Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
Aalborg Universitet

Institut for Matematiske Fag

TITEL: Undersøgelse af beviset for den stærke perfekte graf sætning

SPECIALEPERIODE:
MAT6,
16. januar 2003 - 16. juni 2003

GRUPPEMEDLEMMER:
Tanja Vammen Andersen
Karen Margrethe Bæk
Susanne Thomsen

SPECIALEVEJLEDER:
Preben Dahl Vestergaard

OPLAG: 14

SIDEANTAL: 193

SYNOPSIS

Denne rapport undersøger beviset for den stærke perfekte graf sætning og dokumenterer derigennem tre specialestuderendes undersøgelse af beviset. Beviset for den stærke perfekte graf sætning blev fremsat af Maria Chudnovsky, Neil Robinson, Paul Seymour og Robin Thomas i oktober 2002. Udganspunktet for denne rapport er derfor artiklen *The Strong Perfect Graph Theorem* [Chudnovsky, Robinson, Seymour & Thomas, 2002]. Hensigten med denne rapport er at opnå forståelse for beviset for den stærke perfekte graf sætning ved at undersøge bevisets holdbarhed.
Rapporten omhandler perfekte grafer og Berge grafer. At en graf er perfekt, vil sige, at det kromatiske tal og kliketallet er ens for enhver induceret delgraf. At en graf er en Berge graf, vil sige, at hverken grafen eller dens komplement indeholder inducerede kredse af ulige længde mindst fem. Den stærke perfekte graf sætning siger, at en graf G er en Berge graf, hvis og kun hvis grafen G er perfekt. Den sværeste del af beviset for den stærke perfekte graf sætning er at vise, at enhver Berge graf er perfekt, og det er den del af beviset, som rapporten hovedsagligt beskæftiger sig med.

Forord

Denne rapport er produktet af specialeforløbet fra medio januar til medio juni 2003 for tre speciale-studerende ved Institut for Matematiske Fag på Aalborg Universitet.

I denne rapport undersøges beviset for den stærke perfekte graf sætning, som Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour og Robin Thomas fremsatte et bevis for i 2002 i [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002].

Specialet tager udgangspunkt i artiklen *The Strong Perfect Graph Theorem* [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002] fra oktober 2002, men også den nyere udgave [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2003] fra februar 2003 er benyttet som opslagsværk.

Selve rapporten indeholder resultater, hvis beviser er udeladt. Beviser for disse resultater kan ses i det medfølgende appendiks. Dog skal læseren være opmærksom på, at appendiks ikke skal ses som en del af specialet, da arbejdet med dette ikke er færdigt.
I forbindelse med selve rapporten er der mange definitioner, og derfor er der bagerst i rapporten placeret en definitionsliste.

Vi retter en tak til Bert Randerath, lektor ved Köln Universitet, der med stor iver har hjulpet os med problemer i forbindelse med specialet. Desuden rettes en tak til Lars Døvling Andersen, professor ved Aalborg Universitet, for at stille sig til rådighed, til Anders Rhod Gregersen, systemadministrator ved Aalborg Universitet samt Ulrich Fahrenberg, Ph.D studerende ved Aalborg Universitet, for teknisk assistance.

Tanja Vammen Andersen

Karen Margrethe Bæk

Susanne Thomsen

Abstract

This report deals with the subject of perfect graphs and Berge graphs in graph theory. A graph is perfect if the clique number and the chromatic number of every induced subgraph is equal and a graph is Berge if it contains no induced cycles of odd length greater than four and if the complement of the graph contains no induced cycles of length greater than four. In particular the report investigates the proof of *The Strong Perfect Graph Theorem* which states that a graph G is perfect if and only if G is Berge. Since the theorem is an "if and only if" theorem the proof has two parts. The first part showing that a perfect graph is a Berge graph is straightforward and therefore the investigation mainly deals with proving that every Berge graph is perfect.

The proof of every Berge graph being perfect is a search for a minimal counter example. Here the idea is to find different structures contained in Berge graphs and exclude them one by one from the minimal counter example by proving that if a Berge graph contains one of the structures then it is perfect. Structures are repeatedly excluded and finally it is shown that there is no minimal counter example and therefore no counter example exists. When searching for a minimal counter example it is proven that a Berge graph G either is a basic graph or has a decomposition.
A graph is basic if G or $\overline{G}$ is bipartite, G or $\overline{G}$ is the line graph of a bipartite graph, or G is a bicograph, which is also called a doubble splitgraph. If G is a basic graph then it is shown that G is perfect and therefore cannot be a minimal counter example.

In this report three kinds of decompositions are used, namely skew partitions, 2-joins, and 6-joins. If G admits one of these decompositions it can be shown that G is perfect and therefore cannot be a minimal counter example. The report mainly deals with investigating whether or not a graph is perfect both if it admits a skew partition and if it does not admit a skew partition. In this connection balanced skew partitions are introduced and used in the proof. The balanced skew partition is a special and very useful kind of skew partition.

Firstly, it is proven that a minimal counter example does not admit a balanced skew partition. It is shown elsewhere that if G contains 2-joins then G is a perfect graph. Likewise it is shown elsewhere that if G contains 6-joins then G is a perfect graph. These results are therefore used in the report but they are not included. After proving that a minimal counter example does not admit a balanced skew partition it is shown that if a Berge graph G contains an induced subgraph isomorphic to the line graph of a bipartite subdivision of K_4, then G is either a basic graph, contains a 2-join or admits a balanced skew partition. This means that such a graph cannot be a minimal counter example, and graphs containing an induced subgraph isomorphic to the line graph of a bipartite subdivision of K_4 are no longer considered.
Secondly, it is shown that if a Berge graph G contains an even prism, then G either contains a 2-join, admits a balanced skew partition or the graph itself is an even prism with nine vertices. Since an even prism with nine vertices is the line graph of a bipartite graph this means that such a graph can not be a minimal counter example. Therefore graphs containing an even prism are no longer considered. In the same manner graphs containing odd long prisms or double diamonds cannot be a minimal counter example. These results make it possible to show that no minimal counter example admits a skew partition.
Following this it is shown that a minimal counter example cannot contain odd wheels or pseudowheels, and this is generalised so that it can be shown that a minimal counter example cannot

contain wheels. Then it is shown that a minimal counter example cannot contain a vertex with three consecutive neighbours in a hole of length greater than five, and that a minimal counter example cannot contain both a hole of length greater than five and an antihole of length greater than five. Finally Berge graphs which does not contain any of the above mentioned structures and decompositions are investigated and it is shown that such graphs are complete, and therefore perfect. This means that no counter example exists and the proof is done.

Indhold

Del I

Introduktion

Kapitel 1

Introduktion til den stærke perfekte graf sætning

I 1961 fremsatte Claude Berge den stærke perfekte graf formodning. Denne formodning postulerer, at en graf er perfekt, hvis og kun hvis grafen er en Berge graf.

Efterfølgende har mange forsøgt at bevise denne formodning, men det er ikke lykkedes før Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour og Robin Thomas 41 år senere i 2002 fremfører, at de har bevist den. Beviset fylder 148 sider og titlen er *The Strong Perfect Graph Theorem*, se [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002]. Bevisets holdbarhed undersøges, og denne rapport dokumenterer tre specialestuderendes undersøgelse af beviset.

I rapporten gennemgåes indledningsvist strukturen i det lange bevis for at skabe et overblik over beviset.

1.1 Strukturgennemgang af beviset

Da den stærke perfekte graf sætning er af formen "hvis og kun hvis", består beviset af to dele. Det skal vises, at enhver perfekt graf er en Berge graf, og enhver Berge graf er en perfekt graf. Denne rapport beskæftiger sig hovedsageligt med beviset for, at enhver Berge graf er en perfekt graf. Begrundelsen, for at der i denne rapport hovedsagligt fokuseres på at vise, at enhver Berge graf er en perfekt graf, er, at dette er det mest komplicerede at vise, det er det nyeste resultat, og det er det, [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002] omhandler.

Idéen bag beviset er at vise, at en Berge graf enten tilhører en af fem klasser af grafer, som kaldes elementære grafer, eller har en af tre typer dekompositioner. Dette gøres, da de elementære grafer alle kan vises at være perfekte grafer, og det i [Chvátal & Sbihi, 1987] og [Cornuéjols & Cunningham, 1985] for to af de her anvendte dekompositioner er vist, at hvis en Berge graf har en given dekomposition, da er den en perfekt graf. Desuden vises det i denne rapport, at hvis en Berge graf har den sidste type dekomposition, så er grafen perfekt. Det skal så vises, at for enhver Berge graf vil en af disse to betingelser altid være opfyldt.

Beviset tager udgangspukt i et minimalt modeksempel, og strukturen af dette undersøges. Til dette benyttes de elementære grafer.

De elementære grafer er fem klasser af grafer: Todelte grafer, grafer hvis komplementærgraf er en todelt graf, liniegrafer af todelte grafer, grafer hvis komplementærgraf er en liniegraf af en todelt graf og bicografer, også kaldet dobbelt splitgrafer. For disse fem klasser af grafer kan det vises, at de alle er perfekte grafer, og idéen med de elementære grafer er dermed, at de ikke kan udgøre et minimalt modeksempel.

En anden mulighed for en Berge graf er, at den har en dekomposition. I dette bevis benyttes tre former for dekompositioner: Skæve opdelinger, 2-vedhæng og 6-vedhæng. Fordelen ved at benytte disse dekompositioner er, at det kan vises, at hvis en Berge graf har en sådan dekomposition, da er den en perfekt graf. At vise, at enhver Berge graf enten er en elementær graf eller har en dekomposition, er en større opgave. Måden, hvorpå det vises, er ved hjælp af sætninger af følgende form:

Lad G være en Berge graf. Hvis G indeholder et objekt X som delgraf, da er G enten en elementær graf eller har en dekomposition.

På denne måde udelukkes visse strukturer fra de minimale modeksempler. I den første del af beviset viser det sig dog mere hensigtsmæssigt at indføre en speciel form for skæve opdelinger, nemlig balancerede skæve opdelinger. Denne type af skæve opdelinger benyttes efterfølgende i det meste af beviset. Derigennem opnåes de første resultater, som gør det muligt senere at vise, at et minimalt modeksempel ikke kan have en skæv opdeling.

Selve beviset starter med at vise, at et minimalt modeksempel ikke har en balanceret skæv opdeling. At et minimalt modeksempel ikke har et 2-vedhæng eller et 6-vedhæng vises ikke her, men der henvises til [Cornuéjols & Cunningham, 1985] og [Chvátal & Sbihi, 1987] for disse resultater. Herefter undersøges tilfældet, hvor en Berge graf indeholder en bestemt type liniegraf som induceret delgraf. Denne bestemte type liniegraf er en liniegraf af en todelt underdeling af en 3-sammenhængende graf. Her vises det, at hvis en Berge graf indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af en todelt underdeling af K_4, så vil denne graf enten være en elementær graf, indeholde et 2-vedhæng eller have en balanceret skæv opdeling. Dermed kan denne graf ikke være et minimalt modeksempel. Derfor betragtes herefter kun grafer, der ikke indeholder denne struktur.
Herefter vises det, at hvis grafen indeholder en lige prisme, så kan grafen ikke være et minimalt modeksempel, idet grafen da enten vil indeholde et 2-vedhæng, have en balanceret skæv opdeling eller være en lige prisme indeholdende kun ni punkter. Den sidste mulighed udgør netop liniegrafen af en todelt graf. Dermed udelukkes også de grafer, som indeholder lige prismer som delgrafer.
Fremgangsmetoden i beviset er altså at vise, at hvis en Berge graf indeholder en bestemt struktur, da kan den ikke være et minimalt modeksempel, hvormed denne type af grafer ikke længere betragtes. På denne måde indskrænkes mulighederne for udseendet af et minimalt modeksempel, og det vises herefter, at et minimalt modeksempel heller ikke kan indeholde en aflang ulige prisme eller en dobbeltdiamant.

Ved hjælp af disse resultater bliver det muligt at vise, at et minimalt modeksempel ikke kan have en skæv opdeling. Herefter vises det, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde hjul af ulige længde eller pseudohjul. Dette benyttes til at generalisere og dermed vise, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde hjul.
Herefter vises det, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde et punkt, som har tre på hinanden følgende naboer i et hul af længde mindst seks. Desuden vises det, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde både et hul og et antihul af længde mindst seks.

Til sidst betragtes de Berge grafer, der hverken indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af en todelt underdeling af K_4, en lige prisme, en aflang ulige prisme, en dobbeltdiamant, et pseudohjul, et hjul, et punkt, der har tre på hinanden følgende naboer i et hul af længde mindst seks, både et hul og et antihul af længde mindst seks, et 2-vedhæng, et 6-vedhæng, har en balanceret skæv opdeling eller er en elementær graf. Det kan så vises, at sådanne grafer er komplette grafer, hvilke også er perfekte grafer. På denne måde vises det, at der ikke kan eksistere et minimalt modeksempel.

Eftersom der fremkommer en del strukturer, som skal udelukkes fra de Berge grafer, der betragtes, indføres familier af Berge grafer. Først dannes en familie af alle Berge grafer, og herefter dannes underfamilier af denne for hele tiden at holde styr på hvilke strukturer, der er udelukket fra de grafer, der betragtes. Her gives et kort overblik over de benyttede familier, hvor hver familie er en underfamilie af enten familien af Berge grafer eller af den foregående familie.

* $\mathcal{F}_1$ er familien af alle Berge grafer G, hvor det for enhver induceret delgraf af G, der er isomorf med liniegrafen af en todelt underdeling af K_4, gælder, at denne liniegraf er degenereret.
* $\mathcal{F}_2$ er familien af alle grafer G, hvor $G \in \mathcal{F}_1$ og $\overline{G} \in \mathcal{F}_1$, for hvilke det gælder, at G ikke indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af $K_{3,3}$.
* $\mathcal{F}_3$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_2$, hvor det for enhver todelt underdeling H af K_4 gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af H.
* $\mathcal{F}_4$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_3$, for hvilke det gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med en lige prisme.
* $\mathcal{F}_5$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_4$, for hvilke det gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med en aflang ulige prisme.
* $\mathcal{F}_6$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_5$, for hvilke det gælder, at G ikke indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med en dobbeltdiamant.
* $\mathcal{F}_7$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_6$, for hvilke det gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med et hjul af ulige længde.
* $\mathcal{F}_8$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_7$, for hvilke det gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med et pseudohjul.
* $\mathcal{F}_9$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_8$, for hvilke det gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med et hjul.
* $\mathcal{F}_{10}$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_9$, for hvilke det gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder et punkt, der har tre på hinanden følgende naboer i et hul af længde mindst seks.
* $\mathcal{F}_{11}$ er familien af alle grafer $G \in \mathcal{F}_{10}$, for hvilke det gælder, at ethvert antihul i G har længde fire.

Strukturen af selve beviset kan nu opdeles ved hjælp af disse 11 familier i 13 hovedresultater:

(i) Et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning kan ikke have en balanceret skæv opdeling.

Dette vises i sætning 3.15.

(ii) For enhver Berge graf G vil G enten være en liniegraf af en todelt graf, indeholde et 2-vedhæng, have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_1$.

Dette vises i korollar 9.17.

(iii) For enhver graf G, hvor $G \in \mathcal{F}_1$ og $\overline{G} \in \mathcal{F}_1$, vil G enten være liniegrafen af $K_{3,3}$, en af G eller $\overline{G}$ vil indeholde et 2-vedhæng, G vil have en balanceret skæv opdeling, eller G vil tilhøre $\mathcal{F}_3$.

Dette vises i korollar 9.19.

(iv) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_2$ vil enten G være en bicograf, en af G eller $\overline{G}$ vil indeholde et 2-vedhæng, G vil have en balanceret skæv opdeling, eller G vil tilhøre $\mathcal{F}_3$.

Dette vises i sætning 9.30.

(v) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_3$ vil G enten være en lige prisme med ni punkter, indeholde et 2-vedhæng, have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_4$.

Dette vises i sætning 11.6.

(*vi*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_4$ vil enten en af G eller $\overline{G}$ indeholde et 2-vedhæng, eller så vil G have en balanceret skæv opdeling, et 6-vedhæng eller tilhøre $\mathcal{F}_5$.

Dette vises i sætning 12.36.

(*vii*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_5$ vil enten en af G eller $\overline{G}$ indeholde et 2-vedhæng, eller så vil G have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_6$.

Dette vises i sætning 14.10.

(*viii*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_6$ vil G enten have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_7$.

Dette vises i sætning 15.16.

(*ix*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_7$ vil G enten have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_8$.

Dette vises i sætning 16.18.

(*x*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_8$ vil G enten have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_9$.

Dette vises i sætning 17.17.

(*xi*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_9$ vil G enten have en balanceret skæv opdeling eller tilhøre $\mathcal{F}_{10}$.

Dette vises i sætning 18.4.

(*xii*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_{10}$ vil enten $G \in \mathcal{F}_{11}$ eller $\overline{G} \in \mathcal{F}_{11}$.

Dette vises i sætning 19.3.

(*xiii*) For enhver graf $G \in \mathcal{F}_{11}$ vil G enten være en todelt graf, en komplet graf eller have en balanceret skæv opdeling.

Dette vises i sætning 20.9.

Som afslutning på rapporten sammenholdes ovenstående hovedresultater i kapitel 21 til et bevis for den stærke perfekte graf sætning.

Inden beviset gennemgåes, introduceres perfekte grafer i næste afsnit, og i kapitel 2 vises nogle indledende resultater.

1.2 Indledende definitioner

I dette afsnit indføres de grundlæggende definitioner og den notation, der benyttes i resten af rapporten.

Definition 1.1 (Kliketal)
For en graf G er en klike $G' \subseteq G$ en komplet delgraf i G, og kliketallet for G defineres som

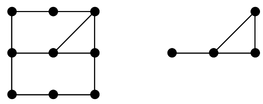
$$\omega(G) = \max\{|V(G')| \mid G' \text{ er en klike i } G\}.$$

◇

Kliketallet er altså antallet af punkter i en maksimal klike G' i G.

Definition 1.2 (Induceret delgraf)
En delgraf H af en graf G er induceret, hvis $V(H) \subseteq V(G)$, og $E(H) = \{uv \mid u, v \in V(H)$ og $uv \in E(G)\}$. At H er en induceret delgraf af G, betegnes med $\langle H \rangle_G$. ◇

En induceret delgraf består hermed af en delmængde af punkterne i G og de kanter fra G, som er incidente med punkterne i delmængden, se figur 1.1.



(a) (b)

Figur 1.1: Et eksempel på en graf og en induceret delgraf af denne.

Kliketallet for begge grafer i figur 1.1 er tre.

Med notationen $G - H$, hvor H er en delgraf i grafen G, menes grafen $\langle V(G) - V(H) \rangle_G$.

Definition 1.3 (Kromatisk tal)
Lad punktmængden i en graf G være opdelt i k disjunkte delmængder G_i, for $1 \leq i \leq k$, hvor $E(\langle G_i \rangle_G) = \emptyset$. Da defineres det kromatiske tal som

$$\chi(G) = \min\{k \mid V(G) \text{ er opdelt i } k \text{ disjunkte mængder } G_i,\ \text{hvor } E(\langle G_i \rangle_G) = \emptyset\}.$$

◇

Det kromatiske tal for begge grafer i figur 1.1 er tre.

Definition 1.4 (Perfekt graf)
En graf G er perfekt, hvis det for alle inducerede delgrafer H af G gælder, at

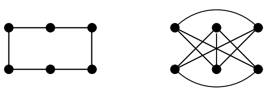
$$\omega(H) = \chi(H).$$

◇

Grafen i figur 1.1(a) er ikke perfekt, da det om den inducerede delgraf, der er en kreds af længde fem, gælder, at kliketallet er to, mens det kromatiske tal er tre. Grafen i figur 1.1(b) er perfekt, da det om hver induceret delgraf gælder, at kliketallet og det kromatiske tal er ens.

Definition 1.5 (Komplementærgraf)
Komplementærgrafen $\overline{G}$ af en graf G har punktmængde $V(\overline{G}) = V(G)$ og kantmængde $E(\overline{G}) = \{uv \mid uv \notin E(G)\}$. ◇

En komplementærgraf består altså af de kanter, som ikke findes i den oprindelige graf, se figur 1.2.



G $\overline{G}$

Figur 1.2: En graf G og dens komplementærgraf $\overline{G}$.

Sætning 1.6
En graf G er en perfekt graf, hvis og kun hvis $\overline{G}$ er en perfekt graf. ◇

For bevis se [Lovász, 1984].

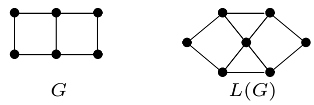
Definition 1.7 (Hul og antihul i graf)
En graf G siges at have et hul, hvis den indeholder en induceret kreds af længde mindst fire uden korder. Det vil sige, at $\langle C_k \rangle_G \subseteq G$, for $k \geq 4$, er et hul i G.
Grafen G siges at have et antihul C, hvis $\langle C \rangle_G$ er et hul i $\overline{G}$. Ved længden af et antihul C forståes længden af $\langle C \rangle_{\overline{G}}$. ◇

Definition 1.8 (Berge graf)
En graf G er en Berge graf, hvis ethvert hul og ethvert antihul i G har lige længde. ◇

Grafen i figur 1.1(a) er altså ikke en Berge graf, da den indeholder et hul af længde fem. Dette stemmer også overens med, at det tidligere i dette afsnit er vist, at grafen ikke er perfekt.

Definition 1.9 (Liniegraf)
Liniegrafen $L(G)$ af en graf G har punktmængde $V(L(G)) = E(G)$ og kantmængde $E(L(G)) = \{ef \mid e, f \in E(G),\ \text{og } e \text{ er incident med } f \text{ i } G\}$. ◇

En liniegraf af G fremkommer altså ved at placere et punkt ud for hver kant i G og forbinde disse punkter, hvis de tilhørende kanter i G er incidente, se figur 1.3.

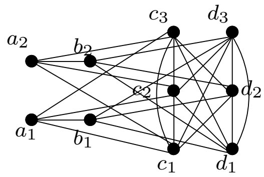


Figur 1.3: En graf G og dens liniegraf $L(G)$.

Definition 1.10 (Bicograf)
Lad G være en graf og lad $\{a_1, \ldots, a_m\}, \{b_1, \ldots, b_m\}, \{c_1, \ldots, c_n\}$ og $\{d_1, \ldots, d_n\}$, for $m, n \geq 2$, være fire disjunkte punktmængder i G. Da kaldes G en bicograf, hvis G har punktmængde $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n\}$ og kantmængde, der kun indeholder følgende kanter:

- *For $1 \leq i \leq m$ er a_i nabo til b_i.*
- *For $1 \leq j < j' \leq n$ er c_j og d_j begge naboer til både $c_{j'}$ og $d_{j'}$.*
- *For $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ findes enten alle kanterne $a_i c_j$ og $b_i d_j$ eller alle kanterne $a_i d_j$ og $b_i c_j$.*

◇



Figur 1.4: Eksempel på en bicograf.

En bicograf er altså en graf, hvori punkterne $a_1, \ldots, a_m$ og punkterne $b_1, \ldots, b_m$ kun er forbundet med kanterne $a_i b_i$. Delgrafen $\langle \{c_1, \ldots, c_n\} \rangle_G$ udgør en komplet delgraf, og delgrafen $\langle \{d_1, \ldots, d_n\} \rangle_G$

udgør en komplet delgraf. Delgrafen $\langle\{c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n\}\rangle_G$ udgør ikke en komplet delgraf, da kanterne $c_j d_j$ ikke findes i grafen. Komplementet til en bicograf er også en bicograf, da a_i og c_j samt b_i og d_j blot bytter roller.

Definition 1.11 (Elementær graf)
En graf G er elementær, hvis enten G eller $\overline{G}$ er todelt, G eller $\overline{G}$ er liniegrafen af en todelt graf, eller G eller $\overline{G}$ er en bicograf. ◇

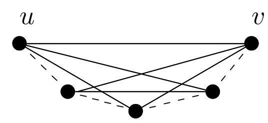
Sætning 1.12
Lad G være en elementær graf, så er G perfekt. ◇

Definition 1.13 (Vej)
En sammenhængende delgraf P i en graf G kaldes en vej, hvis $|V(P)| \geq 1$, $\Delta_P(P) \leq 2$ og $\delta_P(P) = 1$. Længden af en vej er lig antallet af kanter i P. Endepunkterne i en vej er punkterne v, hvor $\deg_P(v) = 1$, og de indre punkter i en vej er punkterne u, hvor $\deg_P(u) = 2$. ◇

Bemærk, at en vej ikke nødvendigvis er en induceret delgraf, da det kan ske, at $\Delta_{\langle P\rangle}(P) \geq 3$.

Definition 1.14 (2-vej og anti 2-vej)
En 2-vej $P : p_1, \ldots, p_n$ i en graf G er en induceret delgraf, hvor $\deg_P(p_i) = 2$, for $2 \leq i \leq n-1$, og $\deg_P(p_j) = 1$ for $j \in \{1, n\}$. Ved det indre af en 2-vej forståes punkterne mellem de to endepunkter på 2-vejen, altså punkterne $p_2, \ldots, p_{n-1}$.
En anti 2-vej i G er en induceret delgraf Q, hvorom det gælder, at $\overline{Q}$ er en 2-vej i $\overline{G}$. Længden af en anti 2-vej Q er længden af $\overline{Q}$. Ved det indre af en anti 2-vej forståes det indre af $\overline{Q}$. ◇

Bemærk, at en 2-vej P i G gerne må have naboer i $G - P$, så graden af punkterne på 2-vejen i G må gerne være større end to.
På figur 1.5 ses en anti 2-vej af lige længde mellem to punkter u og v, hvor den stiplede linie angiver 2-vejen i komplementærgrafen.



Figur 1.5: En anti 2-vej af længde fire mellem u og v.

Forskellen på veje og 2-veje er, at da veje ikke er inducerede delgrafer, kan der godt forekomme kanter mellem punkter i vejen, der ikke er med i vejen, mens sådanne kanter ikke kan forekomme i 2-veje, da 2-veje er inducerede.

Bemærkning 1.15
Der er en sammenhæng mellem veje af længde mindst én i en graf H og 2-veje i $L(H)$. Her vil det gælde, at for en vej $P \in H$ vil $E(P)$ udgøre punktmængden for en 2-vej i $L(H)$.
Yderligere har længden af en vej og længden af den tilhørende 2-vej i liniegrafen altid modsat paritet, altså $|E(P)| = |E(L(P))| - 1$. ◇

Definition 1.16 (Sti og antisti)
Lad G være en graf, og lad A, B og C være disjunkte delmængder af $V(G)$. En 2-vej, hvis første punkt tilhører A, sidste punkt tilhører B og hvis indre tilhører C, kaldes en sti.
En anti 2-vej, hvis første punkt tilhører A, sidste punkt tilhører B og hvis indre tilhører C, kaldes en antisti. ◇

Definition 1.17 (Komplet og antikomplet)
Lad G være en graf, og lad $X \subseteq V(G)$ være en mængde. Et punkt $v \in V(G) - X$ siges at være komplet til X, hvis v er nabo til alle punkterne i X. Punktet siges at være antikomplet til X, hvis v ikke er nabo til punkter i X.
En kant $uv \in E(G)$ siges at være komplet til X, hvis dens endepunkter u og v er komplette til X. En mængde A siges at være komplet til X, hvis alle punkter i A er komplette til X. En mængde B siges at være antikomplet til X, hvis alle punkter i B er antikomplette til X. $\diamond$

Definition 1.18 (Sammenhængende og antisammenhængende)
Lad G være en graf. En mængde $X \subseteq V(G)$ er sammenhængende, hvis $\langle X \rangle_G$ er sammenhængende. En mængde $X \subseteq V(G)$ er antisammenhængende, hvis $\langle X \rangle_{\overline{G}}$ er sammenhængende. $\diamond$

Definition 1.19 (Stjernesnitmængde)
Lad G være en graf. En stjernesnitmængde i G er en mængde X, hvor $G - X$ ikke er sammenhængende, og X indeholder et punkt p, som er komplet til $X - p$. $\diamond$

Definition 1.20 (Minimalt modeksempel)
En graf G siges at være et minimalt modeksempel, hvis G er en Berge graf, som ikke er perfekt, og $|V(G)|$ er mindst mulig. $\diamond$

Gennem hele rapporten arbejdes med sammenhængende grafer, som ikke indeholder multiple kanter. Dette skyldes, at multiple kanter ikke har betydning for kliketallet og det kromatiske tal, og dermed ikke har betydning for, om en graf er perfekt, og desuden har multiple kanter ikke betydning for, om en graf er en Berge graf. Da idéen i beviset for den stærke perfekte graf sætning er at udelukke et minimalt modeksempel, er det nok at betragte en sammenhængende graf, da det at være perfekt skal være opfyldt for hver sammenhængskomponent. Dette er nok, da kliketallet og det kromatiske tal for hele grafen er det henholdsvis største kliketal fra alle sammenhængskomponenter og det største kromatiske tal fra alle sammenhængskomponenter. Hvis en sammenhængskomponent kun består af et isoleret punkt, så er punktet også perfekt, idet både kliketallet og det kromatiske tal i det tilfælde er lig én.

Dette kapitel har således indeholdt en strukturgennemgang af beviset for den stærke perfekte graf sætning samt de basale definitioner, der benyttes i denne rapport.

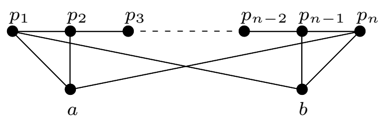
Kapitel 2

Indledende resultater

I dette kapitel introduceres nogle indledende resultater, som benyttes meget gennem hele rapporten. I afsnit 2.1 vises resultater om Berge grafer, der indeholder 2-veje eller huller. Der tages udgangspunkt i et resultat af Roussel og Rubio fra 2001, som er omskrevet og udbygget til stor anvendelighed i denne rapport. Afsnit 2.2 omhandler, hvorledes et punkt og en antisammenhængende mængde kan være forbundet til en trekant. I afsnit 2.3 introduceres balancerede par, som senere benyttes til den meget brugte balancerede skæve opdeling. I afsnit 2.4 vises en sammenhæng mellem 2-veje og anti 2-veje samt mellem huller og anti 2-veje i en Berge graf.

2.1 2-veje og huller

Definition 2.1 (Afhop for 2-vej)
Lad P være en 2-vej bestående af punkterne $p_1, \ldots, p_n$, hvor $n \geq 2$. Et afhop for 2-vejen P er et par af ikke-nabopunkter $a, b \in V(G)$, så der findes præcis seks kanter mellem $\{a, b\}$ og $V(P)$, nemlig kanterne $ap_1, ap_2, ap_n, bp_1, bp_{n-1}$ og bp_n. ◇



Figur 2.1: Et afhop a, b for en 2-vej $p_1, \ldots, p_n$.

Følgende lemma er en variation af Roussel-Rubios lemma, som her er omformuleret til notationen i denne rapport. Dette lemma viser sig meget anvendeligt i en stor del af beviserne i denne rapport.

Lemma 2.2
Lad G være en Berge graf, og lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - X$ af ulige længde, hvor p_1 og p_n er komplette til X. Da vil en af følgende gælde:

(i) *En kant $e \in E(P)$ er komplet til X.*

(ii) *P har længde mindst fem, og X vil indeholde et afhop for P.*

(iii) *P har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter i P, hvis indre tilhører X.*

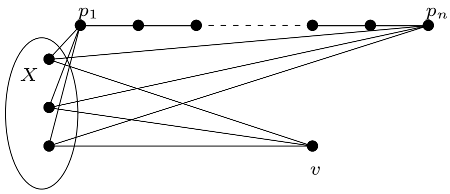
◇

Korollar 2.3

Lad G være en Berge graf, og lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde. Lad P : $p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - X$ af ulige længde, hvor p_1 og p_n er komplette til X, og ingen kanter i P er komplette til X. Da vil ethvert punkt, der er komplet til X, have en nabo i det indre af P. $\diamond$

Bevis

Hvis p_1 og p_n er de eneste punkter i G, der er komplette til X, så er korollaret opfyldt. Antag derfor, at der findes et punkt udover p_1 og p_n i G, der er komplet til X, og lad det være $v \in V(G)$. Da p_1 og p_n begge er komplette til X, og P ikke indeholder kanter, der er komplette til X, må P have ulige længde mindst tre.



Figur 2.2: Udsnit af grafen, hvor v, p_1 og p_n er komplette til X.

Antag, at P har længde mindst fem. Da indeholder X ifølge lemma 2.2(ii) et afhop for P, hvilket vil sige, at der findes en 2-vej Q, hvis endepunkter tilhører X, og hvis indre er lig det indre af P. Idet v er komplet til X, er v nabo til Q's endepunkter, og da G er en Berge graf, indeholder G ikke huller af ulige længde. Det vil sige, at $\langle V(Q) \cup \{v\} \rangle_G$ ikke må være et hul af ulige længde, så v må have en nabo i det indre af Q, og dermed i det indre af P, hvormed korollaret er opfyldt.
Antag, at P har længde tre. Da vil der ifølge lemma 2.2(iii) findes en anti 2-vej R af ulige længde fra p_2 til p_3, hvis indre tilhører X. Da G og $\overline{G}$ ikke indeholder huller af ulige længde, må v være nabo til enten p_2 eller p_3, for ellers dannes et antihul $R \cup \{vp_2, vp_3\}$ af ulige længde. Dermed har v en nabo i det indre af P. $\square$

Korollar 2.4

Lad G være en Berge graf, og lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde. Lad P : $p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej eller et hul i $G - X$, hvor mindst to punkter i P er komplette til X. Lad Q være en 2-vej som er en delgraf af P, hvis endepunkter begge er komplette til X. Da vil antallet af kanter i Q, der er komplette til X, have samme paritet som længden af Q, eller endepunkterne i Q er de eneste punkter i Q, der er komplette til X. Hvis P er et hul, så findes der enten et lige antal kanter i P, der er komplette til X, eller der findes netop to punkter i P, som er komplette til X, og de er nabopunkter. $\diamond$

Bevis

Første del af beviset føres ved induktion over længden af Q, og det inddeles i to tilfælde, hvor Q har lige henholdsvis ulige længde.

Antag, at $Q : q_1, \ldots, q_k$ har lige længde, og antag, at korollaret er opfyldt for alle mindre 2-veje af lige længde, der opfylder antagelserne. Hvis det indre af Q ikke indeholder punkter, der er komplette til X, så er korollaret opfyldt. Det kan derfor antages, at der findes punkter i det indre af Q, som er komplette til X. Hvis der i Q findes en endekant, som ikke er komplet til X, lad det være q_1q_2, da vælges i, for $3 \leq i \leq k-1$, mindst muligt, så q_i er komplet til X. Da vil $q_1, q_2, \ldots, q_i$ være en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Hvis $q_1, \ldots, q_i$ har ulige længde, så fåes en modstrid med korollar 2.3, idet punktet q_k er komplet til X, men ikke har naboer i det indre af $q_1, \ldots, q_i$. Dermed må $q_1, \ldots, q_i$ have lige længde. Det følger,

at $q_i, \ldots, q_k$ er en 2-vej af lige længde, der opfylder antagelserne, og per induktion er korollaret opfyldt for $q_i, \ldots, q_k$. Da $q_1, \ldots, q_i$ ikke indeholder kanter, der er komplette til X, er korollaret desuden opfyldt for $q_1, \ldots, q_k$, hvis en endekant ikke er komplet til X.
Det kan derfor antages, at begge endekanter i Q er komplette til X. Men så er $q_2, \ldots, q_{k-1}$ en 2-vej af lige længde, som opfylder antagelserne, og per induktion er korollaret dermed opfyldt for $q_2, \ldots, q_{k-1}$. Da begge endekanter i Q er komplette til X, vil Q dermed indeholde et lige antal kanter, der er komplette til X, og korollaret er opfyldt.

Antag, at Q har ulige længde, og antag, at korollaret er opfyldt for alle mindre 2-veje af ulige længde, som opfylder antagelserne. Hvis Q ikke indeholder et indre punkt, der er komplet til X, så er korollaret opfyldt. Det antages derfor, at der i det indre af Q findes punkter, som er komplette til X. Hvis Q indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til X, så er korollaret opfyldt, hvormed det kan antages, at Q indeholder et lige antal kanter, der er komplette til X. Hvis der i Q findes en endekant, som ikke er komplet til X, lad det være q_1q_2, da vælges i, for $3 \leq i \leq k-1$, mindst muligt, så q_i er komplet til X. Da vil $q_1, q_2, \ldots, q_i$ være en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Hvis $q_1, \ldots, q_i$ har ulige længde, så fåes en modstrid med korollar 2.3, idet punktet q_k er komplet til X, men ikke har naboer i det indre af $q_1, \ldots, q_i$. Dermed må $q_1, \ldots, q_i$ have lige længde, og dermed er $q_i, \ldots, q_k$ en 2-vej af ulige længde, som opfylder antagelserne, og per induktion er korollaret dermed opfyldt, hvis en endekant ikke er komplet til X, idet $q_1, \ldots, q_i$ ikke indeholder kanter, der er komplette til X.
Det kan derfor antages, at begge endekanter i Q er komplette til X. Men så er $q_2, \ldots, q_{k-1}$ en 2-vej af ulige længde, som opfylder antagelserne, og per induktion er korollaret dermed opfyldt for $q_2, \ldots, q_{k-1}$. Det vil sige, at enten indeholder $q_2, \ldots, q_{k-1}$ et ulige antal kanter, der er komplette til X, eller så er q_2 samt q_{k-1} de eneste punkter fra $q_2, \ldots, q_{k-1}$, der er komplette til X.
Hvis $q_2, \ldots, q_{k-1}$ indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til X, så er korollaret opfyldt for $q_1, \ldots, q_k$.
Hvis q_2 samt q_{k-1} er de eneste punkter i $q_2, \ldots, q_{k-1}$, der er komplette til X, så opnåes en modstrid med korollar 2.3, idet punkterne q_1 og q_k begge er komplette til X, men ikke har naboer i $q_3, \ldots, q_{k-2}$.

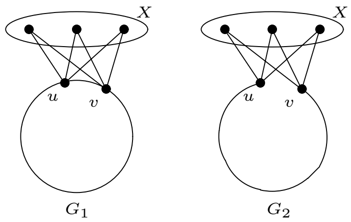
Korollarets anden del skal nu vises, så lad P være et hul. Hvis P kun indeholder en enkelt kant, som er komplet til X, og ikke indeholder andre punkter, der er komplette til X, så er korollaret opfyldt. Hvis P indeholder et lige antal kanter, der er komplette til X, så er korollaret opfyldt. Det kan derfor antages, at P indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til X, og indeholder mindst tre punkter, der er komplette til X. Idet P er et hul, har P lige længde, og der vil findes en 2-vej Q' i P, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Hvis Q' har ulige længde, opnåes en modstrid med korollar 2.3, og hvis Q' har lige længde, fjernes de indre punkter i Q' fra P, og en 2-vej af lige længde, hvis endepunkter er komplette til X, haves. Denne 2-vej vil per antagelse indeholde et ulige antal kanter, der er komplette til X, idet Q' ikke indeholder kanter, der er komplette til X. Men dette er i modstrid med korollarets første del. $\square$

Begrebet afhop defineres nu for et hul.

Definition 2.5 (Afhop og hat for hul)
Lad C være et hul i G, og lad uv være en kant på C. Et afhop for C i G ved uv er et afhop for 2-vejen $C - uv$ i $G - uv$.
En hat for C i G ved uv er et punkt i G, som er nabo til u og v i C, men ikke til andre punkter i C. $\diamond$

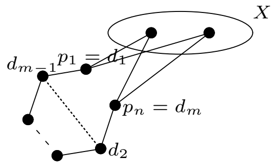
Lemma 2.6
Lad G være en Berge graf. Lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, lad C være et hul i $G - X$ af længde mindst seks, og lad $e = uv$ være en kant i C. Antag, at u og v er komplette til X, og de andre punkter i C ikke er komplette til X. Da vil X enten indeholde en hat for C ved uv eller indeholde et afhop for C ved uv. $\diamond$

Bevis
Lad $C : p_1, \ldots, p_n$, hvor $u = p_1$ og $v = p_n$. Lad $G_1 = \langle V(C) \cup X \rangle_G$, og lad $G_2 = G_1 - e$.



Figur 2.3: De to grafer G_1 og G_2.

Hvis G_2 er en Berge graf, så følger af lemma 2.2(ii), at X indeholder et afhop for $C - e$ ved $p_1p_n = uv$, da 2-vejen $C - e$ har ulige længde mindst fem. I dette tilfælde er lemmaet opfyldt, så det kan antages, at G_2 ikke er en Berge graf. Dermed må G_2 indeholde et hul eller et antihul D af ulige længde. Da D ikke har ulige længde i G_1, må D benytte både p_1 og p_n.
Antag først, at D er et hul af ulige længde i G_2. Idet hvert punkt i X er nabo til både p_1 og p_n, må højst et punkt fra X tilhøre D, da der ellers ikke haves et hul af ulige længde. Idet $G_2 - X$ ikke indeholder kredse, må mindst ét punkt fra X tilhøre D. Det vil sige, at netop ét punkt fra X tilhører D, lad det være x. Dermed er $D - \{x\}$ en 2-vej i $G_2 - X$ mellem p_1 og p_n, hvormed $D - \{x\} = C - e$. Idet D er et hul i G_2, følger, at x ikke har naboer i mængden $\{p_2, \ldots, p_{n-1}\}$, hvormed $x \in X$ er en hat for D ved $p_1p_n = uv$, og lemmaet er opfyldt.
Antag, at D er et antihul af ulige længde i G_2. Idet p_1 og p_n ikke er naboer i G_2, må de være fortløbende i D, så $D : d_1, \ldots, d_m$, for $m \geq 5$, hvor for eksempel $d_1 = p_1$ og $d_m = p_n$. Hverken d_2 eller d_{m-1} kan tilhøre X, da punkter i X er forbundet til både $p_1 = d_1$ og $p_n = d_m$. Dermed må d_1, d_2, d_{m-1} og d_m alle være punkter i C. Her skal kanterne d_1d_{m-1}, d_2d_m og d_2d_{m-1} findes i C, hvilket ikke kan lade sig gøre, da $n \geq 6$, se figur 2.4.



Figur 2.4: Den prikkede linie kan ikke forekomme.

Altså kan der ikke haves et sådant antihul D i G_2. □

Lemma 2.7
Lad G være en Berge graf. Lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \geq 5$ er ulige, så p_1 er det eneste punkt fra P, der er komplet til X, og p_1 og p_n er de eneste punkter fra P, som er komplette til Y. Da vil én af følgende være opfyldt:

(i) *Der findes et $x \in X$, som er ikke-nabo til samtlige af $p_2, \ldots, p_n$.*

(ii) *Der findes to ikke-naboer $x_1, x_2 \in X$, så $x_1, p_2, \ldots, p_n, x_2$ er en 2-vej.*

◇

2.2 Forbundet til trekant

I dette afsnit præsenteres først, hvordan et punkt kan være forbundet til en trekant, hvorefter begrebet udvides til en antisammenhængende mængde, der er forbundet til en trekant.

Definition 2.8 (Forbundet til en trekant)
Lad G være en graf, der indeholder $C_3 : a_1, a_2, a_3$ som delgraf. Et punkt $v \in V(G)$ kan forbindes til trekanten $\{a_1, a_2, a_3\}$ via tre 2-veje P_1, P_2 og P_3, hvis

- *de tre 2-veje er disjunkte.*
- *a_i er et endepunkt i P_i, for $1 \leq i \leq 3$.*
- *for $1 \leq i < j \leq 3$ er $a_i a_j$ den eneste kant i G mellem $V(P_i)$ og $V(P_j)$.*
- *v er det andet endepunkt for henholdsvis P_1, P_2 og P_3.*

◇

Lemma 2.9
Lad G være en Berge graf, og antag, at $v \in V(G)$ kan forbindes til en trekant $\{a_1, a_2, a_3\}$. Da er v nabo til mindst to af punkterne a_1, a_2 og a_3. ◇

Bevis
Lad v være forbundet via 2-vejene P_1, P_2 og P_3 til en trekant $\{a_1, a_2, a_3\}$, så P_i er 2-vejen mellem v og a_i, for $1 \leq i \leq 3$. Mindst to af 2-vejene vil have samme paritet, lad dette være P_1 og P_2. Der dannes nu en kreds a_1, P_1, v, P_2, a_2 af ulige længde uden korder. Da G er en Berge graf, må denne kreds have længde tre. Det betyder, at 2-vejene P_1 og P_2 har længde en, og v dermed er nabo til a_1 og a_2. □

Begrebet forbundet til trekant udvides nu til at gælde for en antisammenhængende mængde i stedet for blot et punkt.

Definition 2.10 (Antisammenhængende mængde forbundet til trekant)
Lad G være en graf, og lad X være en antisammenhængende mængde i G. Da siges X at være forbundet til en trekant $\{a_1, a_2, a_3\}$ via 2-vejene P_1, P_2 og P_3, hvis

- *de tre 2-veje P_1, P_2 og P_3 er disjunkte.*
- *a_i er et endepunkt i P_i, for $1 \leq i \leq 3$.*
- *for $1 \leq i < j \leq 3$ er $a_i a_j$ den eneste kant i G mellem $V(P_i)$ og $V(P_j)$.*
- *hver af P_1, P_2 og P_3 indeholder et punkt, der er komplet til X.*

◇

Det vil altså sige, at der i G haves en mængde X, hvori ingen punkter er forbundet til alle de andre punkter deri, og denne mængde er forbundet til en trekant via tre 2-veje, hvor disse 2-veje er disjunkte.

Følgende lemma omhandler, hvorledes en antisammenhængende mængde er forbundet til en trekant, og svarer til lemma 2.9 med en antisammenhængende mængde i stedet for et punkt.

Lemma 2.11
Lad G være en Berge graf. Lad X være en antisammenhængende mængde, og antag, at X kan forbindes til en trekant $\{a_1, a_2, a_3\}$ via 2-vejene P_1, P_2 og P_3. For $i = 1, 2, 3$ lad P_i have endepunkter a_i og b_i, og lad b_i være det eneste punkt i P_i, som er komplet til X. Da vil enten mindst to af P_1, P_2 og P_3 have længde nul, hvormed to af a_1, a_2 og a_3 er komplette til X, eller en af P_1, P_2 eller P_3 har længde nul, og de andre to har længde én. ◇

2.3 Balancerede par

I dette afsnit præsenteres balancerede par, komplette par og antikomplette par, hvilke alle benyttes meget i det resterende af rapporten. Især anvendes balancerede par ved den senere meget anvendte balancerede skæve opdeling.

Definition 2.12 (Balanceret par)
Lad G være en graf, og lad $A, B \subseteq V(G)$ være to mængder. Parret $\{A, B\}$ siges at være balanceret, hvis der ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i B, hvis indre tilhører A. Desuden skal der gælde, at der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A, hvis indre tilhører B. ⋄

Lemma 2.13
Lad G være en Berge graf, og lad $A, B \subseteq V(G)$ være to disjunkte mængder. Lad $v \in V(G) - (A \cup B)$ være et punkt, der er komplet til B og antikomplet til A. Da er $\{A, B\}$ et balanceret par. ⋄

Bevis
For at vise, at $\{A, B\}$ er et balanceret par, skal det vises, at der ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i B, hvis indre tilhører A, og at der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A, hvis indre tilhører B.
Da v er komplet til B og antikomplet til A, vil der, hvis der findes en sådan 2-vej, findes et hul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at G er en Berge graf. Ligeledes, hvis der findes en anti 2-vej som beskrevet, så findes der et antihul af ulige længde, hvilket også er i modstrid med, at G er en Berge graf. Det vil sige, at der ikke findes en sådan 2-vej og anti 2-vej, hvormed $\{A, B\}$ er et balanceret par. □

Definition 2.14 (Komplet par og antikomplet par)
Lad G være en graf, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være to mængder. Parret $\{X, Y\}$ siges at være komplet, hvis ethvert punkt i X er nabo til ethvert punkt i Y, og parret $\{X, Y\}$ siges at være antikomplet, hvis intet punkt i X er nabo til punkter i Y. ⋄

Et komplet par er således to mængder, der er komplette til hinanden.

Lemma 2.15
Lad G være en Berge graf, og lad $A, B \subseteq V(G)$ være et balanceret par. Lad $C \subseteq V(G) - (A \cup B)$, så gælder, at

(i) *hvis A er sammenhængende, ethvert punkt i B har en nabo i A, og $\{A, C\}$ er et antikomplet par, da er $\{C, B\}$ et balanceret par i G.*

(ii) *hvis B er antisammenhængende, intet punkt i A er komplet til B, og $\{B, C\}$ er et komplet par, da er $\{A, C\}$ et balanceret par i G.*

⋄

Bevis
Bemærk, at punkt (ii) er punkt (i) i komplementærgrafen. Det er derfor tilstrækkeligt at vise det ene punkt. Her vises punkt (ii).
Antag, at B er antisammenhængende, intet punkt i A er komplet til B, og $\{B, C\}$ er et komplet par. Antag, at $u, v \in A$ er nabopunkter, der er forbundet af en anti 2-vej P af ulige længde, hvis indre tilhører C. Dermed er $\{A, C\}$ ikke et balanceret par. Da B er antisammenhængende, samt u og v begge har ikke-naboer i B, vil de også være forbundet af en anti 2-vej Q, hvis indre tilhører B, og Q har lige længde, idet $\{A, B\}$ er et balanceret par. Nu danner P og Q sammen et antihul

af ulige længde. Dette kan dog ikke forekomme i G, da G er en Berge graf. Altså kan to sådanne punkter u og v ikke findes i grafen.
Antag, at der findes to ikke-nabopunkter $u, v \in V(C)$, der er forbundet af en 2-vej P af ulige længde, hvis indre tilhører A, hvilket er den anden mulige måde, hvorpå $\{A, C\}$ ikke er et balanceret par. Hvis P har længde tre, så findes der to nabopunkter $a_1, a_2 \in A$, hvor a_1 er nabo til u, og a_2 er nabo til v. Hermed haves en anti 2-vej af ulige længde mellem a_1 og a_2, da a_1, v, u, a_2 er en 2-vej i $\overline{G}$, og dette er allerede betragtet. Hermed kan det antages, at P har længde mindst fem. Endepunkterne i P er komplette til B, da de tilhører C, og ingen af punkterne i det indre af P er komplette til B, da de tilhører A. Ifølge lemma 2.2(ii) indeholder B et afhop for P, og dermed findes der en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter tilhører B, og hvis indre tilhører A. Dette kan dog ifølge definition 2.12 ikke lade sig gøre, da $\{A, B\}$ er et balanceret par.
Hermed er det vist, at der ikke findes 2-veje af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i C, hvis indre tilhører A, og der ikke findes anti 2-veje af ulige længde mellem to nabopunkter i C, hvis indre tilhører A. Hermed er $\{A, C\}$ et balanceret par. □

2.4 Anti 2-veje

I dette afsnit præsenteres først en sammenhæng mellem 2-veje og anti 2-veje i en Berge graf, hvorefter en sammenhæng mellem huller og anti 2-veje i en Berge graf vises.

Lemma 2.16
Lad G være en Berge graf, og lad $P : p_1, \dots, p_m$ være en 2-vej i G. Lad $2 \leq s \leq m-2$, og lad $Q : p_s, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}$ være en anti 2-vej, hvor $n \geq 3$ er ulige. Antag, at hvert punkt $q_1, \dots, q_n$ har en nabo i både $S = \{p_1, \dots, p_{s-1}\}$ og $R = \{p_{s+2}, \dots, p_m\}$. Da vil en af følgende gælde:

(i) *$s \geq 3$, og de eneste kanter, der ikke findes mellem $\{p_{s-2}, p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}\}$ og $\{q_1, \dots, q_n\}$, er $p_{s-1}q_n, p_sq_1, p_{s+1}q_n$.*

(ii) *$s \leq m-3$, og de eneste kanter, der ikke findes mellem $\{p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}, p_{s+3}\}$ og $\{q_1, \dots, q_n\}$, er $p_sq_1, p_{s+1}q_n, p_{s+2}q_1$.*

◇

Lemma 2.17
Lad G være en Berge graf, lad $C : p_1, \dots, p_m$ være et hul i G af lige længde, hvor $m \geq 6$, og lad $Q : p_1, q_1, \dots, q_n, p_2$ være en anti 2-vej af lige længde, hvor $n \geq 3$. Lad $R = \{p_3, \dots, p_m\}$, $S = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ og $T = \{q_2, \dots, q_n\}$. Lad $z \in V(G)$ være komplet til Q og antikomplet til R. Da findes højst ét punkt i R, som enten er komplet til S eller komplet til T, og det punkt er enten p_3 eller p_m. ◇

Bevis
Da $z \in V(G)$ er komplet til Q, er alle punkterne $q_1, \dots, q_n$ nabo til z, og da z ikke har naboer i R, kan $q_1, \dots, q_n$ ikke tilhøre $V(C)$. Lad $Y_1 \subseteq R$ være komplet til S, og lad $Y_2 \subseteq R$ være komplet til T.

Påstand 1: $Y_1 \subseteq Y_2 \cup \{p_m\}$, *og* $Y_2 \subseteq Y_1 \cup \{p_3\}$.

Antag, at et punkt $p_i \in Y_1$ og $p_i \notin Y_2$, for $3 \leq i \leq m$. Da p_i er komplet til S, og $Q - \{p_2\}$ er en anti 2-vej af ulige længde, vil $(Q - \{p_2\}) \cup \{p_iq_n, p_ip_1\}$ danne et antihul af ulige længde, hvis $i \neq m$. Da G er en Berge graf, må $i = m$, for der haves ikke antihuller af ulige længde i G. Tilsvarende hvis $p_j \in Y_2$ og $p_j \notin Y_1$, for $3 \leq j \leq m$, vil $(Q - p_1) \cup \{p_jq_1, p_jp_2\}$ danne et antihul af ulige længde, hvis $j \neq 3$, hvormed $j = 3$. Dette viser påstand 1.

Påstand 2: *Hvis* $Y_1 \nsubseteq \{p_m\}$*, så vil* $p_3 \in Y_1 \cap Y_2$*, og hvis* $Y_2 \nsubseteq \{p_3\}$*, så vil* $p_m \in Y_1 \cap Y_2$*.*

Antag, at $Y_1 \nsubseteq \{p_m\}$, og vælg i, hvor $3 \leq i \leq m-1$, mindst muligt, så $p_i \in Y_1$. Fra påstand 1 haves, at $p_i \in Y_2$, da $Y_1 \subseteq Y_2$. Hvis $i = 3$, så er påstanden opfyldt. Antag derfor, at $i > 3$. Hvis i er ulige, så vil 2-vejen $p_2, p_3, \ldots, p_i$ have ulige længde og have endepunkter, der er komplette til S. Desuden er ingen af 2-vejens indre punkter komplette til S, da i er valgt mindst muligt, så $p_i \in Y_1$. Det haves, at z, som er komplet til S, ikke har en nabo blandt 2-vejens indre punkter, hvilket er i modstrid med korollar 2.3. Dermed må i være lige, og det vil sige, at 2-vejen $U : p_i, \ldots, p_m, p_1$ har ulige længde mindst tre. Det haves, at U's endepunkter er komplette til T, og da z, som er komplet til T, ikke har naboer i det indre af U, er en modstrid opnået med korollar 2.3. Det vil sige, at en af antagelserne i korollar 2.3 ikke må være opfyldt. Den eneste antagelse, der ikke på forhånd er opfyldt, er antagelsen om, at ingen kanter i 2-vejen U er komplette til T. Det vil sige, at der findes en kant i U, der er komplet til T, hvormed et af de indre punkter i U må tilhøre Y_2, lad det være v. Altså findes der to nabopunkter i U, som begge er komplette til T, og dermed skal der mindst findes ét punkt, udover p_i og p_1, som er komplet til T. Da $i > 3$, vil et sådant punkt tilhøre R, og punkter i R, som er komplette til T, tilhører Y_2. Dermed må $v \in Y_1 \cup Y_2$ ifølge påstand 1. Men 2-vejen $Z : z, p_2, \ldots, p_i$ har ulige længde, dens endepunkter er komplette til $S \cup T$, og ingen indre punkter er komplette $S \cup T$. Desuden har v ingen nabo i det indre af Z, hvilket er i modstrid med korollar 2.3. Det vil sige, at antagelsen, om at $i > 3$, er forkert. Dermed må $i = 3$, og påstand 2 er opfyldt. Tilsvarende kan det vises, at for $Y_2 \nsubseteq \{p_3\}$ vil $p_m \in Y_1 \cap Y_2$. Dermed er påstand 2 vist.

Hvis $p_3, p_m \in Y_1 \cap Y_2$, så danner Q og anti 2-vejen p_2, p_m, p_3, p_1 et antihul af ulige længde, hvormed begge punkter ikke kan tilhøre $Y_1 \cap Y_2$. Derfor kan det antages, at $p_3 \notin Y_1 \cap Y_2$, hvormed det fra påstand 2 følger, at $Y_1 \subseteq \{p_m\}$. Desuden haves fra påstand 1, at $Y_2 \subseteq Y_1 \cup \{p_3\}$, og dermed er $Y_1 \cup Y_2 \subseteq \{p_3, p_m\}$. Det kan derfor antages, at $Y_1 \cup Y_2 = \{p_3, p_m\}$, for ellers er lemmaet opfyldt. Specielt må $p_3 \in Y_2$. Hvis også $p_m \in Y_2$, så er $p_3, \ldots, p_m$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til T, og hvis indre punkter ikke er komplette til T. Da z, som er komplet til T, ikke har en nabo blandt 2-vejens indre punkter, haves en modstrid med korollar 2.3. Dermed må $p_m \notin Y_2$, og $p_m \in Y_1$, men da er $p_3, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_m$ et antihul af ulige længde, hvilket er i en modstrid med, at G er en Berge graf. Det vil sige, at antagelsen, om at $Y_1 \cup Y_2 = \{p_3, p_m\}$, er forkert, hvormed $Y_1 \cup Y_2 \subset \{p_3, p_m\}$. Det betyder, at der findes højst ét punkt i R, som er komplet til S eller komplet til T, og det punkt er enten p_3 eller p_m. □

Der haves nu nogle redskaber, som gør det nemmere i senere beviser.

Kapitel 3

Skæve opdelinger

I dette kapitel præsenteres den første type dekomposition. I 1985 postulerede Chvátal i [Chvátal, 1985], at et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning ikke har en skæv opdeling. I afsnit 3.1 indføres den type skæve opdelinger, som anvendes i denne rapport, nemlig de balancerede skæve opdelinger. Desuden indføres i afsnit 3.2 løse skæve opdelinger, da disse kan anvendes som hjælp til at afgøre om skæve opdelinger er balancerede. Desuden benyttes løse skæve opdelinger til at vise hovedresultat (i) fra kapitel 1, nemlig at et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning ikke kan have en balanceret skæv opdeling, hvilket gøres i afsnit 3.3.

Definition 3.1 (Skæv opdeling)
En skæv opdeling af en graf G er en opdeling $\{A, B\}$ af $V(G)$, så A ikke er sammenhængende, og B ikke er antisammenhængende. ◇

Bemærk, at når $\{A, B\}$ er en skæv opdeling i G, så er $\{B, A\}$ en skæv opdeling i $\overline{G}$.

3.1 Balancerede skæve opdelinger

Definition 3.2 (Balanceret skæv opdeling)
Lad G være en Berge graf og lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i G. Hvis $\{A, B\}$ er et balanceret par, da siges G at have en balanceret skæv opdeling. ◇

Definition 3.3 (Komponent i A og antikomponent i B)
En maksimal sammenhængende delmængde af en ikke-tom mængde $A \subseteq V(G)$ kaldes en komponent i A, og en maksimal antisammenhængende delmængde af en ikke-tom delmængde $B \subseteq V(G)$ kaldes en antikomponent i B, hvor komponenterne og antikomponenterne skal være disjunkte. ◇

Lad $A_1, \dots, A_m$ være komponenterne i $A \subseteq V(G)$, så skal der ifølge definition 3.3 gælde, at for $u, v \in A_i$ findes der en vej mellem u og v, og for $u \in A_i$ og $v \in A_j$, hvor $i \neq j$, findes der ikke en vej mellem dem. Lad $B_1, \dots, B_n$ være antikomponenterne i $B \subseteq V(G)$, så skal der ifølge definition 3.3 gælde, at alle antikomponenterne er komplette til hinanden, for ellers vil de ikke være maksimale.

Lemma 3.4
Lad G være en Berge graf, og antag, at G har en skæv opdeling $\{A, B\}$, så enten en komponent i A eller en antikomponent i B kun indeholder ét punkt. Da har G en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Lad $A_1, \dots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, \dots, B_n$ være antikomponenterne i B. Dermed er mængderne $A_1, \dots, A_m$, for $m \geq 2$, parvis disjunkte og ikke-tomme, ligesom mængderne

$B_1, \dots, B_n$, for $n \geq 2$, er parvis disjunkte og ikke-tomme. Ved at tage komplementer, hvis nødvendigt, kan det, på grund af lemmaets antagelser, antages, at $|A_1| = 1$, lad det være $A_1 = \{a_1\}$. Lad N være mængden af punkter i G, der er nabo til a_1. Dermed er $N \subseteq B$, da naboer i A ville gøre, at $|A_1| > 1$, idet mindst én nabo så ville kunne medtages i A_1. Da $N \subseteq B$ er naboerne til a_1, er $V(G) - N$ ikke sammenhængende.
Antag, at N ikke er antisammenhængende. Da er $\{V(G)-N, N\}$ en skæv opdeling af $V(G)$, og det skal vises, at $\{V(G) - N, N\}$ er et balanceret par. Det vil sige vise, at der for $\{V(G) - N, N\}$ ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i N, hvis indre tilhører $V(G) - N$, og der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i $V(G)-N$, hvis indre tilhører N. To punkter i N, der er ikke-naboer, må nødvendigvis tilhøre samme antikomponent, for da alle antikomponenter er komplette til hinanden, vil to punkter i hver sin komponent være naboer. De to ikke-nabopunkter har også, som en følge af at alle antikomponenter er komplette til hinanden, fælles naboer. Antag, at der findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i N, hvis indre tilhører $V(G) - N$. Da danner anti 2-vejen sammen med punktet a_1 et hul af ulige længde. Dermed findes der ikke en sådan 2-vej. Da der per definition ikke findes veje mellem punkter i forskellige komponenter i A, er komponenterne antikomplette til hinanden, og den eneste måde, to punkter kan være naboer i $V(G) - N$, er ved at tilhøre samme komponent. Det vil sige, at hvis der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i $V(G) - N$, hvis indre tilhører N, da haves et hul af ulige længde. Dermed findes der ikke en sådan anti 2-vej. Det vil sige, at når N ikke er antisammenhængende, da har G en balanceret skæv opdeling.
Antag derfor, at N er antisammenhængende. Det vil sige, at N er en delmængde af en af $B_1, \dots, B_n$, lad det være B_1. Vælg $b_2 \in B_2$. Her er $N' = N \cup \{b_2\}$ ikke antisammenhængende, idet b_2 er komplet til B_1, og $V(G)-N'$ er ikke sammenhængende. Dermed er $\{V(G)-N', N'\}$ en skæv opdeling af $V(G)$, hvilket analogt med ovenstående kan vises er et balanceret par. Det vil sige, at også når N er antisammenhængende, så har G en balanceret skæv opdeling. $\square$

3.2 Løse skæve opdelinger

I dette afsnit indføres endnu en type skæve opdelinger. Det vises, at hvis en graf har en såkaldt løs skæv opdeling, da har den en balanceret skæv opdeling. Dermed, hvis der om en skæv opdeling kan konkluderes, at opdelingen er løs, da kan den ikke være et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning. Dette viser sig senere hensigtsmæssigt, da det ikke altid er muligt at afgøre, om en skæv opdeling er balanceret, men måske muligt at afgøre, om den er en løs skæv opdeling.

Definition 3.5 (Løs skæv opdeling)
En skæv opdeling $\{A, B\}$ af $V(G)$ er løs, hvis en af følgende gælder:

(i) *Et punkt i B er antikomplet til en komponent i A.*

(ii) *Et punkt i A er komplet til en antikomponent i B.*

$\diamond$

Lemma 3.6
Lad G være en Berge graf, der har en løs skæv opdeling, da har G en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Lad $\{A, B\}$ være en løs skæv opdeling af $V(G)$, hvilket vil sige, at enten har et punkt i B ingen naboer i en komponent i A, eller så er et punkt i A komplet til en antikomponent i B. Det kan altså antages ved at tage komplementer, hvis det er nødvendigt, at et punkt i B ikke har naboer i en komponent i A. Fasthold G, vælg en skæv opdeling $\{A, B\}$, en komponent A_1 i A og en antikomponent B_1 i B med $|B| - 2|B_1|$ mindst mulig, så et punkt i B_1 ikke har naboer i

A_1. Lad de andre komponenter i A være $A_2, \ldots, A_m$, og lad de andre antikomponenter i B være $B_2, \ldots, B_n$. Fra lemma 3.4 kan det antages, at $|A_i| \geq 2$ og $|B_j| \geq 2$, for ellers har G en balanceret skæv opdeling, og lemmaet er opfyldt. Det skal vises, at den skæve opdeling $\{A, B\}$ alligevel er et balanceret par.

Påstand: *For $2 \leq j \leq n$ er intet punkt i A komplet til B_j eller komplet til B_1, og ethvert punkt i $B - B_1$ har en nabo i A_1.*

For at vise første del af påstanden antages, at et punkt $v \in A$ er komplet til B_2, men ikke er komplet til B_1. Lad $A'_1 = A_1$, hvis $v \notin A_1$, og ellers lad A'_1 være en maksimal sammenhængende delmængde af $A_1 - \{v\}$. Det vil sige, at A'_1 er ikke-tom, da det blev antaget, at $|A_1| \geq 2$. Lad $A' = A - \{v\}$, og lad $B' = B \cup \{v\}$. Det vil sige, at B_2 er en antikomponent i B', da B' er hele B samt ét punkt, der er komplet til B_2. Altså er komponenterne i A' ikke sammenhængende, og komponenterne i B' er ikke antisammenhængende. Det vil sige, at $\{A', B'\}$ er en skæv opdeling. Da $\{A', B'\}$ er en skæv opdeling, haves en modstrid med, at B_1 er en antikomponent med $|B| - 2|B_1|$ mindst mulig, så et punkt i B_1 ingen naboer har i A_1. Modstriden er opnået, da v ikke er komplet til B_1, og dermed er indeholdt i B_1, hvormed $|B_1|$ er blevet et punkt større. Det vil sige, at $|B| - 2|B_1|$ nu er mindre end før, hvilket er i modstrid med minimaliteten af $|B| - 2|B_1|$. Antagelsen, om at der findes et punkt i A, der er komplet til B_2, er forkert, så første del af påstanden er vist.

For at vise anden del af påstanden antages, at et punkt $v \in B_2$ har en ikke-nabo i A_1. Da $|B_2| \geq 2$, følger, at $\{A \cup \{v\}, B - \{v\}\}$ er en skæv opdeling af $V(G)$, hvilket igen er i modstrid med, at B_1 er en antikomponent med $|B| - 2|B_1|$ mindst mulig, så et punkt i B_1 ingen naboer har i A_1. Det vil sige, at $v \in B_2$ må have en nabo i A_1, og dermed er anden del af påstanden vist.

Ifølge lemma 2.13 er $\{A_1, B_j\}$ et balanceret par, for $2 \leq j \leq n$, da et punkt tilhørende B_1 er komplet til B_j og ikke har naboer i A_1. Da G er en Berge graf, $\{A_1, B_j\}$ er et balanceret par for $2 \leq j \leq n$, og $A_i \subseteq V(G) - (A_1 \cup B_j)$, kan lemma 2.15 anvendes. Idet A_1 er sammenhængende, ethvert punkt tilhørende B_j har en nabo i A_1, og $\{A_1, A_i\}$ er et antikomplet par, følger af lemma 2.15(i), at $\{A_i, B_j\}$ er et balanceret par, for $2 \leq i \leq m$ og $2 \leq j \leq n$. Det mangler at blive vist, at alle par $\{A_i, B_1\}$ er balancerede par. Lad $1 \leq i \leq m$, og lad A'_i være mængden af punkter i A_i, der ikke er komplette til B_1. Fra påstanden haves, at intet punkt i A'_i er komplet til B_2, og $\{A'_i, B_2\}$ er ifølge lemma 2.15(ii) et balanceret par. På samme måde er intet punkt i A'_i komplet til B_1, og dermed er $\{A'_i, B_1\}$ ifølge lemma 2.15(ii) et balanceret par. Ifølge påstanden er $A'_i = A_i$, da intet punkt i A er komplet til en komponent i B, og dermed er $\{A_i, B_1\}$ også et balanceret par. Dette viser, at $\{A, B\}$ er et balanceret par, og dermed er $\{A, B\}$ en balanceret skæv opdeling. □

Lemma 3.7
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i en Berge graf G. Hvis et af følgende gælder:

(i) *der findes punkter $u, v \in B$, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører A, og er forbundet af en 2-vej af lige længde, hvis indre tilhører A.*

(ii) *der findes punkter $u, v \in A$, som er forbundet af en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører B, og er forbundet af en anti 2-vej af lige længde, hvis indre tilhører B.*

Da er $\{A, B\}$ en løs skæv opdeling, og G vil derfor have en balanceret skæv opdeling. ◇

Definition 3.8 (2-vej par og anti 2-vej par)
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i en graf G. Lad $A_1, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B. Hvis der for $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ findes en 2-vej af ulige længde i G, hvis endepunkter ikke er nabopunkter i B_j, og hvis indre tilhører A_i, så kaldes (i, j) et 2-vej par. Hvis der findes en anti 2-vej af ulige længde i G, hvis endepunkter er nabopunkter i A_i, og hvis indre tilhører B_j, så kaldes (i, j) et anti 2-vej par. ◇

I en balanceret skæv opdeling er det netop 2-vejen og anti 2-vejen i et 2-vej par henholdsvis anti 2-vej par, der ikke må findes.

Lemma 3.9
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i en Berge graf G. Lad $A_1, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B. Da vil en af følgende være opfyldt:

(i) *$\{A, B\}$ er et balanceret par eller en løs skæv opdeling.*

(ii) *For $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ er (i, j) et 2-vej par for alle i og j.*

(iii) *For $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ er (i, j) et anti 2-vej par for alle i og j.*

$\diamond$

Bevis
Det kan antages, at $\{A, B\}$ ikke er en løs skæv opdeling og ikke er et balanceret par, for ellers ville (i) være opfyldt.

Påstand: *Hvis der for et i, j findes en 2-vej af ulige længde mindst fem med endepunkter i B_j og indre i A_i, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at der findes en sådan 2-vej for $i = j = 1$. Lad det være $P_1 : b_1, p_1, \ldots, p_k, b'_1$, hvor $b_1, b'_1 \in B_1$, og $p_1, \ldots, p_k \in A_1$. Dermed har P_1 endepunkter i B_1 og indre i A_1.
Da $B_1, \ldots, B_n$ er antikomponenter i B, vil $B_1, \ldots, B_n$ alle være komplette til hinanden. Hermed er endepunkterne b_1 og b'_1 i P_1 komplette til B_j. Ingen indre punkter i P_1 er komplette til B_j, da det ville betyde, at $\{A, B\}$ er en løs skæv opdeling. Hermed kan lemma 2.2 benyttes, og B_j vil indeholde et afhop for P_1, da P_1 har længde mindst fem, og P_1 ikke har indre punkter, som er komplette til B_j. Et afhop for P_1 i B_j betyder, at der findes punkter $b_j, b'_j \in B_j$, som ikke er naboer, så kanterne $b_j b_1, b_j p_1, b_j b'_1, b'_j b_1, b'_j p_k$ og $b'_j b'_1$ findes i G. Dermed findes der en 2-vej $b_j, p_1, \ldots, p_k, b'_j$ af ulige længde mindst fem. Dette betyder, at $(1, j)$ er et 2-vej par, da der findes en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter ikke er nabopunkter i B_j, og hvis indre tilhører A_1. Det er nu vist, at (ii) er opfyldt for $i = 1$ og $1 \leq j \leq n$.

Lad $2 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$. Idet $\{A, B\}$ ikke er en løs skæv opdeling, vil der ikke findes punkter i B, som ikke har naboer i en komponent i A. Dermed vil både b_j og b'_j have naboer i A_i. Da A_i er en sammenhængende delgraf, vil der findes en 2-vej P_2 mellem b_j og b'_j, hvis indre tilhører A_i. Hvis P_2 har lige længde, så følger af lemma 3.7(i), at $\{A, B\}$ er en løs skæv opdeling, hvilket den er antaget ikke at være, så derfor må P_2 have ulige længde. Dermed er (i, j) også et 2-vej par for $2 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$.
Det er hermed vist, at det ved at tage udgangspunkt i 2-vej parret $(1, 1)$ kan vises, at $(1, j)$, for $2 \leq j \leq n$, er et 2-vej par, og (i, j), for $2 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$, er et 2-vej par. Det vil sige, at (i, j), for $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$, er et 2-vej par, hvormed (ii) er opfyldt. Påstanden er dermed vist.

Hermed kan det antages, at for alle i, j vil hver 2-vej af ulige længde mindst tre med endepunkter tilhørende B_j og indre tilhørende A_i have længde tre. Ligeledes vil hver anti 2-vej af ulige længde mindst tre med endepunkter tilhørende A_i og indre tilhørende B_j have længde tre, for ellers haves tilfældet i påstanden, hvor lemmaet er opfyldt.

Da en 2-vej af længde tre også er en anti 2-vej af længde tre, vil hvert 2-vej par også være et anti 2-vej par.

Antag, at $(1, 1)$ er et 2-vej par, altså at der findes $b_1, b'_1 \in B_1$ og $a_1, a'_1 \in A_1$, så b_1, a_1, a'_1, b'_1 er en 2-vej P_1.
Lad $2 \leq i \leq m$. Idet b_1 og b'_1 begge har naboer i A_i, da $\{A, B\}$ ellers er en løs skæv opdeling, findes der en 2-vej mellem dem, hvis indre tilhører A_i. Fra lemma 3.7(i) har denne 2-vej ulige længde. Ifølge påstanden vil lemmaet være opfyldt, hvis denne 2-vej har længde mindst fem, så derfor må den have længde tre. Dermed vil der findes $a_i, a'_i \in A_i$, så b_1, a_i, a'_i, b'_1 er en 2-vej. Altså er $(i, 1)$ et

2-vej par.
Lad $1 \leq i \leq m$ og $2 \leq j \leq n$. Idet b_j og b'_j begge har naboer i A_i, findes der en 2-vej mellem dem, hvis indre tilhører A_i. Denne 2-vej har længde tre. Dermed vil der findes $a_i, a'_i \in A_i$, så b_j, a_i, a'_i, b'_j er en 2-vej. Altså er (i, j) et 2-vej par.

Det er hermed vist, at (i, j) er et 2-vej par for alle i og j. Desuden er (i, j) et anti 2-vej par. Dermed er (ii) og (iii) opfyldt. □

Lemma 3.10
Lad G være en Berge graf. Antag, at der findes en opdeling af punktmængden $V(G)$ i fire ikke-tomme mængder X, Y, L og R, så der ikke findes kanter mellem L og R, og $\{X, Y\}$ er et komplet par. Hvis en af følgende er opfyldt:

(i) *Et punkt i $X \cup Y$ har ingen naboer i L eller ingen naboer i R.*

(ii) *Et punkt i $L \cup R$ er komplet til X eller komplet til Y.*

(iii) *$\{L, Y\}$ er et balanceret par.*

Da vil G have en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Her vil $\{L \cup R, X \cup Y\}$ udgøre en skæv opdeling, idet $L \cup R$ ikke er sammenhængende, da L og R ikke har kanter mellem sig, og $X \cup Y$ ikke er antisammenhængende, da $\{X, Y\}$ er et komplet par. Det følger af lemma 3.6, at hvis $\{L \cup R, X \cup Y\}$ er en løs skæv opdeling, så har G en balanceret skæv opdeling. Det kan derfor antages, at $\{L \cup R, X \cup Y\}$ ikke er en løs skæv opdeling. Dermed findes der ikke et punkt i $X \cup Y$, som ikke har naboer i en komponent i $L \cup R$, og der findes ikke et punkt i $L \cup R$, som er komplet til en antikomponent i X eller komplet til en antikomponent i Y. Det vil sige, at (i) og (ii) ikke er opfyldt. Derfor antages, at (iii) holder, altså at $\{L, Y\}$ er et balanceret par.
Lad $A_1, \ldots, A_m$ være komponenterne i $L \cup R$, og lad $B_1, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i $X \cup Y$. Idet X, Y, L og R alle er ikke-tomme, vil der altid findes en komponent A_i, hvor $A_i \subseteq L$, og der vil altid findes en antikomponent B_j, hvor $B_j \subseteq Y$. Da $\{L, Y\}$ er et balanceret par, vil der ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i B_j, hvis indre tilhører A_i, og der findes ikke en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A_i, hvis indre tilhører B_j. Det vil sige, at (i, j) hverken er et 2-vej par eller et anti 2-vej par. Antagelserne i lemma 3.9 er opfyldte for den skæve opdeling $\{L \cup R, X \cup Y\}$. Lemma 3.9(ii)-(iii) er ikke opfyldt, da (i, j) hverken er et 2-vej par eller et anti 2-vej par, og lemma 3.9(ii)-(iii) kræver, at det gælder for alle i og j. Dermed må lemma 3.9(i) gælde, og da $\{L \cup R, X \cup Y\}$ ikke er en løs skæv opdeling, må $\{L \cup R, X \cup Y\}$ være et balanceret par og dermed en balanceret skæv opdeling. □

Definition 3.11 (Kerne)
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling af en graf G. Da siges en antisammenhængende delmængde W af B at være kerne for den skæve opdeling, hvis en komponent i A ikke indeholder et punkt, som er komplet til W. ◇

Lemma 3.12
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i en Berge graf G. Lad W være kerne for den skæve opdeling. Lad A_1 være en komponent i A, og antag, at $\{A_1, W\}$ er et balanceret par. Da vil G have en balanceret skæv opdeling. ◇

Lemma 3.13
Lad G være en Berge graf, lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i G, og lad W være kerne for den skæve opdeling. Lad A_1 være en komponent i A, og antag følgende:

(i) *Ethvert par af ikke-nabopunkter i W, som har naboer i A_1, er forbundet af en 2-vej af lige længde, hvis indre tilhører A_1.*

(ii) *Ethvert par af nabopunkter i A_1, som har ikke-naboer i W, er forbundet af en anti 2-vej af lige længde, hvis indre tilhører W.*

Da har G en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Lad $w_1, w_2 \in W$ være to vilkårlige ikke-nabopunkter i W, som har naboer i A_1. Hvis w_1 og w_2 også er forbundet af en 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører A_1, så har G ifølge lemma 3.7 en balanceret skæv opdeling. Det kan dermed antages, at der ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i W, hvis indre tilhører A_1.
Lad $a, b \in A_1$ være to vilkårlige nabopunkter i A_1, som har ikke-naboer i W. Hvis a og b også er forbundet af en anti 2-vej af ulige længde med indre tilhørende W, så følger af lemma 3.7, at G har en balanceret skæv opdeling. Det kan derfor antages, at der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to vilkårlige nabopunkter i A_1, hvis indre tilhører W.
Definition 2.12 giver dermed, at $\{A_1, W\}$ er et balanceret par, hvormed G ifølge lemma 3.12 har en balanceret skæv opdeling. □

3.3 Minimalt modeksempel

I dette afsnit vises, at et minimalt modeksempel ikke kan have en balanceret skæv opdeling, hvilket er hovedresultat (i) fra kapitel 1.

Lemma 3.14
Lad G være et minimalt modeksempel, og lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i G. Lad $A_1, A_2, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, B_2, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B. Da gælder, at

(i) *for alle i, hvor $1 \leq i \leq m$, findes der et j, hvor $1 \leq j \leq n$, så (i, j) er et 2-vej par eller et anti 2-vej par.*

(ii) *for alle j, hvor $1 \leq j \leq n$, findes der et i, hvor $1 \leq i \leq m$, så (i, j) er et 2-vej par eller et anti 2-vej par.*

◇

Det er nu muligt at vise hovedresultat (i) fra kapitel 1.

Sætning 3.15
Lad G være et minimalt modeksempel. Da har G ikke en balanceret skæv opdeling, og dermed har G ikke løs skæv opdeling. ◇

Bevis
Ifølge definition 2.12 er en skæv opdeling $\{A, B\}$ et balanceret par, hvis der ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i B, hvis indre tilhører A. Desuden må der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A, hvis indre tilhører B. Ifølge lemma 3.14

vil der i et minimalt modeksempel indeholdende en skæv opdeling $\{A, B\}$ netop findes en sådan 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i B, hvis indre tilhører A. Ydermere vil der også findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A, hvis indre tilhører B. Derfor kan et minimalt modeksempel ikke have en balanceret skæv opdeling. Det følger af lemma 3.6, at et minimalt modeksempel ikke kan have en løs skæv opdeling. □

Hermed er det vist, at et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning ikke kan have en balanceret skæv opdeling. Dette betyder, at hvis der, om de fremover betragtede grafer, kan konkluderes, at de har en balanceret skæv opdeling, da behøves disse grafer ikke længere at blive betragtet. Fremover forsøges det at udelukke strukturer fra de minimale modeksempler.

Kapitel 4

Indførelse af prismer og dobbeltdiamanter

I dette kapitel introduceres de to første strukturer, som senere udelukkes fra et minimalt modeksempel. Under forudsætninger, om at visse strukturer ikke kan eksistere i et minimalt modeksempel, vises det i dette kapitel, at et minimalt modeksempel ikke kan have en skæv opdeling.

Definition 4.1 (Prisme)
En graf G kaldes en prisme, hvis den består af to trekanter $\{a_1, a_2, a_3\}$ og $\{b_1, b_2, b_3\}$ og tre 2-veje P_1, P_2 og P_3, hvor, for $1 \leq i \leq 3$, a_i og b_i er endepunkter for P_i. Desuden er a_ia_j og b_ib_j de eneste kanter mellem $V(P_i)$ og $V(P_j)$. Her siges 2-vejene P_1, P_2 og P_3 at danne en prisme, og grafen siges at være en aflang prisme, hvis mindst én af 2-vejene har længde mindst to. $\diamond$

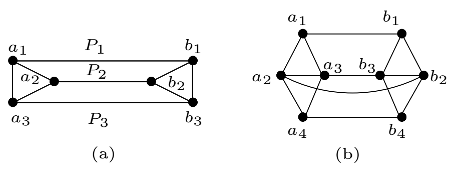
Bemærk, at det for 2-vejene P_1, P_2 og P_3 er tilladt, at $P_i = a_ib_i$, hvilket vil sige, at P_i er lig en enkelt kant.

Definition 4.2 (Lige og ulige prisme)
Lad P_i, for $i = 1, 2, 3$, være en 2-vej i G, så de tre 2-veje danner en prisme. Prismen er lige, hvis de tre 2-veje P_1, P_2 og P_3 har lige længde, og prismen er ulige, hvis de tre 2-veje har ulige længde. $\diamond$

Bemærk, at længden af de tre 2-veje i en prisme altid vil have samme paritet, da der ellers dannes huller af ulige længde. På figur 4.1(a) ses et eksempel på en prisme.

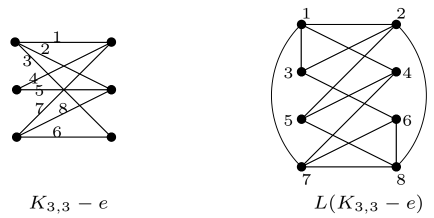
Definition 4.3 (Dobbeltdiamant)
En graf G kaldes en dobbeltdiamant, hvis den består af otte punkter $a_1, \ldots, a_4$, $b_1, \ldots, b_4$ og følgende kanter: $a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4$,$b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3, b_2b_4, b_3b_4$ og a_ib_i for $1 \leq i \leq 4$. $\diamond$

Bemærk, at hvis G er en dobbeltdiamant, så er $\overline{G}$ det også.
På figur 4.1(b) ses et eksempel på en dobbeltdiamant.



Figur 4.1: Eksempel på en prisme og en dobbeltdiamant.

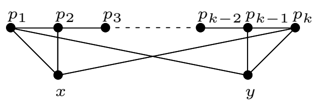
I følgende sætning bliver $K_{3,3}$ anvendt til at danne grafen $L(K_{3,3} - e)$, som er fremkommet ved at fjerne én kant e fra $K_{3,3}$ og derefter at danne liniegrafen, se figur 4.2.



Figur 4.2: Eksempel på $K_{3,3} - e$ og $L(K_{3,3} - e)$.

Sætning 4.4
Lad G være en Berge graf, der har en skæv opdeling $\{A, B\}$. Da vil enten $\{A, B\}$ være et balanceret par, eller så vil G eller $\overline{G}$ indeholde en aflang prisme, en dobbeltdiamant eller en $L(K_{3,3} - e)$ som induceret delgraf. $\diamond$

Bevis
Antag, at $\{A, B\}$ ikke er et balanceret par. Da er $\{A, B\}$ ifølge lemma 3.6 ikke en løs skæv opdeling. Lad $A_1, A_2, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, B_2, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B. Ifølge lemma 3.9 vil G enten have et 2-vej par (i, j) eller et anti 2-vej par (i, j) for alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ og $j \in \{1, \ldots, n\}$. Antag, at der findes et 2-vej par (i, j), der udgør en 2-vej $P : p_1, \ldots, p_k$, hvor $k \geq 6$, endepunkterne tilhører B_j, og de indre punkter tilhører A_i. Det antages, at $i = j = 1$, da de resterende tilfælde kan vises analogt. Hermed vil endepunkterne i P være komplette til de andre B_j-mængder, for $2 \leq j \leq n$. Specielt er endepunkterne p_1 og p_k komplette til B_2, og da $\{A, B\}$ ikke er en løs skæv opdeling, vil de indre punkter $p_2, \ldots, p_{k-1}$ ifølge definition 3.5(ii) ikke være komplette til B_2, idet de tilhører A_i. Ifølge lemma 2.2 indeholder B_2 et afhop for P. Lad dette afhop bestå af punkterne x og y, se figur 4.3.

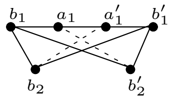


Figur 4.3: 2-vejen P og et afhop x, y for P.

Betragt den inducerede delgraf $\langle (V(P) \cup \{x, y\}) \rangle_G$. Denne delgraf er en aflang prisme, hvor $\{p_1, p_2, x\}$ og $\{y, p_{k-1}, p_k\}$ udgør trekanterne, hvormed sætningen er opfyldt i dette tilfælde.

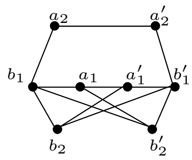
Hvis G indeholder en anti 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter tilhører en mængde A_i, og hvis indre tilhører en mængde B_j, vil $\overline{G}$ indeholde en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter tilhører A_i og hvis indre tilhører B_j. Dermed vil $\overline{G}$ indeholde en aflang prisme som induceret delgraf, og sætningen er opfyldt.

Antag derfor, at der i G ikke findes en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter tilhører B_j, og hvis indre tilhører A_i, og antag, at der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter tilhører A_i, og hvis indre tilhører B_j. Hermed vil ethvert 2-vej par være et anti 2-vej par, da de tilhørende 2-veje og anti 2-veje har længde tre, og dermed både er 2-veje og anti 2-veje. Altså er for eksempel $(1, 1)$ et 2-vej par og et anti 2-vej par. Betragt $(1, 1)$ som et 2-vej par. Det vil sige, at der findes $b_1, b'_1 \in B_1$, som ikke er naboer og to nabopunkter $a_1, a'_1 \in A_1$ så b_1, a_1, a'_1, b'_1 udgør en 2-vej. At $\{A, B\}$ ikke er en løs skæv opdeling, betyder blandt andet, at intet punkt a_i er komplet til en mængde B_j. Derfor har punkterne a_1 og a'_1 begge mindst én ikke-nabo i B_2. Lad a_1 være ikke-nabo til b_2, og lad a'_1 være ikke-nabo til b'_2, se figur 4.4.



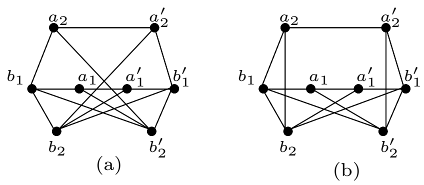
Figur 4.4: 2-vejen b_1, a_1, a_1', b_1' og de to punkter b_2 og b_2', hvor de stiplede linier indikerer eventuelle kanter.

Kanterne a_1b_2' og $a_1'b_2$ må nødvendigvis findes i grafen, for ellers danner $b_1, a_1, a_1', b_1', b_2$ eller $b_1, a_1, a_1', b_1', b_2'$ et hul af ulige længde fem, hvilket ikke findes i en Berge graf. Altså må b_2, a_1', a_1, b_2' udgøre en 2-vej.
Da $\{A, B\}$ ikke er en løs skæv opdeling, har alle punkter b_j mindst én nabo i mængderne $A_1, \ldots, A_m$. Derfor har punkterne b_1 og b_1' begge naboer i A_2, så lad a_2 være nabo til b_1, og lad a_2' være nabo til b_1'. Da $(2, 1)$ også er et 2-vej par, har b_1, a_2, a_2', b_1' længde tre. Kanterne a_2b_1' og $a_2'b_1$ findes ikke i grafen, for ellers ville $a_1, a_2, a_1', b_1, b_1'$ henholdsvis $a_1, a_2', a_1', b_1, b_1'$ danne antihuller af længde fem, se figur 4.5.



Figur 4.5: Situationen, hvor b_1 og b_1' har naboer a_2 henholdsvis a_2'.

Desuden må b_2 være nabo til et af punkterne a_2 eller a_2', for ellers er $b_2, b_1, a_2, a_2', b_1'$ et hul af længde fem. Tilsvarende vil b_2' være nabo til et af punkterne a_2 eller a_2'. Det kan ikke forekomme, at b_2 og b_2' har en fælles nabo blandt a_2 og a_2', for hvis for eksempel a_2 er nabo til både b_2 og b_2', så vil $a_2, b_2, a_1', a_1, b_2'$ være et hul af længde fem. Det vil sige, at der findes præcis to kanter mellem $\{a_2, a_2'\}$ og $\{b_2, b_2'\}$, og der er to muligheder for kanterne mellem $\{a_2, a_2'\}$ og $\{b_2, b_2'\}$. Disse to muligheder ses på figur 4.6.



Figur 4.6: De to muligheder for kanter mellem $\{a_2, a_2'\}$ og $\{b_2, b_2'\}$.

Fra figur 4.6 ses det, at (a) er isomorf med en dobbeltdiamant ved, i forhold til figur 4.1, at $a_2' = a_1, b_2 = a_2, b_1' = a_3, a_1' = a_4, a_2 = b_1, b_1 = b_2, b_2' = b_3$ og $a_1 = b_4$. Tilsvarende er (b) isomorf med en $L(K_{3,3}-e)$ ved, i forhold til figur 4.2, at $b_1 = 1, b_2' = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, a_2' = 5, a_1' = 6, b_2 = 7$ og $b_1' = 8$. Analogt kan det vises for (i, j) værende et anti 2-vej par. Det vil sige, at når det antages, at $\{A, B\}$ ikke er et balanceret par, så vil G eller $\overline{G}$ indeholde en aflang prisme, en dobbeltdiamant eller $L(K_{3,3} - e)$. $\square$

Med denne sætning er det vist, at hvis $L(K_{3,3} - e)$, aflange prismer og dobbeltdiamanter kan udelukkes som strukturer i et minimalt modeksempel, da har et minimalt modeksempel ikke en skæv opdeling, idet sætning 3.15 giver, at et minimalt modeksempel ikke har en balanceret skæv opdeling. Derfor betragtes i anden del af denne rapport grafer, som har en induceret delgraf, der er isomorf med en liniegraf, i håb om at udelukke disse grafer som minimale modeksempler. I tredje del af denne rapport betragtes grafer, der indeholder prismer som inducerede delgrafer, for også at udelukke disse grafer som minimale modeksempler. I fjerde del af denne rapport betragtes grafer, der indeholder dobbeltdiamanter som inducerede delgrafer for også at udelukke disse grafer.

Del II

Liniegrafer

Kapitel 5

Generelt om liniegrafer

I denne del af rapporten betragtes de grafer, som har en induceret delgraf, der er isomorf med en liniegraf. Målet er at vise, at en graf, der har $L(K_{3,3} - e)$ som induceret delgraf, ikke kan være et minimalt modeksempel. Hvis grafen $K_{3,3} - e$ betragtes, ses det, at denne graf er en todelt graf. Desuden er den en underdeling af K_4, idet $K_{3,3} - e$ har to punkter af grad to, som kan betragtes som en underdeling af to kanter i K_4, hvor K_4 er en 3-sammenhængende graf. Dette giver anledning til kun at betragte grafer, som indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af en todelt underdeling af en 3-sammenhængende graf. I de følgende fire kapitler betragtes altså en 3-sammenhængende graf J, en graf H, som er en todelt underdeling af J, og grafer G, som indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med $L(H)$.
I kapitel 6 vises resultater om en graf H, der er en todelt underdeling af en 3-sammenhængende graf. I kapitel 7 betragtes liniegrafen af H, hvor denne findes i grafen G, som er en Berge graf. I kapitel 8 betragtes en speciel form for liniegraf af en underdeling af K_4, som kaldes knuder. I det sidste kapitel i denne del af rapporten præsenteres strengsystem og samling af strenge. Kapitlet afsluttes med at bevise hovedresultaterne (ii)-(iv) fra kapitel 1.
Fælles for de tre hovedresultater (ii)-(iv) er, at en Berge graf G vises enten at have en balanceret skæv opdeling, indeholde et 2-vedhæng, eller udseendet af G kan præciseres. I hovedresultat (ii), præciseres G til at kunne være en liniegraf af en todelt graf, eller hvis G indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af en todelt underdeling af K_4, så er liniegrafen degenereret. I hovedresultat (iii) og (iv) præciseres udseendet af G, til at det for enhver todelt underdeling H af K_4 gælder, at hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af H. Desuden vil G i hovedresultat (iii) kunne være liniegrafen af $K_{3,3}$, og i hovedresultat (iv) vil G kunne være en bicograf.

Kapitel 6

Cykliske 3-sammenhængende grafer

I dette kapitel betragtes graferne J og H, og der fremsættes resultater om disse som benyttes i de efterfølgende kapitler. Som udgangspunkt betragtes H blot som en underdeling af en 3-sammenhængende graf J og ikke nødvendigvis som en todelt underdeling.

Definition 6.1 (Underdeling)
Underdeling af en kant i en graf J er en proces, hvor en kant $e = uv \in E(G)$ fjernes, et nyt punkt w tilføjes grafen, og kanterne uw og wv indsættes. Der kan foretages flere på hinanden følgende underdelinger. Hermed fremkommer en ny graf H, som siges at være en underdeling af J. $\diamond$

Definition 6.2 (Forgrening og forgreningspunkt)
Et forgreningspunkt i en graf H er et punkt v, hvor $\deg(v) \geq 3$. En forgrening i H er en maksimal 2-vej, således at ingen indre punkter på vejen er et forgreningspunkt. $\diamond$

Definition 6.3 (Cyklisk 3-sammenhængende graf)
Lad J være en 3-sammenhængende graf. Lad H være en underdeling af J, da siges H at være en cyklisk 3-sammenhængende graf. $\diamond$

Bemærk, at når en graf J underdeles, fremkommer kun punkter af grad to. Idet J er 3-sammenhængende, følger af sætning 3.20 i [Chartrand & Lesniak, 1996], at $\delta(J) \geq 3$, og dermed er $V(J) \subseteq V(H)$ mængden af forgreningspunkter i H.

Bemærk, at ved at fjerne et forgreningspunkt fra en cyklisk 3-sammenhængende graf, så er grafen stadig sammenhængende, da der mellem to forgreningspunkter altid findes tre veje. Dog kan der ikke altid fjernes to forgreningspunkter, da dette i nogle tilfælde vil dele grafen i en 2-vej, fremkommet ved underdelingen, og resten af grafen.
Bemærk yderligere, at en cyklisk 3-sammenhængende graf altid vil have en delgraf, der er isomorf med en underdeling af K_4. Dog er denne delgraf ikke altid induceret. Den mindste 3-sammenhængende graf er K_4, så der vil altid findes mindst fire punkter i en 3-sammenhængende graf. Vælg fire punkter a, b, c og d i en 3-sammenhængende graf, og det skal så vises, at grafen indeholder en eventuelt underdelt K_4. Mellem to punkter a og b findes der mindst tre veje, så der kan vælges en, som ikke benytter nogen af de andre punkter c og d. Mellem a og c vil der ligeledes findes en vej, som ikke benytter b og d, men denne vej kan eventuelt have noget til fælles med vejen fra a til b. Hvis de to veje har noget til fælles, så omvælges a til at være det sidste punkt på den fælles del af vejene, hvilket vil sige, at der nu er to disjunkte veje, hvor den ene er fra a til b, og den anden er fra a til c. Der skal nu findes en vej fra a til d, og der vil findes en, som ikke indeholder b og c. Hvis denne vej har noget fælles med en af de to andre veje, så vælges a blot om, og dermed haves tre disjunkte veje. Ligeledes findes disjunkte veje mellem b og c, b og d samt c

og d. Dermed haves en delgraf, som er en underdeling af K_4, men da det kun er disjunkte veje, er delgrafen ikke nødvendigvis induceret.

Lemma 6.4
Lad H være en todelt og cyklisk 3-sammenhængende graf. Da vil et af følgende gælde:

- (i) $H = K_{3,3}$.
- (ii) *H vil være en underdeling af K_4.*
- (iii) *H vil indeholde en delgraf H', hvor H' er en underdeling af en K_4, og hvor H' ikke indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i H'.*

$\diamond$

Ud fra dette lemma fåes, at todelte cykliske 3-sammenhængende grafer vil være en af tre typer af grafer. Denne opdeling af de todelte cykliske 3-sammenhængende grafer betragtes igen i kapitel 7, hvor den benyttes til at karaktererisere liniegraferne af cykliske 3-sammenhængende grafer.

Lemma 6.5
Lad H være en cyklisk 3-sammenhængende graf, og lad C og D være delgrafer i H, så $C \cup D = H$, $|V(C \cap D)| \leq 2$, $V(C) \neq V(H)$ og $V(D) \neq V(H)$. Da vil enten C eller D være indeholdt i en forgrening i H. $\diamond$

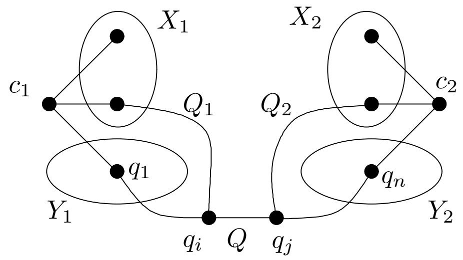
Bevis
Antag, at der findes $u \in V(C) - V(C \cap D)$ og $v \in V(D) - V(C \cap D)$, som begge er forgreningspunkter i H. Dermed skal der findes tre disjunkte veje mellem de to punkter u og v. Dette er dog ikke muligt, da $|V(C \cap D)| \leq 2$. Det vil sige, at kun én af C eller D kan indeholde et forgreningspunkt, som de ikke er fælles om.
Hvis $|V(C \cap D)| = 2$, og begge punkter er forgreningspunkter, så er lemmaet opfyldt, da enten C eller D ikke vil indeholde andre forgreningspunkter.
Der kan altså ikke findes forskellige forgreningspunkter i C og D, så dermed er C eller D indeholdt i en forgrening. $\square$

Lemma 6.6
Lad H være en graf, hvor $c_1, c_2 \in V(H)$ ikke er naboer, og $H - \{c_1, c_2\}$ er sammenhængende. Lad for $i = 1, 2$ kanterne incidente med c_i være opdelt i to mængder A_i og B_i, hvor $A_i \neq \emptyset$, og mindst én af mængderne B_1 og B_2 er ikke-tom. Antag, at for enhver kant $uw \in A_1 \cup A_2$ er $H - \{u, w\}$ sammenhængende, og antag, at intet punkt i H er incident med samtlige kanter i $A_1 \cup A_2$. Da vil et af følgende gælde:

- (i) *Hvis $B_1 \neq \emptyset$, så findes der en vej $P : p_1, p_2, \ldots, p_k$ i H, hvor $p_1p_2 \in A_1$, $p_2p_3 \in B_1$ samt $c_1 = p_2$, og hvor $p_{k-1}p_k \in A_2$ samt $c_2 = p_k$. Det vil sige, at der findes en vej i H med første kant tilhørende A_1, anden kant tilhørende B_1, og dermed er andet punkt c_1, sidste kant tilhører A_2, og sidste punkt er c_2.*
- (ii) *Hvis $B_2 \neq \emptyset$, så findes der en vej $P : p_1, p_2, \ldots, p_k$ i H, hvor $p_1p_2 \in A_2$, $p_2p_3 \in B_2$ samt $c_2 = p_2$, og hvor $p_{k-1}p_k \in A_1$ samt $c_1 = p_k$. Det vil sige, at der findes en vej i H med første kant tilhørende A_2, anden kant tilhørende B_2, og dermed er andet punkt c_2, sidste kant tilhører A_1, og sidste punkt er c_1.*

$\diamond$

Bevis
Mængderne A_1 og A_2 består begge af kanter, hvis ene endepunkt er lig c_1 henholdsvis c_2. Del punkterne, der er incidente med kanter i A_1, op i to mængder X_1 og $\{c_1\}$. Ligeledes sættes X_2 til at være mængden af punkter forskellig fra c_2, som er incidente med kanter i A_2. Tilsvarende sættes, for $i = 1, 2$, Y_i lig mængden af punkter forskellige fra c_i, som er incidente med kanter i B_i. Per antagelse må både X_1 og X_2 være ikke-tomme mængder, og mindst en af mængderne Y_1 og Y_2 er ikke-tom, lad det være Y_1. Da det er antaget, at der ikke findes et punkt i H, som er incident med samtlige kanter i $A_1 \cup A_2$, må $|X_1 \cup X_2| \geq 2$. Altså må der findes et $x_1 \in X_1$, så $x_1 \notin X_2$, og $H - \{c_1, x_1\}$ er en sammenhængende graf. Både X_2 og Y_1 findes stadig i $H - \{c_1, x_1\}$, så der findes en vej $Q : q_1, q_2, \ldots, q_n$ mellem mængden Y_1 og $X_2 \cup Y_2$, da $H - \{c_1, x_1\}$ er sammenhængende.
Det kan antages, at $q_1 \in Y_1$ og ingen andre punkter fra vejen tilhører Y_1. Desuden kan det antages, at $q_n \in X_2 \cup Y_2$, og ingen andre punkter fra vejen tilhører $X_2 \cup Y_2$. Hermed vælges den korteste vej, hvilket medfører, at $c_2 \notin Q$, da alle c_2's nabopunkter tilhører $X_2 \cup Y_2$. Da $x_1 \notin Q$, og $c_1 \notin Q$, er punkt (i) i lemmaet opfyldt, hvis $q_n \in X_2$, hvor $p_1 = x_1, p_2 = c_1, p_3 = q_1, \ldots, p_{k-1} = q_n$ og $p_k = c_2$. Derfor antages det, at $q_n \in Y_2$. Hvis et punkt v fra X_1 tilhører Q, vil punkt (ii) være opfyldt, hvor $p_1 \in X_2, p_2 = c_2, p_{k-1} = v$ og $p_k = c_1$, da X_2 indeholder mindst ét punkt, og ingen punkter fra X_2 tilhører Q. Det vil altså sige, at ingen af punkterne i Q tilhører $X_1 \cup X_2$.
Da $H - \{c_1, c_2\}$ er sammenhængende, findes der en korteste vej Q_1 fra X_1 til Q, og tilsvarende findes en korteste vej Q_2 fra X_2 til Q i $H - \{c_1, c_2\}$, se figur 6.1.



Figur 6.1: Udsnit af grafen med vejene Q, Q_1 og Q_2 samt mængderne X_1, X_2, Y_1 og Y_2.

Lad q_i være det punkt, som Q_1 har fælles med Q, og lad q_j være det punkt, som Q_2 har fælles med Q. Da X_1 og X_2 begge indeholder mindst ét punkt, henholdsvis x_1 og x_2, så findes der nu en vej $x_1, c_1, q_1, \ldots, q_j, Q_2, x_2, c_2$, der opfylder (i), og der findes en vej $x_2, c_2, q_n, q_{n-1}, \ldots, q_i, Q_1, x_1, c_1$, der opfylder (ii). □

Definition 6.7 ($\varrho_H(v)$)
Lad H være en graf, og lad $v \in V(H)$, da betegner $\varrho_H(v)$ mængden af kanter, der er incidente med v i H. ◇

Bemærk, at når liniegrafen $L(H)$ betragtes, bliver $\varrho_H(v)$ til punktmængden af en klike i $L(H)$.

Definition 6.8 (Mætte $L(H)$)
Lad H være en todelt og cyklisk 3-sammenhængende graf, og lad $X \subseteq E(H)$ være en mængde af kanter. Da siges X at mætte $L(H)$, hvis der for hvert forgreningspunkt $v \in V(H)$ højst findes én kant $e \in \varrho_H(v)$, som ikke tilhører X. ◇

Det vil for eksempel sige, at der for hver delgraf $K_3 \subset L(H)$ findes mindst to punkter fra K_3 i X, hvis X mætter $L(H)$.

Definition 6.9 (Biparitet)
Lad H være en sammenhængende og todelt graf. Da siges punkter $u, v \in H$ at have lige biparitet, hvis enhver vej mellem dem har lige længde. Tilsvarende siges de at have ulige biparitet, hvis enhver vej mellem dem har ulige længde. $\diamond$

Lemma 6.10
Lad H være en todelt og cyklisk 3-sammenhængende graf. Lad $X \subseteq E(H)$ opfylde, at

(I) *for enhver vej $P \subseteq H$ af lige længde mindst fire, hvis endekanter tilhører X, og hvis indre kanter ikke tilhører X, har enhver kant i X et endepunkt i det indre af P.*

(II) *der ikke findes tre veje i H med et endepunkt b til fælles og ellers disjunkte, så hver vej indeholder en kant i X, og mindst to af de tre vejes kanter, der er incidente med b, ikke tilhører X.*

Da vil et af følgende gælde:

(i) *Mængden X mætter $L(H)$.*

(ii) *Der findes en forgrening $B \in H$, så hver kant i X har et endepunkt i B.*

(iii) *For $|X| = 2$ findes der en vej $P \in H$ af lige længde mindst fire med begge endekanter i X, så der findes et forgreningspunkt af H i P, der ikke er incident med nogen af P's endekanter.*

(iv) *For $|X| = 4$ danner kanterne i X en kreds af længde fire, hvis punkter alle er forgreningspunkter.*

(v) *Der findes to punkter $c_1, c_2 \in V(H)$ af ulige biparitet, som ikke tilhører samme forgrening af H, så $X = \varrho_H(c_1) \cup \varrho_H(c_2)$.*

$\diamond$

Bevis
Beviset begynder med at vise en påstand.

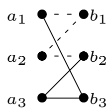
Påstand 1: *Der findes ikke en sammenhængende delgraf $T \subsetneq H - X$ og tre indbyrdes disjunkte kanter $x_1, x_2, x_3 \in X$, så hver x_i har mindst et endepunkt i T.*

For at vise denne påstand antages, at sådanne T, x_1, x_2 og x_3 findes, og T er en maksimal sammenhængende delgraf af $H - X$, hvilket vil sige, at naboer til T udenfor T er forbundet af kanter i X. Lad x_i have endepunkter a_i og b_i for $i = 1, 2, 3$, hvor a_1, a_2 og a_3 kan vælges, så de har lige biparitet, hvilket vil sige, at veje mellem dem har lige længde. Konstruér en graf K med punktmængde $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, hvor to punkter i K er naboer, hvis de er forbundet af en vej i T, der ikke indeholder andre punkter i K. Da T er sammenhængende og indeholder endepunkter fra x_1, x_2, x_3, følger det, at der findes en vej mellem x_i's endepunkt i T og x_j's endepunkt i T, for $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. Det vil sige, at der findes en komponent i K, der indeholder et endepunkt fra hver af disse tre kanter.

Hvis $a_1a_2 \in K$, så vil den tilsvarende vej i T være af lige længde, da a_1 og a_2 har lige biparitet. Dermed har a_1 og a_2 ifølge definition 6.9 en vej P af lige længde mellem sig. Vejen i T danner sammen med a_1b_1 og a_2b_2 en vej af lige længde mindst fire, hvis endekanter tilhører X, og hvis indre kanter ikke tilhører X.
Hvis hverken a_3 eller b_3 tilhører det indre af P, så danner det modstrid med (I).
Hvis a_3 tilhører det indre af P, så betragtes vejen mellem a_2 og a_3, som har lige længde og indeholder hverken a_1 eller b_1, hvilket er i modstrid med (I).
Hvis b_3 tilhører det indre af P, så haves tre veje med b_3 som eneste fælles punkt, hvor alle tre veje indeholder en kant fra X, og b_3 er kun incident med én kant fra X, da a_3 har lige biparitet med a_1 og a_2, hvilket er i modstrid med (II).

Hvis $b_1, b_2, b_3 \in T$, vil der findes veje mellem de tre punkter, hvor for eksempel b_2 er endepunkt for to af vejene. Hermed haves en modstrid med (II).
Det vil sige, at $a_1a_2 \notin K$.

Hvis $b_1, b_2, a_3 \in T$, så haves der veje mellem de tre punkter, hvor for eksempel b_2 er endepunkt for to af vejene. Hermed haves en modstrid med (II). Det vil sige, at eneste mulige kanter i K er kanter mellem a_i og b_j. Hvis a_i er nabo i K til både b_j og b_k, hvor $i \neq j \neq k$ og $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, så fåes der tre veje, som er incidente med samme punkt a_i, og hver vej indeholder en kant i X, og hvor der blandt endekanterne i de tre veje, som er incidente med det pågældende punkt, findes præcis en kant i X, hvilket er i modstrid med (II). Tilsvarende opnåes en modstrid med (II), hvis b_i er nabo til både a_j og a_k i K. Det vil sige, at komponenten i K, der indeholder mindst et endepunkt fra hver af kanterne x_1, x_2 og x_3, indeholder mindst fire af endepunkterne. Det kan derfor antages, at $a_1b_3, a_3b_2, a_3b_3 \in E(K)$, og de eneste andre mulige kanter i K er a_1b_1, a_2b_2 og a_2b_1.



Figur 6.2: Grafen K, hvor de stiplede kanter er de eneste andre mulige kanter.

Lad vejene i T svarende til $a_1b_3, b_2a_3, a_3b_3 \in E(K)$ være henholdsvis P_1, P_2 og P_3. Da P_3 sammenføjer nabopunkterne a_3 og b_3 uden at anvende kanten x_3, følger det, at $|V(P_3)| \geq 3$, for ellers haves en multipel kant. Vælg en maksimal sammenhængende delgraf $S \subseteq T$ indeholdende det indre af P_3 og ikke indeholdende hverken a_3 eller b_3, det vil sige, at $|V(S)| \geq 1$. Der findes ikke et punkt i P_3, som er forbundet til a_1, b_1, a_2 eller b_2, da hvis for eksempel et punkt i P_3 er forbundet til b_1, vil a_3b_1 og b_1b_3 være kanter i K, hvilket er i modstrid med, at disse kanter ikke kan findes i K, og på lignende vis kan et punkt i P_3 ikke være forbundet til a_1, a_2 eller b_2. Da følger, at $a_1, b_1, a_2, b_2 \notin V(S)$, og derfor er S også disjunkt fra P_1 og P_2, da S er maksimal sammenhængende. Som konsekvens, af at S er maksimal, er de eneste kanter i T mellem $V(S) \cup \{a_3, b_3\}$ og resten af H incidente med a_3 eller b_3. Da H er cyklisk 3-sammenhængende, og a_3 samt b_3 er naboer, følger det, at $H - \{a_3, b_3\}$ er sammenhængende, og derfor findes en kant $sv \in H$, så $s \in V(S)$ og $v \in V(H) - (V(S) \cup \{a_3, b_3\})$. Da $T \subseteq H - X$ er maksimal, følger det, at $sv \in X$, og af symmetri mellem a_1 og b_2 samt mellem b_1 og a_2 kan det antages, at $v \notin \{a_1, b_1\}$. Vælg en mindste vej i S mellem s og det indre af P_3, så kan den udvides ved en del af vejen P_3 og ved sv til at blive en vej $P_4 \in H$ af længde mindst to fra v til b_3 uden at bruge a_1, b_1 og a_3, og hvor kun vejens første kant tilhører X. Men så danner vejen b_1, a_1, P_1, b_3, vejen v, P_4, b_3 og vejen a_3, b_3 en modstrid med (II). Derfor findes der ikke en sammenhængende delgraf $T \subseteq H - X$ og tre indbyrdes disjunkte kanter $x_1, x_2, x_3 \in X$, så hver x_i har mindst et endepunkt i T, og påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Det kan antages, at* $|X| \geq 3$, *for ellers er* (ii) *eller* (iii) *opfyldt.*

For at vise påstanden ses først, at hvis $|X| \leq 1$, så gælder (ii). Dernæst antages, at $|X| = 2$, så lad $X = \{a_1b_1, a_2b_2\}$, hvor a_1 og a_2 har lige biparitet. Hvis punkter i en forgrening i H er incidente med begge disse kanter, vil (ii) gælde. Det kan derfor antages, at punkterne i en forgrening i H ikke er incidente med begge kanter, og specielt, at de fire punkter er forskellige. Da H er cyklisk 3-sammenhængende, og b_1 og b_2 ikke tilhører samme forgrening, vil $H - \{b_1, b_2\}$ være sammenhængende, idet der mellem b_1 og b_2 findes mindst et forgreningspunkt, og der mellem to vilkårlige forgreningspunkter findes mindst tre disjunkte veje, og b_1 og b_2 hver kun kan tilhøre en af disse veje. Der findes derfor en vej $P \in H$ mellem b_1 og b_2 af lige længde mindst fire, hvor første kant er b_1a_1, og sidste kant er a_2b_2. Da a_1 og a_2 ikke tilhører samme forgrening i H, findes et forgreningspunkt fra H i P, der ikke er incident med nogen af P's endekanter. Dermed gælder (iii), og påstand 2 er vist.

Det kan antages, at X ikke mætter $L(H)$, for ellers er (i) opfyldt, hvormed der findes et forgreningspunkt v i H, som er incident med mindst to kanter, der ikke tilhører X. Dermed findes en sammenhængende delgraf $A \subseteq H - X$ indeholdende v og mindst to kanter, som er incidente med v. Vælg en sådan delgraf A, så den er sammenhængende og maksimal. Her vil A indeholde punkter fra mindst to forgreninger i H, da de to kanter, der er incidente med v, tilhører hver sin forgrening. Fra påstand 1 findes der ikke tre kanter i X, som er parvis disjunkte, og hver kant har et endepunkt i A, hvilket betyder, at en maksimum parring blandt kanter i X, der har mindst et endepunkt i A, højst indeholder to kanter. De kanter i X, der har mindst et endepunkt i A, udgør en todelt delgraf, da H er todelt. Det følger fra Königs sætning [Bondy & Murty, 1976, side 74], at der findes to punkter c_1 og c_2, så hver kant i X med et endepunkt i A er incident med et af c_1 eller c_2.

Påstand 3: *Det kan antages, at hver kant i X er incident med et af c_1 eller c_2, for ellers er (ii) opfyldt.*

For at bevise påstanden antages modsat, altså at der findes en kant i X, der ikke er incident med et punkt fra $\{c_1, c_2\}$. Lad $B = H - V(A)$. På grund af maksimaliteten af A tilhører enhver af H's kanter mellem $V(A)$ og $V(B)$ mængden X og er derfor incidente med et af c_1 eller c_2. Dermed findes der to delgrafer $C, B \subseteq H$ med $V(C) = V(A) \cup \{c_1, c_2\}$, $C \cup B = H$, $V(C \cap B) = \{c_1, c_2\}$ og $A \subseteq C$. Specielt er $V(C) \neq V(H)$ og $V(B) \neq V(H)$. Da H er cyklisk 3-sammenhængende, følger af lemma 6.5, at en af C eller B er indeholdt i en forgrening af H. Her er C ikke indeholdt i en forgrening af H, fordi den indeholder A, som ikke er indeholdt i en forgrening. Det vil sige, at B er indeholdt i en forgrening E. Specielt indeholder E punkterne c_1 og c_2. Hvis der findes en kant i X, som har et endepunkt i A, vil denne kant være incident med enten c_1 eller c_2, altså har kanten et endepunkt i E. Dermed vil alle kanter i X have mindst ét endepunkt i E, hvormed (ii) er opfyldt. Det vil sige, at hvis der findes en kant i X, der ikke er incident med et af c_1 eller c_2, så er (ii) opfyldt, hvormed påstand 3 er vist.

Derfor antages, at c_1 og c_2 ikke tilhører samme forgrening, for ellers gælder (ii), og som konsekvens er $H - \{c_1, c_2\}$ sammenhængende. I det følgende deles op i to tilfælde: Tilfældet, hvor c_1 og c_2 har lige biparitet, og tilfældet, hvor c_1 og c_2 har ulige biparitet.
Antag, at c_1 og c_2 har lige biparitet. Da $|X| \geq 3$ ifølge påstand 2, kan det ifølge påstand 3 antages, at der findes mindst to kanter i X, der er incidente med c_1, lad det være c_1a_1 og c_1a_2. Hvis der findes en kant $c_2a_3 \in X$, hvor $a_3 \neq a_1$ og $a_3 \neq a_2$, så kan der vælges en minimal vej i $H - \{c_1, c_2\}$ mellem a_3 og et af a_1 eller a_2, som har lige længde mindst to, da c_1 og c_2 har lige biparitet. Dette danner en modstrid med (I), da $a_1c_1 \in X$ eller $a_2c_2 \in X$ ikke er incident med et indre punkt på vejen. De eneste mulige kanter i X, der er incidente med c_2, er dermed c_2a_1 og c_2a_2. Hvis både c_2a_1 og c_2a_2 findes, så ved at gentage ovenstående med c_1 og c_2 ombyttet, følger det, at der ikke findes andre kanter, som er incidente med c_1. Hvis c_1, c_2, a_1 og a_2 alle er forgreningspunkter, så er (iv) opfyldt. Hvis tre af c_1, c_2, a_1 og a_2, to af c_1, c_2, a_1 og a_2, et af c_1, c_2, a_1 og a_2 eller ingen af c_1, c_2, a_1 og a_2 er forgreningspunkter, så er (ii) opfyldt. Hvis en af kanterne c_2a_1 og c_2a_2 findes, så vil en forgrening indeholdende c_1a_1 henholdsvis c_1a_2 opfylde (ii). Hvis ingen af c_2a_1 og c_2a_2 findes, så vil en forgrening indeholdende c_1 opfylde (ii). Dette fuldender beviset for tilfældet, hvor c_1 og c_2 har lige biparitet.

Antag nu, at c_1 og c_2 har ulige biparitet. For $i = 1, 2$ sættes $A_i = \varrho_H(c_i) \cap X$ og $B_i = \varrho_H(c_i) - A_i$, hvilket vil sige, at A_i består af kanter, der er incidente med c_i, som tilhører X, og B_i består af kanter, der er incidente med c_i, som ikke tilhører X. Hvis for eksempel $A_2 = \emptyset$, så er c_1 incident med samtlige kanter i X, og dermed er (ii) opfyldt. Det antages derfor, at A_1 og A_2 begge er ikke-tomme. Da $c_1 \neq c_2$, samt c_1 og c_2 har ulige biparitet, er intet punkt incident med alle kanter i $A_1 \cup A_2$. Hvis både B_1 og B_2 er tomme, da gælder (v), så det kan antages, at mindst en af dem er ikke-tom, lad det være B_1. For enhver kant $c_ia_i \in A_1 \cup A_2$ er $H - \{c_i, a_i\}$ sammenhængende, da de er nabopunkter, og H er cyklisk 3-sammenhængende. Nu er antagelserne i lemma 6.6 opfyldte, og det kan derfor antages, at der findes en vej i H, hvis første kant tilhører A_1, hvis anden kant tilhører B_1, og dermed er det andet punkt på vejen lig c_1, hvis sidste punkt er lig c_2, og hvis sidste kant tilhører A_2. Ved at vælge en sådan vej kortest mulig, følger det, at kun én kant i A_2 er incident med et punkt i vejens indre. Da vejen har lige længde, og (I) skal gælde, må $|A_2| = 1$, da alle kanter i X skal være incidente med et punkt i vejens indre. Men så kan c_2 erstattes med det andet endepunkt i A_2, da det så er incident med alle kanter i X, som c_1 ikke er incident med, og dermed haves det ovenstående tilfælde omhandlende lige biparitet, hvilket allerede er bevist. $\square$

Kapitel 7

Optræden af liniegrafer

I dette kapitel betragtes de grafer, som indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med liniegrafen af en todelt underdeling af en 3-sammenhængende graf. Der vises forskellige egenskaber ved disse grafer, som benyttes i de efterfølgende kapitler. Kapitlet omhandler først optrædener af 3-sammenhængende grafer generelt. Derefter følger afsnit 7.1 omhandlende degenererede optrædener, og til sidst afsnit 7.2 omhandlende overskyggede optrædener.

Definition 7.1 (Optræden)
Lad G og J være grafer. Hvis der findes en todelt underdeling H af J, så $L(H)$ er isomorf med en induceret delgraf af G, da siges G at indeholde en optræden af J. Her kaldes $L(H)$ en optræden af J i G. ◇

Dette vil sige, at hvis en graf indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med en liniegraf $L(H)$, da er $L(H)$ kun en optræden i G, hvis H er en todelt underdeling af en 3-sammenhængende graf.

Lemma 7.2
Lad G være en Berge graf. Lad J være en 3-sammenhængende graf, og lad $L(H)$ være en optræden af J i G. Lad $y \in V(G) - V(L(H))$, og lad X være mængden af punkter i $L(H)$, der er naboer til y i G. Da gælder et af følgende:

(i) *Mængden X mætter $L(H)$.*

(ii) *Der findes et forgreningspunkt $v \in H$, hvor $X \subseteq \varrho_H(v)$.*

(iii) *Der findes en forgrening $B \subseteq H$, hvor $X \subseteq E(B)$.*

(iv) *Der findes en forgrening $B \subseteq H$ med endepunkter b_1 og b_2, så $X - E(B) = \varrho_H(b_1) - E(B)$.*

(v) *Der findes en forgrening $B \subseteq H$ af ulige længde med endepunkter b_1 og b_2, så $X - E(B) = (\varrho_H(b_1) \cup \varrho_H(b_2)) - E(B)$.*

(vi) *Der findes to punkter $c_1, c_2 \in V(H)$ med ulige biparitet, som ikke tilhører den samme forgrening i H, så $X = \varrho_H(c_1) \cup \varrho_H(c_2)$.*

Specielt vil enten (i) eller (vi) gælde, eller så findes højst to forgreningspunkter i H, der er incidente med mere end en kant i X, og det er kun hvis (v) gælder, at der kan findes to forgreningspunkter i H, der er incidente med mere end en kant i X. ◇

Definition 7.3 (N_v og R_{uv})
Lad G være en graf, lad H være en underdeling af en 3-sammenhængende graf J, og lad $L(H)$ være en induceret delgraf i G. For hvert punkt $v \in V(J)$ betegnes mængden af kanter i H, der er incidente med v med N_v. For hver kant $uv \in E(J)$ betegnes mængden af kanter på forgreningen i H mellem u og v med R_{uv}. ◇

Ifølge ovenstående definition vil N_v være kanter i H, så dermed er N_v en punktmængde i $L(H)$, hvilket vil sige, at $N_v \subseteq V(L(H))$. Idet mængden N_u betegner mængden af kanter i H, der er incidente med samme punkt, er N_u i $L(H)$ punktmængden af en klike i $L(H)$. Desuden er R_{uv} en punktmængde i $L(H)$, så $R_{uv} \subseteq V(L(H))$.

Definition 7.4 (Lokal med hensyn til $L(H)$)
Lad G være en graf, lad H være en underdeling af en 3-sammenhængende graf J, og lad $L(H)$ være en induceret delgraf i G. En delmængde X af $V(L(H))$ er lokal med hensyn til $L(H)$, hvis enten $X \subseteq N_v$ for et punkt $v \in V(J)$, eller $X \subseteq R_{uv}$ for en kant $uv \in E(J)$. $\diamond$

Definition 7.5 (Vedhæftning)
Lad G være en graf, og lad K være en induceret delgraf i G. Hvis $F \subseteq V(G)$ er en sammenhængende mængde, som er disjunkt fra $V(K)$, så siges et punkt i $V(K)$ at være en vedhæftning for F, hvis det har en nabo i F. $\diamond$

Mængden af vedhæftninger er altså mængden af punkter i K, som har en nabo i F.

Lemma 7.6
Lad G være en Berge graf. Lad J være en 3-sammenhængende graf, og lad H være en underdeling af J. Lad $L(H)$ være en optræden af J i G, og lad F være en sammenhængende mængde af punkter, som er disjunkt fra $V(L(H))$, så mængden af vedhæftninger for F i $L(H)$ ikke er lokal. Antag, at for hvert punkt $v \in F$ vil mængden af naboer til v i $L(H)$ ikke mætte $L(H)$.
Da findes der en 2-vej P i G med $V(P) \subseteq F$ med endepunkter p_1 og p_2, så et af følgende gælder:

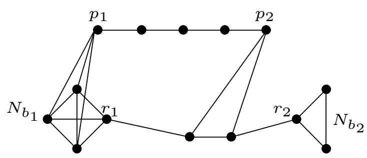
(*i*) *Der findes punkter $c_1, c_2 \in V(H)$, som ikke tilhører samme forgrening af H, så p_i er komplet til $\varrho_H(c_i)$, for $i = 1, 2$, i G, og der findes ikke andre kanter mellem $V(P)$ og $V(L(H))$.*

(*ii*) *Der findes en kant b_1b_2 i J, så en af følgende er opfyldt, hvor r_i er det eneste punkt i $N_{b_i} \cap R_{b_1b_2}$ for $i = 1, 2$:*

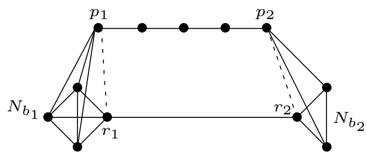
- (*a*) *p_1 er nabo til alle punkter i $N_{b_1} - r_1$ i G, p_2 har en nabo i $R_{b_1b_2} - r_1$, og hver kant mellem $V(P)$ og $V(L(H)) - r_1$ er enten mellem p_1 og $N_{b_1} - r_1$ eller mellem p_2 og $R_{b_1b_2} - r_1$.*
- (*b*) *p_i er nabo til alle punkter i $N_{b_i} - r_i$ i G for $i = 1, 2$, der findes ikke andre kanter mellem $V(P)$ og $V(L(H))$ undtaget eventuelt p_1r_1 og p_2r_2, og længden af P har samme paritet som $\langle R_{b_1b_2} \rangle_G$.*
- (*c*) *$p_1 = p_2$, p_1 er nabo til alle punkter i $(N_{b_1} \cup N_{b_2}) - \{r_1, r_2\}$, alle naboer til p_1 i $V(L(H))$ tilhører $N_{b_1} \cup N_{b_2} \cup R_{b_1b_2}$, og $\langle R_{b_1b_2} \rangle_G$ har lige længde i G.*
- (*d*) *$r_1 = r_2$, p_i er nabo til alle punkter i $N_{b_i} - r_i$ i G for $i = 1, 2$, der findes ikke andre kanter mellem $V(P)$ og $V(L(H)) - r_1$, og P har lige længde.*

$\diamond$

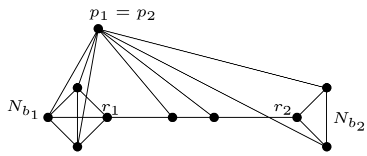
På de følgende fire figurer ses eksempler på tilfældene (a)-(d).



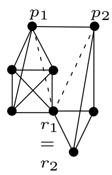
Figur 7.1: Eksempel på (a).



Figur 7.2: Eksempel på (b).



Figur 7.3: Eksempel på (c).



Figur 7.4: Eksempel på (d).

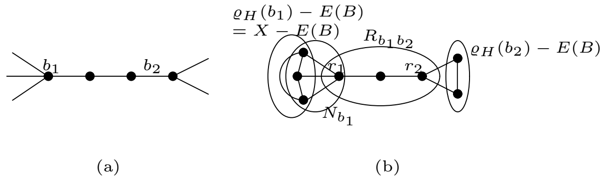
Her er (d) et specialtilfælde af (b), da p_i i begge tilfælde er nabo til alle punkter i $N_{b_i} - r_i$, og $\langle R_{b_1 b_2} \rangle_G$ i (d) har længde nul, så den har lige paritet.

Bevis

Bemærk, at H er en todelt graf, da $L(H)$ er en optræden af J i H.

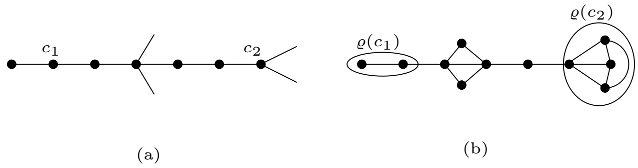
Det kan antages, at F er mindst mulig, så mængden af vedhæftninger for F i $L(H)$ ikke er lokal, da en større mængde indeholdende F så ikke kan være lokal. Lad X være mængden af vedhæftninger for F i $L(H)$. Antag først, at $|F| = 1$, og lad $F = \{y\}$. Antagelserne i lemma 7.2 er opfyldte, og dermed kan lemma 7.2 anvendes på y, hvormed en af de seks konklusioner i lemma 7.2 skal være opfyldt. Lemma 7.2(i) er ikke opfyldt, da X per antagelse ikke mætter $L(H)$. Lemma 7.2(ii)-(iii) er ikke opfyldte, da X ikke er lokal. Det vil sige, at punkt (iv), (v) eller (vi) i lemma 7.2 må være opfyldt.

Hvis lemma 7.2(iv) er opfyldt, skal der findes en forgrening B i H med endepunkter b_1 og b_2, så X udover kanterne i B, som er punkter i G, er lig kanter i H, der er incidente med b_1 undtaget kanterne i B. Kanter i H, der er incidente med b_1, er desuden punkter i G. En forgrening i H svarer til en kant i J, da H er en underdeling af J.



Figur 7.5: (a) Et eksempel på en forgrening B i H. (b) Liniegrafen for (a), hvor $N_{b_1}, R_{b_1 b_2}$ og $\varrho_H(b_1) - E(B)$ er markeret.

Da $F = \{y\}$, må $y = p_1 = p_2$. Hvis y kun har naboer i N_{b_1}, så er det i modstrid med, at X ikke er lokal. Altså må y have en nabo i $R_{b_1 b_2} - r_1$, hvormed $(ii)(a)$ er opfyldt.
Hvis lemma 7.2(v) er opfyldt, skal der findes en forgrening B i H af ulige længde med endepunkter b_1 og b_2, så X udover kanterne i B er lig kanter i H, der er incidente med enten b_1 eller b_2 undtaget kanterne i B. På figur 7.5 indeholder $X - E(B)$, udover $\varrho_H(b_i) - E(B)$, også $\varrho_H(b_2) - E(B)$. Dette stemmer overens med $(ii)(c)$, da $y = p_1 = p_2$ netop er nabo til alle punkter i $(N_{b_1} \cup N_{b_2}) - \{r_1, r_2\} = (\varrho_H(b_1) \cup \varrho_H(b_2)) - E(B)$, og alle dens naboer tilhører $N_{b_1} \cup N_{b_2} \cup R_{b_1 b_2}$, da X er y's naboer, og det fra lemma 7.2(v) haves, at $X \subseteq \varrho_H(b_1) \cup \varrho_H(b_2) \cup E(B) = N_{b_1} \cup N_{b_2} \cup R_{b_1 b_2}$. Lad $u \in N_{b_1}$ og $w \in N_{b_2}$, så er y nabo til u og w, og dermed er $R_{b_1 b_2} \cup \{u, w, y\}$ et hul, hvormed $\langle R_{b_1 b_2} \rangle_G$ har lige længde i G, som krævet i $(ii)(c)$. Altså er $(ii)(c)$ opfyldt, hvis lemma 7.2(v) er opfyldt.
Hvis lemma 7.2(vi) er opfyldt, skal der findes to punkter c_1 og c_2 i H, som er forbundet af en vej af ulige længde, og som ikke tilhører den samme forgrening. Dermed er X lig de kanter, der er incidente med c_1, og de kanter, der er incidente med c_2, se figur 7.6.



Figur 7.6: (a) De to punkter c_1 og c_2 samt vejen mellem dem i H. (b) $\varrho(c_1)$ og $\varrho(c_2)$ udgør sammen mængden X i G.

I dette tilfælde er (i) opfyldt, da $y = p_1 = p_2$ er komplet til $\varrho(c_1)$ og $\varrho(c_2)$, da $X = \varrho(c_1) \cup \varrho(c_2)$, og X er y's naboer. Det er hermed vist, at når $|F| = 1$, så vil lemmaet være opfyldt. Dermed kan det antages, at $|F| \geq 2$.

Påstand 1: *Der findes to vedhæftninger x_1 og x_2 for F, så $\{x_1, x_2\}$ ikke er lokal.*

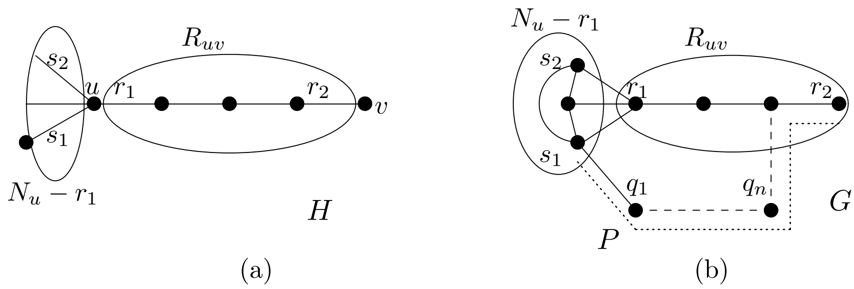
Lad $X \subseteq E(H)$, altså lad X være en mængde af kanter fra H. Antag, at B er en forgrening i H, hvor der findes en kant $x_1 \in X$, der tilhører B, men ikke er incident med et forgreningspunkt i B. Hvis $X \subseteq E(B)$, vil X være lokal, så derfor er $X \not\subseteq E(B)$, idet X per antagelse ikke er lokal. Da $|X| \geq 2$, idet $|F| \geq 2$, vil der altså findes en kant $x_2 \in X$, så $x_2 \notin B$. Hermed er $\{x_1, x_2\}$ ikke lokal, og påstanden er opfyldt.
Antag derfor, at hver kant i X er incident med et forgreningspunkt i H. Vælg $x_1 \in X$ i en forgrening B_1 i H, hvor x_1 er incident med et forgreningspunkt b_1. Der vil findes en kant $x_2 \in X$, som ikke er incident med b_1, for ellers vil alle kanter i X være incidente med b_1, og det vil sige, at $X \subseteq N_{b_1}$, hvormed X er lokal. Hvis $x_2 \notin E(B_1)$, så vil $\{x_1, x_2\}$ ikke være lokal, og påstand 1 er opfyldt, hvormed det kan antages, at $x_2 \in E(B_1)$. Da x_2 skal være incident med et forgreningspunkt, må x_2 være incident med det andet endepunkt b_2 i B_1. Der må findes en kant $x_3 \in X$, hvor $x_3 \notin E(B_1)$, for ellers vil $X \subseteq R_{b_1 b_2}$. Idet x_3 ikke kan være incident med både b_1 og b_2, så lad det være b_1, som x_3 ikke er incident med. Da vil $\{x_1, x_3\}$ ikke være lokal, hvormed påstand 1 er vist.

Idet F er valgt mindst mulig, vil F være mindst mulig med hensyn til, at x_1 og x_2 begge er vedhæftninger for F, og hvor $\{x_1, x_2\}$ ikke er lokal. Idet x_1 og x_2 ikke er naboer, da $\{x_1, x_2\}$ så vil være lokal, vil F, der skal være sammenhængende, bestå af punkterne $q_1, \ldots, q_n$, hvor $\deg_G(q_i) \geq 2$, for $i = 1, n$, og $\deg_F(q_j) = 2$, for $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Her er q_1 nabo til x_1 i G, og q_n er nabo til x_2 i G. Hermed haves en 2-vej $q_1, \ldots, q_n$ i G, hvis punkter er indeholdt i F. Lad X_1 være mængden af vedhæftninger i $L(H)$ for $F - \{p_n\}$, og lad X_2 være mængden af vedhæftninger i $L(H)$ for $F - \{p_1\}$. Idet F er mindst mulig, vil både X_1 og X_2 være lokale, da F ellers kan vælges mindre.

Påstand 2: *Hvis der findes en kant uv i J, så $X_1 \subseteq N_u$ og $X_2 \subseteq R_{uv}$, da vil lemmaet være opfyldt.*

Antag, at der findes en kant uv i J, så $X_1 \subseteq N_u$ og $X_2 \subseteq R_{uv}$.
Lad endepunkterne for R_{uv} være r_1 og r_2, hvor $r_1 \in N_u$. Idet X ikke er lokal, vil q_1 have en nabo i $N_u - r_1$, og q_n har en nabo i $R_{uv} - r_1$. Hvis q_1 er nabo til samtlige punkter i $N_u - r_1$, så er $(ii)(a)$ opfyldt, hvor $q_1 = p_1$. Det kan derfor antages, at q_1 har en nabo s_1 og har en ikke-nabo s_2

i $N_u - r_1$. Lad P være 2-vejen mellem r_2 og s_1, hvis indre tilhører $F \cup (R_{uv} - r_1)$, se figur 7.7(b).



Figur 7.7: (a) Udsnit af H. (b) Liniegrafen af (a) samt det stiplede, som er 2-vejen F og kanten mellem R_{uv} og F. Desuden er 2-vejen P markeret med prikket linie.

Vælg $w \in V(J)$, så $s_1 \in R_{uw}$. Da H er en underdeling af den 3-sammenhængende graf J, kan alle kanter, der er incidente med u i H undtaget s_1, fjernes, og den fremkomne graf er stadig sammenhængende, idet u er et forgreningspunkt. Der findes dermed en vej i H fra u til v, hvor den første kant er s_1, og vejen er disjunkt fra R_{uv}. Der vil så i $L(H)$ findes en 2-vej S_1 fra s_1 til r_2, som er disjunkt fra $R_{uv} \cup N_u$ undtaget dens endepunkter. Da $w \in V(J)$, er w et forgreningspunkt, og dermed vil der mellem w og v i H findes mindst tre veje, hvoraf kun én benytter punktet u.
Fjern kanterne, der er incidente med u i H, bortset fra kanten s_2, og fjern punktet w. Hermed vil grafen stadig være sammenhængende. Bemærk at $R_{uw} - s_1$ er forbundet til resten af grafen ved hjælp af dele af S_1. Altså må der findes en 2-vej S_2 i $L(H)$ mellem s_2 og r_2, som er disjunkt fra $R_{uv} \cup N_u \cup N_w$ med undtagelse af dens endepunkter. Idet H er todelt, har længden af S_1 og S_2 samme paritet, da der ellers haves en kreds af ulige længde. Idet S_1 kan udvides til et hul med r_2, P, s_1, og S_2 kan udvides til et hul med r_2, P, s_1, s_2, vil et af de to huller have ulige længde, hvilket danner modstrid med, at de findes i en Berge graf G. Dermed må q_1 være nabo til samtlige punkter i $N_u - r_1$, hvor $(ii)(a)$ er opfyldt for $q_1 = p_1$, så påstand 2 er vist.

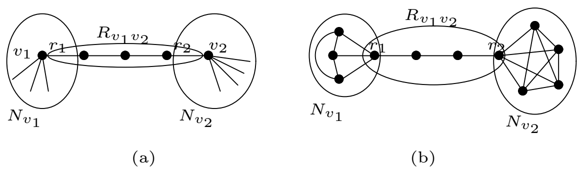
Påstand 3: *Hvis der findes to ikke-nabopunkter $v_1, v_2 \in V(J)$, så $X_i \subseteq N_{v_i}$ for $i = 1, 2$, da vil lemmaet være opfyldt.*

Antag, at der findes to punkter $v_1, v_2 \in V(J)$, som ikke er naboer, så $X_i \subseteq N_{v_i}$ for $i = 1, 2$.

Lad A_1 være mængden af punkter i N_{v_1}, som er naboer til q_1, og lad $B_1 = N_{v_1} - A_1$. Det vil sige, at B_1 indeholder punkter fra N_{v_1}, som ikke er naboer til q_1. Lad ligeledes A_2 være mængden af punkter i N_{v_2}, som er naboer til q_n, og lad $B_2 = N_{v_2} - A_2$. Dermed er $X = A_1 \cup A_2$. Hvis både $B_1 = \emptyset$ og $B_2 = \emptyset$, så er (i) opfyldt, da v_1 og v_2 ikke kan tilhøre samme forgrening, idet de ikke er naboer, og der findes ikke punkter af grad to i den 3-sammenhængende graf J. Det kan derfor antages, at mindst en af B_1 eller B_2 ikke er tom. Både A_1 og A_2 er ikke-tomme, da q_1 og q_n, som minimum, er nabo til henholdsvis x_1 og x_2. Da H er sammenhængende, findes der dermed en vej L_1 i H fra v_1 til v_2 med endekanter i henholdsvis A_1 og A_2. Bemærk, at henholdsvis A_1 og A_2 er kantmængder i H. Det vil sige, at der findes en 2-vej $K_1 = L(L_1)$ i $L(H)$ fra A_1 til A_2, som er disjunkt fra $N_{v_1} \cup N_{v_2}$ med undtagelse af dens endepunkter. Idet $X = A_1 \cup A_2$ ikke er lokal, findes der ikke et $w \in V(J)$, så $A_1 \cup A_2 \subseteq N_w$. Det er så muligt at anvende lemma 6.6, hvoraf det, eventuelt ved at v_1 og v_2 bytter roller, kan konkluderes, at der findes en vej L_2 i H, hvis første kant e tilhører A_1, anden kant tilhører B_1, og sidste kant tilhører A_2. Hermed vil der findes en vej $K_2 = L(L_2)$ i $L(H)$, hvis første punkt tilhører A_1, andet punkt tilhører B_1, og sidste punkt tilhører A_2, og ellers er disjunkt fra $N_{v_1} \cup N_{v_2}$.
Da H er todelt, og $L_1 \cup (L_2 - e)$ udgør en kreds i H, må længden af L_1 og $L_2 - e$ have samme paritet. Altså må længden af L_1 og L_2 have forskellig paritet. Ifølge bemærkning 1.15 må længden af K_1 og K_2 have forskellig paritet. I grafen G vil $K_1 \cup F$ og $K_2 \cup F$ danne huller, hvor det ene hul har lige længde, og det andet hul har ulige længde. Da G er en Berge graf, kan huller af ulige længde ikke eksistere, så dermed må $B_1 = B_2 = \emptyset$, hvor (i) er opfyldt. Hermed er påstand 3 vist.

Påstand 4: *Hvis der findes to nabopunkter $v_1, v_2 \in V(J)$, så $X_i \subseteq N_{v_i}$ for $i = 1, 2$, da er lemmaet opfyldt.*

Antag, at der findes to nabopunkter $v_1, v_2 \in V(J)$, så $X_i \subseteq N_{v_i}$ for $i = 1, 2$, og lad r_i være endepunkt i N_{v_i} af $R_{v_1v_2}$, se figur 7.8.



Figur 7.8: (a) Udsnit af H. (b) Liniegrafen af (a).

Lad A_1 være mængden af punkter i $N_{v_1} - r_1$, som er naboer til q_1, og lad $B_1 = N_{v_1} - (A_1 \cup \{r_1\})$. Lad ligeledes A_2 være mængden af punkter i $N_{v_2} - r_2$, som er naboer til q_n, og lad $B_2 = N_{v_2} - (A_2 \cup \{r_2\})$. Dermed er $X \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \{r_1, r_2\}$.
Hvis $A_2 = \emptyset$, så vil mængden X_2 af vedhæftninger for q_n højst indeholde r_2, og da er lemmaet ifølge påstand 2 opfyldt, idet $X_1 \subseteq N_{v_1}$ og $X_2 \subseteq \{r_2\} \in R_{v_1v_2}$. Ligeledes vil lemmaet være opfyldt, hvis $A_1 = \emptyset$, da A_1 og A_2 blot bytter roller. Det kan dermed antages, at $A_1 \neq \emptyset$ og $A_2 \neq \emptyset$.
Antag, at $B_1 = B_2 = \emptyset$. Da vil der findes en kreds af længde mindst fire i J, som benytter kanten v_1v_2, da J er 3-sammenhængende, og naboerne til v_1 dermed skal forbindes til v_2's naboer, for ellers kan v_1 fjernes, og grafen er ikke sammenhængende. På baggrund af kredsen i J må der findes en 2-vej af længde mindst to i $L(H)$ fra A_1 til A_2, som ikke indeholder punkter fra $N_{v_1} \cup V(R_{v_1v_2}) \cup N_{v_2}$ undtaget dens endepunkter. Denne 2-vej danner et hul med $R_{v_1v_2}$ samt kanterne fra 2-vejens endepunkter til henholdsvis r_1 og r_2. Ligeledes danner 2-vejen et hul med F samt kanterne fra 2-vejens endepunkter til henholdsvis q_1 og q_n. Dermed må $R_{v_1v_2}$ og F have længde af samme paritet. Dermed er punkt $(ii)(b)$ eller punkt $(ii)(d)$ opfyldt. Det kan derfor antages, at mindst en af B_1 og B_2 ikke er tom.
Der findes en 2-vej S_1 fra A_1 til A_2, som ikke har punkter i $N_{v_1} \cup N_{v_2} \cup R_{v_1v_2}$ med undtagelse af dens endepunkter. Antag, at der ikke findes et $w \in V(J)$, så $A_1 \cup A_2 \subseteq N_w$. Fjern $R_{v_1v_2} - \{r_1, r_2\}$ og de tilhørende kanter fra G. Den fremkomne graf opfylder lemma 6.6, hvoraf det, eventuelt med modsatte roller af v_1 og v_2, kan konkluderes, at der findes en 2-vej S_2 i $L(H)$, hvis første punkt tilhører A_1, andet punkt tilhører B_1, og sidste punkt tilhører A_2, og ellers er disjunkt fra $N_{v_1} \cup N_{v_2} \cup R_{v_1v_2}$. Idet H er todelt, har S_1 og S_2 forskellig paritet. Både S_1 og S_2 danner et hul sammen med F, så det ene hul må have ulige længde, hvilket danner modstrid med, at G er en Berge graf, og dermed må der findes et $w \in V(J)$, så $A_1 \cup A_2 \subseteq N_w$, og dermed er $A_1 \cup A_2$ en komplet delgraf. Idet H er todelt, følger det, at $R_{v_1v_2}$ har lige længde mindst to, da $w, v_1, R_{v_1v_2}, v_2$ er en kreds. Dermed har $R_{v_1v_2}$ ulige længde i G, og specielt er $r_1 \neq r_2$. Desuden vil $|N_{v_i} \cap N_w| \leq 1$, da der ellers ville findes multiple kanter i J, og så vil $|A_i| = 1$, da $A_i \neq \emptyset$. Lad $A_i = \{a_i\}$ for $i = 1, 2$. Idet X ikke er lokal, er $X \nsubseteq N_w$, hvilket vil sige, at $r_1 \in X$ eller $r_2 \in X$, da $X \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \{r_1, r_2\}$. Det kan antages, at $r_1 \in X$. Idet $r_1 \notin N_{v_2}$, vil $r_1 \notin X_2$, hvilket betyder, at q_1 er det eneste punkt i F, som er nabo til r_1. Hullet $q_1, \ldots, q_n, a_2, a_1$ må have lige længde, hvormed n er lige. Ved at fjerne punktet v_2 og kanten a_1 i H er den fremkomne graf stadig sammenhængende, og der må derfor findes en vej fra w til v_1. I $L(H)$ vil der dermed findes en 2-vej T fra et punkt $a_3 \in N_w$ til r_1, som er disjunkt fra $N_{v_2} \cup a_1$. Sammen med $r_1, R_{v_1v_2}, r_2, a_2, a_3$ og sammen med $r_1, q_1, \ldots, q_n, a_2, a_3$ danner T et hul, og da $R_{v_1v_2}$ har ulige længde, og n er lige, har længden af de to veje forskellig paritet, hvormed den ene danner et hul af ulige længde med T, og en modstrid er opnået, så påstand 4 gælder.

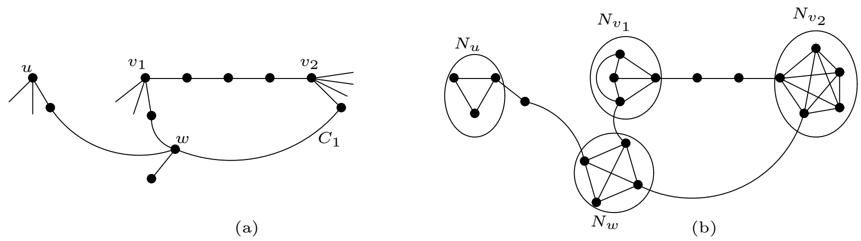
Påstand 5: *Hvis $X_1 \cap X_2$ ikke er tom, og hvis specielt et af $q_2, \ldots, q_{n-1}$ har en nabo i $L(H)$, så er lemmaet opfyldt.*

Enhver nabo til et af $q_2, \ldots, q_{n-1}$ i $L(H)$ tilhører $X_1 \cap X_2$, så det kan antages, at $x \in X_1 \cap X_2$. Dermed vil $x \in R_{v_1v_2}$ for kun en kant $v_1v_2 \in E(J)$, og $x \in N_v$ for højst to punkter i J, nemlig

v_1 og v_2. Idet både X_1 og X_2 er lokale, er de hver en delmængde af en af N_{v_1}, N_{v_2} eller $R_{v_1v_2}$, og de er ikke delmængder af den samme. Det kan så antages, at $X_1 \subseteq N_{v_1}$, og dermed er enten $X_2 \subseteq N_{v_2}$ eller $X_2 \subseteq R_{v_1v_2}$. Hermed er lemmaet ifølge påstand 4 eller påstand 2 opfyldt, hvormed påstand 5 er vist.

Påstand 6: *Hvis der findes et punkt u og en kant v_1v_2 i J, så $X_1 \subseteq N_u$ og $X_2 \subseteq R_{v_1v_2}$, da er lemmaet opfyldt.*

Hvis $u = v_1$ eller $u = v_2$, så er påstand 6 ifølge påstand 2 opfyldt. Antag derfor, at $u \neq v_1$, og $u \neq v_2$. Vælg en kreds C_1 i H, som benytter forgreningen mellem v_1 og v_2, og som ikke benytter u. En sådan kreds vil findes, da H er en underdeling af den 3-sammenhængende graf J, hvormed der mellem to forgreningspunkter må findes tre veje. Vælg desuden en korteste vej S i $H - \{v_1, v_2\}$ mellem u og $V(C_1)$. Lad endepunkterne på S være u og w.



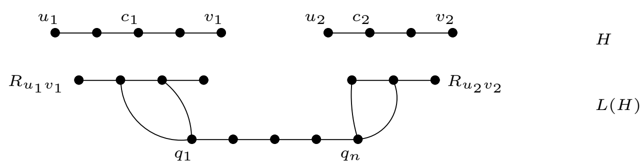
(a) (b)

Figur 7.9: (a) Udsnit af grafen H. (b) Liniegrafen for (a).

Dermed vil der i $L(H)$ findes tre disjunkte 2-veje fra N_{v_1}, N_{v_2} og N_u til N_w, og der findes ingen kanter mellem de tre 2-veje med undtagelse af den trekant T, som de danner, hvor de mødes i N_w, se figur 7.9(b). Hvis q_n har en unik nabo i $R_{v_1v_2}$, lad det være r, så er r forbundet til trekanten T via 2-vejen $r, q_n, \ldots, q_1, N_u, L(S), N_w$, 2-vejen $r, \ldots, N_{v_1}, \ldots, N_w$ og 2-vejen $r, \ldots, N_{v_2}, \ldots, N_w$, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da r ikke har to naboer i T. Hvis q_n har to naboer q og r i $R_{v_1v_2}$, som ikke er naboer, så er q_n forbundet til trekanten T via 2-vejen $q_n, \ldots, q_1, N_u, L(S), N_w$, 2-vejen $q_n, q, \ldots, N_{v_1}, \ldots, N_w$ og 2-vejen $q_n, r, \ldots, N_{v_2}, \ldots, N_w$, hvilket igen danner modstrid med lemma 2.9. Dermed må q_n have nøjagtig to naboer i $R_{v_1v_2}$, som indbyrdes er naboer. Det vil sige, at q_n er komplet til $\varrho_H(w)$ for det w, som er incident med de to kanter i H, som i G er nabopunkter til q_n. Hvis q_1 er nabo til alle punkter i N_u, så er q_1 komplet til $\varrho_H(u)$. Da $q_2, \ldots, q_{n-1}$ ifølge påstand 5 ikke har naboer i $L(H)$, er (i) opfyldt. Det kan derfor antages, at q_1 både har en nabo og en ikke-nabo i N_u. Lad A være mængden af naboer til q_1 i N_u, og lad $B = N_u - A$. Opdel punktet u i to punkter u_1 og u_2, så u_1 er incident med kanterne i A og u_2 er incident med kanterne i B. Da u_1 og v_1, u_1 og v_2, u_2 og v_1, samt u_2 og v_2 er ikke-naboer kan Mengers sætning i [Chartrand & Lesniak, 1996, side 80] anvendes. Anvend for eksempel Mengers sætning på u_1 og v_1. Da H er en underdeling af en 3-sammenhængende graf, skal der fjernes mindst to punkter for at gøre u_1 og v_1 usammenhængende. Dermed findes der ifølge [Chartrand & Lesniak, 1996, side 80] mindst to disjunkte 2-veje mellem u_1 og v_1 i H. Det vil sige, at der findes i hvert fald en 2-vej mellem u_1 og v_1. På samme måde vil der findes en 2-vej mellem u_2 og v_2. Dermed vil der i H findes en kreds C_2, som benytter forgreningen mellem v_1 og v_2, samt de to fundne 2-veje. Det vil sige, at C_2 benytter forgreningen mellem v_1 og v_2, en kant i A og en kant i B. Dermed vil der i G findes en 2-vej mellem N_{v_1} og N_{v_2}, som benytter en unik kant i N_u, og denne kant er mellem et punkt $a \in A$ og et punkt i B. Dermed er a forbundet til trekanten dannet af q_n og dens to naboer q og r i $R_{v_1v_2}$ via 2-vejen $a, \ldots, N_{v_1}, \ldots, q$, 2-vejen $a, \ldots, N_{v_2}, \ldots, r$ og 2-vejen $a, q_1, \ldots, q_n$, hvilket danner en modstrid med lemma 2.9. Det vil sige, at q_n ikke har to naboer i $R_{v_1v_2}$, som indbyrdes er naboer, hvormed påstand 6 er opfyldt.

Påstand 7: *Hvis der findes kanter u_1v_1 og u_2v_2 i J med $X_i \subseteq R_{u_iv_i}$ for $i = 1, 2$, så er lemmaet opfyldt.*

Da X ikke er lokal, må u_1v_1 og u_2v_2 være forskellige kanter, så det kan antages, at $v_2 \neq u_1, v_1 \neq v_2$ og $v_1 \neq u_2$. Altså er det muligt, at $u_1 = u_2$. Hvis q_1 har nøjagtig to naboer i $R_{u_1v_1}$, som indbyrdes er naboer, og q_n har nøjagtig to naboer i $R_{u_2v_2}$, som indbyrdes er naboer, så er (i) opfyldt, da c_1 i H vælges til at være det punkt, hvis to nabokanter bliver til nabopunkter til q_1 i $L(H)$, og tilsvarende for c_2, se figur 7.10.



Figur 7.10: Vejene u_1v_1 og u_2v_2 indeholdende henholdsvis c_1 og c_2 i H. I $L(H)$ er $q_1, \dots, q_n$ forbundet til $R_{u_1v_1}$ og $R_{u_2v_2}$.

Dermed kan det antages, at q_1 enten har én nabo i $R_{u_1v_1}$ eller to naboer, som ikke indbyrdes er naboer, i $R_{u_1v_1}$. Der findes en kreds i H, som benytter forgreningen mellem u_1 og v_1 samt u_2, men ikke benytter v_2, da $J - \{v_2\}$ er 2-sammenhængende. I $L(H)$ vil der så findes to disjunkte 2-veje D og U fra N_{u_1} til N_{u_2} og fra N_{v_1} til N_{u_2}. Desuden findes en tredje 2-vej R fra q_1 til N_{u_2} via $q_1, \dots, q_n, \varrho_H(c_2), \dots, N_{u_2}$. De tre 2-veje D, U og R har ingen kanter mellem sig med undtagelse af den trekant T, som dannes i N_{u_2}. Hvis q_1 kun har en nabo $r \in R_{u_1v_1}$, så kan det antages, at det tilhører det indre af $R_{u_1v_1}$, da lemmaet ellers er opfyldt per påstand 6. Når r tilhører det indre af $R_{u_1v_1}$, er r forbundet til T via 2-vejen $r, \dots, D$, 2-vejen, $r, \dots, U$ og 2-vejen r, R, hvilket er i modstrid med lemma 2.9. Hvis q_1 har to naboer q og r i $R_{u_1v_1}$, som ikke indbyrdes er naboer, så er q_1 forbundet til trekanten T via 2-vejen $q_1, q, \dots, D$, 2-vejen $q_1, r, \dots, U$ og 2-vejen R, hvilket er i modstrid med lemma 2.9. Hermed er påstand 7 vist.

Da X_1 og X_2 er lokale, skal de begge opfylde definition 7.4, og påstand 2-4 samt påstand 6 og påstand 7 dækker de mulige kombinationer af $X_1 \subseteq N_u$ eller $X_1 \subseteq R_{u_1v_1}$ samt $X_2 \subseteq N_v$ eller $X_2 \subseteq R_{u_2v_2}$. □

7.1 Degenereret optræden

Ifølge lemma 6.4 er todelte cykliske 3-sammenhængende grafer enten lig $K_{3,3}$, lig en underdeling af K_4 eller har en delgraf, som er isomorf med K_4, hvor denne delgraf ikke indeholder en kreds, der kun består af forgreningspunkterne fra K_4. Denne opdeling af de cykliske 3-sammenhængende grafer benyttes nu til at karakterisere liniegraferne af de cykliske 3-sammenhængende grafer.

Definition 7.7 (Degenereret)
Lad H være en underdeling af en 3-sammenhængende graf J, og lad G være en Berge graf. Da siges $L(H)$ at være en degenereret optræden af J i G, hvis ét af følgende gælder:

(i) *$J = K_4$ og der i H findes en kreds C af længde fire, som også fandtes i K_4, hvilket vil sige, at ingen af kanterne på kredsen er blevet underdelt.*

(ii) *$J = H = K_{3,3}$.*

Hvis der i H ikke findes en kreds af længde fire, som fandtes i $J = K_4$, og hvis $H \neq K_{3,3}$, da siges $L(H)$ at være en ikke-degenereret optræden af J i G. ◇

Definition 7.8 (Forstørrelse)
Lad J være en 3-sammenhængende graf. Da siges en graf J' at være en forstørrelse af J, hvis J' er 3-sammenhængende og har en delgraf K, hvor $K \subset J'$, og K er isomorf med en underdeling af J. ◇

Lemma 7.9
Lad G være en Berge graf, og lad $L(H)$ være en optræden af en 3-sammenhængende graf J i G. Lad desuden Y være en antisammenhængende mængde af punkter i $V(G) - V(L(H))$, og lad X være mængden af punkter i $L(H)$, som er komplette til Y. Da vil et af følgende være opfyldt:

(i) *$J = K_{3,3}$ eller $J = K_4$, og $L(H)$ er degenereret, og der findes en forstørrelse af J, som har en optræden i $\overline{G}$.*

(ii) *X opfylder betingelse (I) og (II) i lemma 6.10.*

◇

7.2 Overskygget optræden

I dette afsnit indføres begrebet overskygget optræden, og nogle resultater vedrørende overskyggede optrædener præsenteres.

Definition 7.10 ($L(H)$-overpunkt)
Lad G være en graf, og lad $L(H)$ være en optræden i G. Et punkt $v \in V(G) - V(L(H))$ kaldes et $L(H)$-overpunkt, hvis mængden af dets naboer i $L(H)$ mætter $L(H)$. ◇

Definition 7.11 (Overskygget optræden)
Lad G være en graf, og lad $L(H)$ være en optræden af en 3-sammenhængende graf J i G. Da siges $L(H)$ at være en overskygget optræden, hvis der findes en forgrening B i H af ulige længde mindst tre, som har endepunkter b_1 og b_2, så der findes et punkt i G, som er ikke-nabo til højst et punkt i $\varrho_H(b_1)$ og højst et punkt i $\varrho_H(b_2)$. ◇

Ifølge ovenstående definition vil det sige, at $L(H)$ er en overskygget optræden, hvis der findes et punkt i G, som er nabo til alle punkter i $\varrho_H(b_1)$ undtaget højst et og nabo til alle punkter i $\varrho_H(b_2)$ undtaget højst et.

Lemma 7.12
Lad G være en Berge graf, og lad $L(H)$ være en optræden af en 3-sammenhængende graf J i G. Lad desuden Y være en antisammenhængende mængde af $L(H)$-overpunkter i $V(G) - V(L(H))$, og lad X være en mængde af punkter i $L(H)$, som er komplette til Y. Antag, at X ikke mætter $L(H)$. Da vil $J = K_{3,3}$ eller $J = K_4$, og desuden gælder:

(i) *Hvis $J = K_{3,3}$, så vil der enten findes en overskygget optræden af J i G, eller $L(H)$ er degenereret, og der findes en overskygget optræden af J i $\overline{G}$, eller $L(H)$ er degenereret, og der findes en forstørrelse af J, som har en optræden i $\overline{G}$.*

(ii) *Hvis $J = K_4$, og $L(H)$ er ikke-degenereret, så findes der en overskygget optræden af J i G.*

(iii) *Hvis $J = K_4$, og $L(H)$ er degenereret, så lad $V(J) = \{1, 2, 3, 4\}$, og lad $B_{i,j} = B_{j,i}$, for $1 \leq i < j \leq 4$, være forgreningen i J, som forbinder i og j, lad endekanten i $B_{i,j}$, der er incident med i, være p_{ij}, og lad endekanten i $B_{i,j}$, der er incident med j, være p_{ji}, lad P_{ij} være 2-vejen $L(B_{i,j})$ i G, så p_{ij} og p_{ji} er 2-vejens endepunkter, og lad P_{13}, P_{14}, P_{23} og P_{24} have længde nul, så vil et af følgende gælde:*

   (a) *Der findes en overskygget optræden af J i $\overline{G}$.*

   (b) *Der findes, op til symmetri, ikke-naboer $y, y' \in Y$, så naboerne til y i $L(H)$ er p_{12}, p_{14}, p_{32}, p_{34}, p_{24} og muligvis p_{13}, og naboerne til y' er $p_{21}, p_{23}, p_{41}, p_{43}, p_{13}$ og muligvis p_{24}.*

   (c) *P_{12} og P_{34} har længde en.*

◇

Bevis
Bemærk, at ifølge definition 7.3 vil $V(P_{ij}) = R_{ij}$, idet R_{ij} er en punktmængde i $L(H)$.
Det kan antages, at mængden Y er mindst mulig, så den er antisammenhængende, og X ikke mætter $L(H)$. Vælg to punkter i $L(H)$, som i H er incidente med det samme forgreningspunkt, og som ikke tilhører X. Sådanne to punkter findes, da X ellers mætter $L(H)$. Da de to punkter ikke tilhører X, er de ikke komplette til Y, og derfor vil der findes en anti 2-vej mellem dem, hvis indre tilhører Y. Da Y er valgt mindst mulig, betyder det, at anti 2-vejen indeholder alle punkter i Y. Det vil sige, at Y er punktmængden af en anti 2-vej Q med endepunkter y_1 og y_2. Da Y består af $L(H)$-overpunkter, så hvis $|Y| = 1$, vil $Y = \{y_1\}$ være et $L(H)$-overpunkt, og dermed vil mængden X af dets naboer i $L(H)$ per definition mætte $L(H)$. Dermed vil $|Y| \geq 2$, så y_1 og y_2 er ikke det samme punkt. For $i = 1, 2$ er $Y_i = Y - y_i$ antisammenhængende, da y_i er et endepunkt i Y af anti 2-vejen Q. Lad X_i være mængden af punkter i $L(H)$, som er komplette til Y_i. Da Y er valgt mindst mulig, vil både X_1 og X_2 mætte $L(H)$, for ellers kunne Y være valgt mindre.

Påstand 1: *For hvert forgreningspunkt b i H vil X indeholde alle kanter i H, som er incidente med b med undtagelse af højst to, og hvis der findes sådanne to kanter, der er incidente med b, som ikke tilhører X, så vil den ene tilhøre $X_1 - X_2$, og den anden vil tilhøre $X_2 - X_1$.*

Idet X_1 mætter $L(H)$, vil der blandt kanterne i H, som er incidente med b, højst findes én kant e_1, som ikke tilhører X_1. Ligeledes, da X_2 mætter $L(H)$, vil der findes højst en kant e_2 blandt kanterne i H, der er incidente med b, som ikke tilhører X_2. Da $X_1 \cap X_2 = X$, vil der højst være to kanter, der er incidente med b i H, som ikke tilhører X, nemlig e_1 og e_2. Dermed er påstand 1 vist.

Bemærk, at der kan findes forgreningspunkter i H, hvor samtlige kanter, der er incidente med dette forgreningspunkt, tilhører X, når blot dette ikke gælder for samtlige forgreningspunkter. Da hvert forgreningspunkt har grad mindst tre, følger det af påstand 1, at ethvert forgreningspunkt er incident med mindst en kant fra X.

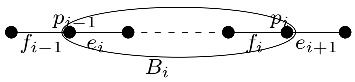
Påstand 2: *Hvis $J \neq K_4$, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at $J \neq K_4$, og dermed er $|V(J)| \geq 5$. Antagelsen i lemma 7.9 er opfyldt, så mindst et af lemma 7.9(i) og lemma 7.9(ii) må gælde. Hvis lemma 7.9(i) er opfyldt, så må $J = K_{3,3}$, $L(H)$ er degenereret, og der findes en forstørrelse af J, som har en optræden i $\overline{G}$, og dermed er (i) i dette lemma opfyldt. Derfor undersøges tilfældet, hvor lemma 7.9(ii) er opfyldt.

Der vil ifølge lemma 7.9(ii) gælde, at X opfylder betingelse (I) og (II) i lemma 6.10, så X må opfylde en af de fem konklusioner i lemma 6.10.

Lemma 6.10(i) er ikke opfyldt, da det i lemmaet er antaget, at X ikke mætter $L(H)$. Da J i denne påstand har mindst fem punkter, vil H have mindst fem forgreningspunkter, og ifølge påstand 1 vil hvert forgreningspunkt være incident med mindst en kant i X. Dermed kan lemma 6.10(iii) og (iv) ikke være opfyldte. Det vil sige, at enten er lemma 6.10(ii) eller (v) opfyldt. Hvis lemma 6.10(ii) er opfyldt, så lad B være en forgrening i H med endepunkter b_1 og b_2, så hver kant i X har et endepunkt i $V(B)$. Hvis lemma 6.10(v) er opfyldt, så lad b_1 og b_2 være punkter i H af ulige biparitet, som ikke tilhører samme forgrening, så $X = \varrho_H(b_1) \cup \varrho_H(b_2)$, og lad B være delgrafen i H bestående af punkterne b_1 og b_2 og ingen kanter. Bemærk, at når lemma 6.10(v) er opfyldt, så er b_1 og b_2 ikke nødvendigvis forgreningspunkter. Lad $H' = H - V(B)$. Da B enten er en forgrening eller to punkter i forskellige forgreninger, er H' sammenhængende, da der mellem to vilkårlige forgreningspunkter er mindst tre disjunkte veje. Ingen kanter i H' tilhører X, da alle kanter i X er incidente med et punkt i $V(B)$. Da følger af påstand 1, at alle punkter i H' har grad højst to, så H' er en 2-vej eller et hul i H.
Hvis H' er et hul, så lad $p_1, \ldots, p_n$ være fortløbende forgreningspunkter i H, som tilhører dette hul. Da $J \neq K_4$, og der højst er fjernet to forgreningspunkter fra H, vil der findes mindst tre forgreningspunkter i H'. Lad $p_0 = p_n$, og lad B_i være forgreningen i H med endepunkter p_{i-1} og p_i for $1 \leq i \leq n$. Det vil sige, at H' er foreningsmængden af forgreningerne $B_1, \ldots, B_n$.
Hvis H' er en 2-vej, så lad dens endepunkter være p_0 og p_n, og lad forgreningspunkterne i H, som tilhører det indre af H', være $p_1, \ldots, p_{n-1}$, så $p_0, \ldots, p_n$ er fortløbende. Da H' indeholder mindst

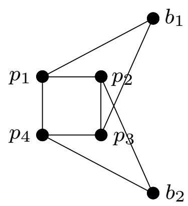
tre forgreningspunkter i H, er $n \geq 2$. For $1 \leq i \leq n$ lad B_i være 2-vejen i H' mellem p_{i-1} og p_i. I begge tilfælde benævnes endekanterne i B_i med e_i og f_i, hvor e_i er incident med p_{i-1}, og f_i er incident med p_i, for $1 \leq i \leq n$.



Figur 7.11: Forgreningen B_i i H' samt kanter, der er incidente med p_{i-1} og p_i.

For $1 \leq i \leq n-1$ vil en af kanterne e_{i+1} og f_i tilhøre X_1, og den anden vil tilhøre X_2, eftersom H' ikke indeholder kanter i X, da alle kanter i X er incidente med et punkt i $V(B)$. Dette er desuden opfyldt for e_1 og f_n, hvis H' er et hul. Altså vil der, når H' er et hul, for hvert forgreningspunkt i H' gælde, at det er incident med én kant fra X_1 og én kant fra X_2. Fra tidligere haves, at Q er en anti 2-vej i Y, hvor endepunkterne i Y er y_1 og y_2, og her deles op i to tilfælde: Q har lige længde, og Q har ulige længde.

Antag først, at Q har lige længde. Hvis der i H' findes to kanter e_1 og e_2, som ikke er incidente med samme punkt, hvor e_1 tilhører X_1, og e_2 tilhører X_2, så vil Q sammen med e_1 og e_2 danne et antihul af ulige længde i G, da punktet e_1 i G vil være nabo til y_2 men ikke til y_1, og modsat for punktet e_2. Altså findes der ikke sådanne to kanter i H'. Idet der findes et forgreningspunkt i H' udover p_0 og p_n, har H' en kant i X_1 og en kant i X_2. Eftersom alle kanter i X_1 har fælles endepunkt med alle kanter i X_2, da X_1 og X_2 hver især mætter $L(H)$, findes der højst to kanter fra X_1 og to kanter fra X_2. Dette skyldes, at punkter i H' højst har grad to, hvormed den eneste mulighed er en kreds af længde fire, hvor ikke-incidente kanter begge tilhører enten X_1 eller X_2. Antag, at der findes to kanter af hver af mængderne X_1 og X_2. Da er H' et hul af længde fire, og dets kanter tilhører skiftevis X_1 og X_2. Hvis b_1 ikke er et forgreningspunkt, så er lemma 6.10(v) opfyldt, og dermed er b_1 ikke-nabo til b_2, da de ellers vil tilhøre samme forgrening. Dermed vil alle naboer til b_1 i H tilhøre H'. Hvis b_1 er et forgreningspunkt, så har det grad mindst tre, og alle undtaget højst én nabo tilhører H'. Det vil sige, at b_1 i begge tilfælde har mindst to naboer i H', og ligeledes for b_2. Idet H er todelt, og H' er et hul af længde fire, vil b_1 og b_2 hver være nabo til nøjagtig to punkter, og disse to punkter er ikke-naboer. Da H er cyklisk 3-sammenhængende, kan b_1 og b_2 ikke være naboer til det samme par af punkter i H', idet der så vil findes en multipel kant i J. Dermed er b_1 og b_2 nabo til hvert sit par af ikke-nabopunkter, se figur 7.12.

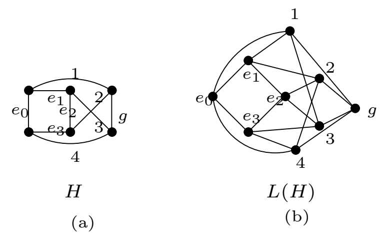


Figur 7.12: Udsnit af H, hvor b_1 og b_2 er nabo til hvert sit par af ikke-nabopunkter.

Da H har mindst fem forgreningspunkter, må mindst ét af b_1 og b_2 være forgreningspunkt. Dermed må både b_1 og b_2 være forgreningspunkter, da forgreningen fra den ene kun kan slutte i det andet punkt. Dermed er B også en forgrening. Da alle fire punkter i H' samt b_1 og b_2 har grad mindst tre i H, er $J = K_{3,3}$, og dermed er lemmaet opfyldt i dette tilfælde, hvis (i) gælder. Det vises derfor, at (i) gælder.

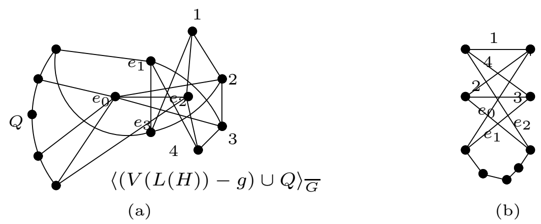
Da H er todelt, vil B have ulige længde. Lad a, b, c og d være de fire punkter i $L(H)$, som i H er kanter mellem $V(B)$ og $V(H')$. Da a, b, c og d i H er kanter mellem $V(B)$ og $V(H')$, må de tilhøre X. Dermed er hvert punkt i 2-vejen Q komplet til a, b, c og d i $L(H)$. Hvis B har længde mindst tre, så er $L(H)$ en overskygget optræden, da hvert punkt i Q er komplet til a, b, c og d, og $\varrho_H(b_1)$

samt $\varrho_H(b_2)$ netop består af a, b, c og d samt to kanter i forgreningen B. Det kan derfor antages, at B har længde én, så lad B indeholde kanten g, se figur 7.13.



Figur 7.13: (a): Udseendet af H. (b): Strukturen af $L(H)$ i G.

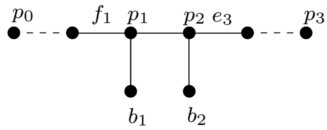
Nu har alle forgreninger i H længde en, så $L(H)$ er degenereret. På følgende figur ses det, at $\langle (V(L(H)) - g) \cup Q \rangle_{\overline{G}}$ er en optræden $L(H^*)$ af J^* i $\overline{G}$.



Figur 7.14: (a): Udseendet af $\langle (V(L(H)) - g) \cup Q \rangle_{\overline{G}}$. (b): Grafen J^*.

Det vil altså sige, at $\langle (V(L(H)) - g) \cup Q \rangle_{\overline{G}}$ er en optræden af $K_{3,3}$ i $\overline{G}$. Da Q i $\overline{G}$ har lige længde mindst to, har Q i H^* ulige længde mindst tre, og Q's naboer i $L(H^*)$ er punkterne e_0, e_1, e_2 og e_3. I $\overline{G}$ er g nabo til e_0, e_1, e_2 og e_3, så hermed haves i H^* en forgrening Q af længde mindst tre, og der vil gælde, at g i $\overline{G}$ er ikke-nabo til højst et punkt fra $\varrho_{H^*}(y_1)$ og ikke-nabo til højst et punkt fra $\varrho_{H^*}(y_1)$, hvor y_1 og y_2 er Q's endepunkter. Dermed er $\langle (V(L(H)) - g) \cup Q \rangle_{\overline{G}}$ ifølge definition 7.11 en overskygget optræden i $\overline{G}$.
Det vil sige, at (i) er opfyldt i dette tilfælde. Det kan derfor antages, at der i H' ikke findes to kanter i X_1 og to kanter i X_2.
Lad H' indeholde en kant fra X_2. Da H' ikke indeholder kanter fra X, vil hvert forgreningspunkt i H, som er et punkt i H', ifølge påstand 1 være incident med en kant i X_1 og en kant i X_2. Det vil sige, at når der i H' kun findes en kant fra X_2, så kan kun to punkter i H' være incidente med kanten i X_2. Dermed vil der kun findes to forgreningspunkter i H af grad to i H'. Hvis H' er et hul, så opnåes en modstrid med, at H' indeholder mindst tre forgreningspunkter fra H, som er incidente med en kant i H' fra X_2, da der kun findes to punkter i H', som er incidente med kanten i X_2. Altså må H' være en 2-vej. Her kan endepunkterne p_0 og p_n være forgreningspunkter, som ikke er incidente med kanten i X_2, da de kun er incidente med én kant i H'. Da kun to punkter kan være incidente med kanten i X_2, vil $n \leq 3$, da der højst kan findes to forgreningspunkter i det indre af 2-vejen H'.

Antag, at $n = 3$. Da vil $e_2 = f_2 \in X_2$ og $f_1, e_3 \in X_1$. Idet p_1 og p_2 er forgreningspunkter i H, er de hver især nabo til et af punkterne b_1 og b_2, jævnfør figur 7.12, og de er ikke nabo til den samme, da H er todelt, se figur 7.15.



Figur 7.15: Forgreningspunkter p_1 og p_2 i H.

Dermed har b_1 og b_2 ulige biparitet, da 2-vejen b_1, p_1, p_2, b_2 har ulige længde, og H er todelt. Dermed har b_1 og b_2 ingen fælles naboer i H'. Desuden skal p_0 og p_3 begge være nabo til et af b_1 eller b_2 og ikke til det samme, så b_1 og b_2 har hver mindst to naboer i $V(H')$. Ydermere må de have nøjagtig to naboer, da der ikke findes flere punkter at forbinde dem til, og hvert af p_0, p_1, p_2 og p_3 er nabo til nøjagtigt et af b_1 og b_2. Dermed har p_0 og p_3 grad to i H, så H har kun fire forgreningspunkter, og en modstrid er opnået. Det vil sige, at $n = 2$.
Da H skal indeholde mindst fem forgreningspunkter, må b_1, b_2, p_0, p_1 og p_2 alle være forgreningspunkter i H, og B er dermed en forgrening. Både p_0 og p_2 er forbundet til både b_1 og b_2. Idet p_1 er nabo til et af b_1 og b_2, har p_0, p_1 og p_2 lige biparitet, da der ellers dannes kredse af ulige længde. Dermed har $B_1 : p_0, \ldots, p_1$ og $B_2 : p_1, \ldots, p_2$ begge lige længde, hvilket også gælder for B, da $B \cup \{p_0b_1, p_2b_2\}$ er en vej fra p_0 til p_2, ligesom $B_1 \cup B_2$ er en vej fra p_0 til p_2. Det kan antages, at $f_1 \in X_1$ og $e_2 \in X_2$. Dermed vil $e_1 \notin X_1$ og $f_2 \notin X_2$, og ikke både $e_1 \in X_2$ og $f_2 \in X_1$, da alle kanter i X_1 har et fælles punkt med alle kanter i X_2. Det kan derfor antages, at $e_1 \notin X_1 \cup X_2$. Da både X_1 og X_2 mætter $L(H)$, tilhører kanterne p_0b_1 og p_0b_2 både X_1 og X_2, hvilket betyder, at de begge tilhører X. Da p_1 er nabo til et af b_1 eller b_2, lad det være b_1, vil kanten $p_1b_1 \in X$, da p_1 allerede er incident med to kanter i H, som ikke tilhører X, og et forgreningspunkt i H ifølge påstand 1 højst må være incident med to kanter, som ikke tilhører X. Dermed er b_2, p_0, B_1, p_1, b_1 en vej af lige længde mindst fire, hvis endekanter tilhører X, og hvis indre kanter ikke tilhører X. Denne vej i H svarer til en 2-vej i G af ulige længde mindst tre, hvis endepunkter tilhører X, og hvis indre punkter ikke tilhører X. Dermed kan korollar 2.3 benyttes, hvor Y er en antisammenhængende mængde, som 2-vejens endepunkter er komplette til, hvormed hvert punkt fra X i G har en nabo i det indre af vejen. Dette er ensbetydende med, at hver kant fra X i H har et endepunkt i $V(B_1)$, hvormed p_2 ikke kan være incident med et punkt i X. Dermed er en modstrid opnået, da p_2 er et forgreningspunkt i H, og dermed skal være incident med en kant i X. Dette viser påstand 2, når Q har lige længde.

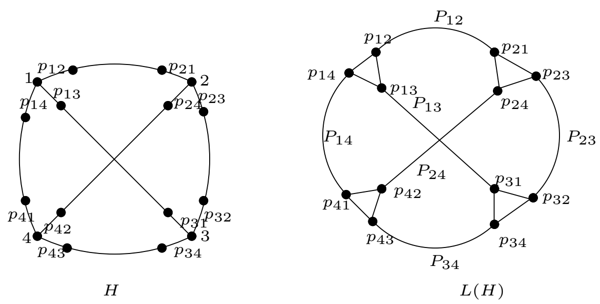
Lad nu Q have ulige længde. For at bevise påstand 2 i dette tilfælde bruges følgende ræsonnement:

Ræsonnement 1: *Hvis $e_1 \in X_1 - X_2$, $e_2 \in X_2 - X_1$, $e_0 \in X$, og e_1 samt e_2 har et fælles endepunkt, så vil enten e_1 eller e_2 have et fælles endepunkt med e_0 i H, for ellers haves et antihul $y_1, Q, y_2, e_1, e_0, e_2$ af ulige længde i G.*

Hvis H' er et hul, så vælg to ikke-naboer p_i og p_j. Sådanne to ikke-naboer findes, da H' indeholder mindst tre forgreningspunkter og har lige længde. Der vil gælde, at den ene af f_i og e_{i+1} tilhører X_1, og den anden tilhører X_2. Desuden vil der findes en kant i X fra p_j til $\{b_1, b_2\}$, hvilket er i modstrid med ræsonnement 1.
Det vil sige, at H' er en 2-vej. Idet en af kanterne f_1 og e_2 tilhører X_1, og den anden tilhører X_2, vil hver kant i X ifølge ræsonnement 1 have et endepunkt til fælles med en af disse to kanter. Da der for $1 \leq i \leq n-1$ findes en kant i X mellem p_i og $\{b_1, b_2\}$, er $n \leq 3$.
Antag, at $n = 3$. Da findes der ingen kant i X, som er incident med p_3 i H, idet en sådan kant ikke vil have fælles endepunkt med f_1 eller e_2, som ræsonnement 1 kræver. Det vil sige, at p_3 ikke er et forgreningspunkt i H. Da p_1 og p_2 hver er forbundet til enten b_1 eller b_2, må de være forbundet til hvert sit, da H er todelt. Hvis p_0 skal være et forgreningspunkt, så skal det være incident med f_1, altså er $p_0p_1 = f_1$. Desuden skal p_0 forbindes til både b_1 og b_2, men da danner trekanten p_0, p_1, b_i, for $i = 1, 2$, en modstrid med, at H er todelt. Det vil sige, at hverken p_0 eller p_3 er forgreningspunkter, så H har kun fire forgreningspunkter, hvormed en modstrid er opnået. Det kan derfor antages, at $n = 2$.
Her er b_1, b_2, p_0, p_1 og p_2 alle forgreningspunkter, hvormed B er en forgrening. Desuden er p_0 og p_2

nabo til både b_1 og b_2. Da der findes en kant i X mellem p_0 og $\{b_1, b_2\}$, skal den ifølge ræsonnement 1 dele endepunkt med enten f_1 eller e_2, og dermed må B_1 have længde en. Ligeledes vil B_2 have længde en. Da H er todelt, kan p_1 ikke være nabo til hverken b_1 eller b_2, hvilket er i modstrid med, at det er et forgreningspunkt. Dermed er påstand 2 vist.

Da påstand 2 giver, at lemmaet er opfyldt, hvis $J \neq K_4$, så kan det fremover antages, at $J = K_4$. For at simplificere notationen vil det fremover blive benyttet, at $V(J) = \{1, 2, 3, 4\}$, desuden vil forgreningen i H mellem i og j blive betegnet med $B_{i,j} = B_{j,i}$, og forgreningens endekanter benævnes p_{ij} og p_{ji}, hvor de er incidente med henholdsvis i og j. Lad 2-vejen i G mellem punkterne p_{ij} og p_{ji} dannet af punkterne i G fra $E(B_{i,j})$ være betegnet med $P_{ij} = P_{ji} = L(B_{i,j})$, se figur 7.16.



Figur 7.16: H fremkommet fra $J = K_4$ med den i teksten nævnte notation, samt liniegrafen $L(H)$ derfor.

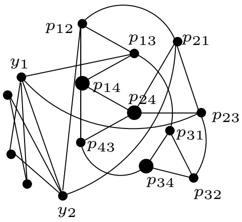
For $k = 1, 2, 3, 4$ betegn med D_k hullet i G induceret af de tre veje P_{ij} for $i, j \neq k$, og betegn med T_k trekanten $\{p_{ki} \mid 1 \leq i \leq 4 \text{ og } i \neq k\}$. Husk, at Q er en anti 2-vej i Y med endepunkter y_1 og y_2, og X_i er mængden af punkter, der er komplette til $Y - y_i$, for $i = 1, 2$.

Påstand 3: *Hvis $p_{31}, p_{32} \notin X$, så vil hvert punkt i D_4, som tilhører X, være nabo til et af punkterne p_{31} og p_{32}.*

Hvis D_4 har længde fire, så er påstand 3 opfyldt, da alle kanter i D_4 så er nabo til enten p_{31} eller p_{32}. Det kan derfor antages, at D_4 har længde mindst fem. Desuden vil D_4 altid have lige længde, da G er en Berge graf. Antag, at der findes et punkt $x \in X$ i D_4, som ikke er nabo til hverken p_{31} eller p_{32}. Fra påstand 1 følger, at $p_{34} \in X$, da hvert forgreningspunkt højst må være incident med to kanter, der ikke tilhører X, og det er forgreningspunkt 3 allerede. Det kan desuden ifølge påstand 1 antages, at $p_{31} \in X_1$ og $p_{32} \in X_2$. Dermed vil $p_{31}, y_1, Q, y_2, p_{32}$ være en anti 2-vej af længde mindst tre. Det må være en anti 2-vej af lige længde, da den sammen med p_{32}, x, p_{31} danner et antihul. Dette er dog i modstrid med sætning 2.17, hvor D_4 er hullet i G, $p_{31}, y_1, Q, y_2, p_{32}$ er anti 2-vejen af lige længde mindst fire, p_{34} er komplet til $Q \cup \{p_{31}, p_{32}, y_1, y_2\}$, og x er komplet til $Q \cup \{y_1, y_2\}$, men er hverken det tredje eller sidste punkt i D_4, da x er antaget ikke at være nabo til hverken p_{31} eller p_{32}, som er første og andet punkt i D_4. Dermed er påstand 3 vist.

Påstand 4: *Hvis et af $D_1, \ldots, D_4$ ikke indeholder et punkt fra X, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at intet punkt i D_4 tilhører X. Da følger af påstand 1, at p_{14}, p_{24} og p_{34} alle tilhører X. Idet D_4 har lige længde, må en af P_{12}, P_{13} eller P_{23} have ulige længde, da $D_4 = P_{12} \cup P_{13} \cup P_{23} \cup \{p_{12}p_{13}, p_{31}p_{32}, p_{23}p_{21}\}$, lad det være P_{12}. Hvis p_{14} og p_{24} ikke er naboer, så er $p_{14}, p_{12}, P_{12}, p_{21}, p_{24}$ en 2-vej af ulige længde med endepunkter i X og ingen indre punkter i X, og $p_{34} \in X$ har ingen nabo i det indre af 2-vejen, hvilket er i modstrid med korollar 2.3. Dermed må p_{14} og p_{24} være naboer, hvilket betyder, at P_{14} og P_{24} begge har længde nul. Idet det kan antages, at p_{21} og p_{23} tilhører henholdsvis $X_1 - X_2$ og $X_2 - X_1$, da X ikke mætter $L(H)$, følger det, at Q danner et antihul med $y_2, p_{23}, p_{14}, p_{21}, y_1$, da X_1 er komplet til $Y - y_1$, og X_2 er komplet til $Y - y_2$. Hermed må Q have lige længde mindst to. Ligeledes er Q det indre af en anti 2-vej af lige længde mellem p_{12} og p_{13}, hvor p_{12} og p_{13} tilhører hver sin mængde $X_1 - X_2$ og $X_2 - X_1$, og p_{21}, p_{23}, p_{13} og p_{12} alle er forskellige punkter, se figur 7.17.

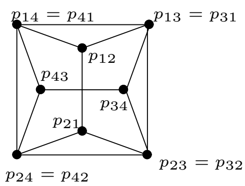


Figur 7.17: Udsnit af G indeholdende $L(H)$ og Q, her skitseret med $|V(Q)| = 5$.

Bemærk, at på figur 7.17 er punkterne $\{p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}\}$ alle naboer til det indre af Q, men disse kanter er ikke indtegnet. Desuden er figuren skitseret med $p_{12} \in X_1 - X_2$ og $p_{13} \in X_2 - X_1$, men $p_{12} \in X_2 - X_1$ og $p_{13} \in X_1 - X_2$ er også en mulighed.

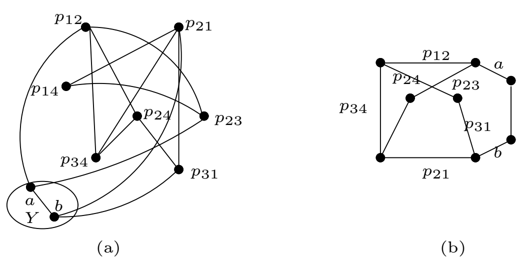
Der haves nu et hul D_4 af lige længde, hvor $D_4 : p_{13}, P_{13}, p_{31}, p_{32}, P_{23}, p_{23}, p_{21}, P_{12}, p_{12}$ er et antihul af længde mindst fire med punkterne $p_{13}, y_1, \ldots, y_2, p_{12}$ og et punkt $p_{14} \in X$, som er komplet til $p_{13}, y_1, \ldots, y_2, p_{12}$. Desuden har p_{14} ingen naboer i $D_4 - \{p_{13}, p_{12}\}$.

Ifølge sætning 2.17 vil D_4 have længde fire, da D_4 ikke opfylder lemmaets konklusion, idet p_{13} og p_{12} begge er komplette til Q, og derfor heller ikke kan opfylde lemmaets betingelser. Da D_4 har længde fire, må P_{13} og P_{23} have længde nul, og P_{12} har længde en, idet P_{12} har ulige længde. Dermed må $p_{12} \in X_2 - X_1$ og $p_{13} \in X_1 - X_2$ for at påstand 1 er opfyldt. Dermed er $L(H)$ degenereret, da der findes en kreds i H, som også findes i $J = K_4$, se figur 7.18.



Figur 7.18: Udseendet af $L(H)$.

Det skal nu vises, at et af punkterne $(iii)(a)$-$(iii)(c)$ vil være opfyldt.
Betragt nu delgrafen $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup Y$ i $\overline{G}$, se figur 7.19(a).

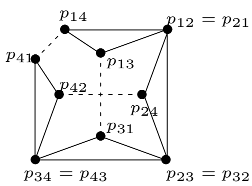


Figur 7.19: (a): Delgrafen $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup Y$ i $\overline{G}$. (b): Grafen H^*.

Her ses det, at $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup Y$ er en optræden $L(H^*)$ i $\overline{G}$, hvor H^* ses på figur 7.19(b). Det vil sige, at $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup Y$ er en optræden af K_4 i $\overline{G}$. Da Q i $\overline{G}$ har lige længde mindst to, har Q ulige længde mindst tre i H^*. Desuden er punktet p_{43} ikke-nabo til højst et punkt i $\varrho_{H^*}(y_1)$ og ikke-nabo til højst et punkt i $\varrho_{H^*}(y_2)$. Altså er $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup Y$ en overskygget optræden af K_4 i $\overline{G}$. Dermed er $(iii)(a)$ opfyldt, så påstand 4 er vist.

Påstand 5: *Hvis et af $D_1, \ldots, D_4$ indeholder højst et punkt fra X, så er lemmaet opfyldt.*

Fra påstand 4 kan det antages, at hvert D_k indeholder mindst et punkt fra X, da lemmaet ellers er opfyldt. Antag derfor, at D_4 indeholder nøjagtig et punkt x fra X, og af symmetrigrunde kan det antages, at $x \in P_{12}$. Dermed tilhører hverken p_{31} eller p_{32} mængden X. Lemma 7.9 kan benyttes, og hvis lemma 7.9(i) er gældende, indeholder $\overline{G}$ en optræden af en forstørrelse af J og dermed også en optræden af J, og (iii)(a) er opfyldt. Det kan derfor antages, at lemma 7.9(ii) gælder, og det vil sige, at lemma 6.10(I) og (II) er opfyldte. Per lemma 6.10(II) findes der ikke tre veje i H med et endepunkt b til fælles, så hver vej indeholder en kant fra X, og der for mindst to af vejene gælder, at kanten, der er incident med b, ikke tilhører X. Betragt nu forgreningspunkt 3 og kantmængden Y i H. Idet Y i G er en mængde af $L(H)$-overpunkter, vil Y være forbundet til mindst to af punkterne i T_3. Det vil sige, at forgreningspunkt 3 i H er endepunkt for to veje mellem forgreningspunkt 3 og kantmængden Y. Da X opfylder lemma 6.10(II), kan der ikke findes flere veje mellem forgreningspunkt 3 og Y. Dette betyder, at i G kan mængden Y ikke forbindes til T_3. Hvis $x \neq p_{21}$, så må $p_{24} \in X$, og så vil Y kunne forbindes til T_3 via p_{34}, vejen $p_{24}, p_{23}, P_{23}, p_{32}$ og vejen $x, \ldots, p_{12}, p_{13}, P_{13}, p_{31}$. Ligeledes hvis $x \neq p_{21}$, så $x = p_{12} = p_{21}$, hvormed P_{12} har længde nul. Fra påstand 4 følger, at x er nabo til enten p_{31} eller p_{32}, så enten P_{13} eller P_{23} har længde nul, lad det være P_{23}. Dermed må P_{13} have ulige længde, da der ellers dannes en kreds af ulige længde, hvilket ikke må forekomme i en todelt graf. Dermed er $p_{12}, p_{13}, P_{13}, p_{31}, p_{34}$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter tilhører X, og hvis indre punkter ikke tilhører X. Da X er mængden af punkter i G, som er komplette til Y fåes fra korollar 2.3, at ethvert punkt i X have en nabo i P_{13}, så p_{34} er det eneste punkt fra X i D_1. Ved at bytte D_4 ud med D_1 og gentage ovenstående fra begyndelsen af argumentationen for påstand 5 vil det kunne konkluderes, at p_{43} er det eneste punkt fra D_4, som tilhører X. Altså har P_{34} længde nul. For at undgå kredse af ulige længde, må P_{14} have lige længde, og P_{24} må have ulige længde. Dermed er P_{24} en 2-vej af ulige længde med endepunkter i X og ingen indre punkter i X. Dermed vil ethvert punkt i X ifølge korollar 2.3 have en nabo i P_{24}. Udseendet af $L(H)$ er nu som på figur 7.20.



Figur 7.20: Udseendet af $L(H)$. Bemærk, at de stiplede linier repræsenterer 2-veje og de fuldt optrukne linier repræsenterer kanter.

Analogt med påstand 3 kan det vises, at hvis $p_{41}, p_{42} \notin X$ vil ethvert punkt i D_3 fra X være nabo til p_{41} eller p_{42}. Hvis $X = \{p_{12}, p_{34}\}$, så har enten P_{14} eller P_{24} længde nul, idet $p_{12} \in X$ skal være nabo til enten p_{41} eller p_{42}, lad det være P_{13}, som har længde nul. Hvis $|X| > 2$, så må P_{14} også have længde nul, hvilket skyldes følgende. Da D_1 samt D_4 begge kun indeholder punktet p_{34} fra X, og hvert punkt fra X skal have en nabo i både P_{13} og P_{24}, må X, da $|X| > 2$, indeholde p_{34}, p_{12} samt $p_{14} = p_{41}$. Altså har P_{14} længde nul. Det vil sige, at P_{12}, P_{23}, P_{34} og P_{14} alle har længde nul, hvormed $L(H)$ er degenereret, og $X = \{p_{12}, p_{34}\}$ eller $X = \{p_{12}, p_{34}, p_{14}\}$.
Der er symmetri mellem P_{13} og P_{42}, og hvis begge 2-veje har længde en, da er (iii)(c) opfyldt, så det kan antages, at P_{13} har længde mindst tre. Det kan antages, at $p_{31} \in X_1$ og $p_{32} \in X_2$, og som konsekvens deraf, at $p_{24} \in X_1$. Da P_{13} har ulige længde mindst tre, er $p_{12}, p_{13}, P_{13}, p_{31}, p_{34}$ en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter tilhører X, og hvis indre punkter ikke tilhører X. Da følger af lemma 2.2, at Y indeholder et afhop for $p_{12}, p_{13}, P_{13}, p_{31}, p_{34}$. Lad Q bestå af punkterne $q_1, q_2, \ldots, q_k$, så $y_1 = q_1$ og $y_2 = q_k$. Det eneste punkt i Y, som ikke er nabo til p_{31}, er $y_1 = q_1$, og den eneste ikke-nabo til q_1 i Y er q_2, så q_1,q_2 danner afhoppet. Dermed vil kanterne $q_1p_{12}, q_1p_{13}, q_1p_{34}, q_2p_{12}, q_2p_{31}$ og q_2p_{34} findes i grafen. Da q_2 er forbundet via kanten q_2p_{12}, 2-vejen $q_2, p_{31}, P_{13}, p_{13}$ samt 2-vejen $q_2, p_{34}, P_{34}, p_{43}, p_{41}, P_{14}, p_{14}$, følger det af lemma 2.9, at q_2 har to naboer i T_1. Hvis q_2 er nabo til p_{13}, så dannes et hul $q_2, p_{13}, q_1, p_{34}, p_{31}$ af ulige længde, derfor kan q_2 ikke være nabo til p_{13}, og dermed må q_2 være nabo til p_{14}. Nu er 2-vejen $p_{12}, p_{24}, P_{24}, p_{42}, p_{43}$

af ulige længde mindst tre mellem fælles naboer til q_1 og q_2. Hvis q_1 og q_2 har en fælles nabo i P_{24}, så vil det danne et hul af ulige længde med $q_1, p_{13}, P_{13}, p_{31}, q_2$. Dermed er q_1 og q_2 også et afhop for 2-vejen $p_{12}, p_{24}, P_{24}, p_{42}, p_{43}$. Det vil sige, at de eneste naboer til q_1 i $L(H)$ er punkterne $p_{12}, p_{13}, p_{42}, p_{43}, p_{23}$ og eventuelt p_{14}, og de eneste naboer til q_2 er punkterne $p_{21}, p_{24}, p_{31}, p_{34}, p_{14}$ og eventuelt p_{23}. Dermed er $(iii)(b)$ opfyldt, så påstand 5 er hermed vist.

Påstand 6: *Hvis $p_{31}, p_{32} \notin X$, så vil enten lemmaet være opfyldt, eller D_4 har længde fire, og de to andre punkter i D_4 tilhører X.*

Fra påstand 5 kan det antages, at mindst to punkter i D_4 tilhører X. Som under beviset for påstand 4 kan Y ikke forbindes til trekanten T_3, så der må findes nøjagtig to punkter i X, og disse to punkter er naboer, for ellers kan Y forbindes til T_3. Fra påstand 3 er de begge naboer til et af p_{31} eller p_{32}, hvormed D_4 har længde fire, og de to punkter udover p_{31} og p_{32} tilhører X. Dermed er påstand 6 vist.

Påstand 7: *Hvis $p_{31}, p_{32} \notin X$, og P_{12} har længde mindst en, så er lemmaet opfyldt.*

Hvis P_{12} har længde mindst to, så vil påstand 6 give, at lemmaet er opfyldt, da det ikke er muligt at P_{12} har længde mindst to i tilfældet, hvor D_4 har længde fire. Det kan derfor antages, at P_{12} har længde en, P_{13} og P_{23} begge har længde nul, og p_{12} samt p_{21} begge tilhører X. Da Y som under beviset for påstand 4 ikke kan forbindes til T_3, vil $p_{14} \notin X$ og $p_{24} \notin X$. Fra påstand 1 kan det antages, at $p_{13} \in X_1 - X_2$ og $p_{14} \in X_2 - X_1$. Dermed vil $p_{23} \in X_2 - X_1$ og $p_{24} \in X_1 - X_2$. Da vil $p_{13}, p_{21}, p_{14}, y_1, Q, y_2$ være et antihul, så anti 2-vejen Q må have lige længde. Da $p_{24}, p_{14}, y_1, Q, y_2$ ikke må være et antihul, da det så vil have ulige længde, må p_{14} og p_{24} være naboer. For at de kan være naboer, skal P_{14} og P_{24} begge have længde nul, hvormed P_{34} må have ulige længde, da der ellers dannes en kreds af ulige længde i H. Da $p_{13}, p_{14} \notin X$, kan det ved at anvende påstand 6 på D_2 konkluderes, at D_2 har længde fire, og dermed har P_{34} længde en. Hermed er $(iii)(c)$ opfyldt, så påstand 7 er vist.

Da D_4 altid skal have lige længde, idet der ellers findes en kreds af ulige længde i H, vil D_4 have længde mindst fire. Det kan derfor af symmetrigrunde antages, at $p_{31}, p_{32} \notin X$. Fra påstand 7 følger, at P_{12} har længde nul. Fra påstand 6 og påstand 7 følger, at det kan antages, at P_{23} har længde nul, og P_{13} har længde en, hvormed $p_{13}, p_{12} \in X$. Idet Y, som under beviset for påstand 4, ikke kan forbindes til trekanten T_3, må $p_{24} \notin X$, da punktet p_{34}, 2-vejen p_{13}, p_{31} og 2-vejen p_{24}, p_{32} ellers forbinder Y til T_3. Ved at anvende påstand 6 og påstand 7 på D_1, kan det antages, at P_{34} har længde nul, P_{24} har længde en, og $p_{42} \in X$. Hvis P_{14} har længde nul, så er $(iii)(c)$ opfyldt, da det bare er en permutation af nummereringen. Hvis P_{14} ikke har længde nul, så er $L(H)$ en overskygget optræden, da der findes en forgrening $B_{1,4}$ i H med endepunkter 1 og 4, så $\varrho_H(1) = \{p_{12}, p_{13}, p_{14}\}$ og $\varrho_H(4) = \{p_{41}, p_{42}, p_{43}\}$, og alle punkter i Y er naboer til p_{12}, p_{13}, p_{42} og p_{43}. Dermed er $(iii)(a)$ opfyldt. Hermed er det vist, at $(iii)(a)$-$(iii)(c)$ vil gælde. □

Lemma 7.13
Lad G være en Berge graf, og lad $L(H)$ være en overskygget optræden af J i G, hvor J er en 3-sammenhængende graf. Da gælder et af følgende:

(i) *Der findes en forstørrelse af J, som har en ikke-degenereret optræden i G.*

(ii) *G har en balanceret skæv opdeling.*

◇

Der er nu blevet vist nogle resultater om, hvordan en optræden af en 3-sammenhængende graf har betydning for den Berge graf, som den er en optræden i.

Kapitel 8

Knuder

I dette kapitel betragtes grafer, som har en induceret delgraf, der er isomorf med en degenereret optræden af K_4. En degenereret optræden af K_4 kan både ses som en liniegraf, såvel som en samling af 2-veje og anti 2-veje, kaldet en knude. Der gennemgåes her definitioner og resultater, der anvendes som hjælp til at vise nogle af hovedresultaterne i rapporten. De mængder af 2-veje og anti 2-veje, der kan ses som en degenereret optræden af K_4, og som udgør en knude, defineres indledningsvist.

Definition 8.1 (Knude)
Lad G være en graf, lad P_1 og P_2 være 2-veje i G, og lad Q_1 samt Q_2 være anti 2-veje i G, så P_1, P_2, Q_1 samt Q_2 er parvis disjunkte. Lad a_i og b_i være endepunkterne i P_i, og lad x_i og y_i være endepunkterne i Q_i, for $i = 1, 2$. Hvis P_1, P_2, Q_1 samt Q_2 opfylder følgende:

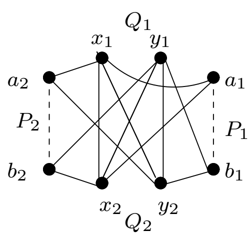
(i) *P_1, P_2, Q_1 samt Q_2 har længde mindst en.*

(ii) *Der findes ingen kanter mellem P_1 og P_2, og desuden er Q_1 komplet til Q_2.*

(iii) *For $i, j = (1, 1), (1, 2)$ og $(2, 1)$ er kanterne $a_i x_j$ og $b_i y_j$ de eneste kanter mellem $V(P_i)$ og $\{x_j, y_j\}$, og kanterne $a_2 y_2$ samt $b_2 x_2$ er de eneste kanter mellem $V(P_2)$ og $\{x_2, y_2\}$.*

(iv) *For $i, j = (1, 1), (1, 2)$ og $(2, 1)$ er kanterne $a_i y_j$ samt $b_i x_j$ de eneste kanter, der* **ikke** *findes mellem $V(Q_j)$ og $\{a_i, b_i\}$, og kanterne $a_2 x_2$ samt $b_2 y_2$ er de eneste kanter, der* **ikke** *findes mellem $V(Q_2)$ og $\{a_2, b_2\}$.*

Da kaldes $K = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ en knude i G. ◇



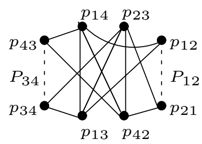
Figur 8.1: Et eksempel på en knude i G, hvor anti 2-vejene Q_1 og Q_2 har længde en, og hvor 2-vejene P_1 samt P_2 er illustreret med stiplede linier.

Bemærk, at hvis (P_1, P_2, Q_1, Q_2) er en knude i G, så er (P_2, P_1, Q_1, Q_2) også en knude i G, hvis der blot laves en omnummerering af endepunkterne i P_1 og P_2. Desuden medfører definition 8.1(iv), at det indre af Q_1 og det indre af Q_2 er komplet til $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Fra definition 8.1(iii) følger, at $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ kun har naboer i $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ i P_1 og P_2.

Lemma 8.2
Lad G være en Berge graf, og lad (P_1, P_2, Q_1, Q_2) være en knude i G. Da vil P_1, P_2, Q_1 samt Q_2 alle have ulige længde, og enten vil både P_1 og P_2 have længde en, eller så vil både Q_1 og Q_2 have længde en. ◇

Hvis G er en Berge graf, og $L(H)$ er en degenereret optræden af en 3-sammenhængende graf $J = K_4$ i G, så kan $L(H)$ betragtes som en knude i G ud fra følgende:
Lad $V(J) = \{1, 2, 3, 4\}$, og lad P_{13}, P_{14}, P_{23} og P_{24} have længde nul i G. Lad $P_1^* = P_{12}$, og lad $P_2^* = P_{34}$. Lad Q_1^* være anti 2-vejen p_{13}, p_{24} af længde en, og lad Q_2^* være anti 2-vejen p_{14}, p_{23} af længde en. Da vil $(P_1^*, P_2^*, Q_1^*, Q_2^*)$ være en knude i G.
Ovenstående lemma viser, at $(P_1^*, P_2^*, Q_1^*, Q_2^*)$ og $(\overline{P_1^*}, \overline{P_2^*}, \overline{Q_1^*}, \overline{Q_2^*})$ er de eneste mulige knuder i en Berge graf.

Altså vil $(P_1^*, P_2^*, Q_1^*, Q_2^*)$ se ud som på følgende figur, hvor Q_1^* og Q_2^* har længde en.



Figur 8.2: Knuden $L(H)$ i G, hvor P_{23}, P_{24}, P_{14} samt P_{13} har længde nul, og P_{34} samt P_{12} er illustreret med stiplede linier.

Følgende bemærkning giver, hvordan en knude tilsvarende kan betragtes som en degenereret optræden af K_4.

Bemærkning 8.3
Når Q_1 og Q_2 begge har længde en, kan knuden betragtes som en degenereret optræden af K_4. Betragt figur 8.2, og konstruér den graf, som figur 8.2 er liniegrafen for. Her skal P_{14}, P_{23}, P_{13} og P_{24} have længde nul, for at det er en knude, og de giver, at det er en degenereret optræden. ◇

Definition 8.4 (Lokal med hensyn til en knude)
Lad G være en Berge graf, og lad $K = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ være en knude i G. En delmængde $X \subseteq V(K)$ siges at være lokal med hensyn til knuden, hvis

(i) *X er disjunkt fra mindst en af P_1 eller P_2.*

(ii) *Hverken $V(Q_1)$ eller $V(Q_2)$ er en delmængde af X.*

(iii) *Mængden $X \cap (V(P_1) \cup V(P_2))$ er komplet til mængden $X \cap (V(Q_1) \cup V(Q_2))$.*

◇

Definition 8.5 (Mætte en knude)
Lad G være en Berge graf, og lad $K = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ være en knude i G. En delmængde $X \subseteq V(K)$ siges at mætte knuden, hvis $V(K) - X$ er lokal med hensyn til knuden (Q_1, Q_2, P_1, P_2) i $\overline{G}$. ◇

At $V(K) - X$ er lokal med hensyn til knuden (Q_1, Q_2, P_1, P_2) i $\overline{G}$, betyder, at $V(K) - X$ er disjunkt fra en af Q_1 eller Q_2, $V(K) - X$ ikke indeholder hverken $V(P_1)$ eller $V(P_2)$, $(V(K) - X) \cap (V(Q_1) \cup V(Q_2))$ er komplet til $(V(K) - X) \cap (V(P_1) \cup V(P_2))$. Det vil sige, at X indeholder mindst én af Q_1 eller Q_2, $X \cap V(P_1) \neq \emptyset$, og $X \cap V(P_2) \neq \emptyset$.
Når $(V(K) - X) \cap (V(Q_1) \cup V(Q_2))$ er komplet til $(V(K) - X) \cap (V(P_1) \cup V(P_2))$ i $\overline{G}$, så findes der ikke kanter mellem $(V(K) - X) \cap (V(Q_1) \cup V(Q_2))$ og $(V(K) - X) \cap (V(P_1) \cup V(P_2))$ i G. Hvis der findes en kant mellem $V(P_1) \cup V(P_2)$ og $V(Q_1) \cup V(Q_2)$, så kan den ifølge ovenstående ikke være mellem to punkter i $V(K) - X$. Derfor må en sådan kant have mindst et endepunkt i X. Det vil sige, at X indeholder mindst ét endepunkt fra enhver kant mellem $V(P_1) \cup V(P_2)$ og

$V(Q_1) \cup V(Q_2)$.
Følgende lemma angiver, hvornår en delmængde af punkterne i en knude er henholdsvis lokal med hensyn til en knude eller mætter en knude i forhold til om delmængden er lokal med hensyn til en optræden i G henholdsvis mætter en optræden i G.

Lemma 8.6
Lad G være en Berge graf, og lad $L(H)$ være en optræden i G. Lad $K = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ være en knude i G, så $K = L(H)$ er en optræden af K_4. Antag, at Q_1 og Q_2 begge har længde en, og lad $X \subseteq V(K)$. Da vil følgende to punkter gælde:

(*i*) *X er lokal med hensyn til knuden, hvis og kun hvis X er lokal med hensyn til $L(H)$.*

(*ii*) *X mætter knuden, hvis og kun hvis X mætter $L(H)$, og X har punkter fælles med både $V(P_1)$ og $V(P_2)$.*

$\diamond$

Bevis
Det kan ifølge lemma 8.2 antages, at Q_1 og Q_2 begge har længde en.
I dette bevis tages udgangspunkt i notationen på figur 8.2.

Hvis X er lokal med hensyn til knuden, så er kravene til X, at mængden $X \cap (V(P_1) \cup V(P_2))$ er komplet til mængden $X \cap (V(Q_1) \cup V(Q_2))$, X er disjunkt fra mindst en af P_1 eller P_2, og X indeholder hverken $V(Q_1)$ eller $V(Q_2)$. Det skal så ifølge definition 7.4 vises, at $X \subseteq N_v$ for et punkt $v \in V(J)$, eller $X \subseteq R_{uv}$ for en kant $uv \in E(J)$. Vælg for eksempel et punkt i P_1 eller P_2, som skal tilhøre X, lad det være p_{43}. Da $p_{43} \in P_2$, vil $X \cap V(P_1) = \emptyset$. Da $X \cap V(P_2)$ skal være komplet til $X \cap (V(Q_1) \cup V(Q_2))$, kan punkterne p_{42} og p_{14} tilhøre X. Da $X \cap V(Q_1) \neq V(Q_1)$, og $X \cap V(Q_2) \neq V(Q_2)$, kan punkterne p_{23} og p_{13} ikke tilhøre X. Heraf må $X \subseteq \{p_{43}, p_{42}, p_{14}\} = \{p_{43}, p_{42}, p_{41}\}$, hvilket medfører, at $X \subseteq N_4$. Da punktet p_{43} kan vælges vilkårligt, må det gælde for alle valg af punkter i K, som er endepunkt i P_1 eller P_2. Hvis X har et punkt i det indre af P_2, så kan X ikke indeholde punkter fra $Q_1 \cup Q_2$, da ingen indre punkter i P_2 har naboer i $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Dette medfører, at $X \subseteq N_v$ for et $v \in V(J)$. Dermed vil X ifølge definition 7.4 være lokal med hensyn til $L(H)$.
Hvis X er lokal med hensyn til $L(H)$, vil $X \subseteq N_v$ eller $X \subseteq R_{uv}$ for $u, v \in V(J)$. Hvis $X \subseteq N_v$, så er punkterne i X komplette til hinanden, og dermed vil de opfylde definition 8.4(i)-(iii). Hvis $X \subseteq R_{uv}$, så er X indeholdt i $P_{12} = P_1, P_{34} = P_2$ eller en af P_{23}, P_{24}, P_{14} eller P_{13}, som har længde nul. I alle tilfælde vil definition 8.4 være opfyldt.

Hvis X mætter knuden, så skal det ifølge definition 6.8 vises, at for ethvert forgreningspunkt $v \in V(H)$ vil højst en kant $e \in \varrho_H(v)$ ikke tilhøre X. At X mætter knuden betyder, at X indeholder mindst én af Q_1 eller Q_2, X har punkter fælles med både P_1 og P_2, samt at X indeholder mindst ét endepunkt fra enhver kant mellem $V(P_1) \cup V(P_2)$ og $V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Det vil sige, at enten er $V(Q_1) \subset X$, eller så er $V(Q_2) \subset X$. Desuden vil mindst ét af punkterne a_1 eller x_1, mindst ét af punkterne a_1 eller x_2, mindst ét af punkterne b_1 eller y_1, mindst ét af punkterne b_1 eller y_2, mindst ét af punkterne a_2 eller x_1, mindst ét af punkterne a_2 eller y_2, mindst ét af punkterne b_2 eller y_1 og mindst ét af punkterne b_2 eller x_2 tilhøre X, da disse er endepunkterne for kanterne mellem $V(P_1) \cup V(P_2)$ og $V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Mængden X fremkommer altså som en kombination af ovenstående muligheder. I J vil hvert forgreningspunkt altid være incident med mindst tre kanter, og disse kanter danner en komplet delgraf i $L(H)$. Da $L(H)$ kun indeholder komplette delgrafer med tre punkter, skal der for hver trekant gælde, at mindst to af de tre punkter vil tilhøre X, for at X mætter $L(H)$. Ved samtlige mulige kombinationer fremkommer der en mængde, hvorom det gælder, at mængden mætter $L(H)$.
Hvis X mætter $L(H)$, og X har punkter til fælles med $V(P_1)$ og $V(P_2)$, betyder dette ifølge definition 6.8, at højst én kant, der er incident med hvert forgreningspunkt i H, ikke tilhører X. Da $L(H)$ er en optræden af K_4 i G, sættes $\{1, 2, 3, 4\}$ til at være mængden af forgreningspunkter i H, og benævn med p_{ij}, for $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, og $i \neq j$, kanterne, der er incidente med

forgreningspunkterne. Da X mætter $L(H)$, betyder dette, at højst ét af punkterne p_{12}, p_{13} eller p_{14} ikke tilhører X. Tilsvarende vil højst ét af punkterne p_{21}, p_{23} eller p_{24}, højst ét af punkterne p_{31}, p_{32} eller p_{34} og højst ét af punkterne p_{41}, p_{42} eller p_{43} ikke tilhøre X. Da P_{14}, P_{23}, P_{13} og P_{24} alle har længde nul, er $p_{14} = p_{41}$, $p_{23} = p_{32}$, $p_{13} = p_{31}$, og $p_{24} = p_{42}$, og dermed bliver der færre muligheder for udseendet af X. For eksempel kan $X = \{p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{13}\}$. Her gælder der, at $V(K) - X = V(P_{34}) \cup V(P_{12})$, og $V(K) - X$ er disjunkt fra både Q_1 og Q_2 samt indeholder både $V(P_1)$ og $V(P_2)$ som delmængde. Desuden indeholder X et endepunkt for hver kant mellem $V(Q_1) \cup V(Q_2)$ og $V(P_1) \cup V(P_2)$. Dette vil gælde for samtlige mulige X-mængder, så hermed er $V(K) - X$ lokal med hensyn til knuden. Det vil sige, at X mætter knuden. $\square$

Lemma 8.6 giver altså en sammenhæng mellem definition 7.4 og definition 8.4 samt en sammenhæng mellem definition 6.8 og definition 8.5.

Lemma 8.7
Lad G være en Berge graf, og lad $K = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ være en knude i G. Antag, at der ikke findes en optræden af en forstørrelse af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$, og antag, at der ikke findes en overskygget optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. Lad F være en sammenhængende delmængde af $V(G) - V(K)$, så mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal med hensyn til knuden. Da vil et af følgende gælde:

(*i*) *Der findes et punkt i F, så mængden bestående af punktets naboer i K mætter knuden.*

(*ii*) *Op til symmetri findes der en 2-vej P i F med endepunkter p_1 og p_2, så p_1 og a_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, og der ikke findes kanter mellem $P - \{p_1\}$ og $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Desuden har p_2 en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og der findes ikke kanter mellem $P - \{p_2\}$ og $P_1 - \{a_1\}$.*

(*iii*) *Op til symmetri findes der en 2-vej L af ulige længde i F med endepunkter l_1 og l_2, så l_1 og a_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, l_2 samt b_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, der ikke findes kanter mellem $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$ og det indre af L, og der ikke findes kanter mellem L og P_1, bortset fra måske kanterne l_1a_1 og l_2b_1.*

(*iv*) *Op til symmetri findes der et punkt $f \in F$, så f og x_1 har de samme naboer i $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$, og f er ikke-nabo til y_1.*

$\diamond$

De i dette kapitel gennemgåede resultater anvendes i kapitel 9 som hjælp i de tilfælde, hvor grafer med en degenereret optræden af K_4 betragtes.

Kapitel 9

Generaliserede liniegrafer

Målet er stadig at udelukke de grafer, som indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med en todelt underdeling af en 3-sammenhængende graf, fra at være et minimalt modeksempel. Da der er flere mulige todelte underdelinger af en 3-sammenhængende graf, og intet udelukker, at en graf indeholder flere forskellige optrædener af en 3-sammenhængende graf, betragtes denne situation i dette kapitel. På denne måde generaliseres begrebet, at en graf G indeholder en optræden, til, at grafen kan indeholde flere optrædener af den samme 3-sammenhængende graf. Idet forgreningspunkterne i underdelingerne af den 3-sammenhængende graf altid vil være de samme, da forgreningspunkterne er de oprindelige punkter i den 3-sammenhængende graf, kan de forskellige optrædener have fælles punkter i G. Et eksempel på dette kan være, at det kun er en enkelt forgrening, der underdeles forskelligt til to optrædener. Hvis der så i G findes en induceret delgraf, der er isomorf med den første optræden, en induceret delgraf, der er isomorf med den anden optræden, og disse to delgrafer indeholder de samme punkter for alt andet end det, der oprindeligt var forgreningen, som blev underdelt forskelligt, så vil de to optrædener være fælles om nogle punkter, og på denne måde ligge oveni hinanden. For at holde styr på de forskellige underdelinger af den 3-sammenhængende graf indføres strengsystemer. I dette kapitel indføres også den næste type dekomposition, nemlig 2-vedhæng, og hovedresultaterne (ii)-(iv) fra kapitel 1 vises.

9.1 Strengsystemer

I dette afsnit gennemgåes definitioner og resultater omhandlende strengsystemer.

Definition 9.1 (S_{uv})
Lad G være en Berge graf, lad J være en 3-sammenhængende graf, og lad $uv \in E(J)$. For hver underdeling H af J, hvor G indeholder en delgraf, der er isomorf med $L(H)$, findes der i H en forgrening mellem u og v, så R_{uv} er en punktmængde i G. Her defineres S_{uv} i G til at være mængden af R_{uv}'er for underdelinger af J, hvor G indeholder en delgraf, der er isomorf med liniegrafen af denne underdeling. Det vil sige, at $S_{uv} \subseteq V(G)$. ⋄

Bemærk, at S_{uv} ikke nødvendigvis er en maksimal mængde, forstået på den måde, at samtlige mulige underdelinger H af J, hvor $L(H)$ er en optræden i G, ikke nødvendigvis betragtes, når S_{uv} dannes.

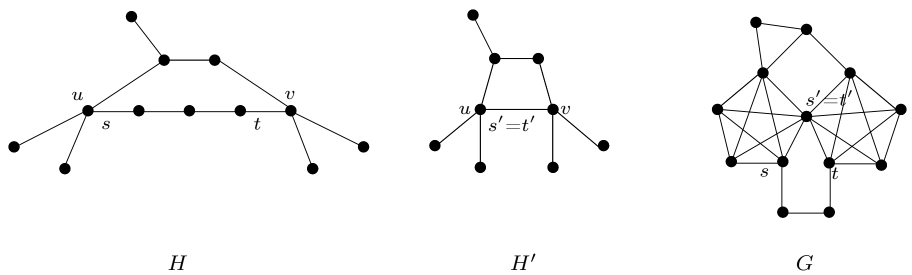
Definition 9.2 (N_{uv})
Lad G være en Berge graf, så G indeholder mindst én optræden af en 3-sammenhængende graf J. Hvis $uv \in E(J)$, da defineres $N_{uv} = N_u \cap S_{uv}$ i G. ⋄

Bemærk, at $N_{uv} \neq N_{vu}$, hvis kanten uv er blevet underdelt. Hvis G kun indeholder én optræden af en 3-sammenhængende graf J, da vil N_{uv} og N_{vu}, for $uv \in E(J)$, hver kun bestå af et enkelt

punkt.
Mængden S_{uv} består altså af punkter på 2-veje P_{uv} mellem N_{uv} og N_{vu}, hvor $V(P_{uv}) = L(R_{uv})$ for en kantmængde R_{uv} i en forgrening mellem u og v i en underdeling af J. Bemærk, at ikke samtlige mulige todelte underdelinger af J giver anledning til 2-veje P_{uv} i G. Kun underdelinger H af J, hvor $L(H)$ er en optræden af J i G, medtages, når mængderne S_{uv}, for $uv \in E(J)$, dannes.

Definition 9.3 (uv-streng og uv-sti)
Lad G være en Berge graf, så G indeholder mindst en optræden af en 3-sammenhængende graf J, og lad $uv \in E(J)$. Her siges $M = (N_u, S_{uv}, N_v)$ at være en uv-streng, hvis ethvert punkt i $N_u \cup S_{uv} \cup N_v$ tilhører en 2-vej mellem N_u og N_v, hvis første punkt tilhører N_u, hvis sidste punkt tilhører N_v, og hvis indre tilhører S_{uv}. En sådan 2-vej kaldes en sti for strengen eller blot en uv-sti.
◇

Punktmængden af en uv-sti består altså af $V(L(R_{uv}))$, hvor R_{uv} er kantmængden af en forgrening mellem u og v i en underdeling H af J, hvor G indeholder en delgraf, der er isomorf med $L(H)$. Følgende figur illustrerer to uv-stier.



Figur 9.1: To stier $P_{uv} : s, \ldots, t$ og $Q_{uv} : s' = t'$ i G, hvor P_{uv} har længde tre, og Q_{uv} har længde nul.

Definition 9.4 (Strengsystem)
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf. Et strengsystem (S, N) for J i G, hvor S er foreningen af S_{uv}, og N er foreningen af N_u og N_v, for hver $uv \in E(J)$, er da udgjort af følgende:

- (I) *Delmængder $S_{uv} = S_{vu} \subseteq V(G)$, hvor $uv \in E(J)$ er en vilkårlig kant i J.*
- (II) *Delmængder $N_w \subseteq V(G)$, hvor $w \in V(J)$ er et vilkårligt punkt i J.*

Disse delmængder skal opfylde følgende:

- (i) *Mængderne $S_{uv} \subseteq V(G)$, for $uv \in E(J)$, er disjunkte.*
- (ii) *For et punkt $w \in V(J)$ er $N_w \subseteq \bigcup\{S_{wv} \mid v \in V(J)$ er nabo til $w\}$.*
- (iii) *For en kant $uv \in E(J)$ tilhører ethvert punkt fra $S_{uv} \subseteq V(G)$ en uv-sti i G.*
- (iv) *Hvis der haves to disjunkte kanter $uv, wz \in E(J)$, så findes der ingen kanter mellem $S_{uv} \subseteq V(G)$ og $S_{wz} \subseteq V(G)$.*
- (v) *Hvis der haves kanter $uv, uw \in E(J)$, hvor $v \neq w$ er to vilkårlige nabopunkter til u, så er N_{uv} komplet til N_{uw}, og dette er de eneste kanter mellem S_{uv} og S_{uw}.*
- (vi) *For en kant $uv \in E(J)$ findes der en uv-sti i G, så summen af længderne på xy-stierne mellem to nabopunkter x og y i enhver kreds C i J, hvor $uv \in E(C)$, vil have samme paritet som $|V(C)|$.*

For et strengsystem (S, N) for J defineres $V(S, N) = \{S_{uv} \mid S_{uv} \in S\}$. $\diamond$

Det følger, at for en kant $uv \in E(J)$ og et punkt $w \in V(J)$, hvor $w \neq u$ og $w \neq v$, er $S_{uv} \cap N_w = \emptyset$, da $w \in V(J)$ har grad mindst tre, og dermed ikke vil kunne tilhøre en forgrening mellem u og v. Da $V(S, N) = \{S_{uv} \mid S_{uv} \in S\}$, vil det gælde, at $N_u \subseteq V(S, N)$ for alle $u \in V(J)$.
Bemærk, at et strengsystem ikke er unikt, da $S_{uv} = \bigcup_{uv \in E(J)} R_{uv}$, hvor R_{uv} er en forgrening mellem u og v i en underdeling af J. Der skal om denne underdeling gælde, at liniegrafen af underdelingen skal være isomorf med en delgraf af G. I et strengsystem er det derfor valgfrit, hvor mange sådanne underdelinger, der medtages, når $S_{uv} = \bigcup_{uv \in E(J)} R_{uv}$ dannes. Det vil sige, at $|V(S, N)|$ kan variere for forskellige strengsystemer. Bemærk, at N først kan findes efter, at mængden S_{uv} er givet. Dette skyldes, at $N = \bigcup_{uv \in E(J)} N_u \cup N_v$, hvor N_u og N_v er kantmængder i de underdelinger af J, der er medtaget for at danne S_{uv}.

Følgende lemma viser, at definition 9.4(vi) gælder for enhver sti, da definition 9.4(vi) giver, at der findes én sti, så summen af længden af stier i kredsen har samme paritet som $|V(C)|$, og lemmaet giver, at de andre stier har samme paritet som stien, hvormed der for alle stier gælder, at summen af længden af stierne i kredsen har samme paritet som $|V(C)|$.

Lemma 9.5
Lad G være en Berge graf, og lad (S, N) være et strengsystem i G for en 3-sammenhængende graf J. Da vil der for alle uv-stier, hvor $uv \in E(J)$, gælde, at længden af uv-stierne har samme paritet. $\diamond$

Bevis
Da J er en 3-sammenhængende graf, vil der findes en kreds C i J, hvor $|V(C)| \geq 4$ og $uv \in E(C)$, da der altid findes en delgraf, som er isomorf med K_4 i en 3-sammenhængende graf. Vælg en xy-sti P_{xy} mellem ethvert par af nabopunkter $x, y \notin \{u, v\}$ på kredsen. For enhver uv-sti P_{uv} vil foreningen af P_{uv} og alle xy-stierne P_{xy} danne et hul i grafen. Hullet har lige længde mindst fire, da $|V(C)| \geq 4$, og G er en Berge graf. Derfor må alle uv-stier have samme paritet. $\square$

Bemærkning 9.6
Lad G være en Berge graf. Hvis der haves en 3-sammenhængende graf J, så G indeholder et strengsystem (S, N) for J, kan der for hver kant $uv \in E(J)$ vælges en uv-sti, så foreningen af disse uv-stier danner en liniegraf, som er en delgraf af G. Valget af stier siges at danne liniegrafen. Hvis uv-stierne danner en liniegraf $L(H)$, så idet G er en Berge graf, vil der i $L(H)$ kun findes huller af lige længde. Det betyder, at H kun kan indeholde kredse af lige længde, for hvis H indeholder en kreds C af ulige længde, så medfører definition 9.4(v), at $\langle L(C) \rangle_G$ danner et hul af ulige længde i G. Altså danner uv-stierne altid en liniegraf af en todelt underdeling af J. $\diamond$

Denne metode med at vælge stier, som danner en liniegraf, benyttes i de følgende resultater.

Lemma 9.7
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et strengsystem (S, N) for J. Hvis der findes en kant $uv \in E(J)$, så en uv-sti Q_{uv} har længde nul, og en anden uv-sti P_{uv} har længde mindst én, da findes en overskygget optræden af J i G. $\diamond$

Bevis
Bemærk, at en uv-sti Q_{uv} i G af længde nul fremkommer, hvis der findes en underdeling H af J, hvor $L(H)$ er en delgraf i G, og hvor $uv \in E(H)$ og $uv \in E(J)$. Altså består en sti af længde nul kun af et enkelt punkt.

Vælg en xy-sti P_{xy} for hvert par af nabopunkter $x, y \in V(J)$, så uv-stien P_{uv} har længde mindst en, og lad dette valg danne en liniegraf $L(H)$. Lad $z \in V(G)$ være et punkt, der udgør en uv-sti af længde nul. Det vil sige, at $z \notin V(L(H))$, men der findes en underdeling H', hvor $uv \in E(H')$, og $E(H') - uv$ er lig $E(H)$ fratrukket kanterne mellem u og v, som i G udgør P_{uv}. Det følger af lemma 9.5, at alle uv-stier har lige længde i G, idet z har lige længde, så P_{uv} må have lige længde mindst to. Lad B være en forgrening i H mellem u og v, så $E(B) = V(P_{uv})$, og lad s samt t være endepunkter for P_{uv}. Da P_{uv} har lige længde mindst to, har B ulige længde mindst tre. Desuden findes et punkt fra N_u i G, nemlig s, og et punkt fra N_v i G, nemlig t, som z ikke er nabo til. Da $H' - B = H - B$, er z nabo til alle punkter i $N_u - s$ og $N_v - t$. Ifølge definition 7.11 er $L(H)$ da en overskygget optræden af J i G. □

Eftersom strengsystemer er dannet ud fra optrædener i G, og disse optrædener enten kan være degenererede eller ikke-degenererede, defineres dette også for strengsystemer.

Definition 9.8 (Ikke-degenereret strengsystem)
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et strengsystem for J. Hvis der for ethvert par af nabopunkter u og v i J kan vælges en uv-sti P_{uv} i G, så stierne danner en ikke-degenereret optræden af J i G, da siges strengsystemet for J at være ikke-degenereret. ◇

Følgende er et korollar til lemma 9.7, og det anvendes som hjælp til senere at vise hovedresultaterne (ii) og (iii) fra kapitel 1.

Korollar 9.9
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et ikke-degenereret strengsystem (S, N) for J. Hvis der ikke findes en overskygget optræden af J i G, så vil ethvert valg af stier for alle par af nabopunkter i J danne en liniegraf, der er en ikke-degenereret optræden af J i G. ◇

Bevis
Da (S, N) er ikke-degenereret, findes der et valg af stier, som danner en ikke-degenereret optræden af J i G. Lad dette valg bestå af ij-stier P'_{ij} for ethvert par af nabopunkter $i, j \in V(J)$, og lad valget danne liniegrafen $L(H')$. Det vil sige, at $H' \neq K_{3,3}$, og hvis H' er en underdeling af K_4, så indeholder den ikke en kreds kun bestående af forgreningspunkterne i H'.

Antag, at der findes et andet valg af stier, hvor dette valg danner en degenereret optræden $L(H^*)$. Lad dette valg bestå af ij-stier P^*_{ij} for ethvert par af nabopunkter $i, j \in V(J)$. Da $L(H^*)$ er degenereret, vil H^* ifølge definition 7.7 være lig $K_{3,3}$ eller lig en underdeling af K_4, hvor H^* indeholder en kreds af længde fire kun indeholdende forgreningspunkterne i H^*. Hvis $H^* = K_{3,3}$, så er $H^* = J$, hvormed H' er en underdeling af $K_{3,3}$. Hvis H^* er en underdeling af K_4, som indeholder en kreds af længde fire kun indeholdende forgreningspunkterne i H^*, så vil H' være en underdeling af K_4, som ikke indeholder en kreds af længde fire kun indeholdende forgreningspunkterne i H^*. I begge tilfælde vil $H^* \neq H'$, så der findes to punkter $x, y \in V(J)$, så x og y er naboer i J og dermed i H^*, samt de er forbundet af en 2-vej i H' af længde mindst to. I G vil der dermed findes en xy-sti af længde nul og en xy-sti af længde mindst en. Ifølge lemma 9.7 vil der findes en overskygget optræden af J i G, hvilket er i modstrid med antagelsen i korollaret. Det vil sige, at antagelsen, om at der findes et valg af stier, som danner en degenereret optræden, må være forkert. □

Definition 9.10 (Mætte et strengsystem)
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et strengsystem (S, N) for J. En punktmængde $X \subseteq V(S, N)$ siges at mætte strengsystemet, hvis der for ethvert punkt $u \in V(J)$ gælder, at der findes højst én nabo v til u, hvor $N_{uv} \nsubseteq X$.
For et valg af stier, der danner en liniegraf, siges valget at være mættet af X, hvis X mætter liniegrafen. ◇

Bemærk, at hvis X mætter ethvert valg af stier for et strengsystem, så mætter X strengsystemet.

Definition 9.11 (Lokal med hensyn til et strengsystem)
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et strengsystem (S, N) for J. En punktmængde $X \subseteq V(S, N)$ siges at være lokal med hensyn til (S, N), hvis enten $X \subseteq N_u$ for et punkt $u \in V(J)$, eller $X \subseteq S_{uv}$ for to nabopunkter $u, v \in V(J)$. ◇

Definition 9.12 (Maksimalt strengsystem)
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et strengsystem (S, N) for J. Da siges (S, N) at være et maksimalt strengsystem i G, hvis der ikke findes et strengsystem (S', N') i G, så $V(S, N) \subseteq V(S', N')$, $S'_{uv} \cap V(S, N) = S_{uv}$ for alle kanter $uv \in E(J)$, og $N_v \subseteq N'_v$ for alle punkter $v \in V(J)$. ◇

Det vil sige, at i et maksimalt strengsystem er samtlige mulige optrædener af J i G medtaget, når strengsystemet dannes.

Definition 9.13 (Strengsystemsoverpunkt)
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et strengsystem (S, N) for J. Et punkt $y \in V(G) - V(S, N)$ siges at være et (S, N)-overpunkt, hvis mængden af y's naboer i $V(S, N)$ mætter (S, N). ◇

Lemma 9.14
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et maksimalt strengsystem (S, N) for J. Antag, at et af følgende gælder:

(I) (S, N) er ikke-degenereret, og der findes ikke en forstørrelse af J med en ikke-degenereret optræden i G.

(II) $J = K_{3,3}$, og der findes ikke en forstørrelse af J, som har en optræden i enten G eller $\overline{G}$.

Lad $F \subseteq V(G) - V(S, N)$ være en sammenhængende mængde, så intet punkt i F er et (S, N)-overpunkt. Da vil enten $J = K_4$, og der vil findes en overskygget optræden af J i G, eller så vil mængden af vedhæftninger for F i (S, N) være lokal. ◇

9.2 2-vedhæng

Ved hjælp af sætning 9.16 kan hovedresultat (ii) og (iii) fra kapitel 1 vises. Til dette benyttes den anden type dekomposition, nemlig 2-vedhæng, som her defineres.

Definition 9.15 (2-vedhæng)
Et 2-vedhæng i en graf G er en opdeling $\{X_1, X_2\}$ af $V(G)$, så der for $i = 1, 2$ findes $A_i, B_i \subseteq X_i$, hvor $A_i, B_i \neq \emptyset$ og $A_i \cap B_i = \emptyset$, som opfylder følgende:

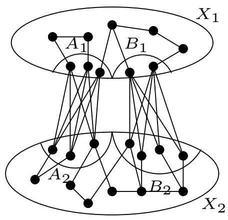
(i) A_1 er komplet til A_2, og B_1 er komplet til B_2.

(ii) Der findes ikke andre kanter mellem X_1 og X_2.

(iii) For $i = 1, 2$ vil hver komponent af $\langle X_i \rangle_G$ have punkter til fælles med både A_i og B_i.

(iv) For $i = 1, 2$, hvis $|A_i| = |B_i| = 1$ og $\langle X_i \rangle_G$ er en 2-vej mellem A_i og B_i, så har 2-vejen længde mindst tre.

◇



Figur 9.2: Et eksempel på 2-vedhæng.

Lad G være et minimalt modeksempel, der indeholder et 2-vedhæng. Idet X_1 og X_2 er en opdeling af $V(G)$, kan $\langle X_1\rangle_G$ og $\langle X_2\rangle_G$ ikke være minimale modeksempler. Altså må de være perfekte grafer. I [Cornuéjols & Cunningham, 1985, side 248] er det vist, at et 2-vedhæng bevarer perfekthed, så derfor må $\langle X_1 \cup X_2\rangle_G = G$ være en perfekt graf. Altså kan et minimalt modeksempel ikke indeholde et 2-vedhæng.

Sætning 9.16
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så et af følgende gælder:

(i) *Der findes en ikke-degenereret optræden $L(H)$ af J i G, og der findes ikke en forstørrelse af J, som har en ikke-degenereret optræden i G.*

(ii) *$J = K_{3,3}$, der findes en optræden $L(H)$ af J i G, og der findes ikke en forstørrelse af J, der har en optræden i G eller $\overline{G}$.*

Da vil enten $G = L(H)$, G indeholde et 2-vedhæng, eller G vil have en balanceret skæv opdeling.
◇

Bevis
Hvis $J = K_4$ eller $J = K_{3,3}$, og der findes en overskygget optræden af J i G eller $\overline{G}$, så er antagelserne i lemma 7.13 opfyldte. Da det i sætningen er antaget, at der ikke findes en forstørrelse af J, som har en ikke-degenereret optræden i G, kan lemma 7.13(i) ikke gælde, og dermed vil G have en balanceret skæv opdeling.

Det antages derfor, at hvis $J = K_4$ eller $J = K_{3,3}$, så findes der ikke en overskygget optræden af J i hverken G eller $\overline{G}$. Vælg en optræden $L(H_0)$ af J i G, og vælg $L(H_0)$ som en ikke-degenereret optræden, hvis det er muligt. Hvis $L(H_0)$ er degenereret, følger det af antagelserne i punkterne (i) og (ii) i sætningen, at $J = K_{3,3}$, og der ikke findes en forstørrelse af J, som har en optræden i G eller $\overline{G}$.
Foretag et valg af stier, så de danner $L(H_0)$, og vælg et strengsystem (S, N) for J, hvor stierne, der danner $L(H_0)$, er indeholdt. Vælg strengsystemet til et maksimalt strengsystem. Hvis $L(H_0)$ er en ikke-degenereret optræden, vil strengsystemet ifølge definition 9.8 også være ikke-degenereret.
Lad Y være mængden af punkter fra $V(G) - V(S, N)$, der er (S, N)-overpunkter, og lad $Z = V(G) - (V(S, N) \cup Y)$. Dermed vil der ifølge definition 9.13 om Y gælde, at mængden af Y's naboer i $V(S, N)$ mætter (S, N). Både hvis $L(H_0)$ er degenereret, og hvis den er ikke-degenereret, kan lemma 9.14 benyttes, og for hver komponent i Z vil mængden af komponentens vedhæftninger i $V(S, N)$ være lokal.

Påstand 1: *Hvis $Y \neq \emptyset$, så har G en balanceret skæv opdeling.*

Lad Y' være en maksimal antisammenhængende delmængde af Y, hvilket vil sige, at Y' er en antikomponent i Y, og lad X indeholde de punkter fra G, som er komplette til Y'. For ethvert valg af stier, der danner en liniegraf $L(H)$, og for hvert $y \in Y'$, vil mængden af naboer til y i $L(H)$ mætte $L(H)$, da $y \in Y' \subseteq Y$, og Y består af (S, N)-overpunkter.
Hvis $J = K_4$, så følger det af korollar 9.9, at $L(H)$ er ikke-degenereret, da det er antaget, at der hverken i G eller $\overline{G}$ findes en overskygget optræden af J. Derfor kan det antages, at hvis $J = K_4$,

så er $L(H)$, for alle valg af stier, ikke-degenereret. Betragt lemma 7.12. Her kan lemma 7.12(i) ikke være opfyldt, idet der per antagelse ikke findes en overskygget optræden af J i hverken G eller $\overline{G}$ og hvis $L(H)$ er degenereret, følger det af (i) og (ii), at $J = K_{3,3}$, og der ikke findes en forstørrelse af J, som har en optræden i G eller $\overline{G}$. Lemma 7.12(ii) kan ikke være opfyldt, da der per antagelse ikke findes en overskygget optræden af J i G. Desuden kan lemma 7.12(iii) ikke være opfyldt, da enhver optræden af K_4 i G per antagelse er ikke-degenereret. Dermed følger det, at X mætter $L(H)$, da dette er den eneste antagelse i lemma 7.12, der ikke på forhånd er opfyldt. Da X mætter $L(H)$ for ethvert valg af stier, der danner $L(H)$, må X mætte strengsystemet.

Lad b_1b_2 være en kant i J, så $S_{b_1b_2} \not\subseteq X$, hvis det er muligt. Mængderne $\{N_{b_1v} \mid b_1v \in E(J)\}$ danner en opdeling af mængden N_{b_1} i k mængder, hvor $k = \deg_J(b_1)$. Her vil mindst $k-1$ af disse mængder være delmængder af X, da X mætter strengsystemet. Vælg $k-1$ af disse mængder, så de valgte mængder alle er delmængder af X. Undgå at vælge $N_{b_1b_2}$, hvis det er muligt. Lad foreningen af disse mængder være X_1, så $X_1 \subseteq N_{b_1}$. Analogt dannes X_2, så $X_2 \subseteq N_{b_2}$.
Hvis der i $S_{b_1b_2}$ findes et punkt $p \notin X$, så vil $S_{b_1b_2} \not\subseteq X$. Hvis $S_{b_1b_2} \subseteq X$, så vil alle naboer til b_1 og alle naboer til b_2 tilhøre X, da der ellers kan vælges en anden $S_{b_1b_2}$, hvor $S_{b_1b_2} \not\subseteq X$. Desuden vil $S_{uv} \subseteq X$ for alle kanter $uv \in E(J)$, da kanten b_1b_2 er valgt, så $S_{b_1b_2} \not\subseteq X$, hvis det er muligt. Dermed kan der vælges $k-1$ mængder blandt b_1's naboer, som er delmængder af X, uden at benytte mængden $N_{b_1b_2}$ og ligeledes for b_2. Hermed vil $X_1 \cap S_{b_1b_2} = \emptyset$ og $X_2 \cap S_{b_1b_2} = \emptyset$. Altså må $S_{b_1b_2} \not\subseteq X_1 \cup X_2$, $X_1 = N_{b_1} - N_{b_1b_2}$ samt $X_2 = N_{b_2} - N_{b_2b_1}$.

Lad X_3 være mængden af punkter fra $X \cap V(S,N)$, der ikke tilhører $X_1 \cup X_2$, og lad X_0 være de punkter fra X, der ikke tilhører $V(S,N)$. Det vil sige, at $X_3 = X \cap (V(S,N) - (X_1 \cup X_2))$, og $X_0 = X \cap (V(G) - V(S,N))$. Hermed er X_0, X_1, X_2 og X_3 fire disjunkte punktmængder, og $X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$. Da X er mængden af alle punkter fra $V(G)$, der er komplette til Y', og X_0 er de punkter fra X, der ikke tilhører $V(S,N)$, vil $Y - Y' \subseteq X_0$, da Y' er en antikomponent i Y.

Lad $K_1, \dots, K_l$ være sammenhængskomponenterne i $G-(Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2)$, lad $A = \{K_i \mid V(K_i) \cap (V(L(H)) - S_{b_1b_2}) = \emptyset\}$, og lad $B = \{K_i \mid V(K_i) \cap (V(L(H)) - S_{b_1b_2}) \neq \emptyset\}$. Det skal nu vises, at B ikke er tom. Der findes en kant $c_1c_2 \in E(J)$, som er disjunkt fra kanten b_1b_2, og hvis mængden $S_{c_1c_2}$ betragtes, ses det, at ingen punkter fra $S_{c_1c_2}$ tilhører $N_{b_1} \cup N_{b_2} \cup S_{b_1b_2}$, da c_1c_2 og b_1b_2 er disjunkte. Intet punkt fra $S_{c_1c_2}$ vil være indeholdt i Y', da $Y' \subseteq V(G) - V(S,N)$ og $S_{c_1c_2} \subset V(S,N)$. Desuden vil intet punkt fra $S_{c_1c_2}$ være indeholdt i $X_1 \cup X_2$, da både N_{b_1} og N_{b_2} er disjunkte fra N_{c_1} og N_{c_2}, og der ikke findes kanter mellem $S_{c_1c_2}$ og $S_{b_1b_2}$. Ligeledes vil intet punkt fra $S_{c_1c_2}$ være indeholdt i X_0, da $S_{c_1c_2} \subseteq V(S,N)$. Derfor vil ingen af punkterne fra $S_{c_1c_2}$ være indeholdt i $Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2$, hvormed de tilhører en sammenhængskomponent K_i, og da $S_{b_1b_2} \cap S_{c_1c_2} = \emptyset$, må $K_i \in B$, altså vil punkterne i $S_{c_1c_2}$ tilhøre B. Det vil sige, at B ikke er tom.
Antag, at $A \neq \emptyset$. Da mængderne A og B er en opdeling af sammenhængskomponenterne i $G - (Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2)$, og $A \cap B = \emptyset$, er $A \cup B$ ikke sammenhængende. Da $X_0 \cup X_1 \cup X_2$ er komplet til Y', er $\langle Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2 \rangle_{\overline{G}}$ ikke sammenhængende. Altså er $Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2$ ikke en antisammenhængende mængde, og dermed er $\{A \cup B, Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2\}$ en skæv opdeling i G. Hvis $\{A \cup B, Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2\}$ er en løs skæv opdeling i G, følger det af lemma 3.6, at opdelingen er balanceret. Derfor antages det, at opdelingen ikke er en løs skæv opdeling. Det vil ifølge definition 3.5 sige, at alle punkter i $Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2$ har mindst én nabo i hver komponent i $A \cup B$, og intet punkt i $A \cup B$ er komplet til en antikomponent i $Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2$. Da $A \cup B = G-(Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2)$, X er mængden af alle punkter fra $V(G)$, der er komplette til Y', og X_3 er mængden af punkter fra $X \cap V(S,N)$, der ikke tilhører $X_1 \cup X_2$, må $X_3 = \emptyset$, for ellers er $\{A \cup B, Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2\}$ en løs skæv opdeling, da $X_3 \subseteq A \cup B$, og der så vil findes et punkt i $A \cup B$, der er komplet til en antikomponent Y' i $Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2$. Det vil sige, at $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$, og dermed er $X \cap V(S,N) = X_1 \cup X_2$, og $X \cap V(L(H)) \subseteq N_{b_1} \cup N_{b_2}$. Fra tidligere haves, at $X \cap V(L(H))$ mætter strengsystemet, og dermed vil der for ethvert punkt $w \in V(J)$, hvor $w \neq b_1$ og $w \neq b_2$, gælde, at w højst har én nabo i J forskellig fra b_1 og b_2. Desuden vil w være nabo til både b_1 og b_2. Da J er 3-sammenhængende, kan der højst findes to punkter w_1 og w_2, hvor ovenstående betingelser er opfyldte. Dermed er $J = K_4$. Alle w_ib_1-stier og w_ib_2-stier vil have længde nul,

for $i = 1, 2$, da $X \cap V(L(H))$ mætter strengsystemet, og $X \cap V(L(H)) \subseteq N_{b_1} \cup N_{b_2}$. Men så er strengsystemet degenereret, hvilket er i modstrid med antagelse (i) og (ii), fordi $J = K_4 \neq K_{3,3}$, hvormed (ii) ikke er opfyldt, og (i) giver, at der skal findes en ikke-degenereret optræden. Derfor er enten $\{A \cup B, Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2\}$ en løs skæv opdeling i G, hvormed sætningen er opfyldt, eller så er $A = \emptyset$.

Antag, at $A = \emptyset$. Hermed gælder der for alle sammenhængskomponenter i $G - (Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2)$, at de har punkter til fælles med $V(L(H)) - S_{b_1b_2}$. Da $S_{b_1b_2} \nsubseteq X_1 \cup X_2$, må $S_{b_1b_2}$ også tilhøre en komponent i $G - (Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2)$, som har punkter fælles med $V(L(H)) - S_{b_1b_2}$. Dermed må der findes en 2-vej i G mellem $S_{b_1b_2}$ og $V(L(H)) - S_{b_1b_2}$, der ikke benytter punkter fra $Y' \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2$. Vælg en sådan 2-vej mindst mulig, og lad denne 2-vej være P. Da mængden $S_{b_1b_2}$ i $L(H)$ kun er forbundet til punkterne i X_1 og X_2, må P have længde mindst to. Altså hvis $P : p_1, p_2, \dots, p_k$, vil $p_1 \in S_{b_1b_2}$ og $p_2 \in V(G) - V(L(H))$. Da P er valgt mindst mulig, vil kun P's endepunkter tilhøre $V(L(H))$, for ellers kan P vælges mindre. Da $Y' \cup X_0$ indeholder alle strengsystemets overpunkter, vil intet punkt i P være et (S, N)-overpunkt. Lemma 9.14 kan nu benyttes, hvor F i lemma 9.14 svarer til P, og da der ikke findes en overskygget optræden af J i G, må mængden af vedhæftninger for P i $V(L(H))$ være lokal. Da P er valgt mindst mulig, vil mængden af vedhæftninger for P i $V(L(H))$ være lig P's endepunkter. Det vil sige, at der findes to punkter $u \in S_{b_1b_2}$ og $v \in V(L(H)) - S_{b_1b_2}$, så $u, v \notin X_1 \cup X_2$, og $\{u, v\}$ er lokal med hensyn til strengsystemet. Da u og v ikke tilhører den samme streng i strengsystemet, må der findes et punkt $z \in V(J)$, så $u, v \in N_z$. Den eneste mulige måde, hvorpå $u \in N_z$, er, hvis $z = b_1$ eller $z = b_2$. Antag derfor, at $z = b_1$, og dermed vil $u, v \in N_{b_1}$. Da hverken u eller v tilhører X_1 og ikke tilhører samme streng, danner dette en modstrid med, at X vil indeholde alle punkter undtaget et i N_{b_1}. Altså må antagelsen, om at $A = \emptyset$, være forkert, hvilket viser påstand 1.

På grund af påstand 1 kan det nu antages, at $Y = \emptyset$. Altså, at der ikke findes (S, N)-overpunkter i G.

Påstand 2: *Hvis der findes en komponent F i Z, så der for et punkt $v \in V(J)$ gælder, at mængden af vedhæftninger for F i $V(L(H))$ er indeholdt i N_v, da vil G indeholde en balanceret skæv opdeling.*

Bemærk, at mængden af vedhæftninger for F i $V(S, N)$ vil være lokal, da den er indeholdt i N_v. Lad $F' = V(G) - (V(F) \cup N_v)$. Da vil $F' \neq \emptyset$, og enhver 2-vej i G fra F til F' vil være incident med N_v eller kunne udvides, så den bliver incident med N_v. Idet $\langle N_v \rangle_G$ udgør en komplet delgraf, kan N_v ikke være antisammenhængende. Da F er en sammenhængskomponent i Z, vil $F \cup F'$ ikke være sammenhængende. Hermed er $\{F \cup F', N_v\}$ en skæv opdeling i G. Det skal nu vises, at G indeholder en balanceret skæv opdeling. Hvis $\{F \cup F', N_v\}$ er en løs skæv opdeling, følger det af lemma 3.6, så det antages, at $\{F \cup F', N_v\}$ ikke er en løs skæv opdeling. Lad $u_1, \dots, u_m$ være v's naboer i J. Hvis N_v opdeles i antikomponenter, bliver disse delmængder af mængderne $N_{vu_1}, \dots, N_{vu_m}$. Lad $w \notin \{v, u_2\}$ være nabo til u_1 i J, lad $n_1 \in N_{u_1w}$, og lad $n_2 \in N_{vu_2}$. Da vil punkterne n_1 og n_2 tilhøre hver sin streng, nemlig strengene (N_{u_1}, S_{u_1w}, N_w) og (N_v, S_{vu_2}, N_{u_2}). Ligeledes vil u_1w og vu_2 være to disjunkte kanter i J, og dermed vil n_1 og n_2 ikke være naboer i G. Lad $K = \{n_1\} \cup (S_{vu_1} - N_{vu_1})$. Da ethvert punkt i S_{vu_1} tilhører en vu_1-sti, og n_1 er komplet til N_{u_1v}, er K sammenhængende. Desuden vil ethvert punkt i N_{vu_1} have en nabo i K i en af vu_1-stierne. Da $n_2 \in S_{vu_2}$, vil n_2 ikke tilhøre K, og n_2 vil ikke have naboer i K på grund af definition 9.4(iv), og idet n_1 ikke er nabo til n_2. Da K og N_{vu_1} er disjunkte, n_2 er komplet til N_{vu_1} og antikomplet til K, er $\{K, N_{vu_1}\}$ ifølge lemma 2.13 et balanceret par. Da N_v indeholder mængden af vedhæftninger for F i $L(H)$, har F ingen naboer i K. Dermed er K antikomplet til F, og da ethvert punkt i N_{vu_1} har en nabo i K, giver lemma 2.15(i), at $\{F, N_{vu_1}\}$ er et balanceret par. Da F ikke har vedhæftninger i K, findes der ikke kanter mellem F og K. Desuden er mængden $\{n_2\}$ komplet til N_{vu_1}, og $\{K, N_{vu_1}\}$ er et balanceret par. Hermed er antagelserne i lemma 3.10 opfyldte, hvor L i lemma 3.10(iii) svarer til F, R svarer til K, Y svarer til N_{vu_1}, og X svarer til $\{n_2\}$. Altså har G en balanceret skæv opdeling, hvilket viser påstand 2.

Det kan nu ifølge definition 9.11 antages, at for enhver komponent F i Z findes der en kant b_1b_2 i J, så mængden af vedhæftninger for F i $L(H_0)$ er indeholdt i $S_{b_1b_2}$, da der for hver komponent i Z gælder, at mængden af dens vedhæftninger i $V(S, N)$ er lokal. Hvis $Z = \emptyset$, og hvis der for hver

kant b_1b_2 i J kun findes én b_1b_2-sti, er $G = \langle (S,N) \rangle = L(H_0)$, og sætningen er opfyldt. Dermed kan det antages, at der findes en kant b_1b_2 i J, så enten $S_{b_1b_2}$ indeholder alle vedhæftninger for en komponent F i Z, eller der findes mindst to b_1b_2-stier i G. Lad A være foreningen af mængden $S_{b_1b_2}$ og de komponenter fra Z, hvis vedhæftninger er indeholdt i $S_{b_1b_2}$, og lad $B = V(G) - A$. Lad $A_1 = N_{b_1b_2}$, lad $A_2 = N_{b_2b_1}$, lad $B_1 = N_{b_1} - N_{b_1b_2}$, og lad $B_2 = N_{b_2} - N_{b_2b_1}$. Hermed vil $A_1, A_2 \in A$, og B_1 samt B_2 vil være to disjunkte delmængder af B. Desuden vil A_i være komplet til B_i, for $i = 1, 2$, og der vil ikke findes andre kanter mellem A og B. Desuden er $|B_1| \geq 2$, og der vælges b_1b_2, så hvis $|A_1| = |A_2| = 1$, da er A ikke en 2-vej mellem dem. Idet A er en komponent, vil den have noget fælles med både A_1 og A_2. Da mængden A først dannes som foreningen af de sammenhængskomponenter, der har vedhæftninger i $S_{b_1b_2}$, vil ingen komponent i B have vedhæftninger i A, for ellers ville en sammenhængskomponent i A kunne udvides. Altså kan enhver komponent i B kun have vedhæftninger i $V(S,N) - S_{b_1b_2}$. Da $V(S,N) - S_{b_1b_2}$ er sammenhængende, vil B være sammenhængende. Dermed har hver komponent i B noget til fælles med både B_1 og B_2, idet B kun indeholder én komponent. Hvis $\{A, B\}$ er et 2-vedhæng, da følger sætningen, så det kan per definition 9.15 antages, at $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
Lad $a \in A_1 \cap A_2$, og hermed er a komplet til både B_1 og B_2. Fra konstruktionen af A, er $|A| \geq 2$, og $\{(B - (B_1 \cup B_2)) \cup (A - \{a\}), B_1 \cup B_2 \cup \{a\}\}$ er dermed en skæv opdeling. Da $\{a\}$ er komplet til $B_1 \cup B_2$, kan $\{a\}$ betragtes som en antikomponent i $B_1 \cup B_2 \cup \{a\}$, og ifølge lemma 3.4 har G en balanceret skæv opdeling.
Hermed er det vist, at G altid har en balanceret skæv opdeling, et 2-vedhæng, eller er lig en liniegraf $L(H)$. □

Følgende fremkommer som et korollar til sætning 9.16 og er hovedresultat (ii) fra kapitel 1.

Korollar 9.17
Lad G være en Berge graf, og antag, at der findes en induceret delgraf i G, der er isomorf med en ikke-degenereret optræden $L(H)$, hvor H er en todelt underdeling af K_4. Da vil enten $G = L(H)$, G vil indeholde et 2-vedhæng, eller G vil have en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Vælg en maksimal 3-sammenhængende graf J, så der findes en ikke-degenereret optræden af J i G. Da J er maksimal, vil der ikke findes en forstørrelse af J, som har en ikke-degenereret optræden i G. Hermed følger resultatet fra sætning 9.16. □

Ved hjælp af dette korollar er det nu ikke længere nødvendigt at betragte de Berge grafer, der indeholder en ikke-degenereret optræden af K_4, idet de ifølge korollar 9.17 ikke kan være minimale modeksempler.

Korollar 9.18
Lad G være en Berge graf, og antag, at der findes en induceret delgraf i G, der er isomorf med $L(K_{3,3})$. Da vil enten $G = L(H)$ eller $\overline{G} = L(H)$, G eller $\overline{G}$ vil indeholde et 2-vedhæng, eller G har en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Da G indeholder en delgraf, der er isomorf med $L(K_{3,3})$, kan der vælges en 3-sammenhængende graf J, som enten er isomorf med $K_{3,3}$, eller som er en forstørrelse af $K_{3,3}$. Vælg J maksimal, så der findes en optræden af J i G. At J er maksimal betyder, at der ikke findes en graf J', der er større end J, som har en optræden i G.
Hvis der i G findes en ikke-degenereret optræden af J, så er antagelserne i sætning 9.16 opfyldte, og resultatet følger deraf. Antag derfor, at der i G ikke findes en ikke-degenereret optræden af J, hvilket vil sige, at enhver optræden af J i G er degenereret. Hermed må $J = K_{3,3}$. Hvis der findes en forstørrelse af J, der har en optræden i $\overline{G}$, så er det en ikke-degenereret optræden, og vælg den største J^* blandt disse. Dermed kan sætning 9.16 benyttes på $\overline{G}$, hvor J i sætning 9.16 svarer til J^*. Da J^* er maksimal, findes der ikke en forstørrelse af J^* i $\overline{G}$, og resultatet følger af sætning

9.16, da hvis $\overline{G}$ har en balanceret skæv opdeling, så har G også en balanceret skæv opdeling. Derfor kan det antages, at der i $\overline{G}$ ikke findes en forstørrelse af J. Da J er maksimal i G, vil der heller ikke i G findes en forstørrelse af J, hvis optræden findes i G. Dermed følger resultatet af sætning 9.16. □

Følgende korollar er hovedresultat (iii) fra kapitel 1.

Korollar 9.19
Lad G være en Berge graf, og antag, at der findes en induceret delgraf i G, der er isomorf med $L(K_{3,3})$. Da vil et af følgende gælde:

(i) $G = L(K_{3,3})$.

(ii) *Enten G eller $\overline{G}$ indeholder en ikke-degenereret optræden $L(H)$ som induceret delgraf, hvor H er en todelt underdeling af K_4.*

(iii) *Enten G eller $\overline{G}$ indeholder et 2-vedhæng.*

(iv) *G har en balanceret skæv opdeling.*

◇

Bevis
Da G indeholder en delgraf, der er isomorf med $L(K_{3,3})$, kan korollar 9.18 benyttes, og det kan antages, at $G = L(H)$ eller $\overline{G} = L(H)$ er en liniegraf, for ellers er korollaret vist. Da $L(K_{3,3})$ er isomorf med $\overline{L(K_{3,3})}$, vil tilfældet, hvor $\overline{G} = L(H)$ være ens med $G = L(H)$, så derfor betragtes kun tilfældet, hvor $G = L(H)$.
Hvis H ikke er en cyklisk 3-sammenhængende graf, betragtes J. Denne graf er enten 1-sammenhængende eller 2-sammenhængende. Hvis J er 1-sammenhængende, så lad v være et snitpunkt for J. I G vil N_v udgøre en komplet delgraf, som er snitmængde for G. Da ethvert punkt i N_v er nabo til de resterende punkter i N_v, udgør N_v en stjernesnitmængde. Ifølge [Chvátal, 1985, side 198] har enhver graf, som indeholder mindst fem punkter, mindst en kant samt en stjernesnitmængde, en skæv opdeling. Da G indeholder $L(K_{3,3})$ som induceret delgraf, må G have en skæv opdeling $\{A, B\}$, hvor B indeholder stjernesmitmængden og A indeholder resten af grafens punkter. Da B er en stjernesnitmængde, kan der ikke findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i B, hvis indre tilhører A, idet B ikke indeholder to ikke-nabopunkter. Tilsvarende kan der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A, hvis indre tilhører B. Dermed er $\{A, B\}$ en balanceret skæv opdeling.
Hvis J er en 2-sammenhængdende graf, vil der findes to punkter u og v, som udgør en snitmængde for J. Hvis u og v er naboer, vil $N_u \cup N_v$ udgøre en komplet delgraf i G, og som tidligere vil dette være en stjernesnitmængde, og G har dermed en balanceret skæv opdeling. Antag derfor, at u og v ikke er naboer. Der kan laves en opdeling af $V(J)$ i tre disjunkte mængder, A, B og $\{u, v\}$, så A og B er to punktmængder, der fremkommer, når u og v fjernes fra J. Bemærk, at A og B ikke nødvendigvis er sammenhængende mængder. Lad X være mængden af kanter i A, lad Y være mængden af kanter i B, lad A_1 være mængden af kanter fra u til punkter i A, lad A_2 være mængden af kanter fra u til B, lad B_1 være mængden af kanter fra v til A, og lad B_2 være mængden af kanter fra v til B. I G vil $\{X \cup A_1 \cup B_1, Y \cup A_2 \cup B_2\}$ være et 2-vedhæng, idet A_1 er komplet til A_2, B_1 er komplet til B_2, og der ikke findes andre kanter mellem $X \cup A_1 \cup B_1$ og $Y \cup A_2 \cup B_2$. Hermed er det vist, at hvis H ikke er cyklisk 3-sammenhængende, så er korollaret opfyldt.

Det kan derfor antages, at H er cyklisk 3-sammenhængende. Det følger, at H er todelt, da $L(H)$ er en optræden i G. Lemma 6.4 kan nu anvendes. På grund af (ii) kan det antages, at $L(H')$ er degenereret for enhver induceret delgraf $H' \subset H$, der er isomorf med en underdeling af K_4, så lemma 6.4(iii) er ikke opfyldt. Idet G indeholder en delgraf, der er isomorf med $L(K_{3,3})$, kan lemma 6.4(ii) ikke være opfyldt. Fra lemma 6.4(i) følger det så, at $H = K_{3,3}$, og dermed er $G = L(K_{3,3})$.

□

Hermed kan grafer indeholdende $L(K_{3,3})$ som induceret delgraf udelukkes som minimale modeksempler. Dette betyder, at sådanne grafer fremover ikke behøves at blive betragtet. Det er dog stadig målet at vise, at enhver Berge graf, der indeholder en optræden af en 3-sammenhængende graf, ikke kan være et minimalt modeksempel. For at dette er vist mangler grafer, der indeholder en degenereret optræden af K_4, at blive udelukket som minimale modeksempler. Derfor betragtes disse grafer i næste afsnit.

9.3 Samling af strenge

For at vise, at grafer, som indeholder en degenereret optræden af K_4, men ikke indeholder $L(K_{3,3})$ som induceret delgraf, ikke kan være minimale modeksempler, skal strenge stadig betragtes. Derfor indføres de igen, men nu i en simplere form.

Eftersom kapitel 8 omhandlede grafer indeholdende en degenereret optræden af K_4, kan resultaterne derfra benyttes i dette afsnit, idet enhver optræden af K_4 her er degenereret.

Definition 9.20 (Streng, sti for en streng samt omvendt streng)
Lad G være en Berge graf, og lad A, B og C være disjunkte delmængder af $V(G)$. Her siges $S = (A, C, B)$ at være en streng, hvis $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, ethvert punkt i $A \cup C \cup B$ tilhører en 2-vej mellem A og B, hvis første punkt er det eneste fra A, hvis sidste punkt er det eneste fra B, og hvis indre tilhører C. En sådan 2-vej kaldes en sti for strengen eller blot en S-sti. Desuden er $V(S) = A \cup C \cup B$.
Ved det omvendte af en streng (A, C, B) forståes strengen (B, C, A). ◇

Definition 9.21 (Antistreng og antisti)
Lad G være en Berge graf, og lad A, B og C være disjunkte delmængder af $V(G)$. Her siges $S = (A, C, B)$ at være en antistreng, hvis (A, C, B) er en streng i $\overline{G}$. De tilhørende stier er anti 2-veje i G og kaldes derfor antistier. ◇

Definition 9.22 (Parallelle og antiparallelle strenge og antistrenge)
Lad G være en Berge graf, lad $S = (A, C, B)$ være en streng i G, og lad $T = (X, Z, Y)$ være en antistreng i G, så $V(S) \cap V(T) \neq \emptyset$. Her siges S og T at være parallelle, hvis følgende er opfyldt:

- (i) *A er komplet til X.*
- (ii) *B er komplet til Y.*
- (iii) *A er antikomplet til Y.*
- (iv) *B er antikomplet til X.*
- (v) *C er antikomplet til $X \cup Y$.*
- (vi) *Z er komplet til $A \cup B$.*

Lad T' være den omvendte streng af T. Da siges S og T at være antiparallelle, hvis S og T' er parallelle. ◇

Definition 9.23 (Enig og uenig)
Lad G være en Berge graf, lad S_1 og S_2 være strenge i G, og lad T være en antistreng i G. Da siges S_1 og S_2 at være enige om T, hvis enten både S_1 og T samt S_2 og T er parallelle, eller både S_1 og T samt S_2 og T er antiparallelle.
Desuden siges S_1 og S_2 at være uenige om T, hvis enten S_1 og T er parallelle, samt S_2 og T er

antiparallelle eller omvendt.
Hvis T_1 og T_2 er antistrenge i G, og S er en streng i G, da siges T_1 og T_2 at være enige henholdsvis uenige om S på tilsvarende vis. ◇

Definition 9.24 (Fordrejning)
Lad G være en Berge graf, lad S_1 og S_2 være strenge i G, og lad T_1 samt T_2 være antistrenge i G, så S_1, S_2, T_1 og T_2 er parvis disjunkte. Hvis S_1 og S_2 er enige om en af T_1 eller T_2 og uenige om den anden, eller hvis T_1 og T_2 er enige om en af S_1 eller S_2 og uenige om den anden, da siges (S_1, S_2, T_1, T_2) at være en fordrejning i G. ◇

Bemærk, at hvis (S_1, S_2, T_1, T_2) er en fordrejning i G, og S'_1 er den omvendte streng af S_1, da vil (S'_1, S_2, T_1, T_2) være en fordrejning i G, hvor de modsatte par er enige henholdsvis uenige.

Definition 9.25 (Samling af strenge og antistrenge)
Lad G være en Berge graf, da er en samling af strenge og antistrenge i G foreningen L bestående af en mængde af strenge

$$\{S_i \mid \text{ for } 1 \leq i \leq m \text{ er } S_i = (A_i, C_i, B_i) \text{ en streng i } G\}$$

og en mængde af antistrenge

$$\{T_j \mid \text{ for } 1 \leq j \leq n \text{ er } T_j = (X_j, Z_j, Y_j) \text{ en antistreng i } G\},$$

hvor følgende er opfyldt:

(i) *Alle strenge og antistrenge er parvis disjunkte, og deres stier og antistier har ulige længde.*

(ii) *$m, n \geq 2$, hvilket vil sige, at der findes mindst to strenge og mindst to antistrenge i L.*

(iii) *For $1 \leq i < i' \leq m$ er S_i antikomplet til $S_{i'}$, og for $1 \leq j < j' \leq n$ er T_j komplet til $T_{j'}$.*

(iv) *For $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ er S_i og T_j enten parallelle eller antiparallelle.*

(v) *For $1 \leq i < i' \leq m$ findes der j og j', hvor $j \neq j'$ og $1 \leq j \leq j' \leq n$, så $(S_i, S_{i'}, T_j, T_{j'})$ er en fordrejning i G.*

(vi) *For $1 \leq j < j' \leq n$ findes der i og i', hvor $i \neq i'$ og $1 \leq i \leq i' \leq m$, så $(S_i, S_{i'}, T_j, T_{j'})$ er en fordrejning i G.*

En samling L siges at være maksimal, hvis der ikke findes en samling L' i G, hvor $V(L) \subset V(L')$. ◇

Bemærk, at hvis en streng (A_k, C_k, B_k) i en samling L byttes ud med dens omvendte streng (B_k, C_k, A_k), så fåes en ny samling L' af strenge og antistrenge.

Hvis der haves en samling af strenge $S_i = (A_i, C_i, B_i)$ og antistrenge $T_j = (X_j, Z_j, Y_j)$, så kan det ifølge definition 9.25(v) antages, at S_1 og S_2 er enige om T_1 og uenige om T_2. Lad P_1 være en S_1-sti, lad P_2 være en S_2-sti, lad Q_1 være en T_1-antisti, og lad Q_2 være en T_2-antisti, så er (P_1, P_2, Q_1, Q_2) en knude, da det giver de rigtige kanter mellem P_1, P_2, Q_1 og Q_2.

Definition 9.26 (Lokal med hensyn til en samling)
Lad G være en Berge graf, og lad L være en samling af strenge $S_1, \ldots, S_m$ og antistrenge $T_1, \ldots, T_n$ i G. En mængde $X \subseteq V(L)$ er lokal med hensyn til samlingen L, hvis følgende er opfyldt:

(i) *Mindst $m - 1$ af mængderne $X \cap V(S_1), \ldots, X \cap V(S_m)$ er tomme.*

(ii) *Enhver T_j-antisti, for $1 \leq j \leq n$, indeholder et punkt, der ikke tilhører X.*

(*iii*) *Mængden* $X \cap (V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m))$ *er komplet til mængden* $X \cap (V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n))$.

$\diamond$

Definition 9.27 (Mætte en samling)
Lad G *være en Berge graf, og lad* L *være en samling af strenge* $S_1, \ldots, S_m$ *og antistrenge* $T_1, \ldots, T_n$ *i* G. *En delmængde* $X \subseteq V(L)$ *siges at mætte samlingen, hvis følgende er opfyldt:*

(*i*) *Højst én af* $T_1 \ldots, T_n$ *er ikke en delmængde af* X.

(*ii*) *For enhver* S_i*-sti* P_i *er* $V(P_i) \cap X \neq \emptyset$, *for* $1 \leq i \leq m$.

(*iii*) *For enhver kant mellem* $(V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m))$ *og* $(V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n))$ *vil* X *indeholde mindst ét af endepunkt.*

$\diamond$

Bemærk, at når X mætter L i G, så vil $V(L) - X$ være lokal med hensyn til L i $\overline{G}$. Dette skyldes, at når højst en af antistrengene ikke er en delmængde af X i G, så vil $V(L) - X$ højst indeholde punkter fra en streng i $\overline{G}$, definition 9.27(ii) medfører, at mindst et punkt i hver T_j-antisti ikke tilhører $V(L) - X$ i $\overline{G}$, og definition 9.27(iii) giver, at der ikke findes kanter mellem $(V(L) - X) \cap (V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m))$ og $(V(L) - X) \cap (V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n))$ i G, så i $\overline{G}$ er de komplette til hinanden.

Lemma 9.28
Lad G *være en Berge graf, så der ikke findes en optræden af en forstørrelse af* K_4 *i hverken* G *eller* $\overline{G}$. *Desuden må der ikke findes en overskygget optræden af* K_4 *i hverken* G *eller* $\overline{G}$. *Lad* L *være en maksimal samling af strenge i* G. *Lad* $f \in V(G) - V(L)$, *og lad* X *være mængden af naboer til* f *i* $V(L)$. *Da vil enten* X *være lokal med hensyn til* L, *eller så vil* X *mætte* L. $\diamond$

Bevis
Hvis X er lokal med hensyn til L eller mætter L, så er lemmaet opfyldt. Det kan derfor antages, at X ikke er lokal med hensyn til L eller mætter L. Lad strengene i L være $S_i = (A_i, C_i, B_i,)$ for $1 \leq i \leq m$, og lad antistrengene i L være $T_j = (X_j, Z_j, Y_j)$ for $1 \leq j \leq n$.

Påstand 1: *Lad* a_i, P_i, b_i *være en* S_i*-sti, og lad* x_j, Q_j, y_j *være en* T_j*-antisti. Da vil enten* $X \cap V(P_i) \neq \emptyset$ *eller* $V(Q_j) \not\subseteq X$.

Antag, at der findes i og j, så både $X \cap V(P_i) = \emptyset$ og $V(Q_j) \subseteq X$, og antag, at det er for $i = 1$ og $j = 1$. Det vil sige, at det antages, at X er disjunkt fra $V(P_1)$ og samtidig indeholder $V(Q_1)$. Fra definition 9.25(v) kan det antages, at (S_1, S_2, T_1, T_2) er en fordrejning, og så følger af definition 9.24, at S_1 og S_2 er enige om en af T_1 eller T_2 og uenige om den anden. Det kan derfor antages, at S_1 og S_2 er enige om T_1 og uenige om T_2. Lad a_1, P_1, b_1 være en S_1-sti, og lad a_2, P_2, b_2 være en S_2-sti. Lad x_2, Q_2, y_2 være en T_2-antisti, og lad x_1, Q_1, y_1 være en T_1-antisti. Da er (P_1, P_2, Q_1, Q_2) en knude, idet S_1 og S_2 er enige om T_1 og uenige om T_2. Dette giver nemlig ved hjælp af definition 9.22 de rigtige kanter mellem P_1, P_2, Q_1 og Q_2. Ifølge lemma 8.2 har P_1 ulige længde, og da er $f, x_1, a_1, P_1, b_1, y_1$ et hul af ulige længde i G. Altså kan det ikke ske, at for $1 \leq i \leq m$ og x_j, Q_j, y_j er $X \cap V(P_i) = \emptyset$ og $V(Q_j) \subseteq X$, og påstand 1 er vist.

På grund af påstand 1, og ved at tage komplementer hvis nødvendigt, kan det antages, at for alle $1 \leq j \leq n$ og for alle T_j-antistier Q_j, vil $V(Q_j) \not\subseteq X$.

Påstand 2: *Mængden* X *har kun punkter til fælles med højst en af mængderne* $V(S_1), \ldots, V(S_m)$.

Antag, at X har punkter til fælles med både S_1 og S_2. Det kan på grund af definition 9.25(v) antages, at (S_1, S_2, T_1, T_2) er en fordrejning i G. Vælg for $i = 1, 2$ en S_i-sti P_i, så $X \cap V(P_i) \neq \emptyset$, og vælg for $j = 1, 2$ en T_j-antisti Q_j. Fra ovenstående antagelse, om at $V(Q_j) \not\subseteq X$ for alle j, har f ikke-nabopunkter i både Q_1 og Q_2. Her er (P_1, P_2, Q_1, Q_2) en knude i G, da S_1 og S_2 er enige om T_1 og uenige om T_2, idet (S_1, S_2, T_1, T_2) er en fordrejning i G. Antagelserne i lemma

8.7 er hermed opfyldte, hvor F i lemma 8.7 svarer til $\{f\}$. Hvis lemma 8.7(i) er opfyldt, så vil X mætte knuden. Dette kan dog ikke lade sige gøre, da $V(K) - X$ ikke er lokal med hensyn til (Q_1, Q_2, P_1, P_2) i $\overline{G}$, idet X ikke indeholder hverken $V(Q_1)$ eller $V(Q_2)$. Hvis lemma 8.7(ii) er opfyldt, så skal f og a_1 have de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, og f skal have en nabo i $P_1 - \{a_1\}$. Da P_1 og P_2 ikke har kanter mellem sig, idet det er en knude, vil a_1 ikke have naboer i P_2, hvormed f heller ikke har naboer i P_2, så $X \cap V(P_2) = \emptyset$, hvilket danner en modstrid med, at $X \cap V(P_2) \neq \emptyset$. Hvis lemma 8.7($iii$) er opfyldt, så skal der findes en 2-vej af ulige længde i $\{f\}$, hvilket ikke er muligt, da $|\{f\}| = 1$. Hvis lemma 8.7(iv) er opfyldt, så skal f og x_1 have de samme naboer i $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$, og f skal være ikke-nabo til y_1. Da x_1 er komplet til $V(Q_2)$, og f per antagelse har en ikke-nabo i $V(Q_2)$, opnåes en modstrid. Da der i alle tilfælde opnåes en modstrid, må antagelsen, om at X har punkter til fælles med to mængder S_1 og S_2, være forkert, og dermed må påstand 2 gælde.

Da $m-1$ af mængderne $X \cap V(S_1), \ldots, X \cap V(S_m)$ ifølge påstand 2 er tomme, og enhver T_j-antisti, for $1 \leq j \leq n$, ifølge påstand 1 indeholder et punkt, der ikke tilhører X, vil det ifølge definition 9.26 kunne antages, at der findes en S_1-sti a_1, P_1, b_1 og en T_1-antisti x_1, Q_1, y_1, som indeholder punkter fra X, der ikke indbyrdes er naboer. Det kan ifølge definition 9.25(iv) antages, at S_1 er parallel med alle antistrengene T_j, hvor eventuelt den omvendte af en antistreng T_j benyttes i stedet for antistrengen T_j. Da S_1 er parallel med T_1, vil kanten a_1x_1 findes i G, og kanten b_1y_1 vil også tilhøre G på grund af definition 9.22(i)-(ii). Da det indre af Q_1 tilhører Z_1, vil det ifølge definition 9.22(vi) være komplet til $\{a_1\} \cup \{b_1\}$, hvormed a_1 er komplet til $V(Q_1) - y_1$, og b_1 er komplet til $V(Q_1) - x_1$. Det kan derfor antages, at $x_1 \in X$, og $X \cap (V(P_1) - a_1) \neq \emptyset$. Lad $2 \leq j \leq n$, og lad x_j, Q_j, y_j være en vilkårlig T_j-antisti. Det vises for $j = 2$, da resten kan vises analogt. Dermed er x_2, Q_2, y_2 en T_2-antisti. Nu vil T_1 og T_2 være enige om S_1, da S_1 er parallel med alle antistrenge T_j. Da der ifølge definition 9.25(vi) findes en fordrejning (S_1, S_i, T_1, T_2), må der findes en streng S_i, som T_1 og T_2 er uenige om, lad det være S_2. Lad a_2, P_2, b_2 være en S_2-sti. Da er (P_1, P_2, Q_1, Q_2) en knude K, idet T_1 og T_2 er enige om S_1 og uenige om S_2. Da P_1 og Q_1 indeholder punkter i X, som ikke indbyrdes er naboer, er $X \cap V(K)$ ifølge definition 8.4(iii) ikke lokal med hensyn til K. Antagelserne i lemma 8.7 er opfyldte med $\{f\}$ som sammenhængende mængde, og lemma 8.7(i) er ikke opfyldt, da X ikke mætter knuden. Lemma 8.7(iii) er ikke opfyldt, da $|\{f\}| = 1$, og $\{f\}$ dermed ikke kan indeholde en 2-vej af ulige længde. Lemma 8.7(iv) er ikke opfyldt, da x_1 er komplet til $V(Q_2)$, og f per antagelse har en ikke-nabo i $V(Q_2)$. Dermed vil lemma 8.7(ii) gælde, så f og a_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Specielt vil der gælde, at $V(Q_2) - y_2 \subseteq X$, da a_1 er nabo til samtlige punkter i $Q_2 - \{y_2\}$, og f dermed vil være nabo til samtlige punkter i $Q_2 - \{y_2\}$. Da $V(Q_2) \not\subseteq X$, må det være punktet y_2, der ikke tilhører X. Idet dette gælder for alle valg af T_2-antistier, kan det konkluderes, at $X \cap V(T_2) = X_2 \cup Z_2$. Da dette gælder for alle antistrenge T_j, undtaget T_1, kan det konkluderes, at $X \cap V(T_j) = X_j \cup Z_j$ for $2 \leq j \leq n$. Den eneste antagelse, der blev gjort omkring T_1, var, at $X \cap X_1 \neq \emptyset$, og dette er vist at gælde for T_j, hvor $2 \leq j \leq n$, og derfor må det gælde, at $X \cap V(T_j) = X_j \cup Z_j$ for $1 \leq j \leq n$. Hermed kan f tilføjes A_1, men dette er i modstrid med, at L er en maksimal samling af strenge og antistrenge. Dermed er det vist, at X enten er lokal med hensyn til L eller mætter L. □

Lemma 9.29
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en optræden af en forstørrelse af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$, og der ikke findes en overskygget optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. Lad L være en maksimal samling af strenge i G, og lad $F \subseteq V(G) - V(L)$ være sammenhængende, så der for hvert punkt $f \in V(F)$ gælder, at mængden af dets naboer i $V(L)$ er lokal med hensyn til L. Da vil mængden af vedhæftninger for F i $V(L)$ være lokal med hensyn til L. ◇

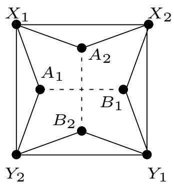
Hermed kan hovedresultat (iv) fra kapitel 1 vises.

Sætning 9.30
Lad G være en Berge graf, så hver optræden af K_4 i G eller $\overline{G}$ er degenereret, og der ikke findes

en induceret delgraf af G, som er isomorf med $L(K_{3,3})$. Da er enten G en bicograf, G har en balanceret skæv opdeling, en af G eller $\overline{G}$ har et 2-vedhæng, eller der findes ikke en optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. ◇

Bevis
Hvis der findes en optræden af en forstørrelse af K_4 i G, så lad forstørrelsen være $L(H')$. Da er H' ikke en underdeling af K_4. Her er H' todelt, da $L(H')$ er en optræden i G. Det følger af lemma 6.4, at enten er $H' = K_{3,3}$, eller der findes en delgraf H'' af H', som er en todelt underdeling af K_4, så $L(H'')$ er ikke-degenereret. Her er $L(H'')$ en ikke-degenereret optræden, da der ifølge lemma 6.4 ikke findes en kreds, som kun består af forgreningspunkterne i H''. Ifølge sætningens antagelse er hver optræden af K_4 degenereret, og ingen delgraf er isomorf med $L(K_{3,3})$, hvormed der ikke kan findes en sådan H'', og $H' = K_{3,3}$ er ikke en mulighed. Det vil sige, at der ikke findes en optræden af en forstørrelse af K_4 i G. Ligeledes findes der ingen optræden af en forstørrelse af K_4 i $\overline{G}$.
Hvis der findes en overskygget optræden af K_4 i G, da følger af lemma 7.13, at der enten findes en forstørrelse af K_4, som har en ikke-degenereret optræden i G, eller G har en balanceret skæv opdeling. Den første konklusion er ikke mulig på grund af sætningens antagelser, og i det andet tilfælde er sætningen opfyldt, så det kan antages, at der ikke findes en overskygget optræden af K_4 i G. Ligeledes findes der ikke en overskygget optræden af K_4 i $\overline{G}$.

Da sætningen kun omhandler tilfælde, hvor der findes en optræden af K_4 i G eller $\overline{G}$, kan det antages, at der findes en optræden $L(H)$ af K_4 i G, eventuelt ved at tage komplementer, og denne optræden er degenereret. Da $L(H)$ er degenereret, findes der en samling af strenge og antistrenge i G, se figur 9.3.



Figur 9.3: To strenge $S_1 = (A_1, C_1, B_1)$ og $S_2 = (A_2, C_2, B_2)$ samt to antistrenge $T_1 = (X_1, \emptyset, Y_1)$ og $T_2 = (X_2, \emptyset, Y_2)$ i en degenereret optræden af K_4 i G. Bemærk, at de stiplede linier angiver 2-veje, hvis indre tilhører henholdsvis C_1 og C_2.

Vælg en maksimal samling L af strenge og antistrenge. Lad L have strenge $S_i = (A_i, C_i, B_i)$, for $1 \leq i \leq m$, og antistrenge $T_j = (X_j, Z_j, Y_j)$, for $1 \leq j \leq n$. Fra lemma 9.28 følger, at $V(G) - V(L)$ kan opdeles i to mængder M og N, hvor der for hvert punkt a i M gælder, at mængden af naboer til a i $V(L)$ er lokal med hensyn til L, og for hvert punkt b i N gælder, at mængden af naboer til b i $V(L)$ mætter L. Det er muligt, at M og N er tomme.

Påstand 1: *Hvis der findes et punkt $f \in N$, som har en ikke-nabo i $V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m)$, så er lemmaet opfyldt.*

Lad $f \in N$ være et punkt, som har en ikke-nabo i S_1. Lad N_1 være antikomponenten af N indeholdende f, og lad X være mængden af punkter i $V(L)$, som er komplette til N_1. Da N_1 er en antikomponent i N, vil der om ethvert punkt i $N - N_1$ gælde, at punktet er komplet til N_1, for ellers kan N_1 udvides. Det vil sige, at $N - N_1 \subseteq X$. Lad A være mængden af naboer til f i $V(L)$ i G. Da A mætter L i G, vil $V(L) - A$ være lokal med hensyn til L i $\overline{G}$. For alle andre punkter a_l i N_1, vil $V(L) - A_l$, hvor A_l er mængden af naboer til a_l, ligeledes være lokal med hensyn til L i $\overline{G}$. Lemma 9.29 er nu opfyldt, hvor F i lemma 9.29 svarer til N_1. Deraf følger, at mængden af vedhæftninger for N_1 i $V(L)$ er lokal med hensyn til L i $\overline{G}$. Det vil sige, at alle punkter i $V(L)$, som har en nabo i N_1, udgør en mængde B, hvorom det gælder, at B er lokal med hensyn til L i $\overline{G}$. I G vil $V(L) - B$ så mætte L, og $V(L) - B = X$, da X består af de punkter i L, som ikke har naboer i N_1 i $\overline{G}$. Det vil sige, at X mætter L. Idet f har en ikke-nabo i $V(S_1)$, findes der et punkt u i S_1, som ikke tilhører X. Lad U være komponenten af $V(G) - (X \cup N_1)$, der indeholder u.

Herunder vises, at U er disjunkt fra $V(L) - V(S_1)$. Antag modsat, at U ikke er disjunkt fra $V(L) - V(S_1)$, det vil sige, at der findes mindst ét punkt $p \in U \cap (V(L) - V(S_1))$. Da U er en komponent indeholdende $u \in V(S_1)$ og $p \in V(L) - V(S_1)$, findes der en 2-vej i G mellem u og p, altså der findes en 2-vej P mellem $V(S_1)$ og $V(L) - V(S_1)$, hvor $(X \cup N_1) \cap V(P) \subseteq V(S_2) \cup \cdots \cup V(S_m)$, og det er muligt, at $(X \cup N_1) \cap V(P) = \emptyset$, hvilket forekommer, hvis $V(P) \subseteq U$. Lad P være den mindste mulige sådanne 2-vej. Hvis et indre punkt i P tilhører $V(L)$ eller $X \cup N_1$, så kan P vælges mindre, da et sådant punkt enten tilhører $V(S_1)$ eller $V(L) - V(S_1)$. Idet X mætter L, og der ikke findes kanter mellem $V(S_1)$ og $V(S_2) \cup \cdots \cup V(S_m)$, følger det af definition 9.27, at X indeholder et endepunkt fra enhver kant mellem $V(S_1)$ og $V(L) - V(S_1)$. Dermed findes der punkter i det indre af P, da $X \cap V(P) \subseteq V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m)$. Idet intet indre punkt i P tilhører N eller $V(L)$, må de indre punkter tilhøre M, da $M \cup N = V(G) - V(L)$. Dermed findes der en komponent M_1 i M, som indeholder det indre af P, da det indre af P er sammenhængende. Da der for ethvert punkt i M_1 gælder, at mængden af dets naboer er lokal med hensyn til L, følger det fra lemma 9.29, at mængden af vedhæftninger for M_1 i $V(L)$ er lokal med hensyn til L. Idet M_1 har en vedhæftning i $V(S_1)$, har den ifølge definition 9.26(i) ingen vedhæftninger i $V(S_2) \cup \cdots \cup V(S_m)$. Men endepunkterne i P er vedhæftninger for M_1, og de er ikke-naboer. Desuden tilhører den ene $V(S_1)$, og den anden tilhører ikke $V(S_1)$, hvilket ifølge definition 9.26(iii) giver en modstrid. Det er hermed vist, at U er disjunkt fra $V(L) - V(S_1)$. Det vil sige, at $U \subseteq M \cup V(S_1)$. Idet U er en sammenhængskomponent i $V(G) - (X \cup N_1)$, kan U kun have vedhæftninger i X eller N_1, for ellers kan U udvides.

Lad X' være mængden af punkter i X med naboer i U, og lad $V = V(G) - (U \cup N_1 \cup X')$. Her er $V(S_2) \subseteq V$, idet $U \cap (V(L) - V(S_1)) = \emptyset$, $N_1 \cap V(L) = \emptyset$, og intet punkt i $V(S_2)$ har en nabo i U, så $V(S_2) \not\subseteq X'$, og dermed er V ikke-tom. Altså er $\{U \cup V, N_1 \cup X'\}$ en skæv opdeling i G, da $U \cup V$ ikke er sammenhængende, idet U's vedhæftninger alle tilhører $X \cup N_1$, og $N_1 \cup X'$ ikke er antisammenhængende, fordi N_1 og X' er komplette til hinanden. Da X mætter L, findes der ifølge definition 9.27(ii) et punkt fra S_2 i X, og dette punkt tilhører V, da $V(S_2) \subseteq V$, og dermed findes et punkt i V, som er komplet til N_1. Deraf kan det ifølge definition 3.5(ii) konkluderes, at den skæve opdeling er løs, og så følger af lemma 3.6, at G har en balanceret skæv opdeling. Hermed er påstand 1 vist.

Fra påstand 1 kan det antages, at N er komplet til $V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m)$, og ved at tage komplementer, kan det antages, at M er antikomplet til $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$.

Påstand 2: *Hvis M og N begge er ikke-tomme, så er lemmaet opfyldt.*

Lad M_1 være en komponent i M, og lad N_1 være en antikomponent i N. Ved eventuelt at tage komplementer kan det antages, at der findes en ikke-kant mellem M_1 og N_1. Lad X være mængden af punkter i G, som er komplette til N_1. Som i beviset for påstand 1 er mængden af vedhæftninger for M_1 i $V(L)$ lokal fra lemma 9.29, og idet M_1 ikke har nogle vedhæftninger i $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$, da M er antikomplet til $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$, og $M_1 \subset M$, kan det ifølge definition 9.26(i) antages, at alle vedhæftninger for M_1 tilhører $V(S_1)$. Lad $V = V(G) - (M_1 \cup N_1 \cup V(S_1))$. Idet $V(S_1) \subseteq X$, da N er komplet til $V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m)$ ifølge påstand 1, $N_1 \subset N$, og X består af punkter, der er komplette til N_1, så følger det, at $\{M_1 \cup V, N_1 \cup V(S_1)\}$ er en skæv opdeling i G, idet $M_1 \cup V$ ikke er sammenhængende, da alle vedhæftninger for M_1 tilhører $V(S_1)$, og $N_1 \cup V(S_1)$ ikke er antisammenhængende, da N_1 er komplet til $V(S_1)$. Da $\{N_1, V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m)\}$ udgør et komplet par, vil et punkt i $V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m) \subseteq M_1 \cup V$ være komplet til en antikomponent N_1 i $N_1 \cup V(S_1)$, og dermed vil $\{M_1 \cup V, N_1 \cup V(S_1)\}$ ifølge definition 3.5(i) være en løs skæv opdeling. Da følger af lemma 3.6, at G har en balanceret skæv opdeling, og påstand 2 er vist.

Påstand 3: *Hvis M og N begge er tomme, så er lemmaet opfyldt.*

Hvis både M og N er tomme, så udgør L hele grafen. Det følger af lemma 8.2, at det kan antages, at alle Q_j-antistier har længde en, for $1 \leq j \leq n$, og alle P_i-stier har ulige længde. Hvis $|V(S_1)| > 2$, så vil $\{V(S_1), V(L) - V(S_1)\}$ være et 2-vedhæng for G, hvilket her vises, når S_i og T_j alle er parallelle, da det analogt kan vises for de andre mulige kombinationer. Det skal nu vises, at definition 9.15 er opfyldt, hvor X_1 i definition 9.15 svarer til $V(S_1)$, X_2 svarer til $V(L) - V(S_1)$, A_1 svarer til

A_1, B_1 svarer til B_1, A_2 svarer til $X_1 \cup X_2$, og B_2 svarer til $Y_1 \cup Y_2$. Definition 9.15(i)-(iii) er opfyldte ifølge definition 9.22. Da $|A_2| \geq 2$ og $|B_2| \geq 2$, er definition 9.15(iv) opfyldt for $i = 2$. Hvis $|A_1| = |B_1| = 1$, så vil $V(S_1)$ være en 2-vej af ulige længde mindst tre, hvormed definition 9.15(iv) også her er opfyldt. Det kan derfor antages, at S_i kun har to punkter, og specielt at hver S_i-sti har længde en. Ved at tage komplementer kan det ved lignende argument vises, at det kan antages, at hver $V(T_j)$ kun indeholder to punkter. Dermed er G en bicograf, da for alle i og i', hvor $i \neq i'$, er S_i antikomplet til $S_{i'}$, og for alle j og j', hvor $j \neq j'$, er T_j ifølge definition 9.25(iii) komplet til $T_{j'}$, og lemmaet er opfyldt, så påstand 3 er vist.

Ved eventuelt at tage komplementer kan det fra påstand 2 og påstand 3 antages, at N er tom, og M er ikke-tom. Ifølge lemma 8.2 kan det antages, at alle S_i-stier har længde en. Det vil sige, at for $1 \leq i \leq n$ er $C_i = \emptyset$. For $1 \leq i \leq m$ lad M_i være foreningen af komponenterne i M, som har en vedhæftning i $V(S_i)$, og lad M_0 være foreningen af komponenterne i M, som ikke har vedhæftninger i $V(L)$. Da er $M_0, M_1, \ldots, M_m$ parvis disjunkte og har foreningsmængde M. Hvis M_0 er ikke-tom, så er G ikke sammenhængende, da M_0 er en komponent i M, og dermed ikke har naboer i $M - M_0$, samt M_0 har ikke naboer i $V(L)$. Det kan derfor antages, at M_0 er tom. Idet M er ikke-tom, kan det antages, at M_1 er ikke-tom. Antag, at $z \in Z_1$, hvor $T_1 = (X_1, Z_1, Y_1)$. Da er z ifølge definition 9.25(iv) komplet til $A_1 \cup B_1$. Da $C_1 = \emptyset$, er z desuden komplet til $V(S_1)$, og hvis $V = (V(G) - M_1) \cup V(S_1 \cup \{z\})$, så er $\{M_1 \cup V, V(S_1) \cup \{z\}\}$ en skæv opdeling i G. Dermed følger af lemma 3.4, at G har en balanceret skæv opdeling, idet $\{z\}$ er en antikomponent af størrelse én. Det kan derfor antages, at Z_1 er tom, og ligeledes for hver Z_j. Da er $\{M_1 \cup V(S_1), V(G) - (M_1 \cup V(S_1))\}$ et 2-vedhæng i G, hvor A_1 i definition 9.15 svarer til A_1, B_1 svarer til B_1, A_2 svarer til de X_j og Y_j, der er komplette til A_1, og B_2 svarer til de X_j og Y_j, der er komplette til B_1.

Det er hermed, under antagelse af at G er en Berge graf, hvor hver optræden af K_4 i G eller $\overline{G}$ er degeneret, der ikke findes en induceret delgraf isomorf med $L(K_{3,3})$, og der findes en optræden af K_4 i G eller $\overline{G}$, vist, at G er en bicograf, G har en balanceret skæv opdeling, eller en af G eller $\overline{G}$ har et 2-vedhæng. □

Hermed er det vist, at grafer, der indeholder en degenereret optræden af K_4 og ikke indeholder en $L(K_{3,3})$ som induceret delgraf, ikke kan være minimale modeksempler.
Følgende korollar sammenholder de tre hovedresultater, som blev vist i dette kapitel, nemlig sætning 9.30, korollar 9.17 og korollar 9.18.

Korollar 9.31
Lad G være en Berge graf, så der findes en optræden $L(H)$ af K_4 i G. Da vil et af følgende være opfyldt:

(i) *$G = L(H)$ eller $\overline{G} = L(H)$.*

(ii) *G er en bicograf.*

(iii) *G eller $\overline{G}$ indeholder et 2-vedhæng.*

(iv) *G har en balanceret skæv opdeling.*

◇

Bevis
Korollaret er opfyldt per sætning 9.30 for enhver degenereret optræden, hvor der ikke findes en induceret delgraf, der er isomorf med $L(K_{3,3})$. Hvis der findes en ikke-degenereret optræden af en todelt underdeling af K_4, så er korollaret opfyldt per korollar 9.17. Når der findes en induceret delgraf, der er isomorf med $L(K_{3,3})$, så er korollaret opfyldt per korollar 9.18. □

Hermed er det vist, at grafer, der indeholder en optræden af K_4, ikke kan være minimale modeksempler. Eftersom $K_{3,3} - e$ er en todelt underdeling af K_4, kan grafer, der indeholder $L(K_{3,3} - e)$

som induceret delgraf, ikke være minimale modeksempler. I henhold til sætning 4.4 er der nu kun to muligheder tilbage for et minimalt modeksempel, der indeholder en skæv opdeling, nemlig at det indeholder en aflang prisme eller en dobbeltdiamant som induceret delgraf.

I næste del af rapporten betragtes Berge grafer, der ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en aflang prisme som induceret delgraf, for at vise, at sådanne grafer ikke kan være minimale modeksempler.

Grafer indeholdende en dobbeltdiamant som induceret delgraf betragtes i kapitel 14 i del fire af denne rapport.

Der er i dette kapitel vist tre af rapportens hovedresultater, nemlig (ii), som er vist i korollar 9.17, (iii), som er vist i korollar 9.19, og (iv), som er vist i sætning 9.30.

Del III

Prismer

Kapitel 10

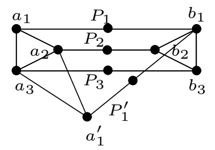
Generelt om prismer

Grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en aflang prisme som induceret delgraf, skal nu betragters i håb om at udelukke disse som minimale modeksempler. Dette gøres ved at dele op i to tilfælde, nemlig når grafen indeholder en lige prisme, og når grafen indeholder en aflang ulige prisme. På denne måde bliver tilfældet, hvor grafen indeholder en aflang prisme, dækket. Det viser sig, at grafer, der indeholder en lige prisme, kan udelukkes som minimale modeksempler, og grafer, der indeholder en aflang ulige prisme, heller ikke kan være minimale modeksempler. At grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en lige prisme, ikke kan være minimale modeksempler, vises i kapitel 11, og at grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en aflang ulige prisme, ikke kan være minimale modeksempler, vises i kapitel 12.

I dette kapitel betragtes prismer generelt, hvilket vil sige, at der ikke skelnes mellem om en graf indeholder en aflang, en lige eller en ulige prisme.

Lemma 10.1
Lad G være en Berge graf, lad $Y \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, og for $i = 1, 2, 3$ lad a_i, P_i, b_i være en 2-vej i $G - Y$, der danner en prisme med trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Antag, at P_1, P_2 og P_3 alle har længde mindst to, og ethvert punkt i Y er nabo til mindst to punkter i A og til mindst to punkter i B. Da vil mindst to punkter i A og mindst to punkter i B være komplette til Y. $\diamond$

Lemma 10.2
Lad G være en Berge graf, og for $i = 1, 2, 3$ lad P_i være en 2-vej af lige længde mindst to fra a_i til b_i, så disse tre 2-veje danner en aflang prisme med trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Lad $A' = \{a'_1, a_2, a_3\}$ være en trekant, så P'_1 er en 2-vej fra a'_1 til b_1, og P'_1, P_2 og P_3 danner en aflang prisme. Lad $y \in V(G)$ have mindst to naboer i A og mindst to naboer i B. Da har y også mindst to naboer i $A' = \{a'_1, a_2, a_3\}$. $\diamond$



Figur 10.1: Eksempel på de to prismer dannet af henholdsvis P_1, P_2 og P_3 samt P'_1, P_2 og P_3.

Bevis
Da P_2 og P_3 har lige længde, og de sammen med P'_1 danner en prisme, har P'_1 lige længde, se figur 10.1. Lad X være mængden af y's naboer i G, og antag, at $y \in V(G)$ højst har én nabo i

A'. Det vil sige, at kun ét af punkterne a_2 eller a_3 tilhører X, da $A' \cap A = \{a_2, a_3\}$, og da Y har mindst to naboer i A, må $a_1 \in X$ og $a'_1 \notin X$. Desuden kan y ikke forbindes til trekanten A', da y ifølge lemma 2.9 skal være nabo til mindst to af punkterne i A' for at kunne forbindes til A'. Dette er ikke opfyldt, da y kun er nabo til netop ét af a_2 eller a_3, lad det være a_2. Da y også er nabo til mindst to punkter i B, må et af b_2 eller b_3 tilhøre X, lad det være b_2. Hvis et indre punkt $p'_1 \in P'_1$ tilhører X, så vælges p'_1 tættest på a'_1. Hvis p'_1 er i ulige afstand fra a'_1, dannes et hul $y, p'_1, \ldots, a'_1, a_3, a_1$ af ulige længde, og hvis p'_1 er i lige afstand fra a'_1, dannes et hul $y, p'_1, \ldots, a_1, a_2$ af ulige længde. Dermed kan intet indre punkt fra P'_1 tilhøre X. Desuden må $b_1 \notin X$, for ellers vil y, a_2, a'_1, P'_1, b_1 være et hul af ulige længde. Det betyder, at både b_2 og b_3 tilhører X. Da G er en Berge graf, må a_1, a_3, P_3, b_3, y ikke være et hul af ulige længde, hvilket betyder, at der må findes et punkt fra $P_3 - \{b_3\}$, som tilhører X. Da kan y forbindes til A' via 2-vejen b_2, b_1, P'_1, a_1, 2-vejen mellem y og a_3 med indre tilhørende $V(P_3) - b_3$, og kanten ya_2, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da y kun er nabo til ét punkt fra A', nemlig a_2. Hermed må antagelsen, om at y kun har en nabo i A', være forkert. □

Definition 10.3 (Mætte en prisme)
Lad a_i, P_i, b_i, for $i = 1, 2, 3$, være en 2-vej i G, så de tre 2-veje danner en prisme med trekanter $\{a_1, a_2, a_3\}$ og $\{b_1, b_2, b_3\}$. En delmængde $X \subseteq V(G)$ mætter prismen, hvis mindst to punkter fra hver trekant tilhører X. ◇

Definition 10.4 (Prismeoverpunkt)
Lad P_i, for $i = 1, 2, 3$, være en 2-vej i G, så de tre 2-veje danner en prisme. Et punkt v er et prismeoverpunkt, hvis mængden af v's naboer mætter prismen. ◇

Ligesom tidligere benævnes et prismeoverpunkt også med et K-overpunkt, når K betegner den pågældende prisme.

Definition 10.5 (Lokal med hensyn til en prisme)
Lad a_i, P_i, b_i, for $i = 1, 2, 3$, være en 2-vej i G, så de tre 2-veje danner en prisme K med trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. En delmængde $X \subseteq V(K)$ er lokal med hensyn til prismen, hvis enten $X \subseteq V(P_i)$, for et $i \in \{1, 2, 3\}$, eller X er en delmængde af en af trekanterne A eller B. ◇

Lemma 10.6
Lad P_1, P_2 og P_3 danne en prisme K i en Berge graf G, hvor P_i har endepunkter a_i og b_i, for $i = 1, 2, 3$, og prismen har trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal. Antag, at intet punkt i F er et K-overpunkt. Da findes der en 2-vej $f_1, \ldots, f_n$ i F, hvor $n \geq 1$, så et af følgende er opfyldt op til symmetri:

(i) *f_1 har to naboer i P_1, der indbyrdes er naboer, f_n har to naboer i P_2, der indbyrdes er naboer, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K)$. På denne baggrund kan det konkluderes, at G har en induceret delgraf, som er liniegrafen af en todelt underdeling af K_4, og denne delgraf er $\langle V(K) \cup \{f_1, \ldots, f_n\} \rangle_G$.*

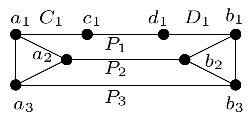
(ii) *$n \geq 2$, f_1 er komplet til A, f_n er komplet til B, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K)$.*

(iii) *$n \geq 2$, f_1 er nabo til a_1 og a_2, f_n er nabo til b_1 og b_2, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K)$.*

(iv) *f_1 er nabo til a_1 og a_2, f_n har mindst en nabo i $P_3 - \{a_3\}$, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K) - a_3$.*

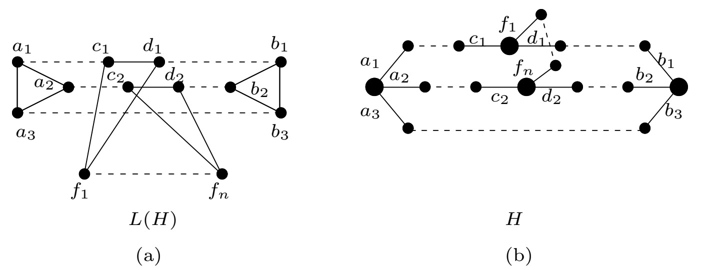
◇

Bevis
Det kan antages, at F er mindst mulig, så F er sammenhængende, og mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal. Lad X være mængden af vedhæftninger for F i K. Hvis $X \cap V(P_i) \neq \emptyset$, så lad c_i og d_i være de punkter fra P_i i X, som er tættest på henholdsvis a_i og b_i i P_i, for $i \in \{1, 2, 3\}$. Hvis dette ikke er muligt, så er $a_i = c_i$ eller $b_i = d_i$. Bemærk, at ikke både $a_i = c_i$ og $b_i = d_i$, da hvis $a_i = c_i$, så vil $d_i = a_i$. Lad C_i være 2-vejen mellem a_i og c_i, og lad D_i være 2-vejen mellem d_i og b_i, se figur 10.2.



Figur 10.2: Et eksempel med $X \cap V(P_1) \neq \emptyset$.

Det vises, at når første udsagn i (i) gælder, så vil $\langle V(K) \cup \{f_1, \ldots, f_n\}\rangle_G$ findes som induceret delgraf, og denne er liniegrafen af en todelt underdeling af K_4. På figur 10.3(a) ses det første udsagn i (i), og denne graf benævnes $L(H)$. På figur 10.3(b) ses en graf H, som $L(H)$ er liniegrafen af, altså (a) er liniegrafen af (b).



Figur 10.3: (a) Illustration af det første udsagn i (i). (b) Grafen H, som $L(H)$ er liniegrafen af.

Figur 10.3(b) er en underdeling af K_4, hvor de store punkter er de oprindelige punkter i K_4. Hvis H ikke er todelt, vil der findes en kreds af ulige længde i H, hvormed $L(H)$ har et hul af ulige længde, hvilket ikke findes i en Berge graf. Desuden kan H ikke indeholde en kreds af længde tre på grund af udseendet af $L(H)$. Dermed er H todelt. Det vil sige, at $\langle V(K) \cup \{f_1, \ldots, f_n\}\rangle_G$ er liniegrafen af en todelt underdeling af K_4.

Påstand 1: *Der findes en delmængde af X bestående af to punkter, som ikke er lokal.*

Idet X ikke er lokal, da gælder per definition 10.5, at $X \nsubseteq V(P_i)$, $X \nsubseteq A$ og $X \nsubseteq B$. Da $X \nsubseteq B$, kan det antages, at $c_1 \neq b_1$ findes. Idet $X \nsubseteq V(P_1)$, kan det antages, at d_2 findes, hvor det blandt andet er muligt, at $d_2 = a_2$ eller $d_2 = b_2$. Hvis $d_2 \neq a_2$, så er $\{c_1, d_2\}$ en delmængde af X, som ikke er lokal. Det kan derfor antages, at $d_2 = a_2$ og $c_1 = a_1$. Ligeledes er $d_3 = a_3$, hvis d_3 findes. Idet $X \nsubseteq A$, er $d_1 \neq a_1$, men så er $\{a_2, d_1\}$ en delmængde af X, som ikke er lokal. Det vil altså sige, at der altid kan findes en delmængde $\{x_1, x_2\}$ af X som ikke er lokal, hvormed påstand 1 er vist.

Lad $\{x_1, x_2\}$ være en delmængde af X, som ikke er lokal. Desuden er x_1 og x_2 ikke naboer. Da F er valgt mindst mulig, så den er sammenhængende, og mængden af vedhæftninger for F ikke er lokal, vil der findes en 2-vej $x_1, f_1, \ldots, f_n, x_2$, så $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$.

Påstand 2: *Hvis $n = 1$, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at $n = 1$, så er $F = \{f_1\}$. Idet X ikke er lokal, har X punkter tilhørende mindst to af 2-vejene P_1, P_2 og P_3. Antag, at X kun har punkter i P_1 og P_2. Antag desuden, at $c_1 = d_1$, altså at X kun har et punkt i P_1. Ved eventuelt at ombytte trekanterne A og B kan det antages, at $c_1 \notin A$, da punktet højst kan tilhøre én af de to trekanter, og $c_2 \neq b_2$, da hvis $c_1 = b_1$ og $c_2 = b_2$, er

X lokal, fordi $X \subseteq B$, så c_1 eller c_2 tilhører ikke B. Nu kan c_1 forbindes til trekanten A via 2-vejen c_1, C_1, a_1, 2-vejen c_1, f_1, c_2, C_2, a_2 og 2-vejen $c_1, D_1, b_1, b_3, P_3, a_3$, hvilket danner en modstrid med lemma 2.9, da c_1 højst kan have én nabo i A, nemlig a_1. Dermed er antagelsen, om at $c_1 = d_1$, forkert. Ligeledes er $c_2 \neq d_2$, og specielt er $c_2 \neq b_2$.
Antag, at c_1 og d_1 ikke er naboer. Idet f_1 ikke er et K-overpunkt, vil der fra en af trekanterne A eller B højst findes et punkt, der tilhører mængden af naboer til f_1. Ved eventuelt at ombytte A og B, kan det antages, at f_1 højst har én nabo i A. Da kan f_1 forbindes til trekanten A via 2-vejen f_1, c_1, C_1, a_1, 2-vejen f_1, c_2, C_2, a_2 og 2-vejen $f_1, d_1, D_1, b_1, b_3, P_3, a_3$, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da f_1 højst har én nabo i A. Altså må c_1 og d_1 være naboer, og ligeledes er c_2 og d_2 naboer, hvormed (i) i lemmaet er opfyldt. Hermed er påstanden vist i det tilfæde, hvor X kun har punkter i P_1 og P_2.

Antag derfor, at X har punkter i P_1, P_2 og P_3. Ved eventuelt at ombytte A og B kan det antages, at f_1 højst har én nabo i A, da f_1 ikke er et K-overpunkt. Da f_1 højst har en nabo i A, kan f_1 ifølge lemma 2.9 ikke forbindes til trekanten A. Idet f_1 har en nabo i alle tre 2-veje P_1, P_2 og P_3, må der for mindst to af disse 2-veje gælde, at f_1 kun har én nabo i B, da f_1 ellers kan forbindes til A. Det kan derfor antages, at $c_1 = d_1 = b_1$ og $c_2 = d_2 = b_2$. Hvis $c_3 = b_3$, da er $X \subseteq B$, og X er lokal, hvilket danner en modstrid, så $c_3 \neq b_3$. Altså har f_1 mindst en nabo i $P_3 - \{a_3\}$, hvormed (iv) i lemmaet er opfyldt, da $n = 1$. Dermed er påstand 2 vist.

Fremover kan det altså antages, at $n \geq 2$. Lad X_1 være mængden af vedhæftninger for $F - \{f_1\}$ i $V(K)$, og lad X_2 være mængden af vedhæftninger for $F - \{f_n\}$ i $V(K)$. Da F er valgt mindst mulig, så den er sammenhængende, og X ikke er lokal, vil både X_1 og X_2 være lokale, idet F ellers kan vælges mindre. Desuden er $X = X_1 \cup X_2$, og hver nabo til f_i i K, for $2 \leq i \leq n-1$, tilhører $X_1 \cap X_2$.

Påstand 3: *Hvis $X_1 \subseteq A$ og $X_2 \subseteq V(P_1)$, så er lemmaet opfyldt.*

Da X ikke er lokal, må f_1 have mindst en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og f_n må være nabo til mindst et af a_2 eller a_3, og der findes ikke andre kanter mellem F og $V(K) - a_1$. Hvis f_n er nabo til både a_2 og a_3, så er (iv) i lemmaet opfyldt. Antag derfor, at f_n ikke er nabo til a_3. Dermed kan a_2 forbindes til trekanten B via 2-vejen $a_2, f_n, \ldots, f_1, d_1, D_1, b_1$, 2-vejen a_2, P_2, b_2 og 2-vejen a_2, a_3, P_3, b_3, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da a_2 højst kan have én nabo i B, nemlig b_2. Altså må f_n være nabo til både a_2 og a_3, hvor (iv) er opfyldt, så påstand 3 er vist.

Da både X_1 og X_2 er lokale med hensyn til prismen K, kan det ifølge påstand 3 antages, at enten $X_1 \subseteq A$ og $X_2 \subseteq B$, eller $X_1 \subseteq V(P_2)$ og $X_2 \subseteq V(P_1)$. I begge tilfælde er $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, hvormed ingen af $f_2, \ldots, f_{n-1}$ har naboer i $V(K)$. Det vil sige, at X_1 er mængden af naboer til f_n i $V(K)$, og X_2 er mængden af naboer til f_1 i $V(K)$.

Påstand 4: *Hvis $X_1 \subseteq A$ og $X_2 \subseteq B$, så er lemmaet opfyldt.*

Det kan antages, at f_n er nabo til a_1. Da X ikke er lokal, må f_1 have en nabo i B, som ikke tilhører P_1. Det kan derfor antages, at f_1 er nabo til b_2. Antag først, at n har samme paritet som længden af P_1, hvilket vil sige, at længden af F og længden af P_1 har forskellig paritet. Her er f_n og a_2 ikke-naboer, da det ellers vil give et hul $a_2, P_2, b_2, f_1, \ldots, f_n$ af ulige længde. Ligeledes er f_1 og b_1 ikke-naboer. Idet $a_3, P_3, b_3, b_2, f_1, \ldots, f_n, a_1$ ikke må være et hul af ulige længde, er enten f_n og a_3 naboer, eller f_1 og b_3 er naboer, men ikke begge, da det som før vil give en modstrid. Men så er (iv) i lemmaet opfyldt. Antag derfor, at n og længden af P_1 har forskellig paritet, altså at længden af F og længden af P_1 har samme paritet. Her vil f_n og a_2 være naboer, da $a_1, a_2, P_2, b_2, f_1, \ldots, f_n$ ellers danner et hul af ulige længde. Ligeledes er f_1 nabo til b_1. Hvis der ikke findes flere kanter mellem F og $V(K)$, så er (iii) i lemmaet opfyldt. Det kan derfor antages, at f_n er nabo til a_3. Da $a_3, P_3, b_3, b_1, f_1, \ldots, f_n$ ikke må være et hul af ulige længde, er f_1 og b_3 naboer, hvormed (ii) i lemmaet er opfyldt. Hermed er påstand 4 vist.

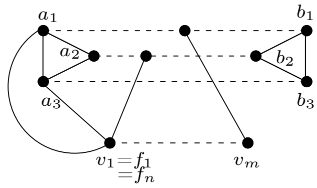
Fra påstand 3 og påstand 4 kan det antages, at $X_1 \subseteq V(P_2)$ og $X_2 \subseteq V(P_1)$, altså at f_1 er nabo til de punkter i P_1, som tilhører X, og f_n er nabo til de punkter i P_2, der tilhører X. Hvis $c_1 = d_1$, altså at P_1 kun har ét punkt i X, så kan det, ved eventuelt at ombytte A og B, antages, at $c_1 \neq a_1$, og $c_2 \neq b_2$. Nu kan c_1 forbindes til trekanten A via 2-vejen c_1, C_1, a_1, 2-vejen

$c_1, f_1, \ldots, f_n, c_2, C_2, a_2$ og 2-vejen $c_1, D_1, b_1, b_3, P_3, a_3$, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da c_1 højst har én nabo i A, nemlig a_1. Det vil sige, at $c_1 \neq d_1$, og ligeledes er $c_2 \neq d_2$, og specielt er $c_2 \neq b_2$. Hvis c_1 og d_1 ikke er naboer, så kan f_1 forbindes til trekanten A via 2-vejen f_1, c_1, C_1, a_1, 2-vejen $f_1, \ldots, f_n, c_2, C_2, a_2$ og 2-vejen $f_1, d_1, D_1, b_1, b_3, P_3, a_3$, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da $f_1 \neq f_n$ højst har én nabo i A, nemlig a_1. Det vil sige, at c_1 og d_1 er naboer. Ligeledes er c_2 og d_2 naboer, men så er (i) i lemmaet opfyldt. Det er altså vist, at for hver af de mulige kombinationer af X_1 og X_2 indeholdt i mængderne $A, B, V(P_1)$ og $V(P_2)$ er lemmaet opfyldt, og da P_3 er strukturmæssigt lig P_1 og P_2, så er lemmaet opfyldt i alle tilfælde. □

Korollar 10.7
Lad P_1, P_2 og P_3 danne en prisme K i en Berge graf G, hvor P_i har endepunkter a_i og b_i, for $i = 1, 2, 3$, og prismen har trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så mængden X af vedhæftninger for F i K ikke er lokal. Antag, at intet punkt i F er et K-overpunkt. Antag, at lemma 10.6(i) er opfyldt. Da har enten P_1 og P_2 begge længde en, eller der findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. ◇

Korollar 10.8
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad P_1, P_2 og P_3 danne en prisme K i G med trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, hvor a_i og b_i er endepunkter i P_i, for $i = 1, 2, 3$. Lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så intet punkt i F er et K-overpunkt. Lad x_1 være en vedhæftning for F i det indre af P_1, og antag, at der findes en anden vedhæftning x_2 for F, som ikke tilhører P_1. Da findes der en 2-vej $f_1, \ldots, f_n$ i F, så, op til symmetri mellem A og B, f_1 er nabo til a_2 og a_3, og f_n har mindst én nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K) - a_1$. ◇

Bevis
Det kan antages, at F er mindst mulig, så den er sammenhængende, x_1 er en vedhæftning for F i P, og x_2 er en vedhæftning for F i $P_2 \cup P_3$. Dermed vil der findes en 2-vej $x_2, v_1, \ldots, v_m, x_1$, hvor $F = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Fra lemma 10.6 følger, at der findes en delgraf $f_1, \ldots, f_n$ af 2-vejen $v_1, \ldots, v_m$, så et af punkterne (i)-(iv) i lemma 10.6 er opfyldt. Da F er valgt mindst mulig, vil v_1 være det eneste punkt i F, som har en nabo i $V(P_2) \cup V(P_3)$, så specielt vil højst et af punkterne $f_1, \ldots, f_n$ have en nabo i $V(P_2) \cup V(P_3)$. Lemma 10.6(ii) kan ikke være opfyldt, da f_1 og f_n ifølge lemma 10.6(ii) hver skal have en nabo i P_1, P_2 og P_3, hvormed der findes to punkter, som har naboer i $V(P_2) \cup V(P_3)$, hvilket ikke er tilfældet. Lemma 10.6(iii) kan ligeledes ikke være opfyldt, da f_1 og f_n ifølge 10.6(iii) begge er naboer til punkter i $V(P_2) \cup V(P_3)$. Det mangler at blive undersøgt hvilket af de to sidste punkter (i) og (iv) i lemma 10.6, der er opfyldt. Antag, at lemma 10.6(i) er opfyldt. Dermed har f_1 to naboer i P_1, der indbyrdes er naboer, f_n har to naboer i P_2, der indbyrdes er naboer, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K)$. Antagelserne i korollar 10.7 er opfyldte, og da der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G, har to af 2-vejene P_1, P_2 og P_3 ifølge korollar 10.7 længde en. Deraf følger det, at $f_1, \ldots, f_n$ forbinder to af 2-vejene P_1, P_2 og P_3, hvormed n er lige, da der ellers haves et hul af ulige længde. Da x_1 tilhører det indre af P_1, har P_1 længde mindst to, men da er f_1 og f_n to forskellige punkter, som begge har naboer i $V(P_2) \cup V(P_3)$, hvilket er i modstrid med, at højst et af punkterne $f_1, \ldots, f_n$ har en nabo i $V(P_2) \cup V(P_3)$. Altså må lemma 10.6(iv) være opfyldt. Det vil sige, at det kan antages, at for et $i \in \{1, 2, 3\}$ vil f_1 være nabo til de to punkter i $A - \{a_i\}$, og f_n er nabo til mindst ét punkt i $P_i - \{a_i\}$, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K) - a_i$. Antag først, at $i > 1$, og lad $i = 2$, da har både f_1 og f_n naboer i $V(P_2) \cup V(P_3)$, så $f_1 = f_n$. Da F er valgt mindst mulig, må $f_1 = v_1$.



Figur 10.4: Tilfældet med $f_1 = f_n = v_1$.

Her kan f_1 forbindes til trekanten B via 2-vejen mellem f_1 og b_1 med indre i $\{v_2, \ldots, v_m\} \cup (V(P_1 - \{a_1\}))$, 2-vejen mellem f_1 og b_2 med indre i $V(P_2 - \{a_2\})$ og 2-vejen f_1, a_3, P_3, b_3, hvilket danner en modstrid med lemma 2.9, da f_1 højst har én nabo i B, nemlig b_2. Altså må $i = 1$. Det vil sige, at 2-vejen $f_1, \ldots, f_n$ i F opfylder, at f_1 er nabo til a_2 og a_3, og f_n har mindst én nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K) - a_1$. □

I følgende korollar er kravene lidt svagere i forhold til forrige korollar, da det kun er vist, at hvis prismen er lige, er intet punkt et prismeoverpunkt, men til gengæld må der ikke findes vedhæftninger i P_3.

Korollar 10.9
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad P_1, P_2 og P_3 danne en prisme K i G, hvor prismen har trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, hvor a_i og b_i er endepunkter i P_i, for $i = 1, 2, 3$. Lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så hvis prismen er lige, da er intet punkt i F et K-overpunkt. Antag, at mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal, og ingen af vedhæftningerne tilhører P_3. Da er $|F| \geq 2$, og mængden af vedhæftninger for F i K er nøjagtig $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$. ◇

Dette var en introduktion til prismer, hvor de her præsenterede resultater anvendes i de næste to kapitler til at vise, at grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder enten en lige prisme eller en aflang ulige prisme, ikke kan være minimale modeksempler.

Kapitel 11

Lige prismer

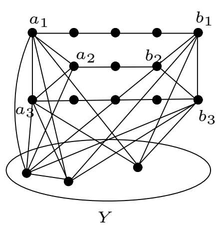
I dette kapitel betragtes de grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en lige prisme som induceret delgraf. Det viser sig, at det kun er nødvendigt at udelukke ikke-degenererede optrædener af K_4 fra de betragtede grafer. For at vise, at disse grafer ikke kan være minimale modeksempler, benyttes en generaliseret form for lige prismer, nemlig hyperprismer, som introduceres i afsnit 11.1. Indledningsvist vises nogle resultater om grafer, der indeholder lige prismer.

Definition 11.1 (Trekantspunkt)
Et punkt af grad tre i en prisme kaldes for et trekantspunkt. ◇

I en prisme findes der nøjagtig seks trekantspunkter.
Følgende lemma er lidt mere generelt end nødvendigt, idet det blot kræver, at der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4, mens det er tilstrækkeligt at vise det for grafer, der ikke indeholder en optræden af K_4, da disse grafer blev udelukket i kapitel 9.

Lemma 11.2
Lad G være en Berge graf. Antag, at der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Hvis der findes en lige prisme K i G, så et punkt i G er et K-overpunkt, da har G en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Lad 2-vejene a_i, P_i, b_i, for $1 \leq i \leq 3$, danne en lige prisme K, hvor $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ er prismens trekanter. Lad $Y \subseteq V(G) - V(K)$ være en maksimal ikke-tom og antisammenhængende mængde, hvor ethvert punkt tilhørende Y er et K-overpunkt i G. Vælg K, således at så få trekantspunkter som muligt i K er komplette til Y. Lad X være mængden af punkter i G, der er komplette til Y. Altså er K valgt, så $X \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ er mindst mulig.

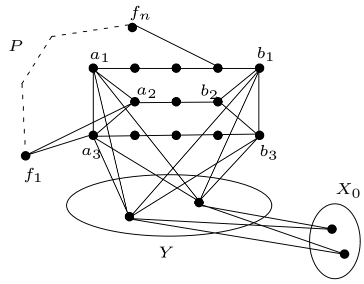


Figur 11.1: Udsnit af G indeholdende prismen K og mængden Y.

Da det haves, at Y er antisammenhængende, 2-vejene a_i, P_i, b_i, for $1 \leq i \leq 3$, har længde mindst to og danner en prisme, og hvert punkt i Y er nabo til mindst to punkter i begge af prismens trekanter, kan lemma 10.1 anvendes. Heraf fåes, at mindst to punkter i A og mindst to punkter i B er komplette til Y, så X må dermed mætte K. Da mindst to af punkterne i A og mindst to af punkterne i B er komplette til Y, følger det, at en af 2-vejene har endepunkter, der begge tilhører X, lad det være P_1.
Lad $X_0 = X - V(K)$ og $X_1 = \{a_1, b_1\}$.

Påstand: *Hvis $F \subseteq V(G)$ er en sammenhængende mængde, hvor et punkt i det indre af P_1 har en nabo i F, og et punkt i $V(P_2) \cup V(P_3)$ har en nabo i F, så er $F \cap (X_0 \cup X_1 \cup Y) \neq \emptyset$.*

For at vise påstanden antages, at der findes en mængde F, hvor et punkt i det indre af P_1 har en nabo i F, og et punkt i $V(P_2) \cup V(P_3)$ har en nabo i F, men hvor $F \cap (X_0 \cup X_1 \cup Y) = \emptyset$. Vælg F mindst mulig, hvormed $\langle F \rangle_G$ er en 2-vej, og $\langle F \rangle_G$ samt K er disjunkte. Det vil sige, at $F \cap X = \emptyset$, da X består af X_0, X_1 og punkter i K.
Antag, at et punkt $v \in F$ er et K-overpunkt. Eftersom $v \notin X$, og X er mængden af punkter, der er komplette til Y, må v have en ikke-nabo i Y. Dermed er $Y \cup \{v\}$ antisammenhængende, og på grund af maksimaliteten af Y følger, at $v \in Y$, og derfor er $F \cap Y \neq \emptyset$, hvilket danner en modstrid, så v kan ikke være et K-overpunkt.
Det kan derfor antages, at intet punkt tilhørende F er et K-overpunkt, for ellers er påstanden opfyldt. Lad x_1 være en vedhæftning for F tilhørende det indre af P_1, og lad x_2 være en vedhæftning for F tilhørende $V(P_2) \cup V(P_3)$, og sådanne vil findes, da F har en nabo i det indre af P_1 og en nabo i $V(P_2) \cup V(P_3)$. Da kan det ifølge korollar 10.8 antages, at der findes en 2-vej $f_1, \ldots, f_n$ tilhørende F, så f_1 er nabo til a_2 og a_3, f_n har mindst én nabo tilhørende $P_1 - \{a_1\}$, og f_1a_2 samt f_1a_3 er de eneste kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(P_2) \cup V(P_3)$. Det vil sige, at der findes en 2-vej P med endepunkter f_1 og b_1, hvis indre tilhører $\{f_2, \ldots, f_n\} \cup V(P_1 - \{a_1\})$, se figur 11.2.



Figur 11.2: Eksempel på 2-vejen P med endepunkter f_1 og b_1 med indre tilhørende $\{f_2, \ldots, f_n\} \cup V(P_1 - \{a_1\})$.

Dermed danner P, P_2 og P_3 en prisme K'. Da G er en Berge graf, K og K' er prismer, og ethvert punkt $y \in Y$ har mindst to naboer i begge trekanter i K, kan lemma 10.2 anvendes, og heraf følger, at y også har mindst to naboer i trekanten $A' = \{f_1, a_2, a_3\}$ i K'. Det vil sige, at ethvert punkt tilhørende Y er et K'-overpunkt. Da begge endepunkter i P_1 tilhører X, er a_1 komplet til Y. Idet $F \cap X = \emptyset$, er f_1 ikke komplet til Y. Heraf følger, at $|\{f_1, a_2, a_3\} \cap X| = |\{a_1, a_2, a_3\} \cap X| - 1$, da $f_1 \notin X$ og $a_1 \in X$. Altså haves en prisme K', hvor der er færre trekantspunkter, som er komplette til Y, end i prismen K. Dette er i modstrid med antagelsen om, at K er den prisme, hvorom det gælder, at K indeholder færrest mulige trekantspunkter, der er komplette til Y. Dette viser påstanden.

Fra påstanden følger, at der findes en opdeling af $V(G) - (X_0 \cup X_1 \cup Y)$ i to mængder L og M, som der ikke findes kanter mellem, hvor punkterne i det indre af P_1 er indeholdt i L, og $V(P_2) \cup V(P_3) \subseteq M$.
Da $L \cup M$ ikke er sammenhængende, og $X_0 \cup X_1 \cup Y$ ikke er antisammenhængende, idet X_0 er komplet til Y, da X_0 er de punkter i G, der ikke tilhører $V(K)$, som er komplette til Y, er $\{L \cup M, X_0 \cup X_1 \cup Y\}$ en skæv opdeling af G.

Da mindst to punkter i trekanten A tilhører X, og heraf kun det ene tilhører X_1, findes et punkt fra X i M, og dermed er et punkt tilhørende $L \cup M$ komplet til komponenten Y i $X_0 \cup X_1 \cup Y$, og den skæve opdeling $\{L \cup M, X_0 \cup X_1 \cup Y\}$ er dermed en løs skæv opdeling. Da G er en Berge graf med en løs skæv opdeling, følger af lemma 3.6, at G har en balanceret skæv opdeling. □

I følgende afsnit undersøges hyperprismer, og grafer, som indeholder inducerede delgrafer, der er isomorfe med en lige prisme, udelukkes fra at kunne være minimale modeksempler.

11.1 Hyperprismer

Ved brug af hyperprismer i stedet for blot prismer bliver det muligt at vise, at grafer indeholdende lige prismer, men ikke en optræden af K_4, ikke kan være minimale modeksempler. Derfor defineres her en hyperprisme.

Definition 11.3 (Hyperprisme)
Lad G være en Berge graf indeholdende en lige prisme. Lad

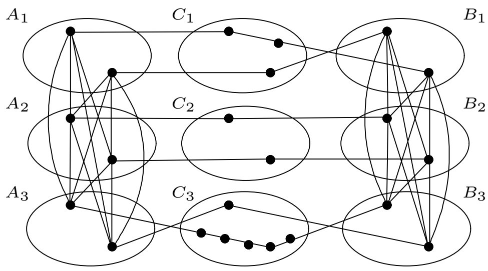
$$\begin{matrix} A_1 & C_1 & B_1 \\ A_2 & C_2 & B_2 \\ A_3 & C_3 & B_3 \end{matrix}$$

være en samling af ni mænger i G, der opfylder følgende:

- (i) *Alle ni mængder er ikke-tomme og parvis disjunkte.*
- (ii) *For $1 \leq i < j \leq 3$ er A_i komplet til A_j, B_i er komplet til B_j, og der findes ikke yderligere kanter mellem $A_i \cup C_i \cup B_i$ og $A_j \cup C_j \cup B_i$.*
- (iii) *For $1 \leq i \leq 3$ tilhører ethvert punkt i $A_i \cup C_i \cup B_i$ en 2-vej mellem A_i og B_i med indre tilhørende C_i.*
- (iv) *Der findes en 2-vej mellem A_1 og B_1 med indre tilhørende C_1, som har lige længde.*

Da siges samlingen af de ni mængder at danne en hyperprisme. ◇

På figur 11.3 ses et eksempel på en hyperprisme.



Figur 11.3: Eksempel på en hyperprisme.

Bemærk, at hvis $|A_i| = |B_i| = 1$ for alle i, så er hyperprismen lig en almindelig prisme. Det vil sige, at hvis der i en graf findes en almindelig prisme, så kan der altid vælges en hyperprisme.

Definition 11.4 (i-sti)
I en hyperprisme siges en 2-vej mellem A_i og B_i med indre tilhørende C_i at være en i-sti. ◇

Bemærk, at ifølge definition 11.3(iv) har en 1-sti lige længde.

Definition 11.5 (Lokal med hensyn til hyperprisme)
Lad G være en Berge graf. Lad A_i, B_i og C_i, for $1 \leq i \leq 3$, danne en hyperprisme. Lad H være en delgraf af G induceret over foreningen af de ni mængder, der danner hyperprismen, og lad $S_i = A_i \cup C_i \cup B_i$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ og $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. En delmængde $X \subseteq V(H)$ siges at være lokal med hensyn til hyperprismen, hvis X er en delmængde af en af S_1, S_2, S_3, A eller B. $\diamond$

Følgende sætning er hovedresultat (v) fra kapitel 1.

Sætning 11.6
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Hvis G indeholder en lige prisme, så gælder et af følgende:

(i) *G er en lige prisme med $|V(G)| = 9$.*

(ii) *G har et 2-vedhæng.*

(iii) *G har en balanceret skæv opdeling.*

$\diamond$

Bevis
Da G indeholder en lige prisme, kan der ifølge definition 11.3 vælges ni mængder i G, der danner en hyperprisme. Lad H være en delgraf af G induceret over foreningen af de ni valgte mængder, A_i, B_i og C_i, for $1 \leq i \leq 3$, der danner en hyperprisme. Vælg hyperprismen, så $|V(H)|$ er maksimal. Lad $S_i = A_i \cup C_i \cup B_i$, lad $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, og lad $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

Påstand 1: *For $1 \leq i \leq 3$ har alle i-stier lige længde.*

Ifølge definition 11.3(iv) findes en 1-sti P_1 med endepunkter tilhørende A_1 og B_1 og med indre i C_1, som har lige længde. Lad P_2 være en 2-sti. Da vil $\langle V(P_1) \cup V(P_2)\rangle_G$ inducere et hul, hvormed P_2 har lige længde, da der ellers dannes et hul af ulige længde, og dette gælder for samtlige valg af 2-stier, da A_1 er komplet til A_2, og B_1 er komplet til B_2. På samme måde må en 3-sti P_3 have lige længde. Det vil sige, at alle 2-stier og 3-stier har lige længde, og heraf følger, at alle 1-stier har lige længde, da der ellers dannes et hul af ulige længde. Dette viser påstand 1.

Påstand 2: *Det kan antages, at for alle sammenhængende mængder $F \subseteq V(G) - V(H)$ er mængden af vedhæftninger for F lokal.*

For at vise påstand 2 sættes X lig mængden af vedhæftninger for F i H, og det antages, at X ikke er lokal. Vælg F mindst mulig, så X ikke er lokal.
Idéen i beviset for denne påstand er først at vise, at $X \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3) = \emptyset$, og derefter vise, at X indeholder en delmængde med kun to punkter, og denne delmængde heller ikke er lokal. For denne ikke-lokale mængde med to elementer vil der så opnåes en modstrid, så det kan konkluderes, at antagelsen, om at X ikke er lokal, må være forkert.

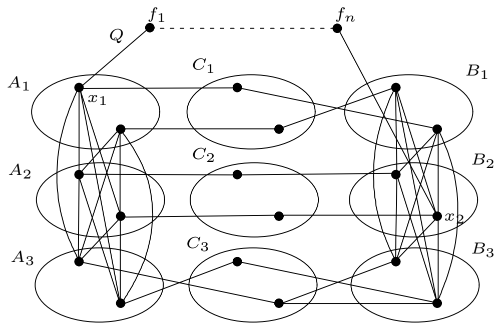
Antag, at der findes $x_1 \in X \cap C_1$. Da X ikke er lokal, kan det antages, at der findes $x_2 \in X \cap S_2$. Vælg for $1 \leq i \leq 3$ en i-sti P_i med endepunkter $a_i \in A_i$ og $b_i \in B_i$, så $x_i \in V(P_i)$ for $i = 1, 2$. Da alle i-stier ifølge påstand 1 har lige længde, danner P_1, P_2 og P_3 en lige prisme K.

Da G er en Berge graf, hvori der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4, og hvori der haves en lige prisme K, følger af lemma 11.2, at hvis der findes et punkt i G, som er et K-overpunkt, da har G en balanceret skæv opdeling, hvormed punkt (iii) i sætningen er opfyldt.
Det kan derfor antages, at der ikke findes punkter i F, som er K-overpunkter. Antagelserne i korollar 10.8 er nu opfyldte. Det kan derfor antages, at der findes en 2-vej $f_1, \ldots, f_n$ tilhørende F, så f_1 er nabo til a_2 og a_3, f_n har mindst én nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og der ikke findes andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K) - a_1$. Da F er valgt mindst mulig, må $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$.

Da korollar 10.8 omhandler en enkelt prisme, må korollaret gælde for ethvert valg af P_3 i hyperprismen. Heraf følger, at f_1 er komplet til A_3, da hvert a_3 og f_1 så er naboer for alle valg af P_3. Yderligere følger, at der for alle valg af P_3 gælder, at der ikke findes kanter mellem $\{f_1, \dots, f_n\}$ og $B_3 \cup C_3$. Da $a_3 \in X$, idet a_3 er nabo til f_1, vil a_3 være en vedhæftning for F, som ikke tilhører P_1, hvormed udvidelsen fra prismen K lige så godt kan gælde for ethvert valg af P_2 i hyperprismen. Dette betyder, at f_1 er komplet til A_2, og der findes ikke kanter mellem $\{f_1, \dots, f_n\}$ og $B_2 \cup C_2$. Men så kan f_1 tilføjes A_1, der er komplet til både A_2 og A_3, og $\{f_2, \dots, f_n\}$ kan tilføjes C_1, som indeholder de punkter, der ingen naboer har i S_2 og S_3. Dette er i modstrid med, at hyperprismen er valgt størst mulig. Det vil sige, at $X \cap C_1 = \emptyset$, og grundet symmetri mellem S_1, S_2 og S_3, vil $X \cap C_2 = \emptyset$ og $X \cap C_3 = \emptyset$.

Nu vises, at der findes en delmængde af X bestående af to elementer, som ikke er lokal, ligesom X ikke er lokal. Dette vises ved at antage, at $X \cap A_1 \neq \emptyset$. Dermed hvis et punkt i X tilhører B_2 eller B_3, findes en sådan ikke-lokal mængde bestående af punkter i A_1 og punkter i B_2 eller B_3, idet X ikke er lokal, og dermed indeholder mindst to punkter. Hvis punktet derimod ikke tilhører B_2 eller B_3, må det tilhøre B_1, da X, som ikke er lokal, ikke er en delmængde af $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Idet X heller ikke er en delmængde af $S_1 = A_1 \cup B_1 \cup C_1$, må X også have et punkt tilhørende $A_2 \cup A_3$. Dermed udgør punktet i B_1 og punktet i $A_2 \cup A_3$ en delmængde af X, som ikke er lokal. Det vil sige, at der altid findes en delmængde $\{x_1, x_2\}$ af X, som ikke er lokal.

Det kan antages, at $x_1 \in A_1$ og $x_2 \in B_2$, da $\{x_1, x_2\}$ ikke er lokal. Eftersom F er valgt mindst mulig, findes en 2-vej $Q : x_1, f_1, \dots, f_n, x_2$ med $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, se figur 11.4.

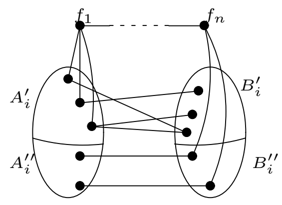


Figur 11.4: Udsnit af G indeholdende hyperprismen og 2-vejen Q.

Resten af beviset for påstand 2 deles op i tilfældet, hvor n er lige, og tilfældet, hvor n er ulige.

Antag først at n er lige, hvilket betyder, at 2-vejen Q har ulige længde. Hvis $X \cap V(S_3) = \emptyset$, vil der for enhver 3-sti P_3 med endepunkter $a_3 \in A_3$ og $b_3 \in B_3$ dannes et hul $x_1, Q, x_2, b_3, P_3, a_3$ af ulige længde, da P_3 ifølge påstand 1 har lige længde. Dermed må X indeholde et af endepunkterne fra P_3, hvilket vil sige, at et af $f_1, \dots, f_n$ har en nabo tilhørende A_3 eller B_3, da $X \cap C_3 = \emptyset$. Grundet minimaliteten af F har a_3 ingen nabo i $\{f_2, \dots, f_n\}$, og b_3 har ingen nabo i $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$, da F så ville kunne vælges mindre, hvormed enten f_1 er nabo til a_3, eller f_n er nabo til b_3, og ikke begge for så danner $f_1, \dots, f_n, b_3, P_3, a_3$ et hul af ulige længde. På grund af symmetri kan det antages, at f_n er nabo til b_3.
Ved at bytte om på S_2 og S_3 følger det, at for enhver 2-sti med endepunkter $a_2 \in A_2$ og $b_2 \in B_2$ er f_1 enten nabo til a_2 eller f_n er nabo til b_2 og ikke til begge. Antag, at f_n er komplet til $B_2 \cup B_3$, så har f_1 ingen naboer i $S_2 \cup S_3$, da det vil danne et hul af ulige længde, og f_n kan tilføjes B_1, som er komplet til $B_2 \cup B_3$, og $f_1, \dots, f_{n-1}$ kan tilføjes C_1, som indeholder punkter, der ingen naboer har i $S_2 \cup S_3$. Dette er i modstrid med, at hyperprismen er valgt, så $|V(H)|$ er størst mulig. Det vil sige, at f_n ikke er komplet til $B_2 \cup B_3$, og dermed har f_1 en nabo i en af mængderne A_2 eller A_3, lad det være A_3. Ved at ombytte S_1 og S_2 følger det, at for enhver 1-sti med endepunkter $a_1 \in A_1$ og $b_1 \in B_1$ er f_1 enten nabo til a_1, eller f_n er nabo til b_1 og ikke til begge. Specielt har f_1 ingen naboer i B, og f_n har ingen naboer i A.

For $1 \leq i \leq 3$ lad A'_i være mængden af naboer til f_1 i A_i, og lad $A''_i = A_i - A'_i$, hvilket vil sige, at $A_i = A'_i \cup A''_i$. Lad B''_i være mængden af naboer til f_n i B_i, og lad $B'_i = B_i - B''_i$, hvilket vil sige, at $B_i = B'_i \cup B''_i$.



Figur 11.5: Mængderne A_i, $A_{i'}$, B_i og $B_{i'}$ samt $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Indtil nu er det vist, at enhver i-sti har endepunkter i A'_i og B'_i eller endepunkter i A''_i og B''_i, da der ellers dannes et hul af ulige længde. Lad C'_i være foreningen af det indre af i-stierne med endepunkter i A'_i og B'_i, og lad C''_i være foreningen af det indre af i-stierne med endepunkter i A''_i og B''_i. Det vil sige, at $C_i = C'_i \cup C''_i$. Ydermere er $C'_i \cap C''_i = \emptyset$, for ellers ville der findes en i-sti med endepunkter i A'_i og B''_i eller en i-sti med endepunkter i A''_i og B'_i. Af samme grund findes ingen kanter mellem $A'_i \cup C'_i$ og $C''_i \cup B''_i$ og ingen kanter mellem $A''_i \cup C''_i$ og $C'_i \cup B'_i$.
Som udgangspunkt har f_1 en nabo i A_1, og f_n har en nabo i B_2, og derudfra er det vist, at f_1 også har en nabo i A_3, og f_n har en nabo i B_3. Det vil sige, at $A'_1 \neq \emptyset, B''_2 \neq \emptyset, A'_3 \neq \emptyset$ og $B''_3 \neq \emptyset$. Dette betyder også, at $B'_1 \neq \emptyset, A''_2 \neq \emptyset, B'_3 \neq \emptyset$ og $A''_3 \neq \emptyset$, da i-stier kun findes mellem A'_i og B'_i eller mellem A''_i og B''_i. Fra påstand 1 følger, at alle i-stier har lige længde, så $C'_1 \neq \emptyset, C''_2 \neq \emptyset, C'_3 \neq \emptyset$ og $C''_3 \neq \emptyset$.
Det vises, at A'_i er komplet til A''_i. For hvis ikke, så lad P'' være en i-sti med endepunkter $a'' \in A''_i$ og $b'' \in B''_i$, og lad $a' \in A'_i$ være ikke-nabo til a''. Da $A''_2 \neq \emptyset$ og $A''_3 \neq \emptyset$, vil f_1 have ikke-naboer i mindst to af mængderne A_1, A_2 og A_3, så $a \in A''_j$ kan vælges for $j \neq i$, og a er nabo til både a' og a'' ifølge definition 11.3(ii), men ikke nabo til f_1. Da danner $a, a', f_1, \ldots, f_n, b'', P'', a''$ et hul af ulige længde, hvilket ikke kan forekomme i en Berge graf. Det vil sige, at A'_i er komplet til A''_i for alle i. Analogt kan det vises, at B'_i er komplet til B''_i for alle i. Da $A'_i \subseteq A_i$, er A'_i komplet til A'_j for $i \neq j$. Analogt er B'_i komplet til B'_j for $i \neq j$.
Men da danner

$$\begin{array}{ccc} A'_1 & C'_1 & B'_1 \\ A'_2 \cup A'_3 & C'_2 \cup C'_3 & B'_2 \cup B'_3 \\ A''_1 \cup A''_2 \cup A''_3 \cup \{f_1\} & C''_1 \cup C''_2 \cup C''_3 \cup \{f_2, \ldots, f_n\} & B''_1 \cup B''_2 \cup B''_3 \end{array}$$

en hyperprisme J med $|V(J)| > |V(H)|$, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af $V(H)$. Dermed må antagelsen, om at X ikke er lokal, være forkert, og påstand 2 er vist, når n er lige.

Det skal nu vises, at der også opnåes en modstrid, når n er ulige.
Husk, at det er antaget, at $x_1 \in A_1$ og $x_2 \in B_2$, og der findes en 2-vej $Q : x_1, f_1, \ldots, f_n, x_2$ med $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, og antag nu, at n er ulige, hvilket betyder, at Q har lige længde. Lad P_1 være en 1-sti med endepunkter x_1 og b_1. Lad på samme måde P_2 være en 2-sti med endepunkter a_2 og x_2. Da x_2, Q, x_1, P_1, b_1 ikke må danne et hul af ulige længde, følger det, at $b_1 \in X$, og på samme måde følger det, at $a_2 \in X$, da x_1, Q, x_2, P_2, a_2 ikke må være et hul af ulige længde. På grund af at F er valgt mindst mulig, så er et af b_1 eller a_2 nabo til f_1, det andet er nabo til f_n, og hverken b_1 eller a_2 har flere naboer tilhørende F.
Antag, at f_1 er nabo til b_1, og f_n er nabo til a_2. Men så danner $b_1, f_1, \ldots, f_n, x_2$ et hul af ulige længde, hvilket ikke kan forekomme i en Berge graf. Dette viser, at f_n er nabo til b_1, og f_1 er nabo til a_2. For alle $1 \leq i \leq 3$ og for alle i-stier med endepunkter $a \in A$ og $b \in B$, vil $a \in X$, hvis og kun hvis $b \in X$, da der ellers dannes et hul af ulige længde, og i det tilfælde er f_1 nabo til a, og f_n er nabo til b. Det følger heraf, at for alle punkter tilhørende $X \cap A$ er f_1 punktets eneste nabo i F, og for alle punkter tilhørende $X \cap B$ er f_n punktets eneste nabo i F.

For $1 \leq i \leq 3$ lad $A_i' = A_i \cap X$, $B_i' = B_i \cap X$, $A_i'' = A_i - A_i'$ og $B_i'' = B_i - B_i'$. Lad C_i' være foreningen af det indre af i-stierne med endepunkter i A_i' og B_i', og lad C_i'' være foreningen af det indre af i-stierne med endepunkter i A_i'' og B_i''. Det er vist, at enhver i-sti har endepunkter i A_i' og B_i' eller endepunkter i A_i'' og B_i'', og dermed er $C_i = C_i' \cup C_i''$. Ydermere, da der ikke findes en i-sti mellem A_i' og B_i'' eller mellem A_i'' og B_i', følger det, at $C_i' \cap C_i'' = \emptyset$, og der ikke findes kanter mellem $A_i' \cup C_i'$ og $C_i'' \cup B_i''$. På samme måde findes der ikke kanter mellem $A_i'' \cup C_i''$ og $C_i' \cup B_i'$. Det er vist, at f_1 har naboer tilhørende mindst to af mængderne A_1, A_2 og A_3, nemlig A_1 og A_2, hvormed $A_1' \neq \emptyset$ og $A_2' \neq \emptyset$, og det er vist, at f_n har naboer tilhørende mindst to af mængderne B_1, B_2 og B_3, nemlig B_1 og B_2, hvormed $B_1' \neq \emptyset$ og $B_2' \neq \emptyset$. Dermed vil $C_1' \neq \emptyset$ og $C_2' \neq \emptyset$.
Det vises, at f_1 desuden har ikke-naboer i mindst to af mængderne A_1, A_2 og A_3, og f_n har ikke-naboer i mindst to af mængderne B_1, B_2 og B_3. Antag modsat, at f_1 er komplet til $A_1 \cup A_2$, hvormed f_n er komplet til $B_1 \cup B_2$. Dermed kan f_1 tilføjes A_3, som er komplet til $A_1 \cup A_2$, f_n kan tilføjes B_3, som er komplet til $B_1 \cup B_2$, og $f_2, \dots, f_{n-1}$ kan tilføjes C_3, som indeholder de punkter, der ikke har naboer i $S_1 \cup S_2$. Herved dannes en hyperprisme J med $|V(J)| > |V(H)|$, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af $V(H)$. Det vil sige, at antagelsen, om at f_1 er komplet til $A_1 \cup A_2$, og f_n er komplet til $B_1 \cup B_2$, må være forkert, og det er dermed vist, at f_1 har ikke-naboer i mindst to af mængderne A_1, A_2 og A_3, og f_n har ikke-naboer i mindst to af mængderne B_1, B_2 og B_3. Altså $A_i'' \neq \emptyset$ for to $i \in \{1,2,3\}$, og $B_i'' \neq \emptyset$ for to $i \in \{1,2,3\}$.
Lad $1 \leq i \leq 3$. Det vises, at A_i' er komplet til A_i''. For at vise dette kan det antages, at $i = 1$. Antag, at $a' \in A_1'$ og $a'' \in A_1''$ er ikke-naboer, og lad P'' være en 1-sti med endepunkter a'' og b''. Vælg $a \in A_2'' \cup A_3''$ og $b \in B_2' \cup B_3'$, hvormed a og b ikke er naboer og a er nabo til a' samt a'' og b er nabo til b''. Idet alle i-stier ifølge påstand 1 har lige længde, danner $a, a', f_1, \dots, f_n, b, b'', P'', a''$ et hul af ulige længde. Dette viser, at A_i' er komplet til A_i'', for $1 \leq i \leq 3$. Analogt kan det vises, at B_i' er komplet til B_i''. Desuden er A_i' komplet til A_j' for $i \neq j$, idet $A_i' \subseteq A_i$. Analogt er B_i' komplet til B_j' for $i \neq j$.
Men så danner

$$\begin{array}{ccc} A_1' & C_1' & B_1' \\ A_2' \cup A_3' & C_2' \cup C_3' & B_2' \cup B_3' \\ A_1'' \cup A_2'' \cup A_3'' \cup \{f_1\} & C_1'' \cup C_2'' \cup C_3'' \cup \{f_2, \dots, f_{n-1}\} & B_1'' \cup B_2'' \cup B_3'' \cup \{f_n\} \end{array}$$

en hyperprisme J med $|V(J)| > |V(H)|$, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af $V(H)$. Dette viser påstand 2, når n er ulige, og dermed er påstand 2 vist.

Antag, at F er en komponent i $V(G) - V(H)$, da følger af påstand 2, at mængden af vedhæftninger for F er lokal. Resten af beviset deles op i tilfælde, hvor vedhæftningerne for F tilhører enten A, B, S_1, S_2 eller S_3.
Antag, at vedhæftningerne for F alle tilhører A. Her er $V(G) - A$ ikke sammenhængende, da $B \cup C$ ikke har naboer i $V(G) - V(H)$, og A er ikke antisammenhængende, hvormed $\{V(G) - A, A\}$ er en skæv opdeling af G. Det skal vises, at G har en balanceret skæv opdeling. For at vise, at G har en balanceret skæv opdeling, vælges $b_2 \in B_2$ og $a_3 \in A_3$. Her er $B_1 \cup C_1 \cup \{b_2\}$ sammenhængende, alle punkter tilhørende A_1 har naboer deri, og desuden er a_3 komplet til A_1, samt antikomplet til $B_1 \cup C_1 \cup \{b_2\}$. Dermed er antagelserne i lemma 2.13 opfyldte, og derfor må $\{B_1 \cup C_1 \cup \{b_2\}, A_1\}$ være et balanceret par. Da $B_1 \cup C_1 \cup \{b_2\}$ er sammenhængende, hvert punkt tilhørende A_1 har en nabo i $B_1 \cup C_1 \cup \{b_2\}$, og $B_1 \cup C_1 \cup \{b_2\}$ er antikomplet til F, idet vedhæftningerne for F alle tilhører A, er $\{F, A_1\}$ ifølge lemma 2.15(i) et balanceret par. Idet der ikke findes kanter mellem F og $(V(G) - V(H)) \cup B \cup C$, $A_2 \cup A_3$ er komplet til A_1, og $\{F, A_1\}$ er et balanceret par, gælder ifølge lemma 3.10, at G har en balanceret skæv opdeling. Det kan altså antages, at der ikke findes en sådan komponent F. Beviset er analogt i det tilfælde, hvor vedhæftningerne for F alle tilhører B.

Fra påstand 2 og ovenstående afsnit følger det, at for enhver komponent i $V(G) - V(H)$ er alle komponentens vedhæftninger tilhørende H en delmængde af en af S_1, S_2 eller S_3. Lad X_1 være foreningen af S_1 og alle komponenter i $V(G) - V(H)$, hvis mængde af vedhæftninger er en delmængde af S_1, og lad $Y = V(G) - X_1$. Så er $|Y| \geq 4$, da $A_2 \cup A_3 \cup B_2 \cup B_3 \subseteq Y$ indeholder mindst fire punkter. Hermed er enten $\{X_1, Y\}$ et 2-vedhæng i G, hvor $A_1 \subset X_1$ er komplet til $A_2 \cup A_3 \subset Y$,

$B_1 \subset X_1$ er komplet til $B_2 \cup B_3 \subset Y$, der ikke findes andre kanter mellem X_1 og Y, X_1 og Y er begge sammenhængende, hvis $|A_1| = |B_1| = 1$, og $\langle X_1 \rangle$ er en 2-vej, så har den længde mindst fire, $|A_2 \cup A_3| > 1$ og $|B_2 \cup B_3| > 1$, hvormed sætningens punkt (ii) er opfyldt, eller $|X_1| = 3$, og både A_1 og B_1 indeholder ét punkt, og X_1 er punktmængden af en 2-vej med endepunkter i disse to punkter. Det kan antages, at $|X_1| = 3$, både A_1 og B_1 indeholder ét element, og X_1 er punktmængden af en 2-vej med endepunkter i disse to punkter, for ellers er sætningen opfyldt. Det vil sige, at C_1 ligeledes indeholder et enkelt punkt. Hvis S_2 eller S_3 indeholder vedhæftninger, så gentag med den S_i, hvor $i \in \{2, 3\}$, i stedet for S_1, og tilsvarende opnåes, at der findes et 2-vedhæng eller A_i, C_i og B_i indeholder hver ét element, og der findes en 2-vej mellem A_i og B_i af længde to. Idet $|X_i| = 3$ for $i = 1, 2, 3$ og $|V(S_i)| = 3$ for $i = 1, 2, 3$ kan der ikke findes en komponent i $V(G) - V(H)$, så $|V(G)| = 9$, og G er en lige prisme, hvormed (i) er opfyldt. Det er altså vist, at (i), (ii) eller (iii) altid er opfyldt. $\square$

Det er i dette kapitel vist, at grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en lige prisme, ikke kan være minimale modeksempler, hvormed hovedresultat (v) fra kapitel 1 er vist.

Hermed er første del af processen i at vise, at Berge grafer indeholdende aflange prismer ikke kan være minimale modeksempler, gennemført. Det skal nu vises, at et minimalt modeksempel heller ikke kan indeholde aflange ulige prismer, hvilket gøres i næste kapitel.

Kapitel 12

Aflange ulige prismer

For at vise at grafer, som ikke indeholder en optræden af K_4, men indeholder en aflang ulige prisme, ikke kan være minimale modeksempler, skal begrebet strenge igen betragtes. Disse benyttes til at udelukke såkaldte afbrydere fra minimale modeksempler. Ved hjælp af strenge og afbrydere bliver det så muligt at vise, at grafer indeholdende aflange ulige prismer, men ikke en optræden af K_4, ikke kan være minimale modeksempler. I dette kapitel indføres den tredje og sidste type dekomposition i afsnit 12.2, nemlig 6-vedhæng.

12.1 Trin-sammenhængende strenge

I dette afsnit betragtes begrebet strenge igen, og disse opdeles i trin. Resultater om disse kan benyttes til at udelukke afbrydere fra minimale modeksempler.

Definition 12.1 (Trin)
Lad G være en graf, og lad $S = (A, C, B)$ være en streng i G. Da defineres et trin til at være et par af S-stier a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, der opfylder følgende:

(*i*) $V(P_1) \cap V(P_2) = \emptyset$.

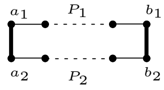
(*ii*) *a_1 og a_2 er naboer, b_1 og b_2 er naboer, og der findes ikke andre kanter mellem $V(P_1)$ og $V(P_2)$.*

$\diamond$

Se figur 12.1 for illustration af et trin.

Definition 12.2 (Trindelt)
Lad G være en graf, lad $S = (A, C, B)$ være en streng i G, og lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin. Da defineres kanterne a_1a_2 og b_1b_2 til at være trindelte kanter. $\diamond$

På figur 12.1 ses de trindelte kanter a_1a_2 og b_1b_2.



Figur 12.1: Eksempel på et trin, hvor de fede kanter er de trindelte kanter.

Definition 12.3 (Trin-sammenhængende)
Lad G være en graf, og lad $S = (A, C, B)$ være en streng i G. Da siges S at være trin-sammenhængende, hvis følgende er opfyldte:

(i) *Hvert punkt i $A \cup C \cup B$ tilhører et trin.*

(ii) *For enhver opdeling $\{X, Y\}$ af A eller B i to ikke-tomme mængder X og Y findes et trin P_1 og P_2, så P_1 har et endepunkt i X, og P_2 har et endepunkt tilhørende Y.*

$\diamond$

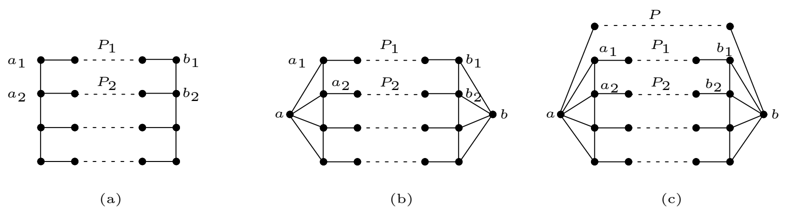
Bemærk, at betingelse (ii) i definition 12.3 er ækvivalent til at kræve, at delgrafen af G med punktmængde A og kantmængde værende de trindelte kanter indenfor A er sammenhængende, og at delgrafen af G med punktmængde B og kantmængde værende de trindelte kanter indenfor B er sammenhængende. På figur 12.2(a) ses et eksempel på en trin-sammenhængende graf. Bemærk desuden, at der godt kan findes kanter mellem eksempelvis a_1 og a_3 samt mellem a_1 og b_3.

Definition 12.4 (Venstrestjerne og højrestjerne)
Lad G være en Berge graf, og lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng. Da siges et punkt $a \in V(G) - (A \cup B \cup C)$ at være en venstrestjerne for strengen S, hvis a er komplet til A og antikomplet til $B \cup C$, og $b \in V(G) - \{A \cup B \cup C\}$ siges at være en højrestjerne for strengen S, hvis b er komplet til B og antikomplet til $A \cup C$. $\diamond$

Se figur 12.2(b) for eksempel på en venstrestjerne og en højrestjerne.

Definition 12.5 (Gelænder)
Lad G være en Berge graf, lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng, lad a være en venstrestjerne, og lad b være en højrestjerne. Da siges en 2-vej a, P, b tilhørende $G - (A \cup C \cup B)$ at være et gelænder med hensyn til S, hvis der ikke findes kanter mellem det indre af P og $V(S)$.
$\diamond$

Bemærk, at der er forskel mellem a, P, b og b, P, a, idet det endepunkt, der er en venstrestjerne, skrives først, når et gelænder med hensyn til en streng beskrives. Det er muligt, at et gelænder har længde én. På figur 12.2(c) ses et eksempel på et gelænder.



Figur 12.2: (a) Eksempel på en trin-sammenhængende streng. (b) Eksempel på en venstrestjerne a og en højrestjerne b. (c) Eksempel på et gelænder a, P, b.

Lemma 12.6
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder med hensyn til S. Antag, at $v \in V(G) - V(S)$ har en nabo i $A \cup C$ og ikke har en nabo i B. Antag yderligere, at P er en 2-vej i $G - (V(S) \cup \{a_0\})$ med endepunkter v og b_0, og der ikke findes kanter mellem det indre af P og $V(S)$. Da er v en venstrestjerne. $\diamond$

Lemma 12.7
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder med hensyn til S. Lad $v \in V(G) - V(S)$ have en nabo i $V(S)$ og være ikke-nabo til b_0. Lad P være en 2-vej i $G - (V(S) \cup \{a_0\})$ med endepunkter v og b_0, og lad Q være en 2-vej tilhørende $G - (V(S) \cup \{b_0\})$ med endepunkter v og a_0, så der ikke findes kanter mellem det indre af P forenet med det indre af Q og $V(S)$. Da er v enten komplet til B, eller v er en venstrestjerne. ◇

Lemma 12.8
Lad G være en Berge graf, der ikke indeholder en lige prisme, lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder med hensyn til S. Da har enhver sti tilhørende S ulige længde. ◇

Lemma 12.9
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en optræden af K_4 i G, og G ikke indeholder en lige prisme, og lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G. Lad $F \subseteq V(G) - (A \cup C \cup B)$ være sammenhængende, så der ikke findes kanter mellem F og $A \cup C \cup B$.
Da findes ingen antisammenhængende mængde $Q \subseteq V(G) - (A \cup C \cup B \cup F)$, så følgende er opfyldte:

(i) *En højrestjerne har en nabo tilhørende F og en ikke-nabo tilhørende Q.*

(ii) *Et punkt $v \in B$ har en ikke-nabo tilhørende Q.*

(iii) *En venstrestjerne med en nabo tilhørende F er komplet til Q.*

(iv) *Ethvert punkt tilhørende Q har en nabo tilhørende F.*

(v) *Ethvert punkt tilhørende Q har en nabo tilhørende $A \cup C \cup B$.*

(vi) *Intet punkt tilhørende Q er en venstrestjerne.*

◇

Bevis
Antag, at der findes en antisammenhængende mængde $Q \subseteq V(G) - (A \cup C \cup B \cup F)$, der opfylder punkt (i)-(vi) i lemmaet.
Lad a_0 opfylde (iii). Dermed er a_0 en venstrestjerne, der har en nabo tilhørende F, og a_0 er komplet til Q. Lad b_0 opfylde (i). Det vil sige, at b_0 er en højrestjerne, der har en nabo tilhørende F samt en ikke-nabo tilhørende Q. Lad P_0 være en 2-vej med endepunkter a_0 og b_0 og med indre tilhørende F. Dermed er a_0, P_0, b_0 et gelænder med hensyn til S. Ifølge lemma 12.8 har alle stier tilhørende strengen S ulige længde, og dermed har P_0 også ulige længde, da der ellers dannes et hul af ulige længde. Eftersom et punkt v tilhørende B ifølge (ii) har en ikke-nabo tilhørende Q, findes en anti 2-vej $q_1, \dots q_n$ tilhørende Q, så q_1 er ikke-nabo til b_0, og q_n er ikke-nabo til v. Vælg en sådan anti 2-vej med n mindst muligt. Lad B_1 være mængden af q_n's naboer tilhørende B, og lad $B_2 = B - B_1$. Da q_n har en ikke-nabo tilhørende B, er $B_2 \neq \emptyset$. Hvis $B_1 = \emptyset$, så betyder det, at q_n ikke har naboer i B, og da følger det af (v), at q_n har en nabo i $A \cup C$. Desuden er $q_n, \dots, b_0$ en 2-vej med indre tilhørende F, og da følger af lemma 12.6, at q_n er en venstrestjerne, hvilket danner modstrid med (vi), så $B_1 \neq \emptyset$. Vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, hvor $b_1 \in B_1$ og $b_2 \in B_2$. Da P_1 og P_2 sammen danner et trin, og P_0 er et gelænder, danner de tre sammen en prisme K.

Påstand 1: *Længden af anti 2-vejen $q_1, \dots, q_n$ er mindst én.*

At længden af anti 2-vejen $q_1, \dots, q_n$ er mindst én, betyder, at $n \geq 2$. For at vise, at $n \geq 2$ antages, at $n = 1$. Det betyder, at q_1 er nabo til a_0 og b_1, men er ikke-nabo til b_0. Dermed er mængden af naboer til q_1 i K ikke lokal, og mængden af naboer til q_1 mætter ikke K. Hvis q_1 ikke har naboer i P_2, så opnåes en modstrid med korollar 10.9, hvor F i korollar 10.9 svarer til til $\{q_1\}$, og P_3 svarer til P_2, da $|\{q_1\}| = 1$, hvilket betyder, at q_1 har naboer i $P_2 - \{b_2\}$.

Idet q_1 også har en nabo tilhørende F, kan q_1 forbindes til trekanten $\{b_0, b_1, b_2\}$ via 2-vejen med endepunkter q_1 og b_0, hvis indre tilhører F, 2-vejen q_1, b_1 og 2-vejen med endepunkter q_1 og b_2, hvis indre tilhører P_2. Men da vil q_1 ifølge lemma 2.9 være nabo til mindst to af punkterne b_0, b_1 og b_2, hvilket ikke er tilfældet, så en modstrid er opnået. Det betyder, at antagelsen, om at $n = 1$, er forkert, og dermed må $n \geq 2$, og påstand 1 er vist.

Påstand 2: $\{A \cup C \cup B, \{b_0, q_1, \ldots, q_n\}\}$ *er et balanceret par.*

På grund af minimaliteten af n er $b_1 \in B_1$ komplet til $\{b_0, q_1, \ldots, q_n\}$, og idet b_1 ikke har en nabo tilhørende F, er b_1 antikomplet til F, og dermed følger af lemma 2.13, at $\{F, \{b_0, q_1, \ldots, q_n\}\}$ er et balanceret par. Da $\{F, \{b_0, q_1, \ldots, q_n\}\}$ er et balanceret par, kan lemma 2.15 anvendes, da $A \cup C \cup B \subseteq V(G) - (F \cup \{b_0, q_1, \ldots, q_n\})$. Ifølge lemma 2.15($i$) er $\{A \cup C \cup B, \{b_0, q_1, \ldots, q_n\}\}$ et balanceret par, idet F er sammenhængende, ethvert punkt tilhørende $\{b_0, q_1, \ldots, q_n\}$ ifølge (i) og (iv) har en nabo tilhørende F, og F er antikomplet til $A \cup C \cup B$. Dermed er påstand 2 vist.

Idet G ikke indeholder en lige prisme, må P_0, P_1 og P_2 alle have ulige længde. Det haves, at 2-vejen $P : a_0, a_2, P_2, b_2, b_1$ har ulige længde, og endepunkterne a_0 og b_1 er komplette til $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Da G er en Berge graf, $\{q_1, \ldots, q_n\}$ er antisammenhængende, P har ulige længde, og begge P's endepunkter er komplette til $\{q_1, \ldots, q_n\}$, følger af lemma 2.2, at en kant tilhørende P er komplet til $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Dette skyldes, at lemma 2.2(ii) medfører, at der findes en 2-vej mellem to ikke-nabopunkter i $\{q_1, \ldots, q_n\}$, hvis indre tilhører P_2, og lemma 2.2(iii) medfører, at der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i P_2, hvis indre tilhører $\{q_1, \ldots, q_n\}$. I begge tilfælde opnåes ifølge definition 2.12 en modstrid med påstand 2. Dermed må en af antagelserne i lemma 2.2 ikke være opfyldt. Det vil sige, at der findes to nabopunkter u og v tilhørende P, som er komplette til $\{q_1, \ldots, q_n\}$, idet dette er den eneste antagelse, der ikke på forhånd er opfyldt. Da b_2 ikke er nabo til q_n, følger det, at $u, v \in V(P_2 - \{b_2\}) \cup \{a_0\}$. Antag, at hullet $D : a_0, P_0, b_0, b_2, P_2, a_2$ har længde mindst seks. Da vil et af u eller v være ikke-nabo til både b_0 og b_2, lad det være v. Idet $v, b_0, q_1, \ldots, q_n, b_2$ danner et antihul, er n ulige. Da b_1 er nabo til både b_0 og b_2, ikke har andre naboer tilhørende hullet D og er komplet til $\{q_1, \ldots, q_n\}$, opnåes en modstrid med lemma 2.17, da både v og u er komplette til $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Dermed har D længde fire, og a_2 er nabo til b_2 og komplet til $\{q_1, \ldots, q_n\}$, da a_0a_2 er eneste mulighed for uv. Desuden er a_0 nabo til b_0. Det vil sige, at da $b_1, a_2, b_0, q_1, \ldots, q_n, b_2, a_0$ danner et antihul, er n ulige. Dermed er $a_2, b_0, q_1, \ldots, q_n, b_2$ en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i $A \cup C \cup B$, hvis indre tilhører $\{b_0, q_1, \ldots, q_n\}$, hvilket ifølge definition 2.12 er i modstrid med påstand 2. Det vil sige, at antagelsen, om at der findes en antisammenhængende mængde $Q \subseteq V(G) - (A \cup C \cup B \cup F)$, der opfylder punkt ($i$)-($vi$) i lemmaet, er forkert. □

12.1.1 1-afbryder

I dette afsnit præsenteres den første type afbryder, nemlig 1-abryder. Det vises, at 1-afbrydere ikke kan findes i et minimalt modeksempel.

Definition 12.10 (1-afbryder)
Lad G være en graf. Da siges en mængde (S, F, Q) at være en 1-afbryder, hvis den opfylder følgende:

(i) $S = (A, C, B)$ *er en trin-sammenhængende streng tilhørende* G.

(ii) $F \subseteq V(G) - V(S)$ *er sammenhængende, så der ikke findes kanter mellem* F *og* $V(S)$, *og der findes både en venstrestjerne og en højrestjerne, der begge har naboer tilhørende* F.

(iii) $Q \subseteq V(G) - (V(S) \cup F)$ *er antisammenhængende.*

(iv) *Et punkt tilhørende* A *har en ikke-nabo tilhørende* Q, *og et punkt tilhørende* B *har en ikke-nabo tilhørende* Q.

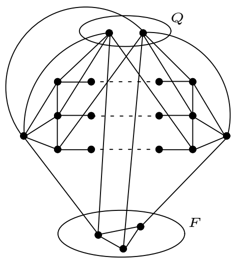
(v) *Ethvert punkt tilhørende Q har en nabo tilhørende F og en nabo tilhørende $A \cup C \cup B$.*

(vi) *Mindst én venstrestjerne, der har naboer tilhørende F, er komplet til Q.*

(vii) *Intet punkt tilhørende Q er en venstrestjerne.*

◇

På figur 12.3 ses et eksempel på en 1-afbryder.



Figur 12.3: Eksempel på en 1-afbryder.

Bemærk, at lemma 12.9(ii)-(vi) altid er opfyldte for en 1-afbryder, så da Q findes per definition 12.10, må lemma 12.9(i) ikke være opfyldt, når grafen indeholder en 1-afbryder.

Sætning 12.11
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en optræden af K_4 i G, og der ikke findes en lige prisme i G. Hvis der findes en 1-afbryder i G, så har G en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Antag, at der i G findes en 1-afbryder (S, F, Q), og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Fasthold G samt S, og vælg F samt Q, så $|F| + |Q|$ er størst mulig, så der ikke findes en optræden af K_4 i G, der ikke findes en lige prisme i G, og der findes en 1-afbryder i G. Hvis der i Q findes et punkt, der er en venstrestjerne, så benyttes den omvendte streng af S, hvormed venstrestjerner og højrestjerner ombyttes i G. Dette gøres, da der ifølge definition 12.10(vii) ikke findes et punkt tilhørende Q, der er en venstrestjerne. Lad N være mængden af punkter i G, som ikke tilhører F, men har en nabo i F. Da vil $Q \subseteq N$, idet alle punkter i Q ifølge definition 12.10(v) har en nabo i F. Yderligere vil enhver venstrestjerne eller højrestjerne, der har en nabo i F, tilhøre N. Lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G.

Påstand 1: *Ethvert punkt $v \in N$ har en nabo tilhørende $V(S)$.*

Antag, at $v \in V(G) - F$ har en nabo tilhørende F og ingen nabo tilhørende $V(S)$. Lad $F' = F \cup \{v\}$. Da er F' sammenhængende, idet F er sammenhængende, og v har en nabo i F. Desuden er F' disjunkt fra $V(S)$, idet $F \subseteq V(G) - V(S)$ og $v \notin V(S)$, da v ikke har naboer i $V(S)$. Der findes ingen kanter mellem F' og $V(S)$, idet der ikke findes kanter mellem $V(S)$ og F, og v ikke har naboer i $V(S)$. Desuden er F' disjunkt fra Q, da ethvert punkt i Q har en nabo i $V(S)$. Det vil sige, at v kan tilføjes F, og definition 12.10 er stadig opfyldt. Ved at tilføje et punkt fra $V(G) - F$ til F, ændrer ikke på, at der ikke findes en optræden af K_4 i G, der ikke findes en lige prisme i G, og da v kan tilføjes F, så der stadig findes en 1-afbryder i G, er der opnået en modstrid med maksimaliteten af $|F| + |Q|$. Det vil sige, at antagelsen, om at $v \in V(G) - F$ har en nabo tilhørende F og ingen nabo tilhørende $V(S)$, er forkert, og påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Der findes ikke en højrestjerne i Q, og enhver venstrestjerne og højrestjerne, der har en nabo i F, er komplet til Q.*

Ifølge definition 12.10 har ethvert punkt i Q en nabo i F, så hvis der findes en højrestjerne i Q, da har den en nabo i F. Antag, at der findes en højrestjerne v, som har en nabo i F, og antag, at

højrestjernen tilhører Q eller har en ikke-nabo i Q. Mængden Q opfylder lemma 12.9(ii)-(vi) ifølge definition 12.10(iv)-(vii), så ifølge lemma 12.9(i) findes der ikke højrestjerner med en nabo i F og en ikke-nabo i Q, så højrestjernen v må tilhøre Q. Da Q er en antisammenhængende mængde, vil v have en ikke-nabo i Q. Dette danner en modstrid med lemma 12.9(i), da lemma 12.9(i) ikke må være opfyldt, og v har en nabo i F og en ikke-nabo i Q. Det vil sige, at enhver højrestjerne, der har en nabo i F, er komplet til Q.
Ved at ombytte venstrestjerner og højrestjerner, følger, at enhver venstrestjerne, der har en nabo i F, er komplet til Q, hvilket viser påstand 2.

Eftersom $Q \subseteq N$ er antisammenhængende, er Q indeholdt i en antisammenhængende komponent i N, lad denne komponent være N_1.

Påstand 3: *Der findes en venstrestjerne eller højrestjerne i* N_1.

Lad N_2 være foreningen af alle antikomponenter i $N - N_1$. Antag, at der ikke findes hverken venstrestjerner eller højrestjerner i N_1. Lad $Y = V(G) - (F \cup N)$. Dermed findes der ingen kanter mellem F og Y, da N indeholder alle de punkter, der har en nabo tilhørende F. Det gælder, at $V(S) \subseteq Y$, så dermed er $Y \neq \emptyset$, og da det er antaget, at der findes en venstrestjerne a_0 i N, idet det er antaget, at der findes en 1-afbryder i G, er $N_2 \neq \emptyset$. Det er ligeledes antaget, at der findes en højrestjerne b_0 i N. Da $F \cup Y$ ikke er sammenhængende, og N ikke er anti-sammenhængende, er $\{F \cup Y, N\}$ en skæv opdeling i G. Ethvert punkt i N har per definition en nabo i F, og fra påstand 1 har ethvert punkt i N også en nabo i $V(S)$. Da der findes et gelænder med det ene endepunkt a_0, det andet endepunkt b_0, og med indre tilhørende F, der findes et punkt $v \in N_1$, som har en nabo i $A \cup C \cup B$, der findes en 2-vej med det ene endepunkt v, det andet endepunkt b_0, og med indre i F, så der ikke findes kanter mellem det indre af 2-vejen og $V(S)$, og hvis v ikke har naboer i B, kan lemma 12.6 anvendes til at konkludere, at $v \in N_1$ er en venstrestjerne. Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at N_1 ikke indeholder hverken venstrestjerner eller højrestjerner, så $v \in N_1$ må have en nabo i B. Dermed har ethvert punkt i N_1 en nabo i B.
Da enhver venstrestjerne er komplet til N_1, idet det er antaget, at antikomponenten N_1 ikke indeholder venstrestjerner, og antikomplet til $B \cup C$, er $\{B \cup C, N_1\}$ ifølge lemma 2.13 et balanceret par. Da det haves, at $F \subseteq V(G) - V(S)$, $B \cup C$ er sammenhængende, idet ethvert punkt i $B \cup C$ tilhører et trin, og strengen er trin-sammenhængende, ethvert punkt i N_1 har en nabo i $B \cup C$, og $B \cup C$ er antikomplet til F, følger det af lemma 2.15(i), at $\{F, N_1\}$ er et balanceret par. Da der findes en opdeling af $V(G)$ i fire ikke-tomme mængder N_2, N_1, F og Y, hvor der ikke findes kanter mellem F og Y, og hvor N_2 er komplet til N_1, da N_1 er en antisammenhængende komponent i N, samt $\{F, N_1\}$ er et balanceret par, så følger af lemma 3.10, at G har en balanceret skæv opdeling. Dette giver dog en modstrid med antagelsen om, at G ikke har en balanceret skæv opdeling, og dermed er påstand 3 vist.

Fra påstand 3 følger det, at $N_1 \neq Q$, da der ifølge definition 12.10(vii) og påstand 2 ikke findes en venstrestjerne eller højrestjerne i Q. Dermed findes et punkt $v \in N_1 - Q$, som har en ikke-nabo i Q. Da v har en ikke-nabo i Q, og Q er antisammenhængende, kan v tilføjes Q, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af $|F| + |Q|$, og dermed må v ikke kunne tilføjes Q, og $(S, F, Q \cup \{v\})$ er ikke en 1-afbryder. Det vil sige, at $(S, F, Q \cup \{v\})$ ikke kan opfylde alle af punkterne (i)-(vii) i definition 12.10. Ifølge påstand 1 har v en nabo i $V(S)$. Desuden er $v \notin F$, da $v \in N$, og v er ikke en venstrestjerne, idet alle venstrestjerner i N er komplette til Q ifølge påstand 2. Det følger, at ingen venstrestjerne i N er komplet til $Q \cup \{v\}$, da dette er det eneste punkt i definition 12.10, som ikke er vist opfyldt. Da alle venstrestjerner er komplette til Q, følger det, at v er ikke-nabo til alle venstrestjerner i N. På samme måde er v ikke-nabo til alle højrestjerner i N.

Påstand 4: *v er komplet til* $A \cup B$.

Antag, at v ikke er komplet til $A \cup B$. Af symmetri mellem A og B kan v vælges til at have en ikke-nabo i B. Ifølge påstand 1 har v en nabo i $V(S)$, og fra ovenstående haves, at v er ikke-nabo til højrestjernen b_0. Da der findes et gelænder a_0, P_0, b_0 med indre i F, F er sammenhængende, og v har en nabo f i F, er $v, f, \ldots, b_0$ og $v, f, \ldots, a_0$ 2-veje P og Q som i lemma 12.7. Dermed kan lemma 12.7 anvendes, og deraf følger, at v er en venstrestjerne, hvilket er i modstrid med påstand

2, da v ikke er komplet til Q. Hermed er påstand 4 vist.

Vælg en anti 2-vej $v, q_1, \ldots, q_k$ i Q, så q_k har en ikke-nabo i $A \cup B$, og k er valgt mindst muligt. Fra påstand 4 følger det, at $k \geq 1$, da q_k ellers er lig v og dermed er komplet til $A \cup B$. Fra minimaliteten af k er $\{v, q_1, \ldots, q_{k-1}\}$ komplet til $A \cup B$.
Lad A' være mængden af q_k's naboer i A, og lad $A'' = A - A'$. Lad B' være mængden af q_k's naboer i B, og lad $B'' = B - B'$. Da er $A'' \cup B'' \neq \emptyset$, idet q_k har en ikke-nabo i $A \cup B$.

Påstand 5: *k er ulige.*

Det haves, at $A'' \cup B'' \neq \emptyset$. Hvis $A'' \neq \emptyset$, så lad $a'' \in A''$, og lad $b_0 \in N$ være en højrestjerne. Da danner $b_0, v, q_1, \ldots, q_k, a''$ et antihul, hvormed k er ulige. Hvis $B'' \neq \emptyset$, så lad $b'' \in B''$, og lad $a_0 \in N$ være en venstrestjerne. Da danner $a_0, v, q_1, \ldots, q_k, b''$ et antihul, hvormed k er ulige, og påstand 5 er vist.

Påstand 6: *A' er komplet til B'', og A'' er komplet til B'.*

Antag, at $a' \in A'$ samt $b'' \in B''$ er ikke-naboer og lad $b_0 \in N$ være en højrestjerne. Da følger af påstand 5, at $b_0, v, q_1, \ldots, q_k, b'', a'$ danner et antihul af ulige længde. Det vil sige, at A' er komplet til B''.
Antag, at $a'' \in A''$ samt $b' \in B'$ er ikke-naboer og lad $a_0 \in N$ være en venstrestjerne. Da følger af påstand 5, at $a_0, v, q_1, \ldots, q_k, a'', b'$ danner et antihul af ulige længde. Det vil sige, at A'' er komplet til B'. Dette viser påstand 6.

Påstand 7: *$A' \neq \emptyset, B' \neq \emptyset, A'' \neq \emptyset$ og $B'' \neq \emptyset$.*

Antag, at $A'' \neq \emptyset$, hvilket kan gøres, da $A'' \cup B'' \neq \emptyset$. Idet strengen er trin-sammenhængende, har hvert punkt i A en ikke-nabo i B. Det følger da af påstand 6, at $B' \neq B$ og dermed er $B'' \neq \emptyset$, da A'' ifølge påstand 6 er komplet til B' og dermed kun kan have ikke-naboer i B''. Da q_k har en nabo i $V(S)$, følger det af lemma 12.6, hvor q_k, b_0 er den ønskede 2-vej, at q_k har en nabo i B, idet q_k ellers er en venstrestjerne. Det vil sige, at $B' \neq \emptyset$. På grund af symmetri følger på samme måde, at q_k har en nabo i A, altså $A' \neq \emptyset$, hvilket viser påstand 7.

Da S er trin-sammenhængende, findes et trin a', P, b'' og a'', P', b' med $a' \in A'$, $a'' \in A''$, $b' \in B'$ og $b'' \in B''$ på grund af påstand 6. Fra påstand 6 følger endvidere, at P og P' begge har længde en. Lad $a_0 \in N$ være en venstrestjerne, og lad $b_0 \in N$ være en højrestjerne. Da v, a', a_0, b_0, b'' ikke må danne et hul af ulige længde, følger det, at a_0 ikke er nabo til b_0.
For ethvert punkt $u \in V(G) - F$, lad F_u være mængden af punkter i F, der er nabo til u.

Påstand 8: *$F_{a_0} \cap F_{b_0} = \emptyset$, og enhver 2-vej i F med endepunkter i F_{a_0} og F_{b_0} har punkter i både F_v og F_{q_k}.*

Hvis $f \in F_{a_0} \cap F_{b_0}$, da danner f, a_0, a', b'', b_0 et hul af ulige længde, så $F_{a_0} \cap F_{b_0} = \emptyset$.
Lad t_1, T, t_2 være en 2-vej i F med $t_1 \in F_{a_0}$ og $t_2 \in F_{b_0}$, hvor $|V(T)|$ er mindst mulig. Det vil sige, at t_1 er det eneste punkt fra F_{a_0} i T, og t_2 er det eneste punkt fra F_{b_0} i T. Dermed danner $a_0, t_1, T, t_2, b_0, b', a''$ et hul, så T har ulige længde. Hvis T ikke har punkter i F_v, så danner $v, a', a_0, t_1, T, t_2, b_0, b'$ et hul af ulige længde, og hvis T ikke har punkter i F_{q_k}, så danner $q_k, a_0, t_1, T, t_2, b_0$ et hul af ulige længde, hvilket i begge tilfælde ikke kan lade sig gøre, da G er en Berge graf. Dette viser påstand 8.

Påstand 9: *Enhver 2-vej i F med endepunkter i F_v og F_{q_k} har punkter i både F_{a_0} og F_{b_0}.*

Antag, at enhver 2-vej i F med endepunkter i F_v og F_{q_k} ikke har punkter i både F_{a_0} og F_{b_0}. Da F er sammenhængende, og $F_{a_0} \cap F_{b_0} = \emptyset$, findes der en sammenhængende delmængde F' af F, der har punkter i både F_v og F_{q_k}, samt i netop én af F_{a_0} og F_{b_0}. På grund af symmetri kan det antages, at F' har punkter i F_{a_0} og ikke i F_{b_0}. Definér $q_{k+1} = a''$. Da har q_{k+1} ikke en nabo i F', idet $F \subseteq V(G) - V(S)$. Der kan derfor vælges i, hvor $1 \leq i \leq k+1$, mindst muligt, så q_i ikke har en nabo i F'. Bemærk, at v har en nabo i F', da F' har et punkt i F_v.
Hvis i er lige, så danner $b_0, v, q_1, \ldots, q_i$ en anti 2-vej af ulige længde, og anti 2-vejens indre punkter har naboer i F', og det har dens endepunkter ikke, da det er antaget, at F' ikke har naboer i F_{b_0}, og q_i ikke har en nabo i F'. Her er a' komplet til anti 2-vejens indre og har ingen naboer i F'. I

$\overline{G}$ er $b_0, v, q_1, \ldots, q_i$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til F', og hvis indre punkter ikke er komplette til F'. Punktet a' er i $\overline{G}$ komplet til F', men har ingen naboer i det indre af 2-vejen. Dette giver en modstrid med korollar 2.3, så i er ulige.
Hvis i er ulige, så danner $b', a_0, v, q_1, \ldots, q_i$ en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre punkter har naboer i F', og hvis endepunkter ikke har naboer i F'. Igen er a' komplet til det indre af anti 2-vejen, og a' har ingen naboer i F', hvilket som før er i modstrid med korollar 2.3 i komplementet. Dette viser påstand 9.

Lad $f_1, \ldots, f_n$ være en minimal 2-vej i F med endepunkter i F_{a_0} og F_{b_0}, hvor $f_1 \in F_{a_0}$ og $f_n \in F_{b_0}$. Da vil der fra påstand 8 og påstand 9 følge, at $n \geq 2$, og $f_1, \ldots, f_n$ er en minimal 2-vej med endepunkter i F_v og F_{q_k}. Det kan derfor antages, at $f_1 \in F_v$ og $f_n \in F_{q_k}$, og intet andet punkt i 2-vejen tilhører F_v eller F_{q_k}. Da danner $f_1, \ldots, f_n, q_k, a_0$ og $f_1, \ldots, f_n, b_0, b', v$ huller af forskellig paritet. Dette vil sige, at det ene hul har ulige længde, hvilket ikke kan lade sig gøre, da G er en Berge graf. Dermed må antagelsen, om at G ikke har en balanceret skæv opdeling, være forkert. □

Hermed er det vist, at en 1-afbryder ikke kan forekomme i et minimalt modeksempel.

12.1.2 Trapper og 2-afbrydere

I dette afsnit præsenteres den næste type afbrydere, nemlig 2-afbrydere. For at udelukke disse fra minimale modeksempler betragtes først trapper og egenskaber ved disse.

Definition 12.12 (Trappe)
Lad G være en graf, lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder af længde mindst tre med hensyn til S. Da siges parret $K = (S, P_0)$ at være en trappe, hvor punkterne i en trappe er $V(K) = V(P_0) \cup V(S)$. ◇

Fremover vil en trappe også blive betegnet med $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$, hvor $(A, C, B) = S$, og P_0 har endepunkter a_0 og b_0, så a_0 er en venstrestjerne, og b_0 er en højrestjerne, hvormed $K = (S, P_0)$.

Definition 12.13 (Maksimal trappe)
Lad G være en graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges K at være maksimal, hvis der ikke findes en trappe $K' = ((A', C', B'), a_0', P_0', b_0')$, så $A \subsetneq A'$, $B \subsetneq B'$ og $C \subsetneq C'$. ◇

Definition 12.14 (Lokal med hensyn til trappe)
Lad G være en graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges en delmængde $X \subseteq V(K)$ at være lokal med hensyn til K, hvis X er en delmængde af en af $A \cup C \cup B, V(P_0), A \cup \{a_0\}$ eller $B \cup \{b_0\}$. ◇

Definition 12.15 (Trappeunderpunkt)
Lad G være en graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges $v \in V(G) - V(K)$ at være et K-underpunkt, hvis mængden af v's naboer i $V(K)$ er lokal med hensyn til K. ◇

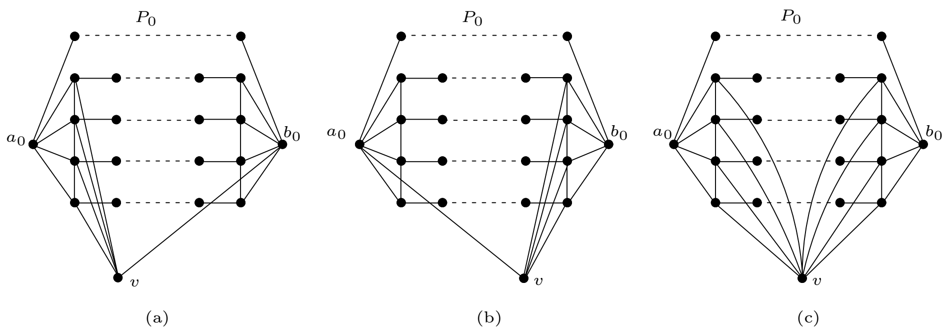
Definition 12.16 (Trappeoverpunkt)
Lad G være en graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges $v \in V(G) - V(K)$ at være et K-overpunkt, hvis v har naboer i både A, B og $V(P_0)$. ◇

Definition 12.17 (Venstrediagonalt og højrediagonalt punkt)
Lad G være en graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges $v \in V(G) - V(K)$ at være et venstrediagonalt punkt, hvis v er komplet til $A \cup \{b_0\}$, mens v siges at være et højrediagonalt punkt, hvis v er komplet til $B \cup \{a_0\}$. ◇

Se figur 12.4(a) og 12.4(b) for et eksempel på et venstrediagonalt punkt og et højrediagonalt punkt.

Definition 12.18 (Centralt punkt)
Lad G være en graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges $v \in V(G) - V(K)$ at være et centralt punkt, hvis v er komplet til $A \cup B$ og hverken er nabo til a_0 eller b_0. ◇

Se figur 12.4(c) for et eksempel på et centralt punkt.



Figur 12.4: (a) Eksempel på et venstrediagonalt punkt v. (b) Eksempel på et højrediagonalt punkt v. (c) Eksempel på et centralt punkt v.

Bemærk, at et venstrediagonalt punkt gerne må have naboer i $B \cup C$, et højrediagonalt punkt gerne må have naboer i $A \cup C$, og et centralt punkt gerne må have naboer i C.

Lemma 12.19
Lad G være en Berge graf, så der hverken findes en optræden af K_4, en lige prisme eller en 1-afbryder i G. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en maksimal trappe i G, og lad $v \in V(G) - V(K)$. Da vil netop et af følgende gælde:

- *(i) v er et K-underpunkt.*
- *(ii) v er et K-overpunkt, og da er v enten et venstrediagonalt, et højrediagonalt eller et centralt punkt.*
- *(iii) v er en venstrestjerne, der har en nabo i $P_0 - \{a_0\}$, eller v er en højrestjerne, der har en nabo i $P_0 - \{b_0\}$.*

◇

Bevis
Lemmaet vises ved hjælp af fire påstande.

Påstand 1: *Hvis v er et venstrediagonalt eller et højrediagonalt punkt, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at v for eksempel er et højrediagonalt punkt. Hvis v ikke har naboer i $A \cup C$, er v en højrestjerne med en nabo a_0 i $P_0 - \{b_0\}$, og *(iii)* er opfyldt. Det kan derfor antages, at der findes et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så v har en nabo i $P_1 - \{b_1\}$. Dermed kan v forbindes til trekanten $\{a_0, a_1, a_2\}$ via kanten va_0, 2-vejen med første endepunkt v, andet endepunkt a_1 og med indre tilhørende $P_1 - \{b_1\}$ og 2-vejen med første endepunkt v, andet endepunkt a_2, og med indre tilhørende P_2. Da v kan forbindes til trekanten $\{a_0, a_1, a_2\}$, skal v ifølge lemma 2.9 have mindst to naboer i trekanten. Dermed har v naboer i både A, B og $V(P_0)$ og er derfor et K-overpunkt. Heraf følger, at *(ii)* er opfyldt, da v både er et K-overpunkt og et højrediagonalt punkt.
Beviset, når v er et venstrediagonalt punkt, er på grund af symmetri analogt, og hermed er påstand 1 vist.

Påstand 2: *Hvis v er nabo til både a_0 og b_0, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at v er nabo til både a_0 og b_0 og ikke har naboer i $A \cup C \cup B$. Da vil mængden af naboer til v i K være lokal, idet de er indeholdt i $V(P_0)$, og (i) vil være opfyldt. Det kan derfor antages, at v har en nabo i $A \cup C \cup B$. Hvis v kun har naboer i A, vil v være komplet til A, for ellers dannes der huller af ulige længde. Men så er v en venstrestjerne, der har naboer i $P_0 - \{a_0\}$, og (iii) er opfyldt. Hvis v kun har naboer i B, vil v ligeledes være komplet til B, og (iii) er opfyldt, idet v er en højrestjerne, som er nabo til a_0. Derfor kan det antages, at v har naboer i to af mængderne A, B og C. Desuden må v have en nabo i det indre af P_0, da P_0 har ulige længde mindst tre, og v er nabo til P_0's endepunkter, for ellers haves der et hul af ulige længde.
Det haves, at G er en Berge graf, så der ikke findes en optræden af K_4 i G, (A, C, B) er en trin-sammenhængende streng i G, a_0, P_0, b_0 er et gelænder med hensyn til S, og $v \in V(G) - (A \cup C \cup B \cup V(P_0))$ har en nabo i $A \cup C$. Desuden er v, b_0 en 2-vej i $V(G) - (A \cup C \cup B \cup \{a_0\})$, hvor der ikke findes kanter mellem det indre af 2-vejen og $A \cup C \cup B$, og dermed hvis v ikke har en nabo i B, så er v ifølge lemma 12.6 en venstrestjerne. Heraf følger, at (iii) er opfyldt. Det kan derfor antages, at v har naboer i B. Dermed har v naboer i både A, B og $V(P_0)$, og er dermed et K-overpunkt. Idet der ikke findes en 1-afbryder i G, udgør (A, C, B) sammen med det indre af $V(P_0)$ og v ikke en 1-afbryder, så definition 12.10 kan ikke være opfyldt. Da punkterne (i)-(iii) samt (v)-(vi) i definition 12.10 er opfyldte, kan definition 12.10(iv) ikke være opfyldt. Det vil sige, at v har enten ingen ikke-naboer i A eller har ingen ikke-naboer i B. Altså er v enten komplet til A eller komplet til B. Dermed vil v være enten et venstrediagonalt eller et højrediagonalt punkt, og ifølge påstand 1 er lemmaet opfyldt, og dermed er påstand 2 vist.

Påstand 3: *Hvis v er nabo til a_0 og ikke-nabo til b_0, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at v har en nabo i $A \cup C \cup B$. Hvis v har en nabo i det indre af P_0, så haves en 2-vej P i $V(G) - (A \cup C \cup B \cup \{a_0\})$ med første endepunkt v, andet endepunkt b_0 og med indre tilhørende P_0, og der haves en 2-vej $Q : v, a_0$ i $V(G) - (A \cup C \cup B \cup \{b_0\})$, hvor der ikke findes kanter mellem det indre af P forenet med det indre af Q og $A \cup C \cup B$. Dermed gælder ifølge lemma 12.7, at v enten er komplet til B eller er en venstrestjerne. Hvis v er komplet til B, er v et højrediagonalt punkt, og da vil lemmaet ifølge påstand 1 være opfyldt. Hvis v er en venstrestjerne, så er (iii) opfyldt.
Det kan derfor antages, at v ikke har en nabo i det indre af P_0. Desuden kan det antages, at v har en nabo i $B \cup C$, da v ellers vil være et K-underpunkt, og (i) ville være opfyldt.
Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin, så v har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og v ikke er nabo til b_2, hvis det er muligt. Lad P_1 i korollar 10.9 svare til P_0, lad P_2 svare til P_1, lad P_3 svare til P_2, og lad F svare til $\{v\}$. Her har $\{v\}$ vedhæftninger i både $V(P_0)$ og $V(P_1)$. Idet konklusionerne i korollar 10.9 ikke er opfyldte, må $\{v\}$ have en vedhæftning i $V(P_2)$. Altså har v en nabo i P_2. Hvis a_2 er den eneste nabo til v i P_2, da er $S' = (A \cup \{v\}, C, B)$ en trin-sammenhængende streng, idet v, P_1', b_1 og a_2, P_2, b_2 danner et trin i S', hvor P_1' er 2-vejen med indre tilhørende $P_1 - \{a_1\}$. Dette er dog i modstrid med, at K er maksimal. Dermed har v en nabo i $P_2 - \{a_2\}$, og heraf følger, at v kan forbindes til trekanten $\{b_0, b_1, b_2\}$ via 2-vejen v, a_0, P_0, b_0, 2-vejen med første endepunkt v, andet endepunkt b_1 og med indre tilhørende $P_1 - \{a_1\}$ og 2-vejen med første endepunkt v, andet endepunkt b_2 og med indre tilhørende $P_2 - \{a_2\}$. Hermed følger af lemma 2.9, at v er nabo til både b_1 og b_2. På grund af valget af trin P_1 og P_2, samt at (A, C, B) er trin-sammenhængende, følger det, at v er komplet til B. Da v er nabo til a_0 og ikke-nabo til b_0, er v dermed et højrediagonalt punkt, og dermed er lemmaet ifølge påstand 1 opfyldt, hvormed påstand 3 er vist.

Påstand 4: *Hvis v ikke er nabo til hverken a_0 eller b_0, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at v har en nabo i både det indre af P_0 og i $A \cup C \cup B$, for ellers er v et K-underpunkt, og (i) er opfyldt. Hvis v er en venstrestjerne, så er (iii) opfyldt, og det kan derfor antages, at v ikke er en venstrestjerne. Da v har en nabo i det indre af P_0, findes der en 2-vej P i $G - (A \cup C \cup B \cup \{a_0\})$ med endepunkter v samt b_0, og der findes en 2-vej Q i $G - (A \cup C \cup B \cup \{b_0\})$ med endepunkter v samt a_0. Da det indre af P og det indre af Q tilhører det indre af P_0, er antagelserne i lemma 12.7 opfyldte. Idet v ikke er en venstrestjerne, følger det, at v er komplet til B. På grund af symmetri fåes på samme måde, at v er komplet til A, og v er dermed et centralt punkt, hvormed (ii) er opfyldt, og påstand 4 er vist.

Påstand 2, påstand 3 og påstand 4 dækker alle tilfælde op til symmetri. □

Lemma 12.20
Lad G være en Berge graf, så der hverken findes en optræden af K_4, en lige prisme eller en 1-afbryder i G. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en maksimal trappe i G, og lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så mængden af vedhæftninger for F i $V(K)$ ikke er lokal med hensyn til K. Da vil F indeholde et af følgende:

(i) *Et K-overpunkt.*

(ii) *Et gelænder u, P, v, så der ikke findes kanter mellem $V(P)$ og $V(P_0)$.*

(iii) *Op til symmetri, en 2-vej u, P, v, hvor u er en venstrestjerne, v har en nabo i $P_0 - \{a_0\}$, og der ikke findes kanter mellem $V(P - \{u\})$ og $A \cup C \cup B$.*

◇

Lemma 12.21
Lad G være en Berge graf, så der hverken findes en optræden af K_4, en lige prisme eller en 1-afbryder i G. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en maksimal trappe i G, og lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være en sammenhængende mængde. Antag, at F indeholder en venstrestjerne og har en vedhæftning i $B \cup C$. Da indeholder F enten et K-overpunkt eller et gelænder med hensyn til (A, C, B). ◇

Definition 12.22 (Stærk-maksimal trappe)
Lad G være en Berge graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. Da siges K at være stærk-maksimal, hvis K er maksimal, og hvis enten $C \neq \emptyset$, eller der ikke findes en trappe $K' = ((A', C', B'), a', P', b')$ i $\overline{G}$, hvor $A \cup C \cup B \subset A' \cup C' \cup B'$. ◇

Definition 12.23 (2-afbryder)
Lad G være en Berge graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. En 2-afbryder i G er et par $\{K, Q\}$, der opfylder følgende:

(i) *K er en stærk-maksimal trappe i G.*

(ii) *$Q \subseteq V(G) - V(K)$ er en antisammenhængende mængde.*

(iii) *Der findes et punkt i A, som er komplet til Q, og der findes et punkt i B, der er komplet til Q.*

(iv) *Punkterne a_0 og b_0 er ikke komplette til Q.*

(v) *Der findes et punkt i $V(P_0)$, som er komplet til Q.*

◇

Bemærk, at hvis q er et centralt punkt for en stærk-maksimal trappe K i G, så er $\{K, \{q\}\}$ en 2-afbryder i G.

Sætning 12.24
Lad G være en Berge graf, som ikke indeholder hverken en optræden af K_4, en lige prisme eller en 1-afbryder. Hvis der i G findes en 2-afbryder, da har G en balanceret skæv opdeling. ◇

Bevis
Lad $\{K, Q\}$ være en 2-afbryder i G, så mængden Q for et fast K er en maksimal antisammenhængende mængde i $V(G) - V(K)$, som opfylder definition 12.23 (ii)-(v). Lad a_0, T, t og u, U, b_0 være to delgrafer af P_0, så t er det eneste punkt fra T, der er komplet til Q, og u er det eneste punkt fra U, der er komplet til Q. Det vil sige, at U og T begge er 2-veje af længde mindst en, da a_0 og b_0 ifølge definition 12.23(iv) ikke er komplette til Q. Bemærk, at der for ethvert trin bestående af a_i, P_i, b_i og a_j, P_j, b_j ifølge lemma 12.8 vil gælde, at P_i og P_j har ulige længde.

Påstand 1: *Både T og U har ulige længde, og $t \neq u$.*

Vælg et punkt $a \in A$ og et punkt $b \in B$, så a og b er komplette til Q. Da er a, a_0, T, t en 2-vej af længde mindst to, idet a_0, P_0, b_0 er et gelænder med hensyn til (A, C, B), og T har længde mindst en. Desuden er endepunkterne på denne 2-vej komplette til Q, dens indre punkter er ikke komplette til Q, og punktet b har ingen naboer i det indre af 2-vejen. Hvis korollar 2.3 betragtes, ses det, at konklusionen ikke er opfyldt på grund af b. Altså kan det ikke om a, a_0, T, t antages, at den har ulige længde, og den har derfor lige længde. Heraf følger, at a_0, T, t har ulige længde. Analogt har 2-vejen b, b_0, U, u lige længde, og dermed har b_0, U, u ulige længde. Da a_0, P_0, b_0 har ulige længde, følger det, at $t \neq u$. Dette viser påstand 1.

Påstand 2: *Ethvert punkt i $A \cup B$ er komplet til Q.*

Antag, at der findes et punkt $a_2 \in A$, som ikke er komplet til Q. Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin i G, hvor a_1 er komplet til Q, og a_2 ikke er komplet til Q. Da $u \neq t$, følger det, at u ikke er nabo til hverken a_0 eller a_1. Dette betyder ifølge lemma 2.11, at enten kan Q ikke forbindes til trekanten $\{a_0, a_1, a_2\}$, eller så findes der et punkt $p \in P_1$, som er komplet til Q, da ingen af konklusionerne i lemma 2.11 er opfyldte. Hvis der findes et punkt $p \in P_1$, som er komplet til Q, så vælg p tættest på a_1, og 2-vejen $a_1, \ldots, p$ vil have længde mindst en, da a_1 ikke er komplet til Q. Heraf fåes fra lemma 2.11, at Q ikke kan forbindes til trekanten $\{a_0, a_1, a_2\}$. Altså må et af punkterne i definition 2.10 ikke være opfyldt. Punkterne (i)-(iii) er opfyldte, og 2-vejene $a_0, \ldots, t$ og a_1 indeholder begge et punkt, der er komplet til Q. Altså indeholder 2-vejen P_2 ikke et punkt, der er komplet til Q.
Antag, at t og u ikke er naboer. Dermed vil 2-vejen $t, \ldots, u$ have ulige længde mindst tre, idet T, U og P_0 alle har ulige længde, og a_2 har ingen nabo i det indre af $t, \ldots, u$, for ellers dannes et hul af ulige længde. Ifølge korollar 2.3 vil der findes et punkt v i det indre af $t, \ldots, u$, som er komplet til Q, da korollarets konklusion ikke er opfyldt. Men så er $t, T, a_0, a_1, P_1, b_1, b_0, U, u$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til Q, og hvor v ikke har en nabo i det indre af denne 2-vej. Dette er i modstrid med korollar 2.3, så t og u må være naboer.
Der haves nu et hul $a_0, P_0, b_0, b_2, P_2, a_2$ af længde mindst seks, og de eneste punkter fra dette hul, som er komplette til Q, er de to naboer t og u. Ifølge lemma 2.6 indeholder Q en hat eller et afhop for hullet ved tu. I begge tilfælde indeholder Q et punkt q, som ikke er nabo til punkter i P_2. Der kan dannes en ulige prisme med trekanter $\{a_0, a_1, a_2\}$ og $\{b_0, b_1, b_2\}$ og 2-veje P_0, P_1 og P_2, og her er q nabo til t og a_2. Sæt $F = \{q\}$, og dermed er antagelserne i korollar 10.9 opfyldte, men der opnåes en modstrid med korollarets konklusion, da $|F| = 1$. Det vil sige, at antagelsen, om at der findes et punkt i A, som ikke er komplet til Q, må være forkert. Altså er ethvert punkt i A komplet til Q. Analogt kan det vises, at ethvert punkt i B er komplet til Q, hvormed påstand 2 er vist.

Påstand 3: *Ethvert K-overpunkt vil enten tilhøre Q eller være komplet til Q.*

Lad $v \notin Q$ være et K-overpunkt, der ikke er komplet til Q. Altså findes der et punkt i Q, som ikke er nabo til v. Dermed er mængden $Q' = Q \cup \{v\}$ en antisammenhængende mængde. Ifølge lemma 12.19 er v enten et venstrediagonalt, et højrediagonalt eller et centralt punkt. I alle tre tilfælde har v en nabo $a_1 \in A$ og en nabo $b_1 \in B$, som indbyrdes ikke er naboer. Hermed haves en 2-vej a_1, a_0, P_0, b_0, b_1 af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til Q'. Hvis et indre punkt fra 2-vejen a_1, a_0, P_0, b_0, b_1 er komplet til Q', så haves en modstrid med maksimaliteten af Q, idet $\{K, Q'\}$ da er en 2-afbryder, så derfor er ingen indre punkter komplette til Q'. Ifølge lemma 2.2 indeholder Q' et afhop q_1', q_2' for a_1, a_0, P_0, b_0, b_1. Hermed er hverken q_1' eller q_2' nabo til punkter i det indre af P_0, men dette er i modstrid med, at t er komplet til Q, da mindst et af punkterne q'_1 eller q'_2 vil tilhøre Q, idet $Q' = Q \cup \{v\}$. Dette viser påstand 3.

Påstand 4: *Der findes ikke en kant $vw \in E(G - (A \cup C \cup B))$, så v er en venstrestjerne, w er en højrestjerne, og v samt w begge ikke er komplette til Q.*

Lad $wv \in E(G - (A \cup C \cup B))$, så v er en venstrestjerne, w er en højrestjerne, og hverken v eller w er komplette til Q. Da v er komplet til A, og w er komplet til B, kan hverken v eller w tilhøre det indre af P_0. Da v og w ikke er komplette til Q, har de begge ikke-naboer i Q. Da Q er antisammenhængende, findes der en anti 2-vej $v, q_1, \ldots, q_k, w$, hvor $q_1, \ldots, q_k \in Q$. Vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2. Da er a_1, b_1, a_2 og b_2 ifølge påstand 2 alle komplette til Q og der kan nu dannes et antihul $a_1, b_2, v, q_1, \ldots, q_k, w$, så k er lige. Ethvert punkt z, som er komplet til Q, vil være nabo til enten v eller w, for ellers dannes et antihul $z, v, q_1, \ldots, q_k, w$ af ulige længde. Da både v og w er antikomplette til C, findes der ingen punkter i C, som er komplette til Q. Hermed er a_1, P_1, b_1 en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til Q, og hvis indre punkter ikke er komplette til Q. Da punktet a_2 er komplet til Q og ikke har naboer i det indre af P_1, følger det af korollar 2.3, at P_1 må have længde en, for at korollarets konklusion kan være opfyldt. Ligeledes vil P_2 have længde en. Da trinet er vilkårligt valgt, følger det, at $C = \emptyset$.
Antag, at v ikke har en nabo i det indre af P_0. Dermed må ethvert punkt fra det indre af P_0, som er komplet til Q, være nabo til w. Dermed er w nabo til t samt u, og da w er en højrestjerne, vil $w \notin P_0$. Hermed er t, T, a_0, a_1, b_1 en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til $Q \cup \{w\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $Q \cup \{w\}$. Punktet u er komplet til $Q \cup \{w\}$, men har ingen naboer i det indre af t, T, a_0, a_1, b_1, hvilket er i modstrid med korollar 2.3. Altså må v have en nabo i det indre af P_0. Det kan analogt vises, at w har en nabo i det indre af P_0.
Hermed er $b_1, v, q_1, \ldots, q_k, w, a_1$ en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre punkter alle har en nabo i det indre af P_0, da v og w begge har en nabo i det indre af P_0, og da t samt u er komplette til Q. Desuden har 2-vejens endepunkter b_1 og a_1 ingen naboer i det indre af P_0. Hvis $b_1, v, q_1, \ldots, q_k, w, a_1$ betragtes i $\overline{G}$, haves en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til det indre af P_0, og hvis indre punkter ikke er komplette til det indre af P_0. Ifølge lemma 2.2 indeholder det indre af P_0 et afhop x, y for $b_1, v, q_1, \ldots, q_k, w, a_1$, hvilket medfører, at der i $\overline{G}$ kun findes kanterne $xb_1, xv, xa_1, yb_1, yw, ya_1$ mellem $b_1, v, q_1, \ldots, q_k, w, a$ og det indre af P_0. Det vil sige, at der i G findes to nabopunkter x og y i det indre af P_0, som er komplette til $q_1, \ldots, q_k$.
Lad $A' = A \cup \{x\}$ og $B' = B \cup \{y\}$, så er $(A', \emptyset, B')$ en streng i $\overline{G}$. For enhver kant a_1b_1 i G, hvor $a_1 \in A$ og $b_1 \in B$, vil x, b_1 og a_1, y være et trin i $\overline{G}$ for $(A', \emptyset, B')$, idet x og a_1 ikke er naboer i G, y og b_1 ikke er naboer i G, $x \in A'$ og $b_1 \in B'$ ikke er naboer i $\overline{G}$, samt $a_1 \in A'$ og $y \in B'$ ikke er naboer i $\overline{G}$. Altså er strengen $(A', \emptyset, B')$ trin-sammenhængende. Hermed vil $K' = ((A', \emptyset, B'), w, q_k, \ldots, q_1, v)$ være en trappe i $\overline{G}$, hvilket er i modstrid med, at K er en stærk-maksimal trappe i G. Altså må antagelsen, om at der findes en kant $vw \in E(G - A \cup C \cup B)$, så v er en venstrestjerne, w er en højrestjerne, og v samt w begge ikke er komplette til Q, være forkert. Dette viser påstand 4.

Påstand 5: *Enhver 2-vej i G mellem et punkt, som er komplet til A, og et punkt, som har en nabo i $B \cup C$, indeholder enten et punkt fra Q eller et punkt, der er komplet til Q.*

Antag, at der findes en 2-vej $p_1, \ldots, p_k$ i G, hvor p_1 er komplet til A, p_k har en nabo i $B \cup C$, og ingen af $p_1, \ldots, p_k$ tilhører Q eller er komplette til Q, og vælg denne, så k er mindst muligt. Da $A \cup B$ er komplet til Q ifølge påstand 2, vil $p_1, \ldots, p_k$ ikke tilhøre $A \cup B$. Punktet p_1 tilhører ikke C, da alle punkter i C tilhører et trin, og dermed ikke kan være komplette til A. Hvis der findes et punkt $p_i \in C$, for $i > 1$, vil $p_1, \ldots, p_{i-1}$ være en kortere vej med de samme egenskaber som $p_1, \ldots, p_k$, så derfor findes der ikke et sådant p_i. Det vil altså sige, at $\{p_1, \ldots, p_k\} \cap (A \cup C \cup B) = \emptyset$.
Da ingen af punkterne i $p_1, \ldots, p_k$ tilhører Q eller er komplette til Q, følger det af påstand 3, at ingen af punkterne $p_1, \ldots, p_k$ er K-overpunkter. Antagelserne i lemma 12.20 er nu opfyldte, hvor $F = \{p_1, \ldots, p_k\}$, og da ingen af punkterne $p_1, \ldots, p_k$ er K-overpunkter, må $p_1, \ldots, p_k$ være et gelænder. På grund af minimaliteten af k udgør hele $\{p_1, \ldots, p_k\}$ gelænderet, så p_1 er en venstrestjerne, og p_k er en højrestjerne. Da ingen af punkterne $p_1, \ldots, p_k$ er komplette til Q, følger det af påstand 4, at $k \geq 3$.
Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin i G. Da der kan dannes et hul $p_1, \ldots, p_k, b_1, P_1, a_1$, må k være

lige. Hermed er $a_1, p_1, \ldots, p_k, b_2$ en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til Q, og hvis indre punkter ikke er komplette til Q. Ifølge korollar 2.3 indeholder Q et afhop q_1, q_2 for $a_1, p_1, \ldots, p_k, b_2$, så $q_1, p_1, \ldots, p_k, q_2$ er en 2-vej i G. For hvert par af ikke-nabopunkter $a \in A$ og $b \in B$, vil 2-vejene q_1, b og a, q_2 være et trin, så der haves en trin-sammenhængende streng $S' = (A \cup \{q_1\}, C, B \cup \{q_2\})$. Der kan nu dannes en trappe $K' = (S', p_1, \ldots, p_k)$, hvilket giver en modstrid med, at trappen K er maksimal. Dette viser påstand 5.

Lad X være mængden af alle punkter i G, som er komplette til Q. Lad M være den komponent i $G - (Q \cup X)$, der indeholder punktet a_0, og lad N være foreningen af de resterende komponenter i $G - (Q \cup X)$. Ifølge påstand 5 vil punktet b_0 tilhøre N, da a_0 er komplet til A, og b_0 har en nabo i $B \cup C$, altså er $N \neq \emptyset$. Hermed er $M \cup N$ ikke sammenhængende, og $Q \cup X$ er ikke antisammenhængende, altså er $\{M \cup N, Q \cup X\}$ en skæv opdeling i G. Lad $b \in B$, og dermed vil b ifølge påstand 2 være komplet til Q, så $b \in X$. Hvis b har en nabo $a_i \neq a_0$ i M, vil kanten $a_0 a_i$ danne en modstrid med påstand 5, så derfor er b antikomplet til $V(M)$. Ifølge definition 3.5 er $\{M \cup N, Q \cup X\}$ dermed en løs skæv opdeling i G, og per lemma 3.6 er $\{M \cup N, Q \cup X\}$ en balanceret skæv opdeling i G. □

Hermed er det vist, at 2-afbrydere ikke findes i et minimalt modeksempel.

12.1.3 3-afbrydere

I dette afsnit præsenteres den sidste type afbrydere, nemlig 3-afbrydere. For at vise, at 3-afbrydere ikke kan forekomme i et minimalt modeksempel, benyttes højrefølger og spor samt resultater om disse.

Følgende lemma giver en måde at konstatere, om et punkt er en venstrestjerne henholdsvis en højrestjerne, hvis der blandt andet vides, at punktet er et venstrediagonalt henholdsvis et højrediagonalt punkt.

Lemma 12.25
Lad G være en Berge graf, som hverken indeholder en optræden af K_4, en lige prisme, en 1-afbryder eller en 2-afbryder. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en stærk-maksimal trappe i G. Lad $q_1, \ldots, q_k$ være en anti 2-vej i G, så $q_2, \ldots, q_{k-1}$ er både venstrediagonale og højrediagonale punkter, q_1 er et venstrediagonalt men ikke et højrediagonalt punkt, og q_k er et højrediagonalt men ikke et venstrediagonalt punkt. Da er q_1 en venstrestjerne, og q_k er en højrestjerne. ◇

De følgende definitioner gives, da de benyttes til at vise resultater, der leder frem til også at udelukke 3-afbrydere fra et minimalt modeksempel.

Definition 12.26 (Højrefølge)
Lad G være en Berge graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en trappe i G. En højrefølge er en følge af punkter $x_1, \ldots, x_t$, som opfylder følgende:

(i) *Punkterne $x_1, \ldots, x_t$ er alle forskellige og alle komplette til B.*

(ii) *Hvis et punkt x_i, for $1 \leq i \leq t$, er komplet til A, så findes der et h, hvor $1 \leq h < i$, så x_h ikke er nabo til x_i.*

(iii) *Hvis et punkt x_i, for $1 \leq i \leq t$, er antikomplet til A, så findes der et gelænder r, P, x_i for K, hvor r har en ikke-nabo blandt punkterne $\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$.*

◇

Bemærk, at hvis $x_1 \ldots, x_t$ er en højrefølge, så er $x_1 \ldots, x_i$, hvor $i \leq t$, også en højrefølge. Hvis x_i og x_j er punkter i en højrefølge, og $i < j$, da siges x_i at være før x_j.

Definition 12.27 (Forgænger i en højrefølge)
Lad G være en Berge graf, og lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge i G. For et punkt $x_i \in X$, hvor x_i har en ikke-nabo blandt punkterne $x_1, \ldots, x_{i-1}$, defineres x_i's forgænger til at være det punkt x_h, hvorom det gælder, at for $1 \leq h < i$ er $\mathrm{d}_X(x_h, x_i)$ mindst mulig, og x_h ikke er nabo til x_i. $\diamond$

Bemærk, at ifølge definition 12.26(ii) har ethvert x_i i en højrefølge enten en ikke-nabo i A, eller så har x_i en forgænger.

Definition 12.28 (Spor)
Lad G være en Berge graf, og lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge i G. For hvert $x_i \in X$ defineres sporet af x_i til at være følgen af punkter $w_1, \ldots, w_n$, som opfylder:

(i) *$n \geq 1$ og $w_1 = x_i$.*

(ii) *w_n har en ikke-nabo i A.*

(iii) *For $1 \leq j < n$ er w_j komplet til A, og w_{j+1} er w_j's forgænger.*

Lad $v \in V(G) - X$, så v er komplet til A og ikke komplet til X. Sporet af v defineres da som følgen $v, w_1, \ldots, w_n$, hvor w_1 er det første ikke-nabopunkt til v fra X, og $w_1, \ldots, w_n$ er sporet af w_1. $\diamond$

Bemærk, at sporet af et punkt udgør en anti 2-vej i G og er unik. Desuden vil der gælde, at hvis $X : x_1, \ldots, x_t$ er en højrefølge, og $w_1, \ldots, w_n$ er sporet af $x_i \in X$, så vil $w_1, \ldots, w_n$ tilhøre X og dermed være en højrefølge.
Desuden vil der for et spor gælde, at punkterne $w_1, \ldots, w_{n-1}$ alle er komplette til A.

Definition 12.29 (Udgangspunkt)
Lad G være en Berge graf, lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge i G, og lad a være en venstrestjerne i G. Antag, at a ikke er komplet til X, da defineres udgangspunktet for a i X som det første ikke-nabopunkt til a i X. $\diamond$

Definition 12.30 (b-optimalt gelænder)
Lad G være en Berge graf, lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge i G, og lad b være en højrestjerne i G. Et gelænder a, P, b i G siges at være b-optimalt, hvis a ikke er komplet til X, og der ikke findes et gelænder a', P', b', hvor a' ikke er komplet til X, og udgangspunktet for a' i X er før udgangspunktet for a i X. $\diamond$

Lemma 12.31
Lad G være en Berge graf, som hverken indeholder en optræden af K_4, en lige prisme, en 1-afbryder eller en 2-afbryder. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en stærk-maksimal trappe i G. Lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge i G, lad b være en højrestjerne i G, lad a, P, b være et b-optimalt gelænder i G, og lad $a, w_1, \ldots, w_n$ være sporet af a. Da er n ulige, og et af følgende vil gælde:

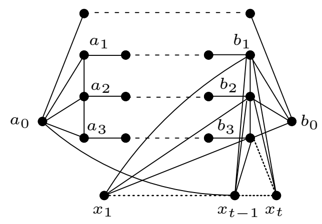
(i) *b er det eneste punkt fra P, som er komplet til $\{w_1, \ldots, w_n\}$.*

(ii) *P har længde en, og der findes et m, hvor $1 \leq m < n$, så $a, w_1, \ldots, w_m, b$ er en anti 2-vej i G.*

$\diamond$

Lemma 12.32
Lad G være en Berge graf, som hverken indeholder en optræden af K_4, en lige prisme, en 1-afbryder eller en 2-afbryder. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en stærk-maksimal trappe i G, og lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge. Da er $x_1, \ldots, x_t$ alle naboer til a_0. $\diamond$

Bevis
Antag, at $x_1, \ldots, x_t$ ikke alle er naboer til a_0, og vælg t mindst muligt, så de ikke alle er naboer til a_0, hvilket vil sige, at $x_1, \ldots, x_{t-1}$ alle er naboer til a_0, men x_t er ikke-nabo til a_0. Dermed er $t \geq 1$, så det er muligt, at $x_t = x_1$.



Figur 12.5: Eksempel på trappen K og højrefølgen $x_1, \ldots, x_t$.

Påstand 1: a_0, P_0, b_0 *er ikke et* b_0*-optimalt gelænder.*

Antag, at a_0, P_0, b_0 er et b_0-optimalt gelænder, og lad $a_0, w_1, \ldots, w_n$ være sporet af a_0. Et sådant spor vil findes, da a_0 er komplet til A, ikke tilhører $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ og ikke er komplet til X.
Da P_0 har længde mindst tre, følger af lemma 12.31, at b_0 er det eneste punkt fra P_0, som er komplet til $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, og desuden fåes, at n er ulige.

Antag, at $n = 1$. Da er w_1 ikke-nabo til a_0 og har en ikke-nabo i A, hvilket følger af definition 12.28(ii). Dermed er w_1 ikke komplet til A og a_0, hvormed w_1 per definition 12.17 og definition 12.18 ikke er et venstrediagonalt, et højrediagonalt eller et centralt punkt. Dermed kan w_1 per definition 12.16 ikke være et K-overpunkt. Da b_0 er det eneste punkt i P_0, der er komplet til w_1, har w_1 ingen naboer i $P_0 - \{b_0\}$. Da w_1 ikke er komplet til A, kan w_1 per definition 12.4 ikke være en venstrestjerne. Lemma 12.19 er opfyldt, så w_1 må være et K-underpunkt, da det i det ovenstående er vist, at w_1 ikke er et K-overpunkt, ikke er en venstrestjerne, og ikke har en nabo i $P_0 - \{b_0\}$. Dermed skal mængden af naboer til w_1 være indeholdt i $A \cup C \cup B, V(P_0), A \cup \{a_0\}$ eller i $B \cup \{b_0\}$. Da w_1 er nabo til b_0, og idet w_1 per definition 12.28 og definition 12.26 er komplet til B må det være $B \cup \{b_0\}$, der indeholder samtlige naboer til w_1 i K. Hvis w_1 ikke har andre naboer i K, så er w_1 en højrestjerne. Hvis w_1 har andre naboer i K, så er lemma 12.19 ikke opfyldt, og en modstrid er nået.
Antag derfor, at w_1 er en højrestjerne, der kun har naboer i $B \cup \{b_0\}$ i K. Fra definition 12.26(iii) følger, at der findes et gelænder r, P, w_1, så udgangspunktet for r i X er før punktet w_1.

Det skal nu vises, at P er disjunkt fra P_0, og der ikke findes kanter mellem $V(P_0) - a_0$ og $V(P) - w_1$. Antag, at $\langle (V(P_0) - a_0) \cup (V(P) - w_1) \rangle_G$ er sammenhængende. Det vil sige, at der findes en 2-vej, som forbinder r og b_0, hvis indre tilhører foreningen af det indre af P_0 og det indre af P. Altså er denne 2-vej et gelænder. Men P_0 er et b_0-optimalt gelænder, og udgangspunktet for r er før udgangspunktet for a_0, hvilket giver en modstrid med, at a_0, P_0, b_0 er et b_0-optimalt gelænder. Det vil sige, at $V(P_0) - a_0$ er disjunkt fra $V(P) - w_1$, og der findes ikke kanter mellem dem. Da udgangspunktet for a_0 er forskelligt fra udgangspunktet for r, er $a \neq r$, og da a_0, P_0, b_0 er et b_0-optimalt gelænder, må $b_0 \neq w_1$. Dermed er P disjunkt fra P'.

Husk, at w_1 kun er nabo til b_0 i P_0. Ifølge definition 9.20 kan der vælges en sti a_1, P_1, b_1 for (A, C, B). Da $a_1, a_0, P_0, b_0, w_1, P, r$ ikke må være et hul af ulige længde, vil a_0 have en nabo i P. Hvis a_0 har en nabo i P forskellig fra r, så kan 2-vejen fra a_0 til w_1 med indre i $P - \{r\}$ danne et hul med w_1, b_0, P_0, a_0 og et hul med w_1, b_1, P_1, a_1, a_0, hvormed det ene hul må have ulige længde, og en modstrid er opnået, så r er den eneste nabo til a_0 i P. Nu kan A udvides med r, B kan udvides med w_1, og C kan udvides med det indre af P, hvilket danner modstrid med, at K er en maksimal trappe.

Dermed er $n \geq 2$. Fra definition 12.28 er $w_1, \ldots, w_{n-1}$ alle komplette til A. Da $W \subseteq X$, er punkter i W alle komplette til B. Dermed er $w_1, \ldots, w_{n-1}$ alle venstrediagonale punkter, og $w_2, \ldots, w_n$ er alle højrediagonale punkter, men w_1 er ikke et højrediagonalt punkt, og w_n er ikke et venstrediagonalt punkt, hvormed lemma 12.25 er opfyldt, så w_1 er en venstrestjerne. Dette danner dog en modstrid, da w_1 ikke kan være en venstrestjerne, idet $w_1 \in X$ er komplet til B. Påstand 1 er hermed vist.

Idet a_0 har en ikke-nabo i $\{x_1, \ldots, x_t\}$, altså a_0 er ikke komplet til X, så findes der et b_0-optimalt gelænder r, P, b_0. Fra påstand 1 har r en ikke-nabo i $\{x_1, \ldots, x_{t-1}\}$, da udgangspunktet for r i X er før punktet a_0. Da t er valgt mindst muligt, så ved at erstatte P_0 med P i beviset for påstand 1, må P have længde en, hvormed rb_0 er en kant. Lad $r, w_1, \ldots, w_n$ være sporet af r, så w_1 er før x_t. Lad $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, hvormed a_0 er komplet til W, og fra lemma 12.31 er n ulige.

Påstand 2: *b_0 er komplet til W.*

Antag, at b_0 ikke er komplet til W. Da følger af lemma 12.31, at der findes et i, hvor $1 \leq i < n$, så $r, w_1, \ldots, w_i, b_0$ er en anti 2-vej af ulige længde. Her er $r, w_1, \ldots, w_{i-1}$ alle venstrediagonale punkter, og $w_1, \ldots, w_i$ er alle højrediagonale punkter, men r er ikke et højrediagonalt punkt, da det er en venstrestjerne, og w_i er ikke et venstrediagonalt punkt, da det ikke er nabo til b_0. Desuden er w_i ikke en højrestjerne eller en venstrestjerne, da det er komplet til $A \cup B$, fordi $i < n$. Dette danner en modstrid med lemma 12.25, og påstand 2 er vist.

Påstand 3: *a_0 er nabo til r, w_n er en højrestjerne, og r er en venstrestjerne.*

Lad a_1, P_1, b_1 være en sti for (A, C, B), hvor w_n er ikke-nabo til a_1. Da $a_0, r, w_1, \ldots, w_n, a_1, b_0$ ikke må være et antihul af ulige længde, er a_0 nabo til r. Dermed er $r, w_1, \ldots, w_{n-1}$ venstrediagonale punkter, og $w_1, \ldots, w_n$ er højrediagonale punkter, men r er ikke et højrediagonalt punkt, og w_n er ikke et venstrediagonalt punkt. Lemma 12.25 er opfyldt, og deraf følger, at w_n er en højrestjerne, og r er en venstrestjerne. Hermed er påstand 3 vist.

Påstand 4: *Der findes ikke et punkt i det indre af P_0, som er komplet til $W \cup \{r\}$.*

Antag, at v er et punkt i det indre af P_0, som er komplet til $W \cup \{r\}$. Lad a_1, P_1, b_1 være en sti for (A, C, B). Da er a_0, a_1, P_1, b_1, b_0 en 2-vej af ulige længde, hvor begge endepunkter er komplette til $W \cup \{r\}$, men v er komplet til $W \cup \{r\}$ og har ingen nabo i 2-vejens indre. Dermed må der ifølge korollar 2.3 findes to nabopunkter i a_0, a_1, P_1, b_1, b_0, som er komplette til $W \cup \{r\}$. Altså vil der findes et punkt i P_1, som er komplet til $W \cup \{r\}$. Fra påstand 3 er w_n en højrestjerne, og r er en venstrestjerne, så de kan ikke have fælles naboer i P_1. Der kan derfor ikke findes et punkt i P_1, som er komplet til $W \cup \{r\}$, hvilket giver en modstrid, hvormed påstand 4 er vist.

Påstand 5: *$n = 1$, og dermed er $W = \{w_1\}$.*

Antag, at $n > 1$. Her har P_0 ulige længde, og begge dens endepunkter er komplette til $W \cup \{r\}$. Antag først, at P_0 har længde mindst fem. Da følger af lemma 2.2 og påstand 4, at der i $W \cup \{r\}$ findes et afhop for P_0, hvilket vil sige, at der findes to ikke-nabopunkter $x, y \in W \cup \{r\}$, som er forbundet af en 2-vej P af ulige længde, hvis indre er lig det indre af P_0. Vælg $b_1 \in B$. Da b_1, x, P, y ikke må være et hul af ulige længde, skal x eller y være ikke-nabo til b_1. Idet b_1 er komplet til W, kan det antages, at $y = r$, hvormed $x = w_1$, da det er det eneste punkt i W, som ikke er nabo til r. Vælg $a_1 \in A$. Da a_1, r, P, w_1 ikke må være et hul af ulige længde, kan a_1 ikke være nabo til w_1, hvormed $n = 1$, da w_n er den eneste ikke-nabo til a_1. Dette er i modstrid med, at $n > 1$, så P_0 har ikke længde mindst fem.
Antag nu, at P_0 har længde tre, og lad de indre punkter være x og y. Fra lemma 2.2 vil der findes en anti 2-vej Q af ulige længde mellem x og y, hvis indre tilhører $W \cup \{r\}$. Hvis $r \notin V(Q)$, så er b_1, x, Q, y et antihul af ulige længde, hvor $b_1 \in B$. Hvis $w_n \notin V(Q)$, så er a_1, x, Q, y et antihul af ulige længde, hvor $a_1 \in A$. Det kan derfor antages, at $x, r, w_1, \ldots, w_n, y$ er en anti 2-vej. Hvis $C \neq \emptyset$, så findes der en sti a_1, P_1, b_1 for (A, C, B) af længde mindst to. Dermed er $a_1, P_1, b_1, b_0, r, a_1$ et hul af længde mindst seks, og $r, w_1, \ldots, w_n, a_1$ er en anti 2-vej af lige længde mindst fire, hvor a_0 er komplet til anti 2-vejen, men ikke har andre naboer i hullet, og mindst to punkter i hullet er komplette til det indre af anti 2-vejen, nemlig b_0 og b_1. Dette danner en modstrid med lemma 2.17, så $C = \emptyset$. Hvis mængderne $B \cup \{x\}$ og $A \cup \{y\}$ betragtes i $\overline{G}$, ses det, at $(B \cup \{x\}, \emptyset, A \cup \{y\})$ danner en trin-sammenhængende streng, hvor x og y tilhører hver sin sti for strengen. Da $x, r, w_1, \ldots, w_n, y$ er en anti 2-vej i G, er $x, r, w_1, \ldots, w_n, y$ en 2-vej i $\overline{G}$. Dermed er $((B \cup \{x\}, \emptyset, A \cup \{y\}), r, w_1, \ldots, w_n)$ en trappe i $\overline{G}$, hvilket danner en modstrid med, at K er en

maksimal trappe. Påstand 5 er hermed vist.

Fra påstand 4 og påstand 5 følger det, at lemma 2.2 kan anvendes på P_0 og den antisammenhængende mængde $\{r, w_1\}$. Da den antisammenhængende mængde $\{r, w_1\}$ kun indeholder to punkter, følger det fra lemma 2.2, at der findes findes en 2-vej P af ulige længde, som forbinder r og w_1, og som har indre lig det indre af P_0. Fra påstand 3 er $w_1 = w_n$ en højrestjerne, og fra definition 12.26(iii) findes der et gelænder r', P', w_1, så udgangspunktet for r' er før w_1, og gelænderet kan vælges w_1-optimalt. Nu er P' disjunkt fra P_0, og der findes ikke kanter mellem $P_0 - \{a_0\}$ og $P' - \{w_1\}$, for ellers ville der være et gelænder fra r' til b_0, hvilket vil være i modstrid med, at r, b_0 er et b_0-optimalt gelænder. Antag, at r har en nabo i P', da kan 2-vejen mellem r og w_1 med indre i P' danne et hul med w_1, b_0, r og danne et hul med w_1, P, r, så et af disse to huller må have ulige længde, hvilket giver en modstrid. Altså har r ikke en nabo i P'. Lad $r', v_1, \ldots, v_m$ være sporet af r'. Idet $v_1, \ldots, v_m$ er før w_1, og w_1 er den første ikke-nabo til r, må r være nabo til samtlige af $v_1, \ldots, v_m$. Fra lemma 12.31 følger det, at et af følgende vil gælde:

(i) w_1 er det eneste punkt i P', som er komplet til $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

(ii) P' har længde en, og der findes ikke en anti 2-vej Q af ulige længde mellem r' og w_1, hvis indre tilhører $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

I (i) er w_1, P', r', a_1, r en 2-vej af ulige længde, hvor $a_1 \in A$ er ikke-nabo til v_m. Endepunkterne for 2-vejen er komplette til $\{v_1, \ldots, v_m\}$ i modsætning til 2-vejens indre punkter. Punktet b_1, for ethvert $b_1 \in B$, som er ikke-nabo til a_1, er komplet til $\{v_1, \ldots, v_m\}$, men har ikke en nabo i det indre af 2-vejen, hvilket danner en modstrid med korollar 2.3.
I (ii) er r, r', Q, w_1 et antihul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at G er en Berge graf.

Det vil sige, at der i begge tilfælde opnåes en modstrid, så antagelsen, om at $x_1, \ldots, x_t$ ikke alle er naboer til a_0, må være forkert. $\square$

Hermed præsenteres den sidste type afbrydere.

Definition 12.33 (3-afbryder)
Lad G være en Berge graf, og lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en stærk-maksimal trappe i G. Lad $x \in V(G) - V(K)$ være komplet til B, ikke komplet til A og ikke antikomplet til A. Da siges parret $\{K, x\}$ at være en 3-afbryder. $\diamond$

Sætning 12.34
Lad G være en Berge graf, som hverken indeholder en optræden af K_4, en lige prisme, en 1-afbryder eller en 2-afbryder. Hvis der findes en 3-afbryder i G, så har G en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Lad $\{K, x_1\}$ være en 3-afbryder for $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ i G. Punktet x_1 er en højrefølge, og der må derfor findes en højrefølge $x_1, \ldots, x_t$ af maksimal længde t, hvor $t \geq 1$. Lad $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$, og lad Y være mængden af punkter i $V(G) - (A \cup C \cup B)$, som er komplette til $A \cup X$. Fra lemma 12.32 følger det, at $a_0 \in Y$.

Påstand: *$X \cup Y \cup B$ har punkter i enhver 2-vej i G mellem $A \cup C$ og b_0.*

Antag, at P er en 2-vej mellem $A \cup C$ og b_0, hvis indre ikke tilhører $X \cup Y \cup B$. Da b_0 ikke er nabo til a_0, følger det af lemma 12.32, at $b_0 \notin X$. Da b_0 er en højrestjerne, er b_0 antikomplet til A, så $b_0 \notin Y$. Da b_0 tilhører et gelænder, vil $b_0 \notin B$. Det vil sige, at $b_0 \notin X \cup Y \cup B$. Lad P være mindst mulig, så intet indre punkt tilhører $X \cup Y \cup B$. Lad $p \in A \cup C$ og b_0 være endepunkterne for P. Da b_0 kun er nabo til punkter i B fra (A, C, B), vil b_0's nabo i P ikke tilhøre $A \cup C \cup B$. Da P er valgt mindst mulig mellem b_0 og $p \in A \cup C$, vil intet indre punkt i P tilhøre $A \cup C \cup B$, for ellers kan P vælges mindre. Punktet p vil ikke tilhøre $X \cup Y \cup B$, idet intet punkt i $A \cup C$ er komplet til B, intet punkt er komplet til $X \cup A$, og intet punkt tilhører B.
Mængden $P - \{p\}$ vil være en sammenhængende delmængde af $V(G) - (A \cup C \cup B)$, $P - \{p\}$ vil

have en vedhæftning i $A \cup C$, nemlig punktet p, og $P - \{p\}$ vil indeholde en højrestjerne, nemlig punktet b_0. Da følger af lemma 12.21 anvendt på den omvendte streng (B, C, A), at $P - \{p\}$ enten indeholder et K'-overpunkt, hvor $K' = ((B, C, A), P_0)$, eller indeholder et gelænder med hensyn til (B, C, A). Hvis $P - \{p\}$ enten indeholder et K'-overpunkt eller indeholder et gelænder med hensyn til (B, C, A) svarer det til, at $P - \{p\}$ indeholder enten et K-overpunkt eller et gelænder med hensyn til (A, C, B).
Antag først, at $P - \{p\}$ indeholder et gelænder a, P', b med hensyn til (A, C, B). Da kan $a, b \notin X \cup Y \cup B$, idet $P - \{p\} \subseteq V(G) - (X \cup Y \cup B \cup A \cup C)$. Dermed må a, der er komplet til A, ikke være komplet til X. Da b er komplet til B og antikomplet til A, vil det tilhøre en højrefølge, hvis der findes et gelænder $r, \widetilde{P}, b$, så r har en ikke-nabo i X. Da a, P', b netop er et sådan gelænder, må b tilhøre højrefølgen, hvilket danner en modstrid med, at højrefølgen er størst mulig. Det vil sige, at $P - \{p\}$ ikke indeholder et gelænder.
Antag nu, at $P - \{p\}$ indeholder et K-overpunkt v. Da $v \notin X \cup Y \cup B$, er v ikke komplet til $A \cup X$. Antag, at v er komplet til B. Da v er et K-overpunkt, har v en nabo i A. Hvis v ikke er komplet til A, så kan højrefølgen udvides med v, hvilket danner en modstrid med, at højrefølgen er størst mulig. Hvis v er komplet til A, så er v ikke komplet til X, hvormed højrefølgen kan udvides med v, hvilket er i modstrid med, at højrefølgen er størst mulig. Det vil sige, at v ikke er komplet til B. Ifølge lemma 12.19 er v enten et venstrediagonalt, et højrediagonalt eller et centralt punkt. Da v ikke er komplet til B, kan v hverken være et højrediagonalt eller et centralt punkt. Dermed er v et venstrediagonalt punkt, hvormed v per definition 12.17 er komplet til $A \cup \{b_0\}$. Dermed er v ikke komplet til X, for ellers ville v tilhøre Y. Lad $v, w_1, \ldots, w_n$ være sporet af v. Da $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq X$, er de alle komplette til B, og da $a_0 \in Y$, er a_0 komplet til X. Hermed er $w_1, \ldots, w_n$ alle komplette til $B \cup \{a_0\}$, hvilket per definition 12.17 betyder, at de er højrediagonale punkter. Idet w_n per definition 12.28 har en ikke-nabo i A, er w_n ikke et venstrediagonalt punkt. Dermed vil der findes et i, hvor $1 \leq i \leq n$, som er valgt mindst muligt, så w_i ikke er et venstrediagonalt punkt. Nu kan lemma 12.25 anvendes, hvilket giver, at v er en venstrestjerne. Dette danner en modstrid med, at v er et K-overpunkt, så antagelsen, om at der findes en sådan 2-vej P, må være forkert, hvormed påstanden er vist.

Idet (A, C, B) er trin-sammenhængende, er $A \cup C$ sammenhængende og tilhører derfor en komponent A_1 i $G - (X \cup Y \cup B)$. Lad $A_2 = G - (X \cup Y \cup B \cup A_1)$. Fra påstanden vil $b_0 \in A_2$, idet enhver 2-vej mellem $A \cup C$ og b_0 indeholder punkter fra $X \cup Y \cup B$. Da A_1 og A_2 ikke har kanter mellem sig, er $A_1 \cup A_2$ ikke sammenhængende, og da $Y \cup B$ er komplet til X, er $X \cup Y \cup B$ ikke antisammenhængende, hvormed $\{A_1 \cup A_2, X \cup Y \cup B\}$ er en skæv opdeling i G. For at sætningen er vist, skal G have en balanceret skæv opdeling. Fra lemma 3.6 kan det antages, at den skæve opdeling ikke er løs, for ellers er beviset færdigt. At $\{A_1 \cup A_2, X \cup Y \cup B\}$ ikke er en løs skæv opdeling, betyder, at alle punkter i $X \cup Y \cup B$ har en nabo i alle komponenter i $A_1 \cup A_2$, og ingen punkter i $A_1 \cup A_2$ er komplette til en antikomponent i $X \cup Y \cup B$. Da X er en antikomponent i $X \cup Y \cup B$ vil ethvert punkt i G, som er komplet til X, enten tilhøre B eller tilhøre Y, og dermed er det komplet til A. I $\overline{G}$ er $A \cup C$ en antisammenhængende delmængde, og en komponent i $Y \cup B$ indeholder ikke et punkt, som er komplet til $A \cup C$, så $A \cup C$ er ifølge definition 3.11 kerne for den skæve opdeling $\{X \cup Y \cup B, A_1 \cup A_2\}$ i $\overline{G}$. Fra lemma 3.13 følger det, at det er tilstrækkeligt at vise, at to vilkårlige ikke-nabopunkter i $Y \cup B$, som har naboer i $A \cup C$, vil være forbundet af en 2-vej af lige længde med indre i $A \cup C$ i G, og to vilkårlige nabopunkter i $A \cup C$, som ikke har naboer i $Y \cup B$, er forbundet af en anti 2-vej af lige længde med indre i $Y \cup B$.
Lad $u, v \in Y \cup B$ være to ikke-nabopunkter, som har naboer i $A \cup C$. Hvis de begge er naboer til b_0, så vil enhver vej mellem dem med indre i $A \cup C$ have lige længde, da 2-vejen sammen med v, b_0, u danner et hul. Antag derfor, at u og b_0 ikke er naboer, og dermed vil $u \notin B$, så $u \in Y$. Hvis både u og v tilhører Y, så er de forbundet af en 2-vej af lige længde, nemlig u, a_1, v for ethvert $a_1 \in A$. Det kan derfor antages, at $v \in B$. Da u ikke er nabo til hverken b_0 eller $v \in B$, er u ikke et venstrediagonalt punkt, ikke et højrediagonalt punkt og ikke et centralt punkt. Da følger af lemma 12.19, at u enten er et K-underpunkt eller en venstrestjerne.
Hvis u er et K-underpunkt, så er mængden af u's naboer i K indeholdt i $A \cup \{a_0\}$. Lad a_1, P_1, v være en sti for (A, C, B), og da har P_1 ifølge lemma 12.8 ulige længde. Da u er komplet til A, er

u, a_1, P_1, v en 2-vej af lige længde, som ønsket.
Hvis u er en venstrestjerne, så lad a_1, P_1, v være en sti for (A, C, B). Da er u, a_1, P_1, v en 2-vej af lige længde med indre i $A \cup C$, som ønsket.

Det skal så vises, at de ønskede anti 2-veje findes. Lad $u, v \in A \cup C$ være to vilkårlige nabopunkter, som ikke har naboer i $Y \cup B$. De har begge ikke-naboer i B, og idet $B \cup \{a_0\}$ er antisammenhængende, er de forbundet af en anti 2-vej Q med indre i $B \cup \{a_0\}$. Det er nok at vise, at Q har lige længde, da det indre af Q er indeholdt i $Y \cup B$. Hvis a_0 ikke tilhører det indre af Q, så har Q lige længde, da b_0, u, Q, v er et antihul. Altså kan det antages, at a_0 tilhører det indre af Q. Der findes ikke kanter mellem a_0 og B, så a_0 er ikke-nabo til hvert af de andre punkter i det indre af Q. Idet Q er en anti 2-vej, kan Q dermed højst have tre indre punkter, hvormed Q har længde højst fire. Hvis Q har ulige længde, så har den længde tre, idet a_0 er et indre punkt i Q. Det vil sige, at der findes ikke-nabopunkter $u' \in Y$ og $v' \in B$, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde med indre i $A \cup C$. Det er vist, at de også er forbundet af en 2-vej af lige længde, og dermed følger af lemma 3.7, at G har en balanceret skæv opdeling. Det vil sige, at enten findes der de ønskede 2-veje og anti 2-veje, så $\{A_1 \cup A_2, X \cup Y \cup B\}$ ifølge lemma 3.13 er en balanceret skæv opdeling, eller så følger resultatet af lemma 3.7. □

Hermed er det vist, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde hverken 1-afbrydere, 2-afbrydere eller 3-afbrydere. At et minimalt modeksempel ikke indeholder sådanne afbrydere, benyttes i næste afsnit til at vise, at grafer, der indeholder aflange ulige prismer, men ikke indeholder en optræden af K_4, ikke kan være minimale modeksempler.

12.2 6-vedhæng

Ved hjælp af resultaterne i forrige afsnit er det nu muligt at udelukke Berge grafer, der indeholder aflange ulige prismer. Til dette benyttes den sidste type dekomposition.

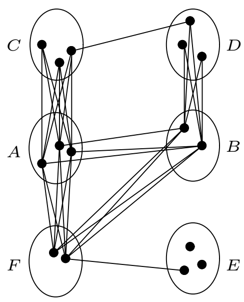
Definition 12.35 (6-vedhæng)
Et 6-vedhæng i en graf G er en opdeling $\{A, B, C, D, E, F\}$ af $V(G)$, hvor $A, B, C, D, E, F \neq \emptyset$, som opfylder følgende:

(i) *Hvert punkt i A har en nabo i B og en ikke-nabo i B, og omvendt.*

(ii) *$\{A, C\}, \{A, F\}, \{B, F\}$ og $\{B, D\}$ er komplette par.*

(iii) *$\{A, D\}, \{A, E\}, \{B, E\}$ og $\{B, C\}$ er antikomplette par.*

◇



Figur 12.6: Et eksempel på et 6-vedhæng.

De seks mængder A, B, C, D, E og F kan opdeles i tre mængder, Q_1, Q_2 og $V(G) - (Q_1 \cup Q_2)$, hvor $Q_1 = A, Q_2 = B$ og $V(G) - (Q_1 \cup Q_2) = C \cup D \cup E \cup F$. Hermed vil alle punkter, der hverken er komplette eller antikomplette til $Q_1 \cup Q_2$ tilhøre $Q_1 \cup Q_2$. Da hvert punkt i A har både en nabo og en ikke-nabo i B, vil $|Q_1| = |A| \geq 2$. Da C, D, E og F alle er ikke-tomme, vil $V(G) - (Q_1 \cup Q_2)$ indeholde mindst to punkter. Dermed er $\{Q_1, Q_2\}$ et såkaldt homogent par, og da følger af [Chvátal & Sbihi, 1987, side 128], at $\{Q_1, Q_2\}$ ikke kan findes i et minimalt modeksempel. Altså kan et minimalt modeksempel ikke indeholde et 6-vedhæng.

Hovedresultat (vi) fra kapitel 1 kan nu vises.

Sætning 12.36
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. Antag, at G indeholder en aflang ulige prisme som induceret delgraf. Da vil G eller $\overline{G}$ indeholde et 2-vedhæng, eller G har en balanceret skæv opdeling, eller G indeholder et 6-vedhæng. $\diamond$

Bevis
Antag, at G ikke har en balanceret skæv opdeling, og G samt $\overline{G}$ ikke indeholder et 2-vedhæng. Idet G indeholder en aflang ulige prisme, og G og $\overline{G}$ derfor ikke er lige prismer, så følger af sætning 11.6, at G og $\overline{G}$ ikke indeholder lige prismer. Fra sætning 12.11, sætning 12.24 og sætning 12.34 kan det antages, at G og $\overline{G}$ ikke indeholder en 1-afbryder, en 2-afbryder eller en 3-afbryder, for ellers er en modstrid opnået.
Da G indeholder en aflang ulige prisme, indeholder G en trappe, og derfor, muligvis ved at udskifte G med dens komplement, findes der en stærk-maksimal trappe $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ i G. Lad A_0 være mængden af alle venstrestjerner, lad B_0 være mængden af alle højrestjerner, og lad N være mængden af alle punkter, der er komplette til $A \cup B$. Fra lemma 12.19 vil ethvert punkt, der ikke er et K-overpunkt, men som er komplet til A, enten være et underpunkt, hvis vedhæftninger er indeholdt i enten $A \cup \{a_0\}$ eller $A \cup C \cup B$, eller være en venstrestjerne med en nabo i $V(P_0) - a_0$. Hvis punktet er et K-underpunkt, hvis naboer alle tilhører $A \cup \{a_0\}$, vil punktet tilhøre A_0, ligeledes hvis punktet er en venstrestjerne med naboer i $V(P_0) - a_0$. Hvis punktet er et K-underpunkt, hvis naboer tilhører $A \cup C \cup B$, vil der opnåes en modstrid med, at G hverken indeholder en 2-afbryder, en 3-afbryder eller et hul af ulige længde. Hermed vil ethvert punkt, der ikke er et K-overpunkt, men som er komplet til A, tilhøre A_0. Da det haves, at der ikke findes en 3-afbryder, vil desuden ethvert K-overpunkt, som er komplet til A, tilhøre N, hvormed ethvert punkt, der er komplet til A, tilhører $A_0 \cup N$. Ligeledes vil ethvert punkt, der er komplet til B, tilhøre $B_0 \cup N$. Lad $H = G - (V(S) \cup A_0 \cup B_0 \cup N)$.

Påstand 1: *Lad F være en komponent i H, og lad X være mængden af vedhæftninger for F i $V(S) \cup A_0 \cup B_0$. Da vil enten $X \cap (A \cup C \cup B) = \emptyset$, eller $X \subseteq (A \cup C \cup B)$, og X har punkter i både $A \cup C$ og $B \cup C$.*

Det kan antages, at X har punkter i $A \cup C \cup B$, for ellers er påstanden vist, og af symmetrigrunde kan det antages, at X har punkter i $A \cup C$. Idet intet punkt tilhørende F er komplet til A eller B, for så vil det tilhøre $A_0 \cup B_0 \cup N$, vil intet punkt i F ifølge lemma 12.19(ii)-(iii) være et K-overpunkt, en venstrestjerne eller en højrestjerne. Antag, at X ikke er lokal med hensyn til K. Da følger af lemma 12.20, at F indeholder et K-overpunkt, et gelænder eller en 2-vej, hvor det ene endepunkt er en venstrestjerne eller en højrestjerne. Definition 12.5 giver, at et gelænder indeholder en højrestjerne og en venstrestjerne. Dermed vil F ikke kunne indeholde et K-overpunkt, et gelænder eller en 2-vej, hvor det ene endepunkt er en venstrestjerne eller en højrestjerne, hvormed antagelsen, om at X ikke er lokal med hensyn til K, må være forkert. Ifølge definition 12.14 vil det sige, at $X \cap B_0 = \emptyset$, da $X \cap (A \cup C) \neq \emptyset$. Hvis X også har punkter i $B \cup C$, så fåes ligeledes, at X er disjunkt fra A_0. Dermed er $X \subseteq A \cup C \cup B$, og påstanden er opfyldt. Det antages derfor, at $X \subseteq A \cup A_0$. Antag, at der findes et punkt v i G, som ikke tilhører $A \cup A_0 \cup N \cup F$, men som har en nabo i F. Da F er en komponent i H, vil $v \notin V(H)$. Da $H = G - (A \cup B \cup C \cup A_0 \cup B_0 \cup N)$, må $v \in B \cup C \cup B_0$, og da det er vist, at hvis X har punkter i $B \cup C$, så er påstanden opfyldt, må $v \in B_0$. Det vil sige, at v er en højrestjerne. Antagelserne i lemma 12.21 er opfyldte, hvor $F \cup \{v\}$ benyttes som den sammenhængende mængde. Da $F \cup \{v\}$ indeholder en højrestjerne, benyttes i lemma 12.21 strengen (B, C, A) i stedet. Det vil sige, at $F \cup \{v\}$ indeholder et K'-overpunkt, hvor $K' = ((B, C, A), b_0, P_0, a_0)$, eller indeholder et gelænder for (B, C, A). Gelænderet giver netop, at $F \cup \{v\}$ vil indeholde en højrestjerne med hensyn til (B, C, A). Det vil sige, at $F \cup \{v\}$ indeholder et K-overpunkt eller en venstrestjerne med hensyn til (A, C, B). Dette giver en modstrid, da intet punkt i F er et overpunkt eller en venstrestjerne, og v er en højrestjerne. Det vil sige, at der ikke findes et sådant punkt v. Dermed er $\{V(G) - (A \cup A_0 \cup N), A \cup A_0 \cup N\}$ en skæv opdeling i G, da F er en komponent i $V(G) - (A \cup A_0 \cup N)$, og b_0 tilhører en anden komponent i $V(G) - (A \cup A_0 \cup N)$, så $V(G) - (A \cup A_0 \cup N)$ er dermed ikke sammenhængende, og $A \cup A_0 \cup N$ er ikke antisammenhængende, da A og $A_0 \cup N$ begge er ikke-tomme og udgør et komplet par. Fra lemma 2.13 er $\{B \cup C, A\}$ et balanceret par, da $a_0 \in V(G) - (A \cup B \cup C)$ er komplet til A og antikomplet til $B \cup C$. Her kan det antages, at $B \cup C$ er antikomplet til F, da det er vist, at hvis X har punkter i $B \cup C$, så er påstanden opfyldt. Fra lemma 2.15 følger, at $\{F, A\}$ er et balanceret par, da $\{B \cup C, A\}$ er et balanceret par, $F \subseteq V(G) - (A \cup C \cup B)$, $B \cup C$ er sammenhængende, ethvert punkt i A har en nabo i $B \cup C$, og $B \cup C$ er antikomplet til F. Fra lemma 3.10(iii) har G en balanceret skæv opdeling, hvor X i lemma 3.10 svarer til $A_0 \cup N$, Y svarer til A, L svarer til F, og R svarer til $H \cup B \cup C \cup B_0$. Hermed er en modstrid opnået, da det er antaget, at G ikke har en balanceret skæv opdeling. Dermed er påstand 1 vist.

Lad M være foreningen af alle komponenter i H, som ikke har vedhæftninger i $A \cup C \cup B$. Her er M ikke-tom, da den indeholder det indre af P_0, og P_0 har længde mindst tre. Lad D være foreningen af alle de andre komponenter i H. Det vil sige, at alle komponenter i D har vedhæftninger i $A \cup C \cup B$, og ifølge påstand 1 har enhver komponent i D dermed alle sine vedhæftninger i $V(S)$. Dermed er $V(G)$ opdelt i A, B, C, D, A_0, B_0, N og M, hvor C, D og N muligvis er tomme.

Påstand 2: $N \neq \emptyset$.

Antag, at $N = \emptyset$. Kanter fra A til A_0 og kanter fra B til B_0 er de eneste kanter mellem $A \cup C \cup B \cup D$ og $A_0 \cup B_0 \cup M$. Desuden indeholder $A_0 \cup B_0 \cup M$ mindst fire punkter, nemlig punkterne i P_0, og både A og B indeholder mindst to punkter hver. Da $N = \emptyset$, er $\{A_0 \cup B_0 \cup M, A \cup C \cup B \cup D\}$ en opdeling af $V(G)$. Hvis enhver komponent i $A_0 \cup B_0 \cup M$ har punkter til fælles med både A_0 og B_0, så er $\{A_0 \cup B_0 \cup M, A \cup C \cup B \cup D\}$ et 2-vedhæng i G ifølge definition 9.15, hvor X_1 i definition 9.15 svarer til $A_0 \cup B_0 \cup M$, X_2 svarer til $A \cup C \cup B \cup D$, A_1 svarer til A_0, A_2 svarer til A, B_1 svarer til B_0, og B_2 svarer til B. Antag derfor at en komponent M_1 i $A_0 \cup B_0 \cup M$ kun har punkter til fælles med A_0 og ikke B_0. Dermed har M_1 på grund af gelænderet kun punkter til fælles med $A_0 - a_0$. Her vil $A \cup \{a_0\}$ udgøre en stjernesnitmængde, idet $V(G) - (A \cup \{a_0\})$ opdeles i to disjunkte mængder, nemlig $V(G) - (A \cup \{a_0\} \cup M_1)$ og M_1. Dermed vil $\{V(G) - (A \cup \{a_0\}), A \cup \{a_0\}\}$ ifølge [Chvátal, 1985, side 198] være en skæv opdeling. Desuden vil $\{V(G) - (A \cup \{a_0\}), A \cup \{a_0\}\}$ være en balanceret skæv opdeling, idet der ikke kan findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i $A \cup \{a_0\}$, hvis indre tilhører $V(G) - (A \cup \{a_0\})$, for ellers vil denne sammen med a_0 danne et hul af ulige længde. Tilsvarende kan der på grund af a_0 ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i $V(G) - (A \cup \{a_0\})$, hvis indre tilhører $A \cup \{a_0\}$. Det er dog antaget, at G ikke har en balanceret skæv opdeling, så en modstrid er opnået. Dermed er påstand 2 vist.

Påstand 3: $C \cup D = \emptyset$.

Antag, at $C \cup D \neq \emptyset$. Fra påstand 1 følger det, at D kun har vedhæftninger i $A \cup C \cup B$, og idet C per definition kun har vedhæftninger i $A \cup B$, findes der ikke kanter mellem $C \cup D$ og $A_0 \cup B_0 \cup M$, da $A_0 \cup B_0 \cup M$ er disjunkt fra $A \cup C \cup B$, så $C \cup D \cup A_0 \cup B_0 \cup M$ er ikke sammenhængende. Idet N er komplet til $A \cup B$, er $\{C \cup D \cup A_0 \cup B_0 \cup M, N \cup A \cup B\}$ en skæv opdeling i G. Fra lemma 3.6 er den skæve opdeling ikke løs, da det er antaget, at G ikke indeholder en balanceret skæv opdeling. Dermed følger af definition 3.5(ii), at intet punkt i P_0 er komplet til N', hvor N' er en antikomponent i N. Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin i (A, C, B). Da er a_1, a_0, P_0, b_0, b_2 en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til N', og hvis indre punkter ikke er komplette til N'. Fra lemma 2.2 følger det, at der findes et afhop i N' for a_1, a_0, P_0, b_0, b_2. Det vil sige, at der findes ikke-nabopunkter $x, y \in N'$, så x, a_0, P_0, b_0, y er en 2-vej. Da $x, y \in N$, er x komplet til $A \cup B \cup \{a_0\}$, og y er komplet til $A \cup B \cup \{b_0\}$. Dermed er x et højrediagonalt punkt, og y er et venstrediagonalt punkt. Hermed er x, y en anti 2-vej, som opfylder lemma 12.25, men der opnåes en modstrid, idet x ikke kan være en højrestjerne, og y ikke kan være en venstrestjerne. Dermed er påstand 3 vist.

Hermed vil $\{A, B, A_0, B_0, M, N\}$ danne et 6-vedhæng i G ifølge definition 12.35, da hvert punkt i A har en nabo i B og omvendt, og $\{A, A_0\}, \{A, N\}, \{B, N\}$ og $\{B, B_0\}$ er komplette par, og $\{A, B_0\}, \{A, M\}, \{B, M\}$ og $\{B, A_0\}$ er antikomplette par. Det er altså vist, at når G ikke har en balanceret skæv opdeling, og hverken G eller $\overline{G}$ har et 2-vedhæng, så vil G have et 6-vedhæng. $\square$

Det er i dette kapitel vist, at grafer, der indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med en aflang ulige prisme, men ikke indeholder en optræden af K_4, ikke kan være et minimalt modeksempel. Det vil sige, at hovedresultat (vi) fra kapitel 1 er vist.

Ved hjælp af sætning 11.6 og sætning 12.36 er det hermed vist, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde en aflang prisme som induceret delgraf. I henhold til sætning 4.4 er der nu kun én mulighed tilbage for udseendet af et minimalt modeksempel, der indeholder en skæv opdeling, nemlig at det indeholder en dobbeltdiamant som induceret delgraf.
For at vise, at et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning ikke findes, skal Berge grafer, der ikke indeholder en skæv opdeling, også betragtes.
I næste del af rapporten betragtes derfor de grafer, som ikke er elementære, ikke indeholder et 2-vedhæng, ikke indeholder et 6-vedhæng og ikke har en balanceret skæv opdeling, i håb om at udelukke disse grafer som minimale modeksempler.

Del IV

Genstridige grafer

Kapitel 13

Indførelse af familier

For at indkredse mulige strukturer for et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning indføres familier af Berge grafer, for derigennem at minimere mulighederne for udseendet af et minimalt modeksempel.

Lad $\mathcal{F}$ være familien af alle Berge grafer. Der indføres nu underfamilier $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{11}$ af $\mathcal{F}$ for ved hjælp af disse at udelukke visse strukturer fra minimale modeksempler. Idéen er først at indføre familien $\mathcal{F}_1$. Det kan så vises, at visse grafer i denne familie ikke kan være minimale modeksempler, hvormed disse fjernes fra $\mathcal{F}_1$, og familien $\mathcal{F}_2$ dannes. Det kan igen vises, at visse grafer i $\mathcal{F}_2$ ikke kan være minimale modeksempler, så disse fjernes fra $\mathcal{F}_2$, og $\mathcal{F}_3$ dannes. Denne procedure fortsættes, indtil der haves en lille familie $\mathcal{F}_{11}$ af grafer tilbage, hvor strukturen af grafer i denne familie er kendt. På denne måde sættes der begrænsninger på strukturen af et minimalt modeksempel. For at holde styr på hvilke grafer der mangler at blive udelukket som minimalt modeksempel, indføres genstridige grafer.

Definition 13.1 (Genstridig)
En graf G siges at være genstridig, hvis G er en Berge graf, hverken G eller $\overline{G}$ er en elementær graf, hverken G eller $\overline{G}$ indeholder et 2-vedhæng, G ikke indeholder et 6-vedhæng, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. ◇

Et minimalt modeksempel må være en genstridig graf, da det gennem denne rapport, i sætning 1.12 og sætning 3.15, som er hovedresultat (i) fra kapitel 1, og i [Cornuéjols & Cunningham, 1985] samt [Chvátal & Sbihi, 1987], er vist, at hvis en Berge graf indeholder bare én af de nævnte strukturer, så er grafen perfekt.

Ved hjælp af familierne kan mulighederne for strukturerne i genstridige grafer indskrænkes, og dermed også mulighederne for et minimalt modeksempel.

Der tages altså udgangspunkt i et minimalt modeksempel $G \in \mathcal{F}$. Først betragtes det, om G kan indeholde en induceret delgraf, der er isomorf med $L(H)$, hvor H er en todelt underdeling af K_4. Antag derfor, at G indeholder en sådan delgraf. Ifølge definition 7.7 vil $L(H)$ enten være degenereret eller ikke-degenereret. Ifølge korollar 9.17, som er hovedresultat (ii) fra kapitel 1, kan $L(H)$ ikke være ikke-degenereret, for så er G ikke et minimalt modeksempel. Derfor må $L(H)$ være degenereret, hvilket giver anledning til den første familie af grafer.

Definition 13.2 ($\mathcal{F}_1$)
Lad $G \in \mathcal{F}$. Hvis der for enhver todelt underdeling H af K_4 gælder, at hvis en induceret delgraf af G er isomorf med $L(H)$, så er $L(H)$ degenereret, da vil $G \in \mathcal{F}_1$. ◇

Fra korollar 9.17 følger også, at enhver genstridig graf tilhører $\mathcal{F}_1$.

Hvis en graf i $\mathcal{F}_1$ indeholder en induceret delgraf, som er isomorf med $L(K_{3,3})$, kan denne graf per korollar 9.19, som er hovedresultat (iii) fra kapitel 1, ikke være et minimalt modeksempel, hvilket giver anledning til den næste familie af grafer.

Definition 13.3 ($\mathcal{F}_2$)
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_1$ og $\overline{G} \in \mathcal{F}_1$. Hvis ingen induceret delgraf af G er isomorf med $L(K_{3,3})$, så vil $G \in \mathcal{F}_2$. ◇

Bemærk, at hvis komplementet af en graf indeholder $L(K_{3,3})$, så tilhører grafen også familien $\mathcal{F}_2$, da $L(K_{3,3}) = \overline{L(K_{3,3})}$.

Fra korollar 9.19 følger også, at enhver genstridig graf tilhører $\mathcal{F}_2$.

Ifølge sætning 9.30, som er hovedresultat (iv) fra kapitel 1, vil enhver graf i $\mathcal{F}_2$ enten ikke være et minimalt modeksempel, eller så indeholder den ikke en optræden af K_4. Hermed kan en ny familie af grafer defineres.

Definition 13.4 ($\mathcal{F}_3$)
Lad $G \in \mathcal{F}_2$. Hvis hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en optræden af K_4, så vil $G \in \mathcal{F}_3$. ◇

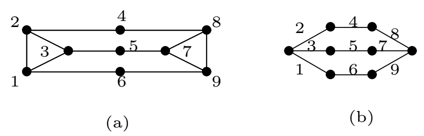
Af sætning 9.30 følger også, at enhver genstridig graf tilhører $\mathcal{F}_3$.

Hvis en graf i $\mathcal{F}_3$ indeholder en lige prisme som ægte induceret delgraf, da kan denne graf per sætning 11.6, som er hovedresultat (v) fra kapitel 1, ikke være et minimalt modeksempel, hvorfor en ny familie af grafer defineres.

Definition 13.5 ($\mathcal{F}_4$)
Lad $G \in \mathcal{F}_3$. Hvis hverken G eller $\overline{G}$ indeholder en lige prisme som induceret delgraf, så vil $G \in \mathcal{F}_4$. ◇

Lemma 13.6
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_4$. ◇

Bevis
Fra korollar 9.31 følger, at hvis der findes en optræden af K_4 i G, så kan G ikke være en genstridig graf. Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at G er en genstridig graf, hvormed der ikke findes en optræden af K_4 i G. Da der ikke findes en optræden af K_4 i G, findes der ikke en ikke-degenereret optræden af K_4 i G, og da G er en genstridig graf, indeholder G ikke et 2-vedhæng og har ikke en balanceret skæv opdeling. Dermed følger af sætning 11.6, at hvis G indeholder en lige prisme, så er G selv en lige prisme, og G består af ni punkter.



Figur 13.1: (a): Grafen G. (b): Grafen H, hvor $G = L(H)$.

På figur 13.1 ses det, at (a) er liniegrafen af (b). Desuden ses det, at grafen (b) er en todelt graf. Dermed er en modstrid opnået, idet G er en genstridig graf og dermed ikke elementær. Derfor kan det ifølge sætning 11.6 konkluderes, at G ikke indeholder en lige prisme, og dermed opfylder G definition 13.5. □

Hvis en graf i $\mathcal{F}_4$ indeholder en aflang ulige prisme som induceret delgraf, da kan grafen ifølge sætning 12.36 ikke være et minimalt modeksempel. Altså kan en ny familie af grafer dannes.

Denne metode er nu fremgangsmåden i de resterende kapitler. Det forsøges hele tiden at eliminere mulige strukturer i et minimalt modeksempel for derved at nå frem til, at et minimalt modeksempel ikke findes. De følgende kapitler omhandler hver en familie af grafer, og hvert kapitel afsluttes med at eliminere endnu en struktur fra et minimalt modeksempel.

Kapitel 14

Familien $\mathcal{F}_5$

Dette kapitel vil omhandle familien $\mathcal{F}_5$, hvor det vises, at enhver graf i familien $\mathcal{F}_5$, der indeholder en dobbeltdiamant som induceret delgraf, ikke kan være et minimalt modeksempel. Formålet med dette kapitel er altså at vise hovedresultat (vii) fra kapitel 1.
Et redskab til at behandle familien $\mathcal{F}_5$ er kuber, hvilket defineres i afsnit 14.1 og benyttes til at vise hovedresultat (vii).
Det vil først blive vist, at en genstridig graf vil tilhøre $\mathcal{F}_5$, hvormed endnu en betingelse skal være opfyldt, for at en genstridig graf haves.

Definition 14.1 ($\mathcal{F}_5$)
Lad $G \in \mathcal{F}_4$. Hvis yderligere ingen induceret delgraf af hverken G eller $\overline{G}$ er en aflang ulige prisme, så vil $G \in \mathcal{F}_5$. $\diamond$

Familien $\mathcal{F}_5$ kan således ikke indeholde hverken lige prismer eller aflange ulige prismer, så eneste mulighed for en prisme i en graf i familien $\mathcal{F}_5$ er prismen, hvor hver 2-vej mellem de to trekanter har længde én.
Bemærk, at hvis komplementet af en graf indeholder en aflang ulige prisme, så vil grafen tilhøre familien $\mathcal{F}_5$.

Mulighederne for en genstridig graf indskrænkes nu yderligere til at tilhøre familien $\mathcal{F}_5$, hvilket vil sige, at et minimalt modeksempel heller ikke kan indeholde en aflang ulige prisme.

Lemma 14.2
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_5$. $\diamond$

Bevis
Ifølge lemma 13.6 vil $G \in \mathcal{F}_4$. Ifølge korollar 9.31 vil der ikke findes en optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. Da følger af sætning 12.36, at hvis G indeholder en aflang prisme, så opnåes en modstrid med, at G er en genstridig graf. Dermed må $G \in \mathcal{F}_5$. $\square$

Følgende lemma er en variation af lemma 2.2 for grafer i familien $\mathcal{F}_5$.

Lemma 14.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$, og lad P være en 2-vej i G af ulige længde. Lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, så begge endepunkter i P er komplette til X. Da vil et af følgende gælde:

(i) *En kant i P er komplet til X.*

(ii) *P har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde, som forbinder de indre punkter i P, hvis indre tilhører X.* $\diamond$

Lemma 14.4
Lad $G \in \mathcal{F}_5$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i G af lige længde mindst to, så p_1 er det eneste punkt i P, som er komplet til X, og p_n er det eneste punkt i P, som er komplet til Y. Da har P længde to, og der findes en anti 2-vej Q mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X. Desuden findes der en anti 2-vej R mellem p_1 og p_2, hvis indre tilhører Y, og nøjagtig en af Q eller R har ulige længde. $\diamond$

14.1 Kuber

Følgende definition af firkant og antifirkant benyttes til at definere en kube, som bruges til at vise resultater, der leder frem til at vise hovedresultat (vii) fra kapitel 1.

Definition 14.5 (Firkant og antifirkant)
Lad G være en Berge graf, og lad A og B være disjunkte delmængder af $V(G)$. Et hul a_1, b_1, b_2, a_2 af længde fire, hvor $a_1, a_2 \in A$ og $b_1, b_2 \in B$, kaldes en firkant i $\{A, B\}$. Parret $\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende, hvis følgende er opfyldt:

(i) *$|A| \geq 2$ og $|B| \geq 2$.*

(ii) *For enhver opdeling $\{X, Y\}$ af A, hvor X og Y er ikke-tomme, vil der findes en firkant a_1, b_1, b_2, a_2 med $a_1 \in X$ og $a_2 \in Y$.*

(iii) *For enhver opdeling $\{X, Y\}$ af B, hvor X og Y er ikke-tomme, vil der findes en firkant a_1, b_1, b_2, a_2 med $b_1 \in X$ og $b_2 \in Y$.*

En antifirkant er en firkant i $\overline{G}$, og $\{A, B\}$ er antifirkants-sammenhængende, hvis parret er firkants-sammenhængende i $\overline{G}$. $\diamond$

Bemærk, at hvis $\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende, så vil ethvert punkt i $A \cup B$ tilhøre en firkant. En antifirkant i $\{A, B\}$ er et antihul a_1, b_1, b_2, a_2 med $a_1, a_2 \in A$ og $b_1, b_2 \in B$.

Definition 14.6 (Kube)
Lad G være en Berge graf, og lad A, B, C og D være delmængder af $V(G)$. Da siges $\{A, B, C, D\}$ at være en kube i G, hvis følgende er opfyldt:

(i) *A, B, C og D er disjunkte og ikke-tomme.*

(ii) *A er komplet til C, B er komplet til D, A er antikomplet til D, og B er antikomplet til C.*

(iii) *$\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende, og $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende.*

En kube er maksimal, hvis der ikke findes en kube $\{A', B', C', D'\}$ med $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$, $C \subseteq C'$ og $D \subseteq D'$, så $\{A, B, C, D\} \neq \{A', B', C', D'\}$.
Delgrafen $K = \langle \{A, B, C, D\} \rangle_G$ siges at være dannet af kuben. $\diamond$

Bemærk, at hvis $\{A, B, C, D\}$ er en kube i G, så er $\{C, D, B, A\}$ en kube i $\overline{G}$.

Følgende lemma omhandler en opdeling af punkter i en kube i to typer.

Lemma 14.7
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$. Lad $\{A, B, C, D\}$ være en maksimal kube i G, som danner K, lad $v \in V(G) - V(K)$, og lad X være mængden af naboer til v i $V(K)$. Da vil et af følgende gælde:

(i) *X er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$, og $X \cap (A \cup C)$ er komplet til $X \cap (B \cup D)$.*

(*ii*) *X indeholder en af $A \cup B, C \cup D, A \cup D$ eller $B \cup C$, og $(A \cup D) - X$ er antikomplet til $(B \cup C) - X$.*

$\diamond$

Bevis
Bemærk, at (ii) er (i) i komplementærgrafen.

Hvis $X \subseteq A \cup B$, og der findes et punkt $a \in X \cap A$ og et punkt $b \in X \cap B$, som ikke er naboer, så vælg $c \in C$ og $d \in D$, som er naboer, hvormed v, a, c, d, b er et hul af ulige længde, og en modstrid er opnået, så der findes ikke ikke-nabopunkter a og b. Det vil sige, at hvis $X \subseteq A \cup B$, så er lemmaet opfyldt. Ligeledes vil lemmaet være opfyldt, hvis $X \subseteq C \cup D$. Hvis X er en delmængde af $A \cup C$ eller $B \cup D$, så er lemmaet opfyldt, da $X \cap (B \cup D) = \emptyset$ eller $X \cap (A \cup C) = \emptyset$, og alt er komplet til den tomme mængde. Det kan derfor antages, at X har punkter i både A og D.

Ved at gentage ovenstående argument i $\overline{G}$ kan det antages, at ingen af $A \cup B, C \cup D, A \cup D$ og $B \cup C$ er indeholdt i X, det vil sige, at enten indeholder X hverken A eller C, eller så indeholder X hverken B eller D. Disse to tilfælde bliver, når der tages komplementer, til, at X hverken indeholder C eller B, eller til, at X ikke indeholder hverken D eller A, da $\{C, D, B, A\}$ er en kube i $\overline{G}$. Det kan derfor antages, at X indeholder hverken B eller D.
Lad $A_1 = A \cap X$, og lad $A_2 = A - A_1$. Ligeledes defineres B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 og D_2. Hidtil er det vist, at A_1, B_2, D_1 og D_2 er ikke-tomme. Vælg en antifirkant c_2, d_1, d_2, c_1, så $d_1 \in D_1$ og $d_2 \in D_2$, og vælg $b_2 \in B_2$. Idet v, c_2, d_2, b_2, d_1 ikke må være et hul af ulige længde, må $c_2 \in C_2$. Dermed er A_1 komplet til B_1, for hvis $a_1 \in A_1$ og $b_1 \in B_1$ er ikke-nabopunkter, så er v, a_1, c_2, d_2, b_1 et hul af ulige længde. Hvis $A_1 = A$, altså at $A_2 = \emptyset$, så følger det, idet $\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende, og A_1 er komplet til B_1, at B_1 er tom. Men så kan C udvides med v, fordi v, d_2, d_1, c_2 bliver en ny antifirkant, hvilket er i modstrid med, at kuben $\{A, B, C, D\}$ er maksimal. Altså er A_2 ikke-tom. Dermed vil der findes en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, hvor $a_1 \in A_1$ og $a_2 \in A_2$. Idet a_1 er ikke-nabo til b_2 og komplet til B_1, følger det, at $b_2 \in B_2$. Men da er v, a_1, a_2, b_2, d_1 et hul af ulige længde, hvilket giver en modstrid, så antagelsen, om at X har punkter i både A og D, må være forkert. $\square$

De to typer af punkter i en kube navngives nu til kubeunderpunkter henholdsvis kubeoverpunkter.

Definition 14.8 (Kubeunderpunkt og kubeoverpunkt)
Lad $G \in \mathcal{F}_5$. Lad $\{A, B, C, D\}$ være en maksimal kube i G, som danner K, lad $v \in V(G) - V(K)$, og lad X være mængden af naboer til v i $V(K)$. Da siges v at være et kubeunderpunkt, hvis lemma 14.7(i) er opfyldt, og v siges at være et kubeoverpunkt, hvis lemma 14.7(ii) er opfyldt. $\diamond$

Hvis $K = \{A, B, C, D\}$ er en kube i G benævnes kubeoverpunkter og kubeunderpunkter også med henholdsvis K-overpunkter og K-underpunkter.
Bemærk, at ifølge definition 14.8 og lemma 14.7 vil ethvert punkt $v \in V(G) - V(K)$, hvor K er en kube i G, være enten et K-overpunkt eller et K-underpunkt.

Lemma 14.9
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$, lad $\{A, B, C, D\}$ være en maksimal kube i G, som danner K, lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være en sammenhængende mængde af K-underpunkter, og lad X være mængden af vedhæftninger for F i $V(K)$. Da er X en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Yderligere er $X \cap (A \cup C)$ komplet til $X \cap (B \cup D)$. $\diamond$

I det følgende bevis er beviserne for påstandene ikke medtaget her.

Bevis
Antag, at X ikke er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$, og vælg F mindst mulig, så X ikke er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Da alle punkter i F er K-underpunkter, er lemmaet ifølge lemma 14.7 opfyldt, hvis $|F| = 1$. Det kan derfor antages, at $|F| \geq 2$. Desuden kan det antages, at X har punkter i både A og D, da det er antaget, at X ikke

er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Da F er valgt mindst mulig, vil F være en 2-vej $f_1, \ldots, f_k$, hvor $k \geq 2$. Det kan antages, at f_1 er det eneste punkt i F med en nabo i A, og f_k er det eneste punkt i F med en nabo i D, for ellers kunne F vælges mindre. Lad X_1 og X_2 være mængden af vedhæftninger for henholdsvis $F - \{f_k\}$ og $F - \{f_1\}$ i K. Da F er valgt mindst mulig, og f_1 har en nabo i A, må X_1 være en delmængde af en af $A \cup B$ eller $A \cup C$, og ligeledes da f_k har en nabo i D, må X_2 være en delmængde af en af $B \cup D$ eller $C \cup D$.

Påstand 1: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup B$ *og* $X_2 \subseteq B \cup D$.

Påstand 2: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup C$ *og* $X_2 \subseteq C \cup D$.

Påstand 3: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup B$ *og* $X_2 \subseteq C \cup D$.

Påstand 4: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup C$ *og* $X_2 \subseteq B \cup D$.

Fra påstand 1, påstand 2, påstand 3 og påstand 4 vil der i alle tilfælde opnåes en modstrid med antagelsen om, at X har punkter i både A og D, så der må gælde, at X er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$.

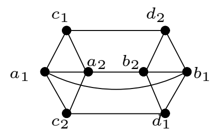
Det skal nu vises, at $X \cap (A \cup C)$ er komplet til $X \cap (B \cup D)$.
Det kan antages, at X har punkter i både $A \cup C$ og $B \cup D$, for ellers er lemmaet opfyldt. Da følger fra første del af lemmaet, at enten er $X \subseteq C \cup D$, eller så er $X \subseteq A \cup B$.
Antag, at $X \subseteq C \cup D$. Hvis det er muligt, så vælg $c \in C \cap X$ og $d \in D \cap X$, så de ikke er naboer, og vælg en 2-vej P, som forbinder dem, og som har indre tilhørende F. Dermed har P længde mindst to. Lad a_1, b_1, b_2, a_2 være en firkant. Da vil 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, P, d danne en aflang prisme, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$. Det vil sige, at der ikke findes punkter c og d, så de ikke er naboer, hvormed lemmaet er opfyldt.
Antag, at $X \subseteq A \cup B$. Antag, at $X \cap A$ ikke er komplet til $X \cap B$, og vælg en 2-vej $a, f_1, \ldots, f_k, b$, hvor $a \in A$ og $b \in B$ ikke er naboer, og $f_1, \ldots, f_k \in F$, hvor k er valgt mindst muligt. Idet f_1 er et K-underpunkt, er f_1's naboer i A ifølge lemma 14.7 komplette til f_1's naboer i B, så $k \geq 2$, og f_1 er ikke-nabo til b. Lad A' være mængden af punkter $a \in A$, så a er nabo til f_1, og der findes en ikke-nabo $b \in B$ til a, hvor b er nabo til f_k. Da det er antaget, at $X \cap A$ ikke er komplet til $X \cap B$, er $A' \neq \emptyset$. Definér B' analogt i B. Hvis $A' = A$ og $B' = B$, så er f_1 komplet til A, og da F er valgt mindst mulig, findes der ikke kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ og B, og ligeledes er f_k komplet til B, og der findes ikke kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og A. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2. Da danner 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen $f_1, \ldots, f_k$ en prisme, så $k = 2$, da der ikke må findes aflange prismer i G. Da kan f_1 tilføjes C, idet $\{A, B, C, D\}$ er en kube, hvormed punkterne i C er komplette til A, og f_2 kan tilføjes D, idet punkterne i D er komplette til B. Men dette danner en modstrid med, at kuben K er maksimal. Det kan derfor antages, at $A' \neq A$.
Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så $a_1 \in A'$ og $a_2 \notin A'$. Vælg $c \in C$ og $d \in D$, så de er naboer. Vælg $b \in B'$, som er ikke-nabo til a_1, og en sådan vil findes per definition af A'. Da k er valgt mindst muligt, vil $a_1, f_1, \ldots, f_k, b$ være en 2-vej, og da $a_1, f_1, \ldots, f_k, b, d, c$ er et hul, må k være lige. Idet b ikke er nabo til a_1, er $b \neq b_1$. Antag, at f_k er nabo til b_2. Mængden af vedhæftninger for $\{f_1, \ldots, f_k\}$ med hensyn til prismen dannet af 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d er ikke lokal med hensyn til prismen, og der findes ikke vedhæftninger for c og d, så fra korollar 10.9 er både a_2 og b_1 vedhæftninger. Idet a_2 og b_1 ikke er naboer, følger, af at k er valgt mindst muligt og lemma 10.6, at a_2 er nabo til f_1, og b_1 er nabo til f_k, hvilket danner modstrid med, at $a_2 \notin A'$. Det vil sige, at f_k ikke er nabo til b_2, hvormed $b \neq b_2$, da $b \in B'$. Idet c ikke har en nabo i den sammenhængende mængde $F' = \{f_1, \ldots, f_k, b\}$, og mængden af vedhæftninger for F' ikke er lokal med hensyn prismen dannet af 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d, følger det af korollar 10.9, at F' har en vedhæftning i 2-vejen a_2, b_2. Hvis a_2 ikke er en vedhæftning, må b_2 være det, og da k er valgt mindst muligt, må b være den eneste nabo til b_2 i F', men da danner 2-vejen $a_1, f_1, \ldots, f_k, b$, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d en aflang prisme, og en modstrid er nået. Altså må a_2 være en vedhæftning for F' og må dermed være nabo til b. Idet $a_2, a_1, f_1, \ldots, f_k, b$ ikke må være et hul af ulige længde, har a_2 en nabo i $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Hvis b_1 også har en nabo i $\{f_1, \ldots, f_k\}$, så følger det, af at k er valgt mindst muligt og lemma 10.6(i), da a_2 og b_1 ikke er naboer, at a_2 er nabo til f_1, og b_1 er nabo til f_k, hvormed $a_2 \in A'$, og en modstrid er opnået. Det vil sige, at

b_1 ikke har en nabo i $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Idet $a_1, f_1, \ldots, f_k, b, b_1$ ikke må være et hul af ulige længde, er b_1 ikke-nabo til b, hvormed b_1 ikke har naboer i F'. Lad P være 2-vejen mellem a_2 og b med indre i F'. Fra korollar 10.9 har a_1 en nabo i $P - \{a_2\}$, da a_1 så er en vedhæftning for F'. Den eneste nabo til a_1 i F' er f_1, så f_1 tilhører $P - \{a_2\}$, hvormed f_1 er nabo til a_2, og der findes ikke andre kanter mellem a_2 og F'. Idet $a_2 \notin A'$, er a_2 nabo til b. Da er mængden af naboer til b i prismen dannet af 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d ikke lokal med hensyn til prismen, og ingen vedhæftninger tilhører 2-vejen a_1, b_1, hvilket danner modstrid med korollar 10.9. Dermed må antagelsen, om at $X \cap A$ ikke er komplet til $X \cap B$, være forkert. $\square$

Hovedresultat (vii) fra kapitel 1 vises nu.

Sætning 14.10
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$. Hvis G indeholder en dobbeltdiamant som induceret delgraf, så vil enten G eller $\overline{G}$ indeholde et 2-vedhæng, eller G har en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Antag, at G og $\overline{G}$ ikke indeholder et 2-vedhæng, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Antag, at G indeholder en dobbeltdiamant, hvormed G også indeholder en kube, se figur 14.1 for eksempel på dette.



Figur 14.1: Eksempel på, at når G indeholder en dobbeltdiamant, så indeholder G også en kube.

Dermed må der findes en maksimal kube $\{A, B, C, D\}$ i G, som danner K. Lad F være mængden af K-underpunkter i $V(G) - V(K)$, og lad Y være mængden af K-overpunkter i $V(G) - V(K)$. Ifølge lemma 14.7 vil $V(K) \cup Y \cup F = V(G)$.

Påstand 1: *Enhver antikomponent Y_1 i Y er komplet til en af $A \cup B, C \cup D, A \cup D$ eller $B \cup C$, og hver kant fra $A \cup D$ til $B \cup C$ har et endepunkt, som er komplet til Y_1.*

I $\overline{G}$ er $\{C, D, B, A\}$ en maksimal kube, og Y_1 er en sammenhængende mængde af underpunkter, da overpunkter bliver til underpunkter i $\overline{G}$. Anvendes lemma 14.9, vil mængden af vedhæftninger for Y_1 være indeholdt i $C \cup D, B \cup A, C \cup B$ eller $D \cup A$ i $\overline{G}$. Dermed er Y_1 i G komplet til $A \cup B, C \cup D, A \cup D$ eller $B \cup C$, da for eksempel hvis Y_1's vedhæftninger i $\overline{G}$ er indeholdt i $C \cup D$, så har Y_1 ingen naboer i $A \cup B$ i $\overline{G}$, hvilket betyder, at Y_1 er komplet til $A \cup B$ i G. Fra lemma 14.9 følger endvidere, at mængden af vedhæftninger for Y_1 i $C \cup B$ i $\overline{G}$ er komplet til mængden af vedhæftninger for Y_1 i $D \cup A$ i $\overline{G}$.

Det ønskes vist, at hver kant fra $A \cup D$ til $B \cup C$ i G har et endepunkt, som er komplet til Y_1. Antag derfor, at der findes en kant mellem $a \in A \cup D$ og $b \in B \cup C$, hvor hverken a eller b er komplette til Y_1 i G. Da vil både a og b have en nabo i Y_1 i $\overline{G}$, og dermed er de naboer i $\overline{G}$, hvormed de ikke kan være naboer i G, og en modstrid er opnået, hvormed påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Der findes ikke en antikomponent i Y, der er komplet til $A \cup D$ eller $B \cup C$.*

Antag, at der findes en antikomponent i Y, der er komplet til $A \cup D$ eller $B \cup C$, og lad det være Y_1. Af symmetrigrunde kan det antages, at Y_1 er komplet til $A \cup D$. Lad L være foreningen af C og alle komponenter i F med en vedhæftning i C, og lad M være foreningen af B og alle andre komponenter i F. Lad desuden X være mængden af alle punkter, som er komplette til Y_1 i G, men ikke tilhører $L \cup M$. Det vil sige, at alle overpunkter tilhører $Y_1 \cup X$, da Y_1 er en antikomponent, og de andre komponenter i Y dermed er komplette til Y_1, hvormed de tilhører X. De fire mængder L, M, X og Y_1 er alle ikke-tomme og udgør en opdeling af $V(G)$. Idet Y_1 er komplet til X, er $Y_1 \cup X$ ikke antisammenhængende, og idet der ikke findes kanter mellem L og M, da $\{B, C\}$ er et

antikomplet par, er $L \cup M$ ikke sammenhængende, hvormed $\{L \cup M, Y_1 \cup X\}$ er en skæv opdeling i G.
Da G ikke har en balanceret skæv opdeling, er opdelingen $\{L \cup M, Y_1 \cup X\}$ ifølge lemma 3.6 ikke løs. Fra lemma 2.13 er $\{L, D\}$ et balanceret par, da ethvert punkt i B er komplet til D og antikomplet til L. Lad $u, v \in L$ være to nabopunkter, og antag, at de er forbundet af en anti 2-vej Q_1 af ulige længde med indre tilhørende Y_1. Hvis både u og v har ikke-naboer i D, så er de også forbundet af en anti 2-vej Q_2 med indre i D, da D er antisammenhængende, fordi $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende. Anti 2-vejen Q_2 må ligeledes have ulige længde, da den sammen med Q_1 danner et hul, idet Y_1 er komplet til D. Ifølge definition 2.12 må der ikke findes en sådan 2-vej Q_2, når $\{L, D\}$ er et balanceret par. Det kan derfor antages, at u er komplet til D. Dermed vil $u \notin C$, da $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende, så u vil tilhøre en komponent F_1 i F, hvor F_1 har en vedhæftning i C. Da F kun indeholder K-underpunkter, er u et K-underpunkt. Fra lemma 14.7(i) vil det sige, at alle dets naboer i C er komplette til alle dets naboer i D. Dermed har u ikke naboer i C, da u's naboer i C skal være komplette til u's naboer i D, som er samtlige punkter i D, hvilket ikke kan lade sig gøre, idet $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende. Dermed vil $v \in F_1$. Idet F_1 har en vedhæftning i både C og D, da u har naboer i D, følger det af lemma 14.9, at F_1 ikke har vedhæftninger i A eller B, da F_1 er en sammenhængende mængde af K-underpunkter, og mængden af dens vedhæftninger dermed er indeholdt i $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Dette betyder, at u og v ikke har naboer i A, men da er a, u, Q_1, v et antihul af ulige længde for $a \in A$, og dette danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$. Det vil sige, at antagelsen, om at u og v er forbundet af en anti 2-vej af ulige længde med indre tilhørende Y_1, er forkert.
Antag, at der findes to ikke-nabopunkter $u, v \in Y_1$, som er forbundet af en 2-vej P af ulige længde med indre tilhørende L. Da en anti 2-vej af længde tre er det samme som en 2-vej af længde tre, må P have længde mindst fem ifølge det ovenstående argument om anti 2-veje. Per definition er $A \cup D$ antisammenhængende, og der findes ikke et punkt i L, som er komplet til $A \cup D$, da alle punkter i L er K-underpunkter eller tilhører C. Dermed er P en 2-vej af ulige længde, hvor endepunkterne er komplette til $A \cup D$, idet $u, v \in Y_1$, mens de indre punkter ikke er komplette til $A \cup D$. Dette er dog i modstrid med lemma 14.3(i), da ingen kant så er komplet til $A \cup D$, som krævet i lemma 14.3(i). Det vil sige, at der ikke findes ikke-nabopunkter u og v, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde med indre tilhørende L.
Idet der hverken findes en anti 2-vej af ulige længde med indre tilhørende Y_1 mellem to nabopunkter i L eller en 2-vej af ulige længde med indre tilhørende L mellem to ikke-nabopunkter i Y_1, vil det ifølge definition 2.12 sige, at $\{L, Y_1\}$ er et balanceret par. Da følger af lemma 3.10(iii), hvor L i lemma 3.10 svarer til L, R svarer til M, X svarer til X, og Y svarer til Y_1, at G har en balanceret skæv opdeling. Dette giver en modstrid, da det er antaget, at G ikke har en balanceret skæv opdeling. Det vil sige, at antagelsen, om at der findes en antikomponent i Y, der er komplet til $A \cup D$ eller $B \cup C$, er forkert, og påstand 2 er vist.

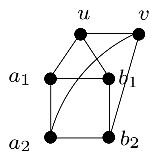
Påstand 3: *Der findes ikke en komponent i F, hvis vedhæftninger i K er en delmængde af $A \cup C$ eller $B \cup D$.*

Lad F_k være en vilkårlig komponent i F. I $\overline{G}$ er $\{C, D, B, A\}$ en maksimal kube, og F_k er en antikomponent i F. Det følger af påstand 2, at F_k ikke er komplet til $C \cup A$ eller $B \cup D$. Det vil sige, at F_k i G ikke er antikomplet til $A \cup C$ eller $D \cup B$ og dermed har vedhæftninger i både $A \cup C$ og $B \cup D$. Altså kan der ikke findes en komponent i F, så dens vedhæftninger er indeholdt i $A \cup C$ eller $B \cup D$. Dette viser påstand 3.

Påstand 4: *Der findes ikke både en komponent F_1 i F, hvis mængde af vedhæftninger er indeholdt i $A \cup B$, og en antikomponent Y_1 i Y, som er komplet til $A \cup B$.*

Antag, at sådanne F_1 og Y_1 findes. Lad $M = C \cup D \cup (F - F_1)$, og lad X være mængden af alle punkter i $V(G) - (M \cup F_1)$, som er komplette til Y_1. Da Y_1 er komplet til $A \cup B$, vil $A \cup B \subseteq X$. De fire mængde F_1, M, Y_1 og X er alle ikke-tomme og udgør en opdeling af $V(G)$. Idet Y_1 er komplet til X, er $Y_1 \cup X$ ikke antisammenhængende, og idet der ikke findes kanter mellem F_1 og M, er $F_1 \cup M$ ikke sammenhængende, og dermed er $\{F_1 \cup M, Y_1 \cup X\}$ en skæv opdeling i G.
Antag, at $u, v \in F_1$ er nabopunkter, og antag, at de er forbundet af en anti 2-vej Q af ulige længde,

hvis indre tilhører Y_1. Idet a, u, Q, v ikke må være et antihul af ulige længde, hvor $a \in A$, følger det, at enten u eller v har en nabo i A, lad det være u. Da der ifølge påstand 3 findes en vedhæftning for F_1 i B, og intet punkt i B er komplet til A, følger af lemma 14.9, at intet punkt i A er en vedhæftning for F_1. Det vil sige, at u ikke er komplet til A. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så u er nabo til a_1, men ikke er nabo til a_2. Idet a_2, u, Q, v ikke må være et antihul, og u ikke er nabo til a_2, må v være nabo til a_2. Idet u er et K-underpunkt, vil u ifølge lemma 14.7 ikke være nabo til b_2, da $\{A, B, C, D\}$ er en kube, hvormed A og B ikke er komplette til hinanden. Idet b_2, u, Q, v ikke må være et antihul, er v nabo til b_2. Ligeledes er b_1 nabo til u, men ikke-nabo til v, se figur 14.2.



Figur 14.2: Firkanten a_1, b_1, b_2, a_2 samt punkterne u og v.

Da er $\langle a_1, a_2, b_1, b_2, u, v, c, d\rangle_G$ isomorf med $L(K_{3,3} - e)$, hvor $c \in C$ og $d \in D$ er naboer. Dette danner en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, da $L(K_{3,3} - e)$ er liniegrafen af en todelt underdeling af K_4. Det vil sige, at der ikke findes nabopunkter $u, v \in F_1$, som er forbundet af en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører Y_1.
Ved at tage komplementer kan det vises, at der ikke findes ikke-nabopunkter i Y_1, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde med indre i F_1. Idet der hverken findes en anti 2-vej af ulige længde med indre tilhørende Y_1 mellem to nabopunkter i F_1 eller en 2-vej af ulige længde med indre tilhørende F_1 mellem to ikke-nabopunkter i Y_1, vil det ifølge definition 2.12 sige, at $\{F_1, Y_1\}$ er et balanceret par. Da følger det af lemma 3.10(iii), at G har en balanceret skæv opdeling, og en modstrid er opnået, da G er antaget ikke at have en balanceret skæv opdeling. Det vil sige, at antagelsen, om at der både findes en komponent F_1 i F, hvis mængde af vedhæftninger er indeholdt i $A \cup B$, og en antikomponent Y_1 i Y, som er komplet til $A \cup B$, er forkert, og dermed er påstand 4 vist.

Påstand 5: *Der findes ikke både en komponent F_1 i F, hvis vedhæftninger er indeholdt i $C \cup D$, og en antikomponent Y_1 i Y, som er komplet til $C \cup D$.*

Antag, at både F_1 og Y_1 findes. Lad $M = A \cup B \cup (F - F_1)$, og lad X være mængden af alle punkter i $V(G) - (M \cup F_1)$, som er komplette til Y_1. Da Y_1 er komplet til $C \cup D$, vil $C \cup D \subseteq X$. De fire mængder F_1, M, Y_1 og X er alle ikke-tomme og udgør en opdeling af $V(G)$. Idet Y_1 er komplet til X, er $Y_1 \cup X$ ikke antisammenhængende, og idet F_1 og M ikke har kanter mellem sig, er $F_1 \cup M$ ikke sammenhængende, hvormed $\{F_1 \cup M, Y_1 \cup X\}$ er en skæv opdeling i G. Antag, at $u, v \in F_1$ er nabopunkter og er forbundet af en anti 2-vej Q af ulige længde, hvis indre tilhører Y_1. Vælg $c \in C$ og $d \in D$, som ikke er naboer. Idet c, u, Q, v ikke må være et antihul, er c nabo til u eller v, og ligeledes vil d være nabo til u eller v, idet d, u, Q, v heller ikke må være et antihul. Det vil sige, at både c og d er vedhæftninger for F_1, hvilket danner en modstrid med lemma 14.9, da c og d ikke er komplette til hinanden. Altså må der ikke findes sådanne punkter u og v.
Ved at tage komplementer kan det vises, at der ikke findes to ikke-nabopunkter i Y_1, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde med indre i F_1. Det vil sige, at $\{F_1, Y_1\}$ ifølge definition 2.12 er et balanceret par, og da følger af lemma 3.10(iii), at G har en balanceret skæv opdeling, så en modstrid er opnået, hvormed påstand 5 er vist.

Hvis $Y = \emptyset$, altså hvis der ikke findes K-overpunkter, så vil der for enhver komponent i F ifølge påstand 3 gælde, at mængden af dens vedhæftninger er indeholdt i $A \cup B$ eller $C \cup D$. Det vil sige, at hver komponent kun har kanter til en af de to mængder $A \cup B$ og $C \cup D$. Dermed vil der findes en opdeling af $V(G)$ i to mængder, hvor den ene består af $A \cup B$ sammen med de komponenter i F, der har vedhæftninger i $A \cup B$, og den anden består af $C \cup D$ sammen med de komponenter i F, der har vedhæftninger i $C \cup D$. Dermed vil der ifølge definition 9.15 findes et 2-vedhæng i G, hvilket danner en modstrid, da det er antaget, at G ikke indeholder et 2-vedhæng. Det vil sige, at

Y er ikke-tom, og ved at gennemføre argumentet i komplementet vil også F være ikke-tom. Fra påstand 4, eventuelt ved at tage komplementer, kan det antages, at der ikke findes en antikomponent af Y, som er komplet til $A \cup B$. Fra påstand 1 og påstand 2 vil Y så være komplet til $C \cup D$. Idet Y er ikke-tom, vil der ifølge påstand 5 gælde, at der ikke findes en komponent F_1 i F, hvis vedhæftninger er indeholdt i $C \cup D$. Fra lemma 14.9 vil mængden af vedhæftninger for F_1 være indeholdt i $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Da følger af påstand 3, at mængden af vedhæftninger er indeholdt i $A \cup B$. Vælg en antikomponent Y_1 i Y. Fra påstand 4 er Y_1 ikke komplet til A eller ikke komplet til B. Lad X være mængden af punkter i $V(K)$, som er komplette til Y_1. Lad L være foreningen af $A - X$ og alle komponenter i F, som har en vedhæftning i $A - X$, og lad M være foreningen af $B - X$ og alle de andre komponenter i F. Fra påstand 1 vil enhver kant mellem $A \cup D$ og $B \cup C$ have et endepunkt, som er komplet til Y_1, altså vil endepunktet tilhøre X, hvormed der ikke findes kanter mellem $A - X$ og $B - X$. Da følger af lemma 14.9, at ingen komponent i F har vedhæftninger i både $A - X$ og $B - X$, da de ikke kan være komplette til hinanden. Dermed findes der ikke kanter mellem L og M, og $L \cup M$ er ikke sammenhængende. De fire mængder $L, M, X \cup (Y - Y_1)$ og Y_1 udgør en opdeling af $V(G)$ i ikke-tomme mængder. Her er Y_1 komplet til $X \cup (Y - Y_1)$, så $\{L \cup M, X \cup (Y - Y_1) \cup Y_1\}$ er en skæv opdeling i G. Idet intet punkt i D har en nabo i L, da $\{A, D\}$ er et antikomplet par, følger af definition 3.5, at den skæve opdeling er en løs skæv opdeling. Da følger af lemma 3.6, at G har en balanceret skæv opdeling, hvilket danner en modstrid med antagelsen om, at G ikke har en balanceret skæv opdeling. Altså må antagelsen, om at G og $\overline{G}$ ikke indeholder et 2-vedhæng, og G ikke har en balanceret skæv opdeling, være forkert. □

Det kan altså konstateres, at en graf i familien $\mathcal{F}_5$, som indeholder en dobbeltdiamant, er en perfekt graf, da den så indeholder et 2-vedhæng eller har en balanceret skæv opdeling, eller dens komplement indeholder et 2-vedhæng. Det vil sige, at et minimalt modeksempel ikke må indeholde en dobbeltdiamant, da det i lemma 14.2 er vist, at et minimalt modeksempel tilhører familien $\mathcal{F}_5$.

Hermed er det ifølge sætning 4.4 vist, at et minimalt modeksempel G ikke kan have en skæv opdeling, idet G per sætning 3.15, som er hovedresultat (i) fra kapitel 1, ikke kan have en balanceret skæv opdeling, ikke kan indeholde $L(K_{3,3} - e)$ ifølge korollar 9.31, ikke kan indeholde en aflang prisme per sætning 11.6 og sætning 12.36, som er henholdsvis hovedresultat (v) og (vi) fra kapitel 1, og ikke kan indeholde en dobbeltdiamant per sætning 14.10, som er hovedresultat (vii) fra kapitel 1. Derfor betragtes i det følgende kun Berge grafer, som ikke har en skæv opdeling.

Kapitel 15

Familien $\mathcal{F}_6$

I dette kapitel betragtes de grafer i familien $\mathcal{F}_6$, som indeholder et hjul af ulige længde, for at udelukke disse som minimale modeksempler.

Formålet er altså at vise hovedresultat (*viii*) fra kapitel 1, hvormed endnu en struktur kan udelukkes fra et minimalt modeksempel. Til dette benyttes familien $\mathcal{F}_6$, som er en underfamilie af familien $\mathcal{F}_5$, og denne vil blive defineret først. Derefter vises, at enhver genstridig graf vil tilhøre familien $\mathcal{F}_6$. I afsnit 15.1 defineres hjul, og der vises nogle resultater om grafer i familien $\mathcal{F}_6$, der indeholder et hjul. Afslutningsvist vises, at hvis en graf i familien $\mathcal{F}_6$ indeholder et hjul af ulige længde, så er grafen perfekt.

I kapitel 14 blev det vist, at et minimalt modeksempel ikke må indeholde en dobbeltdiamant, hvilket giver anledning til at definere familien $\mathcal{F}_6$.

Definition 15.1 ($\mathcal{F}_6$)
Lad $G \in \mathcal{F}_5$. Hvis G ikke indeholder en induceret delgraf, som er isomorf med en dobbeltdiamant, så vil $G \in \mathcal{F}_6$. $\diamond$

Da en dobbeltdiamant også er en dobbeltdiamant i komplementærgrafen, vil komplementet af en graf i familien $\mathcal{F}_6$ også tilhøre familien $\mathcal{F}_6$, hvormed strukturen dobbeltdiamant ikke må forekomme i hverken grafen selv eller dens komplement.

I kapitel 14 blev det vist, at enhver genstridig graf vil tilhøre familien $\mathcal{F}_5$, og nu indskrænkes genstridige grafer til yderligere ikke at indeholde dobbeltdiamanter.

Korollar 15.2
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_6$. $\diamond$

Bevis
Ifølge lemma 14.2 vil enhver genstridig graf tilhøre $\mathcal{F}_5$. En genstridig graf G vil per definition 13.1 ikke have en balanceret skæv opdeling, og G samt $\overline{G}$ vil ikke indeholde et 2-vedhæng. Ifølge sætning 14.10 vil G ikke indeholde en dobbeltdiamant, hvormed $G \in \mathcal{F}_6$. Hvis sætning 14.10 anvendes på komplementærgrafen, fåes, at $\overline{G}$ ikke indeholder en dobbeltdiamant, hvormed $\overline{G} \in \mathcal{F}_6$. $\square$

Som beskrevet i kapitel 14 kan det konkluderes, at et minimalt modeksempel ikke kan have en skæv opdeling, hvilket vises her.

Lemma 15.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$. Hvis G har en skæv opdeling, så har G en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Antag, at G har en skæv opdeling. Fra definition 15.1 vil G og $\overline{G}$ ikke indeholde en aflang prisme, en dobbeltdiamant eller en $L(K_{3,3}-e)$. Sidstnævnte indeholder G ikke, da $L(K_{3,3}-e)$ er en todelt underdeling af K_4. Da følger af sætning 4.4, at G har en balanceret skæv opdeling. $\square$

Hermed er det altså vist, at et minimalt modeksempel til den stærke perfekte graf sætning ikke kan have en skæv opdeling.

Fra ovenstående lemma følger, at en graf i familien $\mathcal{F}_6$, der har en skæv opdeling, er perfekt. Negationen af lemmaet kan også benyttes til at konstatere, at hvis en graf i familien $\mathcal{F}_6$ ikke har en balanceret skæv opdeling, så har den heller ikke en skæv opdeling. Netop dette faktum benyttes i følgende lemma.

Lemma 15.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, og antag, at G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $X, Y \in V(G)$ være disjunkte, ikke-tomme og komplette til hinanden. Da vil et af følgende gælde:

(i) *Hvis $X \cup Y = V(G)$, så er enten G en komplet graf, eller $\overline{G}$ har nøjagtig to komponenter, og de har begge højst to punkter, altså $|V(G)| \leq 4$.*

(ii) *Hvis $X \cup Y \neq V(G)$, så er $V(G) - (X \cup Y)$ sammenhængende, og hvis yderligere $|X| > 1$, så har hvert punkt i X en nabo i $V(G) - (X \cup Y)$.*

$\diamond$

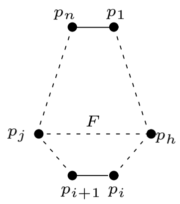
Bevis
Fra lemma 15.3 har G ikke en skæv opdeling.
Antag, at $X \cup Y = V(G)$. Da X og Y er komplette til hinanden i G, er de antikomplette til hinanden i $\overline{G}$, hvormed $\overline{G}$ ikke er sammenhængende. Lad $B_1, \ldots, B_k$ være antikomponenterne i G, hvor $k \geq 2$. Det kan antages, at G ikke er en komplet graf, for ellers er lemmaet opfyldt, og det kan derfor antages, at en antikomponent B_i har størrelse mindst to, lad det være B_1. Vælg $x, y \in B_1$, så de er ikke-nabopunkter. Da G ikke har en skæv opdeling, er $\{\{x, y\}, V(G) - \{x, y\}\}$ ikke en skæv opdeling, hvormed $V(G) - \{x, y\}$ er antisammenhængende. Dermed er $k = 2$, og $B_1 = \{x, y\}$. Ligeledes indeholder B_2 højst to punkter, hvormed $|V(G)| \leq 4$, og (i) er opfyldt.

Antag nu, at $X \cup Y \neq V(G)$, hvilket vil sige, at det antages, at $V(G) - (X \cup Y)$ er ikke-tom. Hvis $V(G) - (X \cup Y)$ ikke er sammenhængende, så er $\{V(G) - (X \cup Y), X \cup Y\}$ en skæv opdeling, da X er komplet til Y, og $X \cup Y$ dermed ikke er antisammenhængende. Da G ikke har en skæv opdeling, må $V(G) - (X \cup Y)$ være sammenhængende.
Antag, at der findes et $x \in X$, som ikke har en nabo i $V(G) - (X \cup Y)$. Det vil sige, at $V(G) - ((X - x) \cup Y)$ ikke sammenhængende, og hvis $X - x \neq \emptyset$, så er $(X - x) \cup Y$ ikke antisammenhængende, idet X og Y er komplette til hinanden, og $\{V(G) - ((X - x) \cup Y), (X - x) \cup Y\}$ er en skæv opdeling, så $X - x = \emptyset$, hvormed $X = \{x\}$, og (ii) er opfyldt. $\square$

Hvis ovenstående lemma punkt (ii) er opfyldt, kan det konkluderes, at der findes en 2-vej mellem to vilkårlige punkter i $V(G) - (X \cup Y)$, hvor intet indre punkt er komplet til X eller Y. Dette skyldes, at hvis et punkt er komplet til X eller Y, så udvides X henholdvis Y, og lemmaet anvendes på de nye mængder. Samme proces gentages, indtil intet indre punkt i 2-vejen er komplet til X eller Y.

Lemma 15.5
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, lad $C : p_1, \ldots, p_n$ være en kreds i G af længde mindst seks, og lad $1 < h < i$ og $i + 1 < j < n$. Lad C være induceret med undtagelse af muligvis en kant $p_h p_j$. Lad $Y \subseteq V(G) - V(C)$ være antisammenhængende, så de eneste punkter i C, der er komplette til Y, er p_n, p_1, p_i og p_{i+1}. Antag, at der findes en 2-vej F i $V(G) - Y$ fra p_h til p_j, som muligvis har længde en, så der ikke findes kanter mellem det indre af F og $V(C) - \{p_h, p_j\}$. Da vil der findes et punkt i F, som er komplet til Y. $\diamond$

Bevis
Antag, at intet punkt i F er komplet til Y. Hullet $C_{1n} : p_1, \ldots, p_h, F, p_j, \ldots, p_n$ har lige længde, da det findes i $G \in \mathcal{F}_6$. Ifølge korollar 2.3 har 2-vejen $P_{1i} : p_1, \ldots, p_h, \ldots, p_i$ lige længde, da hvis 2-vejen har ulige længde, skal p_n og p_{i+1} have en nabo i det indre af 2-vejen, hvilket ikke er muligt, da C er induceret med undtagelse af eventuelt $p_h p_j$. På figur 15.1 ses kredsen C og 2-vejen F.



Figur 15.1: Kredsen C med 2-vejen F mellem p_j og p_h, hvor de stiplede linier angiver 2-veje, som muligvis har længde en.

Det skal nu undersøges, om 2-vejen $P_{in} : p_i, p_{i-1}, \ldots, p_h, F, p_j, \ldots, p_n$ har lige eller ulige længde. På figur 15.1 ses, at hullet C_{1n} og 2-vejen P_{in} har 2-vejen $p_h, F, p_j, \ldots, p_n$ til fælles. Ligeledes har 2-vejene P_{1i} og P_{in} 2-vejen $p_h, \ldots, p_i$ til fælles. Hullet C_{1n} fratrukket kanten $p_n p_1$ har ulige længde. Hullet C_{1n} og 2-vejen P_{1i} har 2-vejen $P_{1h} : p_1, \ldots, p_h$ til fælles. Længden af P_{in} kan nu vurderes ud fra C_{1n} og P_{1i} ved følgende:

$$|E(P_{in})| = |E(C_{1n})| + |E(P_{1i})| - 2|E(P_{1h})| - 1,$$

hvor ettallet repræsenterer kanten $p_n p_1$. Da $|E(C_{1n})|$, $|E(P_{1i})|$ og $2|E(P_{1h})|$ alle er lige, vil $|E(P_{in})|$ være ulige. Det vil sige, at 2-vejen P_{in} har ulige længde. Da følger af lemma 14.3, at 2-vejen P_{in} har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter på 2-vejen, hvis indre tilhører Y. Når P_{in} har længde tre, har F længde en, $i = h + 1$ og $n = j + 1$. Som før har 2-vejen $p_{i+1}, \ldots, p_j, \ldots, p_n$ ifølge korollar 2.3 lige længde. Det vil sige, at 2-vejen $p_{i+1}, \ldots, p_j, F, p_h, \ldots, p_1$ har ulige længde, og dermed ifølge lemma 14.3 længde tre. Heraf kan det konkluderes, at $j = i + 2$ og $h = 2$. Ved brug af de fundne udtryk må $n = 6$. Hermed er p_2 og p_5 naboer, da F har længde en. Det benyttes nu, at lemma 14.3 gav, at der findes en anti 2-vej Q af ulige længde, som forbinder p_2 og p_5 med indre fra Y. I $\overline{G}$ vil 2-vejen p_1, p_4, 2-vejen p_5, Q, p_2 og 2-vejen p_3, p_6 danne en aflang prisme, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Antagelsen, om at der ikke findes et punkt i F, som er komplet til Y, må dermed være forkert. $\square$

Næste lemma omhandler længden af en 2-vej og anti 2-vej, når de har to fælles punkter.

Lemma 15.6
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, og lad $p_1, \ldots, p_m$ være en 2-vej i G. Lad $2 \leq s \leq m - 2$, og lad $p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ være en anti 2-vej af længde mindst tre. Antag, at p_1 og p_m begge er naboer til alle af $q_1, \ldots, q_n$. Da er n lige, og $m = 4$. $\diamond$

Følgende lemma beskæftiger sig med 2-veje i et hul, hvor 2-vejens endepunkter er komplette til en antisammenhængende mængde.

Lemma 15.7
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, lad C være et hul i G, og lad $X \subseteq V(G) - V(C)$ være en antisammenhængende mængde. Lad P være en 2-vej i C af længde mindst to, så 2-vejens endepunkter er komplette til X, og ingen af dens indre punkter er komplette til X. Da har P lige længde. $\diamond$

Følgende lemma omhandler et hul og en anti 2-vej, som har mindst to fælles punkter med hullet. De sidste tre lemmaer omhandler altså forskellige kombinationer af 2-veje, anti 2-veje og huller i grafer, der tilhører familien $\mathcal{F}_6$.

Lemma 15.8
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, lad $C : p_1, \dots, p_m$ være et hul i G af længde mindst seks, og lad $Q : p_1, q_1, \dots, q_n, p_2$ være en anti 2-vej af lige længde mindst fire. Da findes højst et punkt i $\{p_3, \dots, p_m\}$, der er komplet til enten $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ eller $\{q_2, \dots, q_n\}$, og dette punkt er enten p_3 eller p_m. $\diamond$

I følgende bevis er beviserne for påstandene ikke medtaget her.

Bevis
Antag, at et af punkterne $q_1, \dots, q_n$ tilhører hullet C, lad det være q_j, hvor $1 \leq j \leq n$. Idet q_j er nabo til mindst et af p_1 eller p_2, da Q er en anti 2-vej, kan det antages, at $q_j = p_m$. Idet p_m er ikke-nabo til p_2, må $p_m = q_n$. Da q_1 og q_n er naboer, og p_2 og q_1 er naboer, kan der ikke findes flere punkter i C, som tilhører Q. Punktet p_m kan godt være komplet til enten $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ eller $\{q_2, \dots, q_n\}$, så længe der ikke findes et punkt i $\{p_3, \dots, p_{m-1}\}$, som er komplet til en af de to mængder.
Antag, at der findes et i, hvor $3 \leq i \leq m-1$, så p_i er komplet til enten $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ eller $\{q_2, \dots, q_n\}$. Hvis $i < m-1$, så er p_i ikke-nabo til $p_m = q_n$, og dermed må p_i være komplet til $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$. Da danner $p_i, p_1, q_1, \dots, q_n$ et antihul af ulige længde, så $i = m-1$. Hvis p_{m-1} er komplet til $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$, så vil 2-vejen p_{m-1}, p_m, p_1, p_2 opfylde antagelserne i lemma 15.7, hvor P i lemma 15.7 svarer til p_{m-1}, p_m, p_1, p_2, og X svarer til $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$, hvormed 2-vejen har lige længde. Dette giver dog en modstrid, da 2-vejen har ulige længde, så p_{m-1} er ikke komplet til $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$, hvormed p_{m-1} må være komplet til $\{q_2, \dots, q_n\}$ og ikke-nabo til q_1. Da danner $p_2, p_{m-1}, q_1, \dots, q_n$ et antihul af ulige længde, hvilket ikke må forekomme i G, da $G \in \mathcal{F}_6$, så en modstrid er opnået. Det vil sige, at der ikke må findes et sådant i. Lemmaet er dermed opfyldt i det tilfælde, hvor $|V(Q) \cap V(C)| > 2$.

Det kan derfor antages, at intet af punkterne $q_1, \dots, q_n$ tilhører C. Lad $X = \{q_1, \dots, q_n\}$, og lad Y_1 og Y_2 være mængden af punkter i $\{p_3, \dots, p_m\}$, som er komplette til $X - q_n$ henholdsvis $X - q_1$.

Påstand 1: $Y_1 \subseteq Y_2 \cup \{p_m\}$ *og* $Y_2 \subseteq Y_1 \cup \{p_3\}$.

Påstand 2: *Hvis* $Y_1 \not\subseteq \{p_m\}$*, så vil* $p_3 \in Y_1 \cap Y_2$*, og hvis* $Y_2 \not\subseteq \{p_3\}$*, så vil* $p_m \in Y_1 \cap Y_2$.

Ikke både p_3 og p_m tilhører $Y_1 \cap Y_2$, for så vil Q danne et antihul af ulige længde med p_2, p_m, p_3, p_1. Det kan derfor antages, at $p_3 \notin Y_1 \cap Y_2$, og så følger af påstand 2, at $Y_1 \subseteq \{p_m\}$. Fra påstand 1 er $Y_2 \subseteq \{p_3\} \cup Y_1$, hvormed $Y_1 \cup Y_2 \subseteq \{p_3, p_m\}$. Det kan derfor antages, at $Y_1 \cup Y_2 = \{p_3, p_m\}$, altså at både p_3 og p_m er komplette til enten $X - q_n$ eller $X - q_1$, for ellers er lemmaet opfyldt. Specielt vil $p_3 \in Y_2$, da $p_3 \notin Y_1 \cup Y_2$ og $Y_1 \subseteq \{p_m\}$. Hvis yderligere $p_m \in Y_2$, så er $p_3, p_4, \dots, p_m$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til $X - q_1$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $X - q_1$, hvilket danner en modstrid med lemma 15.7, idet $m \geq 6$. Dermed vil $p_m \notin Y_2$, og så vil $p_m \in Y_1$, men da er $p_3, q_1, q_2, \dots, q_n, p_m$ et antihul af ulige længde, og en modstrid er opnået. Det vil sige, at under antagelse af, at $p_3 \notin Y_1 \cap Y_2$, så er p_3 komplet til $X - q_1$, og ikke andre punkter er komplette til $X - q_n$ eller $X - q_1$. Hvis den anden mulighed antages, altså at $p_m \notin Y_1 \cap Y_2$, så fremkommer, at p_m er komplet til $X - q_n$, og ikke andre punkter er komplette til $X - q_n$ eller $X - q_1$. $\square$

Det vises nu, at et hul af længde mindst seks og et antihul af længde mindst seks i en graf i familien $\mathcal{F}_6$ højst kan have to fælles punkter. Dette resultat har stor anvendelighed i senere modstridsbeviser.

Lemma 15.9
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, lad C være et hul i G af længde mindst seks, og lad D være et antihul i G af længde mindst seks. Da er $|V(C) \cap V(D)| \leq 2$. $\diamond$

Bevis
Antag, at $|V(C) \cap V(D)| \geq 3$. Da kan det ved at tage komplementer hvis nødvendigt antages, at der findes tre punkter i $V(C) \cap V(D)$, så nøjagtig et par af dem er naboer. Dermed kan punkterne i

C nummereres i rækkefølge $p_1, \dots, p_m$, og punkterne i D kan nummereres med $p_1, q_1, \dots, q_n, p_2, p_k$ for et k, hvor $4 \leq k \leq m-1$. Muligvis vil hullet og antihullet også deles om et fjerde punkt. Dermed har anti 2-vejen $p_1, q_1, \dots, q_n, p_2$ lige længde mindst fire. Punktet p_k er komplet til $\{q_1, \dots, q_n\}$, og p_k er forskelligt fra p_3 og p_m, hvilket danner modstrid med lemma 15.8. Dermed er antagelsen, om at $|V(C) \cap V(D)| \geq 3$, forkert. □

15.1 Hjul

Formålet med dette kapitel er at udelukke Berge grafer, der indeholder et hjul af ulige længde, som minimale modeksempler, hvorfor hjul præsenteres her.

Dette afsnit, hvilket vil sige resten af dette kapitel, omhandler hjul generelt. Først følger definitionen af hjul samt forskellige begreber vedrørende hjul og afslutningsvist vises hovedresultat $(viii)$.

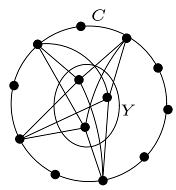
Definition 15.10 (Hjul, omkreds og centrum)
Lad G være en graf. Da siges et hjul i G at være et par $\{C, Y\}$, der opfylder følgende:

(i) *C er et hul af længde mindst seks.*

(ii) *Y er en ikke-tom antisammenhængende mængde, der er disjunkt fra C.*

(iii) *Der findes mindst to disjunkte kanter i C, som er komplette til Y.*

Her kaldes C for hjulets omkreds, og Y kaldes for hjulets centrum. ◇



Figur 15.2: Et eksempel på et hjul $\{C, Y\}$.

Definition 15.11 (Udsnit)
Lad G være en graf, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Lad P være en maksimal 2-vej, hvor alle punkterne i P er komplette til Y, og $V(P) \subseteq V(C)$. Da siges P at være et udsnit af hullet C. ◇

I et hjul kan der godt findes udsnit af forskellige længder, da 2-vejen blot skal være maksimal.

Definition 15.12 (Længde af hjul)
Lad G være en graf, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Da siges $\{C, Y\}$ at have ulige længde, hvis et udsnit af C har ulige længde. Hvis ethvert udsnit af C har lige længde, da siges $\{C, Y\}$ at have lige længde. ◇

Bemærk, at et hjul har ulige længde, hvis blot ét udsnit har ulige længde.

Definition 15.13 (Lige og ulige hjulparitet)
Lad G være en graf, lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G, og lad $u, v \in V(C)$, hvor $u \neq v$. Da siges u og v at have lige hjulparitet, hvis der findes en 2-vej i C, der forbinder u og v, som indeholder et lige

antal kanter, der er komplette til Y.
Desuden siges u og v at have ulige hjulparitet, hvis der findes en 2-vej i C, der forbinder u og v, som indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y. ◇

Hvis to punkter har lige hjulparitet, så kan 2-vejen mellem dem have såvel lige som ulige længde. Ligeledes, hvis to punkter har ulige hjulparitet, så kan 2-vejen mellem dem have såvel lige som ulige længde. Det afhænger altså blot af antallet af kanter, som er komplette til den antisammenhængende mængde, i 2-vejen mellem to punkter og ikke af længden af 2-vejen.

I et hjul $\{C, Y\}$ findes mindst to kanter i hullet C, der er komplette til Y. Da følger af korollar 2.4, at der findes et lige antal kanter i C, som er komplette til Y. Derfor vil der om to punkter $u, v \in V(C)$, hvor $u \neq v$, gælde, at de enten kun har lige hjulparitet eller ulige hjulparitet. Dette skyldes, at begge 2-veje i C mellem dem enten begge indeholder et lige antal kanter, der er komplette til Y, eller begge indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y.

Lemma 15.14
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Lad $v \in V(G) - (V(C) \cup Y)$, så v ikke er komplet til Y. Antag, at der findes naboer til v i C, så disse har ulige hjulparitet. Da findes i enhver 2-vej i C mellem disse en kant, der er komplet til Y. Desuden vil et af følgende gælde:

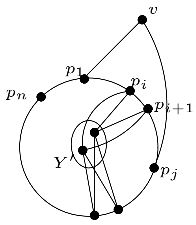
- (i) *v har kun to naboer i C, som indbyrdes er naboer, og begge er komplette til Y.*
- (ii) *Der findes en 2-vej i C bestående af tre punkter p_1, p_2 og p_3, så p_1, p_2 og p_3 alle er komplette til $Y \cup \{v\}$, og alle andre naboer til v i C har lige hjulparitet med p_1.*
- (iii) *Parret $\{C, Y \cup \{v\}\}$ er et hjul.*

◇

Bevis
Påstand: *Lad P være en 2-vej i C af længde mindst en, så P's endepunkter er naboer til v, og endepunkterne har ulige hjulparitet. Da er et indre punkt i P nabo til v, eller så har P længde en.*

Lad C bestå af $p_1, \ldots, p_n$, og lad P være 2-vejen $p_1, \ldots, p_j$, hvor $j < n$. Antag, at intet indre punkt i P er nabo til v, og $j \geq 3$. Det vil sige, at v er nabo til P's endepunkter p_1 og p_j og ikke til andre punkter i P. Der haves nu et hul $C' : v, p_1, \ldots, p_j$, hvilket betyder, at j er ulige. Da p_1 og p_j har ulige hjulparitet med hensyn til $\{C, Y\}$, findes der et ulige antal kanter i P, der er komplette til Y. Vælg $Y' \subseteq Y$ mindst mulig, så Y' er antisammenhængende, der findes et ulige antal kanter i P, der er komplette til Y', og v ikke er komplet til Y'. Dermed findes der mindst to punkter i C', som er komplette til Y', og antagelserne i korollar 2.4 er opfyldte. Da der findes et ulige antal kanter i P, der er komplette til Y', findes der et ulige antal kanter i C', der er komplette til Y', da v ikke er komplet til Y'. Ifølge korollar 2.4 må der dermed findes netop to punkter i C', der er komplette til Y', og disse to punkter er naboer. Da p_1 og p_j har ulige hjulparitet, må de to punkter, som er komplette til Y', tilhøre P. Det vil sige, at P indeholder netop én kant, der er komplet til Y' og ikke flere punkter, der er komplette til Y'. Det vil sige, at der findes et i, for $1 \leq i < j$, så p_i og p_{i+1} er de eneste punkter i P, der er komplette til Y'. Da j er ulige, må netop et af $i-1$ eller $j-(i+1)$ være lige, så det kan antages, at i er ulige, eventuelt ved omnummerering af P fra $1, \ldots, j$ til $j, \ldots, 1$. Da i er antaget at være ulige, og j er ulige, er $p_j \neq p_{i+1}$, og dermed er p_j ikke komplet til Y' og er ikke nabo til p_i.

Ifølge definition 15.10 findes mindst to disjunkte kanter i C, der er komplette til Y', idet $Y' \subseteq Y$. Da C' kun indeholder én kant, der er komplet til Y', må en anden kant i C, som er komplet til Y', have endepunkter i $\{p_{j+1}, \ldots, p_n\}$. Det vil sige, at $n \geq j+2$, men da n er lige, og j er ulige, må $n \geq j+3$. Da der blandt $\{p_{j+1}p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}p_n\}$ findes en kant, der er komplet til Y', findes der et punkt i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, som er komplet til Y'.



Figur 15.3: Skitse af $\{C, Y'\}$ og v samt de indtil nu fundne kanter mellem v og C samt mellem Y' og C.

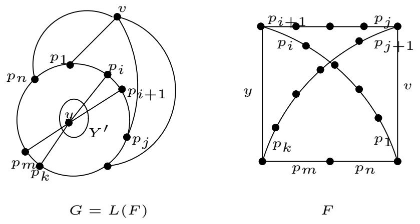
Antag, at v har en nabo p_l blandt $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$. Da findes en 2-vej $Q : v, p_l, \ldots, p_k$, hvor $p_k \in \{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$ er komplet til Y', $V(Q) \subseteq \{v, p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, og hvor intet indre punkt i Q er komplet til Y'. Begge endepunkter i 2-vejen $R : p_i, \ldots, p_1, v, Q, p_k$ er komplette til Y', intet indre punkt i R er komplet til Y', og punktet p_{i+1}, som er komplet til Y', har ikke en nabo i det indre af R. Dermed har R ifølge korollar 2.3 lige længde, hvormed Q har ulige længde. Det vil sige, at 2-vejen $S : p_{i+1}, \ldots, p_j, v, Q, p_k$ har ulige længde, da $i + 1$ er lige. Antagelserne i lemma 14.3 er opfyldte, og da ingen kant i S er komplet til Y', må lemma 14.3(ii) gælde. Det vil sige, at S har længde tre, hvilket betyder, at $j = i + 2$, og Q har længde en. Altså er $p_l = p_k$, og p_k er dermed komplet til $Y' \cup \{v\}$. Da S har ulige længde, endepunkterne i S er komplette til Y', og ingen indre punkter i S er komplette til Y', er antagelserne i korollar 2.3 opfyldte. Heraf følger, at ethvert punkt, der er komplet til Y', har en nabo i det indre af S. Dermed er ethvert punkt, der er komplet til Y', nabo til et af p_j eller v, da disse udgør de indre punkter i S. Da p_i er komplet til Y', og p_i ikke er nabo til p_j, må p_i være nabo til v. Dermed må $i = 1$, idet p_1 og p_j er de eneste punkter i P, der er naboer til v, og da $j = i + 2$, er $j = 3$. Da ethvert punkt, der er komplet til Y', er nabo til et af $p_j = p_3$ eller v, er v nabo til alle punkter i $C - \{p_2, p_4\}$, der er komplette til Y', idet p_3 kun er nabo til p_2 og p_4 i C. Punktet p_2 tilhører det indre af P og vil derfor per antagelse ikke være nabo til v. Da mindst to disjunkte kanter i C er komplette til Y', vil mindst to ikke-naboer i C være komplette til $Y' \cup \{v\}$. Antagelserne i korollar 2.4 er opfyldte, hvor $Y' \cup \{v\}$ er antisammenhængende, C er et hul i $G - (Y' \cup \{v\})$, og da der findes to punkter i C, der er komplette til $Y' \cup \{v\}$, men ikke er naboer, findes dermed et lige antal kanter i C, der er komplette til $Y' \cup \{v\}$. Da der findes to ikke-nabopunkter i C, som er komplette til $Y' \cup \{v\}$, er disse også komplette til Y'. Det vil sige, at C ifølge korollar 2.4 indeholder et lige antal kanter, der er komplette til Y'. Da kanten p_1p_2 er komplet til Y', men ikke til $Y' \cup \{v\}$, må der findes yderligere en kant, der er komplet til Y', men ikke til $Y' \cup \{v\}$. Denne kant må tilhøre 2-vejen p_2, p_3, p_4, p_5, da alle andre punkter i C, der er komplette til Y', også er nabo til v. Da p_2 ikke er nabo til v, og p_3 ikke er komplet til Y', må det være kanten p_4p_5, som er komplet til Y'. Det vil sige, at p_4 er komplet til Y', men ikke til $Y' \cup \{v\}$, og p_5 er komplet til $Y' \cup \{v\}$, idet $p_5 \in C - \{p_2, p_4\}$. Dermed indeholder 2-vejen $p_1, p_2, \ldots, p_5$ ikke kanter, der er komplette til $Y' \cup \{v\}$, og så må 2-vejen $p_5, \ldots, p_n$ indeholde et lige antal kanter, der er komplette til $Y' \cup \{v\}$.

Der haves nu en kreds $p_1, \ldots, p_5, v$ af længde seks med en korde p_3v og et punkt $y \in Y'$, så punkterne p_1, p_2, p_4 og p_5 er nabo til y. Ved at benytte lemma 15.5, hvor $\{y\}$ er den antisammenhængende mængde, og kanten vp_3 udgør 2-vejen F, fåes en modstrid, da intet punkt i $F = vp_3$ er komplet til y. Altså må antagelsen, om at v har en nabo i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, være forkert. Det vil sige, at v ikke har en nabo i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$.

Vælg k, for $j \leq k \leq n$, mindst muligt, så p_k er komplet til Y'. Da der findes et punkt i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, som er komplet til Y', følger det, at $k < n$. Da k er valgt mindst muligt, er $p_{i+1}, \ldots, p_k$ en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til Y', og hvis indre punkter ikke er komplette til Y'. Ifølge korollar 2.4 har længden af $p_i, \ldots, p_k$ samme paritet som antallet af kanter deri, der er komplette til Y'. Da $p_i, \ldots, p_k$ kun indeholder kanten p_ip_{i+1}, der er komplet til Y', må $p_i, \ldots, p_k$ have ulige længde, og dermed er k lige, da i er ulige. Da j er ulige, har $p_j, \ldots, p_k$ derfor ulige længde.

Antag, at v ikke er nabo til p_{j+1}. Da v ikke har en nabo i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, og $v, p_j, \ldots, p_{n-1}, p_n$ ikke må danne et hul af ulige længde, følger det, at v ikke er nabo til p_n, så p_1 og p_j er v's eneste naboer i C. Idet $T : p_i, \ldots, p_1, v, p_j, \ldots, p_k$ har ulige længde, og begge endepunkter er komplette til Y', er antagelserne i lemma 14.3 opfyldte. Da der ikke findes en kant i T, der er komplet til Y', idet p_i og p_{i+1} er de eneste punkter i P, som er komplette til Y', og k er valgt mindst muligt for $j \leq k < n$, så p_k er komplet til Y', har T længde tre. Det betyder, at $p_i = p_1$ og $p_k = p_{j+1}$, da i samt j er ulige, og k er lige. Da T har ulige længde, endepunkterne i T er komplette til Y', og der ikke findes en kant i T, der er komplet til Y', er antagelserne i korollar 2.3 opfyldte. Deraf følger, at ethvert punkt, der er komplet til Y', har en nabo i det indre af T. Dermed er ethvert punkt, der er komplet til Y', nabo til et af p_j eller v, da de udgør det indre af T. Da p_{j-1} og p_{j+1} er de eneste punkter fra C, som er naboer til p_j, er v nabo til samtlige punkter fra $C - \{p_{j-1}, p_{j+1}\}$, der er komplette til Y'. Men dette giver en modstrid, da der findes et punkt i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, som er komplet til Y', og v ikke har en nabo i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$. Det vil altså sige, at v er nabo til p_{j+1}. Da $v, p_{j+1}, \ldots, p_n, p_1$ ikke danner et hul af ulige længde, følger det, at v også er nabo til p_n. Dermed har v netop fire naboer i C, nemlig p_1, p_j, p_{j+1} og p_n.

Vælg m, for $k \leq m \leq n$, størst muligt, så p_m er komplet til Y'. Her er $m \geq j+2$, da der findes et punkt i $\{p_{j+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, som er komplet til Y'. Hvis $m = n$, er $p_{i+1}, \ldots, p_j, v, p_n$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til Y', og hvis indre punkter ikke er komplette til Y'. Desuden er punktet $p_k \neq p_n$ komplet til Y', men har ingen nabo i det indre af $p_{i+1}, \ldots, p_j, v, p_n$, hvilket er i modstrid med korollar 2.3. Det vil sige, at $m < n$, og p_n er dermed ikke komplet til Y'. Da m er valgt størst muligt, indeholder 2-vejen $p_m, \ldots, p_n, p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}$ kun en kant, som er komplet til Y', nemlig kanten $p_i p_{i+1}$. Da følger af korollar 2.4, at $p_m, \ldots, p_n, p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}$ har ulige længde. Altså har $p_m, \ldots, p_n, p_1, \ldots, p_i$ lige længde, så m er ulige, og derfor må $m > k$, da k er lige.
Antag, at $m > k+1$. Da danner $p_m, \ldots, p_n, v, p_{j+1}, \ldots, p_k$ en 2-vej af ulige længde, og p_{i+1} har ingen naboer i det indre af 2-vejen, hvilket er i modstrid med korollar 2.3. Dermed er $m = k+1$, og der er symmetri mellem 2-vejene $p_1, \ldots, p_j$ og $p_{j+1}, \ldots, p_n$. Begge disse 2-veje har længde mindst to, og hvis de har længde præcis to, vil $p_1 = p_i$ og $p_{j+1} = p_k$. Antag, at de netop har længde to. Da er $n = 6$, og de eneste punkter i C, der er komplette til $Y' \cup \{v\}$, er p_1 og p_4, hvilket er i modstrid med lemma 15.7, idet 2-vejen mellem p_1 og p_4 har ulige længde. Dermed må en af 2-vejene have længde mindst tre. På grund af symmetri kan det antages, at det er $p_1, \ldots, p_j$, der har længde mindst tre. Da j er ulige, kan det ikke ske, at $j = 4$. Antag derfor, at $j > 4$. Dermed har hullet $H : v, p_1, \ldots, p_j$ længde mindst seks, og de eneste punkter deri, som er komplette til Y', er p_i og p_{i+1}. Antagelserne i lemma 2.6 er opfyldte, og deraf følger, at Y' indeholder en hat eller et afhop for H ved $p_i p_{i+1}$. Da $V(H)$ og Y' er disjunkte mængder, p_m er komplet til Y', og p_m er antikomplet til $V(H)$, idet p_m ikke har en nabo i dette hul, er parret $\{V(H), Y'\}$ ifølge lemma 2.13 et balanceret par. Hvis $y_1, y_2 \in Y'$ er et afhop for hullet $v, p_1, \ldots, p_j$, er $y_1, p_{i-1}, \ldots, p_1, v, p_j, p_{i+2}, y_2$ en 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører $V(H)$, og hvis endepunkter er ikke-naboer og tilhører Y'. Dette er i modstrid med, at $\{V(H), Y'\}$ er et balanceret par. Dette betyder, at Y' indeholder en hat for H ved $p_i p_{i+1}$. Altså findes der et $y \in Y'$, der kun er nabo til p_i og p_{i+1} i H. Fra minimaliteten af Y' følger det, at $Y' = \{y\}$. Men da er $\langle V(C) \cup \{v, y\} \rangle_G$ liniegrafen af en todelt underdeling af K_4, se figur 15.4.



Figur 15.4: (a) Udsnit af G indeholdende $\{C, Y'\}$ og v. (b) Grafen F, som er en todelt underdeling af K_4.

På figur 15.4(a) ses det, at denne graf er liniegrafen af 15.4(b).
At G indeholder en liniegraf af en todelt underdeling af K_4, danner en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Det vil sige, at antagelsen, om at hverken et indre punkt i P er nabo til v, eller P har længde en, er forkert, hvilket viser påstanden.

Antag, at v kun har to naboer $u, w \in V(C)$. Dermed haves en 2-vej i C mellem u og w af længde mindst en. Ifølge påstanden vil denne 2-vej have længde præcis en, da v kun er nabo til u og w i C. Da u og w har ulige hjulparitet, må kanten uw være komplet til Y'. Altså er (i) opfyldt. Det kan derfor antages, at v har mindst tre naboer i C.

Antag, at v har mindst fire naboer i C, hvoraf de to har lige hjulparitet, og to andre har ulige hjulparitet. Hvis der findes to disjunkte 2-veje, hvor endepunkterne er naboer til v, og intet indre punkt er nabo til v, så vil der ifølge påstanden gælde, at der findes to disjunkte kanter, der er komplette til $Y \cup \{v\}$. Dermed er $\{C, Y \cup \{v\}\}$ et hjul, og (iii) er opfyldt. Hvis der ikke findes to disjunkte 2-veje, så vil der findes to 2-veje med et fælles endepunkt, hvor endepunkterne er naboer til v, mens de indre punkter ikke er naboer til v. Anvendes påstanden på hver af de to 2-veje, opnåes en 2-vej p_1, p_2, p_3, hvor alle punkter er komplette til $Y \cup \{v\}$. De andre naboer til v i C vil have lige hjulparitet med p_1, da der ellers findes to disjunkte 2-veje som før. Dermed er (ii) opfyldt. Det kan derfor antages, at C består af $p_1, \dots, p_n$, punktet v er nabo til p_1, og v har ikke andre naboer i C med lige hjulparitet med p_1. Da v har mindst én anden nabo, kan det antages, at v har en nabo i $V(C) - \{p_1, p_n\}$. Vælg $i > 1$ mindst muligt, så v er nabo til p_i. Da er $i < n$, og så følger af påstanden, at $i = 2$. Dermed er p_2 komplet til $Y \cup \{v\}$, og (i) er opfyldt. Hvis v har en tredje nabo i C, da er p_n på samme måde komplet til $Y \cup \{v\}$, og (ii) er opfyldt. □

Der vises nu en variant af foregående lemma, hvor en mængde F betragtes i stedet for et punkt v.

Lemma 15.15
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Lad $F \in V(G) - (V(C) \cup Y)$ være sammenhængende, så intet punkt i F er komplet til Y, og lad $X \subseteq V(C)$ være mængden af vedhæftninger for F i C. Antag, at der findes punkter i X, der har ulige hjulparitet, og der findes to punkter i X, der ikke er naboer. Da vil et af følgende gælde:

- (i) *Der findes et punkt $v \in F$, så $\{C, Y \cup \{v\}\}$ er et hjul.*
- (ii) *Der findes et punkt $v \in F$ med mindst fire naboer i C, og en 2-vej i C bestående af tre punkter p_1, p_2 og p_3, så de alle er komplette til $Y \cup \{v\}$, og alle andre naboer til v i C har lige hjulparitet med p_1.*
- (iii) *Der findes en 2-vej p_1, p_2, p_3 i C, hvor p_1, p_2 og p_3 alle er komplette til Y, og en 2-vej $p_1, f_1, \dots, f_k, p_3$ med indre i F, så der ikke findes kanter mellem $\{f_1, \dots, f_k\}$ og $\{p_4, \dots, p_n\}$.*

◇

Hovedresultat $(viii)$ fra kapitel 1 kan nu vises.

Sætning 15.16
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$. Hvis der findes et hjul af ulige længde i G, så har G en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Antag, at $\{C, Y\}$ er et hjul af ulige længde, hvor Y er størst mulig, så antallet af kanter i C, der er komplette til Y, er mindst mulig.

Påstand: *Der findes ikke et punkt $v \in V(G) - (V(C) \cup Y)$, så v ikke er komplet til Y, og v har naboer, der ikke indbyrdes er naboer i C, og som har ulige hjulparitet.*

Antag, at der findes et punkt $v \in V(G) - (V(C) \cup Y)$, så v ikke er komplet til Y, og v har naboer, der ikke indbyrdes er naboer i C, og som har ulige hjulparitet. Antag, at der findes et udsnit af C af ulige længde, hvis punkter er komplette til $Y \cup \{v\}$. På grund af maksimaliteten af Y, er $\{C, Y \cup \{v\}\}$ dermed ikke et hjul, så der findes kun en kant i C, der er komplet til $Y \cup \{v\}$. Ifølge lemma 2.6 vil $Y \cup \{v\}$ enten indeholde en hat for C eller et afhop for C. Altså har v enten kun to naboer i C, eller et punkt i Y har kun tre naboer i C. Hvis v kun har to naboer i C, så er de indbyrdes naboer, hvilket er i modstrid med antagelsen om v. Hvis et punkt i Y kun har tre naboer i C, haves en modstrid, da $\{C, Y\}$ er et hjul, og der så skal findes mindst to disjunkte kanter i C, som er komplette til Y. Det vil sige, at der ikke findes et udsnit af C af ulige længde, hvis punkter er komplette til $Y \cup \{v\}$.

Lad en linie være en maksimal 2-vej i C, hvor intet indre punkt er nabo til v, og endepunkterne begge er naboer til v. Det følger, at enhver kant i C tilhører en unik linie. Lad C bestå af $p_1, \ldots, p_n$, og lad S være et udsnit af C af ulige længde, hvis punkter er komplette til Y.

Da der ikke findes udsnit af C af ulige længde, hvis kanter er komplette til $Y \cup \{v\}$, følger det, at et lige antal kanter i S er komplette til $Y \cup \{v\}$. Dermed er et ulige antal kanter i S ikke komplette til $Y \cup \{v\}$, og derfor findes en linie L, der indeholder et ulige antal kanter fra S, der ikke er komplette til $Y \cup \{v\}$. Specielt indeholder L mindst en kant, der er komplet til Y og ikke komplet til $Y \cup \{v\}$, da intet indre punkt i L er nabo til v, så L har længde mindst to. Lad L's endepunkter være p og q. Hvis p og q har ulige hjulparitet, er antagelserne i lemma 15.14 opfyldte. Men lemma 15.14(i) kan ikke være opfyldt, idet det er antaget, at v har naboer i C, der ikke indbyrdes er naboer. Hvis lemma 15.14(ii) er opfyldt, så vil p og p_1 have lige hjulparitet. Dermed opnåes en modstrid, da q og p_1 så ikke kan have lige hjulparitet, hvormed lemma 15.14(ii) ikke kan være opfyldt. Ligeledes er lemma 15.14(iii) ikke opfyldt, da $\{C, Y \cup \{v\}\}$ på grund af maksimaliteten af Y ikke er et hjul. Det vil sige, at p og q ifølge lemma 15.14 har lige hjulparitet med hensyn til $\{C, Y\}$, da ingen af konklusionerne er opfyldte. Da L indeholder et ulige antal kanter fra S, der er komplette til Y, lad det være S_1, må L indeholde yderligere et ulige antal kanter, der er komplette til Y og disjunkte fra S_1. Specielt findes to disjunkte kanter, der er komplette til Y, i hullet $H : v, p, L, q$. Dermed har H længde mindst seks, idet v ikke er komplet til Y, og så er $\{H, Y\}$ et hjul. Ydermere er $\{H, Y\}$ et hjul af ulige længde, idet $\{H, Y\}$ indeholder udsnittet S_1 af ulige længde. Idet v har naboer i C af ulige hjulparitet, følger det af lemma 15.14, at der findes en kant, som er komplet til $Y \cup \{v\}$ i C, som dermed ikke tilhører L. Men dette er i modstrid med, at $\{C, Y\}$ er et hjul af ulige længde med Y størst mulig, så antallet af kanter i C, der er komplette til Y, er mindst mulig. Dette viser påstanden.

Da $\{C, Y\}$ er et hjul af ulige længde, og idet det følger af korollar 2.4, at et ulige antal kanter i C er komplette til Y, har C mindst to udsnit, og derfor findes der punkter u og w i C, der har ulige hjulparitet og ingen af dem er komplette til Y. Lad X være mængden af alle punkter i $V(G)$, der er komplette til Y. Da er $|X| > 1$, idet der findes mindst fire punkter i C, der er komplette til Y. Dermed kan det ifølge lemma 15.4 antages, at der findes en sammenhængende mængde Z, hvor $Z = V(G) - (X \cup Y)$, $Z \neq \emptyset$, og ethvert punkt i X har en nabo i Z, for ellers har G en balanceret skæv opdeling, og sætningen er opfyldt. Specielt vil $u, w \in Z$, og der findes dermed en minimal og sammenhængende delmængde F af Z, så to punkter $p, q \in C - X$ med ulige hjulparitet begge har naboer i F. Da p og q har ulige hjulparitet og ikke er komplette til Y, er de ikke naboer. På grund af minimaliteten af F er F en 2-vej, og intet punkt i F tilhører C. Antagelserne i lemma

15.15 er opfyldte, og hvis lemma 15.15(i) er opfyldt, vil hjulet $\{C, Y \cup \{v\}\}$ have lige længde, da Y er størst mulig, så $\{C, Y\}$ er et hjul af ulige længde. Dermed findes mindst fem punkter, der er komplette til $Y \cup \{v\}$, og der vil altid findes to ikke-nabopunkter, der begge er naboer til v, som har ulige hjulparitet, hvilket danner modstrid med påstanden. Hvis lemma 15.15(ii) er opfyldt, vil der findes en 2-vej p_1, p_2, p_3 i C, hvor alle punkter er komplette til $Y \cup \{v\}$, og der findes mindst et punkt mere, der er nabo til v og har lige hjulparitet med p_1. Dermed har punktet ulige hjulparitet med p_2, og det er ikke-nabo til p_2, hvilket er i modstrid med påstanden. Altså må lemma 15.15(iii) være opfyldt. Det vil sige, at der findes en 2-vej bestående af tre punkter p_1, p_2 og p_3 i C, der alle er komplette til Y, og en 2-vej $p_1, f_1, \ldots, f_k, p_3$ med indre tilhørende F, så der ikke findes kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_k\}$ og $\{p_4, \ldots, p_n\}$. Men da kan $C - \{p_2\}$ udvides til et hul C' via $p_1, f_1, \ldots, f_k, p_3$, og C' har længde mindst seks. Ethvert udsnit S af C, hvis punkter er komplette til Y, indeholder enten begge eller ingen af kanterne p_1p_2 og p_2p_3, og i begge tilfælde tilhører et ulige antal kanter i S hullet C. Da C har et udsnit af ulige længde, og der findes et lige antal kanter i C, der er komplette til Y, har C mindst to udsnit af ulige længde, hvis punkter er komplette til Y. Det følger, at der findes to disjunkte kanter i C', der er komplette til Y, og dermed er $\{C', Y\}$ et hjul. Da et ulige antal kanter i S, der er et udsnit af ulige længde, tilhører C', følger, at $\{C', Y\}$ er et hjul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $\{C, Y\}$ er et hjul af ulige længde med Y størst mulig, så antallet af kanter i C, der er komplette til Y, er mindst mulig. Hermed er det vist, at enten har G en balanceret skæv opdeling, eller så opnåes en modstrid. $\square$

Da grafer, der har en balanceret skæv opdeling, er perfekte, er det nu vist, at en graf i familien $\mathcal{F}_6$ med et hjul af ulige længde er en perfekt graf. Da det i korollar 15.2 er vist, at en genstridig graf, og dermed et minimalt modeksempel, tilhører familien $\mathcal{F}_6$, kan et minimalt modeksempel ikke indeholde et hjul af ulige længde. Dermed er kravene til et minimalt modeksempel skærpet yderligere.

Kapitel 16

Familien $\mathcal{F}_7$

I kapitel 15 blev det vist, at et minimalt modeksempel ikke må indeholde et hjul af ulige længde. Dette leder frem til at definere familien $\mathcal{F}_7$, som er en underfamilie af familien $\mathcal{F}_6$, hvor der ikke forekommer hjul af ulige længde i hverken grafen selv eller dens komplement.
Dette kapitel vil omhandle resultater om familien $\mathcal{F}_7$ og afslutte med at bevise hovedresultat (ix) fra kapitel 1. For at vise dette benyttes trekanter og resultater om 2-veje og punkter i grafer fra familien $\mathcal{F}_7$. Først vil kravene til en genstridig graf skærpes yderligere til også at tilhøre familien $\mathcal{F}_7$. Afsnit 16.1 omhandler krav til trekanter i grafer i familien $\mathcal{F}_7$. Derefter følger afsnit 16.2 med lidt blandede resultater om forskellige specielle tilfælde i grafer i familien $\mathcal{F}_7$. Blandt andet vises i lemma 16.10, at hvis nogle specielle krav er opfyldte for fire punkter i en graf i familien $\mathcal{F}_7$, så vil der findes et hjul i grafen. Det sidste afsnit beskæftiger sig med pseudohjul, der er en speciel form for hjul, som vises ikke at kunne eksistere i et minimalt modeksempel.

Definition 16.1 ($\mathcal{F}_7$)
Lad $G \in \mathcal{F}_6$. Hvis yderligere hverken G eller $\overline{G}$ indeholder hjul af ulige længde, så vil $G \in \mathcal{F}_7$. ⋄

Bemærk, at hvis en graf ikke indeholder et hjul af ulige længde i komplementet, så vil grafen tilhøre familien $\mathcal{F}_7$.

Korollar 16.2
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_7$. ⋄

Bevis
Ifølge korollar 15.2 vil enhver genstridig graf tilhøre $\mathcal{F}_6$. Enhver genstridig graf G vil per definition 13.1 ikke indeholde en balanceret skæv opdeling. Hermed må G ifølge sætning 15.16 ikke indeholde et hjul af ulige længde. Ved at anvende sætning 15.16 i komplementet må $\overline{G}$ ligeledes ikke indeholde et hjul af ulige længde, hvormed $G \in \mathcal{F}_7$. □

Ifølge ovenstående må et minimalt modeksempel yderligere ikke indeholde et hjul af ulige længde i hverken grafen selv ellers dens komplement. Det er således blevet lidt vanskeligere at finde et minimalt modeksempel.

16.1 Trekanter

I dette afsnit undersøges trekanter. Først opstilles to definitioner omhandlende trekanter, hvorefter et lemma vises.

Definition 16.3 (Spejlbillede af en trekant)
Lad G være en graf, og lad $\{a_1, a_2, a_3\}$ være en trekant i G. Spejlbilledet af $\{a_1, a_2, a_3\}$ er en trekant $\{b_1, b_2, b_3\}$ i G, hvorom det gælder, at $\{a_1, a_2, a_3\} \neq \{b_1, b_2, b_3\}$, og de eneste kanter mellem de to trekanter er a_1b_1, a_2b_2 og a_3b_3. $\diamond$

Bemærk, at en trekant og spejlbilledet af denne udgør en prisme. Da familien $\mathcal{F}_7$ er en underfamilie af familierne $\mathcal{F}_4$ og $\mathcal{F}_5$, må familien $\mathcal{F}_7$ ikke indeholde aflange prismer. Dette passer også godt med, at en trekant og dennes spejlbillede er en prisme, hvor hver 2-vej mellem de to trekanter har længde én.

Definition 16.4 (Fange en trekant)
Lad G være en graf, og lad $\{a_1, a_2, a_3\}$ være en trekant i G. En delmængde $F \subseteq V(G)$ siges at fange $\{a_1, a_2, a_3\}$, hvis F er sammenhængende, $F \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \emptyset$, og a_1, a_2 og a_3 alle har en nabo i F. $\diamond$

Hvis en mængde F fanger en trekant $\{a_1, a_2, a_3\}$, naboerne til a_1, a_2 samt a_3 er b_1, b_2 henholdsvis b_3, og $\{b_1, b_2, b_3\}$ danner en trekant, så indeholder F et spejlbillede $\{b_1, b_2, b_3\}$ af trekanten $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Lemma 16.5
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ være en trekant i G. Lad $F \subseteq V(G)$ fange A, da vil F enten indeholde et spejlbillede af A eller indeholde et punkt, som har mindst to naboer i A. $\diamond$

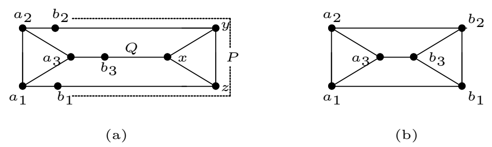
Bevis
Antag, at F ikke indeholder hverken et spejlbillede af A eller et punkt, som har mindst to naboer i A. Vælg F minimal, så F stadig fanger A. Lad B_i være mængden af a_i's naboer i F, for $i = 1, 2, 3$. Da intet punkt i F er nabo til mere end et punkt fra A, er mængderne B_1, B_2 og B_3 disjunkte. Da F fanger A, har punkterne i A alle en nabo i F, så B_1, B_2 og B_3 er ikke-tomme mængder.

Påstand: *Der findes ikke en 2-vej P, hvor $V(P) \subseteq F$, og $V(P) \cap B_i \neq \emptyset$, for $i = 1, 2, 3$.*

Antag, at der findes en 2-vej P, hvor $V(P) \subseteq F$, og $V(P) \cap B_i \neq \emptyset$, for $i = 1, 2, 3$, og vælg denne mindst mulig, så dette er opfyldt. Det vil sige, at det kan antages, at P er en 2-vej mellem $b_1 \in B_1$ og $b_2 \in B_2$, hvor et af $P's$ indre punkter tilhører B_3, og hvor b_i er det eneste punkt fra B_i, for $i = 1, 2$, i P. Da B_3 er disjunkt fra $B_1 \cup B_2$, vil ethvert punkt fra P, som tilhører B_3, være et indre punkt i P. Dermed må P have længde mindst to. Da er $C : a_1, b_1, P, b_2, a_2$ et hul i G, og idet $G \in \mathcal{F}_7$, må det være et hul af lige længde, og C har dermed længde mindst seks. I C er punkterne a_1 og a_2 komplette til $\{a_3\}$, mens b_1 og b_2 ikke er komplette til $\{a_3\}$. Da $\{C, \{a_3\}\}$ ikke må være et hjul af ulige længde, idet $G \in \mathcal{F}_7$, må $\{C, \{a_3\}\}$ ikke være et hjul. Da er antagelserne i korollar 2.4 opfyldte, hvor P i korollar 2.4 svarer til C, og X svarer til $\{a_3\}$. Der vil ifølge korollar 2.4 enten findes et lige antal kanter, der er komplette til $\{a_3\}$, eller der findes netop to punkter i C, der er komplette til $\{a_3\}$, og de er nabopunkter. Hvis der skal findes et lige antal kanter, der er komplette til $\{a_3\}$, er den ene kant a_1a_2, og den eneste anden mulighed er kanter i B_3. Men disse kanter er disjunkte, hvilket er i modstrid med, at $\{C, \{a_3\}\}$ ikke er et hjul. Dermed findes der ifølge korollar 2.4 netop to punkter i C, der er komplette til $\{a_3\}$, nemlig punkterne a_1 og a_2. Det vil sige, at der ikke findes punkter i C fra B_3, da punkter i B_3 er naboer til a_3 i F. Dette danner en modstrid med, at $B_3 \cap V(P) \neq \emptyset$, og påstanden er vist.

Vælg et $b_1 \in F$, så $F - b_1$ er sammenhængende. På grund af minimaliteten af F, vil $F - b_1$ ikke fange A. Derfor kan det antages, at $B_1 = \{b_1\}$. Da $|F| \geq 3$, idet F fanger A og ikke indeholder et punkt, som har mindst to naboer i A, må der findes et punkt $b_2 \in F$, så $F - b_2$ er sammenhængende. Som før kan det antages, at $B_2 = \{b_2\}$. Lad P være 2-vejen mellem b_1 og b_2 i F. Ifølge påstanden vil ingen af P's indre punkter tilhøre B_3. Da F er sammenhængende, vil der findes en sammenhængende delmængde F' af F, som indeholder $V(P)$ og præcis et punkt fra B_3. Da F er minimal, må $F = F'$, så $B_3 = \{b_3\}$.
Lad Q være en minimal 2-vej i F, så $b_3 \in V(Q)$, og Q indeholder et punkt x, som har en nabo i

P. Da Q er minimal, følger det, at Q har endepunkter b_3 samt x, og Q er disjunkt fra P. Hvis x har to naboer y og z i P, som ikke indbyrdes er naboer, vil punkter fra P, som er indre punkter på 2-vejen $y, \dots, z$, kunne fjernes fra F, og F ville stadig opfylde betingelserne. Altså er sådanne to ikke-nabopunkter i modstrid med minimaliteten af F. Det vil sige, at x enten kun vil have én nabo i P, eller så vil x have to naboer i P, som indbyrdes er naboer.
Hvis x kun har én nabo y i P, kan y forbindes til A via 2-vejen y, x, Q, b_3, a_3, 2-vejen $y, \dots, b_1, a_1$ og 2-vejen $y, \dots, b_2, a_2$, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da y ikke er nabo til mindst to punkter fra A. Derfor må x være nabo til to punkter y og z i P, som indbyrdes er naboer, se figur 16.1(a).



Figur 16.1: Udsnit af G indeholdende 2-vejene P og Q samt trekanten A.

Da $G \in \mathcal{F}_7$, indeholder G ingen aflange prismer, så derfor må Q have længde nul, det vil sige, at $b_3 = x$, og P må have længde en, hvormed $P : b_1 b_2$, se figur 16.1(b). Dermed indeholder F et spejlbillede $\{b_1, b_2, b_3\}$ af A, hvilket er i modstrid med antagelsen. $\square$

16.2 Om specielle 2-veje og punkter i familien $\mathcal{F}_7$

I dette afsnit gennemgåes en række resultater omhandlende specielle 2-veje og punkter i familien $\mathcal{F}_7$.

Lemma 16.6
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$. Lad $F, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte mængder, så F er sammenhængende, og Y er antisammenhængende. Lad $a_0, b_0 \in V(G) - (F \cup Y)$, og lad $a, b \in F$, så a, a_0, b_0, b er en 2-vej af længde tre i G. Antag, at

(I) a_0 og b_0 begge er komplette til Y, og a samt b begge ikke er komplette til Y.

(II) a og b er de eneste punkter fra F, som er naboer til a_0 og b_0.

(III) $F - a$ er sammenhængende.

Da vil der findes et punkt $y \in Y$, som ikke har naboer i $F - a$. $\diamond$

Lemma 16.7
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $P : p_1, \dots, p_n$ være en 2-vej i G af længde mindst to. Lad $X, Y \subseteq V(G) - V(P)$ være to antisammenhængende mængder, så $X \cup Y$ er antisammenhængende, p_1 er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til Y. Lad $z \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ være et punkt, der er komplet til $X \cup Y$, og som ikke har naboer i P. Antag, at p_n ikke er komplet til X, og lad $y \in Y$, så $p_n, x_1, \dots, x_k, y$ er en anti 2-vej, hvis indre tilhører X. Da er p_{n-1} ikke-nabo til x_1. $\diamond$

Lemma 16.8
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte og antisammenhængende mængder, der udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \dots, p_n$ være en 2-vej i G af lige længde mindst to, hvor p_1 er komplet til X, p_n ikke er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, som er

komplet til Y. Hvis der i G findes et punkt u, der er komplet til Y, og som ikke er nabo til hverken p_{n-1} eller p_{n-2}, da vil et af følgende gælde:

(*i*) *Der findes et ulige antal kanter i P, som er komplette til X.*

(*ii*) *$n = 3$, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem p_{n-1} og p_n, hvis indre tilhører X.*

$\diamond$

Lemma 16.9
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte og antisammenhængende mængder, der udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \geq 5$, så p_1 og p_n er de eneste punkter i P, som er komplette til X. Da vil P have lige længde.
Hvis P indeholder mindst to punkter, der er komplette til Y, og ikke alle punkter i P er komplette til Y, da sættes P' lig en maksimal sammenhængende delgraf af P, så intet indre punkt i P' er komplet til Y. Da har længden af P' samme paritet som antallet af endepunkter fra P', der tilhører $\{p_1, p_n\}$, og som ikke er komplette til Y.
Desuden har antallet af kanter i P, der er komplette til Y, samme paritet som antallet af endepunkter i P, der er komplette til Y. $\diamond$

Bevis
Antag, at P har ulige længde, da følger af lemma 14.3, at en kant i P er komplet til X, eller P har længde tre. Da p_1 og p_n er de eneste punkter i P, der er komplette til X, og P har længde mindst fire, er en modstrid opnået, så P har lige længde.

Antag, at P indeholder mindst to punkter, som er komplette til Y. Hvis det kun er p_1 i P, der ikke er komplet til Y, så vælges P' til p_1, p_2. Dermed vil et ulige antal endepunkter fra P' tilhøre $\{p_1, p_n\}$ og ikke være komplette til Y, hvilket stemmer overens med, at P' har ulige længde. Ligeledes hvis p_n ikke er komplet til Y. Det kan derfor antages, at P' har længde mindst to. Dette medfører ikke nødvendigvis, at endepunkterne i P' er komplette til Y. For eksempel hvis p_n ikke er komplet til Y, og $p_k \in V(P)$ er et punkt, der er komplet til Y, hvor k er valgt maksimalt, så kan $P' : p_k, \ldots, p_n$.
Antag, at endepunkterne i P' er komplette til Y, og antag, at $P' : p_i, \ldots, p_j$, for $1 \leq i < j \leq n$, har ulige længde. Ifølge lemma 14.3 har P' længde tre, så $j - i = 3$, og der findes en anti 2-vej Q_Y af ulige længde mellem p_{i+1} og p_{i+2}, hvis indre tilhører Y. Da $n \geq 5$, vil enten $i > 1$ eller $j < n$. Antag, at $i > 1$. På grund af symmetrien mellem p_1 og p_n kan tilfældet for $j < n$ vises analogt.
Da intet indre punkt i P er komplet til X, vil p_{i+1} samt p_{i+2} ikke være komplette til X. Da X er antisammenhængende, findes der en anti 2-vej Q_X mellem p_{i+1} og p_{i+2}, hvis indre tilhører X. Da Q_X og Q_Y danner et antihul, og Q_Y har ulige længde, må Q_X også have ulige længde. Men så er $p_1, p_{i+1}, Q_X, p_{i+2}$ et antihul af ulige længde. Derfor må antagelsen, om at P' har ulige længde, være forkert, hvormed P' må have lige længde. Da både p_i og p_j er komplette til Y, er første del af lemmaet opfyldt, idet intet endepunkt fra P' har en ikke-nabo i Y og samtidig er indeholdt i $\{p_1, p_n\}$.
Derfor kan det antages, at et af p_i eller p_j ikke er komplet til Y. Dette medfører, da P' er maksimal, så intet indre punkt er komplet til Y, at længden af enhver 2-vej i P, hvis ene endepunkt er komplet til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y, er mindre end længden af P'. Da P indeholder mindst to punkter, som er komplette til Y, vil det ene endepunkt fra P', som ikke er komplet til Y, være enten p_1 eller p_n, for ellers haves en 2-vej i P, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y, som er længere end P'. Lad det være $p_j = p_n$, som ikke er komplet til Y. Da mindst to punkter i P er komplette til Y, vil $p_i \neq p_1$. Det vil sige, at i, for $2 \leq i \leq n-1$, er valgt størst muligt, så p_i er komplet til Y. Hvis P' har lige længde, så følger det af lemma 14.4, at P' har længde to, idet p_i er det eneste punkt fra P', der er komplet til Y, og p_n er det eneste punkt fra P og dermed fra P', der er komplet til X. Det vil sige, at $n - i = 2$. Desuden følger af lemma 14.4, at der findes en anti 2-vej Q_X mellem p_i og p_{n-1}, hvis indre tilhører X, og en anti 2-vej Q_Y mellem p_{n-1} og p_n, hvis indre tilhører Y. Ydermere vil præcis én af Q_X og Q_Y have ulige længde. Der findes et punkt $p_h \in V(P)$, som er komplet til Y, for $1 \leq h < i$,

og da er p_h, p_{n-1}, Q_Y, p_n et antihul, så Q_Y må have lige længde. Altså må Q_X have ulige længde. Men da er p_1, p_i, Q_X, p_{n-1} et antihul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$. Det vil sige, at P' har ulige længde. Da præcis ét af endepunkterne i P' ikke er komplet til Y, og dette enten er p_1 eller p_n, er første del af lemmaet opfyldt.

Vælg i, hvor $1 \leq i < n$, mindst muligt, så p_i er komplet til Y, og vælg j, hvor $1 < j \leq n$, størst muligt, så p_j er komplet til Y. Da følger af korollar 2.4, at antallet af kanter i 2-vejen $p_i, \dots, p_j$, der er komplette til Y, har samme paritet som længden af 2-vejen $p_i, \dots, p_j$. Hvis både p_1 og p_n er komplette til Y, er $p_i = p_1$ og $p_j = p_n$. Dermed vil $p_i, \dots, p_j$ have lige længde, hvormed et lige antal kanter i P er komplette til Y. Desuden er et lige antal endepunkter i P komplette til Y, så anden del af lemmaet er opfyldt i dette tilfælde. Hvis hverken p_1 eller p_n er komplette til Y, vil $p_1, \dots, p_i$ og $p_j, \dots, p_n$ ifølge første del af lemmaet begge have ulige længde. Dermed har $p_i, \dots, p_j$ lige længde, hvormed et lige antal kanter i P er komplette til Y. Desuden er et lige antal endepunkter i P komplette til Y, så anden del af lemmaet er opfyldt i dette tilfælde. Hvis p_1 er komplet til Y, og p_n ikke er komplet til Y, så er $p_i = p_1$, og $p_j, \dots, p_n$ har ifølge første del af lemmaet ulige længde. Dermed har $p_1, \dots, p_j$ også ulige længde, så P indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Desuden er et ulige antal endepunkter i P komplette til Y, så anden del af beviset er opfyldt i dette tilfælde. Det kan analogt vises, at hvis p_1 ikke er komplet til Y, og p_n er komplet til Y, så er anden del af lemmaet opfyldt. Det er hermed vist, at antallet af kanter i P, der er komplette til Y, har samme paritet som antallet af endepunkter i P, der er komplette til Y. □

Lemma 16.10

Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, lad $Y \subseteq V(G)$ være antisammenhængende, og lad $A \subseteq V(G)$ være sammenhængende. Lad $x_0, x_1, v, z \in V(G) - (Y \cup A)$ være forskellige punkter, der opfylder følgende:

- (i) *x_0 og x_1 er ikke-nabopunkter og er begge komplette til Y.*
- (ii) *z er nabo til x_0, x_1 samt v, og z er antikomplet til A.*
- (iii) *Intet punkt i A er nabo til både x_0 og x_1.*
- (iv) *v er ikke-nabo til et af x_0 og x_1, og v er ikke komplet til Y.*
- (v) *Ethvert punkt i Y, der er ikke-nabo til v, har en nabo i A og er nabo til z.*
- (vi) *x_0, x_1 og v har alle naboer i A.*

Da er z komplet til Y, og der findes et hjul $\{C, Y\}$ i G, hvor $x_0, x_1, z \in V(C) \subseteq A \cup \{x_0, x_1, z\}$. ⋄

Bevis

Beviset føres ved induktion over $|Y|$.
Fasthold Y og antag, at lemmaet gælder for alle mindre antisammenhængende mængder. Antag yderligere, at $|A|$ er mindst mulig, så lemmaets antagelser er opfyldte.

Påstand 1: *Der findes $y \in Y$, der er nabo til z og har en nabo i A, så enten $Y = \{y\}$ eller $Y - y$ er antisammenhængende.*

Lad $Y = \{y\}$. Da v ifølge (iv) ikke er komplet til Y, er v ikke-nabo til y, hvormed y ifølge (v) har en nabo i A og er nabo til z, og påstand 1 er opfyldt, så antag derfor, at $|Y| > 1$. Vælg to punkter $y_1, y_2 \in Y$, hvor $y_1 \neq y_2$, så $Y - y_i$ er antisammenhængende, for $i = 1, 2$. Da $Y - y_2$ er en mindre mængde, følger af induktionsantagelsen, at z er komplet til $Y - y_2$, og der findes et hjul $\{C, Y - y_2\}$, hvor $x_0, x_1, z \in V(C) \subseteq A \cup \{x_0, x_1, z\}$. Dermed er y_1 nabo til z, og hvis yderligere y_1 har en nabo i A, så er påstand 1 opfyldt med y_1 som y. Da $G \in \mathcal{F}_7$, er $\{C, Y - y_2\}$ ikke et hjul af ulige længde, så mindst to kanter i $x_0, a_1, \dots, a_n, x_j$ er komplette til $Y - y_2$, altså er mindst to punkter i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ komplette til $Y - y_2$. Dermed har $y_1 \in Y - y_2$ en nabo i A, og påstand 1 er vist.

Lad $y \in Y$ være nabo til z samt have en nabo i A, så enten $Y = \{y\}$ eller $Y - y$ er antisammenhængende, og lad $Y' = Y - y$. Da $|Y'| < |Y|$, er lemmaet opfyldt for Y'. Det skal nu vises, at lemmaet er opfyldt for Y.

Påstand 2: *Enten er v komplet til Y' og ikke-nabo til y, eller så er z komplet til Y, og der findes en 2-vej $x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$, hvis indre tilhører A, og som indeholder mindst to kanter, der er komplette til Y'.*

Hvis v er komplet til Y', er v ikke-nabo til y ifølge (iv), og påstand 2 er opfyldt, så det kan antages, at v ikke er komplet til Y'. Her er $Y' \neq \emptyset$, idet v har en ikke-nabo i Y'. Da $Y' = Y - y$, er z på grund af induktionsantagelsen komplet til Y', og z er dermed komplet til Y, idet z er nabo til y, og $Y = Y' \cup \{y\}$. Per induktionsantagelse vil der findes et hjul $\{C, Y'\}$, hvor $x_0, x_1, z \in V(C) \subseteq A \cup \{x_0, x_1, z\}$. Da $G \in \mathcal{F}_7$, må hjulet ikke have ulige længde, så der vil findes et lige antal, og mindst fire, kanter i C, der er komplette til Y', da der i et hjul findes mindst to disjunkte kanter, der er komplette til Y'. Dermed indeholder 2-vejen $x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ mindst to kanter, der er komplette til Y'. Dette viser påstand 2.

Påstand 3: *Der findes ikke en sammenhængende mængde $F \subset A$, som indeholder naboer til x_0, x_1, v og y.*

Antag, at der findes en sammenhængende mængde $F \subset A$, som indeholder naboer til x_0, x_1, v og y. Da $|A|$ er valgt mindst mulig, så lemmaets antagelser er opfyldte, gælder om F, at mindst en af lemmaets antagelser ikke er opfyldt. De eneste antagelser, der ikke kan være opfyldt for F, er (v) og (vi). I tilfælde af at (v) ikke er opfyldt, findes der et punkt $y' \in Y$, der er ikke-nabo til v, og som ikke har en nabo i F. Da y' ikke har naboer i F, er $y' \neq y$, og dermed vil $y' \in Y'$. Da y' er ikke-nabo til v, er v ikke komplet til Y', så $Y' \neq \emptyset$. Fra påstand 2 følger, at mindst to punkter i A er komplette til Y'. Da $F \neq A$, findes $f \in A - F$. Vælg f, så $A - f$ er sammenhængende. Da A indeholder mindst to punkter, der er komplette til Y', har alle punkter i Y' mindst to naboer i A. Idet F er antaget at indeholde naboer til x_0, x_1, v og y, har ethvert punkt i $\{x_0, x_1, v, y\}$ en nabo i $A - f$, idet $F \subseteq A - f$. Da alle punkter i Y' vil have mindst to naboer i A, vil alle punkter i $Y' = Y - y$ have en nabo i $A - f$, og da alle punkter i $\{x_0, x_1, v, y\}$ har en nabo i $A - f$, er lemmaets antagelser opfyldte for den mindre mængde $A - f$, hvilket er i modstrid med minimaliteten af $|A|$. Dette viser påstand 3.

Lad $P : x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ være en 2-vej, hvis indre tilhører A, og da er $C : z, x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ ifølge (ii) et hul.

Påstand 4: *Hvis et punkt i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ er komplet til $Y \cup \{v\}$, så er z komplet til Y. Hvis z er komplet til Y, så kan det antages, at ingen kant i P er komplet til Y. Specielt gælder, at hverken a_1 eller a_n er komplet til $Y \cup \{v\}$.*

Påstand 4 indeholder tre dele. For første del af påstanden lad a_i, for $1 \leq i \leq n$, være komplet til $Y \cup \{v\}$, og antag, at z ikke er komplet til Y. Da er v ifølge påstand 2 komplet til Y' og ikke-nabo til y. Lad Q være en anti 2-vej mellem z og y, hvis indre tilhører Y', og lad R være en anti 2-vej mellem v og a_i, hvis indre tilhører $\{x_0, x_1\}$. Da er $D : z, Q, y, v, R, a_i$ et antihul, som har mindst tre punkter til fælles med hullet C, nemlig z, a_i og mindst et af x_0 og x_1. Dette er i modstrid med lemma 15.9, hvor C er hullet af længde mindst seks, og D er antihullet af længde mindst seks, idet C og D har mindst tre fælles punkter. Det vil sige, at første del af påstanden er opfyldt.
Hvis z er komplet til Y, da vil kanterne zx_0 og zx_1 være komplette til Y, da både x_0 og x_1 ifølge (i) er komplette til Y. Hvis der findes kanter i P, der er komplette til Y, så er $\{C, Y\}$ et hjul, der opfylder lemmaet. Det kan derfor antages, at ingen kant i P er komplet til Y, hvormed anden del af påstanden er vist. Heraf følger også, at hverken a_1 eller a_n er komplet til $Y \cup \{v\}$. For hvis a_1 er komplet til $Y \cup \{v\}$, da er a_1x_0 en kant i P, som er komplet til Y, hvilket er i modstrid med anden del af påstanden. Ligeledes opnåes en modstrid, hvis a_n er komplet til $Y \cup \{v\}$, for da er a_nx_1 en kant, der er komplet til Y. Dette viser påstand 4.

Påstand 5: *Hvis* x_0 *er nabo til* v*, så er* v *ikke-nabo til* $a_2, \dots, a_n$*.*

Ifølge (iv) er v ikke-nabo til et af x_0 eller x_1, så v er ikke-nabo til x_1. Antag, at v er nabo til et af $a_2, \dots, a_n$. Vælg i, for $2 \leq i \leq n$, størst muligt, så v er nabo til a_i. Antag, at $i = n$, og antag, at a_n er komplet til Y. Da er a_n komplet til $Y \cup \{v\}$, idet $a_n = a_i$ og en modstrid er opnået med påstand 4. Det vil sige, at a_n ikke er komplet til Y. Da v ifølge (iv) heller ikke er komplet til Y, findes en anti 2-vej mellem a_n og v, hvis indre tilhører Y. Denne anti 2-vej danner sammen med anti 2-vejen v, x_1, x_0, a_n et antihul af længde mindst seks, som indeholder x_0, x_1 og a_n, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Det vil sige, at $i < n$.
Da hullet C skal have lige længde, må n være ulige, og dermed følger fra hullet $z, v, a_i, \dots, a_n, x_1$, at i er ulige. Da $i < n$, er $S : x_0, v, a_i, \dots, a_n, x_1$ en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til $Y \cup \{z\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $Y \cup \{z\}$. Dermed er $Y \cup \{z\}$ ifølge lemma 14.3 ikke antisammenhængende, idet ingen af konklusionerne er opfyldte. Det vil sige, at z er komplet til Y. Da endepunkterne i S er komplette til Y, følger det af lemma 14.3, at en kant i S er komplet til Y. Eftersom v ikke er komplet til Y, må kanten tilhøre $a_i, \dots, a_n, x_1$, hvilket vil sige, at kanten tilhører P, men dette er i modstrid med påstand 4. Det vil sige, at antagelsen, om at v er nabo til et af $a_2, \dots, a_n$, er forkert, hvormed påstand 5 er vist.

Bemærk, at påstand 5 af symmetri mellem x_0 og x_1 også gælder, hvis x_1 er nabo til v i stedet for x_0.

Vælg C, så enten v er komplet til Y', eller $\{C, Y'\}$ er et hjul. Det er muligt at foretage dette valg på grund af påstand 2 og (i), hvor 2-vejen $x_0, a_1, \dots, a_n, x_1$ sammen med z udgør C.

Påstand 6: *Hvis* x_0 *er nabo til* v*, så har* v *og* y *ikke begge naboer i* $\{a_1, \dots, a_n\}$*.*

Antag, at x_0 er nabo til v, og både v og y har naboer i $\{a_1, \dots, a_n\}$. Da er a_1 ifølge påstand 5 den eneste nabo til v i $\{a_1, \dots, a_n\}$. Antag, at v er nabo til y. Dermed er z ifølge påstand 2 komplet til Y, og $x_0, a_1, \dots, a_n, x_1$ indeholder mindst to kanter, der er komplette til Y', så $\{C, Y'\}$ er et hjul. Da mindst to disjunkte kanter i C er komplette til Y', vil der findes et punkt i $\{a_2, \dots, a_n\}$, som er komplet til Y'. Altså har alle punkter i Y' en nabo i $\{a_2, \dots, a_n\}$.
Nu undersøges, hvilke punkter i C, der er komplette til $Y \cup \{v\}$. Det haves, at z er komplet til Y, og da z ifølge (ii) er nabo til v, er z komplet til $Y \cup \{v\}$. Desuden haves ifølge (i), at både x_0 og x_1 er komplette til Y, men da kun x_0 er nabo til v, er kun x_0 komplet til $Y \cup \{v\}$. Ud af punkterne $a_1, \dots, a_n$ haves, at det kun er a_1, der er nabo til v, men da det fra påstand 4 haves, at a_1 ikke er komplet til $Y \cup \{v\}$, er det kun z og x_0 fra C, som er komplette til $Y \cup \{v\}$. Da yderligere zx_0 er en kant i C, der er komplet til $Y \cup \{v\}$, følger det af lemma 2.6, at der i $Y \cup \{v\}$ enten findes en hat for C eller et afhop for C ved zx_0.
Eftersom alle punkter i Y' har en nabo i $\{a_2, \dots, a_n\}$, y er nabo til x_1, og v er nabo til z, findes der ikke en hat for C. Det vil sige, at y og v udgør et afhop for C, da $v, y \in Y \cup \{v\}$ er de eneste punkter, som kun er nabo til $\{x_1, z, x_0, a_1\}$, som krævet i et afhop. Dette kan dog ikke lade sig gøre, idet det er antaget, at y og v er naboer. Det vil sige, at antagelsen, om at y og v er naboer, er forkert.

Vælg j, for $1 \leq j \leq n$, mindst muligt, så y er nabo til a_j. Fra hullet $z, v, a_1, \dots, a_j, y$ haves, at j er ulige. Da $x_0, a_1, \dots, a_j, y$ ikke må danne et hul, idet hullet så har ulige længde, må $j = 1$, hvormed a_1 er nabo til y.
Antag, at a_1 er komplet til Y, hvormed a_1 er komplet til $Y \cup \{v\}$, idet a_1 er nabo til v. Da opnåes en modstrid med påstand 4, så a_1 er ikke komplet til Y. Da a_1 og y er naboer, betyder det, at a_1 ikke er komplet til Y'. Hvis v er komplet til Y', så kan anti 2-vejen mellem a_1 og y, hvis indre tilhører Y', udvides til et antihul D via anti 2-vejen y, v, x_1, a_1. Her har D og hullet $z, v, a_1, \dots, a_n, x_1$ punkterne a_1, x_1 og v til fælles, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Det vil sige, at v ikke er komplet til Y'.
Fra påstand 2 er z komplet til Y, og $\{C, Y'\}$ er et hjul. Fra lemma 15.14 anvendt på hjulet $\{C, Y'\}$ og punktet v, hvor z og x_0 er naboer til v, og de har ulige hjulparitet, da zx_0 er komplet til Y'. Deraf følger, at $x_0, a_1, \dots, a_n, x_1, z$ indeholder en kant, der er komplet til Y', og da v har nøjagtig tre naboer z, x_0 og a_1 i C, er hverken lemma 15.14(i) eller lemma 15.14(iii) opfyldt, hvormed

lemma 15.14(ii) må gælde. Det vil sige, at z, x_0, a_1 er en 2-vej i C, hvori alle punkter er komplette til $Y' \cup \{v\}$. Da a_1 er nabo til y, er a_1 komplet til $Y \cup \{v\}$, hvilket danner modstrid med påstand 4. Dette viser påstand 6.

Bemærk, at påstand 6 ligesom påstand 5 af symmetri mellem x_0 og x_1 også vil gælde, hvis det er x_1, der er nabo til v.

Påstand 7: *v og y har ikke begge naboer i $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Fra påstand 6 kan det antages, at v ikke er nabo til x_0, og på samme måde, at v ikke er nabo til x_1, for ellers er påstand 7 opfyldt.
Antag, at v og y begge har naboer i $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Dermed udgør $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ifølge påstand 3 hele A, da $\{a_1, \ldots, a_n\}$ indeholder naboer til alle punkter i $\{x_0, x_1, v, y\}$. Vælg i, for $1 \leq i \leq n$, størst muligt, så v er nabo til a_i. Fra hullet $z, v, a_i, \ldots, a_n, x_1$ følger, at i er ulige, da n er ulige, idet $C : z, x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ er et hul.

Antag, at v ikke er komplet til Y'. Fra påstand 2 følger da, at z er komplet til Y, og $\{C, Y'\}$ er et hjul. Punktet v er nabo til z og a_i i C, og v har ikke flere naboer i 2-vejen $z, x_1, a_n, \ldots, a_i$, da i er valgt størst muligt, så a_i er nabo til v. Antag, at z og a_i har ulige hjulparitet. Da følger af lemma 15.14, at $z, x_1, a_n, \ldots, a_i$ indeholder en kant, der er komplet til $Y' \cup \{v\}$. Dette er dog ikke muligt, da v kun har to naboer i $z, x_1, a_n, \ldots, a_i$, og de er ikke-naboer. Dermed må a_i og z have lige hjulparitet. Da z og a_i har lige hjulparitet, og zx_1 er komplet til Y', må der findes et ulige antal kanter i $a_i, \ldots, a_n, x_1$, der er komplette til Y'. Da z er komplet til Y, følger fra påstand 4, at ingen kant i 2-vejen $P : x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ er komplet til Y. Det betyder, at zx_1 er den eneste kant i hullet $C_1 : z, v, a_i, \ldots, a_n, x_1$, der er komplet til Y. Antag, at y er ikke-nabo til alle punkter i 2-vejen $v, a_i, \ldots, a_n$. Da y er antaget at være nabo til z og have en nabo i A, så $Y - y = \emptyset$ eller $Y - y$ er antisammenhængende, har y en nabo i $\{a_1, \ldots, a_n\}$, hvilket vil sige, at y må have en nabo i $\{a_1, \ldots, a_i\}$. Dermed fanger $F = \{a_1, \ldots, a_n, v\}$ trekanten $\{z, x_1, y\}$, idet $\{z, x_1, y\}$ alle har en nabo i F. Desuden er v den eneste nabo til z i F, mens a_n er den eneste nabo til x_1 i F, og y er per antagelse ikke-nabo til både v og a_n, hvormed intet punkt i F har mere end en nabo i $\{z, x_1, y\}$. Dermed følger det af lemma 16.5, at F indeholder et spejlbillede af $\{z, x_1, y\}$. Det vil sige, at $i = n$, og der findes a_k, hvor $1 \leq k < n$, så $\{v, a_n, a_k\}$ er et spejlbillede af $\{z, x_1, y\}$. Dermed findes et antihul y, a_n, z, a_k, x_1, v af længde seks, der anvender z, x_1 og a_n, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Dette viser, at y er nabo til et af punkterne $v, a_i, \ldots, a_n$.
Da der findes et ulige antal kanter i 2-vejen $a_i, \ldots, a_n, x_1$, som er komplette til Y', følger det, at ethvert punkt i Y er nabo til et af $v, a_i, \ldots, a_n$.
Antag, at C_1 har længde mindst seks. I C_1 er z og x_1 komplette til Y, mens v og a_n ikke er komplette til Y. Da $\{C_1, Y\}$ ikke må være et hjul af ulige længde, idet $G \in \mathcal{F}_7$, må $\{C_1, Y\}$ ikke være et hjul. Da følger af korollar 2.4, at z og x_1 er de eneste punkter i C_1, der er komplette til Y. Dermed følger af lemma 2.6, at Y indeholder et afhop eller en hat for C_1 ved zx_1. Da ethvert punkt i Y har en nabo i $v, a_i, \ldots, a_n$, kan Y ikke indeholde en hat for C_1. Altså indeholder Y et afhop for C_1 ved zx_1. Det vil sige, at der findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så kanterne y_1z, y_1v, y_1x_1, y_2z, y_2a_n og y_2x_1 findes i G. Dermed findes en 2-vej $Q : y_1, v, a_i, \ldots, a_n, y_2$ af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til $\{x_0, x_1\}$, idet x_0 og x_1 ifølge (i) begge er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y. Dette er i modstrid med lemma 14.3. Det vil altså sige, at antagelsen, om at C_1 har længde mindst seks, er forkert, hvormed C_1 har længde fire. Det betyder, at $i = n$, og da 2-vejen $a_i, \ldots, a_n, x_1$ indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y', må $a_i = a_n$ være komplet til Y'. Da a_n er komplet til Y', og det følger af påstand 4, at a_n ikke er komplet til Y, er a_n ikke-nabo til y. Det vil sige, at y er nabo til v, idet y er nabo til et af punkterne i $\{v, a_n\}$. Lad S være en anti 2-vej mellem v og y, hvis indre tilhører Y'. Da har S ulige længde, da den danner et antihul med v, x_0, a_n, y. Dermed har 2-vejen $T : v, S, y, a_n$ lige længde. Anvendes lemma 15.8 på C_1 og T opnåes en modstrid, da både z og x_1 er komplette til $S - \{v\} \subseteq Y$. Det vil sige, at påstand 7 er vist under antagelse af, at v ikke er komplet til Y'.

Det kan derfor antages, at v er komplet til Y', og dermed ikke er nabo til y, idet v ikke er komplet til Y. Det haves, at $F = \{v, a_1, \ldots, a_n\}$ er sammenhængende, idet $a_1, \ldots, a_n$ tilhører A, som er en sammenhængende mængde, og v ifølge (vi) har naboer i A. Desuden fanger $\{v, a_1, \dots, a_n\}$ trekanten $\{z, x_1, y\}$, idet v er den eneste nabo til z, x_1 er eneste nabo til a_n, da $P : x_0, a_1, \dots, a_n, x_1$ er en 2-vej, og y per antagelse ligeledes har en nabo i $\{a_1, \dots, a_n\}$. Hvis F indeholder et spejlbillede af $\{z, x_1, y\}$, så må y være nabo til a_{n-1}, a_{n-1} må være nabo til v, og v er nabo til a_n. Idet en trekant og dens spejlbillede udgør et antihul af længde seks, haves en modstrid med lemma 15.9, idet antihullet har tre punkter z, a_n og x_1 til fælles med C. Det vil sige, at der ikke findes et spejlbillede af $\{z, x_1, y\}$ i F, hvoraf det ifølge lemma 16.5 må gælde, at et af punkterne i F har to naboer i trekanten $\{z, x_1, y\}$. Den eneste nabo i F til z er v, og v er ikke-nabo til både x_1 og y. Den eneste nabo i F til x_1 er a_n. Det vil sige, at a_n må være nabo til y. Da y er nabo til a_n, kan der vælges j, for $i \leq j \leq n$, mindst muligt, så y er nabo til a_j. Fra hullet $z, v, a_i, \dots, a_j, y$ må j være ulige, da i er ulige.

Antag, at $j \neq i$. Da har 2-vejen $K : v, a_i, \dots, a_j, y$ lige længde mindst fire. Lad X i lemma 14.4 svare til $Y' \cup \{z\}$, og lad Y svare til $\{x_0, x_1\}$. Det vil sige, at $\{x_0, x_1\}$ og $Y' \cup \{z\}$ skal være disjunkte antisammenhængende delmængder af $V(G)$, som er komplette til hinanden. Her har K lige længde, og v er det eneste punkt i K, der er komplet til $Y' \cup \{z\}$, idet z ikke har naboer i $\{a_i, \dots, a_j\} \subset A$ ifølge (ii), y er nabo til z, og Y er antisammenhængende. Desuden er y det eneste punkt i K, der er komplet til $\{x_0, x_1\}$. Dermed skulle K ifølge lemma 14.4 have længde to, men da K har længde mindst fire, må en af antagelserne i lemma 14.4 være forkerte. Dette må betyde, at $\{x_0, x_1\}$ og $Y' \cup \{v\}$ ikke er disjunkte antisammenhængende mængder, som er komplette til hinanden. Idet $\{x_0, x_1\}$ ifølge (i) er ikke-naboer, er de antisammenhængende, z er nabo til x_0 og x_1 ifølge (ii), og x_0 samt x_1 er ifølge (i) komplette til Y, hvormed det må være $Y' \cup \{z\}$, der ikke er antisammenhængende. Da $Y' \cup \{z\}$ ikke er antisammenhængende, og z er nabo til y, er z komplet til Y.
Lad X i lemma 16.8 svare til Y', og lad Y svare til $\{x_0, x_1\}$. Det haves, at K har lige længde, v er komplet til Y', og y er det eneste punkt i P, der er komplet til $\{x_0, x_1\}$. Desuden svarer z til punktet u i lemma 16.8, idet z er komplet til $\{x_0, x_1\}$ og hverken er nabo til a_j eller a_{j-1}. Af lemma 16.8 fåes, at K indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y', idet K har længde mindst fire. Da y ikke er komplet til Y', må alle kanter fra K, som er komplette til Y', tilhøre 2-vejen $v, a_i, \dots, a_j$.
Lad $C_2 : z, v, a_i, \dots, a_n, x_1$, hvormed $\{C_2, Y'\}$ er et hjul, idet zx_1 er komplet til Y', og $v, a_i, \dots, a_j$ indeholder mindst en kant, der er komplet til Y'. Ifølge påstand 4 er ingen kant i $x_0, a_1, \dots, a_n, x_1$ komplet til Y, og da x_0 og x_1 er komplette til Y, er hverken a_1 eller a_n komplette til Y, og dermed er a_n ikke komplet til Y', idet a_n er nabo til y. Her har 2-vejen $a_j, \dots, a_n, x_1$ ulige længde, idet j er ulige, og n er ulige. Da z er komplet til Y, findes der ifølge påstand 4 ingen kanter i $a_j, \dots, a_n$, som er komplette til Y. Idet z er komplet til Y, men ikke har en nabo i det indre af $a_j, \dots, a_n, x_1$, følger det af korollar 2.3, at a_j ikke er komplet til Y, og dermed ikke er komplet til Y', idet a_j er nabo til y. Det betyder, at a_j og a_n har ulige hjulparitet med hensyn til hjulet $\{C_2, Y'\}$, da kanterne zx_1 og zv er komplette til Y, og 2-vejen $v, a_i, \dots, a_n$ indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Da både a_n og a_j ikke er komplette til Y', er $\{C_2, Y'\}$ et hjul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$. Det vil sige, at $j = i$, hvormed y er nabo til a_i.

Antag, at $i < n$. Hvis a_i ikke er komplet til Y, så kan en anti 2-vej mellem a_i og y, hvis indre tilhører Y', udvides til et antihul via anti 2-vejen y, v, x_1, a_i. Dette antihul har punkterne a_i, x_1 og v til fælles med hullet $C_3 : z, v, a_i, \dots, a_n, x_1$, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Det vil sige, at a_i er komplet til Y, og det betyder ifølge påstand 4, at z er komplet til Y. Da z, x_1 og a_i er komplette til Y, og v ifølge (iv) samt a_n som før ifølge påstand 4 ikke er komplette til Y, er $\{C_3, Y\}$ et hjul af ulige længde, da zx_1 er et udsnit af ulige længde, men dette er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$. Det vil sige, at $i = n$, og dermed er a_n nabo til både v og y. På grund af symmetrien mellem x_0 og x_1 følger, at a_1 er nabo til både v og y. Fra påstand 4 er hverken a_1 eller a_n komplette til Y. I $\overline{G}$ er $Y \cup \{a_1, a_n\}$ sammenhængende og fanger trekanten $\{x_0, x_1, v\}$, da x_0 er nabo til a_n, x_1 er nabo til a_1, og v er nabo til y. Da a_n, a_1 og y alle kun har en nabo i trekanten $\{x_0, x_1, v\}$ i $\overline{G}$, følger det af lemma 16.5, at $Y \cup \{a_1, a_n\}$ indeholder et spejlbillede af $\{x_0, x_1, v\}$. Idet kanten ya_1 ikke findes i $\overline{G}$, danner $\{a_n, a_1, y\}$ ikke en trekant, hvormed $Y \cup \{a_1, a_n\}$ ikke kan indeholde et spejlbillede af $\{x_0, x_1, v\}$, og en modstrid er opnået. Hermed er påstand 7 vist.

Påstand 8: *Hvis v ikke er nabo til y, men er nabo til et af x_0 eller x_1, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at v ikke er nabo til y, men er nabo til for eksempel x_0, og antag, at lemmaet ikke er opfyldt. Da fanger $A \cup \{x_1\}$ trekanten $\{z, x_0, v\}$, idet x_0 og v begge har naboer i A, og x_1 er den eneste nabo til z. Da x_0 og x_1 ifølge (iii) ikke har en fælles nabo i A, kan $A \cup \{x_1\}$ ikke indeholde et spejlbillede af $\{z, x_0, v\}$. Dermed findes der ifølge lemma 16.5 et punkt i $A \cup \{x_1\}$, som har mindst to naboer i $\{z, x_0, v\}$. Da z kun er nabo til x_1 i $A \cup \{x_1\}$, og x_1 ikke er nabo til hverken x_0 eller v, må det være et punkt i A, der er nabo til både x_0 og v, lad det være a.
Det haves endvidere, at $A \cup \{v\}$ fanger trekanten $\{z, x_1, y\}$, idet v er den eneste nabo til z, og både x_1 og y har naboer i A. Antag, at $A \cup \{v\}$ indeholder et spejlbillede af $\{z, x_1, y\}$. Da vil der findes $f \in A$, som er nabo til både v og x_1, men ikke til y. Idet $f \in A$, følger det af (iii), at f ikke er nabo til x_0. Men da er f, v, x_0, y, x_1 et hul af længde fem. Det vil sige, at $A \cup \{v\}$ ikke indeholder et spejlbillede af $\{z, x_1, y\}$, og da følger af lemma 16.5, at der findes et punkt i $A \cup \{v\}$, som har mindst to naboer i $\{z, x_1, y\}$. Da z kun er nabo til v i $A \cup \{v\}$, og v ikke er nabo til hverken x_1 eller y, må det være et punkt i A, der er nabo til både x_1 og y, lad det være a'.
Da følger fra påstand 3, at A er punktmængden af en 2-vej $f_1, \ldots, f_k$, hvor $f_1 = a$ ifølge ovenstående er nabo til både x_0 og v, og $f_k = a'$ ifølge ovenstående er nabo til både x_1 og y. Da $f_1 \in A$, følger det af (iii), at f_1 ikke er nabo til x_1, hvormed $f_1 \neq f_k$.
Antag, at f_1 ikke er den eneste nabo til v i A. Fra påstand 3 følger det, at f_1 er den eneste nabo til x_0 i A, for ellers ville der kunne vælges $F \subset A$, som indeholder naboer til alle af v, x_0, x_1 og y, idet f_1 ikke er den eneste nabo til v. Det vil sige, at $f_1 = a_1$, da $P : x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ er en 2-vej. Dermed følger det af påstand 7, at f_k ikke er den eneste nabo til x_1 i A, for ellers ville $f_k = a_n$, og både v samt y ville have naboer i $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Dermed følger det af påstand 3, at f_k er den eneste nabo til y i A, for ellers ville der kunne vælges $F \subset A$, som indeholder naboer til alle af v, x_0, x_1 og y. Da y ikke har andre naboer i A end f_k, er f_1 ikke-nabo til y. Det haves, at x_0 kun har f_1 som nabo i $F = A \cup \{x_1\}$, og z kun har x_1 som nabo i F. Desuden haves, at både x_0 og z er komplette til $\{v, y\}$, mens f_1 og x_1 ikke er komplette til $\{v, y\}$. Lad F i lemma 16.6 svare til F, lad Y svare til $\{v, y\}$, lad a_0 svare til z, lad b_0 svare til x_0, lad a svare til x_1, og lad b svare til f_1. Lemma 16.6(I)-(III) er alle opfyldte, men både v og y har en nabo i $F - \{x_1\}$, så der opnåes en modstrid. Det vil sige, at f_1 er den eneste nabo til v i A.
Antag, at f_k er den eneste nabo til y i A. Da v er den eneste nabo til z i $A \cup \{v\}$, f_k er den eneste nabo til y i $A \cup \{v\}$, og både z og y er komplette til $\{x_0, x_1\}$, mens v og f_k ikke er komplette til $\{x_0, x_1\}$, haves en modstrid med lemma 16.6, hvor F svarer til $A \cup \{v\}$, Y svarer til $\{x_0, x_1\}$, a_0 svarer til z, b_0 svarer til y, a svarer til v, og b svarer til f_k, idet både x_0 og x_1 har en nabo i A. Det vil sige, at f_k ikke er den eneste nabo til y i A, og dermed er f_k den eneste nabo til x_1 i F.
Antag, at f_k er komplet til Y. Da $f_k = a_n$, og kanten $f_k x_1$ er komplet til Y, følger det af påstand 4, at z ikke er komplet til Y. Da er v ifølge påstand 2 komplet til Y' og ikke-nabo til y. En anti 2-vej mellem z og y, hvis indre tilhører Y', danner sammen med y, v, f_k, z et antihul, som har punkterne z, v og f_k til fælles med hullet $C_4 : z, v, f_1, \ldots, f_k, x_1$, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Det vil sige, at f_k ikke er komplet til Y, og dermed ikke er komplet til Y', og specielt betyder det, at $Y' \neq \emptyset$.
Antag, at z ikke er komplet til Y. Det betyder, at $Y' \cup \{z\}$ er antisammenhængende, og ifølge påstand 2 er v komplet til Y'. Vælg h, for $1 \leq h < k$, mindst muligt, så f_h er nabo til y. Et sådant punkt findes, idet f_k ikke er den eneste nabo til y i A. Betragt 2-vejen $H_1 : v, f_1, \ldots, f_h, y$. Sammen med y, z, v danner H et hul D, hvormed H har lige længde. Da f_k er den eneste nabo til x_1 i A, er $H_2 : v, H_1, y, x_1$ en 2-vej af ulige længde, da H_1 har lige længde. Desuden er H_2's endepunkter komplette til $Y' \cup \{z\}$, mens de indre punkter ikke er komplette til $Y' \cup \{z\}$. Da H_2 har ulige længde, $Y' \cup \{z\}$ er antisammenhængende, og H_2's endepunkter er komplette til $Y' \cup \{z\}$, er antagelserne i lemma 14.3 opfyldte. Da de indre punkter i H_2 ikke er komplette til $Y' \cup \{z\}$, har H_2 længde tre. Det betyder, at f_1 er nabo til både y og v. Enten er f_1 komplet til Y', eller så er f_1 ikke komplet til Y'. Da z og y ikke er komplette til Y', findes en anti 2-vej mellem z og y, hvis indre tilhører Y'. Hvis f_1 er komplet til Y', danner denne anti 2-vej sammen med y, v, x_1, f_1, z et antihul D_1. Antihullet D_1 har punkterne v, x_1 og f_1 til fælles med hullet C_4, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Det vil sige, at f_1 ikke er komplet til Y'. Da f_1 og y ikke

er komplette til Y', findes en anti 2-vej H_3 mellem f_1 og y, hvis indre tilhører Y'. Her danner H_3 sammen med y, v, x_1, f_1 et antihul D_2, som har punkterne v, x_1 og f_1 til fælles med C_4, hvilket igen er i modstrid med lemma 15.9. Idet der er opnået en modstrid, både når f_1 er komplet til Y', og når f_1 ikke er komplet til Y', fåes en modstrid. Det vil sige, at antagelsen, om at z ikke er komplet til Y, er forkert. Altså er z komplet til Y, og da det er antaget, at lemmaet ikke er opfyldt, kan det nu antages, at G ikke indeholder et hjul, som beskrevet i lemmaet.
I hullet C_4 er punkterne z og x_1 komplette til Y, mens punkterne v og f_k ikke er komplette til Y. Da $\{C_4, Y\}$ ikke må være et hjul af ulige længde, idet $G \in \mathcal{F}_7$, må $\{C_4, Y\}$ ikke være et hjul. Da følger af korollar 2.4, at z og x_1 er de eneste punkter i C_4, der er komplette til Y. Antagelserne i lemma 2.6 er opfyldte, hvormed Y enten indeholder en hat for C_4 eller et afhop for C_4 ved zx_1. Ifølge (v) er et punkt i Y enten nabo til v, eller så har punktet en nabo i A. Det vil sige, at ethvert punkt i Y har en nabo i $A \cup \{v\}$, hvilket betyder, at der ikke findes en hat for C_4 i Y. Dermed findes et afhop for C_4 ved zx_1, hvilket betyder, at der findes to punkter i $y_1, y_2 \in Y$, der er ikke-naboer, så $U : y_1, v, f_1, \ldots, f_k, y_2$ er en 2-vej. Begge endepunkter i U er komplette til $\{x_0, x_1\}$, og dermed er antagelserne i lemma 14.3 opfyldte. Da ingen indre punkter i U er komplette til $\{x_0, x_1\}$, er lemma 14.3(i) ikke opfyldt. Det vil sige, at lemma 14.3(ii) må være opfyldt. Men idet $H_2 : v, f_1, \ldots, f_h, y, x_1$ har længde tre, har $v, f_1, \ldots, f_h$ længde en, og da $h < k$, har U længde mindst fire, hvormed lemma 14.3(ii) heller ikke kan være opfyldt. Der haves altså en modstrid, og antagelsen, om at G ikke indeholder et hjul som beskrevet i lemmaet, må være forkert. Hermed er påstand 8 vist.

Påstand 9: *Der findes ikke en sammenhængende mængde $F \subset A$, som indeholder naboer til x_0, x_1 og v.*

Antag, at der findes en sammenhængende mængde $F \subset A$, som indeholder naboer til x_0, x_1 og v. Vælg $f \in A - F$, så $A - f$ er sammenhængende. Dermed har x_0, x_1 og v alle naboer i $A - f$, og da en af lemmaets antagelser ikke må være opfyldt, er (v) ikke opfyldt. På grund af minimaliteten af A findes der et punkt $y' \in Y$, som er ikke-nabo til v og antikomplet til $A - f$. Dermed er f den eneste nabo til y' i A. Hvis $y' \in Y'$, så er v ikke komplet til Y', og ifølge påstand 2 findes derfor to punkter i A, som er komplette til Y', hvilket er i modstrid med, at $f \in A$ er den eneste nabo til $y' \in Y'$. Det vil sige, at $y' = y$, hvormed y og v ikke er naboer.
Antag, at v ikke er nabo til f. Da er v den eneste nabo til z i $A \cup \{v\}$, og f er den eneste nabo til y i $A \cup \{v\}$. Det haves ifølge (ii), at z er nabo til x_0 og x_1, og fra (i) er x_0 og x_1 komplette til Y. Det vil sige, at z og y er komplette til $\{x_0, x_1\}$, hvilket v og f ifølge (iv) og (iii) ikke er. Det haves, at f, y, z, v er en 2-vej, der opfylder antagelserne i lemma 16.6, hvor Y i lemma 16.6 svarer til $\{x_0, x_1\}$, F svarer til $A \cup \{v\}$. Men da både x_0 og x_1 har naboer i A, er konklusionen i lemma 16.6 ikke opfyldt, og en modstrid er opnået. Det betyder, at v er nabo til f.
Fra påstand 8 kan det antages, at v er ikke-nabo til både x_0 og x_1. Da f ikke er komplet til $\{x_0, x_1\}$, kan det af symmetri antages, at f ikke er nabo til x_1. Nu haves, at $A \cup \{v\}$ fanger trekanten $\{z, y, x_1\}$, idet v er den eneste nabo til z, f er den eneste nabo til y, og x_1 ifølge (vi) har en nabo i A. Da v samt f begge er ikke-naboer til x_1, indeholder $A \cup \{v\}$ ikke et punkt, som har mindst to naboer i $\{z, y, x_1\}$. Det følger da af lemma 16.5, at $A \cup \{v\}$ indeholder et spejlbillede af $\{z, y, x_1\}$. Det vil sige, at der findes $f_1 \in A - f$, som er nabo til v, f og x_1, men ikke til y og ifølge (iii) ikke til x_0. Da enhver 2-vej mellem x_0 og x_1, hvis indre tilhører A, har længde mindst fire, følger det, at x_0 ikke er nabo til f. På grund af symmetri kan det ved at antage, at f ikke er nabo til x_0, og ved at gennemføre samme argument vises, at der tilsvarende findes $f_0 \in A - f$, der er nabo til v, f og x_0, men ikke-nabo til y og x_1. Da z, x_0, f_0, f_1, x_1 ikke må danne et hul af ulige længde, må f_0 og f_1 være ikke-naboer, men da er 2-vejen x_0, f_0, f, f_1, x_1 i modstrid med påstand 7, da både v og y har naboer i det indre af 2-vejen x_0, f_0, f, f_1, x_1. Dette viser påstand 9.

Ifølge (iv) vil der findes et punkt $y \in Y$, som er ikke-nabo til v. Da følger af (v), at y har en nabo i A. Ifølge (vi) har v en nabo i A, og ifølge påstand 7 har ikke både v og y en nabo i $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Det vil sige, at $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ikke udgør hele A. Da følger af påstand 9, at v ikke har en nabo i $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Dermed findes $f \in A$, som er nabo til v og ikke tilhører C. Desuden følger af påstand 9, at v kun har en nabo f i A, og $A - f$ er sammenhængende, da der ellers findes $F \subset A$. Det vil sige, at der findes $f \in A$, så $A - f$ er sammenhængende, $f \notin C$, og f er den eneste nabo til v i A.

Påstand 10: *Hvis v er nabo til et af x_0 eller x_1, så er lemmaet opfyldt.*

Lad v være nabo til for eksempel x_0. Antag, at x_0 ikke er nabo til f. Da fanger $A \cup \{x_1\}$ trekanten $\{z, v, x_0\}$, idet x_1 er den eneste nabo til z, f er den eneste nabo til v, og x_0 ifølge (vi) har en nabo i A. Da x_1 samt f begge er ikke-naboer til x_0, indeholder $A \cup \{x_1\}$ ikke et punkt, som har mindst to naboer i $\{z, v, x_0\}$. Det følger da af lemma 16.5, at $A \cup \{x_1\}$ indeholder et spejlbillede af $\{z, v, x_0\}$. Trekanten og dens spejlbillede udgør et antihul af længde seks, som har tre punkter fælles med hullet $C : z, x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Der kan altså ikke findes et spejlbillede af $\{z, v, x_0\}$, og ingen af konklusionerne i lemma 16.5 er opfyldte, hvormed der haves en modstrid. Det vil sige, at x_0 er nabo til f, og dermed er x_1 ikke-nabo til både v og f. Fra påstand 8 kan det antages, at v er nabo til y, og dermed er v ikke komplet til Y'. Fra påstand 2 er z komplet til Y, og $\{C, Y'\}$ er et hjul. Lad $v, q_1, \ldots, q_k, x_1$ være en 2-vej, hvis indre tilhører A. Da f er den eneste nabo til v i A, må $f = q_1$. Her er $C_5 : z, v, q_1, \ldots, q_k, x_1$ et hul. Fra påstand 9 er $A = \{q_1, \ldots, q_k\}$, da $q_1 = f$ er nabo til v og x_0, og q_k er nabo til x_1. Da $q_k = a_n$, og z er komplet til Y, følger det af påstand 4, at q_k ikke er komplet til Y. Da $\{C_5, Y\}$ ikke må være et hjul af ulige længde, idet $G \in \mathcal{F}_7$, er $\{C_5, Y\}$ ikke et hjul. Det følger dermed af korollar 2.4, at z og x_1 er de eneste punkter i C_5, der er komplette til Y. Antagelserne i lemma 2.6 er dermed opfyldte. Det vil sige, at Y enten indeholder en hat for C_5 eller et afhop for C_5 ved zx_1. Fra påstand 2 vil mindst to punkter i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ være komplette til Y', altså alle punkter i Y' har mindst to naboer i $\{a_1, \ldots, a_n\}$, som er en delmængde af $\{q_1, \ldots, q_k\}$, og da y er nabo til v, findes der ikke et afhop for C_5 eller en hat for C_5. Dermed er en modstrid opnået, og påstand 10 er vist.

Fra påstand 10 kan det antages, at v er ikke-nabo til både x_0 og x_1. Fra påstand 9 har et af x_0 eller x_1 en unik nabo i A, og på grund af symmetri kan det antages, at x_1 har en unik nabo f_1 i A. Fra påstand 7 og påstand 9 følger, at v ikke har en nabo i $\{a_1, \ldots, a_n\}$, og $f \neq f_1$. Lad $Q : f = q_1, \ldots, q_k = f_1$ være en 2-vej i A, så $C_6 : z, v, q_1, \ldots, q_k, x_1$ er et hul.

Påstand 11: *z er ikke komplet til Y', og v er komplet til Y' samt ikke-nabo til y.*

Antag, at z er komplet til Y'. Her er v den eneste nabo til z i $A \cup \{v\}$, og f_1 er den eneste nabo til x_1 i $A \cup \{v\}$. Fra påstand 4 følger det, at ingen kant i $x_0, a_1, \ldots, a_n, x_1$ er komplet til Y, og da x_0 og x_1 er komplette til Y, er hverken a_1 eller $a_n = f_1$ komplet til Y. Det vil sige, at z og x_1 er komplette til Y, mens v og f_1 ikke er komplette til Y. Fra lemma 16.6 med $A \cup \{v\}$, Y og v, z, x_1, f_1 følger det, at et punkt i Y ikke har en nabo i A. Men y har ifølge påstand 1 en nabo i A, og dermed har et punkt i Y' ingen naboer i A. Det vil sige, at der ikke findes et punkt i A, som er komplet til Y', og så er v ifølge påstand 2 komplet til Y' og ikke-nabo til y. Fra lemma 16.6 anvendt på 2-vejen v, z, x_1, f_1, den antisammenhængende mængde $\{y\}$, og den sammenhængende mængde $A \cup \{v\}$, følger det, at y ikke har en nabo i A, hvilket giver en modstrid, så y er nabo til f_1. Da $\{C_6, Y\}$ ikke må være et hjul af ulige længde, må $\{C_6, Y\}$ ikke være et hjul, og da følger af korollar 2.4, at z og x_1 er de eneste punkter i C_5, der er komplette til Y. Da følger det af lemma 2.6, at Y indeholder en hat eller et afhop for C_6 ved zx_1. Idet alle punkter i Y' er naboer til v, og y er nabo til f_1, findes der ikke en hat for C_6. Afhoppet skal benytte y, da alle punkter i Y' er naboer til v, så det kan antages, at y og y' er et afhop, hvor $y' \in Y'$. Dermed er y, f_1, Q, f, v, y' en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til $\{x_0, x_1\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $\{x_0, x_1\}$. Dette danner modstrid med lemma 14.3. Dermed er z ikke komplet til Y', og det følger af påstand 2, at v er komplet til Y' samt ikke-nabo til y. Dette viser påstand 11.

Påstand 12: *y er ikke-nabo til alle af $q_1, \ldots, q_{k-1}$.*

Antag, at y er nabo til et af $q_1, \ldots, q_{k-1}$. Vælg i, for $1 \leq i \leq k$, mindst muligt, så y er nabo til q_i. Fra hullet $C_7 : v, q_1, \ldots, q_i, y, z$ følger det, at i er ulige. Det kan derfor fra påstand 10 antages, at $U_1 : v, q_1, \ldots, q_i, y, x_1$ er en 2-vej af ulige længde. Endepunkterne i U_1 er komplette til $Y' \cup \{z\}$, mens de indre punkter ikke er komplette til $Y' \cup \{z\}$, og $Y' \cup \{z\}$ er ifølge påstand 11 antisammenhængende. Lemma 14.3 kan derfor anvendes, og dermed har U_1 længde tre. Det betyder, at $i = 1$, og y er nabo til f. Hvis f ikke er komplet til Y', findes en anti 2-vej H mellem

f og y, hvis indre tilhører Y'. Sammen med anti 2-vejen y, v, x_1, f danner H et antihul, der har punkterne v, x_1 og f fælles med hullet C_6, hvilket er i modstrid med lemma 15.9. Det vil sige, at f er komplet til Y'. Da z ikke er komplet til Y', findes en anti 2-vej U_2 mellem z og y, hvis indre tilhører Y'. Sammen med anti 2-vejen y, v, x_1, f, z danner U_2 et antihul, som har punkterne z, v og x_1 fælles med C_6, hvilket igen danner modstrid med lemma 15.9. Dette viser påstand 12.

Det haves, at $A \cup \{v\}$ fanger trekanten $\{y, z, x_1\}$, idet y ifølge påstand 1 har en nabo i A, x_1 ifølge (vi) har en nabo i A, og z er nabo til v. Da $q_k = f_1$ er eneste nabo til x_1 i $A \cup \{v\}$, og v er eneste nabo til z i $A \cup \{v\}$, og de ikke er naboer, så findes der ikke et spejlbillede af $\{y, z, x_1\}$ i $A \cup \{v\}$. Idet v er ikke-nabo til både y og x_1, så følger af lemma 16.5, at y er nabo til $f_1 = q_k$. Antag, at x_0 er nabo til et af $q_1, \dots, q_k$. På grund af minimaliteten af A er $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{q_1, \dots, q_k\}$, og dermed er naboerne til y i C punkterne x_0, z, x_1 og $q_k = a_n$. Anvendes korollar 2.4 på C og y fåes dermed en modstrid, da C indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til $\{y\}$. Det vil sige, at x_0 er ikke-nabo til alle $q_1, \dots, q_k$. Men da er $v, q_1, \dots, q_k, y, x_0$ en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til $Y' \cup \{z\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $Y' \cup \{z\}$, hvilket er i modstrid med lemma 14.3.
Det vil sige, at når der laves antagelser for at undgå, at lemmaet er opfyldt for Y, så fåes en modstrid. □

Lemma 16.11
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være ikke-tomme disjunkte antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $p_1, \dots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$ af længde mindst fire, så p_1 og p_n er komplette til X, mens punkterne $p_2, \dots, p_{n-1}$ ikke er komplette til X. Antag, at et af følgende er opfyldt:

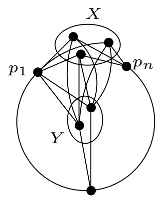
- (i) *p_1, p_2 og p_3 er alle komplette til Y.*
- (ii) *Der findes i, hvor $1 \le i \le n-3$, så p_i, p_{i+1}, p_{i+2} og p_{i+3} alle er komplette til Y.*
- (iii) *Der findes i, hvor $1 \le i \le n-3$, så p_{i+1} og p_{i+2} er komplette til Y, mens p_i og p_{i+3} ikke er komplette til Y.*

Da findes der et hjul i G med Y som centrum, og hvis (iii) er opfyldt, så vil G yderligere have en balanceret skæv opdeling. ◇

16.3 Pseudohjul

I dette afsnit defineres pseudohjul, som er en speciel form for hjul, og en række resultater vedrørende disse gennemgåes. Formålet med afsnittet er at vise, at minimale modeksempler ikke kan indeholde pseudohjul, hvorfor disse betragtes her.

Definition 16.12 (Pseudohjul)
Lad G være en graf, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte og antisammenhængende mængder, der udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \dots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \ge 5$, og p_1 samt p_n er de eneste punkter fra P, der er komplette til X. Desuden skal p_1 være komplet til Y, og yderligere et punkt fra $\{p_3, \dots, p_{n-1}\}$ skal være komplet til Y, og hverken p_2 eller p_n er komplet til Y. Da siges $\{X; Y; P\}$ at være et pseudohjul i G. ◇



Figur 16.2: Et eksempel på et pseudohjul $\{X, P, Y\}$.

Bemærk, at hvis $X = \{x\}$, så er $\{\{x\}; P; Y\}$ et almindeligt hjul. Et pseudohjul er altså et hjul, hvor et enkelt punkt er byttet ud med en antisammenhængende mængde, som er komplet til Y. Følgende lemma drager nogle basale konklusioner om et pseudohjul.

Lemma 16.13
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $\{X; Y; P\}$ være et pseudohjul i G. Da indeholder P et ulige antal kanter, der er komplette til Y, og mindst tre kanter i P er komplette til Y. Desuden har P længde mindst seks. ⋄

Bevis
Da $\{X; Y; P\}$ er et pseudohjul, er det kun p_1, blandt P's endepunkter, der er komplet til Y. Derfor indeholder P ifølge lemma 16.9 et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Antag, at P kun indeholder én kant, der er komplet til Y, og lad det være kanten $p_i p_{i+1}$. Da p_2 samt p_n ifølge definition 16.12 ikke er komplette til Y, vil $3 \leq i \leq n-2$. Da p_1 og p_n er de eneste punkter i P, der er komplette til X, vil der findes en anti 2-vej Q mellem p_i og p_{i+1}, hvis indre tilhører X. Hvis Q har længde mindst tre, så følger af lemma 15.6, at P har længde tre, hvilket danner modstrid med, at $\{X; Y; P\}$ er et pseudohjul, hvormed P har længde mindst fire. Det vil sige, at Q har længde to, så der findes $x \in X$, som er ikke-nabo til både p_i og p_{i+1}. Dermed findes et hul $C : p_k, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_l, x$ i G indeholdende x, p_i og p_{i+1}, hvor $C - \{x\} \subseteq P$. Enten $x, \ldots, p_i, p_{i+1}$ eller $x, \ldots, p_{i+1}, p_i$ har lige længde, og da p_i, p_{i+1} og x alle er komplette til Y, følger af korollar 2.4, at den af dem med lige længde indeholder mindst to kanter, der er komplette til Y. Da p_{i-1} og p_{i+2} ikke er komplette til Y, må kanten være disjunkt fra $p_i p_{i+1}$, hvormed $\{C, Y\}$ er et hjul i G. Dette danner dog en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$, da $\{C, Y\}$ er et hjul af ulige længde. Derfor må P indeholde mindst tre kanter, som er komplette til Y.

Da p_2 og p_n ikke er komplette til Y, og P indeholder mindst tre kanter, som er komplette til Y, må $n \geq 7$. □

Bemærkning 16.14
I et pseudohjul $\{X; Y; P\}$ vil der om P ifølge lemma 16.9 gælde, at P har lige længde, hvormed n er ulige. ⋄

Det defineres nu, hvad det vil sige, at et pseudohjul er optimalt.

Definition 16.15 (Optimalt pseudohjul)
Lad G være en graf, og lad $\{X; Y; P\}$ være et pseudohjul i G. Da siges $\{X; Y; P\}$ at være et optimalt pseudohjul, hvis følgende ikke findes i G:

- (i) *Et pseudohjul $\{X', Y', P'\}$, hvor antallet af punkter i P', som er komplette til Y', er mindre end antallet af punkter i P, som er komplette til Y.*
- (ii) *Et pseudohjul $\{X, Y', P\}$, hvor $Y \subset Y'$.*

⋄

Bemærk, at i definition 16.15(i) kan $X' = X, Y' = Y$ og $P' = P$ for op til to af dem.

Lemma 16.16
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $\{X; Y; P\}$ være et optimalt pseudohjul i G. Lad $v \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ være et punkt, som ikke er komplet til Y. Da findes en sammenhængende delgraf P' af $P : p_1, \ldots, p_n$, så følgende er opfyldt:

(i) *$V(P')$ indeholder alle v's naboer i P.*

(ii) *Intet indre punkt i P' er komplet til Y.*

(iii) *Hvis v er komplet til X, da vil enten $P' = \{p_1\}$ eller $p_n \in V(P')$.*

$\diamond$

Foregående lemma udvides nu til at gælde for en sammenhængende mængde F fremfor blot et enkelt punkt.

Lemma 16.17
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $\{X; Y; P\}$ være et optimalt pseudohjul i G. Lad $F \subseteq V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ være en sammenhængende mængde, så intet punkt i F er komplet til Y. Da findes en sammenhængende delgraf P' af P, hvor følgende er opfyldt:

(i) *$V(P')$ indeholder samtlige vedhæftninger til F i P.*

(ii) *Intet indre punkt i P' er komplet til Y.*

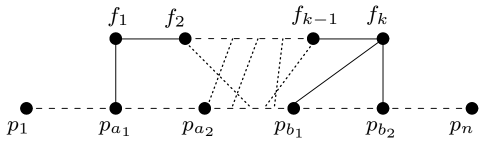
(iii) *Hvis et punkt i F er komplet til X, da vil enten $P' = \{p_1\}$ eller $p_n \in V(P')$.*

$\diamond$

Bevis
Antag, at der findes et modeksempel til lemmaet, og vælg F som et minimalt modeksempel. Hvis $F = \{f\}$, vil lemmaet ifølge lemma 16.16 være opfyldt, så derfor må $|F| \geq 2$.

Påstand: *Der findes et punkt i F, som er komplet til X.*

Antag, at F ikke indeholder punkter, der er komplette til X. Da F er et modeksempel, vil der, da (ii) ikke er opfyldt, findes to vedhæftninger p_a og p_c for F, så der i 2-vejen $p_a, \ldots, p_c$ findes et punkt p_b, hvor $a < b < c$, der er komplet til Y. Da F er et minimalt modeksempel, må det derfor gælde, at F udgør det indre af en 2-vej $p_a, \ldots, p_c$. Lad $F : f_1, \ldots, f_k$, og dermed er $p_a, f_1, \ldots, f_k, p_c$ en 2-vej i G. Lad W_1 være mængden af vedhæftninger for $F - f_k$ i P, og lad W_2 være mængden af vedhæftninger for $F - f_1$ i P. Da F er valgt mindst mulig, vil der findes 2-veje $P_1 : p_{a_1}, \ldots, p_{b_1}$ og $P_2 : p_{a_2}, \ldots, p_{b_2}$, som er delgrafer af P, hvor intet indre punkt er komplet til Y, og $W_i \subseteq V(P_i)$, for $i = 1, 2$. Det vil sige, at P_1 og P_2 vil være fælles om vedhæftninger for $f_2, \ldots, f_{k-1}$ i P. Da F er et modeksempel, vil f_1 have en nabo i P_1, som ikke tilhører P_2, og f_k vil have en nabo i P_2, som ikke tilhører P_1. Vælg P_1 og P_2 mindst mulige, og dermed er p_{a_1} nabo til f_1, og tilsvarende må p_{b_2} være nabo til f_k. Dermed findes der i G en 2-vej $P^* : p_1, \ldots, p_{a_1}, f_1, \ldots, f_k, p_{b_2}, \ldots, p_n$, se figur 16.3.



Figur 16.3: 2-vejene F og P, hvorpå P_1 og P_2 har fælles punkter, altså $f_2, \ldots, f_{k-1}$ har vedhæftninger i P. De prikkede linier indikerer, at der kan findes kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$ og $P_1 \cap P_2$.

Hvis der findes et punkt i $V(P^* - \{p_1\})$, som er komplet til Y, vil P^* have længde mindst fire, idet F ikke indeholder punkter, der er komplette til Y, og p_n ifølge definition 16.12 ikke er komplet til Y. Dermed er $\{X;Y;P^*\}$ et pseudohjul, men dette er i modstrid med, at $\{X;Y;P\}$ er et optimalt pseudohjul, idet P^* indeholder færre punkter, der er komplette til Y end P, da $p_b \in V(P)$, og $p_b \notin V(P^*)$. Derfor kan der ikke findes punkter i $V(P^* - \{p_1\})$, der er komplette til Y. Det vil sige, at kun punktet $p_1 \in V(P^*)$ er komplet til Y. Idet der ifølge (ii) ikke findes punkter i $\{p_{a_1+1}, \ldots, p_{b_1-1}\}$ og $\{p_{a_2+1}, \ldots, p_{b_2-1}\}$, der er komplette til Y, må punkter fra $V(P - \{p_1\})$, som er komplette til Y, tilhøre $\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\}$, og hvis $|\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\}| > 0$, så har punkter i $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$ naboer i P, f_1 er nabo til p_{b_1}, og f_k er nabo til p_{a_2}. Ifølge lemma 16.13 findes der et ulige antal kanter i P, som er komplette til Y, og der findes mindst tre sådanne kanter. Altså findes der i $\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\}$ et ulige antal, og mindst tre, kanter, der er komplette til Y. Idet $C : f_1, \ldots, f_k, p_{a_2}, p_{a_2-1}, \ldots, p_{b_1}$ er et hul, og $\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\} \subset V(C)$, indeholder C et ulige antal kanter, der er komplette til Y, og C indeholder mindst tre sådanne kanter. Men dette er i modstrid med korollar 2.4, så derfor må der findes et punkt i F, som er komplet til X. Dermed er påstanden vist.

Ifølge påstanden må F indeholde et punkt, som er komplet til X, og der må findes punkter $p_a, p_b \in V(P)$, så p_a er en vedhæftning for F, og p_b er komplet til Y, hvor $1 < a < b$. På grund af minimaliteten af F findes der en 2-vej $p_a, f_1, \ldots, f_k$, så $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$, og så f_k er det eneste punkt fra F, der er komplet til X. Lad W_1 være mængden af vedhæftninger for $F - f_k$ i P, og lad W_2 være mængden af vedhæftninger for $F - f_1$ i P. På grund af minimaliteten af F findes der 2-veje $P_1 : p_{a_1}, \ldots, p_{b_1}$ og $P_2 : p_{a_2}, \ldots, p_{b_2}$ i P, hvor intet indre punkt er komplet til Y, hvor $W_i \subseteq V(P_i)$, for $i = 1, 2$, og hvor enten $b_2 = n$ eller $a_2 = b_2 = 1$ ifølge (iii), da $F - f_1$ er en mindre mængde indeholdende et punkt, der er komplet til X.

Antag først, at $b_2 = n$. Vælg P_1 og P_2 mindst mulige. Idet $W_i \subseteq V(P_i)$, vil p_{a_1}, på grund af minimaliteten af F, være nabo til f_1. Dermed findes der i G en 2-vej $P^* : p_1, \ldots, p_{a_1}, f_1, \ldots, f_k, p_n$. Hvis der findes et punkt i $V(P^* - \{p_1\})$, som er komplet til Y, vil P^* have længde mindst fire, idet F ikke indeholder punkter, der er komplette til Y, og p_n ifølge definition 16.12 ikke er komplet til Y. Dermed er $\{X;Y;P^*\}$ et pseudohjul, men dette er i modstrid med, at $\{X;Y;P\}$ er et optimalt pseudohjul, idet P^* indeholder færre punkter, der er komplette til Y end P, da $p_b \in V(P)$, og $p_b \notin V(P^*)$. Derfor kan der ikke findes punkter i $V(P^* - \{p_1\})$, der er komplette til Y. Det vil sige, at kun punktet $p_1 \in V(P^*)$ er komplet til Y. Idet der ifølge (ii) ikke findes punkter i $\{p_{a_1+1}, \ldots, p_{b_1-1}\}$ og $\{p_{a_2+1}, \ldots, p_{b_2-1}\}$, der er komplette til Y, må punkter fra $V(P - \{p_1\})$, som er komplette til Y, tilhøre $\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\}$. Ifølge lemma 16.13 findes der et ulige antal kanter i P, som er komplette til Y, og der findes mindst tre sådanne kanter. Altså findes der i $\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\}$ et ulige antal kanter, og mindst tre, der er komplette til Y. Idet $C : f_1, \ldots, f_k, p_{a_2}, p_{a_2-1}, \ldots, p_{b_1}$ er et hul, og $\{p_{b_1}, \ldots, p_{a_2}\} \subset V(C)$, indeholder C et ulige antal kanter, der er komplette til Y, og C indeholder mindst tre sådanne kanter. Men dette er i modstrid med korollar 2.4, så derfor må $b_2 \neq n$.

Antag, at $a_2 = b_2 = 1$. Dermed er $p_{a_2} = p_{b_2} = p_1$, og derfor kan det yderligere antages, at $p_1 \in W_2$. Da f_1 har en nabo udenfor W_2, vil $b_1 > 1$. Da $V(P_2) = \{p_1\}$, og $W_2 \subseteq V(P_2)$, kan det antages, at der ikke findes kanter mellem $V(P - \{p_1\})$ og $F - f_1$. Vælg $P_1 : p_{a_1}, \ldots, p_{b_1}$ mindst mulig. Dermed er p_{b_1} nabo til f_1, og enten er $a_1 = 1$, eller p_{a_1} er nabo til f_1, da $F - \{f_1, f_k\}$ ikke har vedhæftninger i $V(P - \{p_1\})$, og p_{a_1} skal have en nabo i $F - f_k$. Antag først, at der i 2-vejen $p_1, \ldots, p_{a_1}$ findes et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Da p_2 ifølge definition 16.12 ikke er komplet til Y, må der findes et indre punkt i $p_1, \ldots, p_{a_1}$, der er komplet til Y. Dermed har p_1 ingen naboer i $F - f_k$, for så vil P_1 have et indre punkt, der er komplet til Y, hvilket vil være i modstrid med (ii). Dermed er $f_1, \ldots, f_k, p_1, \ldots, p_{a_1}$ et hul, der indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Hullet vil indeholde mindst tre punkter, der er komplette til Y, da p_1 er komplet til Y, mens ingen af dens naboer er komplette til Y, og der skal findes mindst en kant, der er komplet til Y. Dette giver en modstrid med korollar 2.4, hvilket vil sige, at der findes et lige antal kanter i $p_1, \ldots, p_{a_1}$, som er komplette til Y. Da der i P findes et ulige antal kanter, der er komplette til Y, og der i P_1 ikke findes kanter, der er komplette til Y, må $p_{b_1}, \ldots, p_n$ indeholde et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Det vil sige, at 2-vejen $R : f_k, \ldots, f_1, p_{b_1}, \ldots, p_n$

indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Da der i $p_{b_1}, \ldots, p_n$ findes en kant, der er komplet til Y, og p_n per definition 16.12 ikke er komplet til Y, må $b_1 \leq n-2$. Da $k \geq 2$, må R have længde mindst fire. Det vil sige, at R er en 2-vej af længde mindst fire, hvis endepunkter begge er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Desuden indeholder R mindst to punkter, som er komplette til Y, men ingen af endepunkterne er komplette til Y. Fra lemma 16.9 fåes, at antallet af kanter i R, der er komplette til Y, har samme paritet som antallet af punkter i $\{f_k, p_n\}$, der er komplette til Y. Da hverken f_k eller p_n er komplette til Y, opnåes en modstrid, idet R indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Det vil sige, at antagelsen, om at F er et minimalt modeksempel, må være forkert. $\square$

Hovedresultat (ix) fra kapitel 1 kan nu vises.

Sætning 16.18
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$. Hvis G indeholder et pseudohjul, så har G en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Antag, at G indeholder et pseudohjul, men ikke har en balanceret skæv opdeling. Her vil G indeholde et optimalt pseudohjul, lad det være $\{X; Y; P\}$. Lad Z være mængden af punkter i G, som er komplette til Y. Dermed er Y og Z disjunkte, komplette til hinanden, og $|Z| \geq 2$, idet $\{X; Y; P\}$ er et pseudohjul. Lad $F_0 = V(G) - (Y \cup Z)$. Ifølge lemma 15.4 er F_0 sammenhængende, og ethvert punkt i Z har en nabo i F_0.
Vælg $i > 2$, så $p_i p_{i+1}$ er komplet til Y, og p_{i+2} ikke er komplet til Y. Dette er muligt, da P ifølge lemma 16.13 har mindst tre kanter, der er komplette til Y, og p_n ifølge definition 16.12 ikke er komplet til Y. Lad $A : p_1, \ldots, p_{i-1}$ og $B : p_{i+1}, \ldots, p_n$. Da p_1 er nabo til $p_2 \in F_0$, og p_{i+1} er nabo til $p_{i+2} \in F_0$, vil de begge have naboer i F_0. Dermed findes der i F_0 en minimal sammenhængende mængde F, så punkter fra A og punkter fra B har naboer i F. Da F er valgt mindst mulig, er F disjunkt fra $V(P)$, da F ellers kan vælges mindre, og desuden er F disjunkt fra $X \cup Y$, idet $X \subset Z$. Dette er dog i modstrid med lemma 16.17, da hvis der findes en sammenhængende delgraf P' af P, hvor $V(P')$ indeholder samtlige vedhæftninger for F i P, så vil P' indeholde p_i, som er komplet til Y. Dermed har G en balanceret skæv opdeling, når G indeholder et pseudohjul. $\square$

Det kan hermed konstateres, at en graf i familien $\mathcal{F}_7$, som indeholder et pseudohjul, er en perfekt graf, da den så har en balanceret skæv opdeling. Dermed kan et minimalt modeksempel ikke indeholde et pseudohjul. Igen er mulighederne for udseendet af et minimalt modeksempel blevet indskrænket. Det mangler at blive vist, at grafer, der yderligere ikke indeholder pseudohjul, er perfekte.

Kapitel 17

Familien $\mathcal{F}_8$

Familien $\mathcal{F}_8$, som dette kapitel omhandler, er en underfamilie af familien $\mathcal{F}_7$, hvor der nu yderligere gælder, at hverken grafen eller dens komplement indeholder pseudohjul. Dette yderligere krav skyldes, at det i kapitel 16 blev vist, at et minimalt modeksempel ikke må indeholde pseudohjul. Idéen med dette kapitel er at vise, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde hjul. Altså at vise hovedresultat (x) fra kapitel 1, hvormed endnu en struktur, nemlig hjul, kan udelukkes fra et minimalt modeksempel. Dette gribes lidt anderledes an end i de foregående kapitler, da der her ses på hvorledes grafen ser ud, når den ikke har en balanceret skæv opdeling, hvor der i de tidligere kapitler konstateres, at grafen har en balanceret skæv, når den har et bestemt udseende. For at udelukke hjul fra minimale modeksempler benyttes hjulsystemer og optimale hjul, som afsnit 17.1 henholdsvis afsnit 17.2 omhandler.

Definition 17.1 ($\mathcal{F}_8$)
Lad $G \in \mathcal{F}_7$. Hvis yderligere hverken G eller $\overline{G}$ indeholder et pseudohjul, så vil $G \in \mathcal{F}_8$. ◇

Dermed vil en graf, hvor komplementet ikke indeholder et pseudohjul, tilhøre familien $\mathcal{F}_8$.

Korollar 17.2
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_8$ ◇

Bevis
Ifølge korollar 16.2 vil enhver genstridig graf tilhøre $\mathcal{F}_7$. Enhver genstridig graf G vil per definition 13.1 ikke have en balanceret skæv opdeling. Hermed må G ifølge sætning 16.18 ikke indeholde et pseudohjul. Ved at anvende sætning 16.18 i komplementet, må $\overline{G}$ ligeledes ikke indeholde et pseudohjul, hvormed $G \in \mathcal{F}_8$. □

Da et minimalt modeksempel er en genstridig graf, er det med ovenstående korollar vist, at et minimalt modeksempel vil tilhøre familien $\mathcal{F}_8$.

17.1 Hjulsystemer

I dette afsnit undersøges hjulsystemer. Afsnittet indledes med nogle definitioner omhandlende hjulsystemer, hvorefter en række resultater præsenteres, som senere anvendes til at vise hovedresultat (x) fra kapitel 1.

Definition 17.3 (Ramme)
Lad G være en graf, lad $z \in V(G)$, og lad $A_0 \subseteq V(G) - N[z]$ være en ikke-tom sammenhængende mængde. Da siges $\{z, A_0\}$ at være en ramme i G. ◇

Bemærk, at $N[z]$ betegner mængden bestående af punktet z samt alle z's naboer i G.

Definition 17.4 (Hjulsystem)
Lad G være en graf, og lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G. Lad $x_0, \ldots, x_t$, hvor $t \geq 1$, være en følge af forskellige punkter i $V(G) - (A_0 \cup \{z\})$, som opfylder følgende:

(i) *A_0 indeholder naboer til x_0 og x_1, men intet punkt i A_0 er nabo til både x_0 og x_1.*

(ii) *For $2 \leq i \leq t$ findes der en sammenhængende delmængde af G, som indeholder A_0, indeholder en nabo til x_i, ikke indeholder naboer til z, og ikke indeholder punkter, der er komplette til $\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$.*

(iii) *For $1 \leq i \leq t$ er x_i ikke komplet til $\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$.*

(iv) *z er komplet til $\{x_0, \ldots, x_t\}$.*

En sådan følge $x_0, \ldots, x_t$ kaldes et hjulsystem i G af højde t. ◇

Bemærk, at der er symmetri mellem x_0 og x_1, hvilket vil sige, at $x_1, x_0, x_2, \ldots, x_t$ er et andet hjulsystem i G af højde t.

Definition 17.5 (X_i og A_i)
Lad G være en graf, og lad $x_0, \ldots, x_t$ være et hjulsystem i G af højde t. For $1 \leq i \leq t$ defineres $X_i = \{x_0, \ldots, x_i\}$, og A_i defineres til at være en maksimal sammenhængende delmængde af $V(G)$, som indeholder A_0, ikke indeholder naboer til z og ikke indeholder punkter, der er komplette til X_i. ◇

Bemærk, at per definition vil $A_{i-1} \subseteq A_i$.

Bemærkning 17.6
Definition 17.4(ii) kan nu omformuleres til, at x_i har en nabo i A_{i-1}. ◇

Definition 17.7 (Centrum for hjulsystem)
Lad G være en graf, og lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom antisammenhængende mængde. Lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G, hvor $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$, og lad $x_0, \ldots, x_{t+1}$ være et hjulsystem i G med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$. Da siges Y at være centrum for hjulsystemet, hvis $t \geq 1$, $z, x_0, \ldots, x_t$ alle er komplette til Y, og x_{t+1} ikke er komplet til Y. ◇

Korollar 17.8
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme, hvor $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$, og lad $x_0, \ldots, x_{t+1}$ være et hjulsystem med Y som centrum, og $t \geq 1$. Lad X_i og A_i være som i definition 17.5, og antag, at højst et $y \in Y$ er antikomplet til A_1. Antag desuden, at der ikke findes et hjul med Y som centrum. Da vil der findes et punkt $y \in Y$ og indeks r, hvor $1 \leq r \leq t$, som opfylder følgende:

(i) *y er ikke-nabo til x_{t+1} og er antikomplet til A_r.*

(ii) *x_{t+1} har en nabo i A_r og en ikke-nabo i X_r.*

◇

Her følger første lemma om strukturen i en graf i familien $\mathcal{F}_8$, der ikke har en balanceret skæv opdeling, når yderligere antagelser er opfyldte.

Lemma 17.9
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde, og lad $\{z, A_0\}$ være en ramme, hvor $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$. Lad $x_0, \ldots, x_s$ være et hjulsystem, hvor $s \geq 1$, så $z, x_0, \ldots, x_s$ alle er komplette til Y. Da vil der findes en følge $x_{s+1}, \ldots, x_{t+1}$, hvor $t \geq s$, så $x_0, \ldots, x_{t+1}$ er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$ med Y som centrum. ◇

Bevis
Vælg en følge $x_{s+1}, \ldots, x_t$, som eventuelt er tom, hvor alle punkter i følgen er komplette til Y, og $x_0, \ldots, x_t$ er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$, hvor t er valgt størst muligt. Dermed er $t \geq 1$. Lad X_i og A_i være som i definition 17.5. Fra lemma 15.4 med X_t og Y komplette til hinanden, vil $V(G) - (X_t \cup Y)$ være sammenhængende, så der findes en 2-vej P mellem z og A_t, som er disjunkt fra X_t. Hvis P indeholder et indre punkt p, som er komplet til X_t, anvendes lemma 15.4 i stedet på mængderne X_t og $Y \cup \{p\}$. Denne proces fortsættes, indtil der haves en 2-vej P mellem z og A_t, hvis indre ikke indeholder et punkt, der er komplet til X_t. Lad v være naboen til z i denne 2-vej. Her kan P ikke have længde en, idet A_t ikke indeholder naboer til z. Fra maksimaliteten af A_t og det at der i det indre af P ikke findes punkter, der er komplette til X_t, følger, at P har længde to. Dermed har v en nabo i A_t, hvormed $x_0, \ldots, x_t, v$ er et hjulsystem. Fra maksimaliteten af t følger det, at v ikke er komplet til Y, hvormed Y er centrum for dette hjulsystem. □

Følgende korollar omhandler ligeledes strukturen i en graf i familien $\mathcal{F}_8$, der ikke har en balanceret skæv opdeling, hvor yderligere nogle betingelser er opfyldte. Korollaret kæder korollar 17.8 og lemma 17.9 sammen.

Korollar 17.10
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde, og lad $\{z, A_0\}$ være en ramme, hvor $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$. Lad $x_0, \ldots, x_s$ være et hjulsystem, hvor $s \geq 1$, så $z, x_0, \ldots, x_s$ alle er komplette til Y. Lad X_i og A_i være som i definition 17.5, og antag, at ethvert punkt i Y har en nabo i A_s, og højst et punkt i Y er antikomplet til A_1. Antag desuden, at der ikke findes et hjul med Y som centrum. Da vil der findes punkter $y \in Y$ og v samt indeks r, hvor $1 \leq r < s$, så følgende er opfyldt:

(i) *y er ikke-nabo til v og antikomplet til A_r.*

(ii) *v er nabo til z, har en nabo i A_r og en ikke-nabo i X_r.*

◇

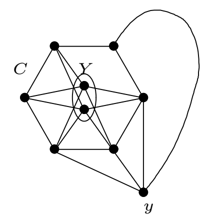
Bevis
Ifølge lemma 17.9 vil der findes en følge $x_{s+1}, \ldots, x_{t+1}$, hvor $t \geq s$, så $x_0, \ldots, x_{t+1}$ er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$ med Y som centrum. Fra korollar 17.8 vil der findes et r, hvor $1 \leq r \leq t$, og et punkt $y \in Y$, så y er ikke-nabo til x_{t+1} og antikomplet til A_r, og x_{t+1} har en nabo i A_r og en ikke-nabo i X_r. Idet hvert punkt i Y har en nabo i A_s, så følger det, at $r < s$, da $y \in Y$ ikke har naboer i A_r, og resultatet følger med $v = x_{t+1}$. □

17.2 Optimale hjul

I dette afsnit undersøges optimale hjul. Tre resultater, der et for et fortæller om udseendet af grafen, præsenteres. De leder frem til at kunne vise hovedresultat (x) fra kapitel 1, som vises sidst i afsnittet, hvormed hjul udelukkes fra et minimalt modeksempel.

Definition 17.11 (Optimalt hjul)
Lad G være en graf, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Da defineres $\{C, Y\}$ til at være et optimalt hjul, hvis der ikke findes et hjul $\{C', Y'\}$, hvor $Y \subset Y'$. $\diamond$

Definition 17.12 (Drage)
Lad G være en graf, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Hvis $y \in V(G) - (Y \cup V(C))$ ikke er komplet til Y og har fire naboer i C, hvoraf de tre er på hinanden følgende og komplette til Y. Da defineres y til at være en drage for $\{C, Y\}$. $\diamond$



Figur 17.1: Eksempel på en drage y for $\{C, Y\}$.

Det vises nu, at en graf i familien $\mathcal{F}_8$, der ikke har en balanceret skæv opdeling, under en yderligere antagelse om, at grafen indeholder et optimalt hjul, vil give et krav på strukturen af grafen om ikke at indeholde en drage for det pågældende hjul.

Lemma 17.13
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling, og lad $\{C, Y\}$ være et optimalt hjul i G. Da findes der ikke en drage for $\{C, Y\}$ i G. $\diamond$

Bevis
Antag, at $y \in V(G) - (Y \cup V(C))$ er en drage. Lad x_0, z, x_1 være en 2-vej i C, hvor x_0, z og x_1 alle er komplette til $Y \cup \{y\}$. Lad $A_0 = V(C) - \{z, x_0, x_1\}$, så x_0, x_1 er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$. Antagelserne i lemma 17.9 er opfyldte, og deraf følger, at der findes en følge $x_2, \ldots, x_{t+1}$, for $t \geq 1$, så $x_0, \ldots, x_{t+1}$ er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$ med $Y \cup \{y\}$ som centrum. Idet y er en drage, har y en nabo i A_0, og da $\{C, Y\}$ er et hjul, findes der mindst to disjunkte kanter, der er komplette til Y, hvilket vil sige, at der findes et punkt i A_0, som er komplet til Y. Dermed har ethvert punkt i $Y \cup \{y\}$ en nabo i A_0, så intet punkt i $Y \cup \{y\}$ er antikomplet til A_1. Da $\{C, Y\}$ er et optimalt hjul, findes der ikke et hjul med $Y \cup \{y\}$ som centrum. Antagelserne i korollar 17.8 er opfyldte med $Y \cup \{y\}$ som antisammenhængende mængde, men da alle punkter i $Y \cup \{y\}$ har en nabo i A_0, er konklusionen i korollar 17.8 ikke opfyldt. Det vil sige, at antagelsen, om at y er en drage, må være forkert. $\square$

Definition 17.14 (Hale)
Lad G være en graf, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Lad $z \in V(C)$, og lad x_0 og x_1 være naboer til z i C. Da defineres en 2-vej T i $V(G) - \{x_0, x_1\}$ mellem z og $V(C) - \{z, x_0, x_1\}$ til at være en hale for z med hensyn til $\{C, Y\}$, hvis følgende er opfyldt:

(*i*) *z, x_0 og x_1 er alle komplette til Y.*

(*ii*) *Der findes en kant i $C - \{z, x_0, x_1\}$, som er komplet til Y.*

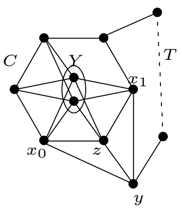
(*iii*) *Naboen til z i T er nabo til både x_0 og x_1.*

(*iv*) *Intet punkt i T tilhører Y.*

(v) *Intet indre punkt i T er komplet til Y.*

(vi) *Intet punkt i G er en drage for $\{C, Y\}$.*

$\diamond$



Figur 17.2: Eksempel på en hale T for z med hensyn til $\{C, Y\}$.

I stil med lemma 17.13 vil det nu yderligere blive udelukket, at grafen indeholder en hale.

Lemma 17.15
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling, og lad $\{C, Y\}$ være et optimalt hjul i G. Da har intet punkt i C en hale. $\diamond$

Lemma 17.16
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling, og lad $\{C, Y\}$ være et optimalt hjul i G. Da findes en 2-vej c_1, c_2, c_3 i C, så c_1, c_2 og c_3 alle er komplette til Y, og en 2-vej $c_1, p_1, \dots, p_k, c_3$, så $\{p_1, \dots, p_k\} \notin V(C) \cup Y$, ingen af punkterne i $\{p_1, \dots, p_k\}$ er komplette til Y, og ingen af punkterne i $\{p_1, \dots, p_k\}$ har en nabo i $V(C) - \{c_1, c_2, c_3\}$. $\diamond$

Bevis
Da $\{C, Y\}$ er et hjul, vil der findes to ikke-nabopunkter a og b i C, som er komplette til Y og har ulige hjulparitet. Lad X være de punkter fra C, som er komplette til Y. Lad X i lemma 15.4 svare til $X - \{a, b\}$, og lad Y svare til Y. Da $X - \{a, b\} \cup Y \neq V(G)$ er $V(G) - (X - \{a, b\} \cup Y)$ sammenhængende. Dermed findes der en 2-vej P mellem a og b, hvis indre ikke tilhører Y. Hvis P indeholder et indre punkt p, som er komplet til Y, anvendes lemma 15.4 på mængderne $X - \{a, b\} \cup \{p\}$ og Y i stedet. Denne proces fortsættes, indtil der haves en 2-vej P mellem a og b, hvis indre ikke indeholder punkter, der er komplette til Y. Der kan findes indre punkter i P, der tilhører C, men der kan vælges en 2-vej P' i P med endepunkter a' og b', så $a'b' \in E(C)$, a' og b' har ulige hjulparitet, og P' har mindst mulig længde, hvormed intet punkt i det indre af P' tilhører C.
Antag, at a' og b' er naboer. Da $a', b' \in V(C)$ og har ulige hjulparitet, er de begge komplette til Y, og dermed tilhører hverken a' eller b' det indre af P. Det vil sige, at $a' = a$ og $b' = b$, hvormed a og b er naboer. Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at a og b ikke er naboer, hvormed a' og b' ikke er naboer.
Lad F være det indre af P'. Da der ikke findes punkter i det indre af P', som tilhører Y eller C, findes der ingen punkter i F, som tilhører $Y \cup V(C)$. Da det er vist, at intet indre punkt i P er komplet til Y, vil intet punkt i F være komplet til Y. Da a' og b' er endepunkterne i P', er de vedhæftninger for F. Det vil sige, at F har vedhæftninger i C, som er ikke-naboer, og som har ulige hjulparitet. Da G ikke har en balanceret skæv opdeling, og $\{C, Y\}$ er et optimalt hjul i G, findes der ifølge lemma 17.13 ikke en drage i G med hensyn til $\{C, Y\}$. Antagelserne i lemma 15.15 er opfyldte, hvormed en af konklusionerne må gælde. Lemma 15.15(i) kan ikke være opfyldt, idet $\{C, Y\}$ er et optimalt hjul i G. Lemma 15.15(ii) kan ikke være opfyldt, idet der ikke findes en drage i G. Det vil sige, at det er lemma 15.15(iii), der er opfyldt, hvormed der findes en 2-vej c_1, c_2, c_3 i C, så c_1, c_2 og c_3 alle er komplette til Y, og en 2-vej $c_1, p_1, \dots, p_k, c_3$, så $\{p_1, \dots, p_k\} \notin V(C) \cup Y$, ingen af $\{p_1, \dots, p_k\}$ er komplette til Y, og ingen af $\{p_1, \dots, p_k\}$ har en nabo i $V(C) - \{c_1, c_2, c_3\}$.
$\square$

Det er nu muligt at vise hovedresultat (x) fra kapitel 1.

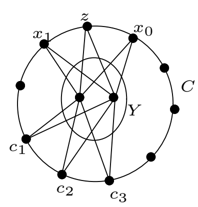
Sætning 17.17
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Da findes der ikke et hjul i G. ◇

Bevis
Antag, at der findes et hjul i G, og vælg et optimalt hjul $\{C, Y\}$, så C indeholder så få kanter, der er komplette til Y, som muligt.

Påstand 1: *Netop fire kanter i C er komplette til Y.*

Fra lemma 17.16 findes en 2-vej c_1, c_2, c_3 i C, så c_1, c_2 og c_3 alle er komplette til Y, og en 2-vej $c_1, p_1, \ldots, p_k, c_3$, så $\{p_1, \ldots, p_k\} \notin V(C) \cup Y$, ingen af $p_1, \ldots, p_k$ er komplette til Y, og ingen af $p_1, \ldots, p_k$ har en nabo i $V(C) - \{c_1, c_2, c_3\}$. Lad C' være foreningen af $C - \{c_2\}$ og $c_1, p_1, \ldots, p_k, c_3$. Da er C' et hul af længde mindst seks, som indeholder færre kanter end C, der er komplette til Y, da der ved at fjerne c_2, fjernes to kanter, som er komplette til Y. Idet $\{C, Y\}$ er et optimalt hjul i G med så få kanter, der er komplette til Y, som muligt, er $\{C', Y\}$ ikke et hjul. Der findes mindst fire kanter i C, der er komplette til Y, idet C indeholder mindst to disjunkte kanter, som er komplette til Y, og $\{C, Y\}$ ikke må være et hjul af ulige længde. Da C' har to kanter færre end C, der er komplette til Y, og $\{C', Y\}$ ikke er et hjul, findes der netop fire kanter i C, der er komplette til Y. Dette viser påstand 1.

Det haves, at $\{C, Y\}$ ikke er et hjul af ulige længde, idet $G \in \mathcal{F}_8$. Det vil sige, at der findes punkter $x_0, z, x_1, c_1, c_2, c_3$ i C, der alle er forskellige undtaget muligvis $x_1 = c_1$ eller $c_3 = x_0$, så x_0z, zx_1, c_1c_2 og c_2c_3 er de kanter i C, som er komplette til Y. Lad $A_0 = V(C) - \{z, x_0, x_1\}$.



Figur 17.3: Udseendet af $\{C, Y\}$.

Påstand 2: *Der findes ikke en hale for z med hensyn til $\{C, Y\}$ i G.*

Antag, at der findes en hale T_z for z med hensyn til $\{C, Y\}$ i G, hvor x_0 og x_1 er naboerne til z i C. Da x_0 samt x_1 er naboer til z, er $\{z, A_0\}$ en ramme, hvor $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$. Desuden opfylder x_0, x_1 betingelserne i definition 17.4, hvormed x_0, x_1 er et hjulsystem, så z, x_0 og x_1 er komplette til Y. Lad $t \in V(T_z)$ være punktet fra T_z, som er nabo til x_0, z og x_1. Mængden A_1 skal per definition 17.5 være maksimal sammenhængende, så den indeholder A_0, ikke indeholder naboer til z og ikke indeholder punkter, der er komplette til $X_1 = \{x_0, x_1\}$. Dermed må $T_z - \{t\}$ være indeholdt i A_1. Det vil sige, at t har en nabo i A_1. Da der findes et punkt i A_0, der er komplet til Y, vil også alle punkter i Y have en nabo i A_1. Antag, at der ikke findes et hjul med $Y \cup \{t\}$ som centrum. Dermed er antagelserne i korollar 17.10 opfyldte. Korollar 17.10(i) er ikke opfyldt, da der ikke findes $y \in Y \cup \{t\}$, der er antikomplet til A_r, for $1 \leq r \leq 1$. Dermed må antagelsen, om at der ikke findes et hjul med $Y \cup \{t\}$ som centrum, være forkert. Altså vil der findes et hjul med $Y \cup \{t\}$ som centrum, hvilket danner en modstrid med, at $\{C, Y\}$ er et optimalt hjul i G. Det vil sige, at antagelsen, om at der findes en hale for z med hensyn til $\{C, Y\}$ i G, er forkert, og påstand 2 er vist.

Lad X i lemma 15.4 svare til $\{x_0, x_1\}$, og lad Y svare til Y. Da $Y \cup \{x_0, x_1\} \neq V(G)$, er $V(G) - (Y \cup \{x_0, x_1\})$ sammenhængende. Det vil sige, at der findes en 2-vej T mellem z og et punkt i A_0, hvis indre ikke tilhører Y. Hvis et indre punkt p i T er komplet til Y, da anvendes lemma 15.4 på mængderne $\{x_0, x_1, p\}$ og Y i stedet. Denne proces fortsættes, indtil der haves en 2-vej T

mellem z og A_0, hvis indre er disjunkt fra Y og ikke indeholder punkter, der er komplette til Y. Lad $y \in V(T)$ være naboen til z i T.

Påstand 3: *Ikke både x_0 og x_1 er nabo til y.*

Antag, at både x_0 og x_1 er nabo til y. Det følger af lemma 17.13, at der ikke findes en drage for $\{C, Y\}$ i G. Idet mindst én af kanterne c_1c_2 og c_2c_3 tilhører $C - \{z, x_0, x_1\}$, er betingelserne i definition 17.14 opfyldte, hvormed T er en hale for z med hensyn til $\{C, Y\}$ i G. Men da der ifølge påstand 2 ikke findes en hale for z med hensyn til $\{C, Y\}$ i G, må antagelsen, om at y er nabo til både x_0 og x_1, være forkert, hvormed påstand 3 er vist.

Påstand 4: *y har ikke en nabo i A_0.*

Antag, at y har en nabo c i $A_0 - c_2$. Da er z og c ikke-naboer, idet $c \in A_0 - c_2$, og har ulige hjulparitet i $\{C, Y\}$. Fra påstand 1 følger, at x_0z, zx_1, c_1c_2 og c_2c_3 er de eneste kanter i C, som er komplette til Y. Lad a og b være c's naboer i C, og antag, at både a og b er komplette til Y. Her er $a = x_0$ eller $b = x_0$ samt $a = x_1$ eller $b = x_1$ en mulighed. Hvis c ikke er komplet til Y, så lad $v \in Y$ være ikke-nabo til c. Mindst ét af a og b vil ikke tilhøre $\{x_0, x_1\}$, lad det være a. Da danner y, c, a, v, z et hul af længde fem, så c må være komplet til Y. Når både a, b og c er komplette til Y, dannes der yderligere mindst én kant i C, som er komplet til Y, udover kanterne x_0z, zx_1, c_1c_2 og c_2c_3. Dette er dog i modstrid med påstand 1, så derfor kan højst en af c's naboer i C være komplet til Y. Fra påstand 3 følger, at ikke både x_0 og x_1, som er z's naboer i C, er naboer til y. Antagelserne i lemma 15.14 er opfyldte, hvor v i lemma 15.14 svarer til y. Det følger af lemma 15.14(iii), at $\{C, Y \cup \{y\}\}$ er et hjul, idet de andre to konklusioner i lemma 15.14 ikke kan være opfyldte. Dette giver dog en modstrid med, at $\{C, Y\}$ er et optimalt hjul. Det vil sige, at antagelsen, om at y har en nabo c i $A_0 - c_2$, er forkert.
Antag derfor, at y er nabo til c_2. Da C har længde mindst seks, vil enten $x_0 \neq c_3$ eller $x_1 \neq c_1$. På grund af symmetri kan det antages, at $x_0 \neq c_3$. Lad Q være 2-vejen mellem x_0 og c_3 i $C - \{z\}$. Da $x_0 \neq c_3$, har Q længde mindst to, da hvis Q kun har længde en, er Q en kant, som er komplet til Y, hvilket ikke kan lade sig gøre på grund af påstand 1. Antagelserne i korollar 2.4 er opfyldte, og korollar 2.4 giver, at antallet af kanter i Q, der er komplette til Y, har samme paritet som længden af Q. Da der findes et lige antal kanter, og mindst to, mellem x_0 og c_3 i $C - Q$, der er komplette til Y, må Q ligeledes have lige længde. Da x_0, Q, c_3, c_2, y ikke må være et hul af ulige længde, er y og x_0 ikke-naboer. Men da er hullet x_0, Q, c_3, c_2, y, z omkredsen af et hjul af ulige længde med Y som centrum. Det er et hjul af ulige længde, da c_2c_3 og zx_0 er de kanter i C, som er komplette til Y, der er med i hullet x_0, Q, c_3, c_2, y, z. Dette er dog i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_8$. Det vil sige, at y heller ikke er nabo til c_2, hvormed påstand 4 er vist.

Lad $T : z, y, v_1, \dots, v_{n+1}$, hvor $v_{n+1} \in A_0$. Fra påstand 4 er $n \geq 1$, idet y ikke har en nabo i A_0. Vælg T, så længden af T er mindst mulig, og ingen af $y, v_1, \dots, v_{n-1}$ har naboer i A_0.

Påstand 5: *Hvis $n = 1$, så vil ingen af v_1's naboer i A_0 være komplette til Y.*

Antag, at $n = 1$, og antag, at $v_2 \in A_0$ er komplet til Y. På grund af symmetri kan det antages, at $x_0 \neq c_3$. Lad Q være 2-vejen mellem x_0 og c_3 i $C - \{z\}$. Da $x_0 \neq c_3$, har Q længde mindst to. Antagelserne i korollar 2.4 er opfyldte, og korollar 2.4 giver, at antallet af kanter i Q, der er komplette til Y, har samme paritet som længden af Q. Da der findes mindst to kanter mellem x_0 og c_3 i $C - Q$, der er komplette til Y, må Q ligeledes have lige længde. Der findes en anti 2-vej U mellem y og v_1, hvis indre tilhører Y, idet y og v_1 ikke er komplette til Y. Da U sammen med v_1, z, v_2, y danner et antihul, har U ulige længde. Dermed er ethvert punkt a, der er komplet til Y, nabo til enten y eller v_1, for ellers findes et antihul y, v_2, z, v_1, a af længde fem. Idet c_2 og c_3 er komplette til Y og ifølge påstand 4 ikke er naboer til y, må de være naboer til v_1. Fra påstand 3 følger det, at y ikke er nabo til både x_0 og x_1, hvormed v_1 er nabo til et af x_0 eller x_1. Lad v_1 være nabo til x_0. Da har v_1 to naboer x_0 og c_2 i C, som ikke indbyrdes er naboer og har ulige hjulparitet, idet der kun findes kanten c_3c_2 mellem dem. Ligeledes hvis v_1 er nabo til x_1, da har v_1 to naboer x_1 og c_3 i C, som ikke indbyrdes er naboer og har ulige hjulparitet, idet der kun findes kanten c_1c_2 mellem dem. Antagelserne i lemma 15.14 er opfyldte, hvor v i lemma 15.14 svarer til v_1. Da v_1 har mindst tre naboer i C, nemlig enten v_2, x_0 og c_2 eller v_2, x_1 og c_3, kan lemma 15.14(i) ikke være opfyldt, og på grund af maksimaliteten af $\{C, Y\}$ kan lemma 15.14(iii) ikke være opfyldt. Dermed må lemma 15.14(ii) være opfyldt, hvormed der findes tre på hinanden følgende punkter i C, der alle er komplette til $Y \cup \{v_1\}$. Fra påstand 2 har v_1 ikke andre naboer i C, da v_1 så ville være en hale for z med hensyn til $\{C, Y\}$. Eftersom z ikke er nabo til punkter i A_0, er c_1, c_2 og c_3 de eneste tre på hinanden følgende punkter i C, der kan være komplette til $Y \cup \{v_1\}$. Da v_1 er nabo til enten x_0 eller x_1, og $x_0 \neq c_3$ per antagelse, må $x_1 = c_1$. Da ethvert punkt, som er komplet til Y, vil være nabo til enten y eller v_1, må x_0 være nabo til y, idet x_0 er komplet til Y og ikke-nabo til v. Men da er x_0, Q, c_3, v_1, y et hul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_8$, og påstand 5 er vist.

Det kan nu antages, at $n \geq 2$.

Påstand 6: *Et af* x_0 *eller* x_1 *har ingen naboer i* $\{y, v_1, \ldots, v_n\}$.

Lad $P : y, p_1, \ldots, p_k$ være en 2-vej, hvor $p_k \in A_0$ er komplet til Y, dens indre tilhører $A_0 \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$, så p_k er det eneste punkt i P, der er komplet til Y. Da ingen af $y, v_1, \ldots, v_{n-1}$ har naboer i A_0, er $\{y, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \{y, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$. Det vil sige, at $v_n = p_{k-1}$. Når $n \geq 2$, er $k \geq 3$. Da $G \in \mathcal{F}_8$, må $\{Y; \{x_0, x_1\}; K\}$, hvor $K : z, y, p_1, \ldots, p_k$, ikke være et pseudohjul, så definition 16.12 må ikke være opfyldt for $\{Y; \{x_0, x_1\}; K\}$. Da Y og $\{x_0, x_1\}$ begge er antikomplette mængder, der udgør et komplet par, er definition 16.12(i) opfyldt. Desuden er definition 16.12(ii) opfyldt, idet K har længde mindst fire. Derudover er endepunkterne i K komplette til Y, mens de indre punkter i K ikke er komplette til Y, hvilket vil sige, at definition 16.12(iii) er opfyldt. Nu mangler blot definition 16.12(iv) at være opfyldt, for at $\{Y; \{x_0, x_1\}; K\}$ er et pseudohjul, og da z er komplet til $\{x_0, x_1\}$, og y samt p_k ikke er komplette til $\{x_0, x_1\}$, er den eneste mulighed for ikke at opfylde definition 16.12(iv), at der ikke findes andre punkter i K, der er komplette til $\{x_0, x_1\}$. Altså er y og p_k de eneste punkter fra K, der er komplette til $\{x_0, x_1\}$. Antagelserne i lemma 2.7 er opfyldte, hvor X i lemma 2.7 svarer til $\{x_0, x_1\}$, Y svarer til Y, og P svarer til K. Fra lemma 2.7(i) følger det, at et af x_0 og x_1 er ikke-nabo til alle punkterne $y, p_1, \ldots, p_{k-1}$, og da $\{y, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \{y, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$, følger det, at et af x_0 eller x_1 ikke har naboer i $\{y, v_1, \ldots, v_n\}$, hvormed påstand 6 er vist.

Lad $F = \{y, v_1, \ldots, v_n\}$. Ifølge påstand 6 vil enten x_0 eller x_1 ikke have naboer i F. På grund af symmetrien mellem x_0 og x_1 kan det antages, at x_0 ikke har naboer i F. Lad S være en 2-vej mellem y og x_0, hvis indre tilhører $F \cup A_0$. En sådan 2-vej findes, idet F har vedhæftninger i A_0. Det vil sige, at S har længde mindst tre, idet y ifølge påstand 4 ikke har naboer i A_0. Lad $C' : z, y, S, x_0$ være et hul. Dermed har C' længde mindst seks, da der ikke findes huller af ulige længde i G.
Antag, at $x_0 \neq c_3$. Eftersom kanten $x_0 z$ tilhører C', og $x_0 \neq c_3$, indeholder C' et udsnit af ulige længde. Da $\{C', Y\}$ ikke må være et hjul af ulige længde, følger det, at $\{C', Y\}$ ikke er et hjul. Det vil sige, at x_0 og z er de eneste punkter i C', der er komplette til Y. Dermed er antagelserne i lemma 2.6 opfyldte, hvormed Y må indeholde enten en hat eller et afhop for C' ved zx_0. Hvis der findes et afhop for C', vil der findes to punkter i Y, der ikke er naboer, som er forbundet af en 2-vej U af ulige længde mindst fem, hvis indre tilhører $F \cup A_0$. Det vil sige, at endepunkterne i U er komplette til $\{x_0, x_1\}$, mens de indre punkter ikke er komplette til $\{x_0, x_1\}$. Dette er i modstrid med lemma 14.3, idet antagelserne i lemma 14.3 er opfyldte, men ingen af konklusionerne kan gælde. Dermed må Y indeholde en hat for C', hvilket vil sige, at der findes $y' \in Y$, som kun er nabo til z og x_0 i C'. Her fanger $F \cup A_0$ trekanten $\{x_0, y', z\}$, idet x_0 har en nabo i A_0, y er den eneste nabo til z i $F \cup A_0$, og y' har en nabo i A_0, idet $y' \in Y$, og c_1, c_2 samt c_3 alle tilhører A_0 og er komplette til Y. Lad b betegne en nabo til x_0 i A_0, og lad c betegne en nabo til y' i A_0. Ifølge lemma 16.5 vil $F \cup A_0$ enten indeholde et spejlbillede af $\{x_0, y', z\}$ eller et punkt, som har mindst to naboer i trekanten. Da x_0 ikke har en nabo i F, og $A_0 \subset V(C)$, er b den eneste nabo til x_0 i $F \cup A_0$. Da $b \in A_0$, er z ikke-nabo til b, og da y' kun er nabo til x_0 og z i C', er b ikke-nabo til y'. Altså kan intet punkt i $F \cup A_0$ være nabo til både x_0 og y', og intet punkt kan være nabo til både z og x_0. Da naboerne til y' i $F \cup A_0$ alle tilhører A_0, kan intet punkt i $F \cup A_0$ være nabo til både y' og z. Altså må $F \cup A_0$ indeholde et spejlbillede af $\{x_0, y', z\}$.
Da y er z's eneste nabo i $F \cup A_0$, b er x_0's eneste nabo i $F \cup A_0$, samt y og b er ikke-naboer, kan

$F \cup A_0$ ikke indeholde et spejlbillede af $\{x_0, y', z\}$. Dermed er en modstrid opnået, så $x_0 = c_3$, hvormed $x_1 \neq c_1$. Dette betyder, at hvis x_0 ikke har naboer i F, vil $x_0 = c_3$. Tilsvarende kan ovenstående argument gennemføres for x_1, og da vil der, hvis x_1 ikke har naboer i F, gælde, at $x_1 = c_1$. Da C har længde minst seks, kan $x_0 = c_3$ og $x_1 = c_1$ ikke forekomme samtidig, altså må et af x_0 og x_1 have en nabo i F, lad det være x_1.
Dermed findes der to vedhæftninger for F i C, som har ulige hjulparitet, nemlig x_1 og z, og to vedhæftninger for F i C, som ikke er naboer, nemlig v_{n+1} og z. Da $F \subseteq V(T)$, er intet punkt i F komplet til Y. Ved at betragte lemma 15.15 ses det, at antagelserne alle er opfyldte. Lemma 15.15(i) kan ikke gælde, idet x_0 ikke har naboer i F, og dermed vil c_1 og c_2 være de eneste punkter i C, som kan være komplette til $Y \cup \{v_i\}$, hvor $v_i \in F$. Lemma 15.15(ii) kan ikke gælde, idet G per lemma 17.13 ikke indeholder en drage. Altså må lemma 15.15(iii) gælde. Det vil sige, at der findes en 2-vej af længde tre i C, hvor alle punkterne er komplette til Y, lad det være z, x_0, c_2, og en 2-vej $R : z, y, v_1, \ldots, v_{n+1}, c_2$, så der ikke findes kanter mellem F og $V(C - \{z, x_0, c_2\})$. Men dermed findes et hul dannet af foreningen af R og $C - \{x_0\}$, som udgør omkredsen af et hjul af ulige længde med Y som centrum. Dette er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_8$. Altså må antagelsen, om at G indeholder et hjul, være forkert. $\square$

Dermed er hovedresultat (x) fra kapitel 1 vist. Det vil sige, at et minimalt modeksempel nu er blevet yderligere indskrænket til ikke at kunne indeholde hjul. Fremover vil de betragtede Berge grafer altså ikke indeholde hjul.

Kapitel 18

Familien $\mathcal{F}_9$

Dette kapitel vil omhandle familien $\mathcal{F}_9$, som yderligere ikke må indeholde hjul i hverken grafen selv eller dens komplement. Grunden til denne definition er, at det i sætning 17.17 blev vist, at hvis en graf i familien $\mathcal{F}_8$ ikke har en balanceret skæv opdeling, så vil grafen ikke indeholde hjul. Her betragtes grafer fra familien $\mathcal{F}_9$, som indeholder et punkt, der har tre på hinanden følgende naboer i et hul af længde mindst seks for at vise, at sådanne grafer ikke kan være minimale modeksempler. Idéen med dette kapitel er altså at vise hovedresultat (xi) fra kapitel 1.

Definition 18.1 ($\mathcal{F}_9$)
Lad $G \in \mathcal{F}_8$. Hvis yderligere hverken G eller $\overline{G}$ indeholder et hjul, så vil $G \in \mathcal{F}_9$. ◇

Som i de andre familier vil en graf, hvis komplement ikke indeholder hjul, også tilhøre familien $\mathcal{F}_9$.

Korollar 18.2
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_9$. ◇

Bevis
Ifølge korollar 17.2 tilhører enhver genstridig graf $\mathcal{F}_8$. Enhver genstridig graf G vil per definition 13.1 ikke indeholde en balanceret skæv opdeling. Hermed må G ifølge sætning 17.17 ikke indeholde hjul. Ved at anvende sætning 17.17 i komplementet må $\overline{G}$ ligeledes ikke indeholde hjul, hvormed $G \in \mathcal{F}_9$. □

Da et minimalt modeksempel er en genstridig graf, vil et minimalt modeksempel tilhøre familien $\mathcal{F}_9$, hvormed det ikke indeholder hjul i hverken grafen selv eller dens komplement.
I dette kapitel tages på samme måde som i kapitel 17 udgangspunkt i en graf, som ikke har en balanceret skæv opdeling.

Lemma 18.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_9$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $\{z, A_0\}$ være en ramme, og lad $x_0, \dots, x_s$ være et hjulsystem med hensyn til $\{z, A_0\}$. Lad X_i og A_i være som i definition 17.5. Da findes der ikke et punkt $y \in V(G) - \{z, x_0, \dots, x_s\}$, som er komplet til $\{z, x_0, \dots, x_s\}$ og har en nabo i A_s. ◇

Bevis
Antag, at der findes en ramme $\{z, A_0\}$, som har et tilhørende hjulsystem $x_0, \dots, x_s$, så der findes et punkt $y \in V(G) - \{z, x_0, \dots, x_s\}$, som er komplet til $\{z, x_0, \dots, x_s\}$ og har en nabo i A_s. Vælg rammen og hjulsystemet, så s er mindst muligt. Antagelserne i lemma 17.10 er opfyldte, hvormed der findes et r, for $1 \leq r < s$, og et punkt v, så y ikke er nabo til v og ikke har en nabo i A_r, så v

er nabo til z, v har en nabo i A_r og en ikke-nabo i X_r. Dermed er $\{y, A_0\}$ en ramme, $x_0, \ldots, x_r$ er et hjulsystem med hensyn til rammen, og z er komplet til $\{y, x_0, \ldots, x_r\}$ samt er nabo til v i A'_r, hvor A'_r er den maksimale sammenhængende delmængde af $V(G)$, der indeholder A_0, som ikke indeholder en nabo til y og ikke indeholder et punkt, der er komplet til X_r. Dette er dog i modstrid med minimaliteten af s, hvorved der ikke findes et punkt $y \in V(G) - \{z, x_0, \ldots, x_s\}$, som er komplet til $\{z, x_0, \ldots, x_s\}$ og har en nabo i A_s. □

Det er nu muligt at vise hovedresultat (xi) fra kapitel 1

Sætning 18.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_9$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling, og lad C være et hul i G af længde mindst seks. Da findes der ikke et punkt i $V(G) - V(C)$, der har tre på hinanden følgende naboer i C. ◇

Bevis
Antag, at der findes et punkt $y \in V(G) - V(C)$, der har tre på hinanden følgende naboer i C, og lad y være nabo til x_0, z samt x_1, hvor x_0, z, x_1 er en 2-vej i C. Lad X_i og A_i være som i definition 17.5. Anvendes lemma 18.3 på $\{z, A_0\}$ og x_0, x_1 følger det, at y ikke har andre naboer i C. Vælg t størst muligt, så der findes en følge $x_2, \ldots, x_t$ med følgende egenskaber:

- (i) For $2 \leq i \leq t$ findes der en sammenhængende delmængde A_{i-1} af $V(G)$, der indeholder en nabo til x_i, ikke indeholder en nabo til hverken z eller y, og ikke indeholder et punkt, der er komplet til $\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$.
- (ii) For $1 \leq i \leq t$ er x_i ikke komplet til $\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$.
- (iii) $x_0, \ldots, x_t$ er komplette til $\{y, z\}$.

En sådan følge findes, idet x_0, x_1 er et hjulsystem. Lad X i lemma 15.4 svare til $\{z\}$, og lad Y svare til $\{x_0, \ldots, x_t\}$. Da $\{z\} \cup \{x_0, \ldots, x_t\} \neq V(G)$, er $V(G) - (\{z\} \cup \{x_0, \ldots, x_t\})$ sammenhængende. Dermed findes der en 2-vej mellem y og A_0, som er disjunkt fra $\{x_0, \ldots, x_t\}$. Hvis der findes et indre punkt p i P, som er komplet til $\{x_0, \ldots, x_t\}$, da anvendes lemma 15.4 på mængderne $\{z, p\}$ og $\{x_0, \ldots, x_t\}$ i stedet. Hvis denne proces fortsættes, bliver P en 2-vej mellem y og A_0, hvis indre ikke indeholder punkter, der er komplette til $\{x_0, \ldots, x_t\}$. På grund af symmetrien mellem y og z kan ovenstående argument gennemføres for y, så der findes en 2-vej P mellem z og A_0, som er disjunkt fra $\{x_0, \ldots, x_t\}$, og hvis indre ikke indeholder punkter, der er komplette til $\{x_0, \ldots, x_t\}$. Det vil sige, at der findes en 2-vej P mellem $\{y, z\}$ og A_0, som er disjunkt fra $\{x_0, \ldots, x_t\}$, og hvis indre ikke indeholder punkter, der er komplette til $\{x_0, \ldots, x_t\}$. Vælg en sådan 2-vej mindst mulig, og antag, at y er det første punkt i P. Beviset, for når z er første punkt i P, kan gennemføres analogt.
Lad $P : y, p_1, \ldots, p_{k+1}$, hvor $p_{k+1} \in A_0$. Fra minimaliteten af længden af P følger det, at z ikke er nabo til nogen af $p_2, \ldots, p_k$. Hvis z er nabo til p_1, opfylder $\{x_0, \ldots, x_t, p_1\}$ definition 17.4, hvormed $\{x_0, \ldots, x_t, p_1\}$ er et hjulsystem af højde $t+1$, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af t. Dermed er $p_1, \ldots, p_{k+1}$ alle ikke-naboer til z. Heraf følger, at $\{z, A_0\}$ er en ramme, og $x_0, \ldots, x_t$ er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$. Desuden er y nabo til alle af $z, x_0, \ldots, x_t$, og der findes en sammenhængende delmængde af $V(G)$, som indeholder A_0, indeholder en nabo til y, ikke indeholder en nabo til z og ikke indeholder et punkt, der er komplet til $\{x_0, \ldots, x_t\}$. Dette er dog i modstrid med lemma 18.3, hvormed antagelsen, om at der findes et punkt $y \in V(G) - V(C)$, der har tre på hinanden følgende naboer i C, må være forkert. □

Dermed er mulighederne for udseendet af et minimalt modeksempel begrænset yderligere, idet et minimalt modeksempel nu heller ikke kan indeholde et hul af længde mindst seks, hvor et punkt i grafen har tre på hinanden følgende naboer i hullet.

Kapitel 19

Familien $\mathcal{F}_{10}$

Familien $\mathcal{F}_{10}$ betragtes nu, og denne er en underfamilie af familien $\mathcal{F}_9$, hvor der yderligere gælder, at intet punkt i grafen eller komplementærgrafen har tre på hinanden følgende naboer i et hul af længde mindst seks. Baggrunden for denne definition er sætning 18.4, som er hovedresultat (xi) fra kapitel 1. Formålet med dette kapitel er at vise, at et minimalt modeksempel ikke kan indeholde både et hul af længde mindst seks og et antihul af længde mindst seks. Altså at vise hovedresultat (xii) fra kapitel 1.

Definition 19.1 ($\mathcal{F}_{10}$)
Lad $G \in \mathcal{F}_9$. Hvis der for ethvert hul C af længde mindst seks i G eller $\overline{G}$ gælder, at intet punkt i hverken G eller $\overline{G}$ har tre på hinanden følgende naboer i C i G henholdsvis $\overline{G}$, så vil $G \in \mathcal{F}_{10}$. $\diamond$

Bemærk, at hvis komplementet af en graf ikke indeholder et punkt, som har tre på hinanden følgende naboer i et hul af længde mindst seks, så vil grafen tilhøre familien $\mathcal{F}_{10}$.

Korollar 19.2
Lad G være en genstridig graf, da vil $G \in \mathcal{F}_{10}$. $\diamond$

Bevis
Ifølge korollar 18.2 vil enhver genstridig graf tilhøre $\mathcal{F}_9$. Enhver genstridig graf G vil per definition 13.1 ikke indeholde en balanceret skæv opdeling. Hermed må G ifølge sætning 18.4 ikke indeholde et punkt, som har tre på hinanden følgende nabopunkter i et hul af længde mindst seks. Ved at anvende sætning 18.4 i komplementet må $\overline{G}$ ligeledes ikke indeholde et punkt, som har tre på hinanden følgende nabopunkter i et hul af længde mindst seks, hvormed $G \in \mathcal{F}_{10}$. $\square$

Hermed er mulighederne for udseendet af et minimalt modeksempel skærpet yderligere.
Hovedresultat (xii) fra kapitel 1 vil nu blive vist.

Sætning 19.3
Lad $G \in \mathcal{F}_{10}$. Da indeholder G ikke både et hul af længde mindst seks, og et antihul af længde mindst seks. $\diamond$

Bevis
Lad C være et hul af længde mindst seks i G, og lad D være et antihul af længde mindst seks i G. Lad $W = V(C) \cap V(D)$, $A = V(C) - W$ og $B = V(D) - W$. Lad $|W| = w, |A| = a$ og $|B| = b$. Lad der være p kanter mellem A og W, q kanter mellem B og W, r kanter mellem A og B, samt s kanter, der har begge endepunkter i W. Lad der være p' ikke-kanter mellem A og W, q' ikke-kanter mellem B og W, r' ikke-kanter mellem A og B, samt s' ikke-kanter, der har begge endepunkter i W.

Det ønskes vist, at ethvert punkt i B højst har $\frac{1}{2}(a+w)$ naboer i C. Hvis et punkt $v \in B$ har flere end $\frac{1}{2}(a+w)$ naboer i C, vil enten $\{C, \{v\}\}$ være et hjul af ulige længde, eller der vil findes tre på hinanden følgende nabopunkter til v i C. Dermed må ethvert punkt i B højst have $\frac{1}{2}(a+w)$ naboer i C, så $q + r \leq \frac{1}{2}(a+w)b$. Ethvert punkt i W har også højst to naboer i $A \cup W$, da $W \subseteq V(C)$, og C er et hul i G, så $p + 2s \leq 2w$. Ved at summere fåes

$$p + q + r + 2s \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bw + 2w. \tag{19.1}$$

Ved at gennemgå samme argument i $\overline{G}$ fåes

$$p' + q' + r' + 2s' \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}aw + 2w. \tag{19.2}$$

Hvis der udvælges et punkt i A og et punkt i B, vil der enten være en kant eller ikke være en kant mellem sådanne to punkter. Da der findes ab måder at udvælge to punkter fra A og B, må $r + r' = ab$. Tilsvarende må $p + p' = aw$, og $q + q' = bw$. I W findes der $\frac{1}{2}\binom{w}{2} = \frac{1}{2}w(w-1)$ måder at udvælge to punkter på. Dermed må $s + s' = \frac{1}{2}w(w-1)$. Hermed er

$$p + q + r + 2s + p' + q' + r' + 2s' = ab + aw + bw + w(w-1) \tag{19.3}$$

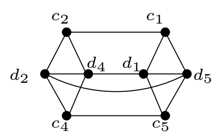
Ved at indsætte (19.1) og (19.2) i (19.3) fåes, at

$$4w \geq \frac{1}{2}aw + \frac{1}{2}bw + w(w-1).$$

Hvilket giver

$$w(a + b + 2w - 10) \leq 0. \tag{19.4}$$

Da $a + w \geq 6$ og $b + w \geq 6$, idet C og D begge har længde mindst seks, følger det, at $w = 0$, hvormed C og D er disjunkte. Dermed gælder der lighed i (19.4), og dermed også lighed i (19.1) og (19.2). Af lighed i (19.1) følger det, at ethvert punkt i D er nabo til netop halvdelen af punkterne i C og omvendt. Lad $C : c_1, \dots, c_m$ og $D : d_1, \dots, d_n$. Da vil mængden af naboer i C for ethvert punkt i D enten være mængden af alle c_i, hvor i enten er lige eller ulige, for ellers dannes enten et hul af ulige længde, eller der haves tre på hinanden følgende nabopunkter. Dette gælder ligeledes, hvis C og D ombyttes.
Antag, at c_1 er nabo til d_1. Dermed findes der kun kanterne $c_1d_1, c_1d_5, c_2d_2, c_2d_4, c_4d_2, c_4d_4, c_5d_1$ og c_5d_5 mellem $\{c_1, c_2, c_4, c_5\}$ og $\{d_1, d_2, d_4, d_5\}$. Delgrafen induceret over disse otte punkter udgør dermed en dobbeltdiamant, hvilket ses på figur 19.1.



Figur 19.1: Udsnit af G indeholdende $\{c_1, c_2, c_4, c_5\}$ og $\{d_1, d_2, d_4, d_5\}$.

Dette er dog i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_{10}$, så antagelsen, om at G indeholder både et hul og et antihul af længde mindst seks, må være forkert. $\square$

Det er hermed vist, at en graf i familien $\mathcal{F}_{10}$ ikke indeholder både et hul og et antihul af længde mindst seks. Da et minimalt modeksempel tilhører familien $\mathcal{F}_{10}$, må det ligeledes ikke indeholde både et hul og et antihul af længde mindst seks.

Kapitel 20

Familien $\mathcal{F}_{11}$

I kapitel 19 blev det vist, at en graf i familien $\mathcal{F}_{10}$ ikke indeholder både et hul og et antihul af længde mindst seks. Dette leder frem til definitionen af familien $\mathcal{F}_{11}$, som er en underfamilie af familien $\mathcal{F}_{10}$, hvor der yderligere stilles krav om, at alle antihuller i grafen har længde fire. For denne familie af grafer er det nu muligt at karakterisere hele grafen og derigennem afgøre, om grafen er perfekt. Det vises, at enhver graf i familien $\mathcal{F}_{11}$ enten er komplet, todelt eller har en balanceret skæv opdeling. Altså vil hovedresultat ($xiii$) fra kapitel 1 blive vist, hvilket er det sidste hovedresultat, og dermed er også familien $\mathcal{F}_{11}$ den sidste familie af grafer.

Definition 20.1 ($\mathcal{F}_{11}$)
Lad $G \in \mathcal{F}_{10}$. Hvis yderligere ethvert antihul i G har længde fire, så vil $G \in \mathcal{F}_{11}$. $\diamond$

I modsætning til de tidligere familier er der ikke symmetri mellem grafer i familien $\mathcal{F}_{11}$ og dens komplement, men på grund af sætning 1.6 har det ikke de store konsekvenser.

Korollar 20.2
Lad G være en genstridig graf, da vil enten $G \in \mathcal{F}_{11}$ eller $\overline{G} \in \mathcal{F}_{11}$. $\diamond$

Bevis
Enhver genstridig graf G vil ifølge korollar 19.2 tilhøre $\mathcal{F}_{10}$. Dermed følger det af sætning 19.3, at G ikke indeholder både et hul af længde mindst seks og et antihul af længde mindst seks. Det vil sige, at hvis G indeholder et hul af længde mindst seks, vil G ikke indeholde et antihul af længde mindst seks, hvormed $G \in \mathcal{F}_{11}$. Hvis G ikke indeholder et hul af længde mindst seks, indeholder $\overline{G}$ ikke et antihul af længde mindst seks, hvormed $\overline{G} \in \mathcal{F}_{11}$. $\square$

For ethvert minimalt modeksempel vil det enten selv tilhøre familien $\mathcal{F}_{11}$, eller dets komplement vil tilhøre familien $\mathcal{F}_{11}$.
De følgende to lemmaer omhandler 2-veje i grafer i familien $\mathcal{F}_{11}$.

Lemma 20.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og lad $P : p_1, \dots, p_n$ være en 2-vej af ulige længde i G. Lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, så p_1 og p_n er komplette til X. Da vil en kant i P være komplet til X. $\diamond$

Lemma 20.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde. Lad $P : p_1, \dots, p_n$ være en 2-vej af længde mindst tre i $G - X$, så p_1 og p_n er komplette til X, og $p_2, \dots, p_{n-1}$ ikke er komplette til X. Da findes der ikke et punkt $y \in V(G) - (X \cup \{p_2, \dots, p_{n-1}\})$, som er komplet til X og nabo til både p_1 og p_2. $\diamond$

Lemma 20.5
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og lad $X_1, X_2, X_3 \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme mængder, hvor $\{X_1, X_2\}$, $\{X_1, X_3\}$ og $\{X_2, X_3\}$ alle er komplette par. Lad $F \subseteq V(G) - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ være en sammenhængende mængde, så F indeholder et punkt, der er komplet til X_i, for $i = 1, 2, 3$. Da findes der et punkt i F, som er komplet til to af mængderne X_1, X_2 og X_3. $\diamond$

Bevis
Antag, at intet punkt i F er komplet til to af mængderne X_1, X_2 og X_3. Det kan antages, at F er minimal med hensyn til, at F er sammenhængende, og der findes et punkt, som er komplet til X_i.

Påstand: *Hvis $P : p_1, \dots, p_n$ er en 2-vej i F, hvor p_1 er det eneste punkt fra P, som er komplet til X_1, og p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til X_2, så er n lige.*

Da intet punkt i F er komplet til mere end én af mængderne X_1, X_2 og X_3, vil $n \geq 2$. Antag, at n er ulige. Da følger af lemma 14.4, at $n = 3$, samt at der findes en anti 2-vej Q_{X_1} mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X_1, og en anti 2-vej Q_{X_2} mellem p_1 og p_2, hvis indre tilhører X_2. Desuden har præcis en af Q_{X_1} og Q_{X_2} ulige længde. Men da er $p_1, Q_{X_2}, p_2, Q_{X_1}, p_3$ et antihul af længde mindst seks, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_{11}$. Det vil sige, at n er lige, og påstanden er vist.

Der er nu tre muligheder for udseendet af F:

(i) Der findes et unikt punkt $v_i \in F$, så v_i er komplet til X_i, for $i = 1, 2, 3$. Der findes et punkt u, hvor $u \notin \{v_1, v_2, v_3\}$ og tre 2-veje P_1, P_2 og P_3 i F, alle af længde mindst en, så P_i har endepunkter u og v_i, for $i = 1, 2, 3$. Desuden vil $V(P_i - \{u\})$ være disjunkt fra $V(P_j - \{u\})$, for $1 \leq i < j \leq 3$, og der findes ingen kanter mellem $V(P_i - \{u\})$ og $V(P_j - \{u\})$.

(ii) Der findes et unikt punkt v_i i F, så v_i er komplet til X_i, for $i = 1, 2, 3$. Der findes tre 2-veje P_1, P_2 og P_3 og tre punkter u_1, u_2 og u_3 i F, så P_i har endepunkter v_i og u_i, for $i = 1, 2, 3$, og så $V(P_i)$ er disjunkt fra $V(P_j)$, for $1 \leq i < j \leq 3$. Desuden er kanten $u_i u_j$ den eneste kant mellem $V(P_i)$ og $V(P_j)$.

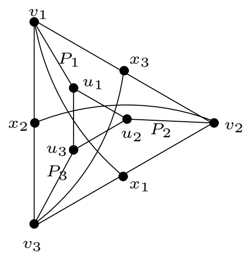
(iii) Der findes et unikt punkt v_i i F, så v_i er komplet til X_i, for $i = 1, 2$, og der findes en 2-vej P i F mellem v_1 og v_2, som indeholder mindst et punkt, der er komplet til X_3.

Det vises nu, at (i)-(iii) er de eneste muligheder for udseendet af F. Tag udgangspunkt i en 2-vej K mellem v_1 og v_2, hvor v_i er komplet til X_i, for $i = 1, 2$. Hvis der i K findes punkter, der er komplette til X_3, er (iii) opfyldt. Antag, at K ikke indeholder punkter, der er komplette til X_3, og $v_3 \notin V(K)$ er komplet til X_3. Hvis v_3 har én nabo i K, så er (i) opfyldt. Hvis v_3 har to naboer i K, så er (ii) opfyldt. Hvis v_3 har mindst tre naboer i K, haves en modstrid med minimaliteten af F. Lad $u_3 \notin V(K)$ være et punkt, der har én nabo i K, og som er forbundet via en 2-vej P_3 til v_3, hvor $V(P) \cap V(K) = \emptyset$. Da er ($i$) opfyldt. Hvis u_3 har to naboer i K, er (ii) opfyldt. Hvis u_3 har mindst tre naboer i K, opnåes en modstrid med minimaliteten af F. Hvis der findes en kant mellem det indre af P_3 og K, opnåes en modstrid med minimaliteten af F. Altså er (i)-(iii) de eneste muligheder for udseendet af F.

Antag, at (i) gælder.
To af de tre 2-veje må have samme paritet, lad det være P_1 og P_2. Da vil v_1, P_1, u, P_2, v_2 være en 2-vej af lige længde i F, hvor v_1 er det eneste punkt, der er komplet til X_1, v_2 er det eneste punkt, som er komplet til X_2, hvilket er i modstrid med påstanden. Dermed kan (i) ikke være opfyldt.

Antag, at (ii) gælder.
Da v_1 er det eneste punkt fra F, der er komplet til X_1, vil punkterne u_2 og u_3 ikke være komplette til X_1. Der findes derfor en anti 2-vej Q_1 mellem u_2 og u_3, hvis indre tilhører X_1. Tilsvarende findes en anti 2-vej Q_2 mellem u_1 og u_3, hvis indre tilhører X_2, og en anti 2-vej Q_3 mellem u_1 og u_2, hvis indre tilhører X_3. Hvis 2-vejene P_1, P_2 og P_3 alle har længde nul, bliver $u_i = v_i$, for $i = 1, 2, 3$, og dermed danner Q_3, Q_1 og Q_2 et antihul af længde mindst seks, hvilket danner en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_{11}$. Derfor må mindst én af P_1, P_2 eller P_3 have længde mindst en. Lad det være P_1, så $v_1 \neq u_1$. Da v_1, u_2, Q_1, u_3 er et antihul, må Q_1 have længde to, idet $G \in \mathcal{F}_{11}$. Da

punkterne u_1 og u_3 ikke er komplette til X_1, findes der en anti 2-vej Q_1' mellem u_1 og u_3, hvis indre tilhører X_1. Da Q_1' og Q_2 danner et antihul, må både Q_1' og Q_2 have længde to. Ligeledes må Q_3 have længde to, da u_1 og u_2 ikke er komplette til X_2. Lad x_i være midterpunktet i Q_i, for $i = 1, 2, 3$.



Figur 20.1: Udsnit af G indeholdende P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 samt Q_3.

Dermed er mængden $H : (V(P_1 - \{u_1\})) \cup (V(P_2 - \{u_2\})) \cup (V(P_3 - \{u_3\})) \cup \{x_1, x_2, x_3\}$ sammenhængende. Desuden fanger H trekanten $\{u_1, u_2, u_3\}$, og intet punkt i H er nabo til to punkter i trekanten. Ifølge lemma 16.5 må H derfor indeholde et spejlbillede af $\{u_1, u_2, u_3\}$. Da en trekant og dens spejlbillede udgør et antihul af længde seks, er dette i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_{11}$. Dermed kan (ii) ikke være opfyldt.

Antag, at (iii) gælder.
Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være 2-vejen mellem v_1 og v_2, det vil sige, at $v_1 = p_1$, og $v_2 = p_n$. Da P indeholder et punkt, som er komplet til X_3, og p_1 samt p_n ikke er komplette til X_3, må $n \geq 3$. Ifølge påstanden er n lige, og dermed må $n \geq 4$. Vælg i og j, for $2 \leq i \leq j \leq n-1$, så p_i samt p_j er komplette til X_3, hvor i vælges mindst muligt, og j vælges størst muligt. Da 2-vejene $p_1, \ldots, p_i$ og $p_j, \ldots, p_n$ opfylder påstanden, må i være lige og j ulige. Altså er $i \neq j$. Dermed har $p_i, \ldots, p_j$ ulige længde, og dens endepunkter er komplette til X_3. Ifølge lemma 20.3 indeholder $p_i, \ldots, p_j$ en kant, som er komplet til X_3, lad det være kanten $p_k p_{k+1}$, hvor $i \leq k \leq j-1$. Da p_k samt p_{k+1} ikke er komplette til hverken X_1 eller X_2, findes der en anti 2-vej Q_1 mellem p_k og p_{k+1}, hvis indre tilhører X_1, og en anti 2-vej Q_2, hvis indre tilhører X_2. Da Q_2 og Q_1 danner et antihul, må både Q_1 og Q_2 have længde to, da $G \in \mathcal{F}_{11}$. Altså er $Q_1 : p_k, x_1, p_{k+1}$ og $Q_2 : p_k, X_2, p_{k+1}$. Det vil sige, at der findes et $x_i \in X_i$, for $i = 1, 2$, så x_i er ikke-nabo til både p_k og p_{k+1}.
Lad R være en 2-vej mellem p_{k-1} og p_{k+2}, hvis indre tilhører $V(P - \{p_k, p_{k+1}\}) \cup \{x_1, x_2\}$. En sådan 2-vej vil findes, da $R : p_{k-1}, \ldots, p_1, x_1, x_2, p_n, \ldots, p_{k+2}$ er en mulighed, da X_1 og X_2 er komplette til hinanden. Her må R anvende mindst et af x_1 eller x_2. Da vil $C : p_{k+2}, R, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}$ være et hul af længde mindst seks, hvor mindst en kant i C er komplet til X_3, og yderligere mindst et punkt er komplet til X_3, da R benytter mindst et af x_1 eller x_2. Ifølge korollar 2.4 vil C indeholde et lige antal kanter, som er komplette til X_3, hvilket vil sige, at C indeholder mindst to kanter, som er komplette til X_3. Da $G \in \mathcal{F}_{11}$, kan C ikke indeholde tre på hinanden følgende punkter, som er komplette til X_3. Det vil sige, at de kanter i C, som er komplette til X_3, er disjunkte. Men da er $\{C, X_3\}$ et hjul af ulige længde, hvilket ikke kan findes i G, idet $G \in \mathcal{F}_{11}$. Dermed kan (iii) heller ikke være opfyldt.
Det vil sige, at antagelsen, om at F ikke indeholder et punkt, der er komplet til to af mængderne X_1, X_2 og X_3, må være forkert. □

Lemma 20.6
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, så $\{X, Y\}$ udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \geq 2$, så p_1 er det eneste punkt fra P, som er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, der er komplet til Y. Da findes der ikke et punkt $z \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$, som er komplet til $X \cup Y$ og ikke-nabo til både p_1 og p_n. ◇

Lemma 20.7
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad C være et hul i G. Hvis et punkt $z \in V(G) - V(C)$ har to naboer i C, som indbyrdes er naboer, da har z en tredje nabo i C, og C har længde fire. Specielt indeholder G ikke en anti 2-vej af længde mindst fire. $\diamond$

Lemma 20.8
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $X_1, X_2, X_3 \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som er komplette til hinanden. Lad $F \subseteq V(G) - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ være en sammenhængende mængde, så der for mindst to af mængderne X_1, X_2 og X_3 gælder, at ethvert punkt i X_i, for $i \in \{1, 2, 3\}$, har en nabo i F. Da er et punkt i F komplet til to af mængderne X_1, X_2 og X_3. $\diamond$

Bevis
Antag, at F ikke indeholder punkter, der er komplette til to af mængderne X_1, X_2 og X_3, og vælg X_1, X_2, X_3 og F, så $|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup F|$ er mindst mulig.

Antag, at F indeholder et punkt, der er komplet til X_1, og et punkt, der er komplet til X_2. Her er mængderne X_1 og X_2 valgt vilkårligt, så mængden X_3 kan ligeså godt vælges. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en minimal 2-vej i F, så p_1 er komplet til X_1, og p_n er komplet til X_2. Da F er valgt mindst mulig, må $F = V(P)$. Idet F er valgt, så ethvert punkt i X_i, for $i = 1, 2, 3$, har en nabo i F, følger det af minimaliteten af F, at der findes et punkt $x_1 \in X_1$, så p_1 er den eneste nabo til x_1 i F, og et punkt $x_2 \in X_2$, så p_n er den eneste nabo til x_2 i F. Dette skyldes, at hvis ethvert punkt i X_i har mindst to naboer i F, kan F vælges mindre. Det vil sige, at i hvert fald ét punkt kun har en nabo i F. Hermed er $C : x_1, p_1, \ldots, p_n, x_2$ et hul i G, idet X_1 er komplet til X_2. Ved at anvende lemma 20.7 på C og et vilkårligt punkt $x_3 \in X_3$ fåes, at C har længde fire, det vil sige, at $n = 2$. Desuden følger af lemma 20.7, at x_3 yderligere er nabo til et af p_1 eller p_2. Da det er antaget, at intet punkt i F er komplet til to af mængderne X_1, X_2 og X_3, vil punkterne p_1 samt p_2 ikke være komplette til X_3, hvormed $|X_3| \geq 2$. Ydermere vil det sige, at der findes en anti 2-vej $Q : p_1, q_1, \ldots, q_m, p_2$ mellem p_1 og p_2, hvis indre tilhører X_3. Da p_1 er den eneste nabo til x_1 i F, er p_2 ikke-nabo til x_1, og p_1 er ikke-nabo til x_2, idet p_2 er den eneste nabo til x_2 i F. Dermed er x_2, p_1, Q, p_2, x_1 en anti 2-vej af længde mindst fire. Dette kan dog ifølge lemma 20.7 ikke forekomme, og en modstrid er opnået. Det vil sige, at antagelsen, om at F indeholder et punkt, der er komplet til X_1, og et punkt, der er komplet til X_2, er forkert.

Det vil sige, at F kun indeholder punkter, der er komplette til én af mængderne X_1, X_2 og X_3, lad det være X_3. Altså er intet punkt i F komplet til X_1 eller X_2. Her er F konstrueret, så det for to af mængderne X_1, X_2 og X_3 vil gælde, at ethvert punkt deri har en nabo i F. Lad X_1 være en af de mængder. Idet F ikke indeholder et punkt, der er komplet til X_1, men indeholder en nabo til ethvert punkt i X_1, må $|X_1| \geq 2$. Vælg to punkter $x_1, x_1' \in X_1$, så $x_1 \neq x_1'$, og $X_1 - x_1$ samt $X_1 - x_1'$ begge er antisammenhængende. På grund af minimaliteten af X_1 vil F indeholde et punkt f, som er komplet til to af mængderne $X_1 - x_1, X_2$ og X_3. Da intet punkt i F er komplet til X_2, må f være komplet til $(X_1 - x_1) \cup X_3$. Tilsvarende er et punkt $f' \in F$, hvor $f' \neq f$, komplet til $(X_1 - x_1') \cup X_3$. Da F er sammenhængende, findes der en 2-vej P i F mellem f og f'. Da alle punkter i $X_1 \cup X_3$ har en nabo i $V(P)$, må $F = V(P)$ på grund af minimaliteten af F. Desuden medfører minimaliteten af F, at f' er den eneste nabo til x_1 i F, da alle punkter i $(X_1 - x_1) \cup X_3$ er naboer til f. Tilsvarende er f den eneste nabo til x_1' i F. Da X_1 er antisammenhængende, findes der en anti 2-vej Q mellem x_1 og x_1', som tilhører X_1. Bemærk, at hvis $|X_1| = 2$, så er længden af Q lig en. Da f har en ikke-nabo $x_2 \in X_2$, vil der enten findes et hul $x_2, x_1, f', P', f, x_1'$, eller findes et hul $x_2, x_1', f, \widetilde{f}, x_2$, hvor $\widetilde{f}$ er den første nabo til x_2 i f, P, f'. Da hvert $x_3 \in X_3$ er komplet til $X_1 \cup X_2$, vil x_3 have to indbyrdes naboer i begge huller. Da følger af lemma 20.7, at G ikke indeholder en anti 2-vej af længde mindst fire. Da x_2, f, x_1, Q, x_1' er en anti 2-vej i G, må Q have længde en, da anti 2-vejen ellers har længde mindst fire. Det vil sige, at x_1 ikke er nabo til x_1'. På grund af minimaliteten af F kan det antages, at der findes et punkt x_2', som ikke har naboer i $F - f$. Hvis yderligere f ikke er nabo til x_2', vil $x_2', x_1, f', P, f, x_1'$ være et hul af længde mindst seks, hvor ethvert punkt i X_3 har tre på hinanden følgende naboer i hullet, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_{11}$. Derfor må f være nabo til x_2'. Da f' er den eneste nabo til x_1 i F, og f er den eneste nabo til x_1' i F, er f' og x_1' ikke-naboer, og f samt x_1 er ikke-naboer. Da x_2' ikke har naboer i $F - f$, er x_2' og f' ikke-naboer. Idet x_2', f', x_1', x_1, f ikke må være en anti 2-vej af længde fire, er f og f' ikke-naboer, hvormed P har længde mindst to. Hermed er f, P, f', x_1, x_2' et hul af længde mindst seks, og x_1' har to naboer i hullet, som indbyrdes er naboer, hvilket er i modstrid med lemma 20.7, da x_1' ikke har yderligere naboer i hullet. Dermed må antagelsen, om at F ikke indeholder punkter, der er komplette til to af mængderne X_1, X_1 og X_3, være forkert. $\square$

Hovedresultat $(xiii)$ fra kapitel 1 vil nu blive vist.

Sætning 20.9
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$. Da vil G enten være en komplet graf, en todelt graf eller have en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Antag, at G ikke indeholder en skæv opdeling, og antag, at G ikke er todelt. Hvis G ikke er todelt, men samtidig er en Berge graf, må der i G findes en kreds af længde tre. Derfor kan der vælges antisammenhængende mængder $X_1, \ldots, X_k$, hvor $k \geq 3$, som alle er komplette til hinanden, og sådanne kan vælges, da de tre punkter i trekanten vælges i hver sin antisammenhængende mængde. Vælg disse, så $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ er maksimal. Lad N være mængden af alle punkter i G, som er komplette til X_k. Hvis $N \cup X_k = V(G)$, vil der ifølge lemma 15.4 enten gælde, at G er komplet, hvormed sætningen er opfyldt, eller $\overline{G}$ består af to komponenter, hvormed G er todelt, hvilket er i modstrid med antagelsen. Det kan derfor antages, at $N \cup X_k \neq V(G)$. Ifølge lemma 15.4 vil $V(G) - (X_k \cup N)$ være sammenhængende, så lad $F = V(G) - (X_k \cup N)$. Da $|N| > 1$, idet $X_1, \ldots, X_{k-1} \subseteq N$, vil desuden ethvert punkt i N have en nabo i F. Specielt vil punkterne i $X_1 \cup X_2$ alle have en nabo i F. Ifølge lemma 20.8 vil et punkt $v \in F$ være komplet til en af mængderne X_1, X_2 og X_3. Da dette argument kan gennemføres for alle k mængder, kan det antages, at v er komplet til $X_1, \ldots, X_i$, hvor $2 \leq i \leq k$, og ikke komplet til $X_{i+1}, \ldots, X_k$. Lad $X_{i+1}' = X_{i+1} \cup \cdots \cup X_k \cup \{v\}$. Da vil mængderne $X_1, \ldots, X_i, X_{i+1}'$ give en modstrid med maksimaliteten af $X_1, \ldots, X_k$. $\square$

Det er hermed vist, at en graf i familien $\mathcal{F}_{11}$ vil være komplet, todelt eller have en balanceret skæv opdeling. Det vil altså sige, at enhver genstridig graf er en komplet graf. Hermed er det vist, at ved at udelukke strukturer fra det minimale modeksempel fåes til sidst en familie af grafer, hvis udseende kan bestemmes. Nu kan beviset for den stærke perfekte graf sætning fremsættes, hvilket gøres i næste kapitel.

Kapitel 21

Afslutning

I dette kapitel vil den stærke perfekte graf sætning blive vist. Beviset sammenholder resultater fra denne rapport med af andre viste resultater. Først vises, at en genstridig graf eller dens komplement må være en komplet graf.

Korollar 21.1
Lad G være en genstridig graf, da vil enten G eller $\overline{G}$ være en komplet graf. ◇

Bevis
Hvis G er en genstridig graf, vil G eller $\overline{G}$ ifølge korollar 20.2 tilhøre $\mathcal{F}_{11}$. Da vil enten G eller $\overline{G}$ ifølge sætning 20.9 være en komplet graf, idet en genstridig graf per definition ikke har en balanceret skæv opdeling eller en todelt graf. □

Heraf kan det konkluderes, at et minimalt modeksempel er komplet, eller komplementet er komplet. Ved brug at sætning 1.6 er det nu vist, at et minimalt modeksempel ikke findes, da komplette grafer er perfekte.

21.1 Beviset for den stærke perfekte graf sætning

Det er nu muligt at fremsætte beviset for den stærke perfekte graf sætning.

Sætning 21.2
En graf G er perfekt, hvis og kun hvis G er en Berge graf. ◇

Bevis
For at vise, at en perfekt graf er en Berge graf, antages det, at G er perfekt, og G ikke er en Berge graf. Da G ikke er en Berge graf, findes der et hul C_{2k+1} af ulige længde eller et antihul D_{2k+1} af ulige længde. Da $\chi(C_{2k+1}) = 3$, $\omega(C_{2k+1}) = 2$, $\chi(D_{2k+1}) = k + 1$, og $\omega(D_{2k+1}) = k$, haves i begge tilfælde en modstrid med, at G er perfekt, da det kromatiske tal og kliketallet for en perfekt graf er ens for enhver induceret delgraf. Dermed er det vist, at en perfekt graf er en Berge graf.

Antag, at G er en Berge graf, men ikke er en perfekt graf. Vælg G, så $|V(G)|$ er mindst mulig, hvormed G er et minimalt modeksempel. Fra sætning 1.6 er $\overline{G}$ også et modeksempel.

Ifølge sætning 1.12 er G ikke en elementær graf, og ifølge sætning 3.15 har G ikke en balanceret skæv opdeling. Det er vist i [Cornuéjols & Cunningham, 1985, side 248], at et minimalt modeksempel ikke indeholder et 2-vedhæng, og det er vist i [Chvátal & Sbihi, 1987, side 128], at et minimalt modeksempel ikke indeholder et 6-vedhæng.

Hvis G indeholder en induceret delgraf, der er isomorf med $L(K_{3,3}-e)$, indeholder G en optræden af K_4, idet $K_{3,3} - e$ er en todelt underdeling af K_4. Per korollar 9.31 indeholder et minimalt modeksempel ikke en optræden af K_4, så derfor indeholder G ikke $L(K_{3,3} - e)$ som induceret delgraf. Da G ikke indeholder en optræden af K_4, følger det desuden af sætning 12.36, at hvis G indeholder en aflang prisme som induceret delgraf, da er G ikke et minimalt modeksempel.
Ifølge sætning 14.10 indeholder et minimalt modeksempel ikke en dobbeltdiamant som induceret delgraf.
Da G ifølge sætning 3.15 ikke indeholder en balanceret skæv opdeling, følger det af sætning 4.4, at G ikke indeholder en skæv opdeling.

Et minimalt modeksempel kan altså ikke være en elementær graf, indeholde et 2-vedhæng, indeholde et 6-vedhæng eller have en balanceret skæv opdeling, og dermed vil G ifølge definition 13.1 være en genstridig graf. Det vil sige, at G ifølge korollar 20.2 tilhører familien $\mathcal{F}_{11}$, og dermed vil G ifølge sætning 20.9 enten være en komplet graf, en todelt graf eller have en balanceret skæv opdeling. Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at G ikke er perfekt, så derfor kan G ikke være et minimalt modeksempel. $\square$

Definitionsliste

Litteratur

[Bondy & Murty, 1976] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R.: *Graph Theory with Applications*, The MacMillan Press LTD, 1976, (SBN 333 17791 6).

[Chartrand & Lesniak, 1996] Chartrand, Gary & Lesniak, Linda: *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, 1996, (ISBN 0 412 98721 x).

[Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour & Robin Thomas: *The Strong Perfect Graph Theorem*, Submitted for publication.

[Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2003] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour & Robin Thomas: *The Strong Perfect Graph Theorem*, Submitted for publication.

[Chvátal, 1985] Chvátal, V.: *Star-Cutsets and Perfect Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, volume 39, 1985.

[Chvátal & Sbihi, 1987] Chvátal, V. & Sbihi, N.: *Bull-Free Berge Graphs Are Perfect*, Graphs and Combinatorics, volume 3, 1987, (ISSN 0911-0119).

[Cornuéjols & Cunningham, 1985] Cornuéjols, G. & Cunningham, W.H.: *Compositions for perfect graphs*, Discrete Mathematics, volume 55, 1985.

[Lovász, 1984] Lovász, L.: *Normal Hypergraphs and the weak perfect graph conjecture*, Annals of Discrete Mathematics, volume 21, 1984.

[Alfonsín & Reed, 2000] Alfonsín, Jorge L. Ramírez & Reed, Bruce A.: *Perfect Graphs* , Wiley, 2000, (ISBN 0-471-48970-0).

[Roussel & Rubio, 2000] Roussel, F. & Rubio, P.: *About Skew Partitions in Minimal Imperfect Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, volume 83, 2001.