 \in L(y)$, lad $\mathcal{C}(y) := 2$. Nu kan det ske, at axy en del af en 2-kromatisk kreds. Men pga. vejene $P_{1,\alpha}$, vil højst én vej fra a til c , d og e kunne eksistere (denne går fra a til c , er farvet 2 og 5). Det ses også på figur 2.11, at en eventuel 2-kromatisk vej fra a til d (farvet med 2 og 6) ikke kan eksistere, da den i så fald skulle krydse en vej $P_{1,5}$.

Hvis omvendt $2 \notin L(y)$, så farves y blot med en farve fra $L(y) \setminus (L(x) \cup \mathcal{C}(\{c, d, e\}))$.

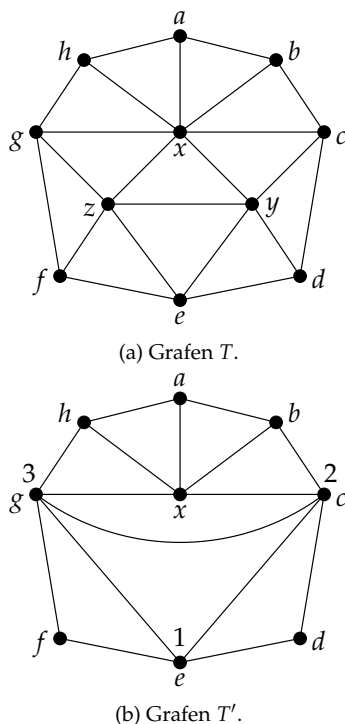
Derpå kan x omfarves med den farve fra $\{6, 7\}$, hvad enten $2 \in L(y)$ eller $2 \notin L(y)$.

Hvis $2 \in \mathcal{C}(\{y, z\})$: Antag gerne at $\mathcal{C}(y) = 2$ og at $\mathcal{C}(z) \in \{3, 4\}$. Vi behandler de to tilfælde adskilt:

Antag at $\mathcal{C}(z) = 4$. Så er $|L(x) \setminus \{1, \dots, 4\}| \geq 3$. Igen kan det gerne antages, at disse tre farver er $\{5, 6, 7\}$ og at $|L(x) \setminus \mathcal{C}(N(x))| = 3$. En 2-kromatisk kreds kan opstå, hvis x farves med en farve fra $\mathcal{C}(\{c, d, e\})$. Hvis $\mathcal{C}(\{c, d, e\}) \neq \{5, 6, 7\}$ kan x problemfrit farves med en tiloversbleven farve. Hvis derimod $\mathcal{C}(\{c, d, e\}) = \{5, 6, 7\}$, omfarves y , hvorefter situationen er den tidligere behandlede, hvor $2 \notin \mathcal{C}(\{y, z\})$.

Antag at $\mathcal{C}(z) = 3$. Så er $|L(x) \setminus \mathcal{C}(N(x))| \geq 4$. Antag uden tab af generalitet, at disse fire farver er $\{4, 5, 6, 7\}$. Bemærk at $|\{4, 5, 6, 7\} \setminus \mathcal{C}(\{c, d, e\})| \geq 1$, og antag gerne at $4 \notin \mathcal{C}(\{c, d, e\})$. Hvis x farves med 4, kan der potentielt opstå en 2-kromatisk kreds fra b gennem x til f eller g . (Sker dette ikke, giver $\mathcal{C}(x) = 4$ den ønskede modstrid.) En sådan kreds forhindrer en 2-kromatisk kreds fra a til c , d eller e farvet med 2 og en farve forskellig fra 3 og 4, da disse ikke kan krydse hinanden. Farv derfor blot x med en farve fra $L(x) \setminus (\{1, 2, 3, 4\} \cup \mathcal{C}(\{e, f, g\}))$. \square

Bevis for påstand 5. Antag at xyz er punkter på randen af en 3-region i T . Lad $d(x) = 7$, $d(y) = d(z) = 5$. Se figur 2.12(a) for navngivning af naboerne til x , y og z . En ny graf T' fås ved at fjerne punkterne



Figur 2.12: En 3-region xyz med $d(x) = 7$ og $d(y) = d(z) = 5$.

y og z og tilføj kanterne ce , eg og gc , medmindre disse kanter allerede tilhører $E(T)$. Se figur 2.12(b). Eftersom T' har færre punkter end T , eksisterer der en acyklisk $L|_{T'}$ -farvning \mathcal{C} af T' . Uden tab af generalitet antages, at $\mathcal{C}(e) = 1$, $\mathcal{C}(c) = 2$ og $\mathcal{C}(g) = 3$. Punktet x er enten farvet med 1 eller en endnu ubrugt farve, lad denne være 4. Vi betragter nu to tilfælde: $\mathcal{C}(x) = 1$ og $\mathcal{C}(x) = 4$. Betragt først sidstnævnte.

$\mathcal{C}(x) = 4$: Bemærk først at f hverken er farvet 1 eller 3. Er f hverken farvet med 2 eller 4, kan vi uden tab af generalitet antage, at $\mathcal{C}(f) = 5$. Punktet d er hverken farvet med 1 eller 2. Hvis d hverken er farvet med 3, 4 eller 5, kan d gerne antages at være farvet med 6.

Vi inddeler nu i tre tilfælde: (1) hvor hverken f eller d er farvet med 4, (2) hvor kun ét af punkterne er farvet med 4 (antag at d er farvet med 4), og (3) hvor begge punkter er farvet med 4.

Ad (1). Antag at $\mathcal{C}(f) \neq 4 \neq \mathcal{C}(d)$, dvs. $\mathcal{C}(f) \in \{2, 5\}$. Der gælder så, at d er farvet med 3, 5 eller en endnu ubrugt farve; lad det være 6, dvs. $\mathcal{C}(d) \in \{3, 5, 6\}$. Hvis $\mathcal{C}(d) \in \{3, 5\}$, kan to farver til y og

Acyklisk 7-listefarvbarhed

z vælges vilkårligt fra hhv. $L(y) \setminus \{1, \dots, 5\}$ og $L(z) \setminus \{1, \dots, 5\}$. Er derimod $\mathcal{C}(d) = 6$, så farves først y med en endnu ubrugt farve, lad det være 7. Efterfølgende farves z fra $L(z) \setminus \mathcal{C}(N(z))$.

Ad (2). Antag at $\mathcal{C}(f) \in \{2, 5\}$ og at $\mathcal{C}(d) = 4$. Når y farves, kan vi risikere, at dyx er en del af en 2-kromatisk kreds. Punktet y kan ikke farves med farverne $\{1, 2, 4\}$ og ønskes ikke farvet med 3, så der er mindst 3 muligheder for valg af farve til y . Hvis y kan farves med en farve, så dyx ej er en del af en 2-kromatisk kreds, kan z derefter farves med vilkårlig farve større end 5 fra dens liste forskellig fra $\mathcal{C}(y)$.

Antag at dette ikke kan lade sig gøre, dvs. at $|L(y) \setminus \{1, \dots, 4\}| = 3$, og at uanset hvilken farve y farves med blandt de tiloversblevne, så opstår der en 2-kromatisk kreds, som dyx og h, a eller b er en del af. Disse 2-kromatiske kredse er farvet med 4 og α , for $\alpha \in L(y) \setminus \{1, \dots, 4\}$. Omfarv så x med en tilladelig farve fra dens liste; der er tre muligheder, $\mathcal{C}(x) = 1$, $\mathcal{C}(x) = 5$ og $\mathcal{C}(x) > 5$:

Hvis $\mathcal{C}(x) = 1$, kan vi risikere, at xze eller xye er en del af en 2-kromatisk kreds. For at modvirke dette, farves z med en farve fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 5, \mathcal{C}(h)\}$. Punktet y farves med en farve fra $L(y) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(z), \mathcal{C}(h)\}$. Bemærk at $\mathcal{C}(z)$ og $\mathcal{C}(y)$ ikke behøver være forskellige fra $\mathcal{C}(a)$ og $\mathcal{C}(b)$ pga. den 2-kromatiske vej fra d til h , eftersom 2-kromatiske veje uden fælles farver ikke kan have punkter til fælles.

Hvis $\mathcal{C}(x) = 5$, kan vi risikere en 2-kromatisk kreds indeholdende xzf . Her vælges en farve til z blandt $L(z) \setminus \{1, \dots, 5, \mathcal{C}(h)\}$. Farven til y vælges blandt farverne i $L(y) \setminus \{1, \dots, 5, \mathcal{C}(z)\}$.

Hvis $\mathcal{C}(x) > 5$, kan vi til z vælge en farve fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 5, \mathcal{C}(x)\}$ og en farve til y fra $L(y) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(x), \mathcal{C}(z)\}$.

Ad (3). Nu til tilfældet, hvor $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(d) = 4$. Vi viser først, at det altid er muligt at vælge en farve til y (hhv. z), uden at der dannes 2-kromatiske kredse i $T - z$ (hhv. $T - y$).

Påstand 6. Vi kan antage, at y kan farves med en farve fra $L(y) \setminus \{1, 2, 3, 4\}$, uden at der dannes 2-kromatiske kredse i $T - z$. Tilsvarende for z .

Bevis. Hvis y kan farves med en farve α fra $L(y) \setminus \{1, \dots, 4\}$ uden at der dannes en 2-kromatisk kreds i $T - z$, skal blot z farves. Antag derfor at det ikke er tilfældet. Situationen er altså, at $|L(y) \setminus \{1, \dots, 4\}| = 3$, og at der er 2-kromatiske veje fra d til h, a og b og videre til x ; farverne der bruges er 4 og $\alpha \in L(y) \setminus \{1, \dots, 4\}$. Således giver ethvert valg af en tilladelig farve fra $L(y)$ anledning til en 2-kromatisk kreds (som i tilfælde (1b)). Vi udfører nu følgende omfarvninger for at opnå en acyklisk L -farvning af T . Først omfarves x med en farve fra $L(x) \setminus (\{2, 3, 4\} \cup \mathcal{C}(\{h, a, b\}))$. Der dannes

ikke nye 2-kromatiske kredse i T' , da alle naboerne til x i T' er farvet forskelligt.

Hvis x omfarves med en farve forskellig fra 1, kan y farves med en farve fra $L(y) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(x)\}$, og z kan farves med en farve fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(x), \mathcal{C}(y)\}$.

Hvis x derimod omfarves med farven 1, kan vi risikere, at xze eller xye er en del af en 2-kromatisk kreds. Her vælges en farve til y fra $L(y) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(h)\}$ og en farve til z fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(h), \mathcal{C}(y)\}$. Den 2-kromatiske vej mellem d og h sørger som før for, at hverken xze eller xye bliver en del af en 2-kromatisk kreds.

Tilsvarende argumenter gælder for z . □

Vi kan derfor vælge en farve $\alpha \notin \{1, 2, 3, 4\}$ til y og en farve $\beta \notin \{1, 2, 3, 4\}$ til z , således at hhv. $G - z$ og $G - y$ har en acyklisk 7-listefarvning.

Kan vi vælge α og β forskellige, er vi færdige. Følgeligt undersøges tilfældet, hvor der kun kan vælges ét α til y og ét β til z , hvor $\alpha = \beta$. Det kan uden tab af generalitet antages, at $\alpha = \beta = 5$ og at både d og f er forbundet til $\{h, a, b\}$ med to 2-kromatiske veje, farvet med hhv. 4, γ og 4, δ , hvor $\{\gamma, \delta\} = (L(y) \cap L(z)) \setminus \{1, \dots, 5\}$. Antag uden tab af generalitet at $\gamma = 6$ og $\delta = 7$.

P, u, v Vi ønsker at omfarve x . Lad $P := ghabc$ og lad $u, v \in P$. Det kan ske, at vi ved omfarvningen af x danner en 2-kromatisk kreds, som uxv er en del af. I så fald gælder det, at blandt farverne brugt til P , dvs. $\{2, 3, 6, 7\}$, er farven $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$ brugt to gange, mens de tre resterende farver kun bruges én gang. Desuden ligger u og v ikke efter hinanden på P , og der er derfor et punkt w med farven 6 eller 7 imellem dem. Følgeligt kan der ikke eksistere en kreds gennem uxv farvet udelukkende vha. $\mathcal{C}(x)$ og $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$, da denne i så fald skulle krydse vejen fra w til d , som er farvet med $4 \neq \mathcal{C}(x)$ og $\mathcal{C}(w)$. Det er derfor muligt at omfarve x med en farve fra $L(x) \setminus (\mathcal{C}(P) \cup \{4, 5\}) = L(x) \setminus \{2, \dots, 7\}$. Omfarv x .

Hvis punktet x omfarves med farven 1, kan vi som tidligere risikere, at xye eller xze indgår i en 2-kromatisk kreds. Eftersom 6 og 7 optræder som farver til $\{h, a, b\}$, kan vi uden tab af generalitet antage, at kun $u \in \{h, a, b\}$ har $\mathcal{C}(u) = 6$. Der er altså en 2-kromatisk vej fra f til u og en 2-kromatisk vej fra d til u som benytter farverne 4 og 6. Den eneste mulige 2-kromatiske vej fra e til et af punkterne i $\{h, a, b\}$, er derfor farvet med 1 og 6. Derfor omfarves z med en farve fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 6\}$ og opnå en acyklisk L -farvning af T ; y forbliver farvet $\alpha = 5$.

Hvis derimod x omfarves med en farve $\mathcal{C}(x) \notin \{1, \dots, 7\}$ kan z omfarves med en farve fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 5, \mathcal{C}(x)\}$, mens y igen forbliver farvet $\alpha = 5$.

Acyklisk 5-listefarvbarhed

$\mathcal{C}(x) = 1$: Punktet f kan farves med farven 2, som c er farvet med, og en endnu ubenyttet farve, lad det være 4. Punktet d kan farves med enten 3, som g er farvet med, farven 4, som f muligvis er farvet med, og en helt tredje ubenyttet farve, lad det være 5. Ergo haves, at $\mathcal{C}(f) \in \{2, 4\}$ og at $\mathcal{C}(d) \in \{3, 4, 5\}$.

Igen er det hensigtsmæssigt at y og z farves med farver større end 4 på en sådan måde, at xye og xze ikke indgår i en 2-kromatisk kreds. Der vil være $|L(y) \setminus \{1, \dots, 5\}| \geq 2$ farver til rådighed til y , og er y blevet farvet, er der $|L(z) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(y)\}| \geq 2$ til rådighed til z . Vi kan farve y med en farve fra $L(y) \setminus \{1, \dots, 5\}$ og farve z med en farve fra $L(z) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(y)\}$, medmindre der findes mindst to 2-kromatiske veje fra e til $\{h, a, b\}$, som er farvet med $1, \alpha$ og $1, \beta$, hvor $\alpha, \beta \in L(y) \setminus \{1, \dots, 5\}$ eller $\alpha, \beta \in L(z) \setminus \{1, \dots, 4, \mathcal{C}(y)\}$. På den måde bliver enten y eller z en del af en 2-kromatisk kreds.

Vi viser nu, at det altid er muligt at omfarve x , således at vi er tilbage i tilfældet, hvor $\mathcal{C}(x) = 4$. Antag modsætningsvist at x ikke kan omfarves. Dette må betyde (som i tilfælde (2), hvor x forsøges omfarvet efter påstanden er vist), at en af farverne $\{2, 3, \alpha, \beta\}$ optræder mere end én gang på vejen $P := ghabc$. Antag at det er farven $\gamma \in \{2, 3, \alpha, \beta\}$, som farver punkterne $u, v \in P$ og giver anledning til en 2-kromatisk vej mellem u og v . Denne vej er farvet med γ og en farve $\delta \notin \{1, 2, 3, \alpha, \beta\}$. Igen vil punkterne u og v være adskilt af et punkt w på P , hvor $\mathcal{C}(w) \in \{\alpha, \beta\}$, og hvor w er det eneste punkt på P som har farven $\mathcal{C}(w)$. Uden tab af generalitet antages det, at $\mathcal{C}(w) = \alpha$. Dette må betyde, at der mellem e og w findes en 2-kromatisk vej farvet med 1 og α . Ergo kan der ikke eksistere en 2-kromatisk vej mellem u og v , da hverken u eller v er farvet med 1 eller α , og dermed ikke kan krydse den 2-kromatiske vej mellem e og w . Det er dermed altid muligt at omfarve x . \square

\square

2.2 Acyklisk 5-listefarvbarhed

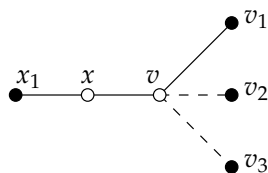
Det har som skrevet endnu ikke været muligt at vise formodning 7. Begrænser vi os derimod til at betragte planare grafer uden kredse af visse længder, kan formodningen vises for disse grafer. I dette afsnit vises følgende to sætninger:

Sætning 14

Enhver planar graf uden kredse af længde 4 og 5 er acyklisk 5-listefarvbar.
(Montassier et al., 2006, Thm. 1)

Sætning 15

Enhver planar graf uden kredse af længde 4 og 6 er acyklisk 5-listefarvbar.
(Montassier et al., 2006, Thm. 1)



Figur 2.13: (Lemma 18.) 2-punktet x , der er nabo til et punkt v med højst 4 naboer.

For at bevise disse to sætninger har vi brug for en række egenskaber, som præsenteres i lemma 17-25. I disse lemmaer antages det, at H er en planar graf uden 4- og 5-kredse eller uden 4- og 6-kredse, og antag at H ikke er acyklisk 5-listefarvbar. Antag endvidere at $|H|$ er minimal, samt at \mathcal{C} er en acyklisk L -farvning for en vilkårlig 5-listetildeling L . I figurene er punkter, som ikke kan have flere naboer, markeret med et hvidt punkt – de som *kan* have flere naboer, er markeret med et sort punkt. Desuden benyttes følgende notation i beviset for både lemmaerne og sætningerne:

Definition 16

let Et 3-punkt, som er et punkt på en 3-kreds, siges at være let. Hvis et
 pendant punkt v er nabo til et 3-punkt w , hvor vw ikke er en kant i nogen 3-kreds, så siges w at være en pendant til v .

Ingen af de følgende 9 lemmaer udnytter at grafen H enten hverken har 4- og 5-kredse eller 4- og 6-kredse. Disse lemmaer gælder derfor for et eventuelt modeksempel til formodning 7.

Lemma 17

H har intet 1-punkt. (Montassier et al., 2006, Lem. 1)

Bevis. Trivielt pga. minimaliteten af H . □

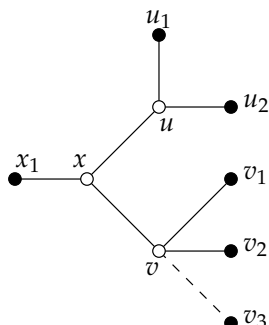
De følgende beviser bruger alle samme bevisteknik. Da H er et minimalt modeksempel, vil der for et vilkårligt punkt x gælde, at $H - x$ er acyklisk 5-listefarvbar. Hvis det lader sig gøre at farve x således at enhver kreds indeholdende x har punkter med (mindst) 3 forskellige farver, så er H også acyklisk 5-listefarvbar, og vi har en modstrid.

Lemma 18

Intet 2-punkt i H er nabo med et punkt med valens mindre end 5. (Montassier et al., 2006, Lem. 1)

Bevis. Lad x være et 2-punkt med naboerne x_1 og v , hvor $N(v) = \{x, v_1, \dots, v_k\}$, $k < 4$. Se figur 2.13. Da H er minimal, har $H - x$ en acyklisk 5-listefarvning, \mathcal{C} . Vi søger at udvide denne farvning til en acyklisk 5-listefarvning af H . Hvis $\mathcal{C}(x_1) \neq \mathcal{C}(v)$, farv da x med en

Acyklisk 5-listefarvbarhed



Figur 2.14: (Lemma 19, del 1.) 3-punktet x dens naboer: et 3-punkt u og et punkt v med højst 4 naboer.

farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{x_1, v\})$. Er derimod $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(v)$, kan x farves med en farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{v, v_1, \dots, v_k\})$. Dette er i modstrid med valget af H som et modeksempel. \square

Lemma 19

Lad x være et 3-punkt i H . Der gælder så, at

1. hvis x er nabo til et 3-punkt u , så er $d(v) \geq 5$ for alle $v \in N(x) \setminus \{u\}$, og at
2. der findes ingen let pendant til x .

(Montassier et al., 2006, Lem. 1)

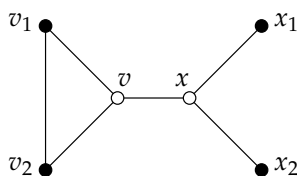
Bevis. Ad 1. Lad x_1, u og v være naboerne til x , lad u_1, u_2 være naboer til u og lad $v_1, \dots, v_k, k \in \{2, 3\}$, være naboer til v . Se figur 2.14. Igen vil $H - x$ have en acyklisk L -farvning \mathcal{C} .

Er alle tre naboer til x farvet forskelligt, kan der til x vælges en farve forskellig fra disse tre.

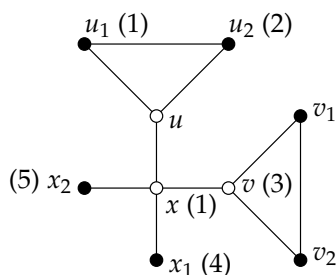
Hvis $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v) \neq \mathcal{C}(x_1)$ kan der til x vælges en farve blandt $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{u, x_1, u_1, u_2\})$. Er $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(u) \neq \mathcal{C}(v)$, kan vi på samme måde vælge en farve til x fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{u, v, u_1, u_2\})$.

I tilfældet $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(v) \neq \mathcal{C}(u)$, kan vi farve x , hvis der findes en farve i $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{u, v, v_1, \dots, v_k\})$. Er dette ikke tilfældet er $k = 3$ og v_1, v_2, v_3 har parvist forskellige farver. Vi kan nu udskifte farven til v med en farve fra $L(v) \setminus \mathcal{C}(\{v, v_1, v_2, v_3\})$. Dette leder os tilbage til et af de foregående tilfælde.

Som et sidste tilfælde kan der gælde, at $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$. Hvis $\mathcal{C}(u_1) = \mathcal{C}(u_2)$ og der findes $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ således at $\mathcal{C}(v_i) = \mathcal{C}(v_j)$, så kan x farves med en farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{u, u_1, v_i, v_k\})$. Er dette ikke tilfældet, kan vi i stedet udskifte farven til u eller v med



Figur 2.15: (Lemma 19, del 2.) 3-punktet x med en let pendant v som nabo.



Figur 2.16: (Lemma 20.) Et 4-punkt x med to lette panderter u og v som nabo.

en farve fra $L(u) \setminus \mathcal{C}(\{u, u_1, u_2\})$ hhv. $L(v) \setminus \mathcal{C}(\{v, v_1, \dots, v_k\})$. Igen er vi tilbage i et af de forrige tilfælde.

Ad 2. Lad v være en let pendant til x og lad v_1 og v_2 være naboerne til v forskellig fra x ; se figur 2.15. Da v er en let pendant til x , er $v_1v_2 \in E(H)$, således at $H[\{v, v_1, v_2\}]$ er en 3-kreds. Lad desuden x_1, x_2 være de to naboer til x forskellig fra v . Grafen $H - v$ har en acyklisk 5-listefarvning \mathcal{C} , som nemt kan udvides til H fordi: Hvis $\mathcal{C}(x) \notin \mathcal{C}(\{v_1, v_2\})$ kan v farves med en farve fra $L(v) \setminus \mathcal{C}(\{x, v_1, v_2\})$. Hvis derimod $\mathcal{C}(x) \in \mathcal{C}(\{v_1, v_2\})$, så kan farven til v vælges blandt $L(v) \setminus \mathcal{C}(\{v_1, v_2, x_1, x_2\})$. \square

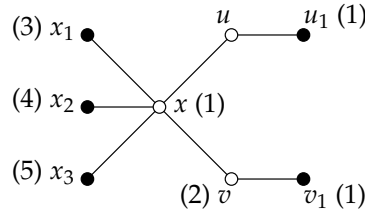
Lemma 20

Intet 4-punkt x i H er nabo til mere end ét 3-punkt, som er en let pendant til x . (Montassier et al., 2006, Lem. 1)

Bevis. Antag modsætningsvist at et 4-punkt x er nabo til to 3-punkter u og v , som er lette panderter til x , og lad de resterende punkter være navngivet som i figur 2.16 (og ignorér tallene i parentes). Antag endvidere at \mathcal{C} er en acyklisk L -farvning af $H - u$; vi udvider denne acykliske farvning til en acyklisk farvning af hele H . Bemærk at $\mathcal{C}(u_1) \neq \mathcal{C}(u_2)$ og at $\mathcal{C}(v_1) \neq \mathcal{C}(v_2)$.

Hvis $\mathcal{C}(x) \notin \mathcal{C}(\{u_1, u_2\})$, vælg da $\mathcal{C}(u) \in L(u) \setminus \mathcal{C}(N(u))$. Så antag uden tab af generalitet, at $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(u_1)$ og endvidere, at $L(u) = \{1, \dots, 5\}$.

Acyklisk 5-listefarvbarhed



Figur 2.17: (Lemma 21, pkt. 1.) 5-punkt x med to 2-punkter som nabo.

Hvis der findes en farve i $L(u) \setminus \mathcal{C}(\{u_1, u_2, v, x_1, x_2\})$, farv da u med denne farve. Så antag yderligere at $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(u_1) = 1, \mathcal{C}(u_2) = 2, \mathcal{C}(v) = 3, \mathcal{C}(x_1) = 4, \mathcal{C}(x_2) = 5$ samt at $1 \in \mathcal{C}(\{v_1, v_2\})$; se igen figur 2.16, hvor farverne er angivet i parentes.

Er det tilfældet, at $L(x) \neq L(u)$, så omfarves x med en farve, som ikke er i $L(u)$, hvorefter u kan farves med en farve fra $L(u) \setminus \mathcal{C}(\{x, u_1, u_2\})$.

Hvis derimod $L(x) = L(u)$, ser vi på, om $\mathcal{C}(\{v_1, v_2\}) = \{1, 2\}$. Hvis det er tilfældet, laver vi om på farvningen: Sæt $\mathcal{C}(x) := 3, \mathcal{C}(v) \in L(v) \setminus \{1, 2, 3\}$ og $\mathcal{C}(u) := 4$. Hvis $\{1, 2\} \neq \mathcal{C}(\{v_1, v_2\})$; lad $2 \notin \mathcal{C}(\{v_1, v_2\})$. Sæt så $\mathcal{C}(x) := 2$ og $\mathcal{C}(u) := 3$. \square

Lemma 21

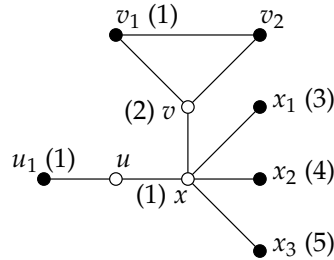
Hvis x er et 5-punkt, så gælder at

1. x er ikke nabo til mere end ét 2-punkt,
2. hvis x har én nabo, som er et 2-punkt, så er x ikke nabo til noget let 3-punkt, som er en pendant til x , samt at
3. x er ikke nabo til mere end fire lette 3-punkter, som alle er panderter til x .

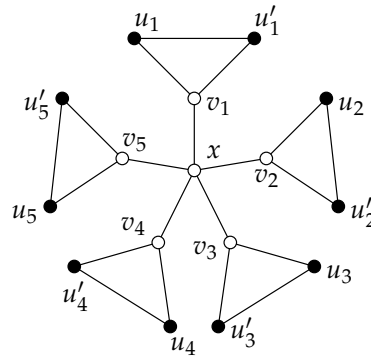
(Montassier et al., 2006, Lem. 1)

Bevis. Ad 1. Antag at x har to 2-punkter u og v som naboer; lad de resterende punkter være navngivet som i figur 2.17. Antag at \mathcal{C} er en acyklisk L -farvning af $H - u$ og lad $L(u) = \{1, \dots, 5\}$; vi udvider denne farvning til en farvning af hele H . Hvis $\mathcal{C}(x) \neq \mathcal{C}(u_1)$ kan u blot farves fra $L(u) \setminus \mathcal{C}(\{x, u_1\})$. Omvendt, hvis $\mathcal{C}(u_1) = \mathcal{C}(x)$, kan det antages, at de er lig med 1, samt at $\mathcal{C}(v) = 2, \mathcal{C}(x_1) = 3, \mathcal{C}(x_2) = 4, \mathcal{C}(x_3) = 5$ og $\mathcal{C}(v_1) = 1$. Farverne er igen angivet i parentes på figuren.

Hvis der er en farve i $L(x) \setminus L(u)$, omfarv så x med en sådan farve. Vi er dermed tilbage i det foregående tilfælde. Hvis derimod $L(x) = L(u)$, sæt $\mathcal{C}(x) := 2, \mathcal{C}(u) := 3$ og $\mathcal{C}(v) \in L(v) \setminus \mathcal{C}(\{x, v_1\})$.



Figur 2.18: (Lemma 21, pkt. 2.) 5-punkt x der er nabo til et 2-punkt og et let punkt, som er en pendant til x .



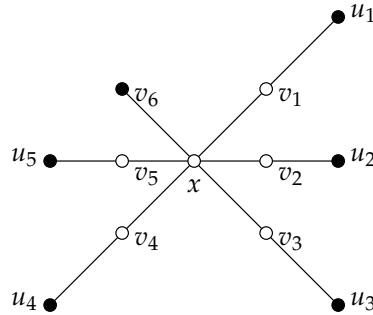
Figur 2.19: (Lemma 21, pkt. 3.) Punkt med 5 lette panderter.

Ad 2. Lad 5-punktet x have et 2-punkt u som nabo. Antag så at x også har en nabo v som er let og er en pendant til x . De resterende punkter er navngivet som i figur 2.18. Antag uden tab af generalitet at $L(u) = \{1, \dots, 5\}$ og lad \mathcal{C} være en acyklisk L -farvning af $H - u$. Hvis $\mathcal{C}(x) \neq \mathcal{C}(u_1)$, farves u blot med en farve fra $L(u) \setminus \mathcal{C}(\{x, u_1\})$. Ellers, antag at $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(v_1) = \mathcal{C}(u_1) = 1$ samt at $\mathcal{C}(v) = 2, \mathcal{C}(x_1) = 3, \mathcal{C}(x_2) = 4$ og $\mathcal{C}(x_3) = 5$; farverne ses igen i parentes i figuren. Bemærk at $\mathcal{C}(v_2) \notin \{1, 2\}$.

Hvis der er mindst én farve i $L(x) \setminus L(u)$ omfarves x med en sådan, og vi er tilbage i det foregående tilfælde. Omvendt, hvis $L(x) = L(u)$, sæt $\mathcal{C}(x) := 2, \mathcal{C}(u) := 3$ og $\mathcal{C}(v) \in L(v) \setminus \mathcal{C}(N(v))$ og opnå en acyklisk farvning af H .

Ad 3. Lad x være et 5-punkt hvor alle 5 naboer v_1, \dots, v_5 er lette panderter til x ; punkterne er navngivet som i figur 2.19. Lad \mathcal{C} være en acyklisk L -farvning af $H - \{x, v_1, \dots, v_5\}$. Fordi $|L(x)| = 5$ er der mindst én farve i $L(x)$, som er brugt på at farve højst 2 af punkterne $u_1, \dots, u_5, u'_1, \dots, u'_5$. Lad c være en sådan farve, og antag det er blandt u_1, u'_1, u_2, u'_2 , at c højst forekommer 2 gange.

Acyklisk 5-listefarvbarhed



Figur 2.20: (Lemma 22, pkt. 1.) 6-punktet x og dens naboer: fem 2-punkter samt naboen v_6 .

Sæt så $\mathcal{C}(x) := c$ og farv på gyldig vis v_2, \dots, v_5 . Sæt desuden $\mathcal{C}(v_1) \in L(v_1) \setminus \mathcal{C}(N(v_1) \cup \{v_2\})$, således at v_1xv_2 ikke bliver en del af en 2-kromatisk kreds. Derved opnås en farvning af hele H . \square

Lemma 22

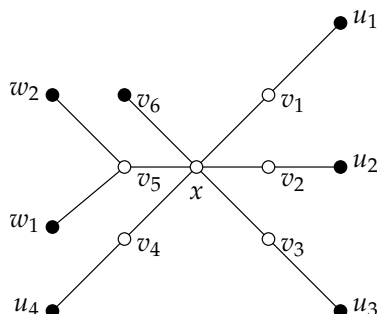
Hvis x er et 6-punkt, så gælder, at

1. x er nabo til højst fire 2-punkter, og
2. hvis x har fire naboer, som er 2-punkter, så er x ikke nabo til noget 3-punkt.

Bevis. Ad 1. Lad v_1, \dots, v_5 være 2-punkter og naboer til x . Navngivningen af de resterende punkter ses på figur 2.20. Grafen $H - \{x, v_1, \dots, v_5\}$ har en acyklisk L -farvning, \mathcal{C} . Der må findes en farve $c \in L(x) \setminus \{\mathcal{C}(v_6)\}$, som højst optræder én gang blandt farvene brugt til at farve u_1, \dots, u_5 . Antag uden tab af generalitet, at $\mathcal{C}(u_1) = c$. Farv nu x med c og farv v_1 med en farve blandt $L(v_1) \setminus \mathcal{C}(\{x, v_6\})$. De resterende punkter kan farves ved for hvert $i = 2, \dots, 5$ at farve v_i med en farve fra $L(v_i) \setminus \mathcal{C}(\{x, u_i\})$.

Ad 2. Kald som før de fire naboer til x , der er 2-punkter, for v_1, \dots, v_4 og lad v_5 være et 3-punkt, som er nabo til x . Se figur 2.21 for navngivning af de resterende punkter. Igen har $H - \{x, v_1, \dots, v_4\}$ en acyklisk L -farvning, \mathcal{C} . Antag at $\mathcal{C}(v_5) \neq \mathcal{C}(v_6)$. Der eksisterer en farve $c \in L(x) \setminus \mathcal{C}(\{v_5, v_6\})$, som højst optræder én gang blandt farverne brugt til u_1, \dots, u_4 . Det kan antages, at $\mathcal{C}(u_1) = c$. Sæt $\mathcal{C}(x) := c$ og vælg $\mathcal{C}(v_1) \in L(v_1) \setminus \mathcal{C}(\{x, v_5, v_6\})$. For $i = 2, 3, 4$ vælges en farve til v_i forskellig fra farverne brugt til x og u_i .

Hvis derimod $\mathcal{C}(v_5) = \mathcal{C}(v_6)$, kan vi ikke benytte forrige metode, da vejen $w_1v_5xv_6$ (eller $w_2v_5xv_6$) muligvis vil være farvet med kun to forskellige farver. Hvis $\mathcal{C}(w_1) \neq \mathcal{C}(w_2)$ kan vi omfarve v_5 med



Figur 2.21: (Lemma 22, pkt. 2.) 6-punktet x og dens naboer: fire 2-punkter, et 3-punkt v_5 samt den resterende nabo v_6 .

en farve blandt $L(v_5) \setminus \mathcal{C}(\{w_1, w_2, v_6\})$, og gå tilbage til situationen, hvor $\mathcal{C}(v_5) \neq \mathcal{C}(v_6)$.

Er vi i situationen, hvor $\mathcal{C}(w_1) = \mathcal{C}(w_2)$, er vi sikrede, at der findes en farve $c \in L(x) \setminus \mathcal{C}(\{w_1, v_5\})$, som højst optræder én gang blandt farverne valgt til u_1, \dots, u_4 . Antag at $\mathcal{C}(u_1) = c$. Vælg dernæst $\mathcal{C}(x) := c$ og farv v_1 med en farve fra $L(v_1) \setminus \mathcal{C}(\{x, v_5\})$. For $i = 2, 3, 4$ kan uv_i farves med en farve fra $L(v_i) \setminus \mathcal{C}(\{x, u_i\})$. \square

Lemma 23

Et 7-punkt er ikke nabo til mere end fem 2-punkter.

Bevis. Beviset er analogt til beviset for lemma 22, pkt. 1. \square

Lemma 24

Der findes ingen kreds af længde 3 med punkter x, y, z , hvor $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$, således at et af følgende tre udsagn er sande:

$$d(x) = 2 \tag{2.2}$$

$$d(x) = d(y) = 3 \quad \wedge \quad d(z) \leq 5 \tag{2.3}$$

$$d(x) = 3 \quad \wedge \quad d(y) = d(z) = 4. \tag{2.4}$$

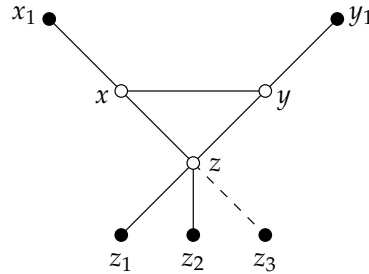
Bevis. Antag modsætningsvist at H er en planar graf med en 3-kreds med punkter x, y og z , som opfylder ét af ovenstående udsagn.

Ad (2.2). Antag at $H - x$ har en acyklisk L -farvning. Eftersom y og z er de eneste naboer til x , og disse er farvet forskelligt, kan vi vælge $\mathcal{C}(x) \in L(x) \setminus \mathcal{C}(N(x))$.

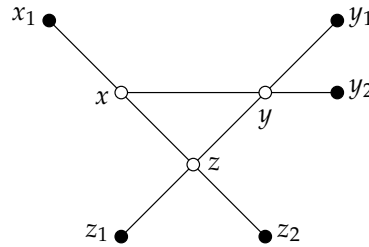
Ad (2.3). Lad punkterne x, y, z danne en kreds af længde 3 og lad x_1, y_1 og z_1, \dots, z_k , $1 < k < 4$ være de naboer til hhv. x, y og z , som ikke ligger på kredsen. Se figur 2.22. Grafen $H - \{x, y\}$ har en acyklisk L -farvning, \mathcal{C} .

Hvis $\mathcal{C}(x_1) \neq \mathcal{C}(z) \neq \mathcal{C}(y_1)$ (evt. $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(y_1)$), vælg da en farve til x blandt $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{x_1, z\})$ og en farve til y blandt $L(y) \setminus$

Acyklisk 5-listefarvbarhed



Figur 2.22: (Lemma 24, (2.3)) Kredsen xyz , hvor $d(x) = d(y) = 3$ og $d(z) \leq 5$.

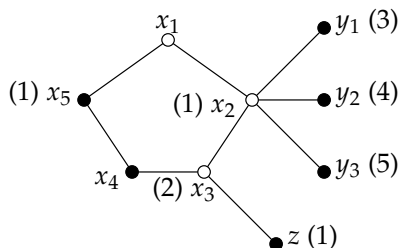


Figur 2.23: (Lemma 24, (2.4)) Kredsen xyz , hvor $d(x) = 3$ og $d(y) = d(z) = 4$.

$\mathcal{C}(\{x, y_1, z, x_1\})$. Hvis derimod $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(z)$ og $\mathcal{C}(y_1) \neq \mathcal{C}(z)$, vælg da farven til x blandt $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{x_1, z_1, \dots, z_k\})$ og en farve til y blandt $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{x, y_1, z\})$. Tilfældet, hvor $\mathcal{C}(y_1) = \mathcal{C}(z)$ og $\mathcal{C}(x_1) \neq \mathcal{C}(z)$, er symmetrisk med det foregående.

Der resterer tilfældet $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(y_1) = \mathcal{C}(z)$. Hvis z_1, \dots, z_k har parvist forskellige farver, kan z omfarves med en farve forskellig fra farverne brugt til z, z_1, \dots, z_k og vi er tilbage i det forrige tilfælde. Har z_1, \dots, z_k derimod ikke parvist forskellige farver, antag at $\mathcal{C}(z_1) = \mathcal{C}(z_2)$, kan farven til x vælges blandt $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{z, z_2, \dots, z_k\})$ og farven til y kan vælges blandt $L(y) \setminus \mathcal{C}(\{x, z, z_2, \dots, z_k\})$.

Ad (2.4). Lad igen x, y, z være punkterne i en kreds af længde 3. Lad x_1 være den resterende nabo til x og lad y_1, y_2 og z_1, z_2 være de naboer til y hhv. z , som ikke er i kredsen. Se figur 2.23. Der findes en acyklisk L -farvning \mathcal{C} af grafen $H - x$. Udvid denne listefarvning ved at farve x med en farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{y, z, x_1\})$, hvis y, z og x_1 har parvist forskellige farver. Hvis dette ikke er tilfældet, er enten $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(y)$ eller $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(z)$ og i begge tilfælde er $\mathcal{C}(y) \neq \mathcal{C}(z)$. De to tilfælde er symmetriske; antag derfor at $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(y)$. Punktet x kan farves med en farve fra $L(x) \setminus \mathcal{C}(\{y, z, y_1, y_2\})$. \square



Figur 2.24: (Lemma 25.) Kredsen $x_1 \dots x_5$, hvor $d(x_1) = 2$, $d(x_2) = 5$ og $d(x_3) = 3$.

Lemma 25

Der findes ingen kreds af længde 5 med punkter x_1, \dots, x_5 således at

$$d(x_1) = 2 \quad \wedge \quad d(x_2) = 5 \quad \wedge \quad d(x_3) = 3. \quad (2.5)$$

Bevis. Lad x_1, \dots, x_5 være en kreds, hvor $d(x_1) = 2$, $d(x_2) = 5$ og $d(x_3) = 3$. De resterende punkter navngives som på figur 2.24. Grafen $H - x_1$ har en acyklisk L -farvning \mathcal{C} . Hvis x_2 og x_5 er farvet forskelligt, skal farven til x_1 blot vælges blandt $L(x_1) \setminus \mathcal{C}(\{x_2, x_5\})$.

Er derimod $\mathcal{C}(x_2) = \mathcal{C}(x_5)$, kan vi uden tab af generalitet antage, at $L(x_1) = \{1, \dots, 5\}$, samt at punkterne har følgende farver (farverne er angivet i parentes på figur 2.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\{x_2, x_5, z\}) &= \{1\}, & \mathcal{C}(x_3) &= 2, & \mathcal{C}(x_4) &\notin \{1, 2\}, \\ \mathcal{C}(y_1) &= 3, & \mathcal{C}(y_2) &= 4, & \mathcal{C}(y_3) &= 5. \end{aligned}$$

Hvis $L(x_1) = L(x_2)$ kan vi omfarve x_2 med 2 og omfarve x_3 med en farve fra $L(x_3) \setminus \mathcal{C}(\{x_2, x_4, z\})$. Herefter er vi tilbage i det foregående tilfælde. Hvis der derimod er en farve i $L(x_2) \setminus L(x_1)$, kan x_2 omfarves med denne farve og vi er igen tilbage i det foregående tilfælde. \square

Definition 26

$d(f)$ For en graf med en region f defineres $d(f)$ til at være antallet af punkter (regnet med multiplicitet) på randen af f ; dvs. $d(f) := |b(f)|$.

Lemma 27

Lad $H = (V, E)$ være en planar graf med n punkter, m kanter og r regioner. Lad desuden $F(H)$ være mængden af regioner i H . Da gælder følgende:

$$\sum_{v \in V} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(H)} (d(f) - 6) = -12, \quad (2.6)$$

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(H)} (d(f) - 4) = -8. \quad (2.7)$$

Acyklisk 5-listefarvbarhed

Bevis. Fra Eulers formel haves $n - m + r = 2$. Ud fra denne fås

$$(4m - 6n) + (2m - 6r) = -12 \quad \text{og} \quad (2m - 4n) + (2m - 4r) = -8.$$

Eftersom $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F(H)} d(f) = 2m$, kan vi indsætte dette i ovenstående parenteser og få de ønskede ligheder. \square

Følgende definition, som er en udvidelse af definition 10 på side 5, benyttes i beviset for sætning 14 og 15.

Definition 28

For $v \in V$ defineres $n_i(v)$ som antallet af nabo- i -punkter til v og $m_3(v)$ defineres som antallet af 3-regioner, som v ligger på randen af (regnet med multiplicitet). For $f \in F(G)$, hvor $F(G)$ er mængden af regioner i G , defineres $n_i(f)$ som antallet af i -punkter på randen af f og $m_3(f)$ antallet af 3-regioner, som har en kant fælles med f (både $n_i(f)$ og $m_3(f)$ tælles med multiplicitet).

Bevis for sætning 14. Lad $H = (V, E)$ være et minimalt modeksempel. Vi vil vha. afladning søge at nå en modstrid. Igen er $F := F(H)$ mængden af regioner i H . Resultaterne fra lemma 17-25 gælder for H .

Vi indfører en vægtfunktion ω defineret ved

$$\omega(x) := \begin{cases} 2d(x) - 6, & x \in V \\ d(x) - 6, & x \in F. \end{cases}$$

Ved brug af lighed (2.6) ses det, at $\sum_{v \in V} \omega(v) + \sum_{f \in F} \omega(f) = -12$. Ved at aflade vægtene vha. nedenstående afladsregler – kald den nye vægtfunktion ω^* – sikrer vi os, at den samlede sum af vægtene stadig forbliver -12 .

R1 Hvert punkt v med $d(v) \geq 4$ giver fra sin vægt

- 1 til hver 3-region, som v ligger på randen af,
- 1 til hvert nabo-2-punkt, og
- 1 til hver let pendant til v .

R2 Hvert 3-punkt v giver fra sin vægt

- 1 til hver 3-region, som v ligger på randen af.

Eftersom

$$\sum_{x \in V \cup F} \omega^*(x) = \sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = -12,$$

kan der opnås en modstrid, hvis vi kan vise, at $\omega^*(x) \geq 0$ for alle $x \in V \cup F$. Lad $p(v)$ betegne antallet af lette pender til v .

Betragt først $v \in V$.

Bemærkning B1. Da H ikke har kredse af længde 4, gælder der, at en kant $vw \in E$ ikke kan være kant i to 3-kredse. Ergo er $m_3(v) \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ for alle $v \in V$.

I det følgende inddeles punkterne efter deres valens, og i alle tilfælde vises, at $\omega^*(v) \geq 0$. Pr. lemma 17 ved vi, at $d(v) \geq 2$.

$d(v) = 2$: Vi har $\omega(v) = -2$. Da begge naboer til v har valens større end 4 pr. lemma 18, giver begge naboer 1 til vægten af v (R1). Dermed er $\omega^*(v) = -2 + 2 \cdot 1 = 0$.

$d(v) = 3$: Punktet v ligger højst på randen af én 3-region jf. B1. Antag først at $m_3(v) = 0$. Så er $\omega(v) = \omega^*(v) = 0$.

For $m_3(v) = 1$ (kald regionen f_v) giver v 1 til vægten af f_v (R2). Lad u være den nabo til v , som ikke ligger på randen af f_v . Punktet v er derfor en let pendant til u . Pr. lemma 18 og 19, pkt. 2 er $d(u) \geq 4$ og u giver 1 til v (R1). I alt haves $\omega^*(v) = \omega(v) - 1 + 1 = 0$.

For et punkt v , med $d(v) \geq 4$, er $\omega(v) \geq 0$. Et sådant punkt kun kan mindske sin vægt – ingen vægt kan tilføres punktet – så vi indfører funktionen $S(v) := m_3(v) + n_2(v) + p(v)$, som giver den samlede sum, der fjernes fra $\omega(v)$. Da vi skal vise, at

$$\omega^*(v) = \omega(v) - m_3(v) - n_2(v) - p(v) = \omega(v) - S(v) \geq 0,$$

vil det i det følgende være tilstrækkeligt at vise, at $S(v) \leq \omega(v)$.

$d(v) = 4$: Der gælder, at $\omega(v) = 2$ og vha. B1 fås, at $m_3(v) \leq 2$. Lemma 18 giver, at $n_2(v) = 0$. Er $m_3(v) = 2$, har v ingen lette pendants og dermed er $S(v) = m_3(v) + n_2(v) + p(v) = 2 + 0 + 0 = \omega(v)$.

Hvis derimod $m_3(v) \leq 1$, har vi fra lemma 20, at $p(v) \leq 1$, og derfor er $S(v) \leq 1 + 0 + 1 = \omega(v)$.

$d(v) \geq 5$: Her er $\omega(v) \geq 4$. Naboerne til v , som sammen med v ligger på randen af samme 3-region, er pr. lemma 24, 2.6 og pr. definition hverken 2-punkter eller lette pendants til v . Desuden er en nabo til v ikke både et 2-punkt og en let pendant til v pr. definition. Der gælder derfor, at $n_2(v) + p(v) + 2m_3(v) \leq d(v)$. I tilfælde, hvor $d(v) \geq 6$, gælder der, at $S(v) \leq n_2(v) + p(v) + 2m_3(v) \leq d(v) \leq 2d(v) - 6 = \omega(v)$. Antag derfor at $d(v) = 5$.

Der gælder, at $m_3(v) \leq 2$ jf. bemærkning B1. Lemma 21, pkt. 1 giver, at $n_2(v) \leq 1$.

Hvis $n_2(v) = 1$, har v ingen lette pendants pr. lemma 21, pkt. 2. Dette giver, at $S(v) \leq 2 + 1 + 0 < \omega(v)$.

Acyklisk 5-listefarvbarhed

Lad nu $n_2(v) = 0$. Hvis $m_3(v) = 2$ har v højst én let pendant, nemlig punktet u , fordi $uv \in E$ er den eneste kant incident med v , som ikke ligger på randen af en 3-region. Igen er $S(v) \leq 2 + 0 + 1 < \omega(v)$. Hvis $m_3(v) = 1$, ligger netop tre af kanterne incident med v ikke på randen af en 3-region. Derfor gælder, at $p(v) \leq 3$, og dermed at $S(v) \leq 1 + 0 + 3 = \omega(v)$. Som en sidste mulighed haves $m_3(v) = 0$. Lemma 21, pkt. 3 giver os, at $p(v) \leq 4$, hvilket betyder, at $S(v) \leq 0 + 4 + 0 = \omega(v)$.

Således er $\omega^*(v) \geq 0$ for alle $v \in V$.

Betragt $f \in F$. Pr. antagelse findes ingen region f med $d(f) \in \{4, 5\}$. Vi betragter de resterende tilfælde.

$|b(f)| = 3$: Der gælder, at $\omega(f) = -3$. Pr. lemma 24 pkt. 1 ved vi, at alle punkter på randen har valens større end 2. Ergo giver alle naboer 1 til 3-regionen, og $\omega^*(f) = -3 + 3 \cdot 1 = 0$.

$|b(f)| \geq 6$: Det er klart, at $\omega^*(f) = \omega(f) \geq 0$. □

Således videre til beviset for sætning 15, hvor kredse af længde 4 og 6 ikke indgår i graferne.

Bevis for sætning 15. Lad $H = (V, E)$ være et minimalt modeksempel. Bemærk at H således opfylder lemma 17-25. Bevisstrategien er tilsvarende ovenstående bevis; her benyttes formel (2.7) på side 28. En vægtfunktion ω defineres ved $\omega(x) := d(x) - 4$ for alle $x \in V \cup F$, hvor F er mængden af regioner i H . Følgende afladsregler giver anledning til en ny vægtfunktion ω^* :

R1 Hvert punkt v med $d(v) \geq 5$ giver fra sin vægt

- $\frac{1}{2}$ til hvert nabo-2-punkt, og
- $\frac{\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v)}{n_3(v)}$ til hvert nabo-3-punkt.

Seneres ses det (i beviset for B2), at brøken i andet punkt ikke er negativ. Lad $\beta(u)$ være vægten, som et 3-punkt u har fået fra naboer med valens mindst 5 jf. ovenstående afladsregel. Med andre ord er $\beta(u)$ givet ved

$$\beta(u) := \sum_{\substack{v \in N(u) \\ d(v) \geq 5}} \frac{\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v)}{n_3(v)}. \quad (2.8)$$

R2 Hver region f med $|b(f)| \geq 5$ giver fra sin vægt

- $\frac{1}{3}$ til hver 3-region pr. fælles kant,
- $\frac{1}{2}$ til hvert 2-punkt på randen (med multiplicitet), og

- $\frac{1-\beta(u)}{3-m_3(u)}$ til hvert 3-punkt u på randen (med multiplicitet), når $\beta(u) < 1$.

Bemærkning B1. Alle punkter v med $d(v) \geq 8$ giver mindst $\frac{1}{2}$ til hvert nabo-3-punkt.

Bevis. Antag at $d(v) \geq 8$ for et punkt v . Ved udregning fås:

$$\begin{aligned} \omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v) - \frac{1}{2}n_3(v) &= \omega(v) - \frac{1}{2}(n_2(v) + n_3(v)) \\ &\geq (d(v) - 4) - \frac{1}{2}d(v) \geq 0, \end{aligned}$$

hvilket omskrevet giver, at $\frac{\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v)}{n_3(v)} \geq \frac{1}{2}$. □

Bemærkning B2. For alle 3-punkter u er $\beta(u) \geq 0$.

Bevis. Resultatet følger ved at se på hvert led i formel (2.8) på forrige side. Lad v være et punkt som i R1 med $d(v) \geq 5$. Vi ser på tilfældene.

$d(v) = 5$: Vi har, at $\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v) = 1 - \frac{1}{2}n_2(v)$, og jf. lemma 21, pkt. 1 er $n_2(v) \leq 1$.

$d(v) = 6$: Vi har, at $\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v) = 2 - \frac{1}{2}n_2(v)$, og jf. lemma 22, pkt. 1 er $n_2(v) \leq 4$.

$d(v) = 7$: Vi har, at $\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v) = 3 - \frac{1}{2}n_2(v)$, og jf. lemma 23 er $n_2(v) \leq 5$.

For $d(v) \geq 8$ følger resultatet af påstand B1. Ergo er $\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v) \geq 0$ for alle v , hvor $d(v) \geq 5$, så $\beta(u) \geq 0$. □

Bemærkning B3. Enhver region f med $|b(f)| \geq 5$ giver til hvert 3-punkt $v \in b(f)$ højst $\frac{1}{2}$, hvis $m_3(v) = 1$, og højst $\frac{1}{3}$ hvis $m_3(v) = 0$.

Bevis. Lad f være en region med $|b(f)| \geq 5$ og lad $v \in b(f)$ være et 3-punkt.

Resultatet følger nu umiddelbart af B2, fordi

$$\frac{1 - \beta(v)}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \frac{1 - \beta(v)}{3} \leq \frac{1}{3}.$$

□

Kan vi vise, at $\sum_{v \in V} \omega^*(v) + \sum_{f \in F} \omega^*(f) \geq 0$, følger modstriden af lighed (2.7) fordi $\sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = \sum_{x \in V \cup F} \omega^*(x)$.

Betragt derfor først et vilkårligt $v \in V$. Jf. lemma 17 er $d(v) \geq 2$. For tilfældene, hvor $2 \leq d(v) \leq 4$, argumenteres som følger for, at $\omega^*(v) \geq 0$:

Acyklisk 5-listefarvbarhed

$d(v) = 2$: Vi har, at $\omega(v) = -2$, samt (jf. lemma 24, pkt. 1, og antagelsen om at grafen ikke indeholder 4-kredse) at for enhver region f , hvor $v \in b(f)$, er $|b(f)| \geq 5$. Følgelig bidrager R2 med $2 \cdot \frac{1}{2}$ til $\omega^*(v)$.

Endvidere gælder jf. lemma 18, at nabopunkterne til v har valens mindst 5; dvs. R1 bidrager også med $2 \cdot \frac{1}{2}$ til $\omega^*(v)$. Følgelig er $\omega^*(v) = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

$d(v) = 3$: Af B1 på side 30 følger det, at $m_3(v) \leq 1$. Fordi grafen ikke indeholder 4-kredse, er antallet af naboregioner til et punkt v med valens mindst 5 lig $3 - m_3(v)$. Vi har derfor, at

$$\omega^*(v) = \omega(v) + \frac{1 - \beta(v)}{3 - m_3(v)}(3 - m_3(v)) + \beta(v).$$

Da $\omega(v) = -1$, er $\omega^*(v) = 0$ hvis $\beta(v) \leq 1$ og $\omega^*(v) > 0$ hvis $\beta(v) > 1$.

$d(v) = 4$: Det følger umiddelbart, at $\omega^*(v) = \omega(v) = 0$.

Antag således at $d(v) \geq 5$. Betragt R1. I tilfældet hvor $n_3(v) \neq 0$, har vi, at

$$\omega^*(v) = \omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v) - \frac{\omega(v) - \frac{1}{2}n_2(v)}{n_3(v)}n_3(v) = 0.$$

Hvis derimod $n_3(v) = 0$, følger det på samme måde som beviset for B2, at $\omega^*(v) \geq 0$. Således er det vist, at $\sum_{v \in V} \omega^*(v) \geq 0$; tilbage er at vise, at også $\sum_{f \in F} \omega^*(f) \geq 0$.

Betragt nu et vilkårligt $f \in F$. Lad $b(f) = x_1 \cdots x_k$. Fordi grafen H ikke indeholder 4-kredse, har H klart ingen 4-region og ej heller 3-regioner med en fælles kant. Fordi H ikke indeholder 6-kredse, har H ingen simpel 6-region og ej heller en 3- og en 5-region med en fælles kant. Fordi $k \neq 4$ betragter vi først tilfældet, hvor $k = 3$ og siden tilfældene, hvor $k \geq 5$.

$k = 3$: I dette tilfælde er $\omega(f) = -1$. Hver kant i 3-regionen møder en anden region g med $|b(g)| \geq 6$; så for hver kant får f netop $\frac{1}{3}$. Sammenlagt er $\omega^*(f) = -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$.

For $k \geq 5$, lad $S(f)$ være vægten, som er overført fra f til nabo-3-regionerne og nabo-2- og nabo-3-punkterne på randen af f jf. R2; dvs.

$$S(f) = \frac{1}{3}m_3(f) + \frac{1}{2}n_2(f) + \sum_{\substack{v \in b(f) \\ d(v)=3, \beta(v)<1}} \frac{1 - \beta(v)}{3 - m_3(v)}.$$

Nu er $\omega^*(f) = \omega(f) - S(f)$, fordi der ikke aflades vægt til f . For at konkludere, at også $\sum_{f \in F} \omega^*(f) \geq 0$, viser vi, at $S(f) \leq \omega(f)$. Først følger en række bemærkninger.

Bemærkning B4. $n_2(f) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Bevis. Følger af lemma 18. □

Bemærkning B5. $n_3(f) \leq \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$.

Bevis. Følger af lemma 19, pkt 1. □

Bemærkning B6. Hvis $n_2(f) < \frac{k}{2}$, så er $n_3(f) + 2n_2(f) + 1 \leq k$.

Bevis. Tælles antallet af 2- og 3-punkter på randen af f ses, at hvert 2-punkt giver anledning til mindst ét punkt med valens mindst 5. Derfor er $n_3(f) + 2n_2(f) \leq k$. Som følge af lemma 18, lemma 19, pkt. 1 og at $n_2(f) < \frac{k}{2}$, er der mindst ét punkt v , som ikke er iregnet. □

Bemærkning B7. $m_3(f) \leq k - 2n_2(f) - \lceil \frac{1}{2}n_3(f) \rceil$

Bevis. Antallet af nabo-3-kredse er selvsagt højst k . Desuden giver hvert 2-punkt på randen anledning til netop 2 kanter på randen, der ikke benyttes til en nabo-3-kreds (lemma 24, (2.2)). Disse kanter, som ikke er kanter i en 3-kreds, kan ikke have 2-punkter som begge endepunkter pr. lemma 18. For et 3-punkts vedkommende er enten to eller tre af dets kanter indeholdt i $b(f)$. Hvis det netop er to, giver et 3-punkt anledning til en nabo-3-kreds på højst én af de to nabokanter (da H ikke indeholder 4-kredse), som ligger på randen af f . Hvis et 3-punkt på $b(f)$ derimod har alle tre nabokanter indeholdt i $b(f)$ kan to af disse være på randen af samme 3-kreds. I dette tilfælde bidrager punktet dog med 2 til $n_3(f)$. Dog kan to 3-punkter være naboer, og kanterne tælles derved med to gange. I alt er mindst $\lceil \frac{1}{2}n_3(f) \rceil$ af kanterne på randen ikke en del af en nabo-3-kreds til f . □

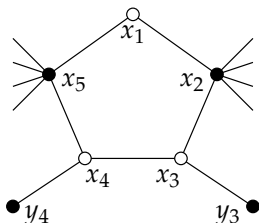
Videre til at vise, at $S(f) \leq \omega(f)$, dvs. $\omega^*(f) \geq 0$, for ≥ 5 -regioner.

$k = 5$: Her er $\omega(f) = 1$. Pr. B4 er $n_2(f) \leq 2$, og da H ikke indeholder 6-kredse, er $m_3(f) = 0$.

Hvis $n_2(f) = 2$, er $n_3(f) = 0$ pr. B6. Dermed er $S(f) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 = \omega(f)$.

Hvis $n_2(f) = 1$, er $n_3(f) \leq 2$ pr. B6. Hvis $n_3(f) \leq 1$, haves $S(f) \leq 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 < \omega(f)$ pr. B3, eftersom $m_3(f) = 0$ medfører, at $m_3(v) = 0$ for et 3-punkt $v \in b(f)$. Vi antager derfor, at $n_3(f) = 2$. Vi kan uden tab af generalitet antage, at 5-kredsen består af punkterne x_1, \dots, x_5 , hvor $d(x_1) = 2$ og

Acyklisk 5-listefarvbarhed



Figur 2.25: En 5-region med $d(x_1) = 2$ og $d(x_3) = d(x_4) = 3$.

$d(x_3) = d(x_4) = 3$ i henhold til lemma 18; se også figur 2.25. Valensen af x_2 og x_5 er mindst 6 pr. lemma 18 og 25. Lad y_3 være den resterende nabo til x_3 og lad y_4 være den resterende nabo til x_4 . For at vurdere, hvor stor ladning f maksimalt afgiver til x_3 (og x_4), vurderes $\beta(x_3)$ (og $\beta(x_4)$) mindst mulig, fordi regionen derfor afgiver mest muligt (jf. R2, pkt. 3). Summen af afladningen fra x_2 og y_3 til x_3 bestemmer $\beta(x_3)$:

$$\beta(x_3) = \frac{\omega(x_2) - \frac{1}{2}n_2(x_2)}{n_3(x_2)} + \frac{\omega(y_3) - \frac{1}{2}n_2(y_3)}{n_3(y_3)}. \quad (2.9)$$

For at minimere $\beta(x_3)$, maksimeres $n_2(v)$ (og ikke $n_3(v)$) over $d(v)$, fordi $\frac{d(v)-4-n_2(v)/2}{d(v)-n_2(v)}$ er aftagende som funktion af $n_2(v)$.

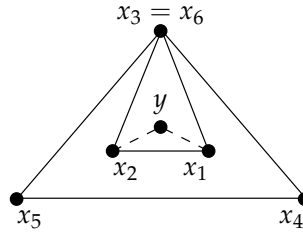
Først ser vi på, hvor meget x_2 giver til x_3 . Hvis $d(x_2) \geq 8$ kan B1 bruges, og x_2 giver dermed mindst $\frac{1}{2}$ til x_3 . Er derimod $d(x_2) = 7$ vides fra lemma 23, at x_2 højst har 5 nabo-2-punkter. I dette tilfælde giver x_2 mindst $\frac{3-5/2}{2} = \frac{1}{4}$ til x_3 . Antag derfor at $d(x_2) = 6$. Lemma 22 giver, at $n_2(x_2) \leq 3$ eftersom vi ved, at x_2 har mindst et nabo-3-punkt, nemlig x_3 . Punktet x_2 afgiver mindst $\frac{2-3/2}{3} = \frac{1}{6}$ til x_3 . Dvs. i alt afgiver x_2 mindst $\frac{1}{6}$ til x_3 .

Vi ser nu på hvor meget y_3 giver til x_3 . Der gælder, jf. lemma 19, pkt. 1, at $d(y_3) \geq 5$. Hvis $d(y_3) \geq 6$ afgiver y_3 mindst $\frac{1}{6}$ til x_3 ligesom x_2 . Hvis derimod $d(y_3) = 5$, ved vi fra lemma 21, pkt. 1, at $n_2(y_3) \leq 1$ og dermed afgiver y_3 i dette tilfælde mindst $\frac{1-1/2}{4} = \frac{1}{8}$. Dermed er $\beta(x_3) \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$ (jf. lighed (2.9)).

Samme argumentation fungerer for x_4 . I alt er

$$S(f) \leq 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1-7/24}{3-0} \cdot 2 < \omega(f).$$

Hvis $n_2(f) = 0$, giver B5 og B3 at $S(f) = 0 + 0 + \frac{1}{3}n_3(f) \leq \frac{1}{3} \lfloor \frac{2 \cdot 5}{3} \rfloor = \omega(f)$.



Figur 2.26: En ikke-simpel 6-region.

$k = 6$: Vi har, at $\omega(f) = 2$. Da H ikke indeholder kredse af længde 6, er sådanne regioner ej simple. Vi kan uden tab af generalitet antage, at punktet $x_3 = x_6$ er det punkt, som optræder mere end én gang langs randen. Så vil de resterende punkter danne to trekanter, $x_3x_1x_2x_3$ og $x_6x_4x_5x_6$. En sådan region ses på figur 2.26. Vi ved, at $d(x_3) \geq 4$, og lemma 24, pkt. 1 giver, at $d(x_i) \geq 3$ for $i = 1, 2, 4, 5$. Ergo er $n_2(f) = 0$ og $n_3(f) \leq 4$.

Vi vil vise, at $m_3(f) = 0$. Antag modsætningsvist at f har en 3-region som nabo. Uden tab af generalitet kan den antages, at denne region er givet ved x_1x_2y . Da både $d(x_1) \geq 3$ og $d(x_2) \geq 3$, er $y \neq x_3$. Så danner $x_1y x_2x_3x_1$ en 4-kreds – en modstrid. Følgelig har f ingen nabo-3-regioner. Dette giver os, at $S(f) \leq 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot 4 < \omega(f)$ jf. B3.

$k = 7$: Vi har pr. definition, at $\omega(f) = 3$, og jf. B4 at $n_2(f) \leq 3$. Vi inddeler i tilfælde efter størrelsen af $n_2(f)$.

Hvis $n_2(f) = 3$: Så er $n_3(f) = 0$ og $m_3(f) \leq 1$ jf. B6 og B7. Derfor er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 + 0 < \omega(f)$.

Hvis $n_2(f) = 2$: Så er $n_3(f) \leq 2$ og $m_3(f) \leq 3$ jf. B6 og B7. Dvs. $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \omega(f)$ jf. B3.

Hvis $n_2(f) = 1$: Jf. lemma 19, pkt. 1 er $n_3(f) \leq 3$, og jf. B7 er $m_3(f) \leq 5$.

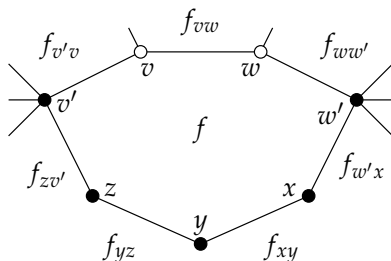
Hvis $n_3(f) = 3$, så er $m_3(f) \leq 3$ jf. B7. Således er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \omega(f)$ jf. B3. Hvis $n_3(f) = 2$, så er $m_3(f) \leq 4$ jf. B7. Dvs. $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 < \omega(f)$. Hvis $n_3(f) \leq 1$, har vi, at $m_3(f) \leq 5$ jf. B7, så $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 < \omega(f)$.

Hvis $n_2(f) = 0$: Ifølge B5 er $n_3(f) \leq \lfloor \frac{14}{3} \rfloor = 4$.

Hvis $n_3(f) \leq 1$, så er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 7 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 < \omega(f)$.

Hvis $n_3(f) = 2$, så er $m_3(f) \leq 6$ jf. B7. Altså er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 6 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \omega(f)$.

Acyklisk 5-listefarvbarhed



Figur 2.27: Tilfældet hvor $k = 7$ og $n_3(f) = 4$.

Hvis $n_3(f) = 3$, så er $m_3(f) \leq 4$ fordi: Antag at $m_3(f) \geq 5$. Der findes så to nabopunkter x og y på $b(f)$, som begge er 3-punkter og som er en del af to forskellige nabo-3-kredste til f . Dette er i modstrid med 19, pkt. 2. Ergo er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 4 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 < \omega(f)$.

Hvis $n_3(f) = 4$, så er der to nabopunkter v og w på randen af f som begge er 3-punkter. Lad v' og w' være de resterende nabopunkter til hhv. v og w på $b(f)$ og lad f_e være regionen, som f har kanten e fælles med; se figur 2.27. Ifølge lemma 19, pkt. 2 er hverken $f_{v'v}$ eller $f_{ww'}$ 3-regioner. Ydermere er $d(v'), d(w') \geq 5$ jf. lemma 19, pkt. 1, hvilket giver os, at to af de resterende punkter på kredsen har valens 3. Antag først at $d(x) = d(y) = 3$. Så er $d(f_{w'x}), d(f_{yz}) \geq 5$. Hvis derimod $d(y) = d(z) = 3$, så er $d(f_{xy}), d(f_{zv'}) \geq 5$. Hvis $d(x) = d(z) = 3$, så er højst én af $f_{w'x}$ og f_{xy} af grad 3, fordi der ellers ville være en 4-kreds. Tilsvarende er højst én af f_{yz} og $f_{zv'}$ af grad 3. Dvs. mindst to af regionerne $f_{w'x}, f_{xy}, f_{yz}, f_{zv'}$ er af grad mindst 5.

I alt er mindst 4 af naboregionerne til f af grad mindst 5, så $m_3(f) \leq 3$. Dvs. $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 3 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \omega(f)$.

$k = 8$: I dette tilfælde er $\omega(f) = 4$ og $n_2(f) \leq 4$ jf. B4. Vi kigger nærmere på de forskellige værdier af $n_2(f)$.

Hvis $n_2(f) = 4$, er præcis hvert andet punkt et 2-punkt, og vi har derfor ingen 3-punkter på randen – dette er en situation, hvor B6 ikke kan bruges. Jf. B7 er $m_3(f) = 0$ og dermed $S(f) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 0 < \omega(f)$.

Hvis $n_2(f) = 3$, ved vi fra B6 og B7, at $n_3(f) \leq 1$ og $m_3(f) \leq 2$. Dvs. $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 < \omega(f)$ jf. B3.

Hvis $n_2(f) = 2$, er $n_3(f) \leq 3$ og $m_3(f) \leq 4$ jf. B6 og B7 og dermed er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 < \omega(f)$, som følge af B3.

Hvis $n_2(f) = 1$, er $n_3(f) \leq 4$ ifølge lemma 19, pkt. 1. Desuden har vi, at $m_3(f) \leq 6$ jf. B7. Når $n_3(f) \leq 3$ er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \omega(f)$. Når $n_3(f) = 4$, er $m_3(f) \leq 4$ jf. B7 og $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 < \omega(f)$.

Hvis $n_2(f) = 0$, er $n_3(f) \leq 5$ og $m_3(f) \leq 8$ jf. B5 og B7.

Hvis $n_3(f) \leq 2$, er $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 8 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 < \omega(f)$.

Hvis derimod $n_3(f) \in \{3, 4\}$, er $m_3(f) \leq 6$ jf. B7 og $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 6 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \omega(f)$.

Er $n_3(f) = 5$, kan vi vha. et argument lignende det brugt i tilfældet $k = 7$, vise, at $m_3(f) \leq 4$ og dermed få, at $S(f) \leq \frac{1}{3} \cdot 4 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5 < \omega(f)$.

$k \geq 9$: Følgende beregning beviser sætningen i dette specialtilfælde:

$$S(f) \leq \frac{1}{3}m_3(f) + \frac{1}{2}n_2(f) + \frac{1}{2}n_3(f) \quad (\text{B3})$$

$$\leq \frac{1}{3}(k - 2n_2(f) - \lceil \frac{1}{2}n_3(f) \rceil) + \frac{1}{2}n_2(f) + \frac{1}{2}n_3(f) \quad (\text{B7})$$

$$\leq \frac{1}{3}k - \frac{1}{6}n_2(f) + \frac{1}{3}n_3(f)$$

$$\leq \frac{1}{3}k - \frac{1}{6}n_2(f) + \frac{1}{3} \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor \quad (\text{B5})$$

$$\leq \frac{5}{9}k - \frac{1}{6}n_2(f)$$

$$\leq k - 4 = \omega(f).$$

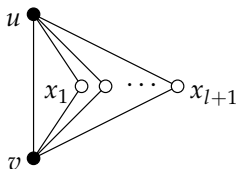
□

Der foreligger i dag også resultater omhandlende acyklisk 4-listefarvning af planare grafer. Da det ikke er muligt at vise dette for enhver planar graf, lægger sådanne resultater dog altid restriktioner på grafen.

2.3 Acyklisk defekt listefarvning

Resultaterne fra det tidligere afsnit antyder, at resultatet om acyklisk 5-listefarvning af planare grafer ikke ligger umiddelbart for. Det kan derfor være interessant at betragte problemet fra en ny vinkel. Vi har indtil nu kun arbejdet med gyldige farvninger; altså, farvningen \mathcal{C} opfylder, at $\mathcal{C}(x) \neq \mathcal{C}(y)$ for ethvert par af naboer x og y i grafen. En såkaldt *defekt* farvning, er en farvning, hvor der er slækket på dette krav. Det er således “tilladt”, at en defekt farvning opfylder, at $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$ for naboer x og y . Hvis alle naboer kan have samme

Acyklisk defekt listefarvning



Figur 2.28: Veje af længde 2 tilføjes for hver kant.

farve, så kan alle grafer defekt (liste)farves med bare én farve. Derfor er det interessant, at der trods alt er en begrænsning på "hvor defekt" farvningen er; lad os definere begrebet stringet.

Definition 29

En graf G siges at være t -defekt L -farvbar for en listetildeling L til G , hvis der findes en (ugyldig) farvning \mathcal{C} af G , således at et vilkårligt punkt v højst har t naboer med samme farve som v . Grafen G siges at være t -defekt l -listefarvbar, eller $(l, t)^*$ -listefarvbar, hvis G er t -defekt L -farvbar for alle l -listetildelinger L .

t -defekt L -farvbar

t -defekt
 l -listefarvbar,
 $(l, t)^*$ -listefarvbar

Definition 30

En graf G siges at være acyklisk t -defekt L -farvbar for en listetildeling L til G , hvis G er t -defekt L -farvbar således at ingen (lige) kreds er en alternerende kreds. Grafen G siges at være acyklisk t -defekt l -listefarvbar, eller acyklisk $(l, t)^*$ -listefarvbar, hvis G er acyklisk t -defekt L -farvbar for alle l -listetildelinger L .

acyklisk t -defekt
 L -farvbar

acyklisk t -defekt
 l -listefarvbar,
acyklisk
 $(l, t)^*$ -listefarvbar

Med disse definitioner kunne det være interessant, om det kunne vises, at enhver planar graf er acyklisk $(5, t)^*$ -listefarvbar for et eller andet t . Derefter kunne det være interessant om – og hvordan evt. – t kunne mindskes. Vi vil nu slå skår i forhåbningen om således at kunne nærme sig resultatet om "ren" acyklisk 5-listefarvbarhed.

Sætning 31

Lad $l \in \mathbb{N}$. Hvis der findes et $t \in \mathbb{N}$, således at enhver planar graf er acyklisk $(l, t)^*$ -listefarvbar, så er enhver planar graf acyklisk l -listefarvbar.

(Esperet og Pinlou, 2006)

(Esperet og Pinlou, 2007)

I (Esperet og Pinlou, 2007) findes sætningen publiceret. I denne kilde er beviset dog udeladt. Beviset findes i (Esperet og Pinlou, 2006).

Bevis. Antag at t er valgt, så enhver planar graf er acyklisk $(l, t)^*$ -listefarvbar. Lad G være en planar graf med en l -listetildeling L og antag gerne at $L(V(G)) = \{1, \dots, M\}$. Lad så G' være grafen G , hvor der for hver kant tilføjes $l + 1$ veje af længde 2 mellem kantens endepunkter; se figur 2.28. Lad ydermere L' være en listetildeling til G' defineret således:

G
 L
 G'
 L'

$$L'(v) := \begin{cases} L(v), & v \in V(G), \\ \{M+1, \dots, M+l\}, & \text{ellers.} \end{cases}$$

c' Fordi G' er planar, antages \mathcal{C}' at være en acyklisk t -defekt L' -farvning af G' . Lad desuden u og v være to vilkårlige nabopunkter og lad x_1, \dots, x_{l+1} være de punkter, som tilføjes med 2-vejene mellem u og v .

Det er klart, at $\mathcal{C}'(x_i) = \mathcal{C}'(x_j)$ for mindst ét par (i, j) . Følgelig er $\mathcal{C}'(u) \neq \mathcal{C}'(v)$, fordi G' ellers har en gyldigt farvet 2-kromatisk 4-kreds. Ergo: $\mathcal{C}'|_G$ er en acyklisk L -farvning af G . \square

3

Grötzschs sætning

I denne sidste halvdel af specialet undersøges yderligere egenskaber vedrørende listefarvning af grafer uden små kredse. Først et kort bevis for Grötzschs velkendte sætning (Grötzsch, 1959), som siger, at enhver trekantfri planar graf er 3-farvbar. I sidste kapitel vurderes antallet af forskellige listefarvninger, givet en 3-listetildeling af en planar graf med girth mindst 5.

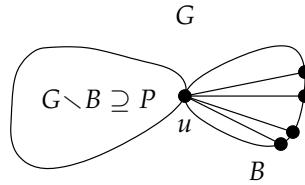
Både sætning 32 og 35 omhandlende listefarvninger er vist af Carsten Thomassen. Sætning 32 følger direkte som et korollar af sætning 35. Dog medtages et særskilt bevis for sætning 32, eftersom beviset for sætning 35 er relativt langt, og vi ønsker at opnå et relativt kort bevis for Grötzschs sætning. Beviserne for disse to ret ens sætninger følger omtrent samme strategi.

Grötzschs sætning kan vises ved brug af listefarvning. Vi viser først, at enhver planar graf med girth mindst fem kan 3-listefarves og dernæst, at dette resultat medfører Grötzschs sætning.

Sætning 32

Lad $G = (V, E)$ være en planar graf med $g(G) \geq 5$. Lad desuden $P := v_1 \cdots v_q$, $1 \leq q \leq 6$ være en kreds eller en vej, således at alle punkter på P ligger på randen af den ydre region, C . Lad L være en listetildeling til punkterne i V , således at $L(v)$ består af $C(v)$ for $v \in P$, hvor C er en L -farvning af P . For punkter $v \in C - P$, er $|L(v)| \in \{2, 3\}$, mens der for de resterende punkter gælder, at $|L(v)| = 3$. Antag desuden at hvis $u, v \in V$ opfylder, at $|L(u)|, |L(v)| \leq 2$, så er $uv \notin E$, medmindre $uv \in P$. Farvningen C kan udvides til en L -farvning af hele G . (Thomassen, 2003)

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING



Figur 3.1: De viste punkter i $B - u$ er netop de punkter, som har en liste bestående af kun to punkter.

Bevis. Bevisstrategien er induktion over antallet af punkter i grafen. Basisskridtet, hvor grafen har højst tre punkter, gælder trivielt. Antag derfor at grafen G er et punktminimalt modeksempel (og dermed at sætningen gælder for alle mindre grafer). Vi skaber en modstrid, så G ikke kan eksistere. Lad os dog først antage, at G er sammenhængende; ellers udføres argumenterne og induktionen blot på hver sammenhængskomponent, hvor vi i komponenter, som ikke indeholder P , farver et punkt med to farver i sin liste inden induktionsantagelsen kan anvendes.

Først følger otte påstande, som benyttes til at frembringe den endelige modstrid.

Påstand 1. Vi kan antage, at G ikke har noget snitpunkt, dvs. at C er en kreds.

u Bevis. Bemærk først at hvis G har et snitpunkt u i P , så kan induktionen udføres på hver af disse komponenter, fordi punkterne på $P - u$ og specielt u allerede er farvet.

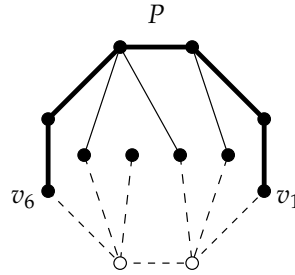
Antag modsætningsvist at $u \notin P$ er et snitpunkt i G , som separerer en blok $B \ni u$ fra $G \setminus B \supseteq P$. Pr. induktionsantagelse gælder påstanden for $G \setminus (B - u)$. I B er u det eneste allerede farvede punkt. Hvis der i B ikke er punkter v , hvor $|L(v)| = 2$, som er nabo til snitpunktet u , så er også B farvbar pr. induktion. Omvendt, farv alle nabopunkter v til u , hvor $|L(v)| = 2$. Fordi kun punkter på den ydre rand af G (og dermed B) kan have to farver, så inddeler de netop farvede punkter samt snitpunktet u (som også er farvet ved anvendelse af induktionen på $G \setminus (B - u)$) blokken B i dele, der har højst tre farvede punkter, som udgør en vej. Se figur 3.1. Induktionsantagelsen anvendes således på hver af disse dele, hvoraf resultatet følger. \square

Påstand 2. Vi kan antage, at ingen kant i P er en korde til C .

Bevis. Hvis en kant i P er en korde til C , udføres induktionen på de dele, som korden (korderne) inddeler grafen i. \square

Vejen eller kredsen P opfylder altså, at $P \subseteq C$, så vi skriver $C := v_1 \cdots v_q \cdots v_k v_1$.

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING



Figur 3.2: De to hvide punkter tilhører P' , mens punkter i $G - C$, som er forbundet til P , er punkter med to farver i deres lister, som har én nabo i P . Bemærk at de stiplede kanter ej eksisterer i G' .

Påstand 3. Vi kan antage, at P er en vej, og at $k \geq q + 3$.

Bevis. Hvis P er en kreds, viser påstand 2, at $P = C$. I dette tilfælde fjernes blot et punkt $v \in C$ fra G og $\mathcal{C}(v)$ fjernes fra listen til hver nabo til v . Det er altid muligt at vælge v , således at det ikke er nabo til et punkt i $G - C$, som også er nabo til et andet punkt på C , og derfor kan induktionsantagelsen benyttes på $G - v$. Fordi $g(G) \geq 5 > 3$, er ufarvede punkter med kun to farver tilbage uafhængige. Nu kan induktionsantagelsen anvendes. Dette vil muligvis ikke virke, hvis P ikke er en kreds, da vi så kan risikere, at to punkter med to eller færre farver i deres lister bliver naboer.

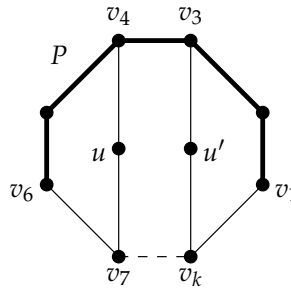
Antag derfor at $C \neq P$ og modsætningsvist at $k \leq q + 2$. Der er altså et enkelt eller to punkter i $C - P =: P'$. Farv og slet P' og slet den brugte farve for hvert punkt i P' fra de endnu ufarvede nabers lister; kald den resulterende graf for G' . Vi skal nu sikre os, at induktionsantagelsen kan anvendes.

Som før er punkter med to farver i sin liste uafhængige i G' , eftersom der også gælder, at $g(G') \geq 5 > 4$. Tilsvarende er intet sådant ufarvet punkt nabo til to punkter på P – omend de godt kan være nabo til ét punkt på P , og i så tilfælde farves punktet. Igen fordi punkter med kun to farver ligger på den ydre rand af G' , inddeler de nu farvede punkter G' i dele, som har højst seks farvede punkter, der udgør en vej. Se figur 3.2. Pr. induktion gælder sætningen på hver af disse dele. (Hvis $k \geq q + 3$ kan vi risikere, at $|Pu| = 7$, hvis f.eks. v_7uv_1 er en vej i G , og $|L(u)| = 2$ i G' .) \square

Påstand 4. Vi kan antage, at C ikke har en korde.

Bevis. Antag modsætningsvist at C har en korde xy . Korden inddeler G i to delgrafer, kald disse G_1 og G_2 . Lad G_2 være den delgraf, som indeholder færrest punkter fra P , og derudover den delgraf, som minimerer $|V|$. Pr. induktionsantagelse er G_1 L -farvbar. Vi ønsker også at benytte induktionsantagelsen på G_2 , men undersøger

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING



Figur 3.3: De to muligheder, hvor vi muligvis ikke kan bruge induktion på G_2 , da vi kan risikere, at to nabopunkter får samme farve. Den stiplede kant repræsenterer en vej.

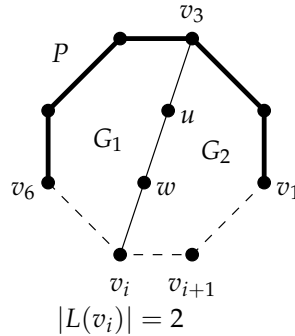
først, om G_2 opfylder betingelserne i sætningen. Punkterne x og y er blevet farvet. Jf. påstand 3 kan højst et af punkterne tilhøre P . Tilhører x eller y ej P , kan disse muligvis være naboer til punkter på C , som har en liste bestående af to farver. Da G_2 er minimal, har den ydre kreds i G_2 ingen korde, og vi kan derfor højst have én nabo til hver af x og y , som har en liste med kun to farver. Disse punkter farves, og induktionsantagelsen benytter på G_2 . Hvis x eller y tilhører P , kan der være yderligere højst to punkter i G_2 , som tilhører P . Antallet af farvede punkter i G_2 er derfor højst fem. \square

Påstand 5. Vi kan antage, at G ikke har en vej v_iuv_j , hvor $u \notin C$, medmindre $q = 6$ og vejen er enten v_4uv_7 eller v_3uv_k . I disse to tilfælde vil u kun have to naboer på C .

Bevis. Lad v_iv_j være en sådan vej. Se figur 3.3. Definér G_1 og G_2 som i beviset for påstand 4. Igen er der for hhv. v_i og v_j højst ét punkt med en liste bestående af to farver, som er nabo til hhv. v_i og v_j i G_2 . Sådanne punkter farves. De farvede punkter i G_2 danner herefter en vej med højst seks punkter, som ligger på den ydre kreds. Pr. induktionsantagelse er G_1 L -farvbar. Delgrafene G_2 kan også L -farves pr. induktion, medmindre $q = 6$ og vejen er enten v_4uv_7 eller v_3uv_k . I disse tilfælde kan det ske, at farven valgt til v_7 (hhv. v_k) (under L -farvningen af G_1) er den samme, som den i forvejen tildelte farve til v_6 (hhv. v_1), hvilket hindrer en gyldig L -farvning af G_2 . I disse to tilfælde kan u ikke have andre naboer på C , da en evt. nabo v sørger for, at G_2 vælges som den del af G , der afgrænses af v_7uv (hhv. v_kuv). \square

Påstand 6. Vi kan antage, at G ikke har en vej v_iuww_j , hvor $u, w \in G - C$ og $|L(v_i)| = 2$. Desuden har G ingen vej v_iuww_j , hvor $u, w \in G - C$, $|L(v_i)| = 3$ og $j \in \{1, q\}$.

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING



Figur 3.4: Delgrafen G_2 har maksimalt seks farvede punkter, hvis $|L(v_i)| = 2$.

Bevis. Antag at G har en vej $v_i u w v_j$. Opdel som før i G_1 og G_2 . Efter farvningen af G_1 er v_i, u, w og v_j farvet i G_2 , og muligvis yderligere punkter, som i forvejen var en del af P , dog højst to. Se også figur 3.4. Dette giver i alt højst seks farvede punkter på den ydre kreds af G_2 . Er $|L(v_i)| = 2$, har alle dens nabopunkter tre farver i sine lister, og vi er derfor ikke nødsagede til at farve ekstra punkter. Derved kan der bruges induktion på G_2 .

I det andet tilfælde har v_i, u, w og v_j igen alle en farve i G_2 , men eftersom $|L(v_i)| = 3$, kan v_i godt have en nabo i G_2 , som har en liste af længde to, og et sådant punkt farves. Fordi $j \in \{1, q\}$, er der ikke flere punkter i G_2 , der er farvet på forhånd. \square

Påstand 7. Hvis C' er en kreds i G med højst seks punkter, og $C' \neq C$, så er det indre af C' tomt.

Bevis. Er det indre af C' ej tomt, kan induktionsantagelsen benyttes på C' og dens ydre og dernæst på C' og dens indre, som dermed højst har seks farvede punkter på randen af den ydre region. \square

Påstand 8. Vi kan antage, at $|L(v_{q+2})| \neq 3$. Vi kan også antage, at ikke både $|L(v_{q+2})| = 2$ og $|L(v_{q+4})| = 3$.

Bevis. Er $|L(v_{q+2})| = 3$, fjernes v_q fra G , og $C(v_q)$ fjernes fra alle nabolister til v_q . Muligvis fjernes der en farve fra $L(v_{q+1})$, så $|L(v_{q+1})| = 2$, men eftersom v_{q+2} har tre farver i sin liste, kan vi (også jf. påstand 4 og 5) alligevel bruge induktion på $G - v_q$. Bemærk at punkter med to farver i listerne er uafhængige, da $g(G) \geq 5 > 3$.

Hvis derimod $|L(v_{q+2})| = 2$, er $|L(v_{q+3})| = 3$. Hvis listen til punktet v_{q+4} indeholder tre farver, L -farves v_{q+1} og v_{q+2} og fjernes herefter fra grafen. Farven valgt til v_{q+1} fjernes fra hver naboliste til v_{q+l} for $l = 1, 2$. Vi kan nu bruge induktion på $G - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$,

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING

medmindre et af de punkter, som har fået fjernet en farve fra sin liste enten nu kun har én farve tilbage i sin liste, eller er nabo til et punkt v_i på C med $|L(v_i)| \leq 2$. Jf. påstand 4 kan det første ikke ske, og 5 kan en sådan vej $v_i u v_j$ kun opstå mellem v_4 og $v_7 = v_{q+1}$ (fordi $k > q + 3$ her). I dette tilfælde farves u , og induktionsantagelsen kan herefter bruges på de to halvdele, som $v_4 u$ opdeler $G - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$ i. \square

Vi kan pr. første del af påstand 8 antage, at $|L(v_{q+2})| \leq 2$. Da $k \geq q + 3$ ifølge påstand 3, er $|L(v_{q+2})| = 2$. Derved er $|L(v_{q+4})| \leq 2$ (sidste del af påstand 8). Derudover er $|L(v_{q+3})| = 3$. L -farv v_{q+3} med en farve, som ikke er i $L(v_{q+4})$. Punkterne v_{q+1} og v_{q+2} L -farves også. Herefter fjernes for $i = 1, 2, 3$ punkterne v_{q+i} fra G , og farven valgt til v_{q+i} fjernes fra hver naboliste til v_{q+i} . Vi ønsker nu at benytte induktionsantagelsen på $G' := G - \{v_{q+1}, v_{q+2}, v_{q+3}\}$. I resten af beviset vises det, at vi kan benytte induktion på G' og dermed kan L -farve G .

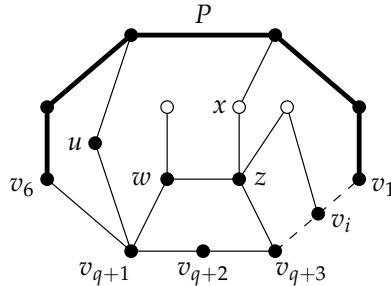
Hvis $q = 6$ kan der, som i beviset for påstand 8, findes et punkt $u \in G - C$, således at $v_4 u v_7$ er en vej. Hvis $q = 6$ og $k = q + 3$, kan der eksistere et punkt u' , som er nabo til v_3 og v_k (se påstand 5). I dette tilfælde L -farves u og/eller u' først, og derefter bruges induktion – hvis det er muligt – på de dele som kanten/kanterne $v_4 u$ og/eller $v_3 u'$ opdeler G' i.

Det er dog ikke sikkert, disse dele alle opfylder betingelserne i sætningen. En sidste ting, der kunne opstå, er en vej $v_{q+1} w z v_{q+3}$ (pr. påstand 6 kan der ikke udgå en sådan vej fra v_{q+2} , eftersom $|L(v_{q+2})| = 2$). Påstand 7 giver, at der kun findes én sådan vej. Figur 3.5 viser en sådan vej og at det indre $v_{q+1} w z v_{q+3} v_{q+2}$ er tomt. Hvis farven brugt til v_{q+1} fjernes fra $L(w)$, og farven brugt til v_{q+3} fjernes fra $L(z)$, har vi to nabopunkter, som begge kun har to farver i deres lister. Vi L -farver derfor w og z , fjerner dem fra grafen, fjerner $\mathcal{C}(w)$ fra hver naboliste til w og $\mathcal{C}(z)$ fra hver naboliste til z . Kald den nye graf G^* . Findes der punkter i G' , som er nabo til to farvede punkter (efter w og z er blevet farvet, men inden de slettes), L -farves disse også. Dette forhindrer, at et punkt $v \in G - C$, som pga. $\mathcal{C}(w)$ eller $\mathcal{C}(z)$ kun har to farver i sin liste i G^* , er nabo til et punkt på P . Husk på at u og u' stadig kan eksistere.

Vi viser, at antagelserne i sætningen gælder for de delgrafer, som de farvede punkter opdeler G^* i, således at vi kan benytte induktionsantagelsen.

De farvede punkter i hver del af G^* består ikke af mere end seks punkter, og de danner en vej. Skulle de bestå af flere end seks punkter, ville det kræve en vej af typen $v_{q+1} w x v_j$ eller $v_{q+3} z y v_j$, $j \in \{1, q\}$, $x, y \in G - C$, og dette bryder med sidste del af påstand 6. Er alle punkter med to farver i deres lister uafhængige i G^* ? Et punkt

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING



Figur 3.5: De hvide punkter er punkter, som har to farver i sine lister i G^* . Punkter x farves inden induktionsantagelsen kan anvendes, da x er nabo til både et punkt på P og z . De stiplede kanter er igen en vej.

$x \in G - C$, som har to farver i sin liste i G^* og er nabo til w eller z , kan ikke være nabo til et punkt på C med to farver i sin liste, da dette ville være i modstrid med første del af påstand 6. Da u og u' kun har to naboer på C jf. påstand 5, er disse heller ikke naboer til et punkt i C med to farver i sin liste. Et punkt som v_i på figur 3.5 har derfor altid tre farver i sin liste. To punkter indeholdt i $G - C$, som begge har to farver i deres lister, kan heller ikke være naboer, da $g(G) \geq 5 > 4$. Bemærk at sådanne punkter skal være nabo til enten w eller z fordi vejen $v_{q+1}wzv_{q+3}$ er unik. Ergo kan induktionsantagelsen bruges på G^* , og vi har derfor en modstrid med valget af G som det mindste modeksempel. \square

Vha. sætning 32 er det nu muligt at bevise Grötzschs sætning på relativt kort vis. Det oprindelige bevis for Grötzschs sætning kan ses i (Grötzsch, 1959). Nedenstående version af sætningen siger mere end den oprindelige sætning, men dette er blot en tilføjelse, som gør bevisførelsen lettere.

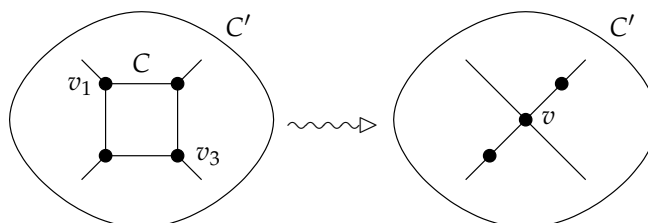
Sætning 33 (Grötzschs sætning)

Enhver planar graf G uden trekanter kan 3-farves. Desuden gælder at hvis G har en ydre kreds C med længde 4 eller 5, så kan en vilkårlig farvning af C udvides til en farvning af hele G . (Thomassen, 1994b)

Bevis. Lad G være et punktminimalt modeksempel. I fald $g(G) \geq 5$, udnyttes sætning 32, hvor blot $L(u) = L(v)$ for alle $u, v \in V(G)$. Antag derfor at G er et punktminimalt modeksempel med en 4-kreds $C' := v_1 \cdots v_4 v_1$. Beviset benytter induktion tilsvarende beviset for sætning 32.

Grundet minimaliteten af G er $d(v) \geq 3$ for alle $v \in G - C$, for 2-punkter kan efterfølgende farves uden videre.

KAPITEL 3. GRÖTZSCHS SÆTNING



Figur 3.6: Situation hvor 4-kredsen er tom. Her sammentrækkes to modstående punkter på kredsen.

Hvis $C' \neq C$ og det indre af C' ikke er tomt: Farv pr. induktion det ydre af C' . Således farves C' , og induktionen kan nu anvendes på det indre af C' (ved at benytte anden del af sætningen). Derved kan hele G farves.

Hvis $C' \neq C$ og det indre af C' er tomt: Sammentræk v_1 og v_3 til v og farv så den resulterende graf G' med en farvning C' pr. induktion; se figur 3.6. Bemærk: Ved sammentrækningen kan der ikke opstå en 3-kreds, fordi $d(v) \geq 3$ for de indre punkter og fordi en evt. 3-kreds ville bevirke, at samme punkter danner en 5-kreds i G , hvor det indre ikke er tomt. I dette tilfælde benyttes argumentation fra foregående tilfælde med 5-kredsen som C' .

Sammentrækningen af v_1 og v_3 kan dog give en korde til C . Er C af længde 4 eller 5, kan punkterne på C være farvet på forhånd. Kordens to endepunkter kan risikere at få samme farve, og vi har dermed ikke en gyldig farvning af C , når vi ønsker at benytte induktionsantagelsen. Hvis C' har netop et eller tre punkter tilfælles med C , kan i stedet v_2 og v_4 sammentrækkes, uden at en korde opstår. Nu farves hele G med C som G' , og $C(v_1) := C(v_3) := C'(v)$. Hvis C' netop har to punkter tilfælles med C , og de to resterende punkter hver har en nabo på C , vil der opstå en korde hvadenten v_1 og v_3 eller v_2 og v_4 sammentrækkes. Eftersom $g(G) \geq 4$, er $|C| \geq 6$ i dette tilfælde, og dermed er C aldrig farvet på forhånd.

Hvis $C' = C$ og C' er den eneste 4-kreds: Er C' ikke farvet, farves den. Indsæt et punkt v_5 i C' , så $C' := v_1 \cdots v_5 v_1$ og benyt sætning 32. \square

4

Antal L -farvninger i særlige grafer

Det er jf. sætning 32 vist, at enhver planar graf med girth mindst 5 er 3-listefarvbar. Det kunne dog være interessant at undersøge, hvorvidt vi er sikret mere end én 3-listefarvning, givet en vilkårlig listetildeling, L . Umiddelbart giver det mening at søge efter punkter, hvis liste ikke har mange farver tilfælles med naboernes lister, således at det er muligt at vælge mellem flere forskellige farver, og dermed få flere L -farvninger. Vi definerer dette formelt.

Definition 34

For en graf G med en listetildeling L , defineres en farveplan \mathcal{P} , som en ordning af $V(G)$. Punkter v , hvor $|L(v)| = 1$, ordnes først. Under farvning efter ordningen kaldes punkter, som kan farves med mindst to forskellige farver, positive. Punkter, som ikke siges at være positive, er negative. (Et negativt punkt kan evt. godt farves med to eller flere forskellige farver.) En farveplan er tilladelig, hvis $V(G)$ kan farves i den specificerede orden. Med mindre andet nævnes, er alle farveplaner tilladelige.

farveplan

positive

negative

tilladelig

Givet en graf findes der altså mindst 2^p forskellige L -farvninger, hvis der findes (mindst) én farveplan med p positive punkter. For at sætte en nedre grænse på antallet af L -farvninger en given graf med en listetildeling har, søger vi derfor en farveplan med flest mulig positive punkter.

Den følgende sætning benyttes i sætning 36, som netop udtaler

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

sig om antallet af L -farvninger i en graf med girth mindst 5.

Sætning 35

P Lad $G = (V, E)$ være en planar graf med $g(G) \geq 5$. Lad desuden $P := v_1 \cdots v_q$, $1 \leq q \leq 6$ være en kreds eller en vej, således at alle punkter på C P ligger på randen af den ydre region, C . Lad L være en listetildeling til C punkterne i V , således at $L(v)$ består af $\mathcal{C}(v)$ for $v \in P$, hvor C er en L -farvning af P . For punkter $v \in C - P$, er $|L(v)| \in \{2, 3\}$, mens der for de resterende punkter gælder, at $|L(v)| = 3$. Antag desuden at hvis $u, v \in V$ opfylder, at $|L(u)|, |L(v)| \leq 2$, så er $uv \notin E$, medmindre $uv \in P$. Antag også at $d(v) \geq 2$ for $v \in C$ og at $d(v) \geq 3$ for $v \in G - C$. Grafen G har p, n en farveplan med p positive og n negative punkter således at et af følgende udsagn er sandt:

- (i) $p = 0$, P er en kreds og $G = P$.
- (ii) $p = 0$, P er en vej og G er en kreds bestående af P samt yderligere ét punkt.
- (iii) $p = 0$ og $P = v_1 \cdots v_q$ er en vej med $q \in \{5, 6\}$, som ikke er indeholdt i en kreds med $q + 1$ punkter. Desuden er $|G| \leq 6q - 19 \leq 17$.
- (iv) $p > 0$ og $n \leq 1000(p - 1) + 200(q - 1)$.

(Thomassen, 2007, Thm. 4.2)

Bevis. Vi benytter induktion over antallet af punkter i grafen. Basis-skridtet er klart opfyldt. Antag derfor at G er et mindste modeksempel til sætningen. Følgende strategi vil blive udnyttet flere gange i beviset:

Bemærkning B1. Del G op i to delgrafer G_1 og G_2 med en fælles vej mellem (med højst seks punkter, ofte færre). Antag at G_1 indeholder flest punkter fra P (evt. lige så mange som G_2 , og evt. at G_2 på passende vis er minimal). Nu er det muligt at benytte induktionsantagelsen og således skabe en farveplan for først G_1 og siden for G_2 . Det er nødvendigt at argumentere for, at den fælles vej har en begrænset længde så induktionen kan bruges på G_2 , da disse overlappende punkter er blandt de allerede farvede punkter i G_2 . Evt. farves punkter med kun to farver i sin liste, som er nabo til den fælles vej, så induktionen også kan benyttes på G_2 .

$\mathcal{P}_i, p_i, n_i, q_i$ For at lette notationen i beviset, er \mathcal{P}_i, p_i, n_i og q_i hhv. farveplanen, antal positive punkter, antal negative punkter og antallet af punkter på den forfarvede vej eller kreds P_i i delgraften G_i .

Det er ikke nok at vise, at induktionen kan benyttes på begge delgrafer. Der skal om farveplanerne gælde, at de kan samles til en farveplan for hele grafen; denne samlede farveplan skal opfylde en

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

af (i)-(iv). Vi ser på alle kombinationerne af om G_1 og G_2 har mindst ét positivt punkt eller kun negative punkter.

Antag at både G_1 og G_2 indeholder mindst ét positivt punkt. Både \mathcal{P}_1 og \mathcal{P}_2 opfylder (iv): $n_i \leq 1000(p_i - 1) + 200(q_i - 1)$, for $i = 1, 2$. Desuden gælder, at $n \leq n_1 + n_2$, at $p = p_1 + p_2$ og at $q + m = q_1 + q_2$, hvor m er antallet af ekstra forfarvede punkter i de to delgrafer. Ergo haves

$$\begin{aligned} n &\leq n_1 + n_2 \leq 1000(p_1 + p_2 - 2) + 200(q_1 + q_2 - 2) \\ &= 1000(p - 2) + 200(q + m - 2) \\ &= 1000(p - 1) - 1000 + 200(q - 1) + 200(m - 1), \end{aligned}$$

hvilket giver, at $n \leq 1000(p - 1) + 200(q - 1)$, når blot $m \leq 6$.

Hvis derimod enten G_1 eller G_2 (eller begge) ikke har noget positivt punkt, er den respektive delgraf "lille" (opfylder en af (i)-(iii), dvs. indeholder højst 17 punkter). I pågældende situationer vil det vise sig muligt atter at få en samlet farveplan, som opfylder en af (i)-(iv).

En farveplan \mathcal{P} , som opfylder en af (i)-(iv) kaldes for en god farveplan. Først følger (som i beviset for sætning 32) en række påstande, som dækker særtilfælde.

god farveplan

Påstand 1. Vi kan antage, at G er sammenhængende.

Bevis. Antag at G ikke er sammenhængende. Lad G_1, \dots, G_k være sammenhængskomponenterne og lad $P \subseteq G_1$. Anvend først induktionsantagelsen på G_1 . For G_2, \dots, G_k farves først et punkt på randen af den ydre region. Vælg om muligt et punkt med 2 farver til rådighed, thi dermed kan induktionsantagelsen benyttes – komponenten har et positivt punkt, da den opfylder (iv). Er der i en komponent kun punkter med 3 farver til rådighed, kan induktionsantagelsen klart benyttes, og igen indeholder komponenten positive punkter.

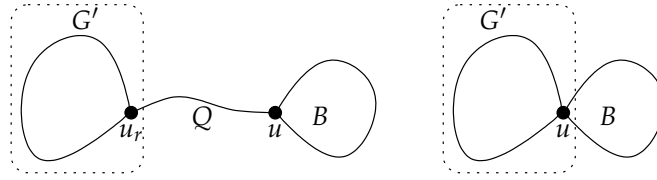
Hvis (i)-(iii) er opfyldt for G_1 , så er (iv) opfyldt for $G_1 \cup G_2$, fordi $p_{1,2} \geq 1$ og $q_{1,2} \geq 3 + q_2 \geq (q_1 - 1) + q_2$. Hvis $G_1 \cup \dots \cup G_i$ opfylder (iv), så er også (iv) opfyldt for $G_1 \cup \dots \cup G_{i+1}$, fordi $q_{1, \dots, i+1} + 1 = q_{1, \dots, i} + q_{i+1}$. (Se B1, hvor både G_1 og G_2 har positive punkter.) \square

Påstand 2. Vi kan antage, at G ikke har noget snitpunkt på randen af den ydre region, dvs. C er en kreds.

Bevis. Lad modsætningsvist u være et snitpunkt på C indeholdt i en punktminimal endeblok B , hvor $B \cap P$ antages at være minimal, dvs. højst indeholdende tre punkter.

Vi definerer nu (entydigt) en vej $Q := uu_1 \dots u_r$, hvor u_r er det første punkt foruden u , som har valens mindst tre hvor $u_1, \dots, u_r \notin Q$

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.1: Illustration af G' , Q og u .

B . Hvis u har mindst to naboer, som ikke er fra B , sættes $Q := u$. Lad desuden

$$G' := \begin{cases} G - B - (Q - u_r), & \text{hvis } |Q| \geq 2 \\ G - (B - u), & \text{hvis } Q = u. \end{cases}$$

Se figur 4.1.

Først betragtes tilfældet, hvor $P \cap G' \neq \emptyset$. Induktionsantagelsen anvendes, og der fås en god farveplan \mathcal{P}' for G' .

Hvis $Q - P \neq \emptyset$, så farves u_{r-1}, \dots, u_1, u . Farveplanen for Q indeholder positive punkter, fordi mindst et af disse foretages, kan de resterende punkter på Q farves, så den opfylder (iv). (Medmindre $|Q| = 2$. I så fald er $|L(u)| = 2$ og u farves med den tiloversblevne farve efter G' pr. induktion er farvet. Derefter benyttes induktionen på B .) Hvis \mathcal{P}' opfylder (i)-(iii), er $q' \geq 4$, og følgelig er $q_Q \leq 3$. Derfor er $q_{G' \cup Q} \geq q_Q + 3$ (der tillades dermed op til 600 ekstra negative punkter), og G' bidrager med højst 17 negative punkter, dvs. $n_{G' \cup Q} \leq n_Q + 17$. Ydermere er $p_{G' \cup Q} = p_Q$, så farveplanen for $G' \cup Q$ opfylder (iv). Hvis \mathcal{P}' opfylder (iv), opfylder farveplanen for $G' \cup Q$ også (iv) fordi Q bidrager med punkter fra P , mindst ét positivt punkt og evt. flere punkter hvoraf mindst halvdelen er positive (fordi for hvert par af naboer, har mindst én af dem tre farver i sin liste).

Hvis omvendt $Q - P = \emptyset$, har Q ikke positive punkter. Hvis $Q = u$, opfylder farveplanen for $G' \cup Q$ det samme som G' , fordi $G' = G' \cup Q$. Antag at Q indeholder mindst to punkter fra P . Hvis \mathcal{P}' opfylder (ii), så opfylder farveplanen for $G' \cup Q$ (iii) fordi: $|G'| \leq 6$ og $|Q| \leq 3$, så $|G| \leq 6 \cdot 5 - 19 = 11$. Hvis \mathcal{P}' opfylder (iii), så opfylder farveplanen for $G' \cup Q$ også (iii) fordi q øges fra 5 til 6 og antal punkter kun øges med én. Hvis \mathcal{P}' opfylder (iv), øges q og antal negative punkter ens, så farveplanen for $G' \cup Q$ opfylder (iv). Vi har derfor en god farveplan for $G' \cup Q$.

Slutteligt findes også en farveplan for B pr. induktion. Hvis $u \notin P$, så kan u være et positivt punkt. Betragt blot u som farvet med en specifik farve, når farveplanen for B findes; dermed er u en del

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

af den forfarvede vej i B . Hvis u i B har naboer med to farver i sin liste, så farves også disse naboer, da induktionsantagelsen ellers ikke kan benyttes. Induktionen udføres på hver af de dele som B af disse punkter (sammen med u) inddeles i. I hver af disse dele er der mindst ét positivt punkt, fordi der højst er tre farvede punkter.

Antag først at u ikke er positivt og dermed ikke har naboer med to farver. Fordi $|B \cap P| \leq 3$ opfylder farveplanen for B (iv), så B indeholder positive punkter. Hvis farveplanen $\mathcal{P}_{G' \cup Q}$ for $G' \cup Q$ opfylder (i)-(iii), så er $n \leq n_B + 17$ og $q_{G' \cup Q} \geq 4$ (q øges derfor med mindst én når $G' \cup Q$ tilføjes til B), så farveplanen \mathcal{P} for hele G opfylder (iv). Hvis $\mathcal{P}_{G' \cup Q}$ opfylder (iv), er $iq + 1 \geq q_{G' \cup Q} + q_B$, så \mathcal{P} opfylder (iv).

Antag dernæst at u er et positivt punkt og at det har naboer med to farver. (Dvs. $G' \cup Q$ har et positivt punkt, så $\mathcal{P}_{G' \cup Q}$ opfylder (iv).) Lad D_1, \dots, D_k være de k dele som B opdeles i. Farveplanen \mathcal{P}_i for hvert D_i opfylder (iv) fordi $q_i \leq 3$. Bemærk at $n_{1, \dots, i+1} \leq n_{1, \dots, i} + n_{i+1}$, $p_{1, \dots, i+1} = p_{1, \dots, i} + p_{i+1}$ og at $q_{1, \dots, i+1} + 3 = q_{1, \dots, i} + q_{i+1}$. Derfor kan vi slå hver del D_i sammen med $G' \cup Q$ og de tidligere dele D_1, \dots, D_{i-1} og stadig få en farveplan, som opfylder (iv).

Dernæst betragtes tilfældet, hvor $P \cap G' = \emptyset$. Minimaliteten af $B \cap P$ giver, at $P \subseteq \dot{Q}$. En farveplan for Q fås nemt. Bemærk at farveplanen for Q nødvendigvis indeholder mindst to positive punkter, så (iv) er opfyldt. (Mindst én af to naboer fra $Q - P$ er positive, så for hvert negativt punkt ud over punkter på P , er der mindst ét positivt.) Der er nu valgt en farve til endepunkterne af Q , og pr. induktion fås en farveplan for B og G' , hvor Q 's endepunkter i induktionen betragtes som farvede punkter. Igen kan disse have naboer med to farver i sin liste, og samme argumenter som i det tidligere tilfælde giver en farveplan i dette tilfælde.

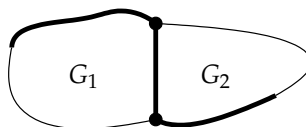
Farveplanerne \mathcal{P}' og \mathcal{P}_B for hhv. G' og B opfylder (iv) fordi både $q_B \leq 3$ og $q_{G'} \leq 3$. Evt. har hver del af B eller G' højst tre farvede punkter, så farvningen af hver af delene opfylder (iv). For hver del D_i af B eller G' udføres argumenter tilsvarende tidligere; dvs. \mathcal{P} opfylder (iv).

Hvis u_r er et snitpunkt i G , der er nabo til mindst tre punkter som har præcis to farver i sine lister, så kan en anden endeblok vælges, således at $P \subset G'$. \square

Påstand 3. Vi kan antage, at ingen kant i P udgør en korde for C .

Bevis. Antag modsætningsvist, at der er en korde til C . Korden inddeler G i to delgrafer, G_1 og G_2 ; se figur 4.2. Vi kan nu uden problemer benytte induktionsantagelsen på den ene og derefter den anden delgraf. Vi undersøger, hvorvidt G har en god farveplan. Hvis både G_1 og G_2 indeholder et positivt punkt, opfylder \mathcal{P} (iv), fordi

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.2: Opdelingen af grafen, hvor en kant fra P udgør en korde til C .

$q + 2 = q_1 + q_2$, som skrevet i starten af beviset, og vi har en modstrid med valget af G som et minimalt modeksempel.

Hvis derimod kun én af graferne G_1 eller G_2 indeholder mindst et positivt punkt, antag G_1 , indeholder G_2 mindst fire punkter fra P , da \mathcal{P}_2 opfylder (i), (ii) eller (iii). Af samme grund indeholder G_2 højst 17 punkter. Grafen G har mindst ét positivt punkt (fra G_1); vi viser, at \mathcal{P} opfylder (iv).

Farvplanen \mathcal{P}_1 for delgrafen G_1 opfylder (iv), og fordi G_2 ikke indeholder positive punkter, er $q_2 \geq 4$, så $q \geq q_1 + 2$, og vi kan tillade op til 400 ekstra negative punkter. Desuden er $p = p_1$ og $n \leq n_1 + 17$, så \mathcal{P} opfylder (iv).

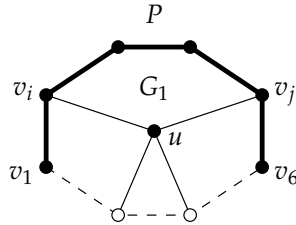
Et sidste tilfælde er, hvor hverken G_1 eller G_2 indeholder positive punkter. Her indeholder begge grafer mindst fire punkter fra P . Eftersom $q \leq 6$, indeholder hver delgraf netop fire punkter fra P . Begge delgrafer har derfor en farveplan, som opfylder (ii). Ergo er både G_1 og G_2 5-kredse. I G er P en vej med 6 punkter, som ikke er en del af en kreds med 7 punkter. Desuden er $|G| = 8 \leq 17 = 6q - 19$, dvs. (iii) er opfyldt. \square

Vejen eller kredsen P opfylder derfor, at $P \subseteq C$, så vi kan vælge notationen $C := v_1 \cdots v_q \cdots v_k v_1$, akkurat som i beviset for sætning 32 på side 41.

Påstand 4. Vi kan antage, at et punkt $u \in G - P$ højst har én nabo på P , medmindre $k = q + 1$, og $u = v_k$.

Bevis. Antag at et punkt $u \in G - C$ (eller $u \in C - P$) har mere end én nabo på P . Da $g(G) \geq 5$, har den netop to naboer, $v_i, v_j \in P$, hvor $1 \leq i < j \leq 6$. Grafen G inddelles i to delgrafer. Lad G_1 være grafen bestående af kredsen $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j u v_i$ og dens indre og lad G_2 være grafen bestående af kredsen $v_i v_{i-1} \cdots v_{j+1} v_j u v_i$ og dens indre (hvor indekset er regnet modulo k). Først benyttes induktionsantagelsen på G_1 , og vi anvender også induktionsantagelsen på G_2 , hvis dette er muligt. Dette tilfælde behandles sidst i beviset. Er det ikke muligt, skyldes det, at u er nabo til punkter på C , som kun har to farver i sine lister. Disse punkter farves, og vi benytter induktionsantagelsen på hver af delgraferne, som er afgrænset af en farvet vej

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.3: De hvide punkter er naboer til u , som har to farver i sine lister. De stiplede kanter repræsenterer veje.

bestående af tre punkter, hvoraf det midterste er u . Se figur 4.3. Vi betragter nu de forskellige tilfælde.

Indeholder en eller flere (men ikke alle) af disse delgrafer et positivt punkt, kan vi, vha. samme argumentation som i beviset for påstand 3, vise, at G har en farveplan, som opfylder (iv). Bemærk at G_1 og de to delgrafer, som indeholder v_i og v_j er de eneste, som ikke nødvendigvis indeholder positive punkter. De resterende delgrafer har tre allerede farvede punkter, så pr. induktion opfylder de (iv). Eftersom G_1 indeholder mindst fire punkter fra P , sammensættes denne graf først med en delgraf, som har et positivt punkt. Hvad enten G_1 har et positivt punkt eller ej, vil den nye graf have en farveplan, som opfylder (iv). Benyt blot samme argumenter som i beviset for påstand 3. Herefter tilføjes de resterende delgrafer en for en, og vha. de samme argumenter opfylder farveplanen for den samlede graf udsgn (iv), hver gang en ny delgraf tilføjes. Dette er i modstrid med valget af G som et minimalt modeksempel.

Hvis alle delgrafer har et positivt punkt, gælder der for alle delgrafer G_1, \dots, G_m , at

$$n_i \leq 1000(p_i - 1) + 200(q_i - 1), \quad i = 1, \dots, m$$

hvor m er antallet af delgrafer, der skal udføres induktion på. I G er $n \leq \sum_{i=1}^m n_i$, $p = \sum_{i=1}^m p_i$ og $q + 3(m - 1) = \sum_{i=1}^m q_i$, da hver delgraf (pånær G_1) har tre allerede farvede punkter, som ikke nødvendigvis tilhører P (hvis de tilhører P er de talt med en gang før). Vi har

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=1}^m n_i \leq \sum_{i=1}^m (1000(p_i - 1) + 200(q_i - 1)) \\ &= 1000 \left(\sum_{i=1}^m p_i - m \right) + 200 \left(\sum_{i=1}^m q_i - m \right) \\ &= 1000(p - m) + 200(q + 3m - 3 - m) \\ &= 1000(p - 1) - 1000(m - 1) + 200(q - 1) + 400(m - 1) \\ &\leq 1000(p - 1) + 200(q - 1). \end{aligned}$$

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Igen haves den ønskede modstrid.

Antag derfor at hverken G_1 eller de resterende delgrafer indeholder positive punkter. Af den grund vil G_1 opfylde udsagn (ii), og dermed være en kreds bestående af $j - i + 2$ punkter. Da det kun er G_1 og de to delgrafer, som indeholder v_i eller v_j , der ikke kan indeholde positive punkter, har $u \in G - C$ højst én nabo med to farver i sin liste (eller to punkter med to farver i sin liste, hvis $u \in C - P$). Hver delgraf har mindst fire punkter på den allerede farvede vej, da de ikke indeholder positive punkter. Hvis u har netop én (to hvis $u \in C$) sådan nabo, gælder der, at $q = 6$, $i = 2$ og $j = 5$, eftersom både G_1 og de to dele, som G_2 er opdelt i skal have mindst fire allerede farvede punkter. Samlet set har G kun 10 punkter (11 hvis $u \in C$), hvilket giver en modstrid med G som et modeksempel, da G har en farveplan, der opfylder udsagn (iii).

Hvis $u \in C$: Her kan u ikke have færre end to naboer, der har to farver i deres lister. Dette skyldes, at den delgraf, som ikke har fire allerede farvede punkter, har et positivt punkt jf. argumenterne fra før.

Hvis $u \in G - C$: Vi mangler tilfældet, hvor u ikke er nabo til noget punkt med to farver i sin liste (og hvor ingen af delgraferne indeholder et positivt punkt). Delgrafene G_2 har derfor mindst fire punkter, der er farvet i forvejen. Desuden opfylder den udsagn (i), (ii) eller (iii), og har derfor højst $6(q - (j - i) + 2) - 19$ punkter. Delgrafene G_1 er en kreds, og derfor har G maksimalt $6(q - (j - i) + 2) - 19 + j - i - 1 = 6q - 19 - 5j + 5i + 11$ punkter. Da $j \geq i + 3$ opfylder \mathcal{P} dermed (iii) – en modstrid.

Er det muligt at benytte induktion på G_2 uden at farve yderligere punkter er argumentationen det samme, her er blot kun to delgrafer, hvadenten G_1 eller G_2 indeholder positive eller kun negative punkter. \square

Påstand 5. Vi kan antage, at $C - P$ har mindst ét punkt med netop to farver i sin liste. Dvs. vi kan antage, at P er en vej og at $k \geq q + 3$.

Bevis. Antag modsætningsvist at intet punkt har netop to farver i sin liste; altså at alle punkter fra $C - P$ har tre farver i sin liste.

Hvis $G = C$: Alle punkter på $G - P$ pånær muligvis ét er positive. Vi er klart færdige, hvis $G = P$ ((i) er opfyldt) eller hvis P er en vej og G en kreds bestående af P samt endnu et punkt ((ii) er opfyldt). Hvis $|G - P| \geq 2$, er der mindst et positivt punkt blandt de mindst to ufarvede punkter. Da der maksimalt er ét negativt punkt blandt de ufarvede punkter, og da $p = q = 1$ ikke kan opstå, opfylder \mathcal{P} (iv).

Hvis $G \neq C$: Antag først at alle punkter på P har valens 2. Slet P fra G samt derefter rekursivt punkter med valens 1 og kald den resulterende graf for G' . Slet også de brugte farver fra de respektive

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

nabolister. Et vilkårligt punkt v på randen af den ydre region af G' , farves (det antages at være positivt i G), og pr. induktion findes en god farveplan for G' . Til sidst farves de slettede punkter med valens 2. Pånær muligvis to punkter (v_k og v_{q+1}), er alle de slettede punkter positive punkter. Farveplanen for G er således bestående først af punkterne fra P , punktet v , derefter som farveplanen for G' foreskriver, og sidst de slettede punkter. Hvis v_{q+1} og v_k er naboer og begge har valens mindst 3, så farv dem begge, så den allerede farvede vej består af disse to punkter (i stedet for v), når induktionen anvendes på G' . Eftersom G' har højst to allerede farvede punkter, har den et positivt punkt, og opfylder derfor (iv). Tilføjes P og de slettede punkter til G' , mindskes q i (iv) ikke, det positive punkt v bidrager med én til p . Antallet af negative punkter øges maksimalt med to. Ergo opfylder farveplanen for G også (iv).

Antag dernæst at et punkt på P har valens mindst 3. Hvis $q = 1$, farv v_2 (det antages at være positivt). I de næste afsnit vises det, at der findes en god farveplan, hvis $q \geq 2$. Fordi grafen kun har to farvede punkter, indeholder den et positivt punkt, så (iv) er opfyldt. Hvis v_2 ikke er farvet, er q én mindre, men p én større, så (iv) er også opfyldt med kun v_1 farvet.

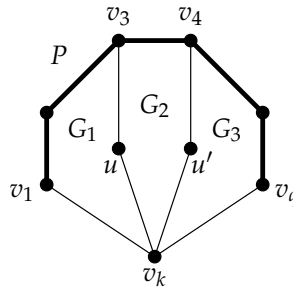
Lad derfor $q \geq 2$, og antag at $v_i \in P$, $v_i \neq v_q$ har $d(v_i) \geq 3$; eventuelt omnavngives punkterne på randen af den ydre region. Farv da v_q og betragt $G - v_q$, hvor $C(v_q)$ er fjernet fra alle naboernes lister.

Betingelser fra sætningen: (1) $d(v) \geq 2 \forall v \in C$, (2) $d(v) \geq 3 \forall v \in G - C$, (3) hvis $uv \in E \setminus P$, så har enten u eller v mindst tre farver. For at (1) er opfyldt, slettes rekursivt punkter med valens én; kald den nye graf for G' . Betingelse (2) er klart opfyldt, og jf. påstand 4 er (3) også opfyldt (alle punkter i $G - P$ antages at have tre farver), hvis $k \neq q + 1$.

Antag derfor først at $k \geq q + 2$ eller $k = q$. De slettede punkter farves efter brug af induktionsantagelsen på G' . Hvis farveplanen for G' opfylder (iv), gør farveplanen for G også, da v_q bidrager med én til q , og der er maksimalt ét negativt punkter blandt de øvrige slettede punkter. Antag derfor at farveplanen for G' opfylder (ii) (iii) – den kan ikke opfylde (i). Hvis der ikke er positive punkter blandt de slettede, opfylder farveplanen for G (iii); v_q bidrager igen med én til q , og ikke mere end 6 negative punkter kan blive slettet. Er der derimod positive punkter blandt de slettede, skal det vises, at farveplanen for G opfylder (iv). Men eftersom $q \geq 2$, kan vi tillade op til 200 ekstra negative punkter, og dette overskrides ikke, da G' højst indeholder 17 punkter og v_{q+1} og det sidst slettede er de eneste mulige negative punkter blandt de slettede.

Antag så at $k = q + 1$. Fordi $g(G) \geq 5$, er $q \geq 4$. Farv v_k (kald det er negativt i G), farv v_q , slet v_k og v_q samt rekursivt punkter med valens én, og fjern de benyttede farver fra naboernes lister. Nu øn-

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



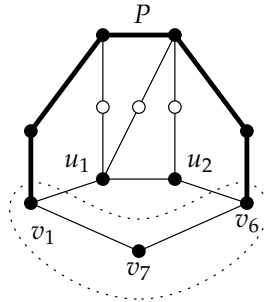
Figur 4.4: De to punkter, som kan forbinde v_7 med to punkter på P .

G' sker vi at bruge induktionsantagelsen på $G' := G - \{v_k, v_q\}$. Der kan dog eksistere et punkt $u \in G - C$, som er nabo til et punkt på P samt v_k . Hvis $k = 7$ kan der endda eksistere to sådanne punkter, u og u' , hvor u er nabo til v_3 og v_7 , mens u' er nabo til v_4 og v_7 . Eventuelle sådanne punkter farves først, og dernæst benyttes induktionsantagelsen på de tre delgrafer G_1, G_2, G_3 , som i G' afgrænses af kanterne v_3u og v_4u' ; se figur 4.4.

Først ser vi på tilfældet, hvor mindst én af delgraferne G_i har et positivt punkt; vi viser, at (iv) er opfyldt for G . Lad G_i være en delgraf med et positivt punkt. Denne slås sammen med den opadliggende delgraf G_j . Indeholder G_j også et positivt punkt, opfylder farveplanen \mathcal{P}_{ij} for den samlede graf G_{ij} (iv), fordi $q_{ij} + 3 = q_i + q_j$. Har G_j ikke et positivt punkt, opfylder G_{ij} (iv), da antallet af punkter ikke øges med mere end 17, mens antal allerede farvede punkter mindst øges med én, dvs. højresiden i (iv) forøges med 200. På denne måde tilføjes også den sidste delgraf (hvis den findes, dvs. hvis u' findes), og \mathcal{P}' opfylder derved (iv). Eftersom \mathcal{P}' opfylder (iv), gør \mathcal{P} også, da punktet v_q bidrager med én til q i (iv), mens v_k bidrager med én til n .

Tilbage er tilfældet, hvor ingen af delgraferne indeholder positive punkter. Antag at både u og u' eksisterer. Både G_1, G_2 og G_3 består kun af de punkter, som er indtegnet i figur 4.4 (på nær v_k), for er der ekstra punkter, er der mindst to i hver delgraf (fordi $G(G) \geq 5$), og mindst det ene er positivt; i dette tilfælde opfylder \mathcal{P} (iii). Antag derfor at kun u eksisterer og lad de to grafer, som G' opdeles i, være G_1 og G_2 , og antag gerne at u er nabo til v_3 (ellers omnummerér). Lad $q = 6$ (tilfældet hvor $q = 5$ følger deraf). Eftersom $g(G) \geq 5$, er der ingen kant eller vej fra u til v_4 eller v_6 , for så vil der være mindst ét positivt punkt. Der kan kun være en vej af længde to fra u til v_5 . Er der flere punkter eller kanter i G_2 , er der et positivt punkt, da delgraferne i så fald opfylder (iv). Fordi punktet på vejen mellem u og v_5 skal have valens mindst tre, eksisterer u ej heller.

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



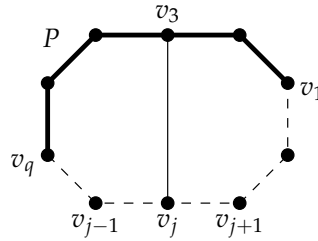
Figur 4.5: Først fjernes v_1 , v_7 og v_6 . Inden G_1 farves, fjernes u_1 og u_2 . Eksisterer de tre hvide punkter, farves de også.

Farv v_k og betragt grafen $G' := G - \{v_1, v_k, v_q\}$, hvor de brugte farver er fjernet fra de respektive nabolister. Der kan eksistere en vej, $v_1 u_1 u_2 v_q$. Punkterne u_1 og u_2 kan begge risikere at have to farver i sine lister, og da de er naboer, kan vi ikke benytte induktionsantagelsen på G' . Grafen G' opdeles derfor i to delgrafer, G_1 og G_2 , som har vejen $v_1 u_1 u_2 v_q$ fælles, hvor $P \subset G_1$. Først benyttes induktionsantagelsen på G_1 og dernæst evt. på G_2 . Inden der benyttes induktion på G_1 , farves u_1 (betragtes herefter som et positivt punkt) og u_2 (betragtes som et negativt punkt) og disse fjernes fra grafen. Farverne valgt til u_1 og u_2 fjernes fra naboernes lister. Er der punkter i G_1 , som herefter har to farver i sine lister, og er nabo til et punkt på P , farves disse også. Som det ses på figur 4.5, er der højst tre sådanne punkter, fordi $g(G) \geq 5$. Disse punkter giver anledning til maksimalt fire nye inddelinger af G_1 , hvorpå induktionsantagelsen anvendes. Da mindst én af delgraferne (eller hele G_1) ikke indeholder flere end fire allerede farvede punkter, og da der ikke kan eksistere et punkt i det indre af G , som er nabo til to punkter på P pr. påstand 4, kan ikke alle disse delgrafer være 5-kredse, og mindst én af delgraferne indeholder derfor et positivt punkt. Vha. samme argumenter som i tilfældet, hvor u og u' fandtes, vises det, at $G_1 - \{u_1, u_2\}$ opfylder (iv). Da u_1 er et positivt punkt og u_2 et negativt, opfylder G_1 også (iv).

Når G_2 farves, er u_1 og u_2 de eneste allerede farvede punkter, og G_2 har derfor et positivt punkt (eller G_2 består af kun u_1 og u_2), så farveplanen opfylder (iv). Farveplanen \mathcal{P}' opfylder også (iv), da $q' + 2 = q_1 + q_2$. Tilføjes de tre sidste punkter, v_1 , v_7 og v_6 , øges q i (iv), mens v_7 blot er et enkelt negativt punkt. Den ønskede modstrid haves, da \mathcal{P} dermed også opfylder (iv). \square

Påstand 6. Vi kan antage, at ingen kant $v_i v_j$ udgør en korde for C , medmindre $j = i + 4$ og $|L(v_{i+1})| = |L(v_{j-1})| = 2$ og dermed

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.6: Tilfældet, hvor $i = 3$. Her gælder, at $q \in \{5, 6\}$. De stiplede kanter er veje.

$|L(v_i)| = |L(v_j)| = 3$. I dette tilfælde er $v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} v_j$ punkterne på randen af en 5-region.

Bevis. Antag at $v_i v_j$ er korden for C . Vi deler op i to tilfælde. Antag først at $v_i \in P$. Opdel grafen i G_1 og G_2 med korden som fælles punkter således at $G_2 \cap P$ er minimal og lad blandt mulighederne G_2 være minimal. Da G_2 ikke indeholder flere punkter fra P end G_1 , er $i \in \{1, 2, 3\}$ (ellers omnummerér punkterne på P), og $v_q \in G_1$.

Hvis $i = 3$ benyttes først induktion på G_2 , som har tre i forvejen farvede punkter. Se figur 4.6. Vi kan nu også benytte induktion på G_1 , som maksimalt har q farvede punkter (muligvis farves v_{j-1} , hvis $|L(v_{j-1})| = 2$). Eftersom G_2 farves først, har denne kun tre allerede farvede punkter, og dermed også et positivt punkt. Benyt her argumenterne fra beviset for påstand 3 (både hvor G_1 har et positivt punkt, og hvor den ikke har).

Hvis $i < 3$, benyttes induktionsantagelsen først på G_1 , som har $q - i + 1$ farvede punkter og dernæst på G_2 , som maksimalt har fire farvede punkter (v_{j+1} farves, hvis $|L(v_{j+1})| = 2$). Bemærk at hvert punkt højst har én sådan nabo, da G_2 er punktminimal. I alle tilfælde er vi igen sikrede, at G har en god farveplan – argumenterne er som følger: Hvis enten G_1 , G_2 eller begge indeholder et positivt punkt, er argumenterne lignende de benyttede i beviset for påstand 3. Hvis hverken G_1 eller G_2 indeholder et positivt punkt og $i = 1$, har G_2 kun tre allerede farvede punkter, og er dermed sikret et positivt punkt. Eneste tilfælde tilbage er derfor $i = 2$. Nødvendigtvis har G_2 fire allerede farvede punkter og \mathcal{P}_2 opfylder derfor (ii). Derimod kan \mathcal{P}_1 opfylde både (ii) og (iii). Hvis den opfylder (ii), har G højst tre negative punkter, som ikke ligger på P , men mindst fem allerede farvede punkter, og opfylder dermed (iii). Hvis G_1 opfylder (iii), øges q med én, når G_2 tilføjes, mens antallet af nye punkter er tre. Også her opfylder \mathcal{P} (iii).

Antag derfor, at v_i og v_j har mindst to farver i sine lister. Opdel igen i G_1 og G_2 hvor korden er fælles, og hvor G_2 er punktminimal.

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Vejen P er helt indeholdt i G_1 . Først benyttes induktion på G_1 . I G_2 er v_i og v_j farvet. Er disse naboer til punkter, som kun har to farver i sine lister, farves disse også. Herefter benyttes induktionsantagelsen på G_2 . Hvis G_2 har mindst et positivt punkt, kan vi benytte samme argumenter som i beviset for påstand 3. Har G_2 derimod intet positivt punkt, opfylder \mathcal{P}_2 (ii) og dermed er G_2 en 5-kreds med fire i forvejen farvede punkter. I dette tilfælde ved vi intet om G_1 . Efter som ingen punkter fra P tilhører G_2 , kan vi i dette tilfælde ikke være sikre, at G har en god farveplan. \square

I resten af beviset antages, at $q \geq 2$. At vi kan det, skyldes, at vi i tilfældet, hvor $q = 1$ kan farve v_2 (punktet er nu positivt) og evt. v_3 , hvis $|L(v_3)| = 2$ (v_3 er nu negativt). Kan vi vise sætningen for denne graf, er den også vist for den oprindelige graf med $q = 1$, da p øges med én, og q kun mindskes med én, muligvis to.

Påstand 7. Vi kan antage, at G ikke har en vej $v_i u v_j$, hvor u ligger i $G - C$ og både v_i og v_j har to farver i sine lister.

Bevis. Antag modsætningsvis at en sådan vej findes. Opdel som før grafen i G_1 og G_2 , hvor $v_i u v_j$ er den fælles vej, og lad $P \subset G_1$. Desuden vælges G_2 punktminimal. Fordi $N(\{v_i, v_j\}) \cap C$ nødvendigvis har tre farver i sine lister, fås ved induktion en farveplan for både G_1 og G_2 , som opfylder (iv). Dette skyldes, at G_2 kun har to allerede farvede punkter og dermed indeholder et positivt punkt. Argumenterne er nu som i de forrige beviser – enten har G_1 højst 17 punkter, men mindst fire allerede farvede punkter, eller også har G_1 et positivt punkt, og med $q + 2 = q_1 + q_2$ kan den nødvendige udregning foretages. \square

Påstand 8. Vi kan antage, at G ikke har en vej $v_i u v_j$, hvor u ligger i $G - C$, hvor v_i har to farver i sin liste, og hvor $v_j \in P$.

Bevis. Antag igen modsætningsvist at en sådan vej findes. Opdel igen grafen i G_1 og G_2 , og antag at $|G_1 \cap P| \geq |G_2 \cap P|$, og at $v_q \in G_1$. Benyt induktionen og opnå en farveplan for G_1 . Herefter betragtes $v_i u v_j \cdots v_1$ som farvet, og en farveplan for G_2 opnås pr. induktion.

Hvis både G_1 og G_2 indeholder positive punkter, opfylder den samlede farveplan (iv) (benyt $q + 3 = q_1 + q_2$). Hvis G_1 indeholder et positivt punkt og G_2 ikke gør, opfylder den samlede farveplan også (iv), fordi $q_2 \in \{4, 5\}$ og $|G_2| \leq 17$. Antag derfor at G_1 ikke indeholder noget positivt punkt. Antag desuden at G_2 har et positivt punkt. Bemærk at kun (iii) kan være opfyldt for farveplanen for G_1 , fordi de to punkter v_i og u ikke er på P ; dvs. $q_1 \geq 5$. Fordi q øges med mindst to (og $n_2 \leq 17 < 200$), opfylder også den samlede farveplan (iv).

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Hvis både G_1 og G_2 kun har negative punkter, så er $j > 1$. Desuden har G_1 højst $6(q - j + 1) - 19$ punkter og G_2 har højst $6(j + 2) - 19$ punkter. Dvs. G har højst $6(q - j + 1) - 19 + 6(j + 2) - 19 - 3 = 6q - 23 < 6q - 19$ punkter, og (iii) er således opfyldt. \square

Påstand 9. Vi kan antage, at v_{q+2} har netop to farver i sin liste, og at v_{q+2} dermed er den eneste nabo til v_{q+1} , som har netop to farver i sin liste.

Bevis. Antag modsætningsvist at v_{q+2} har tre farver i sin liste. Betragt da $G - v_q$, hvor farven til v_q er fjernet fra alle dens naboers lister. Hvis der i $G - v_q$ er punkter med valens 1, slettes disse punkter rekursivt, hvorved G' opnås. Vi anvender induktionen på G' , hvilket er muligt jf. påstand 4 og 8, og får en farveplan \mathcal{P}' . Hvis $P \cap G' = \emptyset$, farves et punkt på G' – om muligt et punkt med netop to farver, hvilket sikrer, at induktionen kan anvendes. Dernæst farves de slettede punkter.

Hvis (iii) er opfyldt for \mathcal{P}' : Da er $q = 6$ (og v_q er det eneste punkt fra P , som er slettet). Hvis v_{q+2} er blandt de rekursivt slettede punkter ($v_{q+2} \notin G'$), så er det fordi v_{q+1} også er blevet slettet. I så fald er (iv) opfyldt, fordi G' er lille, og enten v_{q+1} eller v_{q+2} i G er et positivt punkt, og for hvert par af naboer, som blev slettet, er mindst én af dem positive. Hvis v_{q+2} ikke er slettet, så opfylder farveplanen for G (iii) fordi q øges med én i uligheden – og er v_{q+2} ikke fjernet, er der fjernet højst $2 < 6$ punkter. (Netop ét punkt fra P og evt. også v_{q+1} .)

Hvis (iv) er opfyldt for \mathcal{P}' : For hvert punkt fra P som fjernes, kan der være 200 ekstra negative punkter, uden at ulighedens rigtighed påvirkes. Så antag gerne at kun v_q fra P blev slettet; hvis punkter, som ikke ligger på P , er blevet slettet, gælder følgende argument. For hver to punkter på $C - P$ som slettes, er højst ét negativt. Følgelig kan kun v_{q+1} slettes uden at p øges i uligheden i (iv). Da q øges med mindst én, opfylder farveplanen for G også (iv).

Derfor har v_{q+2} højst to farver i sin liste. Jf. påstand 5 er v_{q+2} ikke et punkt fra P , så antag at v_{q+2} har netop to farver i sin liste (hvormed første udsagn fra påstanden er vist). Ved brug af påstand 6 fås, at ethvert punkt på C , som er nabo til v_{q+1} , har tre farver, hvilket afslutter beviset for påstanden. \square

Antag herfra, at $|L(v_{q+2})| = 2$ og følgelig også, at $|L(v_{q+3})| = 3$.

I de følgende beviser benytter vi ofte enten argumenter lignende dem i beviset for påstand 9 eller også fjerner vi et punkt fra P inden vi bruger induktion på to delgrafer, G_1 og G_2 . Dette gøres for at sikre, at q øges med én, når vi til sidst ser på en farveplan til G . På den måde kan vi håndtere et større $|G|$ i (iii) og et større n i (iv).

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Påstand 10. Vi kan antage, at G ikke har en vej $v_{q+1}uv_i$, hvor $u \neq v_q$ og v_i højst har to farver i sin liste, medmindre $q = 6$ og $i = 4$.

Bevis. Antag modsætningsvist at en sådan vej eksisterer. Alle tre punkter på vejen kan ikke ligge på C , da dette ville medføre, at $v_i = v_{q+3}$, hvilket er i modstrid med antagelsen om, at $|L(v_{q+3})| = 3$. Vi kan heller ikke risikere, at uv_i er en korde til C , da der i så fald gælder, at $u = v_{q+2}$, og dette er i modstrid med påstand 6. Opdel G i G_1 og G_2 , hvor $v_q \in G_1$, og hvor v_{q+1} , u og v_i (hvis $u \in G - C$) eller v_{q+1} og u (hvis $u \in C$) er de fælles punkter. Vælg desuden v_i således at G_2 er punktminimal. G_1, G_2

Først betragtes tilfældet, hvor $v_i \notin P$. Her benyttes induktionsantagelsen først på $G_1 - v_q$, hvor $\mathcal{C}(v_q)$ er fjernet fra nabolisterne. Jf. påstand 4, 6 og 8 opfylder $G_1 - v_q$ betingelserne i sætning 35. Herefter benyttes induktionsantagelsen på G_2 , hvor eventuelle punkter med to farver i sine lister, som er nabo til et allerede farvet punkt også farves. Til sidst tilføjes punktet v_q igen til grafen. At den samlede farveplan er god, vises ved at inddele i yderligere to tilfælde, nemlig hvorvidt u tilhører C eller ej.

Hvis $u \in C$: Jf. påstand 6 er $u = v_{q+5}$ og $|L(u)| = 3$ og det indre af $v_{q+1} \cdots v_{q+5}$ er tomt. Bemærk at når induktionsantagelsen benyttes på G_2 , er fire punkter allerede farvet, fordi v_{q+2} og v_{q+4} jf. påstand 6, netop har to farver i sine lister. Farveplanen \mathcal{P}_2 opfylder (ii), fordi G_2 er en 5-kreds. Hvadenten $G_1 - v_q$ indeholder et positivt punkt eller ej, tilføjes netop tre negative punkter samt v_q og dermed er \mathcal{P} en god farveplan.

Hvis $u \notin C$: Inden induktionsantagelsen benyttes på G_2 , farves v_{q+2} , da $|L(v_{q+2})| = 2$. Punktet er nu negativt i G . Da v_i kun har to farver i sin liste, er netop fire punkter allerede farvet i G_2 , og denne delgraf opfylder (ii) eller (iv). Hvis både $G_1 - v_q$ og G_2 indeholder positive punkter, er $q + 5 = q_1 + q_2$, og dette sikrer, at (iv) er opfyldt for \mathcal{P} . Hvis $G_1 - v_q$ indeholder et positivt punkt, og G_2 ikke gør, opfylder \mathcal{P}_2 (ii) og G_2 er dermed en 5-kreds. Eftersom G_2 bidrager med højst tre negative punkter og punktet v_q altid bidrager med én til q , opfylder \mathcal{P} igen (iv). Antag derfor at $G_1 - v_q$ ikke har et positivt punkt. Delgrafene har derfor en farveplan, som opfylder (iii) og indeholder højst 17 punkter. Desuden er $q \geq 5$ i $G_1 - v_q$. Antag desuden at G_2 har et positivt punkt, således at \mathcal{P}_2 opfylder (iv). Der gælder her, at $q_1 = 5$. Dette opvejer derfor de fire allerede farvede punkter i G_2 , som ikke er farvede i G , og \mathcal{P} opfylder (iv). Hvis både $G_1 - v_q$ og G_2 kun har negative punkter, opfylder \mathcal{P} (iii), fordi $G_1 - v_q$ har en farveplan, som opfylder (iii) og i alt tilføjes fire punkter (tre fra G_2 samt v_q) til G_2 , mens q samtidig øges med én (v_q).

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Nu til tilfældet, hvor $v_i \in P$. Eftersom $g(G) \geq 5$, er $i \leq 4$. Hvis u ligger på C , ligger u enten på P , eller også er $v_i = v_1$ og $u = v_k$. Første tilfælde er i modstrid med påstand 6, mens andet tilfælde følger af samme argumenter, som hvor $v_i \notin P$ og $u \in C$. Antag derfor, at $u \notin C$. Betragt først tilfældet, hvor $1 \leq i \leq 3$. Hvis $i = 1$ betragtes igen $G_1 - v_q$, og argumenterne er som i tilfældet, hvor $v_i \notin P$ og $u \notin C$, antag derfor at $2 \leq i \leq 3$. Nu farves v_{q+1} , og eftersom $i \in \{2, 3\}$, opfylder G_1 stadig betingelserne i sætningen. Punktet v_{q+1} er positivt i G , fordi G_1 med v_{q+1} farvet har en god farveplan. Derfor har G altid positivt punkt, og vi viser derfor, at G har en farveplan, som opfylder (iv). Har begge delgrafer et positivt punkt, kan den nødvendige udregning foretages med $q + 4 = q_1 + q_2$. Har kun G_1 et positivt punkt, bidrager G_2 med højst 17 punkter i alt, q mindskes ikke, men p øges med én pga. v_{q+1} . Har derimod kun G_2 et positivt punkt, så har G_1 (med v_{q+1} farvet) mindst fire allerede farvede punkter. Når grafen G_1 føjes til G_2 (så vi har G), er v_{q+1} , v_{q+2} og u ikke blandt de allerede farvede punkter mere, men mindst to andre punkter på G_1 er derimod farvet i stedet. Punktet v_{q+1} er et positivt punkt, og bidrager derfor med 1000 til højresiden af (iv). Hele grafen opfylder derfor også (iv) i dette tilfælde. Et sidste tilfælde er hvor hverken G_1 eller G_2 indeholder et positivt punkt. Tilsammen har G maksimalt $2 \cdot 17 = 34$ punkter. Da $i \in \{2, 3\}$ har G derfor mindst to farvede punkter og højresiden i (iv) er mindst $200 > 34$.

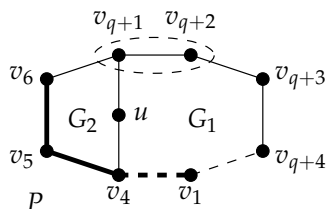
Hvis $i = 4$ (og derfor $q = 6$) kan vi ikke benytte induktion først på G_1 og dernæst G_2 , da G_2 i så fald har syv allerede farvede punkter. Denne vej er den eneste tilbageværende mulighed. \square

Påstand 11. Vi kan antage, at $|L(v_{q+4})| \leq 2$.

Bevis. Antag modsætningsvist, at $|L(v_{q+4})| = 3$. Farv punkterne v_{q+1} (antag det er positivt i G) og v_{q+2} (antag det er negativt i G), og fjern punkterne fra G . Fjern desuden $\mathcal{C}(v_{q+1})$ og $\mathcal{C}(v_{q+2})$ fra de respektive nabolister. Evt. fremkomne punkter med valens 1 fjernes også, indtil vi har en graf uden 1-punkter. Denne graf kaldes G' . Kan vi benytte induktionsantagelsen på G' , gøres dette.

Antag at induktionsantagelsen kan benyttes. Hvis G' har et positivt punkt, således at \mathcal{P}' opfylder (iv), opfylder \mathcal{P} også (iv), da vi tilføjer ét positivt punkt og ét negativt. Muligvis tilføjes også nogle punkter med valens 1, men blandt disse er højst hvert andet punkt ikke tilhørende P negativt (hvis kun v_{q+3} fjernes, består vejen kun af ét negativt punkt, men dette er okay, da v_{q+1} tillader 1000 ekstra negative punkter). Hvis G' kun indeholder negative punkter, er $q \geq 4$ og $|G'| \leq 17$. Når vi tilføjer de slettede punkter, får vi mindst ét

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.7: Et punkt $u \in G - C$, som er nabo til v_{q+1} og v_4 .

positivt punkt, og da $q \geq 4$, kan vi tillade op til 600 negative punkter. Igen spiller negative punkter på en evt. slettet vej ingen rolle, da højst hvert andet punkt, som ikke tilhørende P , er negativt, hvis flere end to punkter slettes. Igen kan vejen dog bestå af ét negativt punkt, nemlig v_{q+3} , men vi overskrider stadig ikke de 600 ekstra negative punkter. Slettede punkter fra P er heller intet problem, da disse bidrager med én til antallet af negative punkter, men også med én til q .

Hvis hele P slettes, farves et punkt v' på randen af G' med to farver i sin liste. Hvis intet 2-punkt findes, farves et vilkårligt punkt på randen af G' . Punktet v' er positivt i G . Når de slettede punkter tilføjes, er v' positivt, og dette kompenserer for, at punktet ikke længere er farvet.

Antag at vi ikke kan benytte induktionsantagelsen. Hvis den ikke kan bruges på G' skyldes det, at et punkt $u \in G - C$ er nabo til v_{q+1} eller v_{q+2} og et andet punkt på C , som har to eller færre farver i sin liste. Jf. påstand 7 og 8 kan u ikke være nabo til v_{q+2} , fordi $|L(v_{q+2})| = 2$, og u er derfor nabo til v_{q+1} . Bruges påstand 10 ses det, at den anden nabo er v_4 og at $q = 6$, dvs. $v_{q+1} = v_7$. Se figur 4.7. Farv u (punktet er negativt i G' og i G). Grafen G' er herefter opdelt i to delgrafer. Kredsen $v_1 \dots v_4 u \dots v_1$ og dens indre kaldes G_1 , mens den resterende del af G' kaldes G_2 . Først benyttes induktionsantagelsen på G_1 og dernæst på G_2 .

Bemærk at G_2 har fire allerede farvede punkter, og dermed kan \mathcal{P}_2 opfylde både (ii) eller (iv). Dog kan G_2 ikke være en 5-kreds, da dette ville skabe en 4-kreds i G ($uu'v_6v_7$, hvor u' er det ufarvede punkt i 5-kredsen). Derfor har G_2 altid et positivt punkt. Hvis også G_1 har et positivt punkt, kan den nødvendige udregning foretages med $q + 3 = q_1 + q_2$, således at \mathcal{P}' opfylder (iv). Som før skrevet kan vi nu tilføje de slettede punkter, og \mathcal{P} opfylder også (iv). Antag derfor at G_1 ikke indeholder et positivt punkt. Når G_1 og G_2 sættes sammen, er u ikke farvet længere, men til gengæld bidrager G_1 med tre til q i kraft af v_1, v_2 og v_3 . Dette øger højresiden i (iv) med 600,

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

mens venstresiden højst øges med 17. Igen tilføjes de slettede punkter, og \mathcal{P} opfylder dermed (iv). Hvis G_2 blot består af punkterne v_6 , v_5 , v_4 og u , fjernes v_5 og v_6 , da de begge er 2-punkter. Efter induktionsantagelsen er anvendt på G_1 tilføjes blot de slettede 2-punkter (både v_5 og v_6 bidrager til q) samt v_{q+1} og v_{q+2} . \square

I de følgende beviser farves ofte punkter, som derefter fjernes fra grafen. Hvis der i disse situationer opstår punkter af valens 1, fjernes disse punkter også (som i beviset for påstand 11). Disse veje spiller ingen rolle i argumentationen, da højst hvert andet punkt, som ikke ligger på P , er negativt, medmindre kun ét punkt fjernes. I tilfældet, hvor kun ét punkt fjernes, går det godt, da det i hver situation viser sig, at vi kan tillade mindst et yderligere negativt punkt. Hvis hele P er blandt de slettede punkter, farves et velvalgt punkt i den tilbageværende graf, som herefter er positivt.

Påstand 12. Vi kan antage, at G ikke har en vej $v_{q+3}uv_i$, hvor v_i har netop to farver i sin liste.

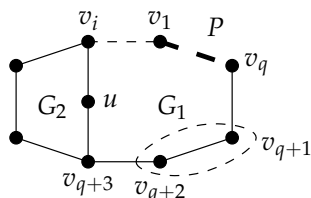
Bevis. Antag modsætningsvist at en sådan vej eksisterer. Punktet u kan ikke være v_{q+2} eller v_{q+4} , da begge disse punkter har to farver i sin liste, hvilket giver en modstrid med påstand 6. Vejen inddeler grafen i to delgrafer G_1 og G_2 , hvor $P \subset G_1$ og hvor G_2 er punktminimal. Først benyttes induktionsantagelsen på G_1 og dernæst på G_2 . Delgrafen G_2 vil altid indeholde netop fire allerede farvede punkter. Hvis $u \in G - C$ er v_{q+3} , u , v_i og v_{q+4} farvet i G_2 , da $|L(v_i)| = |L(v_{q+4})| = 2$. Hvis $u \in C$ er $u = v_{q+7}$ og $|L(v_{q+4})| = |L(v_{q+6})| = 2$ jf. påstand 6. Derfor farves v_{q+3} , v_{q+4} , v_{q+6} og $u = v_{q+7}$. Følgende argumenter gælder både for $u \in G - C$ og $u \in C$.

Betragt først tilfældet hvor G_2 indeholder et positivt punkt. Hvis også G_1 indeholder et positivt punkt, benyttes $q + 4 = q_1 + q_2$ og \mathcal{P} opfylder (iv). Hvis G_1 derimod ikke har et positivt punkt gøres følgende. Eftersom \mathcal{P}_1 ikke kan opfylde (ii), da hverken v_{q+3} eller u (og ej heller v_i i tilfældet hvor $u \in G - C$) er farvet, er $q_1 \geq 5$, og \mathcal{P}_1 opfylder derfor (iii). Når G_1 tilføjes G_2 , er de fire allerede farvede punkter fra G_2 ikke farvede længere, men $q_1 \geq 5$, så (iv) gælder for \mathcal{P} .

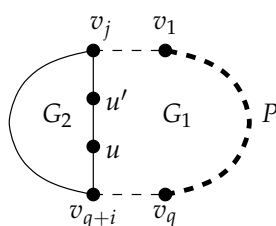
Antag derfor at G_2 intet positivt punkt har. Ergo er G_2 en 5-kreds. Resten af beviset følger vha. de samme argumenter som i beviset for påstand 11. Inden induktionen anvendes på G_1 , farves v_{q+1} og v_{q+2} (v_{q+1} antages at være positivt). Fjern punkterne fra grafen og fjern $\mathcal{C}(v_{q+1})$ og $\mathcal{C}(v_{q+2})$ fra de respektive nabolister. Se også figur 4.8.

G' Lad $G' := G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$. Jf. påstand 6-10 og eftersom $|L(u)| = 3$, opfylder G' betingelserne i sætningen, medmindre vejen $v_{q+1}u^*v_4$ eksisterer, hvor $u^* \in G - C$. Antag at denne vej ikke findes. Først tilfældet hvor \mathcal{P}' opfylder (iv). Punkterne v_{q+4} , v_{q+5} og v_{q+2} (og v_{q+6} ,

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.8: Tilfældet, hvor G_2 er en 5-kreds og hvor $u \in G - C$.



Figur 4.9: Situationen i påstand 13.

hvis $u \in C$) er muligvis alle negative, men da vi også tilføjer mindst ét positivt punkt (v_{q+1}), opfylder \mathcal{P} (iv). Antag derfor at G' intet positivt punkt har. Vi kan igen slutte, at $q' \geq 5$, og vi kan derfor tillade 800 ekstra negative punkter i G , som har et positivt punkt. Antallet af negative punkter er dog højst $17 + 4 = 21$. Dermed haves den ønskede modstrid.

Hvis vejen $v_{q+1}u^*v_4$ findes, gøres nøjagtigt som i beviset for påstand 11, hvor u findes, og vi får igen, at G' har en god farveplan. \square

Påstand 13. Vi kan antage, at G ikke har en vej $v_{q+i}uu'v_j$, hvor $u, u' \in G - C, |L(v_j)| = 2$ og $i \in \{1, 2, 3\}$.

Bevis. Igen antages det modsætningsvist, at en sådan vej findes. Grafen opdeles i to delgrafer, G_1 og G_2 , hvor vejen $v_{q+i}uu'v_j$ er fælles, hvor $P \subset G_1$ og hvor G_2 er punktminimal. Situationen ses på figur 4.9. Vi ser på to tilfælde: $i = 1$ og $i \in \{2, 3\}$.

Hvis $i = 1$: Farv v_{q+1} (punktet antages at være positivt i G) og fjern punktet fra grafen. Fjern også $\mathcal{C}(v_{q+1})$ fra nabolisterne. Påstand 6 og 10 (en evt. vej $v_{q+1}u^*v_4$, hvor $u^* \in G - C$, omgås på samme måde som i beviset for påstand 11 og 12) sikrer, at $G_1 - v_{q+1}$ opfylder betingelserne i sætningen. Først benyttes induktionsantagelsen på $G_1 - v_{q+1}$, dernæst tilføjes v_{q+1} igen, og induktionsantagelsen bruges på G_2 . Delgrafen G_2 har fem allerede farvede punkter, da $|L(v_{q+2})| = 2$, og v_{q+2} farves derfor sammen med v_{q+1}, u, u' og v_j .

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Hvis $G_1 - v_{q+1}$ indeholder et positivt punkt, opfylder \mathcal{P}_1 også (iv), da v_{q+1} bidrager med én til p i (iv). Har G_2 også et positivt punkt, benyttes $q + 5 = q_1 + q_2$ og uligheden i (iv) fås. Har G_2 ikke et positivt punkt, tilføjes højst 17 punkter til $G_1 - v_{q+1}$, men da v_{q+1} bidrager med én til p , tillades yderligere 1000 negative punkter, så \mathcal{P} opfylder (iv). Antag derfor at $G_1 - v_{q+1}$ ikke indeholder et positivt punkt. Af den grund har $G_1 - v_{q+1}$ mindst fire allerede farvede punkter. Eftersom G_1 højst indeholder 17 negative punkter, opfylder \mathcal{P}_1 altid (iv). Hvis G_2 har et positivt punkt, benyttes $q + 5 = q_1 + q_2$ og uligheden i (iv) fås. Har G_2 intet positivt punkt, tilføjes højst 17 ekstra punkter. Da $2 \cdot 17 + 1 < 600 \leq 1000(p - 1) + 200(q - 1)$, har vi den ønskede modstrid.

Hvis $i \in \{2, 3\}$: Her farves v_{q+1} og v_{q+2} (punktet v_{q+1} antages at være positivt i G) og disse punkter fjernes fra grafen. Vi kan ikke blot fjerne v_{q+1} , som i tilfældet med $i = 1$, da $|L(v_{q+2})| = 2$, og dette punkt er nu med i G_1 . Fjern også $\mathcal{C}(v_{q+1})$ og $\mathcal{C}(v_{q+2})$ fra de respektive nabolister. Påstand 6-11 (en evt. vej $v_{q+1}u^*v_{q+2}$, hvor $u^* \in G - C$, omgås på samme måde som i beviset for påstand 11 og 12) sikrer, at $G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$ opfylder betingelserne i sætningen. Induktionsantagelsen benyttes på $G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$, og dernæst tilføjes de to slettede punkter og induktionsantagelsen benyttes på G_2 . Delgraf G_2 har fem allerede farvede punkter, hvis $i = 3$, men kun fire, hvis $i = 2$, eftersom $|L(v_{q+2})| = 2$. Argumenterne for at \mathcal{P} altid opfylder (iv) er som i tilfældet med $i = 1$. Eneste nævneværdige forskel er, at v_{q+2} også er et negativt punkt, så der tilføjes 18 punkter (i stedet for 17) når G_2 tilføjes. \square

Påstand 14. Vi kan antage, at $q \geq 5$.

Bevis. Er $q \leq 4$, farves v_{q+1} og v_{q+2} (punktet v_{q+1} antages at være positivt i G). Kan vi vise, at sætningen gælder for denne graf med $q + 2$ farvede punkter, gælder den også for grafen med q farvede punkter, da vi tilføjer mindst et positivt punkt og højst et negativt. Bemærk at det ikke er nok blot at farve v_{q+1} , da $|L(v_{q+2})| = 2$. \square

Påstand 15. Vi kan antage, at et punkt $v \in P$ forskelligt fra v_q er et ≥ 3 -punkt.

Bevis. Hvis alle punkter på P er 2-punkter, bortset fra muligvis v_q , fjernes v_3 fra G (eftersom $q \geq 5$, er det altid muligt). Hvis $\mathcal{C}(v_2) \neq \mathcal{C}(v_4)$ indsættes en kant mellem de to punkter, ellers sammentrækkes de til ét punkt. På den måde er de allerede farvede punkter i den nye graf stadig en vej, der ligger på C , og induktionsantagelsen kan således benyttes derpå. Hvis ikke alle punkter på P er 2-punkter, kan vi risikere, at den nye graf ikke længere har girth mindst 5. \square

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Med disse påstande er det muligt at færdiggøre beviset. Resten af beviset forløber således: Vi ønsker induktivt at få en god farveplan for $G - \{v_q, \dots, v_{q+3}\}$. Hvis ikke induktionen kan benyttes på denne graf, ser vi på de tre tilfælde, som kan være årsag hertil – tilfælde (a), (b) og (c). I tilfælde (a) og (b) opdeles grafen i to delgrafer; induktionen bruges på hver af disse. I tilfælde (c) opdeles grafen ligeså, men vi er ikke sikret, at induktionsantagelsen kan benyttes på begge delgrafer. Igen ser vi på tre (dækkende) tilfælde, som kan være årsag til, at induktionsantagelsen ikke kan benyttes – tilfælde (c.1), (c.2) og (c.3).

Først farves v_{q+3} med en farve fra $L(v_{q+3}) \setminus L(v_{q+4})$. Dernæst farves v_{q+2} og v_{q+1} . Fjern punkterne v_{q+i} fra grafen og fjern også $\mathcal{C}(v_{q+i})$ fra de respektive nabolister for $i = 0, 1, 2, 3$. Punkterne v_{q+3} , v_{q+2} og v_{q+1} er alle negative i G og optræder i den nævnte rækkefølge i \mathcal{P} . Definér $Q := \{v_q, v_{q+1}, v_{q+2}, v_{q+3}\}$. Hvis der opstår 1-punkter, fjernes disse, indtil alle punkter er ≥ 2 -punkter. De slettede punkter farves til sidst. Kald den nye graf G' . Hvis det er muligt, benyt da induktionsantagelsen på G' . Antag først, at 1-punkter ikke forekommer, når Q fjernes.

Eftersom der tilføjes et punkt til P og højst tilføjes tre andre negative punkter, er \mathcal{P} god, hvis \mathcal{P}' er en god farveplan: Hvis \mathcal{P}' opfylder (i)-(ii), er $|G| < 17$ – og $q = 6$, så \mathcal{P} opfylder (iii). Hvis \mathcal{P}' opfylder (iii), gør \mathcal{P} også, fordi $q = q' + 1$. Hvis \mathcal{P}' opfylder (iv), bemærkes at $q = q' + 1$, så også \mathcal{P} opfylder (iv).

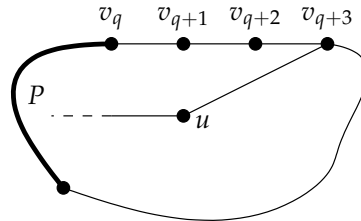
Hvis en evt. vej fjernes, er to nabopunkter ikke begge negative, medmindre de ligger på P (hvormed hver punkt også bidrager med én til q). En sådan vej er derfor aldrig et problem, medmindre kun v_{q+4} fjernes (vejen består derved kun af negative punkter). Her fjernes dog i alt kun fem negative punkter, mens q øges med én.

Antag derfor at G' ikke opfylder betingelserne i sætningen. Der er tre muligheder for hvordan det kan ske:

- (a) En vej $v_q u v_{q+3}$, hvor $u \in G - C$.
- (b) En vej $v_i u v_j$, hvor $v_i \neq v_q$ har højst to farver i sin liste, hvor $u \in G - C$ og hvor $v_j \in Q$.
- (c) En vej $v_j u u' v_k$, hvor $v_j, v_k \in Q$ og hvor $u, u' \in G - C$.

I tilfælde (a) kan u have kun én farve tilbage i sin liste efter $\mathcal{C}(v_q)$ og $\mathcal{C}(v_{q+3})$ er fjernet fra $L(u)$. I tilfælde (b) kan u have kun to farver tilbage i sin liste (efter nabopunktet v_j er blevet farvet og dens farve er slettet fra $L(u)$), og er nabo til endnu et punkt v_i med højst to farver i sin liste. I tilfælde (c) kan naboerne u og u' begge have to farver tilbage i sin liste, fordi $\mathcal{C}(v_j)$ og $\mathcal{C}(v_k)$ er fjernet fra hhv. $L(u)$ og $L(u')$.

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.10: Et punkt u er nabo til et punkt v_i på P samt v_{q+3} .

Bemærk at Q ikke nødvendigvis fjernes, når disse tre tilfælde behandles.

G_1, G_2 **Ad (a).** I dette tilfælde inddeler $v_q u v_{q+3}$ G i to delgrafer, G_1 og G_2 , hvor $P \subset G_1$. Først benyttes induktion på $G_1 - v_q$ og dernæst på G_2 . Jf. påstand 4 og 8 opfylder $G_1 - v_q$ betingelserne i sætningen. Hvis G_2 kun indeholder v_q, u, v_{q+3}, v_{q+2} og v_{q+1} , behøver vi ikke anvende induktion på G_2 ; v_{q+1} og v_{q+2} skal blot tilføjes G_1 . Disse er begge negative, men opvejes af at v_q bliver tilføjet til G_1 , så den samlede farveplan er god. Følgelig er G_2 ikke en 5-kreds, og opfylder dermed ikke (ii). Da G_2 har fire allerede farvede punkter, indeholder den et positivt punkt, og \mathcal{P}_2 opfylder dermed (iv).

Hvis også G_1 ($G_1 - v_q$ har en god farveplan, og da v_q bidrager med én til q og én til n , er \mathcal{P}_1 også en god farveplan) indeholder et positivt punkt, benyttes $q + 4 = q_1 + q_2$. Hvis derimod G_1 ikke har et positivt punkt, indeholder grafen højst 17 punkter. Punkterne u, v_{q+3} og v_{q+2} er ikke længere farvet i G , men $q_1 \geq 5$, så q øges med mindst én, hvilket sikrer, at \mathcal{P} også opfylder (iv).

Antag derfor at ingen sådan vej eksisterer.

Ad (b). Antag først at v_i har netop to farver i sin liste. Påstand 7 og 8 giver os, at v_j hverken er v_{q+2} eller v_q , som har hhv. to og én farve i sin liste. Og ifølge påstand 10 og 12 er v_j ej heller v_{q+1} eller v_{q+3} .

Antag derfor at v_i har præcis én farve i sin liste. Vi ser på de fire tilfælde for $v_j \in Q$. Fordi $k \geq q + 3$, følger af påstand 4, at $v_j \neq v_q$, og ifølge påstand 8 er $v_j \neq v_{q+2}$. Der er derfor tilfældene, hvor $v_j = v_{q+3}$ og $v_j = v_{q+1}$ tilbage.

G_1, G_2 **Hvis $v_j = v_{q+3}$:** Situationen er som i figur 4.10. Lad G_1 og G_2 have $v_i u v_{q+3}$ fælles og lad $G_2 \cap P$ være minimal. Udfør så induktionen først på G_1 og siden på G_2 . Vi opdeler i to tilfælde: $j \geq 4$ og $j \leq 3$.

Antag først at $j \geq 4$. Dvs. $G_1 \ni v_1$. Farv u og antag det er positivt. Benyt så induktionsantagelsen på G_1 og få en god far-

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

veplan som opfylder (iv) pga. u , hvilket er muligt jf. påstand 4 og 8. Derefter bruges induktionsantagelsen på G_2 , hvor nu $v_{q+2}uv_j \cdots v_q$ udgør den forfarvede vej. Den samlede farveplan er god fordi: Hvis G_2 også indeholder et positivt punkt, så er $q+4 = q_1 + q_2$. Hvis derimod G_2 kun har negative punkter, fås (iv), fordi $j < q$, så q øges.

Antag så at $j \leq 3$. Dvs. $G_1 \ni v_q$. Benyt samme strategi på G_1 , som i beviset for påstand 11, og få, at G_1 indeholder et positivt punkt, så \mathcal{P}_1 opfylder (iv). Den forfarvede vej i G_2 er i dette tilfælde $v_1 \cdots v_j uv_{q+3} v_{q+4}$. Igen er den samlede farveplan god fordi: Hvis G_2 også indeholder et positivt punkt, så er $q+4 = q_1 + q_2$, så \mathcal{P} opfylder (iv). Hvis derimod \mathcal{P}_2 opfylder (ii), er $v_j = v_1$, men \mathcal{P} opfylder stadig (iv) fordi argumenterne fra 11 giver os et ekstra positivt punkt, som fordi \mathcal{P}_1 opfylder (iv) giver mulighed for op til 1000 ekstra negative punkter. Slutteligt, hvis \mathcal{P}_3 opfylder (iii), øges q pga. v_1 , så \mathcal{P} opfylder (iv).

Hvis $v_j = v_{q+1}$: Ifølge påstand 10 er $v_i = v_4$ (og $q = 6$). Farv da u og benyt induktion på $G' := G - Q$, hvor også 1-punkter rekursivt er fjernet fra G' . Opdel G' i to grafer: G_1 , som er grafen afgrænset af $uv_4v_3 \cdots$, og G_2 , som er grafen afgrænset af uv_4v_5 . Induktionen anvendes først på G_1 (hvilket er muligt jf. påstand 10) og siden på G_2 .

Muligvis består G_2 kun af punkterne u, v_4 og evt. v_5 . I så fald er v_5 evt. det eneste negative punkt, som tilføjes, og en god farveplan for G_1 udvides derfor nemt til at gælde G' . Antag derfor at G_2 indeholder flere punkter end u, v_4 og v_5 . Det vises, at \mathcal{P}' er god; vi ved fra tidligere, at \mathcal{P}' kan udvides til en god farveplan for hele G .

Fordi G_2 kun har tre farvede punkter, opfylder \mathcal{P}_2 pr. induktion (iv). Hvis \mathcal{P}_1 opfylder (i)-(iii), så opfylder \mathcal{P}' (iv), fordi $q' = q_2 + 2$ og $|G_1| \leq 17$. Hvis \mathcal{P}_1 opfylder (iv), gør \mathcal{P}' også, fordi $q+2 \geq q_1 + q_2$.

Antag derfor at ingen sådan vej eksisterer.

Ad (c). Fordi $g(G) \geq 5$, er der kun tre sådanne veje: $v_q uu' v_{q+3}$, $v_q uu' v_{q+2}$ eller $v_{q+1} uu' v_{q+3}$. Opdel grafen i to delgrafer G_1 og G_2 , hvor $P \subset G_1$. Vælg deres fælles vej, som den vej $v_q uu' v_{q+3}$, som gør G_2 punktmaksimal, hvis vejen findes. Ellers vælg den vej af de to andre typer (kun en af disse to typer findes), som gør G_2 punktmaksimal. Først argumenteres for, at vejene $v_q uu' v_{q+3}$ og $v_q uu' v_{q+2}$ ikke kan eksistere. Antag modsætningsvist at $v_q uu' v_{q+3}$ eller $v_q uu' v_{q+2}$ eksisterer.

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Først benyttes induktionsantagelsen på $G_1 - v_q$ (hvor $\mathcal{C}(v_q)$ er fjernet fra nabolisterne), så tilføjes v_q , og til sidst benyttes induktionsantagelsen på G_2 . Jf. påstand 4 (at u ikke har en anden nabo på P) og 8 (at u ikke har en anden nabo på $C - P$ med to farver i sin liste) opfylder $G_1 - v_q$ betingelserne i sætningen. Delgraften G_2 har fire eller fem allerede farvede punkter, da $|L(v_{q+2})| = 2$, og v_{q+2} farves derfor i G_2 inden induktionsantagelsen benyttes, hvis vejen er $v_q u u' v_{q+3}$. Er den fælles vej $v_q u u' v_{q+2}$, er der kun fire allerede farvede punkter.

Hvis $G_1 - v_q$ har et positivt punkt, har G_1 også et positivt punkt, da v_q er et allerede farvet punkt. Hvis også G_2 har et positivt punkt, benyttes $q + 4 = q_1 + q_2$ eller $q + 5 = q_1 + q_2$, alt efter hvilken vej, der eksisterer. Hvis $G_1 - v_q$ har et positivt punkt, og G_2 ikke har, tilføjes én til q i (iv) i form af v_q , og vi kan derfor tillade 200 ekstra negative punkter. Delgraften G_2 indeholder højst 17 punkter. Dog er v_q også et negativt punkt, men ikke overraskende er $200 > 18$. Derfor er (iv) opfyldt for \mathcal{P} .

Antag derfor at $G_1 - v_q$ ikke indeholder et positivt punkt og at G_2 har et positivt punkt. Når G_1 og G_2 sættes sammen, er u, u', v_{q+2} og muligvis v_{q+3} ikke længere farvede. Vi ser på to tilfælde: Hvis $q = 6$, øges q med mindst én, når G_1 tilføjes. Hvis derimod $q = 5$, har $G_1 - v_q$ fire farvede punkter, hvorfor den indeholder et positivt punkt. Således er vi tilbage i foregående tilfælde. (Farveplanen kan ikke opfylde (ii), fordi der så skulle eksistere et punkt i $G - C$, som (i modstrid med påstand 6) er nabo til to punkter på P .)

Vi mangler kun tilfældet, hvor ingen af delgraferne indeholder et positivt punkt. Der gælder, at \mathcal{P}_2 opfylder (ii), og derfor er $|G \setminus (G_1 - v_q)| \leq 3$ (de resterende tre punkter er v_q, v_{q+1} og muligvis v_{q+2}).

Da $G_1 - v_q$ hverken opfylder (i) eller (ii), opfylder den (iii). Der tilføjes to ekstra punkter fra G_2 samt v_q , som tillader 6 ekstra punkter. Igen opfylder \mathcal{P} (iii).

Den benyttede strategi kan ikke bruges, hvis vejen er $v_{q+1} u u' v_{q+3}$, fordi det sidst farvede punkt fra tidligere (v_{q+1}) har tre farver i sin liste, og dermed kan farves desuagtet dens to forfarvede naboer. Det gælder ikke, når v_{q+2} farves til sidst, for den har to forfarvede naboer og netop to farver i sin liste.

I det følgende antages det, at kun vejen $v_{q+1} u u' v_{q+3}$ eksisterer. Vi ved nu, at G ikke indeholder en vej af typen (a), (b) eller $v_q u u' v_{q+3}$ eller $v_q u u' v_{q+3}$. Således mangler vi at vise, at vejen $v_{q+1} u u' v_{q+3}$ ikke eksisterer. Vi dækker to tilfælde; hvor u er nabo til et punkt på P og hvor det ikke er.

Hvis u er nabo til et punkt på P , er det jf. påstand 10 punktet v_4 (og $q = 6$). I dette tilfælde kan vi vha. følgende fremgangsmåde vise, at der er en god farveplan \mathcal{P} . Farv først Q , fjern de brugte farver fra

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

naboernes lister, og lad som tidligere $G' := G - Q$. Farv så u og u' , G' og slet dernæst u' fra G' og slet også $C(u')$ fra nabolisterne.

Vejen uu' inddeler G' i to delgrafer. Delgraften uden punkter fra P har netop to forfarvede punkter – efter induktionen er anvendt på delgraften indeholdende P – og indeholder derfor positive punkter, medmindre den kun består af u og u' . Hvis vi har en god farveplan for delgraften indeholdende P , haves klart en god farveplan for hele G' . Antag derfor gerne at førstnævnte delgraf ikke eksisterer.

Vejen v_4u inddeler $G' - u'$ i to delgrafer, kald disse G'_1 og G'_2 , hvor G'_2 indeholder v_5 . Antag først at det er muligt at benytte induktionsantagelsen på G'_1 . Benyt induktionsantagelsen på G'_1 , dernæst på G'_2 , tilføj u' , og tilføj til sidst Q . G'_1, G'_2

Delgraften G'_2 indeholder altid et positivt punkt, fordi $q'_2 \leq 3$ (medmindre G'_2 kun består af de allerede farvede punkter). Hvis også G'_1 har et positivt punkt, opfylder \mathcal{P}' også (iv), da $q' + 3 = q'_1 + q'_2$, og u' blot bidrager med én til antallet af negative punkter.

Antag derfor at G'_1 ikke indeholder et positivt punkt. Hvis G'_2 indeholder et positivt punkt, øges q i (iv) med to (fordi u ikke er farvet længere), hvilket tillader 400 ekstra negative punkter. Der tilføjes kun højst 18 negative punkter (u' og højst 17 fra G'_1).

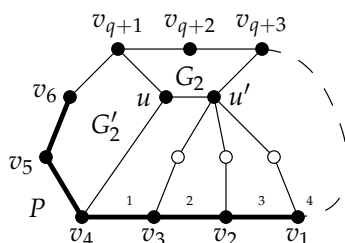
Dermed er \mathcal{P}' en god farveplan, og jf. tidligere argumenter, kan Q (og de slettede 1-punkter) og få en god farveplan \mathcal{P} for hele G .

Det er dog ikke altid muligt, at benytte induktionsantagelsen på G'_1 . Se figur 4.11. Enten kan en nabo til u' , som ligger på $C - P$, risikere kun at have én farve tilbage i sin liste, eller også kan en nabo til u' have to farver i sin liste og være nabo til et andet punkt, som har højst to farver i sin liste. Jf. påstand 12 er u' ikke nabo til et punkt med netop to farver i sin liste. Hvis u' er nabo til et punkt på $C - P$ med tre farver i sin liste, som igen er nabo til et punkt med to farver i sin liste, benyt da argumenterne i (c.2) herunder.

Hvis der eksisterer en vej $u'zv_i$, hvor $z \in G - C$ og $v_i \in C$, gælder der, jf. påstand 13, at $|L(v_i)| \neq 2$. Punktet v_i kan dog ligge på P , således at to punkter med højst to farver i sine lister er naboer. For at forhindre dette, farves sådanne punkter (der kan højst være tre – og disse punkter er negative i G'_1) inden induktionsantagelsen anvendes på G'_1 . De farvede z 'er inddeler G'_1 i yderligere højst fire nye delgrafer. Disse dele har netop to punkter tilfælles (et z og v_i , $i \in \{1, 2, 3\}$). Induktionsantagelsen benyttes på disse dele. Vi ser på to tilfælde.

Først antages at en af delgraferne indeholder et positivt punkt. Denne delgraf slås sammen med en opadliggende delgraf. Hvis den opadliggende delgraf også indeholder et positivt punkt, er $q + 3 = q_1 + q_2$, hvor q_1 og q_2 er antallet af allerede farvede punkter i de to delgrafer og q er antallet af allerede farvede punkter i den nye graf. Har denne delgraf intet positivt punkt, har den mindst fire allerede

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.11: Situationen, hvor u er nabo til v_4 og u' har 1-3 naboer i $G - C$ (hvide punkter), som er nabo til et punkt på P .

farvede punkter. Når denne graf føjes til delgrafene med det positive punkt, stiger antallet af allerede farvede punkter med mindst én, hvilket giver mulighed for 200 ekstra negative punkter. Der tilføjes kun højst 17 nye punkter. På denne måde samles alle disse delgrafer til G_1' . I dette tilfælde opfylder \mathcal{P}'_1 (iv).

Antag i stedet at ingen af disse højst fire delgrafer indeholder et positivt punkt. Vejen $u'zv_1$ kan ikke eksistere i dette tilfælde, da vi ellers er sikret et positivt punkt i delgrafene, som indeholder v_1 og ikke v_2 . Vejen $u'zv_2$ kan heller ikke eksistere, fordi delgrafene indeholder v_1 og v_2 kun har tre allerede farvede punkter, og dermed et positivt punkt. Eneste mulighed er derfor, at kun vejen $u'zv_3$ eksisterer.

De to tilbageværende delgrafer består begge af 5-kredse, eller blot fire allerede farvede punkter. Det giver i alt højst 10 punkter, og $10 < 6 \cdot 5 - 19$, så \mathcal{P}'_1 opfylder (iii).

I det følgende er vi derfor i tilfældet, hvor vejen $v_{q+1}uu'v_{q+3}$ eksisterer, og hvor en evt. vej $v_{q+1}u_0v_4$, opfylder, at $u_0 \neq u$. Derfor antages det, at u ikke har naboer på P . På grund af tilsvarende argumenter antages, at ej heller u' har naboer på P .

Vi kan her ikke benytte ovenstående fremgangsmåde, da vi ikke kan farve u og benytte induktion, eftersom de allerede farvede punkter så ikke danner en vej. De to punkter, som skaber problemer, u og u' , farves og fjernes fra $G - Q$ (og $\mathcal{C}(u)$ og $\mathcal{C}(u')$ fjernes fra de respektive nabolister). Opdel $G - Q$ i $G_1 \ni v_1$ og G_2 , hvor u og u' er de fælles punkter. Mindst et af punkterne u og u' er positivt i G_1 og G , da ingen af punkterne er nabo til et punkt på P . Vi ønsker at benytte induktionsantagelsen på $G_1 - \{u, u'\}$, og dernæst på G_2 , hvor u og u' er tilføjet.

Når vi farver og fjerner u og u' , kan der imidlertid opstå situationer, hvor det ikke er muligt at benytte induktionsantagelsen på $G_1 - \{u, u'\}$. Når induktionen benyttes på G_2 , kan den indeholde endnu en vej $v_{q+1}uu'v_{q+3}$; da grafen er mindre, benyttes de følgende argumenter induktivt.

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

Antag først at induktionen kan bruges. (En god farveplan fås for $G_1 - \{u, u'\}$, og tilføjes u og u' , har vi en god farveplan for G_1 .) Enten består G_2 kun af u og u' , eller også indeholder G_2 positive punkter. I førstnævnte tilfælde får vi nemt, at \mathcal{P} er god, fordi q i kraft af v_q øges. Antag derfor at G_2 har et positivt punkt. Hvis G_1 også indeholder et positivt punkt, opfylder \mathcal{P} (iv) fordi $q + 6 > q + 1 = q_1 + q_2$. Hvis G_1 ikke indeholder et positivt punkt ((iii) er opfyldt), så opfylder \mathcal{P} igen (iv), fordi $q \geq 5$ øges pga. v_q , hvilket muliggør op til 200 ekstra negative punkter.

Antag så at induktionen ikke kan bruges. Følgende tre tilfælde forhindrer brug af induktionsantagelsen i $G_1 - \{u, u'\}$:

(c.1) En vej $uyxv_{q+3}$, $u'xyv_q$ eller $u'xyv_{q+1}$, hvor $x, y \in G - C$.

(c.1.1) En vej $uxyv_q$, hvor $x, y \in G - C$.

(c.2) En vej uxv_i eller $u'xv_i$, hvor $x \in G - P$ og $|L(v_i)| = 2$.

(c.3) En vej uxv_i eller $u'xv_i$, hvor $x \in G - C$ og $v_i \in P$.

Hvis en vej som i (c.1) findes, kan x og y ende med kun at have to farver tilbage, når Q , u og u' slettes. Tilsvarende gælder for (c.1.1). Findes en vej som i (c.2), har x og v_i begge kun to farver efter u og u' er blevet farvet. I (c.3) kan x , som er nabo til et punkt på P , have to farver efter u og u' er blevet farvet og fjernet.

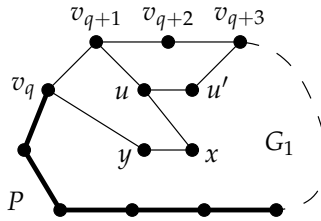
Bemærk at disse situationer ikke kan opstå i G_2 , da den forfarvede vej kun består af u og u' , og fordi $g(G) \geq 5$. I behandlingen af disse tilfælde fjernes ikke nødvendigvis både Q , u og u' , som tidligere.

Ad (c.1). Vejen opdeler $G - Q$ i $G_1 \ni v_1$ og G_2 . (Hvis der findes flere veje (af samme slags), vælges det x og y , som minimerer G_1 .) Farv punkterne på Q og fjern de brugte farver fra de respektive naboers lister. Induktionen kan anvendes på G_1 , fordi $uu' \notin E(G_1)$. Bemærk at vi i dette tilfælde ikke fjerner u og u' . Hvis vejen er $uyxv_{q+3}$, er y ikke nabo til et punkt på Q (fordi $g(G) \geq 5$), så y har tre farver i sin liste. Hvis vejen derimod er $u'xyv_q$ eller $u'xyv_{q+1}$, er x ikke nabo til et punkt på Q , så x har tre farver i sin liste. Ergo kan induktionen anvendes på G_1 .

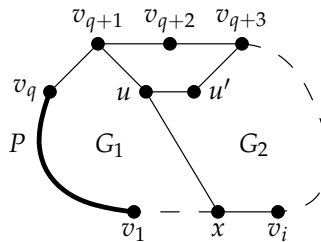
Farv den af u og u' , som endnu ikke er farvet. Således udgør u , u' , x og y den forfarvede vej i G_2 , som nu pr. induktion har en god farveplan. Slutteligt tilføjes Q igen. Kanten uu' ligger ikke nødvendigvis på randen af G_2 , men punkterne u , u' , x og y gør, hvilket sikrer at induktionen kan anvendes på G_2 .

Vi viser nu, at den samlede farveplan er god pga. v_q ; det bidrager nemlig med én til q . Hvis \mathcal{P}_1 og \mathcal{P}_2 opfylder (iv), så fås uligheden i

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.12: Vejen $uxyv_q$ eksisterer.



Figur 4.13: Vejen uxv_i , hvor v_i har netop to farver i sin liste findes.

(iv) fordi $q_{G-Q} + 4 \leq q_1 + q_2$. Når Q tilføjes øges q i (iv) med én, så \mathcal{P} opfylder (iv). Antag at kun G_1 har et positivt punkt. Så er G_2 en 5-kreds. Derfor tilføjes Q samt kun to punkter fra G_2 , som ikke er i G_1 . Den samlede farveplan opfylder derfor (iv). Antag at kun G_2 har et positivt punkt. I denne situation øges q i (iv) pga. v_q ; derfor tillades 200 ekstra negative punkter, og der tilføjes højst 17 punkter fra G_1 samt 4 fra Q . Antag slutteligt at hverken G_1 eller G_2 indeholder et positivt punkt. Igen er G_2 en 5-kreds, så der tilføjes højst disse to punkter foruden punkterne på Q , hvoraf v_q er det ene. Derfor tillades op til seks ekstra punkter.

Ad (c.1.1). Vejen v_qyx inddeler $G - \{v_{q+1}, v_{q+2}, v_{q+3}, u', u\}$ i to grafer $G_1 \ni v_1$ og G_2 ; den slettede vej er farvet – u' er positiv – og de benyttede farver er fjernet fra naboernes lister. Se figur 4.12. (Er der flere sådanne veje, vælges x og y så G_1 er punktminimal.) Der fås pr. induktion en god farveplan for G_1 og en for G_2 . At \mathcal{P} også er god følger fordi $q \geq 5$ og p øges med én. (Delgrafens afgrænset af $v_{q+1}v_{q+2}v_{q+3}u'u$ farves efterfølgende pr. induktion; er der positive punkter, øges p , er der ikke, ændres intet ift. det tidligere argument.)

Ad (c.2). Ifølge påstand 13 ligger x på C , så situationen er eksempelvis som i figur 4.13. Vejen sammen med enten v_{q+1} eller v_{q+3} opdeler G i to grafer, $G_1 \ni v_1$ og G_2 ; lad G_2 være punktminimal. (Er x

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

nabo til to punkter med to farver i sin liste på C , vælg da $v_i \in G_2$.) Vi benytter samme argumenter som i påstand 11 på G_1 (hvadenten den fælles vej er $v_{q+1}ux$ eller $v_{q+3}u'x$) og får en god farveplan for G_1 opfyldende (iv) (fordi v_{q+1} er positivt): Hvis der findes en vej $v_{q+1}u_0v_j$, hvor v_j har højst to farver i sin liste, så ved vi jf. påstand 10, at $v_j = v_4$. I denne situation farves u_0 og der udføres induktion på graferne som u_0v_4 inddeler G_1 i; argumenterne er tilsvarende anden halvdel af beviset for påstand 11, og vi får en god farveplan for G_1 , som opfylder (iv).

Antag at den fælles vej er $v_{q+3}u'x$. Med v_{q+3}, u', x og evt. v_i (hvis $v_i \in G_2$), samt v_{q+4} , som den forfarvede vej, udføres induktionen på G_2 og vi får \mathcal{P}_2 . Vi ser, at \mathcal{P} er god og opfylder (iv) fordi v_{q+1} er et positivt punkt og $q \geq 5$. (Hvis $G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$ ikke indeholder positive punkter, haves i alt $17 \cdot 2 + 2 < 200$ negative punkter.)

Antag så at den fælles vej er $v_{q+1}ux$. Induktionen udføres på G_2 med v_{q+2}, v_{q+1}, u, x og evt. v_i som punkterne på den forfarvede vej. At den samlede farveplan er god, skyldes igen at v_{q+1} er et positivt punkt og $q \geq 5$.

Ad (c.3). Vi antager her, at der findes veje af typen uxv_i eller $u'xv_i$, hvor $x \in G - C$ og $v_i \in P$. Tilfældet hvor $v_i = v_1$ og $x = v_k$ er dækket af argumenterne i (c.2). Mindst én af vejene $ux_i v_i$ eller $u'x_i v_i$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ eksisterer. Dog kan vejen $ux_q v_q$ ikke eksistere, eftersom $g(G) \geq 5$. Vi deler op i tilfælde, alt efter hvilke x_i 'er, der findes.

Hvis x_1 findes: Vejen $v_1 x_1 u' v_{q+3}$ (eller $v_1 x_1 u u' v_{q+3}$) inddeler grafen i to delgrafer G_1 og G_2 , hvor $v_q \in G_1$. Begge delgrafer opfylder induktionsantagelsen, da vi ikke har fjernet nogle punkter. Først benyttes induktionsantagelsen på G_1 (som har mellem fire og seks allerede farvede punkter), og dernæst på G_2 (hvor $v_{q+3}, u', x_1, v_1, v_{q+4}$ og muligvis også u er farvet). Delgrafene G_1 minder nu om G i beviset for påstand 11, eftersom u' nu spiller rollen som v_{q+4} . Fordi $|L(u')| = 3$, som det også antages i beviset for påstand 11, kan samme argumentation bruges til at vise, at G_1 har et positivt punkt. I tråd med beviset for påstand 11 benyttes induktionsantagelsen på $G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$, og det vises, at denne delgraf altid har en god farveplan. Derefter tilføjes v_{q+1} og v_{q+2} , og da en af disse er positive, er vi sikret, at G_1 altid har et positivt punkt. Til sidst benyttes induktionsantagelsen på G_2 . Hvis G_2 også har et positivt punkt, benyttes $q + 6 \geq q_1 + q_2$. Antag derfor at G_2 ikke har et positivt punkt. Hvis $G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$ ikke har et positivt punkt, indeholder G højst $17 \cdot 2 + 2 = 36$ punkter, og $q \geq 5$, hvilket tillader op til 800 negative punkter. I dette tilfælde opfylder \mathcal{P} (iv). Hvis $G_1 - \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$ derimod har et positivt punkt, tillades yderligere 1000 negative punkter,

G_1, G_2

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

når v_{q+1} og v_{q+2} tilføjes. Da G_2 indeholder højst 17 punkter, er (iv) igen opfyldt for \mathcal{P} .

Hvis x_2 findes: Hvis vejen er $u'x_2v_2$, gælder de samme argumenter, som hvis vejen er $u'x_1v_1$. Hvis vejen er ux_2v_2 , argumenteres tilsvarende hvor x_3, x_4 eller x_5 findes.

Vi antager derfor, at $ux_1v_1, u'x_1v_1$ og $u'x_2v_2$ ikke eksisterer. I det følgende kan vi ikke benytte ovenstående argumenter, da vi i så fald kan risikere, at G_2 har syv eller flere allerede farvede punkter.

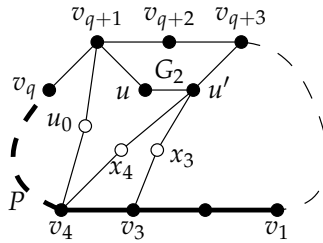
Hvis x_q findes: G_1, G_2 Vejen $v_qx_qu'v_{q+3}$ (som er den eneste mulige) ind-deler grafen i to delgrafer, G_1 og G_2 , hvor $v_1 \in G_1$. Jf. påstand 4, 6 og 8 opfylder $G_1 - v_q$ betingelserne i sætningen. Derfor benyttes induktionsantagelsen først på $G_1 - v_q$, hvorefter v_q tilføjes. Da $G_1 - v_q$ har en god farveplan, har G_1 også, da $v_q \in P$. Til sidst benyttes induktionsantagelsen på G_2 (som har fem allerede farvede punkter, fordi v_{q+2} også farves). I G_2 findes v_{q+1} og u , så \mathcal{P}_2 opfylder nødvendigvis (iv). Hvis både G_1 og G_2 indeholder et positivt punkt, er $q + 5 = q_1 + q_2$. Hvis G_1 ikke indeholder et positivt punkt, er $q = 6$, da vi er sikrede positive punkter i $G_1 - v_q$ for $q = 5$ ($G_1 - v_q$ kan ikke opfylde (ii)). Der tilføjes højst 17 punkter, når G_1 føjes til G_2 . Da $q = 6$ øges antallet af farvede punkter med én, og tillader dermed 200 ekstra negative punkter.

Antag derfor at vejen $u'x_qv_q$ ikke eksisterer. Ovenstående argumentation kan ikke bruges, hvis ikke $u'x_qv_q$ eksisterer, da vi i så fald kan risikere, at G_2 har flere end seks forfarvede punkter.

Hvis x_3, x_4 eller x_5 findes: (Vejen ux_2v_2 kan eksistere.) I dette tilfælde farves og fjernes Q, u og u' (hvor u eller u' antages at være et positivt punkt). Deres valgte farver fjernes også fra de respektive nabolister. Definer to delgrafer G_1 og G_2 , hvor G_2 er det indre af kredsen $v_{q+1}v_{q+2}v_{q+3}u'u$ og hvor G_1 er de resterende punkter i $G - Q - \{u, u'\}$. Vi viser, at G_1 har en god farveplan, og når u og u' tilføjes, vil også denne graf have en god farveplan, da enten u eller u' er et positivt punkt. At G også har en god farveplan, når G_2 og punkterne på Q tilføjes, er bevist lige før vi deler op i (c.1)-(c.3).

Eftersom det kun er x_2 (kun i form af en vej ux_2v_2), x_3, x_4 og enten x_5 eller u_0 (punktet i $G - C$, som er nabo til v_{q+1} og v_4), der kan sørge for, at induktionsantagelsen ikke kan benyttes på G_1 , farves disse, hvis de eksisterer. Se også figur 4.14. Disse nye inddelinger har alle højst seks allerede farvede punkter. Derfor opfylder delgraferne betingelserne i sætningen. Hvis en af disse delgrafer indeholder et positivt punkt, slås den sammen med en opadliggende delgraf. Har denne også et positivt punkt, er $q + 3 = q_1 + q_2$, hvor q_1 og q_2 er

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER



Figur 4.14: De hvide punkter forhindrer brug af induktionsantagelsen på G_1 . Derfor farves disse også.

antallet af allerede farvede punkter i de to delgrafer og hvor q er antallet af allerede farvede punkter i den nye graf. Hvis den opadliggende graf ikke indeholder et positivt punkt, har den mindst fire allerede farvede punkter. Den bidrager derfor med mindst ét ekstra farvet punkt, og tillader dermed 200 ekstra punkter. Delgrafen uden et negativt punkt indeholder dog højst 17 punkter. På denne måde slås alle disse delgrafer sammen, og til sidst haves G_1 , hvor \mathcal{P}_1 opfylder (iv).

Antag derfor at ingen af disse delgrafer indeholder et positivt punkt.

Der er ingen delgraf med højst tre farvede punkter, thi da har delgrafene et positivt punkt. Vejen ux_2v_2 kan derfor ikke eksistere, da delgrafene indeholdende v_1 i så fald indeholder et positivt punkt. Tilsvarende for vejene $v_{q+1}u_0v_4$, ux_5v_5 , $u'x_5v_5$, ux_4v_4 og $u'x_4v_4$. Eneste tilbageværende vej ender derfor i v_3 . I dette tilfælde haves to delgrafer med fire forfarvede punkter (som evt. er 5-kredse) og muligvis en delgraf med tre allerede farvede punkter (som ikke indeholder andre end disse tre punkter). I alt haves maksimalt 10 punkter i G_1 og eftersom $q_1 = 5$ i dette tilfælde (ellers ville den ene delgraf kun have tre forfarvede punkter), opfylder \mathcal{P}_1 (iii).

Eftersom vi kan konstruere en god farveplan til G i alle tilfælde, haves den ønskede modstrid. \square

Med denne sætning kan vi nogenlunde nemt bevise en nedre grænse for antallet af farvninger, givet en listetildeling til en planar graf med girth mindst fem. Bemærk at valensen af punkter på C og punkter i $G - C$ til forskel fra den foregående sætning ikke behøver at have valens mindst to hhv. tre.

Sætning 36

Lad $G \neq K_1$ være en planar graf med $g(G) \geq 5$, hvor randen af den ydre region navngives C . Hvis C er en 5-kreds, lad $P := C$, og antag at $G - C \neq \emptyset$. Hvis C er længere, lad $V(P) \subset V(C)$ være en vej med $1 \leq |P| \leq 2$. Lad L være en listetildeling til G , som opfylder, at $|L(v)| = 1$

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

for $v \in P$, og at $|L(v)| = 3$ for $v \in G - P$. Lad desuden C være en L -farvning af P . Grafen G har mindst $\lceil 2^{|G|/10000} \rceil$ forskellige L -farvninger som udvider C til en farvning af hele G . (Thomassen, 2007, Thm. 4.3)

Bevis. Vi benytter induktion over antallet af punkter i G . Basistilfældet, hvor $|G - P| = 1$, følger trivielt, da det ekstra punkt har valens én, og dermed er positiv.

Påstand 1. Vi kan antage, at G er sammenhængende.

Bevis. Antag omvendt at G består af sammenhængskomponenterne G_1, \dots, G_k , hvor $P \subset G_1$. (Antag også gerne at $G_1 \neq P$ og at $G_i \neq C_5$.) Bemærk at komponenter, som hver især er K_1 , for hvert punkt giver dobbelt så mange farvninger som tidligere. Antag derfor, at ingen komponenter er K_1 . Anvend induktionen og få $2^{|G_1|/10000}$ L -farvninger af G_1 . På komponenter G_i ($i > 2$), farves et, to eller fem punkter (jf. sætningen) og induktionen anvendes. Isoleret set er der altså farvningen af den allerede vej P_i til en farvning af G_i . Dvs. der er i alt mindst

$$\prod_{i=1}^k 2^{|G_i|/10000} = 2^{\sum_{i=1}^k |G_i|/10000} = 2^{|G|/10000}$$

L -farvninger af G . □

Påstand 2. Vi kan antage, at G ikke har noget snitpunkt.

Bevis. Antag modsætningsvist at $u \in B$ er et snitpunkt for G i en endebløkk B samt at $B \cap P$ er minimal. Først benyttes induktionen på $G - (B - u)$ og der fås mindst $2^{|G - (B - u)|/10000}$ L -farvninger af denne delgraf. (Antag igen gerne at $G - (B - u) \neq P$.) Hvis $B \cap P = \emptyset$, betragtes $u \in B$ som farvet, og induktionen anvendes. Hvis $B \cap P \neq \emptyset$, så er kun u i P pga. minimaliteten af $B \cap P$. Pr. induktion fås mindst $2^{|B|/10000}$ farvninger af B . I alt er der følgelig mindst $2^{|G|/10000}$ L -farvninger af G . □

Det antages altså, at G er 2-sammenhængende og den ydre kreds, som følgelig må eksistere, benævnes C . Det antages ydermere, at ingen kant i P er en korde. (Hvis $|P| = 5$ er det klart, da $P = C$ pr. definition. Hvis $|P| = 2$, omtegnes G blot.)

Påstand 3. Vi kan antage, at ikke alle punkter i $G - C$ har valens større end eller lig 3.

Bevis. Antag at $d(v) \geq 3$ for alle $v \in G - C$. I dette tilfælde kan vi benytte sætning 35. Hvis $|P| \in \{1, 2\}$, følger det af sætning 35, at G indeholder et positivt punkt. Hvis $|P| = 5$, er $P = C$, og eftersom $G - C \neq \emptyset$, opfylder \mathcal{P} (iv), og ergo har denne graf også et positivt

KAPITEL 4. ANTAL L -FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

punkt. Grafen G opfylder derfor altid, at $n \leq 1000(p - 1) + 200(q - 1)$. Fordi $q \leq 5$ og $|G| = n + p$, er $|G| - p \leq 1000(p - 1) + 200(q - 1)$, så $p \geq |G|/1001 > |G|/10000$. Fordi hvert positivt punkt giver anledning til (mindst) at fordoble antallet af mulige farvninger, er der følgelig mindst $2^{|G|/10000}$. \square

Antag jf. ovenstående påstand, at der eksisterer et punkt $u_1 \in G - C$ med $d(u_1) = 2$, og lad $G' := G - u_1$. Hvis der i $G' - C$ findes et u_2 , hvor enten $d(u_2) = 1$, eller hvor $d(u_2) = 2$ og u_2 ikke er et snitpunkt, lad så $G' := G' - u_2$, og fortsæt denne fremgangsmåde indtil $G' - C$ hverken indeholder 1-punkter eller 2-punkter, som ikke er snitpunkter. Lad u_1, \dots, u_r være de slettede punkter. Lad desuden k være antallet af punkter med valens 1 i følgen.

Bemærk at G' er en sammenhængende graf og at $C \subseteq G'$. Ydermere er ethvert punkt i $G' - C$ med valens 2 et snitpunkt. Lad så t være antallet af 2-punkter i $G' - C$, hvor begge naboer er ≥ 3 -punkter. Disse er ikke nødvendigvis de eneste 2-punkter i G' . Evt. eksisterer der en vej, hvor hvert punkt har valens 2. Fordi $g(G) \geq 5$, og da de t 2-punkter er snitpunkter, er der for hvert af de t 2-punkter med to ≥ 3 -naboer mindst ét ≥ 3 -punkt i $G' - C$. Derfor er $t < |G'|/2$.

Nu erstattes hvert punkt af valens to med en kant mellem dets to nabopunkter (hvilket ikke skaber ≤ 4 -kredse, fordi kun snitpunkter blev udglattet), og sætning 35 benyttes. Denne graf kaldes G^* . Der ved haves mindst 2^{p^*} forskellige $L|_{G^*}$ -farvninger, hvor p^* er antallet af positive punkter i G^* . Tilsvarende tidligere argumenter er $p^* \geq |G^*|/1001$. Derfor har G^* mindst $2^{|G^*|/1001}$ forskellige $L|_{G^*}$ -farvninger. Tilføjes de t punkter, som har valens to, og er nabo til ≥ 3 -punkter, bidrager disse ikke til antallet af positive punkter, da de muligvis kun har ét valg af farve fra sin liste. Ergo haves stadig mindst $2^{|G^*|/1001}$ forskellige farvninger af G' tilføjet de t punkter. Nu tilføjes de sidste punkter af valens to. På disse veje (som mindst har to punkter) vil alle punkter, på nær muligvis ét, have mindst to farver at vælge imellem. Der er derfor mindst et positivt punkt pr. 1001 punkter på disse veje. I alt har G' derfor mindst $2^{(|G'|-t)/1001}$ forskellige $L|_{G'}$ -farvninger. Derefter tilføjes punkterne u_r, \dots, u_1 (i den rækkefølge) til G' igen. Blandt disse har k valens 1, når de tilføjes, og farves punkterne i samme rækkefølge, er disse k punkter positive punkter. Ergo har G mindst $2^{(|G'|-t)/1001+k}$ forskellige L -farvninger. Det kan dog også ske, at G' kun består af allerede farvede punkter (dvs. $P = C$ og $|P| = 5$). I dette tilfælde har G kun 2^k L -farvninger. Bevisteknikken er dog stadig den samme, så vi antager, at mindst ét punkt i G' er farvet på forhånd. Fordi $t < |G'|/2$, er $(|G'|-t)/1001 + k > |G'|/2002 + k$. For at afslutte beviset, vises det, at $|G'|/2002 + k > |G|/10000$.

Lad til dette formål e og f være antallet af hhv. kanter og regioner

KAPITEL 4. ANTAL L-FARVNINGER I SÆRLIGE GRAFER

α i G . Lad desuden e_1, \dots, e_f være antallet af kanter på randen af hver af de f regioner. Definer

$$\alpha(G) := \sum_{i=1}^f (e_i - 5).$$

Eftersom $g(G) \geq 5$, og $\sum_{i=1}^f e_i = 2e$, haves vurderingen $0 \leq \alpha(G) = 2e - 5f$. Det bemærkes, at $2e \geq 5f$. Dette indsættes i Eulers formel, $|G| - e + f = 2$, hvilket giver os, at $\frac{5}{3}|G| > e$. Ergo gælder der, at $\alpha(G) \leq 2e - 5f < 2e < \frac{10}{3}|G|$. Samme udregning kan foretages med G' . Vi har derfor også, at $0 \leq \alpha(G') < \frac{10}{3}|G'|$. Når vi tilføjer punkter til G' , for igen at danne G , tilføjes enten punkter af valens en eller to. Hvis et 1-punkt føjes til G' , øges α med to, da vi ikke danner en ny region. Dette sker k gange i alt. Hvis derimod et 2-punkt tilføjes G' mindskes α med én, da der skabes en ny region, hvilket gør α 5 mindre, og der tilføjes to nye kanter, hvilket gør α 4 større. Dette sker $r - k$ gange, når vi udvider G' til G . Derfor er $0 \leq \alpha(G) = \alpha(G') - (r - k) + 2k < \frac{10}{3}|G'| - r + 3k$, hvilket giver, at $r < \frac{10}{3}|G'| + 3k$. Da vi tilføjer r punkter, når vi går fra G' til G , er $|G| = |G'| + r$. Sammen med forrige ulighed haves nu, at $|G| = |G'| + r < \frac{13}{3}|G'| + 3k$. For at få den ønskede ulighed divideres med 10000. Derefter haves, at $\frac{|G|}{10000} < \frac{13}{30000}|G'| + \frac{3k}{10000} < \frac{|G'|}{2002} + k$, som ønsket. \square

Gennem beviset for sætning 35 på side 50 observerer vi, at grænsen $n \leq 1000(p - 1) + 200(q - 1)$ ikke udnyttes skarpt. Vi får højst brug for, at tillade op til 36 ekstra negative punkter, hvor q øges potentielt kun én. Derfor vil sætningen også kunne vises, hvis (iv) erstattes med $n \leq 180(p - 1) + 36(q - 1)$. Konstanten 180 er motiveret af, at vi har brug for, at faktoren til $p - 1$ er fem gange større end faktoren til $q - 1$ (når $q + 6 = q_1 + q_2$ for to delgrafer G_1 og G_2). Med dette resultat vil det være muligt at bevise ovenstående sætning 36 med konstanten $\lceil 2^{|G|/1600} \rceil$. Konstanten 1600 er fundet ved at granske beviset for sætning 36.

5

Afrunding

I 1979 blev det vist, at enhver planar graf er acyklisk 5-farvbar. Denne sætning blev i 2002 generaliseret til formodning 7 på side 5 i (Borodin et al., 2002) om, at alle planare grafer er acyklisk 5-listefarvbare. Formodningen er endnu ikke vist. I specialet vises, at enhver graf er acyklisk 7-listefarvbar (sætning 11 på side 5) – dette er det nærmeste man i dag kommer på acyklisk 5-listefarvbarhed uden af lægge restriktioner på grafen. I 2006 blev det vist, at enhver planar graf er acyklisk 5-listefarvbar, hvis den enten ikke indeholder 4- og 5-kredse eller 4- og 6-kredse (sætning 14 og 15 på side 19). Dette vises også.

Skal man gøre sig forhåbning om at bevise formodning 7, hjælper det ikke at tilføje defekter og ad den vej se, om det er muligt at nærme sig formodningen. Dette vises sidst i kapitel 2. Da lemma 17 til 25 på side 20 til 27 også gælder for et minimalt modeksempel til formodningen, er det ikke utænkeligt, at det vha. afladning (som beviserne for sætning 14 og 15) kan vises, at enhver planar graf er acyklisk 6-listefarvbar.

I anden halvdel af specialet undersøges yderligere egenskaber for grafer uden små kredse. En velkendt sætning af Grötzsch er, at enhver planar graf uden trekanter kan 3-farves. Denne sætning kan vises vha. et forholdsvist kort listefarvningsbevis. Til dette formål vises sætning 32 på side 41; at enhver planar graf uden kredse af længde tre og fire kan 3-listefarves.

Et andet spændende aspekt ved listefarvninger er, hvor mange forskellige farvninger man kan konstruere ud fra en given listetildeling. I sidste kapitel modificeres ovennævnte sætning og bevis for at

KAPITEL 5. AFRUNDING

enhver planar graf uden kredse af længde tre og fire kan 3-listefarves og følgende vises: Enhver planar graf G uden 3- og 4-kredse har mindst $\lceil 2^{|G|/10000} \rceil$ forskellige listefarvninger for en given listetildeling.

I vores gennemgang af beviset for sætning 35 på side 50, opdagede vi, at de benyttede konstanter i sætningen kunne mindskes. Vi mener derfor at kunne forbedre grænsen vist i sætning 36 på side 79 til $\lceil 2^{|G|/1600} \rceil$ og dermed opnå følgende resultat:

Sætning 37

Lad $G \neq K_1$ være en planar graf med $g(G) \geq 5$, hvor randen af den ydre region navngives C . Hvis C er en 5-kreds, lad $P := C$, og antag at $G - C \neq \emptyset$. Hvis C er længere, lad $V(P) \subset V(C)$ være en vej med $1 \leq |P| \leq 2$. Lad L være en listetildeling til G , som opfylder, at $|L(v)| = 1$ for $v \in P$, og at $|L(v)| = 3$ for $v \in G - P$. Lad desuden \mathcal{C} være en L -farvning af P . Grafen G har mindst $\lceil 2^{|G|/1600} \rceil$ forskellige L -farvninger som udvider \mathcal{C} til en farvning af hele G .

Essensen i sætningen, at antallet af mulige farvninger for en given listetildeling er eksponentielt i antallet af punkter i grafen, er dog den samme i både sætning 36 og i ovenstående sætning.

Litteratur

- Erdős, P., Rubin, A. L. og Taylor, H. (1979). Choosability in graphs. I *Proceedings of the West Coast Conference On Combinatorics, Graph Theory And Computing*, side 125-157. Utilitas Mathematica Publishing Inc.
- Albertson, M. O. og Berman, D. M. (1977). Every planar graph has an acyclic 7-coloring. *Israel Journal of Mathematics*, 28:169-174.
- Borodin, O. V. (1979). On acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 25:211-236.
- Borodin, O. V. (1990). Solution of problems of kotzig and grünbaum concerning the isolation of cycles in planar graphs. *Mathematical Notes*, 46(5-6):835-837. Oversat fra det russiske Matematicheskije Zametki, 46(5):9-12 fra 1989.
- Borodin, O. V., Flaass, D. G. F., Kostochka, A. V., Raspaud, A. og Sopena, E. (2002). Acyclic list 7-coloring of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 40(2):83-90.
- Diestel, R. (2005). *Graph Theory*, bind 173 af *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 3. udgave.
- Esperet, L. og Pinlou, A. (2006). Acyclic improper choosability of outerplanar graphs. <http://www.labri.fr/perso/esperet/articles/RR-1405-06.pdf>.
- Esperet, L. og Pinlou, A. (2007). Acyclic improper choosability of outerplanar graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 28:251-258.
- Grünbaum, B. (1973). Acyclic colorings of planar graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 14:390-408.
- Grötzsch, H. (1959). Zur Theorie der diskreten Gebilde. VII. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. (Tysk). *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe*, (8):109-120.
- Kostochka, A. V. (1976). Acyclic 6-coloring of planar graphs (russisk). *Diskret. Analiz*, 28:40-56.

LITTERATUR

LITTERATUR

- Kostochka, A. V. og Mel'nikov, L. S. (1976). Note to the paper of grünbaum on acyclic colorings. *Discrete Mathematics*, 14(4):403-406.
- Mitchem, J. (1974). Every planar graph has an acyclic 8-coloring. *Duke Mathematical Journal*, 41(1):177-181.
- Montassier, M., Raspaud, A. og Wang, W. (2006). Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles. *Journal of Graph Theory*, 54:245-260.
- Thomassen, C. (1994a). Every planar graph is 5-choosable. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 62(1):180-181.
- Thomassen, C. (1994b). Grötzsch's 3-Color Theorem and Its Counterparts for the Torus and the Projective Plane. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 62:268-279.
- Thomassen, C. (2003). A short list color proof of Grötzsch's theorem. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 88:189-192.
- Thomassen, C. (2007). Many 3-colorings of triangle-free planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 97:334-349.
- Vizing, V. G. (1976). Coloring the vertices of a graph in prescribed colors (russisk). *Diskret. Analiz*, 29:3-10.