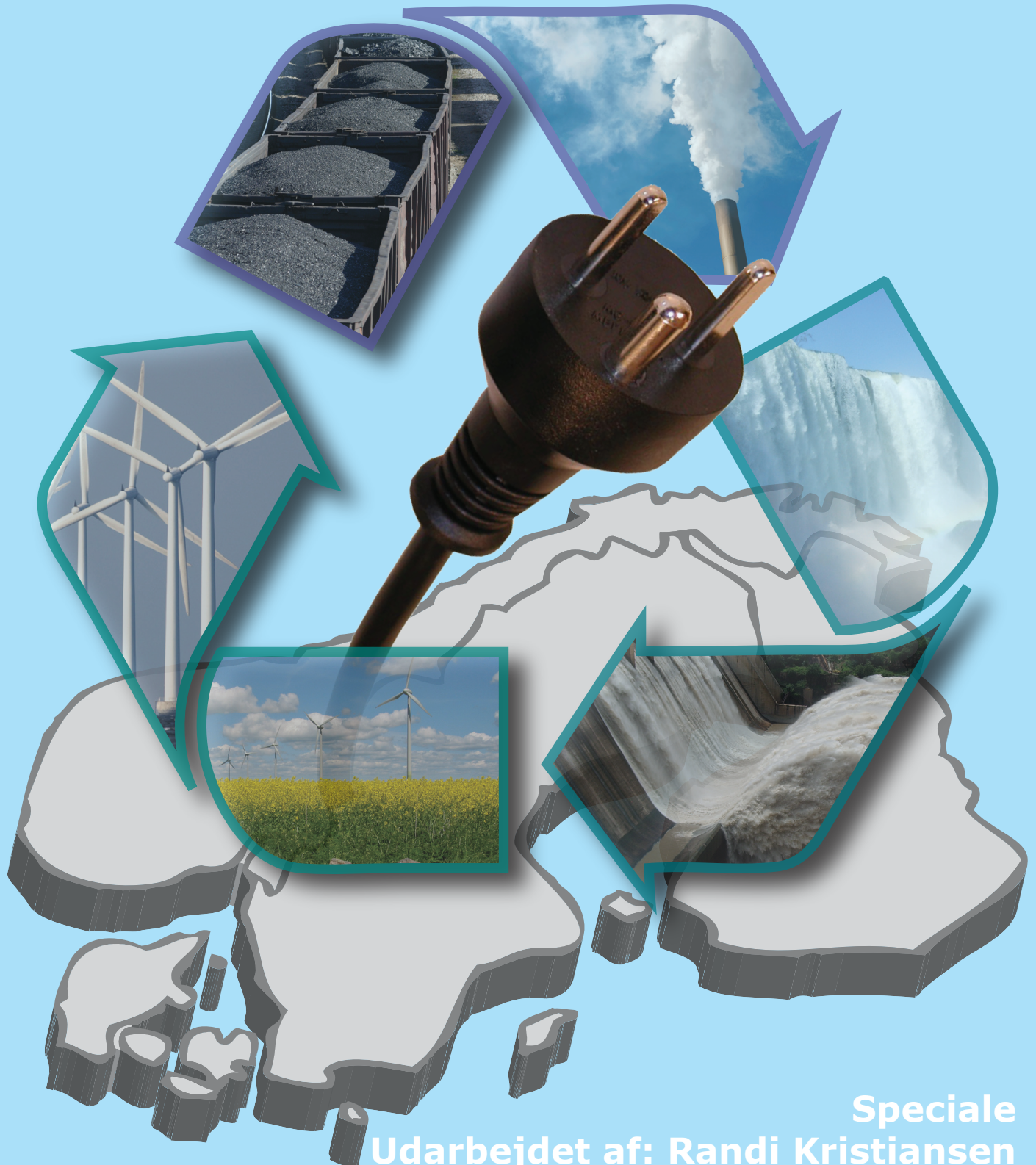


Modellering af den Nordiske spotpris på elektricitet



Speciale
Udarbejdet af: Randi Kristiansen
Oecon. 10. semester
Samfundsøkonomi, Aalborg Universitet



Titelblad

Uddannelse: Samfundsøkonomi, oecon 10. semester 2011

Uddannelsessted: Aalborg Univeristet

Udarbejdet af: Randi Kristiansen

Titel: Modellering af den Nordiske spotpris på elektricitet

Vejleder: Rasmus Waagepetersen

Afleveringsdato: 31 maj 2011

Oplag: 4

Sideantal: 75 sider inklusiv bilag og data cd

Randi Kristiansen
Studienummer: 20062862

Indholdsfortegnelse

1	Summary	7
2	Indledning.....	9
3	Tidligere forskning	11
	3.1 Case study af tidligere forskning – Bunn 2010	12
	3.2 Case study af tidligere forskning – Jong 2006	12
4	Det nordiske elektricitetsmarked	15
	4.1 Dannelse af spotprisen	15
5	Produktionsmetoder	16
	5.1 Balancemarkedet	18
6	Systemprisen	21
7	Overvejelser omkring modellering.....	27
8	Teoretisk redegørelse for modeltyperne.....	29
	8.1 ARCH-GARCH modeller.....	29
	8.2 Jump-Diffusion modeller.....	29
9	Simpel modellering via OLS.....	33
	9.1 Valg af variable	33
	9.2 Stationaritet	38
10	ARCH-GARCH model.....	43
	10.1 Simulering af GARCH model	48
11	Jump-diffusion model.....	51
	11.1 Bestemmelse af spikes	51
	11.2 Simulering af jump-diffusion model	54
12	Sammenligning af modellerne	57
	12.1 Simulering af februar 2011.....	57
	12.2 Teoretisk redegørelse for optioner	63
	12.3 Prisfastsættelse af asiatisk option	65
13	Konklusion.....	71
14	Litteraturliste	73
	14.1 Artikler.....	73
	14.2 Bøger	73
	14.3 Publikationer.....	73
15	Bilag 1 – Simulering af GARCH model.....	74
16	Bilag 2 – Simulering af Jump-diffusion model.....	75

Figurliste

Figur 1 - Dannelse af spotpris	16
Figur 2 - Dannelse af spotpris med yderligere hydrokraft	17
Figur 3 - Udvikling i spotprisen fra 30/11 2009 til 31/1 2011	22
Figur 4 - Ugeprofil.....	22
Figur 5 - Årsprofil	23
Figur 6 - Tæthedsfunktion for spotprisen.....	24
Figur 7 - Scatterplot Spot vs. lag et spot	33
Figur 8 - Scatterplot spot vs. lag to spot.....	34
Figur 9 - Scatterplot spot vs. lag syv spot	35
Figur 10 - Gennemsnits temperatur.....	36
Figur 11 - Scatterplot spotpris vs. temperatur	36
Figur 12 - Scatterplot (spotpris,hydrobalance).....	37
Figur 13 - Korellogram af residualer for regression 1	39
Figur 14 - Residualer for regression 2.....	40
Figur 15 - Residualt histogram for regression 2.....	41
Figur 16 - Fitted vs. faktiske værdier for GARCH(1,1).....	46
Figur 17 - Residualer for GARCH(1,1).....	47
Figur 18 - Betinget varians GARCH(1,1)	47
Figur 19 - Scatterplot af residualer vs. fitted værdier	48
Figur 20 - Simuleret GARCH model	49
Figur 21 - Residualer jump-model	52
Figur 22 - Residualer uden spikes	53
Figur 23 - Histogram over residualer uden spikes	53
Figur 24 - Simuleret Jump-diffusion model	54
Figur 25 - Faktisk spotpris februar 2011	57
Figur 26 - Simuleret spotpris via GARCH model.....	58
Figur 27 - 95 % konfidensinterval for GARCH simulering	58
Figur 28 - Simuleret spotpris via jump-diffusion model	59
Figur 29 - 95 % konfidensinterval for GARCH simulering	59
Figur 30 - QQ plot for den faktiske spotpris	60
Figur 31 - QQ plot for spotpris simuleret via GARCH model.....	61
Figur 32 - QQ plot for spotpris simuleret via Jump-diffusion model	62
Figur 33 - Payoff diagram for en call option	63
Figur 34 - Payoff diagram for en put option	64
Figur 35 - Empirisk tæthedsfunktion	67



1 Summary

The market for electricity has until recently been controlled by governments around the world. The reason why electricity historically has been controlled by governments is in part because of the need for security of supply. If there is a lack of electricity this has a consequence for the entire real economy. Without power the real economy is simply not able to produce goods.

However in recent years electricity markets have been liberalised. The liberalization has the consequence, that electricity prices have become increasingly volatile. It is furthermore generally agreed that electricity prices experience more volatility than other commodities. The high volatility is a consequence of the simultaneous nature of electricity. Electricity cannot efficiently be stored, which is why electricity must be produced the same time it is used. If the demand for electricity at some time is unexpectedly high, the price of electricity will spike. The same thing happens if for some reason the production of electricity experiences difficulties.

This volatile price makes it difficult to model the price of electricity compared to other commodities. Since electricity is traded on a financial market like other commodities there is a need for modelling the price of electricity. This need stems for example from the need to value derivatives on electricity. The valuation of derivatives is sensitive to the underlying model of the asset, which is why it is necessary to model the price of electricity as correctly as possible. This thesis will therefore explore different ways of modelling the price of electricity in the Scandinavian countries. The market for electricity can be categorized as regional. An example of a regional market is the Nordic market. The Nordic market consists of Finland, Norway, Sweden and Denmark. The electricity is predominantly produced by hydropower in the Nordic countries. This results in a lower volatility for the spot price in the Nordic countries compared to other countries who don't have hydropower. The thesis finds, that the price of electricity in the Nordic region also has high volatility, and experiences volatility clusters. Spikes are also present in the Nordic electricity price. In this thesis two types of models will be explored for modelling the Nordic electricity price. First a GARCH(1,1) is specified, and simulated. Later a jump-diffusion model with spikes following a Poisson distribution is specified and simulated. To decide which of the models is best at modelling the price of electricity the valuation of an Asian option is used. Asian options are often used in electricity markets, because various subsidies depend on the average price of electricity in a given time period.

After comparing the two models I find that, the best model for the Nordic spotprice is a jump-diffusion model. The jump-diffusion model is better at estimating the value of an option, which is the purpose the model is intended for.

INDLEDNING

2 Indledning

Elektricitet er en vare, som har været handlet på liberaliserede markeder i relativt kort tid sammenlignet med andre varer så som korn, kakao, olie og gas. Elektricitet kan tilmed ikke lagres, hvilket medfører, at handlen med elektriciteten i spotmarkedet bliver afhængig af simultant forbrug og produktion. Handlen med elektricitet på eksempelvis forwardkontrakter er ligeledes afhængig af produktion og forbrug. Ved forwardkontrakterne er det imidlertid forventningerne til den fremtidige produktion samt forbrug, der er afgørende for prisen.

Markedet for elektricitet har siden liberaliseringen udviklet sig til et finansielt marked i stil med andre finansielle markeder. Der kan handles forwards, futures og optioner med elektricitet som det underliggende aktiv. Markedet er ligeledes blevet underlagt forskellige tilsyn, som også er gældende for andre finansielle markeder. Dette skyldes, at manipulation med markedet for elektricitet har fysiske konsekvenser for realøkonomien. Disse konsekvenser kunne blandt andet ses i Californien, USA, i 2000 og 2001. I løbet af denne tidsperiode oplevede Californien 38 såkaldt rullende blackouts. Dette resulterede i, at Californien i perioder var uden strøm, hvilket har påvirkning på hele realøkonomiens produktion. Disse blackouts var et resultat af et dereguleret marked, som blev manipuleret af tradere. Tradere spekulerede i at opfordre kræftværker til at stoppe produktionen af elektricitet, hvorefter traderne kunne sælge elektricitet til meget højere priser end ellers. At prisen på elektricitet blev højere som følge af produktionsstop skyldes, at prisen på et givet tidspunkt er afhængig af den aktuelle produktion. Der er som før nævnt ingen lagre af elektricitet, som kan gå ind og kompensere ved eventuelle produktionsstop.

Da elektricitet er grundlæggende nødvendig for realøkonomien, er det vigtigt at forstå de mekanismer, der ligger til grund for markedet. Forståelsen for markedet er vigtigt på et samfundsmæssigt plan så vel som for den individuelle virksomhed, der agerer i markedet. Den samfundsmæssige forståelse kan hjælpe til at regulere markedet, således at manipulation, der har konsekvenser for realøkonomien, kan forbygges. Denne regulering bør være på baggrund af forståelse for markedet, således at den fri konkurrence ikke hæmmes, men at markedet derimod får optimale betingelser for at udvikle sig.

Den private virksomhed har interesse i at kende mekanismerne i markedet, således at de i bund og grund kan tjene penge. Det er imidlertid ikke muligt at agere konkurrencedygtigt i markedet, hvis ikke agenterne forstår markedet. Specielt markedet for elektricitet er relativt kompliceret, og det er relativt nyt. Markedet for elektricitet må ligeledes siges at være delt op i regionale markeder, hvilket nødvendiggør forståelse for det specifikke marked, der ageres i.

Interessen for forskningen i elektricitetsmarkedet har i de senere år været stigende. Det er specielt spotprisen på elektricitet, som forskes i. Dette skyldes, at spotprisen på elektricitet i høj grad er anderledes en spotprisen på andre varer. Forskningen har koncentreret sig om at modellere spotprisen, hvilket ikke med rimelighed kan gøres ved simple statistiske metoder. Jeg vil ligeledes søge at modellere spotprisen. Jeg vil tage udgangspunkt i det regionale nordiske marked og de specifikke karakteristika for dette marked. Specialet vil være opbygget som følgende. Først beskrives tidligere forskning og det nordiske elmarked. Derefter præsenteres data, samt undersøges for specifikke karakteristika. Næst udforskes forskellige modellers evne til at modellere spotprisen. Endeligt sammenlignes modellerne for at afgøre, hvilken model, der bedst modellerer spotprisen.

TIDLIGERE FORSKNING

3 Tidligere forskning

Siden elektricitetsmarkederne blev liberaliseret, er der forsket en del i spotprisen på elektricitet. Forskningen startede imidlertid først for alvor efter år 2000. Blandt forskere er det et relativt anerkendt fænomen, at prisen på elektricitet udviser langt større volatilitet end på andre finansielle markeder. Denne høje volatilitet skyldes blandt andet, at spotprisen på elektricitet generelt udviser meget store spikes. Det er ligeledes anerkendt, at disse spikes fremkommer som følge af elektricitetens karakteristika. Disse karakteristika er elektricitets simultane natur, hvor elektriciteten skal anvendes samtidig med, at den bliver produceret. Denne simultane natur kombineret med de manglende muligheder for lagring af elektriciteten medfører de så kaldte spikes. Disse spikes indebærer udfordringer i modelleringen af spotprisen, da spotprisen ikke med rimelighed kan antages at kunne modelleres med simple autoregressive modeller alene.

Den tidlige forskning havde to udgangspunkter. Det ene udgangspunkt var en mean-reverting model. Udgangspunktet i denne model skyldes, at den er god til at modellere andre råvarer så som gas og olie. Forskellen på disse råvarer og elektricitet er imidlertid muligheden for lagring. Olie kan lagres i tønder. Gas har også mulighed for lagring enten i underjordiske lagre eller i form af LNG. LNG er en proces, hvor gas gøres flydende, således at den er nemmere at transportere over store afstande. Udover lagringsmulighederne kan der ikke i samme grad antages regionale markeder for gas og olie, som tilfældet er for elektricitet. Olie handles på et verdensomspændende marked. Gas er en smule mere regionalt, men LNG hjælper til at gøre gas mindre regionalt end elektricitet. Disse anderledes karakteristika medfører, at simple mean-reverting modeller ikke er egnet til at modellere spotprisen på elektricitet. Det ses blandt andet ud fra den tidligere forskning, at såfremt en simpel mean-reverting model skulle tilnærme sig en passende model for spotprisen, så skal mean-reversion parameteren sættes urealistisk højt. Såfremt, at mean-reversion parameteren ikke sættes urealistisk højt, vil et spike fortsætte i langt længere tid, end det vil gøre i de faktiske data.

Det andet udgangspunkt var ARCH-GARCH modeller. Grunden til, at ARCH-GARCH modeller tilsyneladende er et godt udgangspunkt, er, at tidligere forskning har fundet volatilitetsklumpning i data. Klumpning af volatilitet ses ved, at der er perioder i data, hvor volatiliteten er meget høj. Disse højvolatilitetsperioder bliver efterfulgt af perioder med lav volatilitet. Disse karakteristika kan ARCH-GARCH modeller hjælpe med at tage højde for. De første ARCH-GARCH modeller havde en simpel AR(1) struktur i middelværdien. Senere modeller er blevet mere fundamentale. I disse fundamentalmodeller består middelværdistrukturen af variable, som rent teoretisk menes at bestemme spotprisen. Disse variable kan blandt andet være prisen på input, forventet forbrug, forventet produktion og begrænsninger i kapacitet. Disse modeller må siges at modellere spotprisen bedre end simple mean-reversion modeller. Dette skyldes blandt andet, at middelværdistrukturen tager højde for nogle af de spikes, der forekommer på grund af eksempelvis nedsat produktionskapacitet eller pludseligt øget efterspørgsel. Det ses imidlertid blandt andet i forskningen af Derek W. Bunn, at disse ARCH effekter forsvinder, såfremt andre modeller anvendes, som tager højde for spikes i spotprisen via andre metoder.

De modeller, der indtil videre har givet de bedste resultater i modelleringen af spotprisen på elektricitet, er mean-reversion modeller med indbygget jump-variable eller regime-switch modeller. Forskellen på disse to typer af modeller er, at regime-switch modellerne afkobler spikesene fra spotprisen i normalsituationer uden spikes. Jump modeller indbygger derimod spikesene som den del af en del af den én struktur, der både tager højde for spotprisen i scenarier med og uden spikes. Dermed vil en jump-model bestå af én enkelt specifikation, hvor en regime-switch model vil bestå af en specifikation for hvert regime. Det egentlige teoretiske argument for at vælge den ene model frem for den anden er, hvorvidt spikesene er uafhængige fænomener. Såfremt de er uafhængige fænomener bør de skilles ad fra den proces, der normalt bestemmer spotprisen, hvilket sker i regime-switch modeller. Såfremt spikesene ikke er uafhængige, bør de modelleres simultant med den normale proces, hvilket forekommer i jump modeller. (Brunn 2010)

3.1 Case study af tidligere forskning – Bunn 2010

Artiklen "Fundamental and Behavioural Drivers of Electricity Price Volatility" af Derek W. Bunn med flere fra 2010, giver en god opsummering af den tidligere forskning. Denne artikel tager udgangspunkt i det britiske strømmarked, hvor forfatterne ønsker at undersøge volatiliteten i den britiske spotpris på elektricitet. Denne undersøgelse udfører de, ved at opstille forskellige modeller, som repræsenterer forskellige hypoteser omkring kilden til volatilitet i spotprisen. Data i artiklen er fra 2001 og 2002, hvor de argumenterer for, at der har været en periode uden udefrakommende ustabilitet i markedet. De fokuserer ligeledes på specifikke trading perioder. Trading perioder er defineret som en periode, hvor spotprisen er fast eksempelvis fra 7 til 8 om morgenen. Forfatterne starter med at præsentere den tidligere forskning på området, hvor fokus primært har koncentreret sig omkring stokastiske modeller så som jump modeller. Ifølge forfatterne kan disse modeller, hvis de er specificeret korrekt, være essentielle for prisfastsættelse af eksempelvis finansielle produkter så som derivater. Disse modeller giver imidlertid ingen dybere forståelse for årsagen til den observerede volatilitet. Når årsagen til volatiliteten ikke er kendt kan disse modeller ikke anvendes til beslutningstagning. Med beslutningstagning menes der beslutningstagning i forhold til eksempelvis intra-day trading. Ved intra-day trading forstås den handel med elektricitet, som udføres på spotniveau dagen før elektriciteten produceres. Når der skal intra-day trades er det vigtigt at have en forståelse for drivkraften bag volatiliteten, for dermed at kunne forecaste den næstkommende spotpris præcist, således at der kan handles på baggrund af forecastet. Igenem artiklen påvises det, at modeller, som har til formål at afdække årsagen til volatilitet, skal baseres på fundamentale variable. Fundamentale variable er variable, som har en underliggende påvirkning på spotprisen. Disse variable er ifølge artiklen variable så som efterspørgsel, kapacitet margin, mangel på kapacitet og læring i form af tidligere observerede spotpriser.

I artiklen undersøges forskellige modeller på baggrund af fundamentaldata. Først undersøges en GARCH model. Det konkluderes, at en simpel AR(1)-GARCH model ikke er tilstrækkelig. Det ses imidlertid også, at såfremt en GARCH model udvides med en fundamental model som middelværdistruktur forbedres modellens performance betydeligt. Det påvises imidlertid også i artiklen, at GARCH effekterne bliver ikke signifikante, hvis der inkorporeres elementer, som tager højde for andre årsager til GARCH effekterne. Dette sker eksempelvis via regime-switch modeller, hvor de ikke normale regimer tager højde for midlertidige forstyrrelser i markedet. Disse midlertidige forstyrrelser i markedet kan eksempelvis være en situation med knap produktion. Ved en sådan situation vil spotprisen spike, hvilket der tages højde for i et af regimerne. Dette medfører, at der ikke er behov for at modellere volatiliteten separat som ved en GARCH model, da der tages højde for de jumps og spikes, der medfører den høje volatilitet.

Dermed giver denne artikel et godt teoretisk og empirisk argument for, at tage udgangspunkt i ARCH-GARCH og jump modeller. Desuden giver artiklen en god grundlæggende forståelse for årsagerne til volatiliteten i spotprisen. Det skal imidlertid holdes i mente, at artiklen tager udgangspunkt i det britiske marked, hvilket medfører, at resultaterne ikke uden videre undersøgelse kan overføres til det nordiske marked. Sidst giver artiklen en forståelse for, at formålet med modellen er afgørende for, hvilken metode, der skal anvendes til at modellere spot prisen. Såfremt formålet er at udarbejde en model, som kan hjælpe med at træffe beslutninger omkring intra-day trading, giver artiklen belæg for at tage udgangspunkt i fundamentale modeller. Såfremt formålet er værdifastsættelse af finansielle aktiver, kan der tages udgangspunkt i mere stokastiske modeller uden fundamentale variable.

3.2 Case study af tidligere forskning – Jong 2006

En anden baggrundsartikel er "The Nature of Power Spikes: A Regime-Switch Approach" af Cyriel De Jong fra 2006. Denne artikel tager udgangspunkt i to amerikanske og seks europæiske elektricitetsmarkeder. Data i denne artikel er spotpriser fra de forskellige markeder fra januar 2001 til februar 2006. Dermed tager denne artikel udgangspunkt i en langt længere tidsperiode end den ovenstående. En af fordelene ved at tage udgangspunkt i en længere tidsperiode er, at det giver

mulighed for at undersøge, hvorledes markederne har udviklet sig som følge af liberaliseringen.

Denne artikel fokuserer på at udvikle og sammenligne stokastiske modeller af spotprisen i de forskellige markeder. Der tages udgangspunkt i en GARCH model. Denne GARCH model sammenlignes med en mean-reverting jump model. Det bevises via statistiske tests, at jump modellerne er bedre til at beskrive spotprisen end GARCH modellen, så længe der indbygges stokastisk volatilitet. Såfremt der antages konstant volatilitet er GARCH modeller lige så tilfredsstillende som jump diffusion modeller.

Dermed giver denne artikel et godt indblik i, hvorledes stokastiske modeller kan opbygges for spotprisen. Disse stokastiske modeller repræsenterer en anden tilgang til modellering af spotpriser end fundamentalmodeller. Ved stokastiske modeller menes der modeller, som forklares ved den afhængige variabel selv uden andre uafhængige variable. Ved fundamentalmodeller menes der modeller, hvor den afhængige variabel bliver forklaret af uafhængige variable, som er teoretisk bestemt. Stokastiske modeller giver mulighed for at modellere spotprisernes karakteristika så som spikes og dermed volatilitet. Disse karakteristika er essentielle at modellere, såfremt modelleringen ønskes anvendt til prisfastsættelse af finansielle aktiver. Et af kritikpunkterne ved denne artikel er imidlertid, at der tages udgangspunkt i så mange markeder. Elektricetsmarkederne er i høj grad karakteriseret af regionale markeder, hvor der kan være store forskelle i de dominerende produktionsmetoder fra marked til marked. Såfremt formålet med modelleringen er, at udvikle en model, der kan bruges i den private finansielle sektor til at prisfastsætte finansielle aktiver bør der måske kun tages udgangspunkt i ét specifikt marked. Dermed vil analysen og modelleringen være mere dybdegående og specifik for det valgte marked. Det må formodes, at modellen udformet via analyse af et enkelt marked i højere grad er anvendelig til korrekt at prisfastsætte finansielle aktiver. Denne overvejelse begrundes jeg som følge af optioners følsomhed overfor modelleringen af det underliggende aktiv.

DET NORDISKE ELEKTRICITETSMARKED

4 Det nordiske elektricitetsmarked

Følgende afsnit er skrevet med det formål, at give læseren indblik i, hvorledes et liberaliseret elektricitetsmarked fungerer. Desuden vil afsnittet give læseren en forståelse for, hvilke karakteristika, der er specifikke for det nordiske elektricitetsmarked.

Siden elektricitetsmarkederne blev liberaliseret, er der opstået muligheder for forskellige aktører på markederne. Producenter af strøm har et behov for at sælge deres produkt, mens forbrugere af elektricitet har et behov for at købe produktet. Disse to aktører handler ikke direkte med hinanden, hvilket skaber behovet for mellemlid. For forbrugerne er et eksempel på et af disse mellemlid en grossist i form af eksempelvis et handelsselskab. Med de liberaliserede markeder har forbrugerne muligheden for frit at vælge, hvem der forsyner dem med elektricitet. Dermed kan et handels-selskab opnå stordriftsfordele ved at købe strøm ind på vegne af mange kunder. Producenterne har flere muligheder for at sælge deres elektricitet. De kan vælge at sælge deres produkt til grossisterne, som så sælger det videre til forbrugerne. De kan også vælge at sælge deres elektricitet igennem en børs, hvorved de ikke har direkte kontakt med køberne af elektriciteten. Dermed opstår der et behov for en børs. Denne børs har flere funktioner. Den agerer som bindeled imellem producenter, grossister og en tredje aktør som endnu ikke er nævnt. Desuden agerer børsen også som clearing-house, hvilket eliminerer modpartsrisikoen for aktørerne på børsen. Den sidste aktør i markedet er en rent spekulativ aktør. Disse rent spekulative aktører køber og sælger elektricitet med det formål at tjene penge ved at købe eller sælge elektriciteten på fordelagtige tidspunkter. Aktørerne på børsen kan ligeledes vælge at handle med hinanden udenom børsen, hvilket kaldes bilateralhandel. Fordelen ved dette er, at de sparer det clearing fee børsen tager, men ulempen ved dette er, at de i så fald har modpartsrisiko ved at indgå handlen. Nogle markeder så som det britiske marked er karakteriseret ved en høj grad af bilateralhandel, mens de nordiske aktører i høj grad benytter sig af børsen. Omkring 75 % af den producerede elektricitet handles via børsen, og de resterende 25 % handles bilateralt (Nordpool 2010). Børsen for hele det nordiske marked hedder Nordpool. Det nordiske marked omfatter Norge, Sverige, Finland og Danmark. Nordpool var først fuldt funktionelt i alle fire lande i 2000. Nordpool er delt op i finansiell handel og fysisk handel. Nordpool er stedet, hvor der handles forwards, futures og optioner, mens der på Nordpool spot handles day-ahead, hvilket vil sige spothandler. (Nordreg 2010).

4.1 Dannelse af spotprisen

Det er Nordpool, der fastsætter spotprisen. Spotprisen handles day-ahead, hvilket vil sige, at den fastsættes dagen før, den er gældende. Spotprisen fastsættes på timeniveau, men ligger fast indenfor timen. Spotprisen fastsættes ved, at alle aktører på markedet indmelder deres interesser. Det vil sige, at producenterne indmelder, hvad de er villige til at producere og til hvilken pris. Forbrugerne melder ligeledes ind, hvad de planlægger at forbruge det næst kommende døgn, og til hvilken pris de ønsker at forbruge de givne mængder. Forbrugerne melder imidlertid ikke ind til Nordpool selv. Det er grossisternes ansvar at melde ind på vegne af forbrugerne. På baggrund af disse indmeldinger udregnes en fælles spotpris for hele det nordiske område, som kaldes systemprisen. Systemprisen er en teoretisk pris, som ikke tager højde for flaskehalse i det nordiske område. Dermed er den bagvedliggende antagelse bag systemprisen, at elektriciteten frit kan bevæge sig imellem alle de nordiske områder. Dette er imidlertid ikke tilfældet. Der er begrænsninger i kapaciteten imellem de nordiske områder, hvilket i praksis vil sige, at de kabler, der eksempelvis fører strøm fra Norge til Danmark kun kan transportere en vis mængde strøm. Denne mængde strøm er ikke nødvendigvis tilstrækkelig til at udligne de prisforskelle, der kan opstå imellem områderne. Denne kapacitetsmangel medfører behovet for yderligere prismekanismer. Dermed opstår der en contract for difference (CFD), som er et form for tillæg til systemprisen. Denne CFD sikrer, at strømmen så vidt muligt flyder fra høj- til lavprisområder.

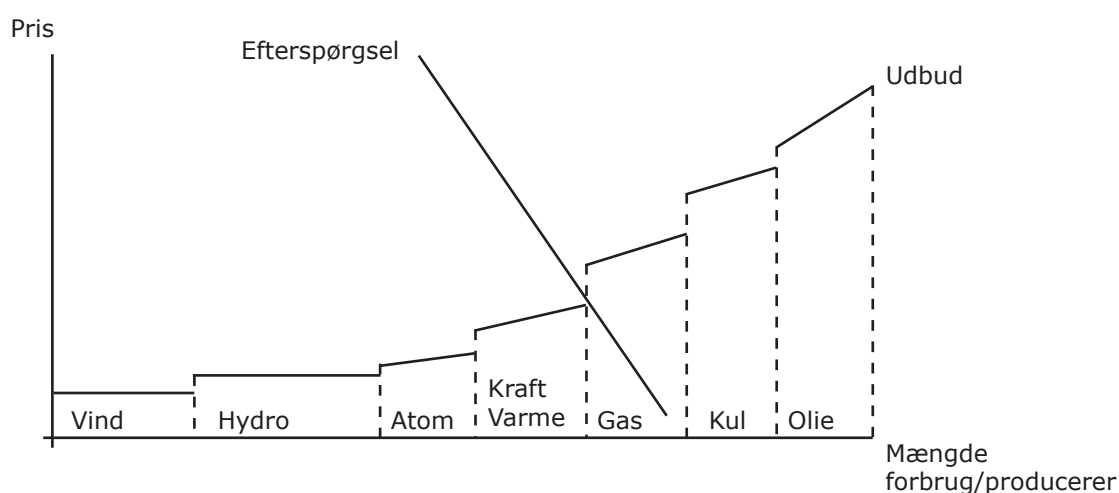
Efterspørgselen efter elektricitet må siges at være relativt inelastisk. Det vil sige, at såfremt prisen på elektricitet ændrer sig, vil efterspørgselen ikke ændre sig ret meget. Dette skyldes, at de fleste private såvel som kommercielle forbrugere af elektricitet ikke tilpasser deres forbrug efter prisen. Dermed vil en husstand stort set anvende den samme mængde elektricitet uanset, hvad prisen er. Det samme gør sig gældende for virksomheder, der anvender elektricitet som input i produktionen. Denne inelasticitet må antages om ikke andet at være gældende på kort sigt. På lang sigt, er det muligt, at specielt virksomheder kan omlægge deres produktion til at være mindre elektricitetsintensiv, såfremt dette er rentabelt. Denne inelasticitet på forbrugernes side medfører, at det i høj grad er produktionsmetoderne, der er bestemmende for spotprisen.

5 Produktionsmetoder

I Norge består stort set alt elektricitetsproduktionen af hydrokraft. Dette er en relativt billig måde at producere elektricitet på, da inputtet er naturligt. Omkostningerne ved at producere via hydrokraft består dermed hovedsagligt af personaleomkostninger samt vedligeholdelseskostninger. I Sverige produceres der ligeledes med hydrokraft, dog står hydrokraften ikke for lige så stor en andel af produktionen som i Norge. Udover hydrokraft producerer Sverige også elektricitet via atomkraft. Atomkraft er også en relativt billig produktionsmetode. Danmark og Finland producerer en højere andel af elektricitet via termiske produktionsmetoder, hvilket eksempelvis er kulfyrede værker eller kraftvarmeværker. Disse produktionsmetoder er relativt dyre produktionsmetoder både fra en marginalprisbetragtning såvel som en miljømæssig betragtning. Danmark producerer ligeledes elektricitet via vindenergi, hvor Danmark har den højeste andel af vindenergibunden produktion i Norden. Der er imidlertid planer om relativt store udvidelser i den samlede vindmøllebestand både i Sverige og Danmark i fremtiden. Samlet set produceres omkring 51 % af nordens energibehov via hydrokraft, hvilket medfører, at det nordiske strømmarked er afhængigt af nedbør i de områder, hvor hydrokraften er placeret.

For at illustrere dannelsen af spotprisen og afhængigheden af produktionsmetoderne, har jeg udarbejdet nedenstående figur.

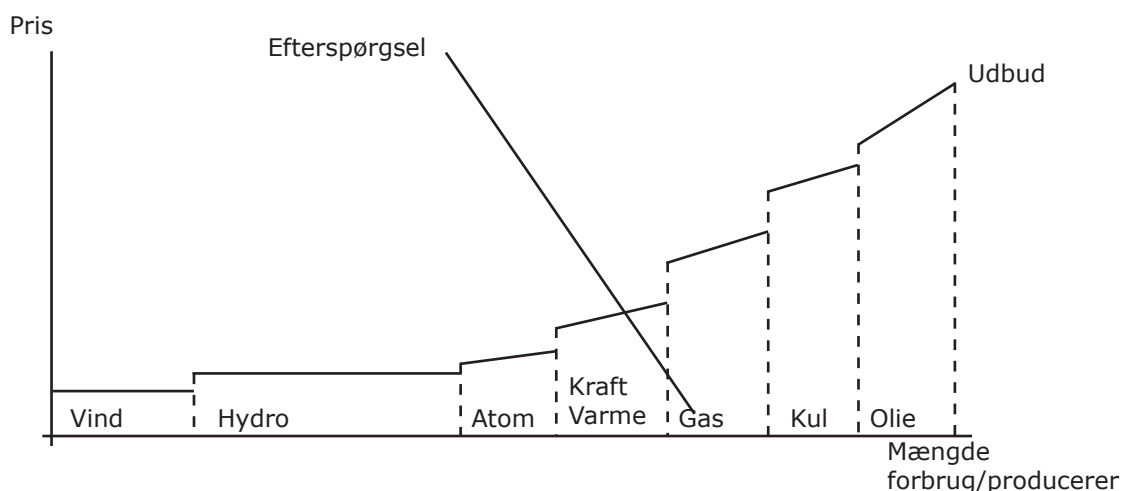
Figur 1 - Dannelse af spotpris



Ovenstående figur viser, hvorledes udbudskurven og efterspørgselskurven kunne tænkes at se ud på det nordiske marked. Det ses, at hældningen på produktionsmetoderne med ikke vedvarende input er opadgående. Dette skyldes, at det ikke kan antages at marginalomkostningerne er ens for alle mængder output. Det skal imidlertid bemærkes, at udbudskurven ikke tager højde for opstartsomkostningerne ved eksempelvis gasturbiner. Det ses ud fra Figur 1, at udbudskurven ikke er kontinuert, idet at prisen på elektricitet udviser et hop, når der skiftes fra en produktionsmetode

til en anden. Figuren viser også, at vindenergi er den billigste form for produktion, under antagelse af at vindmøllen allerede er opført. Vindmøllen har næsten marginalomkostninger lig nul, da det eneste, vindmøllen kræver, er vedligehold. Investeringsomkostningerne til vindmøllen må betragtes som sunk cost, når vindmøllen er opført. Derefter er marginalomkostningerne som følger i figuren. Kul-baseret produktion kan imidlertid godt bytte plads med gas-baseret produktion alt efter hvilket input til produktionen, der er billigst. Som det ses i figuren er den sidst anvendte produktionsmetode bestemmende for spotprisen. Såfremt der eksempelvis er et overskud af hydrokraft, vil elektricitet produceret via hydrokraft blive anvendt før elektricitet produceret via mere omkostningstunge produktionsmetoder. Dette vil alt andet lige sænke spotprisen, hvilket er illustreret i nedenstående figur.

Figur 2 - Dannelse af spotpris med yderligere hydrokraft



Det ses i Figur 1, at marginalomkostningen på gas-baseret produktion er bestemmende for spotprisen, mens det i Figur 2 er marginalomkostningen på kraftvarme baseret produktion, der er bestemmende for spotprisen. Dermed medfører den øgede hydrokraft i Figur 2, at spotprisen alt andet lige er lavere, end hvis ikke der var øget hydrokraft.

Som før nævnt har Norden en stor andel af hydrokraft, hvilket gør Norden relativt afhængig af nedbør over magasinerne. Hydrokraft kan medføre, at spotprisen udviser færre spikes alt andet lige (Jong, 2006). I tidligere forskning findes det, at den nordiske spotpris har en mindre andel af spikes. Hvorfor der argumenteres for, at denne mindre spikeaktivitet skyldes, at hydrokraft indirekte kan lagre elektricitet (Jong, 2006). Dette er efter min mening kun delvist sandt. Hydrokraft kan lagre elektricitet i situationer med normal vandstand i magasinerne. I disse situationer kan der på anlægget vælges at åbne mere eller mindre for turbinerne. Dermed kan det indirekte bestemmes, hvornår elektriciteten skal produceres. I situationer med meget lidt nedbør over en længere periode, vil der være for lidt vand i magasinerne. Denne mangel situation medfører, at anlæggene ikke kan producere, selvom det ønskes. Dermed vil spotprisen være udsat for spikes i samme grad som andre markeder, og man vil tilmed opleve en forhøjet spotpris, idet en stor del af den normale udbudskurve ikke længere vil være til stede som i Figur 1. Når der er et overskud af vand i magasinerne eksempelvis i den periode, hvor sneen smelter, vil anlæggene være tvunget til at producere. Dette vil skabe en lavere spotpris, samt forøge muligheden for negative spikes. Dermed er det muligt at det nordiske marked ikke oplever spikes i samme situationer, som andre markeder der er afhængige af termisk produceret elektricitet, men hydrokraft medfører nogle andre overvejelser vedrørende modelleringen af spotprisen.

5.1 *Balancemarkedet*

Et sidste karakteristika ved markedet for elektricitet knytter sig til den fysiske del af markedet. Dette karakteristika er balancemarkedet. På balancemarkedet sørger TSO'erne (Transmission System Operators) for, at markedet altid er i balance. TSO'erne er de systemansvarlige for hvert land, hvor det i Danmark er Energinet. Såfremt markedet ikke er i balance opstår der enten en situation, hvor der er underforsyning, hvilket resulterer i blackouts, eller også opstår der en situation med overforsyning, hvor der opstår spild. Balancen opretholdes ved, at der på reservemarkedet står producenter til rådighed, der enten kan regulere op eller ned for deres produktion. Hvem der skal regulere sin produktion bestemmes ligeledes på balance markedet, hvor producenter kan melde ind, hvad de ønsker at regulere med og til hvilken pris. Derefter fastsætter Energinet hvor meget regulering, der er brug for, og beder producenterne om at regulere deres produktion derefter. Energinet er imidlertid forpligtet til at bruge det billigste bud først. Balancemarkedet er marginalt prisfastsat, hvilket vil sige, at alle der indgår i reguleringen modtager den pris, den sidst anvendte producent har meldt ind.

Alle ovenstående mekanismer sikrer, at det er muligt at have et liberaliseret nordisk marked. Specielt det sammenlagte nordiske marked udtrykt via systemprisen sikrer, at det liberaliserede marked alt andet lige er mere likvidt, og dermed mere effektivt prisfastsat. Såfremt markedet ikke er likvidt ville det alt andet lige være sværere at udnytte arbitrage muligheder, og dermed tvinge priserne på de finansielle produkter mod deres markedsværdi.

SYSTEMPRISEN

6 Systemprisen

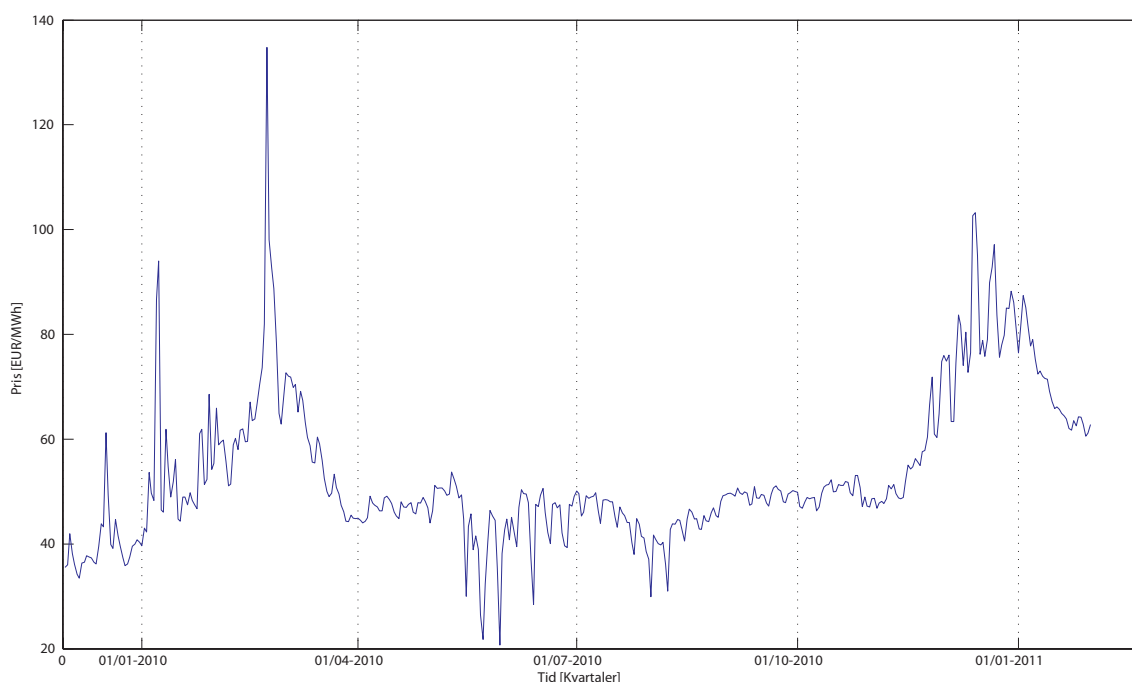
Den variabel, jeg ønsker at modellere, er systemspotprisen. Når der fremover refereres til spotprisen er det implicit, at det er systemspotprisen der refereres til. Data for spotprisen er frit tilgængelig blandt andet via den danske TSO Energinet på deres hjemmeside energinet.dk. Det originale datasæt for spotprisen løber fra den 30/11-2009 til den 31/1-2011 på timeniveau. Dermed består datasættet af 10272 observationer. At startdatoen er valgt som den 30/11-2009 skyldes ændringer i markedet. Den 30/11-2009 implementerede Nordpool muligheden for negative spotpriser. Disse negative priser har imidlertid den restriktion, at prisen ikke kan blive mindre end EUR -200 (Nordpool 2009). Dermed er data valgt således, at data kun indeholder de nyeste karakteristika for markedet. For at anvende data længere tilbage i tid, ville det være nødvendigt med en korrektion, således at negative priser er mulige. Denne korrektion kunne udføres ved at indsætte priser fra balancemarkedet i de tilfælde, hvor systemprisen er 0. Dette er imidlertid ikke en optimal løsning, da der ved denne løsning ikke er mulighed for at skelne imellem, hvornår spotprisen skulle være negativ, og hvornår den skulle være nul.

I tidligere forskning har det været praksis at anvende en logaritmisk transformation af spotprisen. Denne transformation skal sikre, at der ikke opstår negative spotpriser som følge af modellen. Dette er imidlertid ikke en transformation, som jeg vil udføre på mine data, da der netop er mulighed for negative spotpriser på det nordiske marked. En anden praksis er, at transformere data, således, at der modelleres en basepris for hver dag. En basepris svarer til gennemsnittet af alle 24 spotpriser i løbet af dagen, hvilket er illustreret ved nedenstående ligning.

$$(1) \quad base_{dd} = \frac{\sum_{t=1}^{24} spot_{dd-t}}{24}$$

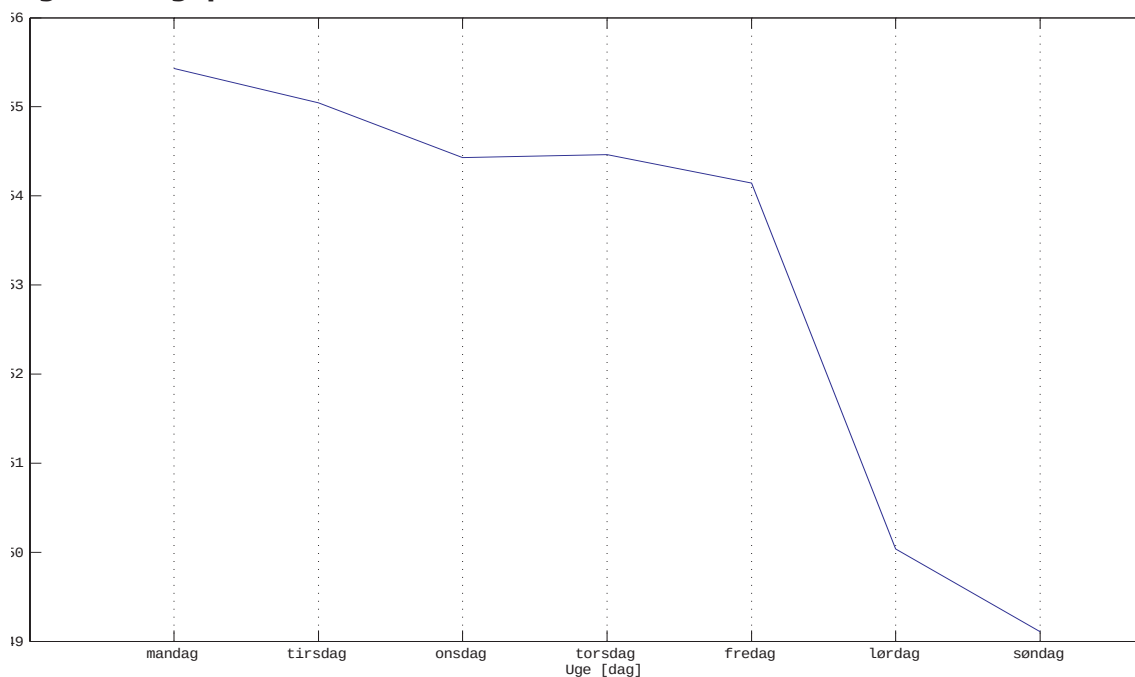
Denne transformation vil jeg også udføre for mine data, hvor jeg frem over vil referere til denne transformerede pris som spotprisen. Datasættet består herefter af 428 observationer. Transformationen sikrer, at der ikke arbejdes med højfrekvente data. Desuden vil nogle af de fundamentale variable kun kunne fås på dagsniveau. En variabel, som kun vil kunne frembringes på dagsniveau, er hydrobalancen. Denne variabel kan være en proxy for hvor meget kapacitet, der er til rådighed for nordens største produktionsmetode. Det vil i den forbindelse ikke være muligt, at profilere hydrobalancen ud på timeniveau. Såfremt en forecastet spotpris ønskes på timeniveau, er det muligt at anvende en dagsprofil til at opløse den estimerede spotpris til timeniveau (Brunn 2010). Følgende figur illustrerer udviklingen i spotprisen i den valgte tidsperiode.

Figur 3 - Udvikling i spotprisen fra 30/11 2009 til 31/1 2011



Det ses ud fra Figur 3, at spotprisen udviser tydelige spikes både i positiv og i negativ retning. Desuden ses det ud fra figuren, at spotprisen udviser en sæsonprofil, hvor prisen er højere om vinteren end om sommeren. Denne profil skyldes, at der i den nordiske region primært anvendes strøm i forbindelse med eksempelvis opvarmning. I syden vil sæsonprofilen være omvendt af den nordiske sæsonprofil, da der i syden primært anvendes elektricitet i forbindelse med aircondition. De mindre udsving der ses på kurven kunne skyldes en ugeprofil. Der anvendes typisk mere strøm mandag til torsdag end fredag til søndag. Denne ugeprofil skyldes typisk virksomhedernes produktionsmønstre, hvor der typisk ikke bliver produceret så meget fredag til søndag. Den ugentlige sæsonprofil illustreres ved nedenstående figur.

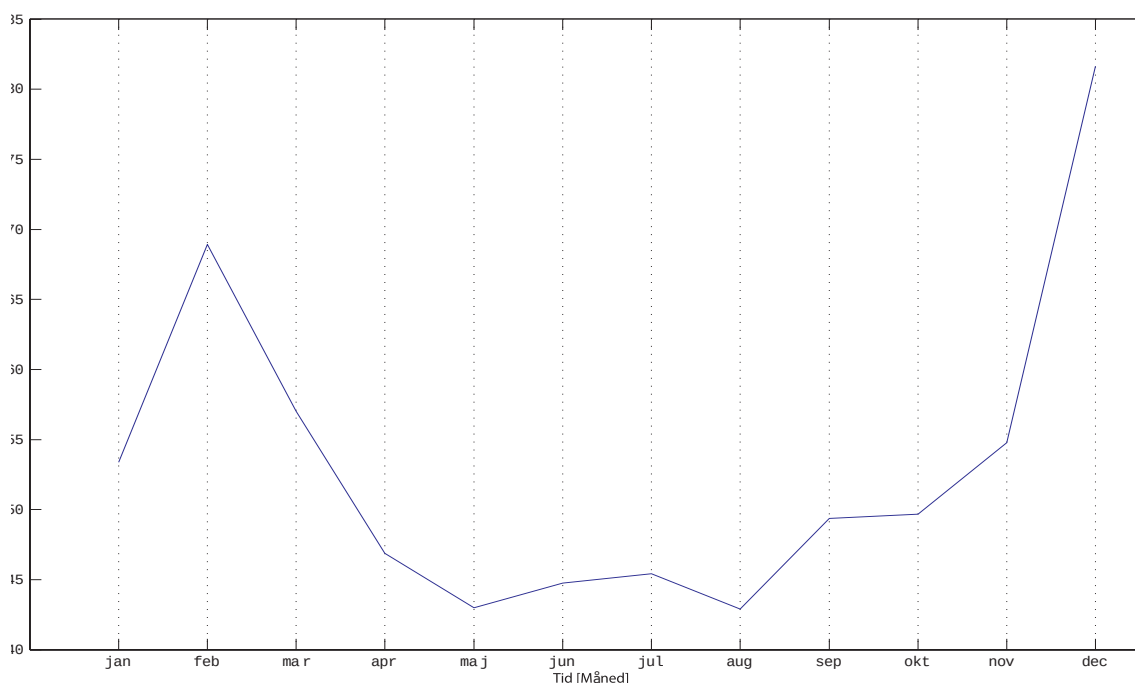
Figur 4 - Ugeprofil



Ovenstående figur viser et gennemsnit for hver ugedag. Det ses tydeligt, at priserne lørdag og søndag er markant lavere end de resterende ugedage. Dermed ses det grafisk, at datasættet indeholder en profil på ugebasis.

Nedenstående figur illustrerer profilen over året.

Figur 5 - Årsprofil



Det ses tydeligt ud fra Figur 5, at data udviser en sæsonprofil. Figuren illustrerer et månedsgennemsnit af data. Sæsonprofilen udviser det mønster, som kunne forventes. Det ses, at prisen i første og fjerde kvartal er højere end priserne i andet og tredje kvartal. Dette mønster skyldes, som før nævnt, det øgede strømforbrug til eksempelvis opvarmning og belysning i vintermånederne for den nordiske region. Det skal imidlertid bemærkes, at februar ligger højt i forhold til de andre måneder. Dette kan skyldes længden af datasættet, hvor februar angiver februar 2010. Dermed kan der have været nogle faktorer, som har gjort gennemsnittet usædvanligt højt. En sådan faktor kan være et meget stort spike, hvilket jævnfør Figur 1 også forekom i februar 2010. Såfremt data havde været længere, ville årsprofilen være mindre forstyrret af sådanne forhold.

For at klargøre spotprisens karakteristika rapporteres middelværdi, varians, kurtosis og skævhed for data.

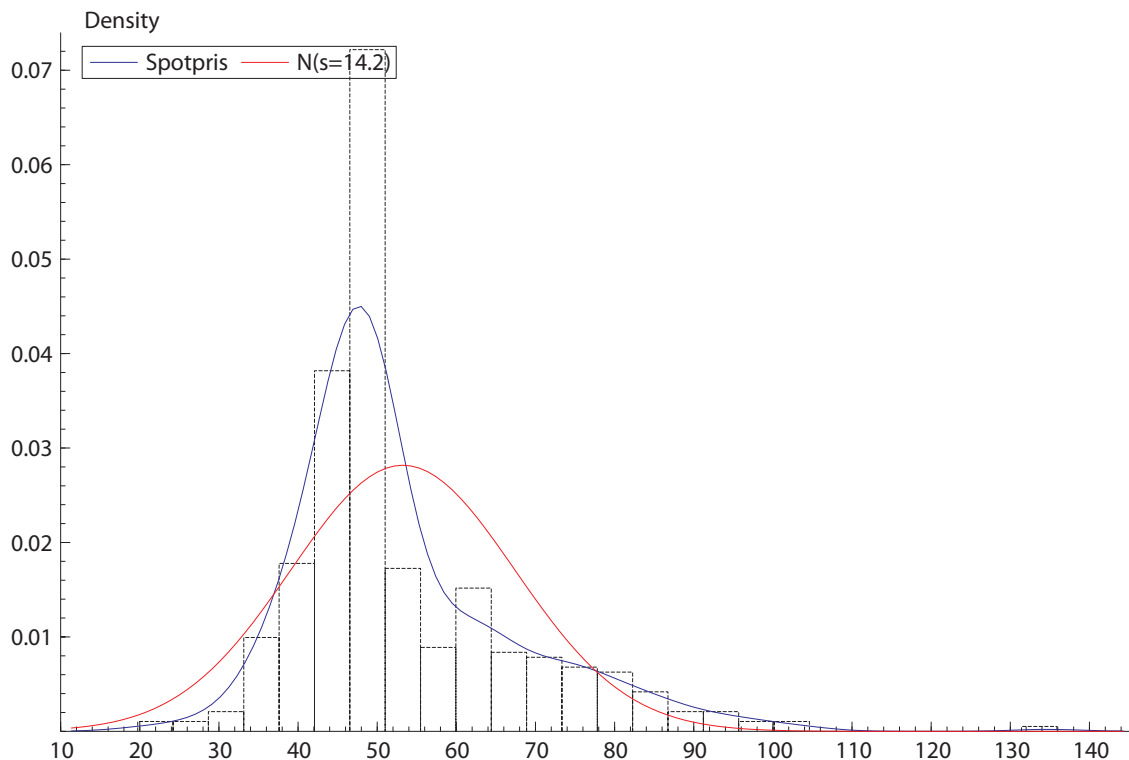
Tabel 1 - Deskriptiv statistik

Observations	428
Mean	53.242
Std. Devn.	14.158
Skewness	1.4727
Excess Kurtosis	3.2804
Minimum	3.2804
Maximum	134.8
Normality test	166.57
Chi ² (2)	[0.0000]

Det ses, at volatiliteten for spotprisen er 14,158, hvilket er angivet ved standartafvigelsen for spotprisen. Dette må antages at være en relativt høj volatilitet. Spikesene er i høj grad med til at øge volatiliteten på spotprisen, hvilket medfører at spotprisen har en højere volatilitet end andre finansielle aktiver. Det ses ligeledes, at spotprisen udviser kurtosis, samt er højreskæv. Dermed er der en asymmetri i data mod høje positive værdier, frem for lave eller negative værdier. Det ses ligeledes ud fra ovenstående, at data ikke er normalfordelt, da dette kan afvises ved statistiske tests. Det ses ligeledes ud fra ovenstående, at selv om systemprisen i kan blive negativ, har dette ikke været tilfældet i perioden.

Ovenstående Kurtosis og topstejlhed illustreres ved nedenstående figur.

Figur 6 - Tæthedsfunktion for spotprisen



Ovenstående figur, viser tydeligt skævheden i data samt de tykke haler, hvor der ses en asymmetri mod meget store værdier. Dermed er det påvist, at datasættet både indeholder spikes, profiler samt høj volatilitet. Disse karakteristika er det nødvendigt at tage højde for, når spotprisen modelleres.

OVERVEJELSER OMKRING MODELLERING

7 Overvejelser omkring modellering

Den tidligere forskning har som før nævnt fundet spikes, høj volatilitet og skævhed i data. Jævnfør afsnit 6 findes disse karakteristika ligeledes i mit datasæt for den nordiske spotpris. Dermed kan det med rimelighed antages, at de metoder, der før er anvendt til at modellere spotprisen også vil være et godt udgangspunkt for min modellering af spotprisen. Dermed er der to forskellige modeller, som med rimelig sandsynlighed kan modellere spotprisen. Den første modeltype er ARCH-GARCH modeller. Disse modeller kan tage højde for skævheden i data, samt volatilitetsklumpning. Der må antages at være volatilitetsklumpning jævnfør Figur 3. Denne volatilitetsklumpning ses blandt andet i slutningen af andet kvartal 2010 og i slutningen af fjerde kvartal 2010. Disse modeller er imidlertid ikke egnede til at tage højde for uafhængige spikes. Det er imidlertid ikke afgjort, hvorvidt spikesene i datasættet er uafhængige og kræver en anden type modeller. Jump-diffusion modeller kan derimod tage højde for spikes. Jump-diffusion modeller kan tage højde for spikes via en jump-komponent. Denne jump-komponent sikrer, at der sker et mere eller mindre tilfældigt hop i prisprocessen.

Dermed kan ovenstående analyse af spotprisen ikke umiddelbart afgøre hvilken modeltype, der er bedst egnet til at modellere spotprisen. Derfor vil jeg starte med at modellere spotprisen med den simpleste modeltype ARCH-GARCH modeller. Dernæst vil jeg søge at modellere spotprisen via jumpdiffusion modeller. Sidst vil jeg sammenligne modellernes performance for dermed at afgøre hvilken model, der er bedst egnet til at modellere den nordiske spotpris.

TEORETISK REDEGØRELSE FOR MODELTYPERNE

8 Teoretisk redegørelse for modeltyperne

I følgende afsnit er det min intention at gennemgå de to forskellige modeltyper, for dermed at give en teoretisk forståelse for modellerne og deres karakteristika.

8.1 ARCH-GARCH modeller

Den første model, som bliver tilpasset til data er en ARCH-GARCH model. ARCH-GARCH modeller anvendes typisk i den finansielle verden, hvor det er fundet, at de er gode til modelleringen af eksempelvis afkast fra aktier. Grunden til, at ARCH-GARCH modeller performer godt med denne type data, er, at finansielt data ofte udviser volatilitetssklumpning og tykke haler. Volatilitetssklumpningen er en konsekvens af, at fejlløbet ikke har konstant varians gennem hele serien. Såfremt variansen på en tidsserie ikke er konstant, har tidsserien betinget heteroskedasticitet. Hvis variansen tilmed kan beskrives via en autoregression siges modellen at indeholde autoregressiv betinget (conditional) heteroskedasticitet, hvilket forkortes som ARCH (Heij 2004).

En ARCH(1) model med en konstant som middelværdistruktur er givet ved

$$(2) \quad y_t = c + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t | Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

hvor $\sigma_t^2 = \text{var}(y_{t-1} | Y_{t-1})$ er den betingede varians. Y_{t-1} angiver de tilgængelige observationer til tid $t-1$. Ved ovenstående model er der imidlertid nogle parameterrestriktioner. Da variansen aldrig er negativ indføres følgende restriktioner $\alpha_0 \geq 0$ og $\alpha_1 \geq 0$. Såfremt $\alpha_1 > 0$ vil den betingede varians blive større såfremt fejlløbet i perioden før var større. Dette karakteristika modellerer dermed volatilitetssklumpningen. Det skal desuden bemærkes, at fejlløbet ikke er normalfordelt og at det har kurtosis større end 3. Dermed modellerer ARCH modellen også tykke haler. Det kan imidlertid være nødvendigt at modellere den betingede varians med en autoregressiv process af en højere orden, således det bliver en ARCH(p) model, i så fald inkluderes p lags af fejlløbet i variansligningen (Heij 2004).

Der findes imidlertid en mere generel version af ARCH modeller, som kaldes GARCH, hvilket står for generaliseret ARCH. Ved en GARCH model følger fejlløbene en ARMA model i stedet for en AR model. En GARCH(1,1) er givet ved følgende udtryk.

$$(3) \quad y_t = c + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t | Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Ved ovenstående model er fejlløbene stationære såfremt $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. En GARCH model, kan også beskrives ved højere ordens ARMA modeller, således modellen angives GARCH(p, q). En sådan model indeholder p lags af fejlløbet og q lags af den betingede varians. Det er vigtigt at bemærke, at middelværdistrukturen ikke nødvendigvis er en konstant. Middelværdistrukturen kan eksempelvis specificeres som en ARMA model, eller andre modeller, som findes passende (Heij 2004).

Det skal desuden bemærkes, at der findes yderligere udvidelser til ARCH-GARCH modellerne, så som eksempelvis T-GARCH og GARCH in mean modeller. T-GARCH modeller tager højde for, at volatiliteten kan reagere asymmetrisk ved eksempelvis positive chok. En GARCH in mean model tilføjer den betingede varians til middelværdistrukturen. Disse modeller vil jeg ikke forklare yderligere. Såfremt de findes relevant når GARCH modellen kalibreres til data, vil specifikationen af disse modeller fremgå.

8.2 Jump-Diffusion modeller

Jump-Diffusion modeller har som før nævnt været populære i modelleringen af energipriser. Dette skyldes, at disse modeller kan tage højde for pludseligt forekommende jumps. Disse modeller anvendes typisk til at prisfastsætte derivater, da det er yderst vigtigt, at kunne modellere alle ty-

per fluktuationer, som det underliggende aktiv kan udvise. Det skyldes, at volatiliteten alt andet lige vil være højere i den modellerede tidsserie, såfremt modellen kan tage højde for spikes. Når volatiliteten er højere vil eksempelvis en option alt andet lige være dyrere. Disse modeller kan også anvendes til andre formål end prisfastsættelse af derivater. Det skal imidlertid bemærkes, at jump-modellerne muligvis er mindre anvendelige til intraday trading, da spikes ene forekommer mere eller mindre tilfældigt via disse modeller.

Der er imidlertid mange forskellige muligheder for at specificere disse jump modeller. Jumpsene kan følge forskellige processer og kan enten bestemmes stokastisk eller deterministisk. Jump-diffusion modeller har den fordel, at de lader det underliggende aktiv udvikle sig kontinuert i langt den største del af tiden. Men de tager samtidig højde for, at det underliggende aktiv nogle gange kan udvise så store jumps, at disse jumps ikke kan modelleres af diffusion delen. Ved diffusion delen, menes der den del af modellen, som lader det underliggende aktiv udvikle sig i forhold til normalsituationer uden spikes.

Diffusion delen kan specificeres som mange forskellige processer, eksempelvis en simpel Brownian Motion. Jeg vil imidlertid specificere diffusion delen, som en mean-reverting proces.

Diffusion delen består således af en mean-reverting proces, som specificeres ved nedenstående ligning.

$$(4) \quad \Delta y_t = \eta_1 (\mu_1 - y_{t-1}) + \sigma_1 \varepsilon_t$$

I ovenstående ligning angiver η_1 mean-reversion parameteren og μ_1 den middelværdi, som spot-prisen vender tilbage til. Det skal imidlertid bemærkes at η_1 skal være mindre eller lig med 1 for at modellen fluktuerer omkring middelværdien. Det skal ligeledes bemærkes at ovenstående mean-reversion model er af autoregressiv orden 1, da det er forskellen fra y_{t-1} . Dermed er ovenstående proces en simpel AR(1) model, som fluktuerer om en givet middelværdi. (Jong, 2006)

For at ovenstående model skal være en jump-diffusion model, skal der også specificeres en jump-komponent. Jump-komponenten kan specificeres på mange forskellige måder, eksempelvis kan jump-komponenten specificeres som mange forskellige Lévy processer. Lévy processer er en klasse af processer, som har uafhængige og stationære fejlede (Tankov 2009).

En af disse Lévy processer kunne være en Poisson proces, som jeg vil anvende senere i projektet. Dermed følger en jump-diffusion model med mean-reverting diffusion og Poisson jumps følgende specificering (Tankov 2009).

$$(5) \quad \Delta y_t = \eta_1 (\mu_1 - y_{t-1}) + \sigma_1 \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{n_t} Z_t \quad \text{hvor} \quad Z_t \sim N(\mu_1^S, \sigma_1^S) \quad n_t \sim POI(\lambda_1)$$

Det skal bemærkes, at middelværdien og variansen for spikesene er forskellige fra middelværdien i diffusion-leddet.

Poisson processen er en proces, der anvendes til at beskrive uafhængige hændelser. Poisson processen er en heltidig proces, hvor jumpintensiteten λ_1 bestemmer, hvor ofte de uafhængige hændelser indtræffer. Hændelserne har middelværdien μ_1^S og variansen σ_1^S . Poisson fordelingen anvendes i en diskret version, hvor den indgår som en binær variabel. Denne binære variabel angiver, hvorvidt der indtræffer en hændelse til et givent tidspunkt.

Der skal imidlertid igen gøres opmærksom på, at ovenstående specifikation af en jump-diffusion model, kun er en af mange mulige specifikationer.

SIMPEL MODELLERING VIA OLS

9 Simpel modellering via OLS

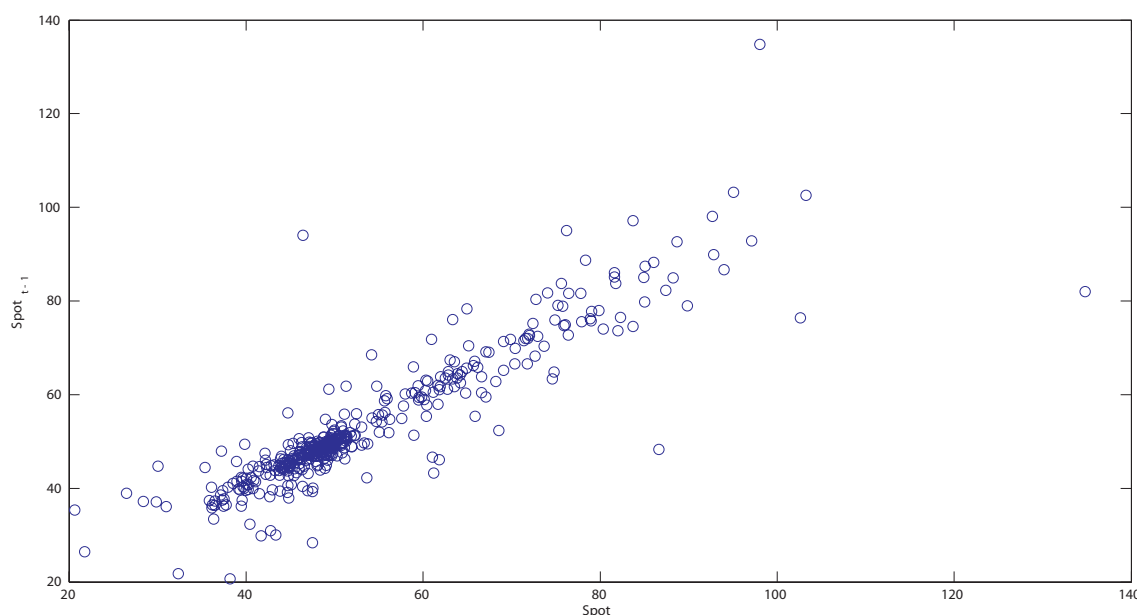
Det første skridt i modelleringen af spotprisen er at undersøge, hvorvidt spotprisen kan modeleres via simpel lineær regression.

9.1 Valg af variable

For at modellere spotprisen er det nødvendigt at vælge variable, som muligvis kan beskrive spotprisens udvikling. Disse variable er motiveret både af praktiske og teoretiske overvejelser.

Den første type variable, som jeg vil inkludere i modellen er lags af spotprisen. Dette skyldes, overvejelser om, at lags af spotprisen kunne beskrive den nuværende udvikling. Eksempelvis vil lags af spotprisen kunne medvirke til at beskrive en periode med unormalt høje spotpriser, som eksempelvis opstår på grund af traderes forventninger. For at undersøge, hvilke lags der kunne være relevante, vil jeg illustrere sammenhængen mellem lagsene og spotprisen ved hjælp af scatterplots. Det første scatterplot viser sammenhængen mellem spotprisen og lag et af spotprisen.

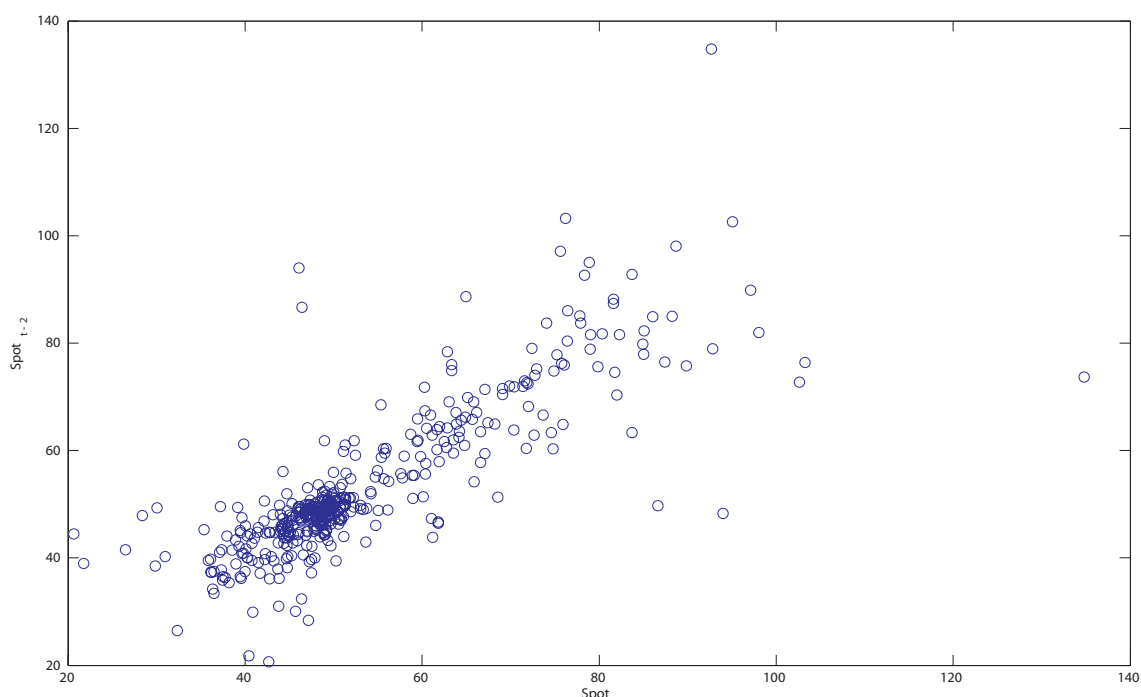
Figur 7 - Scatterplot Spot vs. lag et spot



Ud fra ovenstående figur ses en tydelig lineær sammenhæng. Desuden ses det at denne sammenhæng er positiv, således at en høj spotpris dagen før hænger sammen med en høj spotpris dagen efter. Dette kan forklares med, at første lag af spotprisen kan afspejle dage med god eller dårlig forsyning. Disse dage er sammenhængende, hvorfor en dag med dårlig forsyning oftest bliver efterfulgt af en dag med dårlig forsyning. Dermed retfærdiggør ovenstående scatterplot at medtage første lag af spotprisen i modellen.

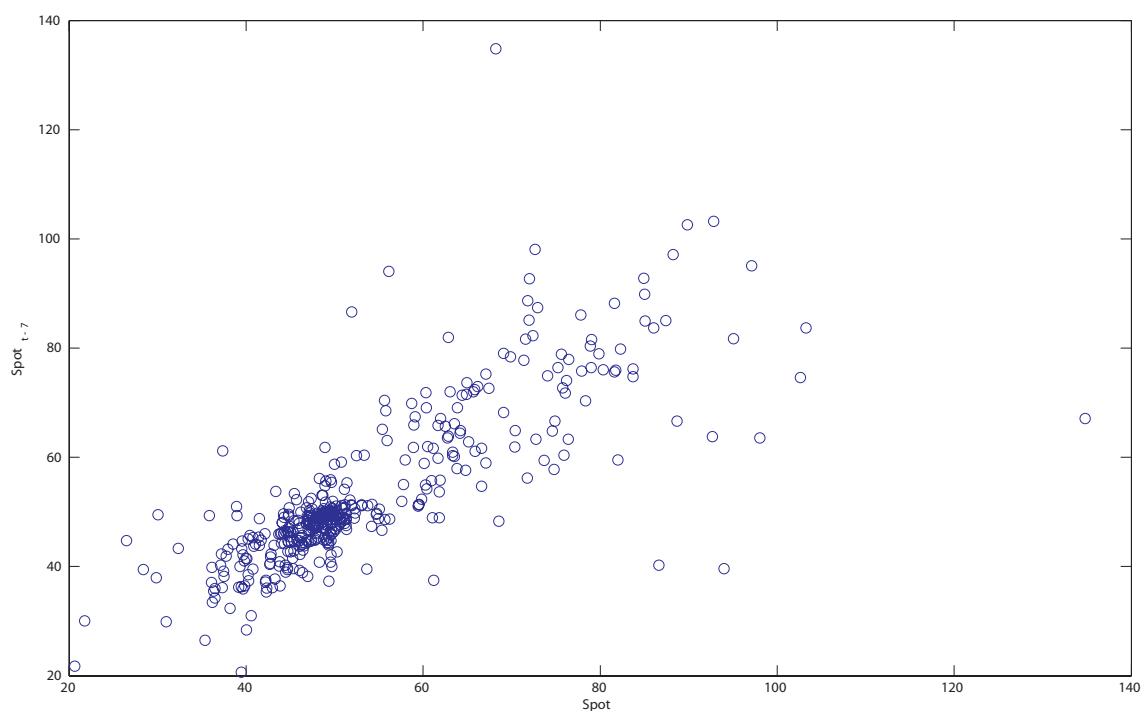
Næst undersøges, hvorvidt andet lag af spotprisen bør medtages i figuren.

Figur 8 - Scatterplot spot vs. lag to spot



Andet lag af spotprisen har jævnfør ovenstående figur også en lineær sammenhæng med spotprisen. Dette kunne tænkes at skyldes temperaturer. Højtryk og lavtryk har tendens til at være ved i nogle dage. Eksempelvis kan et blokerende højtryk om vinteren medføre meget lave temperaturer. Disse lave temperaturer medfører derfor øget elektricitetsforbrug. Da højtrykket er blokerende, vil de lave temperaturer være ved, hvilket medfører øget forbrug i den periode. Ovenstående figur medfører, at andet lag af spotprisen også inkluderes i modelleringen af spotprisen.

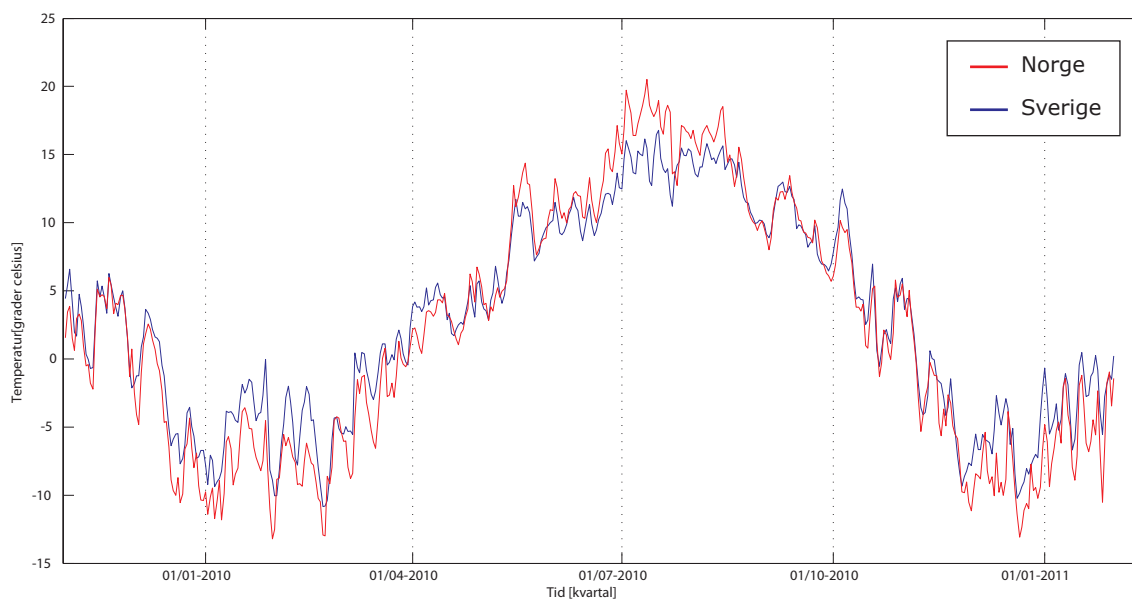
Lagsene fra tre til syv har samme lineære mønster, hvorfor jeg kun har valgt at vise et scatterplot af lag syv.

Figur 9 - Scatterplot spot vs. lag syv spot

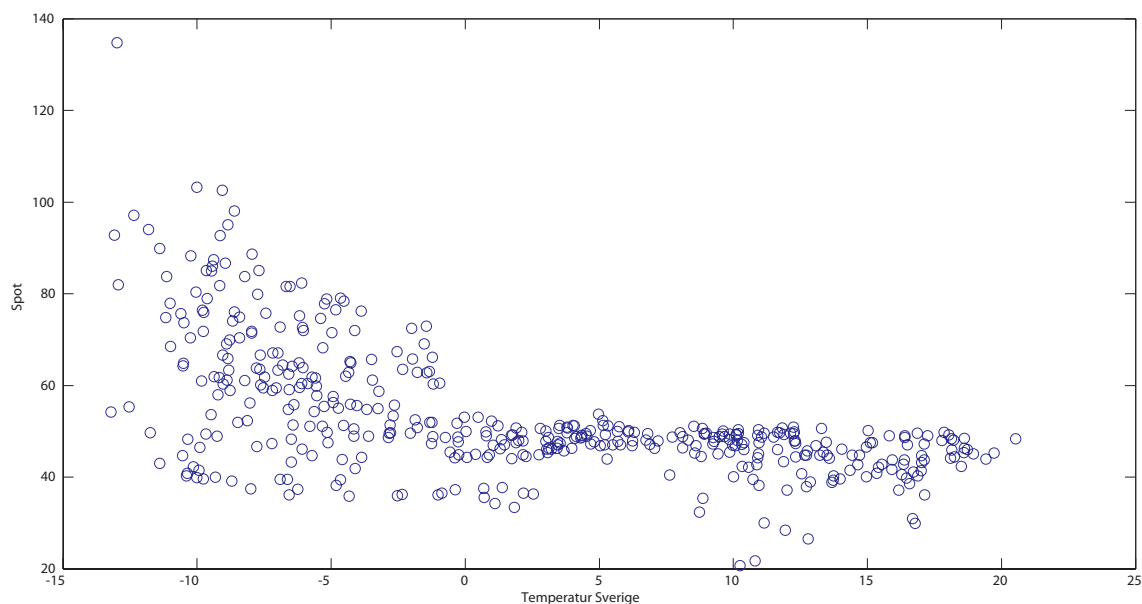
Ovenstående figur, samt det faktum at lagsene fra tre til seks udviser samme mønster, medfører at disse medtages i modellen.

Jeg vil desuden inkludere dummies for hver ugedag, således der bliver taget højde for profilen på ugebasis. Det skal imidlertid bemærkes, at de dummies samt lags. jeg har valgt at inkludere, måske tager højde for det samme karakteristikum, hvilket er profilen. Såfremt dette er tilfældet, bør begge klasser af variable ikke være signifikante, når de begge inkluderes i modelleringen af spotprisen.

Jeg vil ligeledes søge at tage højde for profilen på årsbasis, dette vil søges via gennemsnitstemperaturen for henholdsvis Norge og Sverige. Temperaturen har afgørende indflydelse på forbruget af elektricitet i Norge og Sverige. Dette skyldes, at forbrugerne i Norge og Sverige i høj grad anvender elektricitet som varmekilde. Dermed må det antages, at temperaturdata vil kunne tage højde for den årsprofil, som er observeret i data.

Figur 10 - Gennemsnits temperatur

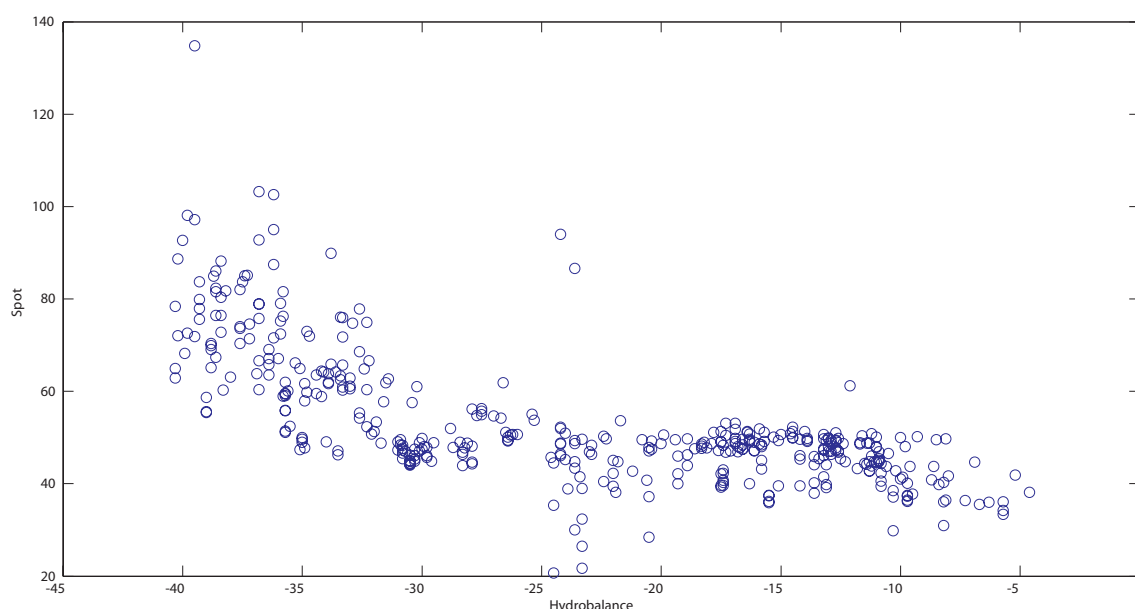
Det ses ud fra ovenstående figur, at temperaturen også udviser sæson, hvilket var forventet. Temperaturen og spotprisen forventes dermed at have en negativ sammenhæng. Således at spotprisen er høj når temperaturen er lav. Det ses imidlertid at gennemsnitstemperaturen for Norge og Sverige er nogenlunde ens. Derfor vurderer jeg, at det er tilstrækkeligt kun at anvende den ene af serierne, hvilket bliver gennemsnitstemperaturen for Sverige. Temperaturen er et døgn gennemsnit for henholdsvis Norge og Sverige. Gennemsnitstemperaturen er konstrueret således, at den er et gennemsnit over de målestationer, der er i henholdsvis Norge og Sverige. Data er fremskaffet via metrolog Christian Tygskov, som er ansat ved Nordjysk Elhandel. For yderligere at redegøre for sammenhængen mellem spotprisen og temperaturen har jeg valgt at fremvise nedenstående scatterplot.

Figur 11 - Scatterplot spotpris vs. temperatur

Det ses ud fra ovenstående figur, at temperaturen og spotprisen ikke har en fuldkommen lineær sammenhæng. Dermed kan det overvejes, hvorvidt transformationer af temperaturen bør medtages i modelleringen af spotprisen. En mulig transformation kunne være temperaturen i anden. Denne transformation tager højde for, at lave temperaturer tilsyneladende har den største effekt på spotprisen.

Jeg har ligeledes tidligere redegjort for, at det primært er udbudssituationen, der er bestemmende for niveauet af spotprisen. Derfor har jeg valgt at inkludere en proxy for den største produktionsmetode i norden. Denne proxy er hydrobalancen. Hydrobalancen er et tal, der angiver, hvor meget produktionskapaciteten for vandkraft afviger fra en normalsituation. En normalsituation er defineret som gennemsnittet af kapacitet over en årrække. Denne hydrobalance kan være med til at indikere, hvorvidt produktionsmetoderne i norden finder sted på dyre termiske produktionsanlæg eller på billige vedvarende produktionsanlæg. Dermed vil en lav hydrobalance alt andet lige medføre en højere spotpris. Sammenhængen mellem hydrobalancen og spotprisen beskrives ved nedenstående scatterplot.

Figur 12 - Scatterplot (spotpris,hydrobalance)



Det ses tydeligt ud fra ovenstående figur, at der er en sammenhæng mellem hydrobalancen og spotprisen. Sammenhængen er således, at når hydrobalancen er meget lav, så vil spotprisen være høj. Dette stemmer overens med det teoretiske argument for at inkludere hydrobalancen. Da en lav hydrobalance betyder, at der er mindre vandkraft til rådighed til at producere elektricitet. Når der er mindre vandkraft til rådighed må der anvendes dyrere produktionsmetoder, hvilket alt andet lige medfører en højere spotpris. Det ses imidlertid også, at spotprisen og hydrobalancen ikke nødvendigvis har en lineær sammenhæng. Det ses ud fra ovenstående figur, at det primært er meget lave værdier af hydrobalancen, der har en påvirkning på spotprisen. Derfor vælger jeg ligeledes at inkludere kvadratet af hydrobalancen.

Jeg har ikke valgt at inkludere en proxy for forbruget. Dette skyldes, at forbruget er relativt inelastisk. Forbrugsprofilen bør ligeledes blive taget højde for som følge af den inkluderede temperaturvariabel.

Disse variable inkluderes alle i den simple regression. Dermed vil ligningen for regressionen nu have følgende udformning.

$$\begin{aligned}
 y_t = & \alpha_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 y_{t-3} + \beta_4 y_{t-4} + \beta_5 y_{t-5} + \beta_6 y_{t-6} + \beta_7 y_{t-7} + \dots \\
 (6) \quad & \dots \beta_9 \text{dummy}_{tirs} + \beta_{10} \text{dummy}_{ons} + \dots \\
 & \dots \beta_{11} \text{dummy}_{tors} + \beta_{12} \text{dummy}_{fre} + \beta_{13} \text{dummy}_{lør} + \beta_{14} \text{dummy}_{søn} \dots \\
 & \dots \beta_{15} \text{Temp}_{Sverige} + \beta_{16} \text{Temp}_{Sverige}^2 + \beta_{17} \text{hydro} + \beta_{18} \text{hydro}^2 + \varepsilon_t
 \end{aligned}$$

9.2 Stationaritet

Hvorvidt, ovenstående model kan anvendes til modellering ved hjælp af simpel lineær regression, afhænger blandt andet af om spotprisen er stationær eller ej. Som udgangspunkt vil det forventes, at spotprisen ikke er stationær, da der er alt for meget profil og variation i spotprisen til, at den kan være en stationær proces. Derfor vil jeg undersøge, hvorvidt spotprisen er stationær, når der er taget højde for uge, års profilen samt de andre forklarende variable. Dette vil jeg gøre ved at undersøge residualerne for stationaritet, når der udføres en regression på (6).

Ovenstående regression er udført via OLS, hvor resultatet af regressionen ses ved nedenstående output.

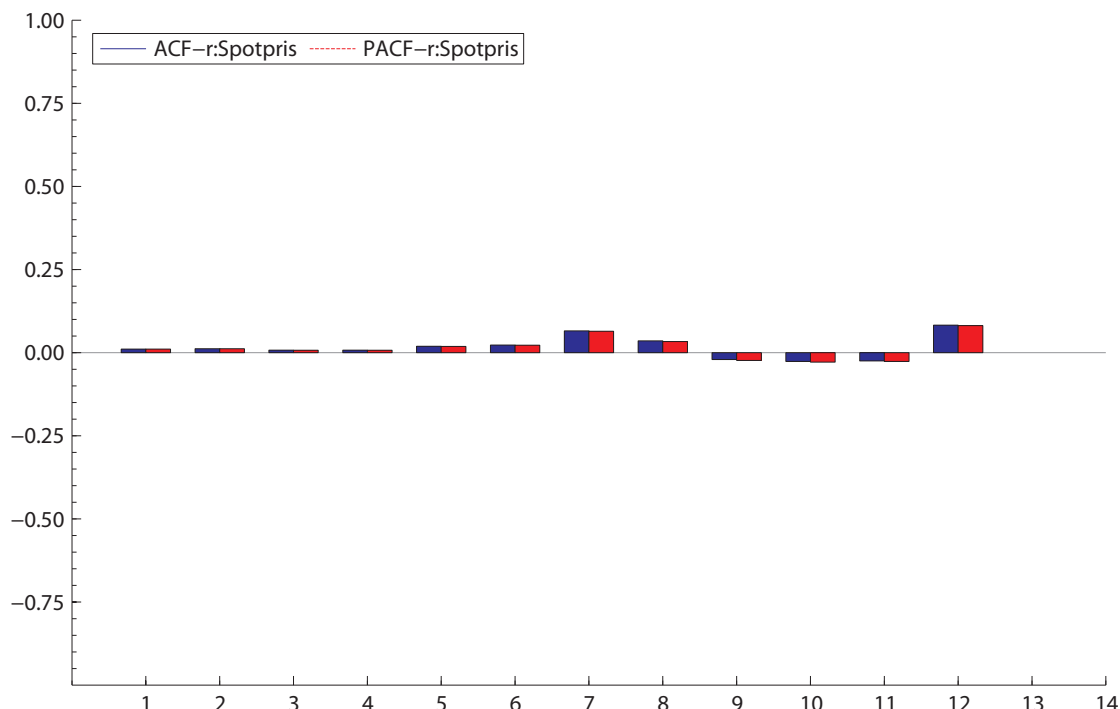
Tabel 2 - Regression 1 (OLS)

	Koefficient	Std. Var.
Konstant	11.77520	3.242
Spot_1	0.77182	0.050
Spot_2	-0.17068	0.063
Spot_3	0.19580	0.064
Spot_4	-0.02734	0.064
Spot_5	-0.04000	0.063
Spot_6	0.06202	0.063
Spot_7	0.07529	0.049
Dummy_tirs	-4.76339	1.030
Dummy_ons	-4.00454	1.076
Dummy_tors	-4.86942	1.037
Dummy_fre	-4.97610	1.038
Dummy_lør	-8.08841	1.038
Dummy_søn	-6.28411	1.030
Hydro	0.28251	0.207
Hydro^2	0.01059	0.005
TempSverige	0.18751	0.065
TempSverige^2	-0.00828	0.004

Hvorvidt ovenstående variable er signifikante er ikke i udgangspunktet interessant. Ovenstående regression udføres med det formål at undersøge, hvor meget variablene kan forklare ved hjælp af simpel lineær regression. Dermed er signifikansen af variablene ikke nødvendig at afgøre, før modellen yderligere specificeres.

Den første inspektion af regressionens performance er en grafisk inspektion af et korellogram, hvilket kan give en indikation af, om residualerne er stationære eller ej.

Figur 13 - Korellogram af residualer for regression 1



Korellogrammet ser umiddelbart stationært ud. Dette skyldes, at autokorrelationen ikke er udpræget stor for residualerne. Det kræver imidlertid en statistiktest for at afgøre, hvorvidt residualerne er stationære. Denne test kaldes en Dickey-Fuller test. H_0 hypotesen ved en Dickey-Fuller test er, at serien ikke er stationær. Dermed følger serien under H_0 hypotesen ikke engang asymptotisk en t-fordeling, hvorfor teststørrelsen for en Dickey-Fuller test skal sammenlignes med en Dickey-Fuller fordeling. Det overvejes imidlertid om der bør vælges den udvidet Dickey-Fuller test, da den simple Dickey-Fuller test er følsom overfor autokorrelation. Jævnfør Figur 13, antages residualerne ikke at indeholde autokorrelation. Dermed vælges en almindelig Dickey-Fuller test. Når der anvendes en Dickey-Fuller test udføres nedenstående regression ved hjælp af OLS (Wooldridge 2000).

$$(7) \Delta \varepsilon_t = \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Outputtet for testen kan ses i nedenstående tabel.

Tabel 3 - Dickey-Fuller test af Residualerne for Regression 1

	Koefficient	Std. Var.	t-value
Residual_1	-0.989049	0.0488	-20.3

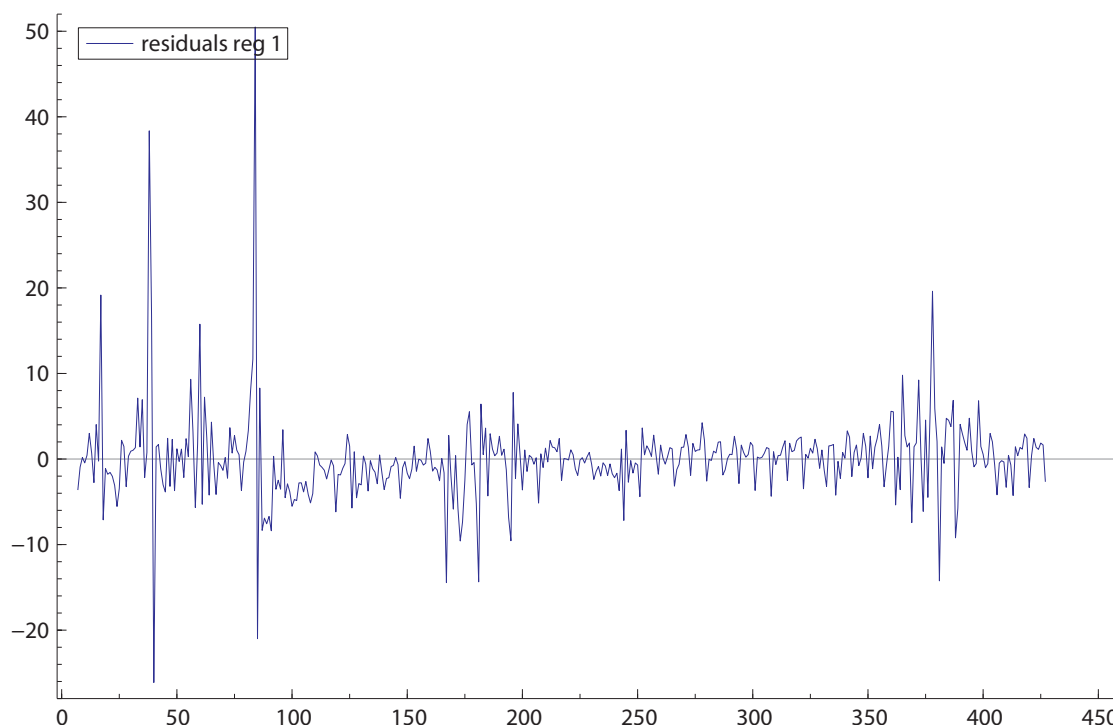
Det ses ud fra Tabel 3, at t-værdien til det lagget residualer er -20.3 , hvilket skal sammenlignes med en Dickey-Fuller fordeling på 5 % signifikansniveau, som er -2.86 . Dette betyder, at H_0 hypotesen kan afvises, og dermed er residualerne stationære. Dermed kan det siges at spotprisen er

trendstationær, når der er taget højde for de profiler, som data udviser.

Dette betyder, at spotprisen kan modelleres direkte, uden at modellere ændringen i spotprisen.

Ovenstående afgør imidlertid ikke, om simpel lineær regression er en god metode til at modellere spotprisen. En af betingelserne er, at der skal være homoskedasticitet i residualerne. Såfremt der er homoskedasticitet, vil residualerne have ens varians, og derfor ikke indeholde ARCH-effekter. Nedenstående figur viser residualerne for regressionen.

Figur 14 - Residualer for regression 2

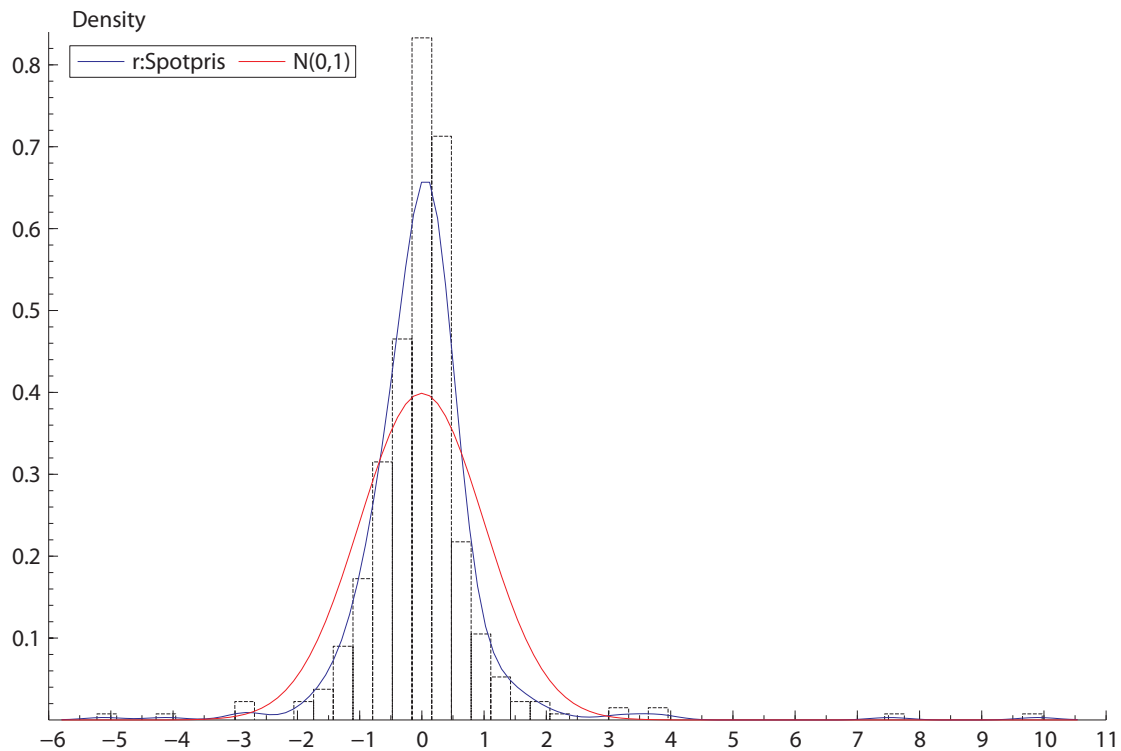


Det ses ud fra den grafiske inspektion, at residualerne udviser varierende volatilitet. Den grafiske inspektion er imidlertid ikke tilstrækkelig for at afgøre om residualerne indeholder ARCH effekter. Derfor udføres en test for ARCH effekter, hvilket uføres med en F-test. H_0 hypotesen for denne F-test er, at der ikke er ARCH effekter i residualerne.

Tabel 4 - ARCH test for regression 2

	Test	test-størrelse	P-værdi
ARCH-Test	F(1,401)	17.140	0.000

Det ses ud fra ovenstående tabel, at H_0 hypotesen kan afvises. Dette betyder, at residualerne ikke er homoskedastiske. Dermed kan spotprisen ikke modelleres ved hjælp af simpel lineær regression. Som sidste undersøgelse af residualerne præsenteres et histogram af residualerne med en normalfordeling.

Figur 15 - Residualt histogram for regression 2

Det ses tydeligt ud fra ovenstående figur, at residualerne udviser skævhed samt topstejlhed.

Ovenstående undersøgelse af residualerne medfører, at simpel OLS ikke er egnet til at modellere spotprisen. Dermed må der undersøges muligheder for at modellere residualerne. Dette kan enten gøres ved hjælp af en ARCH-GARCH model eller en jump-diffusion model. Af disse to, vil jeg først undersøge modellering ved hjælp af en ARCH-GARCH model, hvorefter jump-diffusion modellen undersøges.

ARCH-GARCH MODEL

10 ARCH-GARCH model

Foregående afsnit afslørede, at simpel OLS ikke var tilstrækkeligt til at modellere spotprisen. Det ses ligeledes jævnfør afsnit 6 og 9, at spotprisen udviser volatilitetsklumpning samt kurtosis. Dette giver belæg for ligesom tidligere forskning, at undersøge ARCH-GARCH modeller. I forrige afsnit blev der udviklet en passende middelværdistruktur, som der arbejdes videre med i forbindelse med ARCH-GARCH modellerne. Ved nedenstående ligning ses den fulde formulering af ARCH-GARCH modellen, hvilket også inkluderer variansstrukturen. Denne model er en GARCH(1,1) model.

$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 y_{t-3} + \beta_4 y_{t-4} + \beta_5 y_{t-5} + \beta_6 y_{t-6} + \beta_7 y_{t-7} + \dots \\
 &\dots \beta_9 \text{dummy}_{tirs} + \beta_{10} \text{dummy}_{ons} + \dots \\
 (8) \quad &\dots \beta_{11} \text{dummy}_{tors} + \beta_{12} \text{dummy}_{fre} + \beta_{13} \text{dummy}_{lor} + \beta_{14} \text{dummy}_{søn} \dots \\
 &\dots \beta_{15} \text{Temp}_{Sverige} + \beta_{16} \text{Temp}_{Sverige}^2 + \beta_{17} \text{hydro} + \beta_{18} \text{hydro}^2 + \varepsilon_t \\
 &\text{hvor } \varepsilon_t | Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\
 &\text{hvor } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2
 \end{aligned}$$

Hvor Y_{t-1} angiver alle tidligere observationer i det tilgængelige datasæt til tid t_{-1} . Denne type model har den karakteristika at fejleddet ikke er normalfordelt og har kurtosis, som er større end 3. Derfor tager GARCH modeller højde for de tykke haler, der ofte observeres i finansielle tidsserier. Dermed har disse modeller mulighed for at modellere den yderligere risiko, der opstår som følge af, at finansielle tidsserier sjældent har konstant varians (Heij 2004).

Nedenstående tabel viser estimationen af (8). Modellen er estimeret via Maximum Likelihood.

Tabel 5 - GARCH(1,1) med alle variable

	Koefficient	Std. Var.
Konstant	5.55070	1.181
Spot_1	1.23192	0.056
Spot_2	-0.66440	0.074
Spot_3	0.46473	0.071
Spot_4	-0.06689	0.067
Spot_5	-0.07475	0.058
Spot_6	0.09881	0.051
Spot_7	-0.04683	0.035
Dummy_tirs	-2.96404	0.360
Dummy_ons	-0.72798	0.398
Dummy_tors	-2.54002	0.364
Dummy_fre	-2.21289	0.371
Dummy_lør	-3.89840	0.344
Dummy_søn	-2.00284	0.343
Hydro	0.01714	0.077
Hydro^2	0.00006	0.002
TempSverige	-0.02599	0.024
TempSverige^2	-0.00057	0.001
Alpha_0	0.61006	0.123
Alpha_1	0.54345	
Beta_1	0.45655	0.431

Det ses ud fra ovenstående tabel, at ikke alle variablene er signifikante. Nedenstående tabel viser den endelige model, hvor variable stepvist er ekskluderet fra modellen. Desuden ses en tilhørende test for ARCH-effekter.

Tabel 6 - endelig GARCH (1,1)

	Koeffi- cient	Std. Error	T-prob
Konstant	0.092192	0.754	0.640
Spotpris_1	0.832229	0.028	0.000
Spotpris_7	0.136803	0.024	0.000
Dummy_tris	-2.153590	0.305	0.000
Dummy_ons	-2.154600	0.311	0.000
Dummy_tors	-2.049220	0.311	0.000
Dummy_fre	-2.452390	0.307	0.000
Dummy_lør	-3.709670	0.316	0.000
Dummy_søn	-2.886140	0.303	0.000
Hydro	-0.099028	0.021	0.010
TempSverige	0.124752	0.021	0.005
Alpha 0	0.192746	0.053	0.102
Alpha 1	0.301727		
Beta_1	0.698273	0.026	0.000

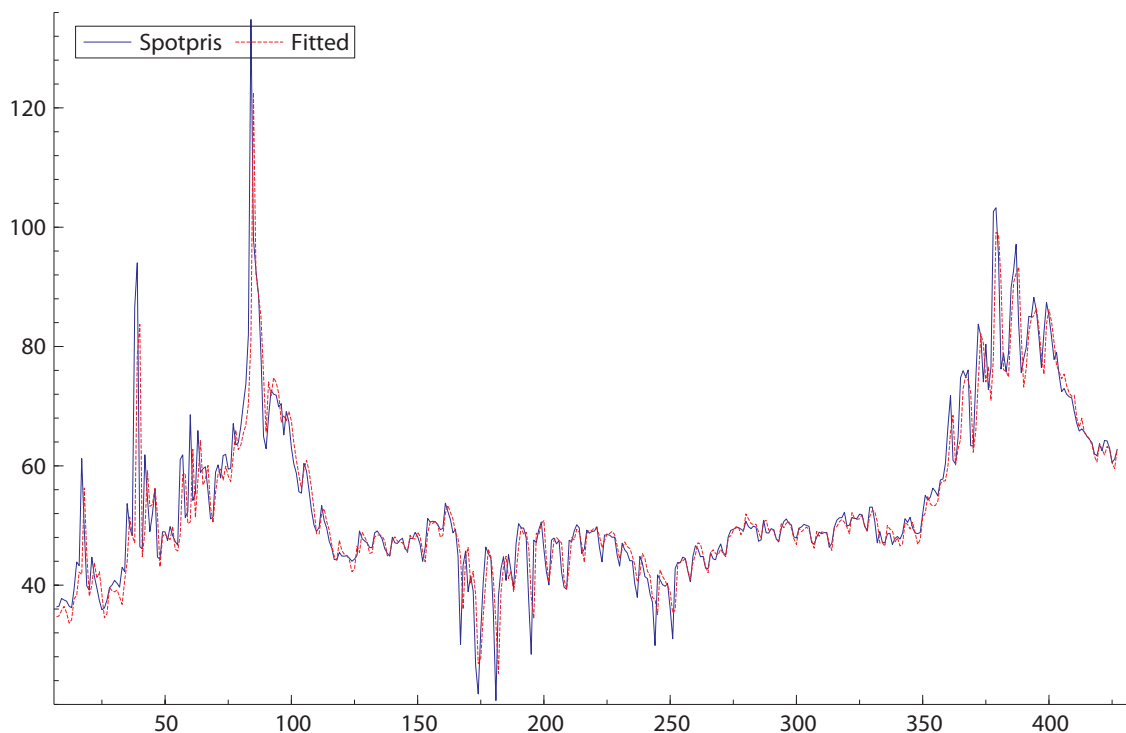
	Test	Test- størrelse	P-værdi
ARCH-Test	F(2,402)	0.024432	0.9759

Det ses ud fra ovenstående, at ikke alle de resterende variable er signifikante. Ovenstående specifikation vælges imidlertid som den endelige specifikation for GARCH modellen. Da alle variablene enten er signifikante eller medtaget af teoretiske årsager.

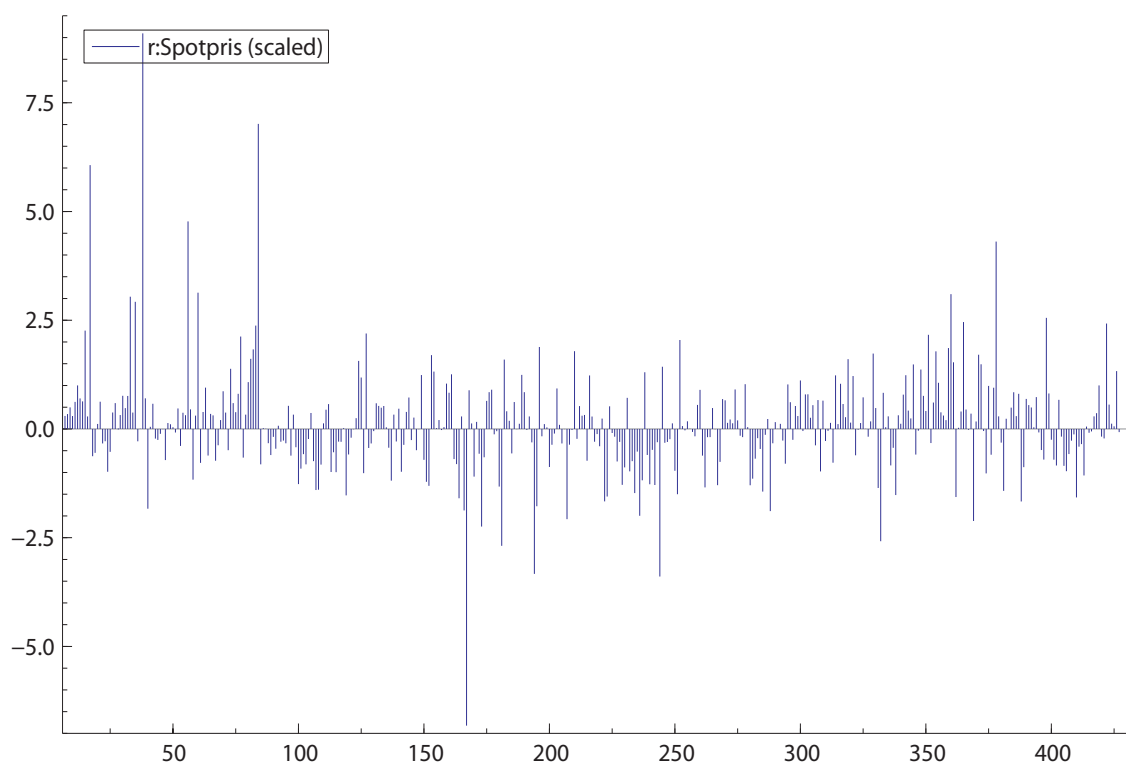
Det ses ud fra ovenstående F-test for ARCH effekter, at H_0 hypotesen ikke kan afvises ved denne model. Dette betyder, at GARCH(1,1) modellen har taget højde for de ARCH effekter, som var tilstede i middelværdistrukturen. Desuden ses det, at alle de inkluderede variable i modellen er signifikante. Det skal holdes in mente, at variablene er inkluderet primært af teoretiske årsager. Dermed vil ARCH-GARCH modellen ikke blive yderligere udbygget. Det skal dog bemærkes, at andre GARCH udvidelser er testet, så som en TGARCH. Det er imidlertid fundet, at en GARCH(1,1) er den bedste GARCH variation til at beskrive spotprisen.

Følgende figur viser de fittede værdier overfor de faktiske værdier.

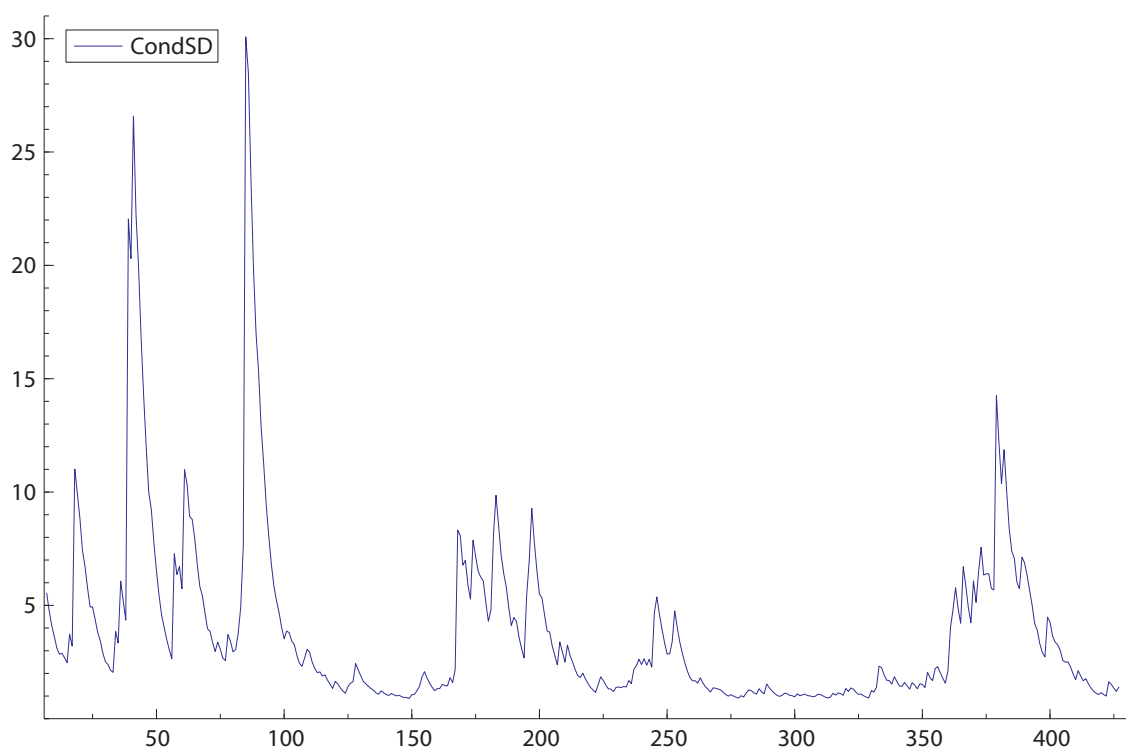
Figur 16 - Fitted vs. faktiske værdier for GARCH(1,1)



Det ses ud fra ovenstående figur, at de faktiske og fittede værdier stemmer relativt godt overens med hinanden specielt i perioder med lav volatilitet. I de perioder hvor volatiliteten er høj ses det at modellen i et vist omfang underestimerer størrelsen af spikesene både i positiv og i negativ retning. Nedenstående model viser yderligere, at modellen underestimerer spiksene.

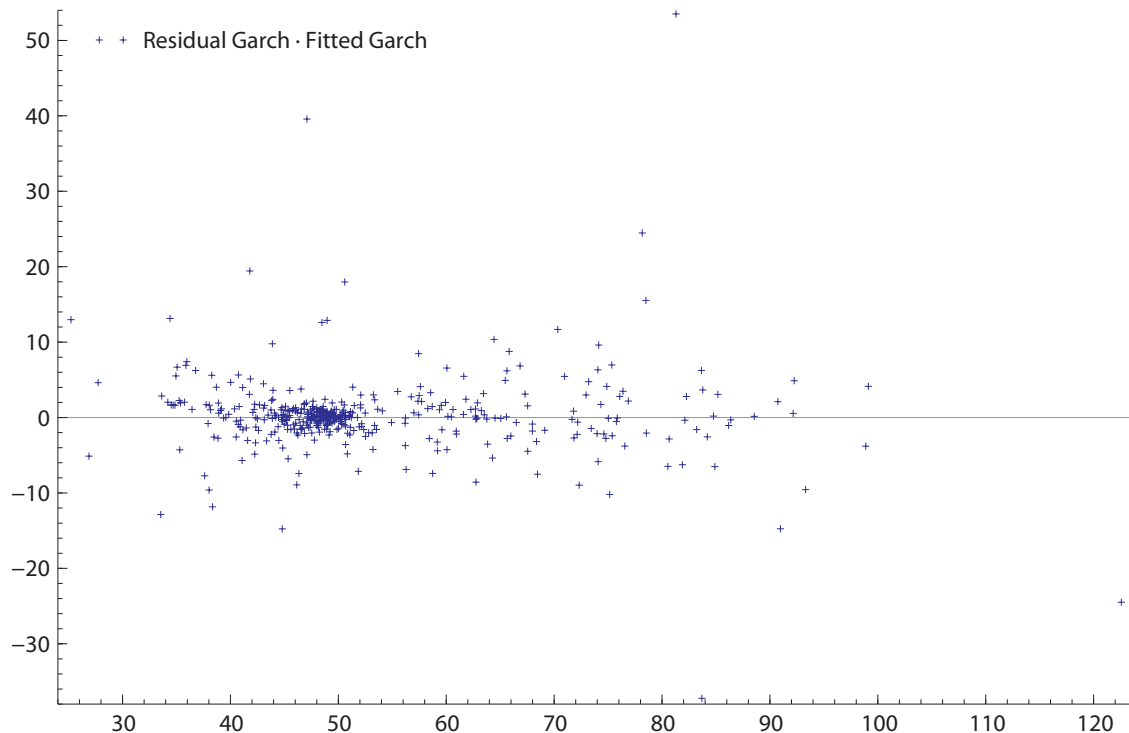
Figur 17 - Residualer for GARCH(1,1)

Det ses ud fra figuren, at residualerne er relativt store i de tilfælde, hvor spotprisen spiker. Hvilket bekræfter min påstand om, at residualerne underestimeres af modellen.

Figur 18 - Betinget varians GARCH(1,1)

Figur 18, viser den betingede varians for modellen. Denne betingede varians stemmer overens med figur 16. Da den betingede varians er høj i de perioder, hvor spotprisen har høj volatilitet.

Figur 19 - Scatterplot af residualer vs. fitted værdier



Ovenstående figur viser et scatterplot af, residualerne og de fittede værdier. Det ses at mønsteret i intervallet 30 til 60 ser tilfældigt ud. Det ses imidlertid også, at store fitted værdier i nogle tilfælde giver store residualer. Dette ses ved, at punkterne bliver mere spredt når, x værdierne bliver høje. Dermed underbygger ovenstående figur også min påstand om at GARCH modellen underestimerer spikes.

Den endelige GARCH model er givet ved følgende ligning.

$$\begin{aligned}
 y_t &= 0.092192 + 0.83223y_{t-1} + 0.13680y_{t-7} \\
 &+ (-2.15359)dummy_{tirs} + (-2.1546dummy_{ons}) + (-2 - 04922)dummy_{tors} \\
 (9) \quad &+ (-2.45239)dummy_{fre} + (-3.70967)dummy_{lør} + (-2.88914)dummy_{søn} \\
 &+ 0.12475Temp_{Sverige} + (-0,099028)hydro + \varepsilon_t \\
 \text{hvor } \varepsilon_t | Y_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\
 \text{hvor } \sigma_t^2 &= 0,19275 + 0,30173\varepsilon_{t-1}^2 + 0,69827\sigma_{t-1}^2
 \end{aligned}$$

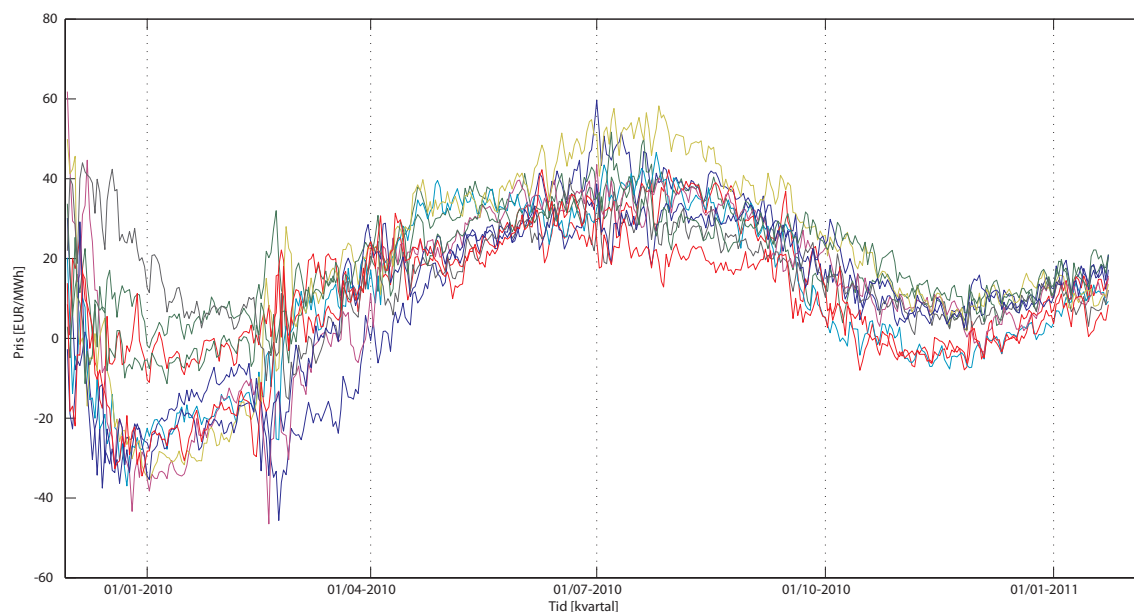
10.1 Simulering af GARCH model

Når GARCH modellen senere i opgaven skal sammenlignes med jump-diffusion modellen, er det nødvendigt at simulere modellen. Således forecastes der ikke kun en enkelt mulig udvikling for GARCH modellen. Dette medfører, at det er muligt at prisfastsætte optioner via Monte Carlo simulation. Simuleringen foregår i MATLAB, når GARCH modellen simuleres tages der udgangspunkt i en startværdi, hvorfra mulige stier simuleres. Simulationen foregår ud fra (9).

For at kunne simulere GARCH modellen er det nødvendigt at have startværdier. Det ses ud fra (9), at det er nødvendigt med syv lags af spotprisen, samt et estimat for det lagget residual og betinget varians. Derfor er den første dag der simuleres den 8/12 2009, da de syv foregående værdier af spotprisen er nødvendige. Det er samtidigt nødvendigt at kende et lag af residualen samt et lag af den betingede varians. Dette findes, ved at udføre en regression over (8), og estimere residualen samt den betingede varians for den 7/12 2009. Estimatet for residualen er 1.65732 og estimatet for den betingede varians er 30.8467.

Nedenstående figur viser ti ud af mange mulige udviklinger for GARCH modellen.

Figur 20 - Simuleret GARCH model



Det ses ud fra ovenstående figur, at modellen kan tage mange mulige stier, hvor spotprisen er positiv såvel som negativ. Det ses ligeledes, at modellen simulerer høj volatilitet i starten af første og fjerde kvartal 2010, hvilket også har været tilfældet. Det er imidlertid tvivlsomt, hvorvidt modellen kan simulere, de spikes der eksempelvis observeres i den faktiske spotpris i første kvartal 2010.

JUMP-DIFFUSION MODEL

11 Jump-diffusion model

Den anden mulighed for at modellere spotprisen er ved hjælp af en jump-diffusion model. I følgende afsnit vil jeg søge at tilpasse en jump-diffusion model til residualerne. Grunden til, at jeg har valgt at modellere residualerne, er, at GARCH modellen underestimerede spikes. Dermed giver jeg mulighed for, at modellere spikesene i fejllødet. Spikesene er blandt andet vigtige at få modelleret, såfremt modellen skal anvendes til at prisfastsætte derivater. Dette skyldes, at spikes alt andet lige medfører en højere volatilitet, hvilket medfører en højere værdi af derivatet. Dermed vil en model, der underestimerer spikes også underestimere værdien af derivater.

Som tidligere nævnt kan jump-diffusion modeller tage højde for spikes, på grund af modellen inkluderer et så kaldt jump-led. GARCH modellens udfordring var netop at modellen underestimerede spikes. Derfor udbygges ovenstående GARCH model, til at indeholde spikes således modellen specificeres via nedenstående ligning.

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_t &= 0.092192 + 0.83223 \tilde{y}_{t-1} + 0.13680 \tilde{y}_{t-7} \\
 &+ (-2.15359)dummy_{tirs} + (-2.1546dummy_{ons}) + (-2 - 04922)dummy_{tors} \\
 &+ (-2.45239)dummy_{fre} + (-3.70967)dummy_{lør} + (-2.88914)dummy_{søn} \\
 &+ 0.12475Temp_{Sverige} + (-0,099028)hydro + \tilde{\varepsilon}_t \\
 (10) \quad &hvor \quad \tilde{\varepsilon}_t | Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\
 &hvor \quad \sigma_t^2 = 0,19275 + 0,30173 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,69827 \sigma_{t-1}^2 \\
 &y_t = \tilde{y}_t + Z_t n_t + \varepsilon_t \\
 &hvor \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad hvor \quad Z_t \sim N(\mu_1^S, \sigma_1^S) \quad n_t \sim POI(\lambda_1)
 \end{aligned}$$

Ovenstående model, er som før nævnt en videreudvikling, af GARCH modellen fra afsnit 10. Dermed udbygges GARCH modellen med jumps. Således modellen giver mulighed for at ligge jumps ind i processen, for dermed at tage højde for de observerede spikes. Det ses, at modellen er en ren additiv proces, hvor GARCH modellen indgår som underliggende struktur. Når denne struktur er bestemt adderes spikekomponenten og det tilfældige fejllødet. Denne model sikrer dermed, at spikesene ikke har en blivende effekt på spotprisen. Dermed tager modellen højde for de pludselige spikes, som typisk kun opstår en dag, hvor en bestemt produktionsmetode oplever udfald. Dermed har jeg valgt at modellere spotprisen via en anden type jump-diffusion model end en mean-reverting jump-diffusion model.

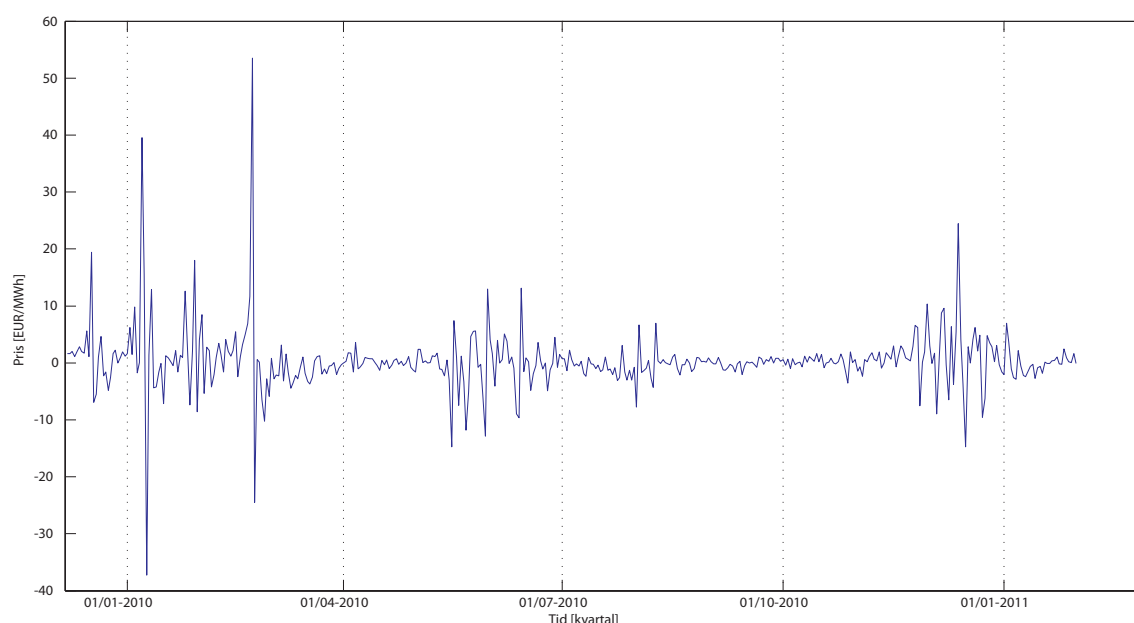
Det første skridt i at estimere en jump-diffusion model er at estimere jump-intensiteten. Dette kan gøres på flere måder. Den ene metode er, at anvende maximum likelihood estimerer ud fra historiske data. Der har imidlertid tidligere været problemer med denne metode i form af estimerer med forkert fortegn (Cartea 2005). Derfor vil jeg anvende en anden metode, hvor spikesene udskilles fra residualerne, hvorefter jump-intensiteten samt andre parametre kan estimeres.

11.1 Bestemmelse af spikes

Med det formål at bestemme spikesene for residualerne estimeres GARCH modellen lige som i afsnit 10. Dermed estimeres størstedelen af parametrene for modellen ligeledes. Residualerne for denne model gemmes og bearbejdes yderligere. Estimerne for GARCH modellen ses eksempelvis i (10) eller i tabel 6

Nedenstående figur viser residualerne for ovenstående regression.

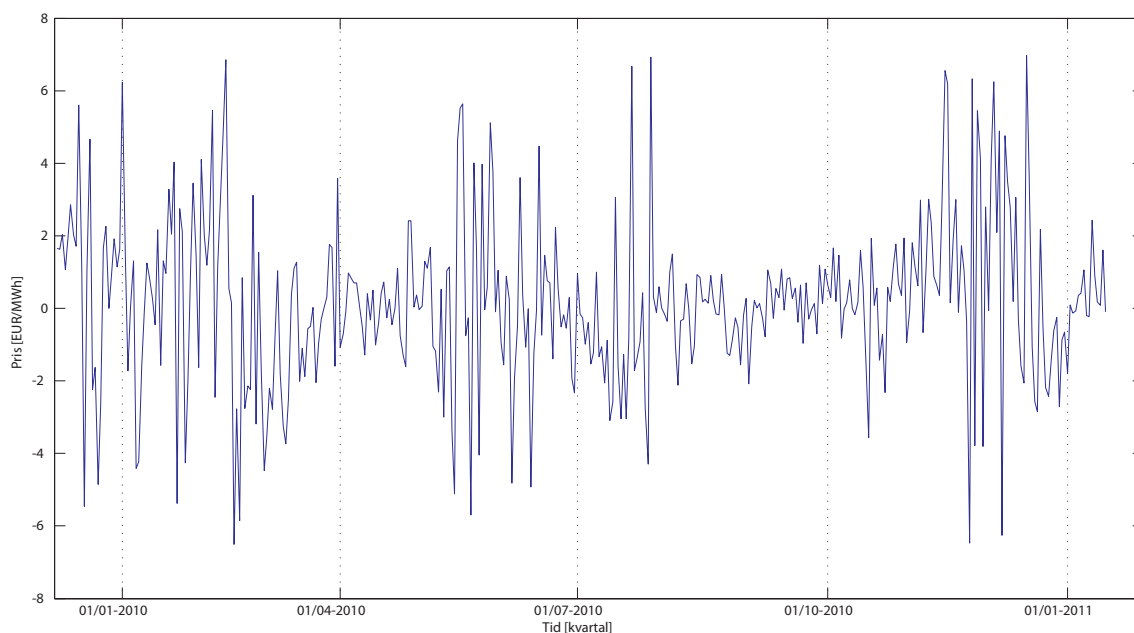
Figur 21 - Residualer jump-model



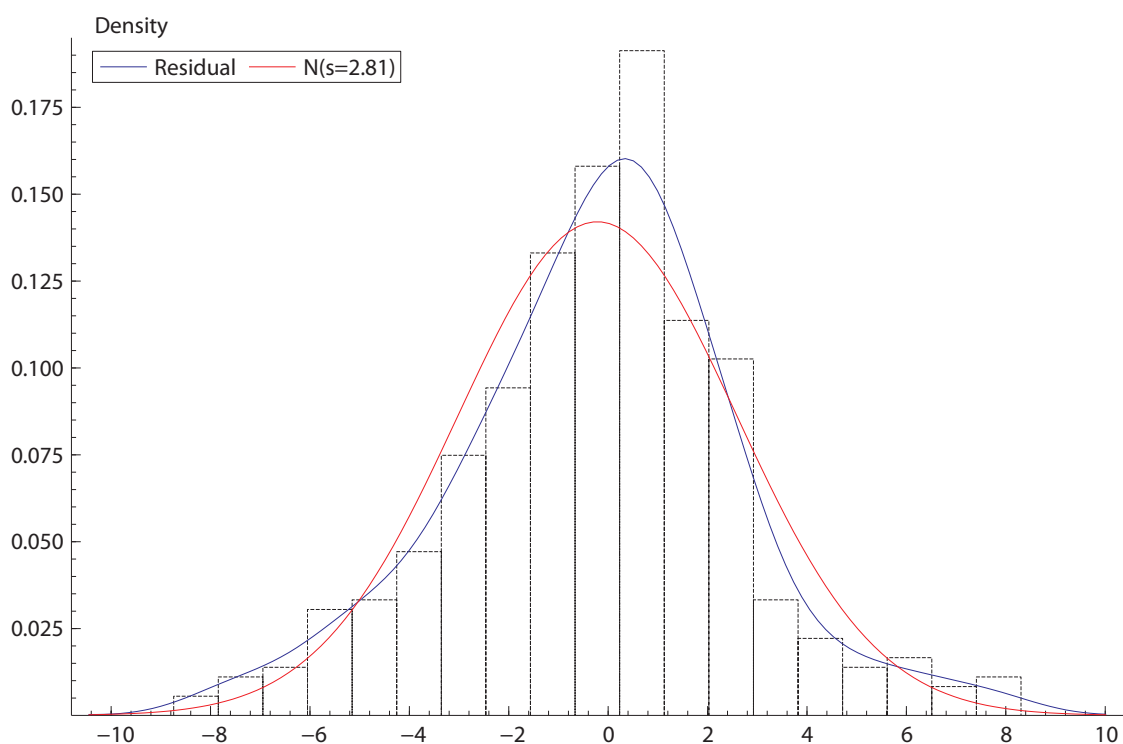
Det ses tydeligt ud fra ovenstående figur, at residualerne spiker. Dette ses eksempelvis i første kvartal 2010.

Udskillelsen af spikes fra residualerne sker ved hjælp af en iterativ proces. Først estimeres middelværdien og variansen af residualerne, hvor middelværdien er 0.338 og standardafvigelsen er 5.5328. Dernæst fjernes alle de værdier, der er mere end tre standardafvigelser fra middelværdien. Herefter estimeres en ny middelværdi og varians, hvorefter observationer igen fjernes. Dette gøres indtil der ikke er flere observationer, som ligger mere end tre standardafvigelser væk fra middelværdien. Dermed opstår der en serie med spikes og en serie uden spikes. Det skal imidlertid gøres opmærksom på, at denne metode er subjektiv. Dette skyldes, at spikes defineres som værende værdier, der er mere end tre standardafvigelser væk fra middelværdien. Dette er ikke nødvendigvis den korrekte definition af spikes, men det er den definition, jeg vælger at anvende.

Såfremt denne iterative proces og ovenstående definition af spikes anvendes, findes der 35 spikes i alt. Det bemærkes, at disse spikes både er i positiv og negativ retning. Det skal ligeledes bemærkes at der er 17 positive spikes, samt 18 negative spikes, hvilket næsten er ligeligt fordelt. Det skal desuden også bemærkes, at spikesene generelt ligger i klumper. Dermed er der mange spikes eksempelvis i januar og maj 2010. Som det ses ved nedenstående figur vil residualerne uden spikes have følgende udsende.

Figur 22 - Residualer uden spikes

Det ses ud fra ovenstående figur, at residualerne, nu i højere grad udviser et tilfældigt mønster uden nogen tydelige spikes. Nedenstående figur viser et histogram for residualerne.

Figur 23 - Histogram over residualer uden spikes

Det ses ud fra ovenstående figur, at residualerne uden spikes stadig ikke er helt normalfordelte. Såfremt der udføres en normalitetstest er p-værdien 0,002 for en χ^2 test med to frihedsgrader. Dette betyder, at hypotesen om normalitet afvises på 5 % signifikansniveau. Jeg tillader mig imidlertid at antage at residualerne uden spikes er normalfordelte i modelleringen.

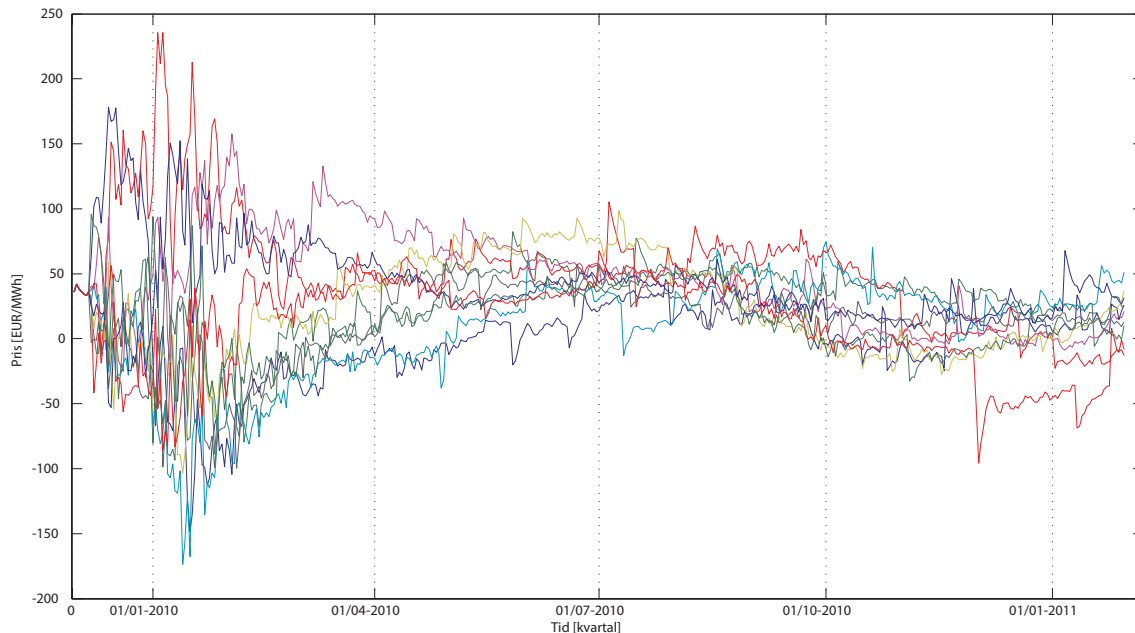
Da der er 35 spikes ud af et datasæt på 421 observationer, vil frekvensen af spikesene være 0.083135. Frekvensen af spikesene er estimeret for λ , der indgår i (10) som parameteren i poissonfordelingen. Middelværiden af spikesene er 2.064238 med en standardafvigelse på 17.73553. Middelværiden og standardafvigelsen i anden er de parametre, der indgår i (10), der er bestemmende for, hvordan Z er fordelt.

11.2 Simulering af jump-diffusion model

For at kunne simulere jump-diffusion modellen er det nødvendigt at have startværdier. Det ses ud fra (9), at det er nødvendigt med syv lags af spotprisen, samt et estimat for det lagget residual og betinget varians. Derfor kan den første dag der simuleres den 8/12 2009, da de syv foregående værdier af spotprisen er nødvendige. Det er samtidigt nødvendigt at kende et lag af residuallet samt et lag af den betingede varians. Dette findes, ved at udføre en regression over (8), og estimere residuallet samt den betingede varians for den 7/12 2009. Estimatet for residuallet er 1.65732 og estimeret for den betingede varians er 30.8467.

Nedenstående figur viser ti ud af mange mulige udviklinger for GARCH modellen.

Figur 24 - Simuleret Jump-diffusion model



Som det ses ud fra ovenstående figur udviser simuleringen af spotprisen spikes. Disse spikes ses både i positiv og negativ retning. Desuden ses det, at volatiliteten af spotprisen varierer over tid. Eksempelvis ses det at volatiliteten tilsyneladende er høj første kvartal 2010 og markant lavere i tredje kvartal 2010. Det ser imidlertid ud til at jump-diffusion modellen giver mulighed for større forskellighed i stierne, da spikesene spreder de ti stier fra hinanden i højere grad end den originale GARCH model. Ovenstående betragtninger er imidlertid ikke fyldestgørende til at afgøre, hvorvidt jump-diffusion modellen er bedre til at modellere spotprisen end GARCH modellen.

Hvilken af de to specificerede modeller, der bedst beskriver spotprisen, afgøres i næstkommende afsnit.

12 Sammenligning af modellerne

Følgende afsnit har det formål at afgøre, om GARCH modellen eller jump-diffusion modellen modellerer spotprisen bedst.

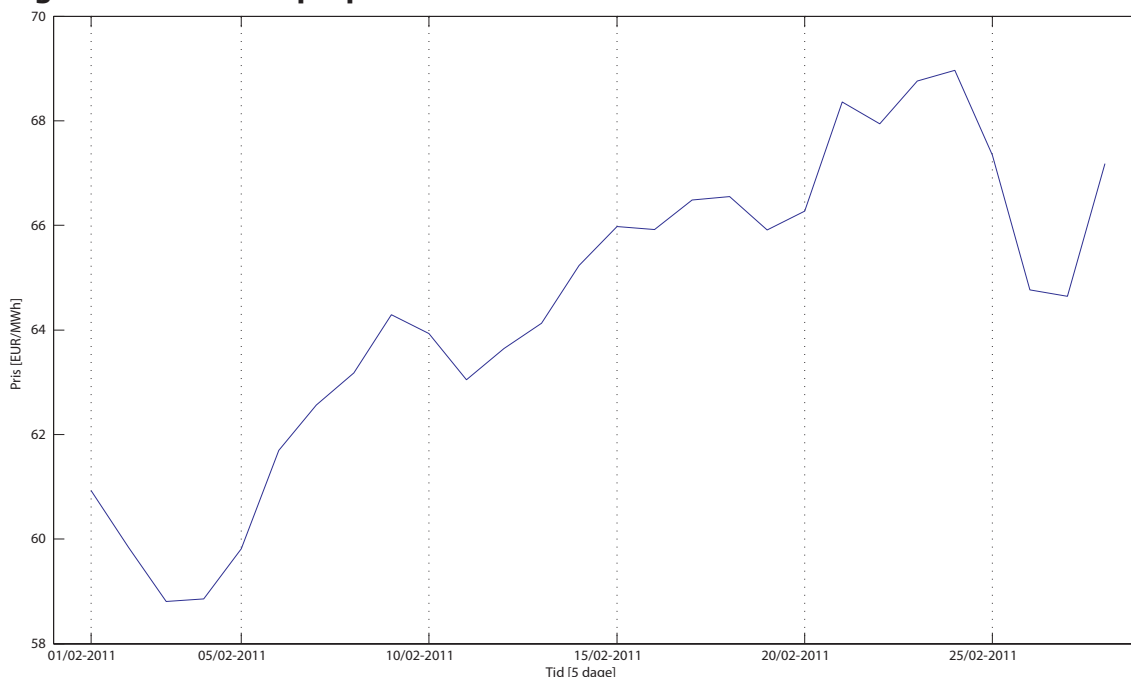
For at sammenligne modellerne vil jeg simulere modellen out of sample. Dette skyldes, at en sammenligning in sample kan være for optimistisk, da koefficienterne i modellen er estimeret ud fra det data, der simuleres. Dermed vil jeg simulere februar 2011. Dette giver mig ligeledes den fordel, at spotprisen for februar 2011 allerede er realiseret, hvilket giver mig muligheden for at sammenligne de faktiske værdier for spotprisen mod de simulerede værdier. Ud over at simulere spotprisen out of sample, vil jeg også simulere spotprisen in sample i en af sommermånederne, da vinter månederne typisk er mere volatile og derfor sværere at modellere. Den måned der vælges er juni 2010.

Ud fra de simulerede værdier for februar 2011 vil jeg først sammenligne modellernes generelle karakteristika med den faktiske spotpris. Derefter vil jeg anvende modellerne til at prisfastsætte en option både for juni 2010 og februar 2011. Prisfastsættelse af finansielle derivater er det øjeblik, modellen oprindeligt er udviklet til, dermed vil det være nærliggende at teste, hvilken model der prisfastsætter optioner bedst. En anden fordel ved at prisfastsætte optioner ud fra modellerne er, at denne metode tager højde for, at simuleringen af spotprisen via modellerne har mange forskellige udfald. Disse forskellige udfald udnyttes når optionerne prisfastsættes via Monte Carlo simulation. Ud fra disse ovenstående sammenligninger vil det være muligt at afgøre, hvilken af de to modeller der er den bedste.

12.1 Simulering af februar 2011

For at simulere februar 2011 skal der anvendes data for temperaturen i Sverige samt hydrobalancen. Data for temperaturen i Sverige er anskaffet via Nordjysk Elhandels meteorolog Christian Tykskov. Data for hydrobalancen er fremskaffet via nena.no, disse data er ikke tilgængelige for offentligheden, men fremskaffet via Nordjysk Elhandel. Data for spotprisen for februar 2011 er trukket fra Energinet.dk, hvor data er offentligt tilgængelig. Nedenstående figur viser den faktiske udvikling for spotprisen i februar 2011.

Figur 25 - Faktisk spotpris februar 2011



I afsnit 10 blev GARCH modellen estimeret, ved den estimation er residualet den 31/1-2011 -0.100591 og den betingede varians er 1.99138. Disse værdier skal anvendes for at kunne estimere GARCH modellen den 1/2-2011. Nedenstående figur viser ti mulige stier spotprisen kunne tage via simulation af GARCH modellen.

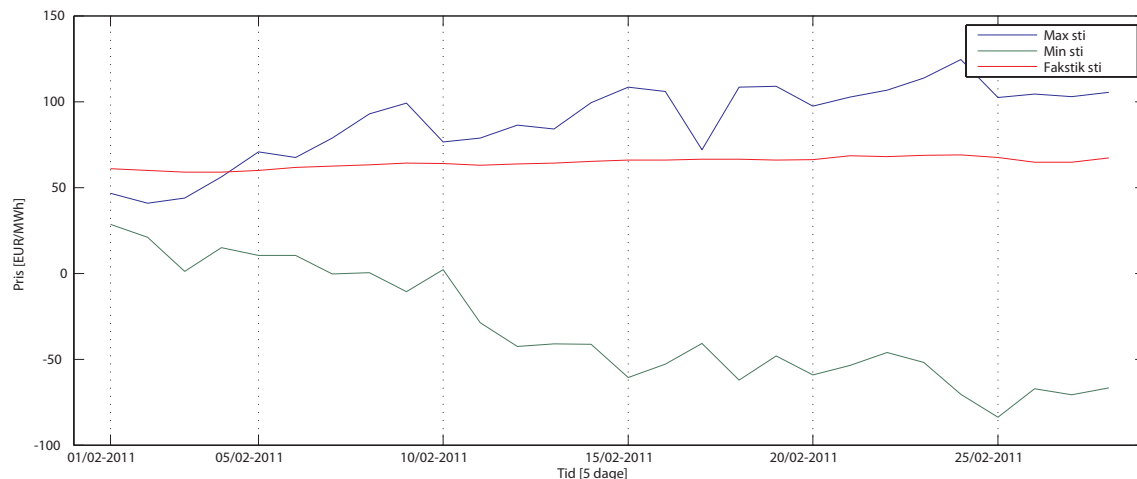
Figur 26 - Simuleret spotpris via GARCH model



Det ses at ovenstående figur ikke helt stemmer overens med figur 25. Det skal holdes in mente, at ovenstående ligeledes kun er ti af de mulige udviklinger af spotprisen, som GARCH modellen kan simulere. Dermed er karakteristikaene for modellen mere interessante at sammenligne med den faktiske udvikling. Disse karakteristika vil blive sammenlignet, når jump-diffusion modellen er simuleret.

For at vurdere, hvorvidt ARCH GARCH modellen kan simulere en sti, der er i overensstemmelse med den faktiske sti udarbejdes nedenstående figur. Nedenstående figur viser et 95 % konfidensinterval, hvor der er vist den øverste sti og den nederste sti i konfidensintervallet.

Figur 27 - 95 % konfidensinterval for GARCH simulering



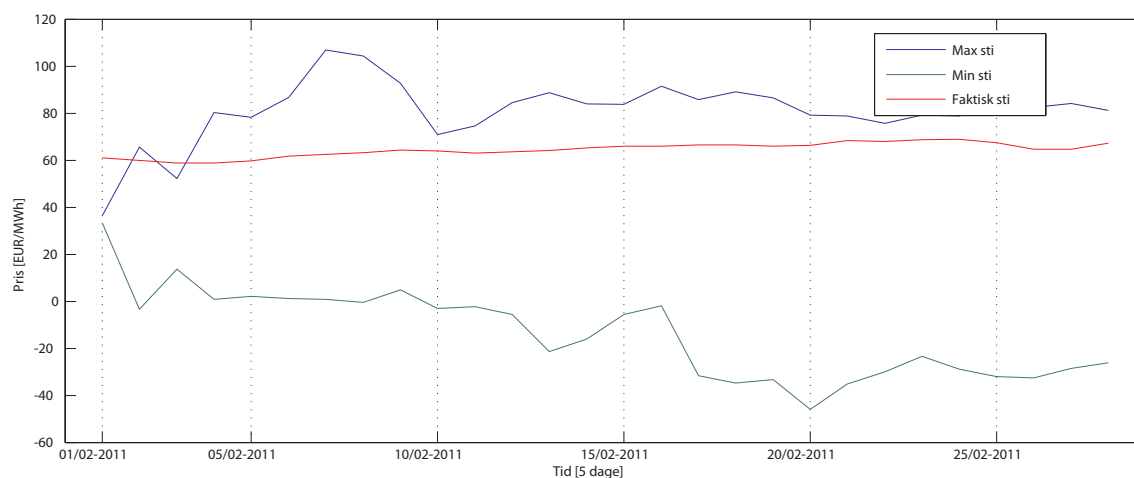
Det ses ud fra ovenstående figur, at den faktiske sti ligger inden for 95 % konfidensintervallet, hvilket betyder, at GARCH modellen er i stand til at simulere en sti, der ligger i niveau med den faktiske sti. Det skal imidlertid bemærkes, at den faktiske sti, ligger langt oppe imod den øverste grænse, hvilket bekræfter, at GARCH modellen underestimerer spotprisen i februar 2011. Nedenstående figur viser ti mulige stier spotprisen kunne tage via simulation af jump-diffusion modellen.

Figur 28 - Simuleret spotpris via jump-diffusion model



Det ses ligeledes, at ovenstående figur eller ikke stemmer overens med figur 25. Det skal igen holdes in mente, at udviklingen kun er ti af mange mulige via jump-diffusion modellen. Dermed er det mere interessant at undersøge karakteristika for de to simuleringer i forhold til den faktiske spotpris.

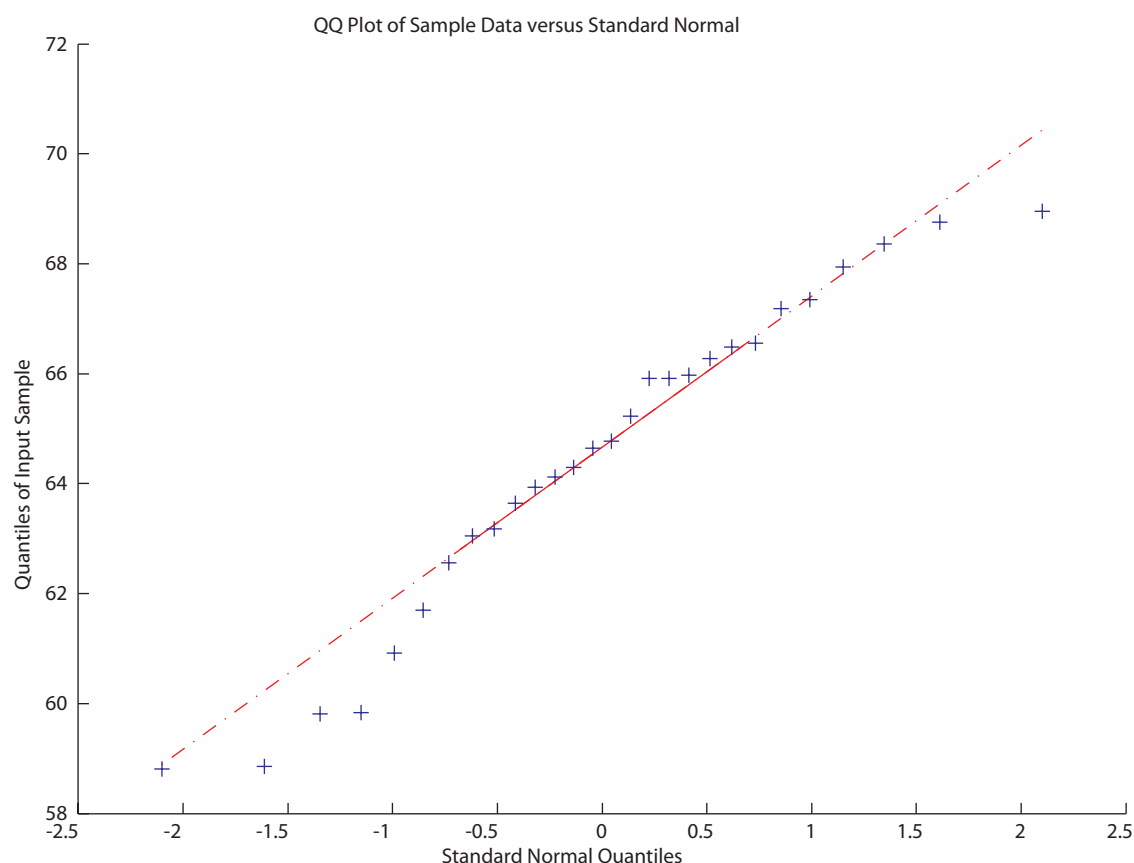
Figur 29 - 95 % konfidensinterval for GARCH simulering



Det ses ud fra ovenstående figur, at den faktiske sti ligger inden for 95 % konfidensintervallet, hvilket betyder, at jump-diffusion modellen er i stand til at simulere en sti, der ligger i niveau med den faktiske sti. Det skal imidlertid bemærkes, at den faktiske sti, ligger langt oppe imod den øverste grænse, hvilket bekræfter, at jump-diffusion modellen underestimerer spotprisen i februar 2011. Da både GARCH og jump-diffusion modellen kan simulere stier, der ligger i niveau med den faktiske sti, er denne sammenligning ikke fyldestgørende til at konkludere, hvilken af modellerne, der er bedst.

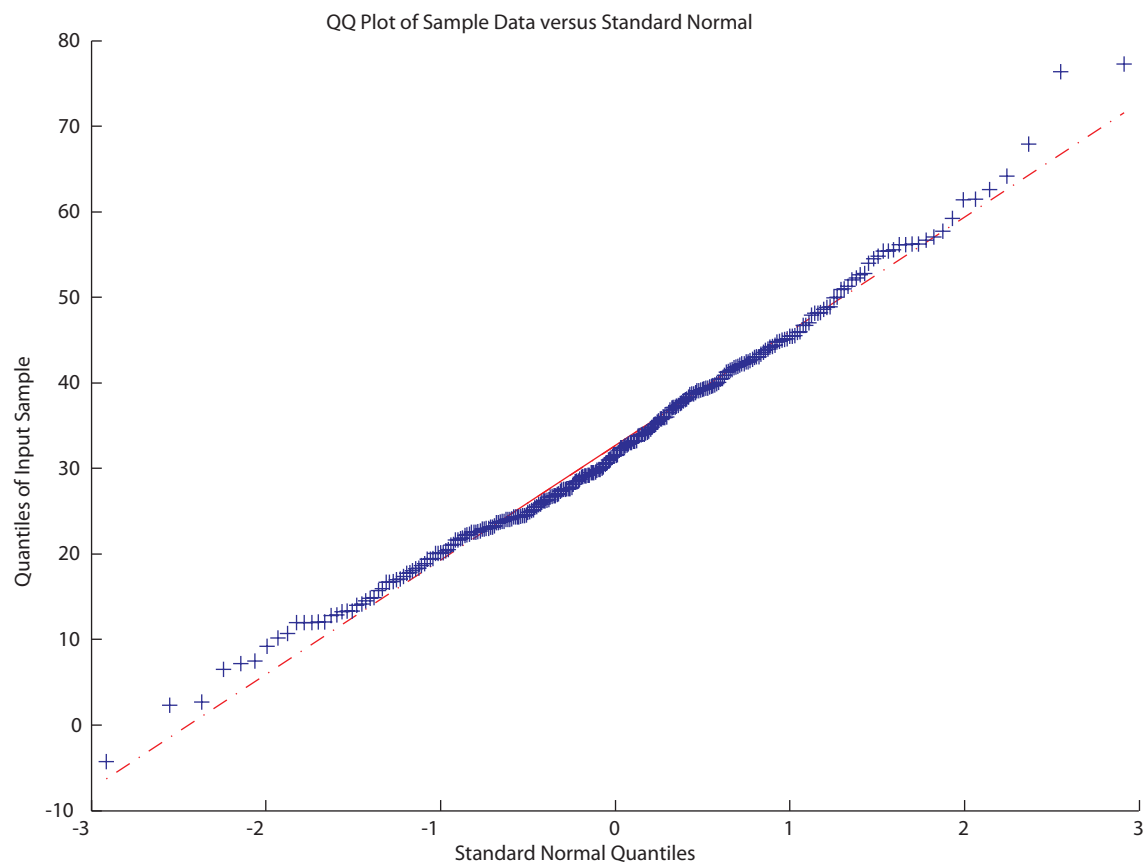
Den næste sammenligning er en sammenligning af fordelingen af de tre serier. Nedenstående figur er et QQ plot af den faktiske spotpris.

Figur 30 - QQ plot for den faktiske spotpris



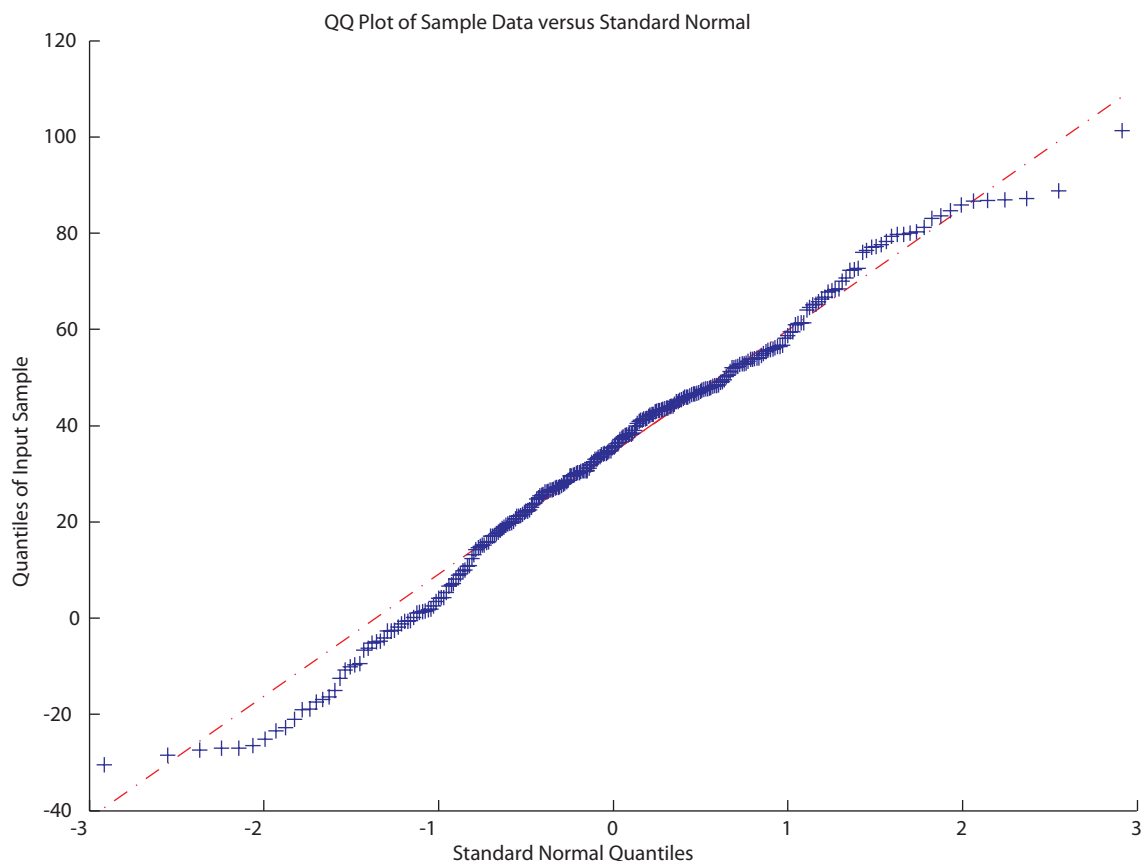
Det ses, at den faktiske spotpris ikke er normalfordelt, det ses tilmed, at den faktiske spotpris har tykkere haler end normalfordelingen, hvilket også stemmer overens med tidligere undersøgelser af spotprisen. Nedenstående figur illustrerer QQ plottet for simuleringen af GARCH modellen.

Figur 31 - QQ plot for spotpris simuleret via GARCH model



Det ses, at QQ plottet for GARCH modellen ser næsten normalfordelt ud, der er en smule tykke haler, men ikke i samme grad som den faktiske spotpris. Den næste figur illustrerer QQ plottet for jump-diffusion modellen.

Figur 32 - QQ plot for spotpris simuleret via Jump-diffusion model



Ovenstående figur viser ligeledes tykke haler som den faktiske spotpris. Det ses imidlertid, at spotprisen i nogle tilfælde bliver højere end den faktiske spotpris for februar 2011. Derfor er det muligt at jump-diffusion modellen udviser for store spikes i positiv retning. Det er imidlertid svært at konkludere ud fra disse figurer, da QQ plotsene for GARCH og jump-diffusion modellen vil være anderledes såfremt modellerne simuleres igen.

De sidste sammenligninger jeg vil gøre for ovenstående simulationer ses i nedenstående tabel.

Tabel 7 - Deskriptiv statistik for februar 2011

	GARCH	Jump	Faktisk
Middelværdi	32.7120	33.8423	64.464
Standardafvigelse	8.5607	22.1241	2.9006
Skævhed	0.22321	1.8985	-0.42017
Ekstra kurtosis	-0.77578	4.6698	-0.73681

Ovenstående tabel viser deskriptiv statistik for de to modeller samt den faktiske udvikling. Det ses at begge modeller underestimerer middelværdien. Det ses ligeledes at jump-diffusion modellen har en højere standardafvigelse end den faktiske spotpris udviser samt GARCH modellen. Det ses ligeledes at jump-diffusion modellen har langt højere skævhed samt kurtosis end den

faktiske spotpris og spotprisen simuleret via GARCH modellen. Ovenstående deskriptiv statistik viser umiddelbart at GARCH modellens karakteristika ligger tættere på den faktiske spotpris karakteristika. GARCH modellen underestimerer imidlertid ligeledes middelværdien samt overestimerer variansen. Det er imidlertid svært at konkludere noget ud fra ovenstående analyse, da de simulerede værdier for de to modeller kun er ti ud af mange mulige udviklinger. Derfor er der yderligere et behov for at undersøge, hvilken model, der er bedst. Dette vil jeg søge at gøre via prisfastsættelse af optioner.

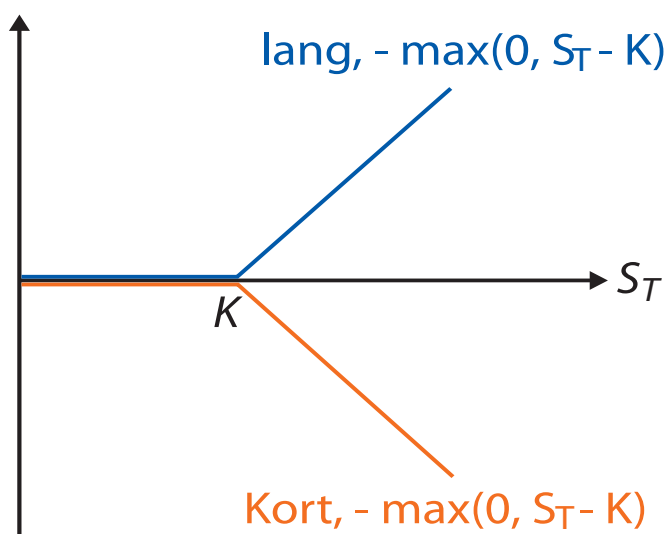
12.2 Teoretisk redegørelse for optioner

Før jeg anvender modellerne til at prisfastsætte optionerne, vil jeg gennemgå det teoretiske grundlag for optioner.

En option er en ret men ikke en pligt til at købe eller sælge et stk. underliggende aktiv til en given pris kaldet en strike, K . Når køberen af optionen har retten til at købe et stk. af underliggende aktiv kaldes optionen en call option. Når køberen har retten til at sælge et stk. af underliggende aktiv kaldes optionen en put option. Begge disse optioner kaldes plain vanilla optioner, hvilket blandt andet skyldes, at de kan prisfastsættes via en simpel Black Scholes formel. Jeg vil imidlertid ikke gennemgå prisfastsættelsen af optioner via Black Scholes, da denne metode ikke er relevant for de optioner jeg ønsker at prisfastsætte.

Følgende figur illustrerer payoffet for en call option med strike K og prisen på det underliggende aktiv S_T .

Figur 33 - Payoff diagram for en call option

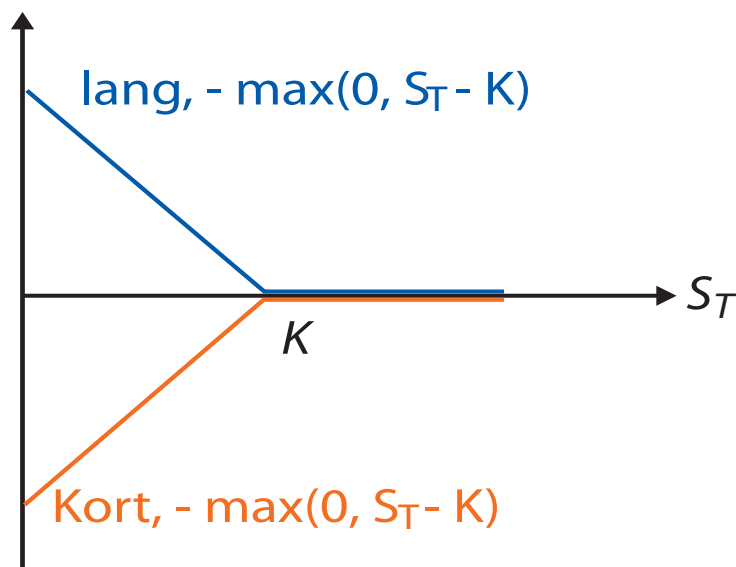


Kilde: Grinblatt 2004, side 260-261

Det ses, at såfremt en aktør er lang i en call option, er payoffet mindst lig med nul. Dermed kan køberen maksimalt tabe den præmie, der er betalt for optionen. Der er imidlertid ubegrænset opside på optionen.

Nedenstående figur illustrerer payoffet for en put option med strike K og prisen på det underliggende aktiv S_T .

Figur 34 - Payoff diagram for en put option



Kilde: Grinblatt 2004, side 260-261

Det ses ud fra ovenstående figur, at køberen af put optionen ligeledes kun kan tabe præmien, der er betalt for optionen. Det skal imidlertid bemærkes, at der er begrænset opside på en put option. Dette skyldes, at prisen på det underliggende aktiv ikke kan blive mindre end nul. Allerede i denne situation er optioner på strøm anderledes. Dette skyldes, at prisen på strøm godt kan blive negativ. Dermed begrænses opsidens på put optionen ikke som vist i ovenstående figur. Put optionen begrænses af en nedre grænse der hedder minus 200 EUR. Da dette er den fastsatte nedre grænse på strøm.

Ovenstående optioner findes både som europæiske optioner og amerikanske optioner. Forskellen på europæiske og amerikanske optioner er exercise tidspunktet. Europæiske optioner kan kun exercises på udløbstidspunktet, mens amerikanske optioner kan exercises på et vilkårligt tidspunkt i optionens løbetid. Såfremt det underliggende aktiv er en aktie, og der ikke udbetales dividender på aktien så er værdien af en amerikansk call og en europæisk call den samme. Dette er imidlertid ikke gældende for put optioner.

Der findes også optioner, som kaldes eksotiske optioner. Disse optioner har andre karakteristika end plain vanilla optioner. På strøm handles ofte asiatiske optioner, som er en af de mange eksotiske optioner. For en asiatisk option er det gennemsnittet af prisen på det underliggende aktiv, som holdes op mod striken. Denne gennemsnitsbetragtning er netop årsagen til, at asiatiske optioner ofte bliver handlet i forbindelse med elektricitet. Støttesystemerne til eksempelvis decentrale kraftvarmeværker er opbygget omkring gennemsnitsprisen på elektricitet over en given periode. Dermed kan asiatiske optioner give en god mulighed for at hedge disse støttesystemer.

Asiatiske optioner ses i to grundlæggende udgaver en average price og en average strike. En average price call har følgende payoff $\text{Max}(0, S_{\text{ave}} - K)$, og en average strike har følgende payoff $\text{Max}(0, S - K_{\text{ave}})$, hvor strike prisen bliver gennemsnittet af prisen på det underliggende aktiv i den valgte periode. Teoretisk skelnes der ligeledes mellem kontinuere og diskrete asiatiske optioner. I praksis er asiatiske optioner udelukkende diskrete. Dette skyldes, at det underliggende aktiv skal observeres et vist antal gange, for at kunne udregne gennemsnitsprisen af det underlig-

gende aktiv. Hvor ofte det underliggende aktiv observeres aftales mellem køber og sælger inden der handles med optionen. Det faktum, at gennemsnitsprisen indgår i udregningen af optionens værdi, medfører at optionen bliver stærkt stiafhængig. Dermed kan asiatiske optioner ikke prisfastsættes på samme metode som plain vanilla optioner. Asiatiske optioner prisfastsættes derimod typisk via Monte Carlo simulation. Ved denne metode simuleres stien for det underliggende aktiv k gange, hvorefter optionens værdi udregnes for hver sti. Derefter findes gennemsnittet af de k værdier, hvilket tilbagediskonteres.

Denne metode illustreres ved nedenstående formel.

$$(11) \quad \text{værdi af asiatisk option} = \frac{\sum_{i=1}^k \text{Max}(0, S_{ave} - K)}{k}$$

$$\text{nutidsværdi af asiatisk option} = \text{værdi af asiatisk option} * (1 + r)^{-t}$$

Det skal bemærkes, at en asiatisk option er mindre følsom overfor udsving i det underliggende aktiv, da variansen på gennemsnitsprisen er lavere end variansen på prisserien selv.

Da asiatiske optioner ofte handles i forbindelse med elektricitet vil jeg prisfastsætte asiatiske optioner med det formål at sammenligne GARCH og jump-diffusion modellerne.

12.3 Prisfastsættelse af asiatisk option

I følgende afsnit vil jeg først prisfastsætte asiatisk average price call option der løber fra den 1/2-2011 til og med den 28/2-2011. Næst prisfastsættes den samme option for perioden 1/6-2010 til og med den 30/6-2010. For at kunne prisfastsætte optionen skal der anvendes en rente, hvilket ses i (11). Da optionerne løber over en måned anvendes en måneds CIBOR renten fra henholdsvis den 31/1-2011 og den 31/5-2010. Renten fra den 31/1 er på 1.0125 og 0.8550 for den 30/5 jævnfør Danmarks Nationalbanks statistikbank. Når optionen prisfastsættes via Monte Carlo simulation vælges et k på 10.000. Striken på optionen fastsættes til 30 EUR/MWh.

Først prisfastsættes optionen via GARCH modellen. Prisfastsættelsen beregnes i MATLAB, hvor koden, der er anvendt til at prisfastsætte optionen, kan ses i bilagene.

Prisen på en average price asiatisk option, der løber fra den 1. til den 28. februar, hvor det underliggende aktiv er modelleret via en GARCH model, er 12.5060 EUR.

Næst prisfastsættes optionen via jump-diffusion modellen. Prisfastsættelsen beregnes ligeledes i MATLAB, hvor koden, der er anvendt til prisfastsættelse, kan ses i bilagene.

Prisen på en average price asiatisk option, der løber fra den 1. til den 28. februar, hvor det underliggende aktiv er modelleret via en jump-diffusion model, er 17.7619 EUR.

Det ses, at der er stor forskel på prisen på optionen, at efter hvilken af de to modeller det underliggende aktiv følger. Forskellen på værdien mener jeg, skyldes spikesene i jump-diffusion modellen. Spikesene medfører en højere volatilitet, hvilket også kunne ses ved simulationen i foregående afsnit. Det er imidlertid ikke klart, hvilken af de to modeller, der kommer tættest på den pris optionen faktisk ville koste, såfremt den præcise spotpris for februar var kendt.

Det er imidlertid muligt at bestemme, hvad optionens virkelige værdi er. Dette skyldes, at februar er realiseret. Dermed prisfastsættes optionen med de faktiske spotpriser for februar 2011. Denne prisfastsættelse kan ses på data cden. Den faktiske værdi for en average price call for 1. til 28. februar 2011 er 27.9276 EUR.

Det ses tydeligt, at GARCH modellen er langt fra en korrekt prisfastsættelse af den asiatiske option. Jump-diffusion modellen prisfastsætter den asiatiske option tættere på den faktiske pris. Da der anvendes Monte Carlo simulation til prisfastsættelse af optionen, giver denne metode mulighed for at observere mere end én mulig sti for modellerne. Dermed giver denne metode et bedre overblik over modellernes performance.

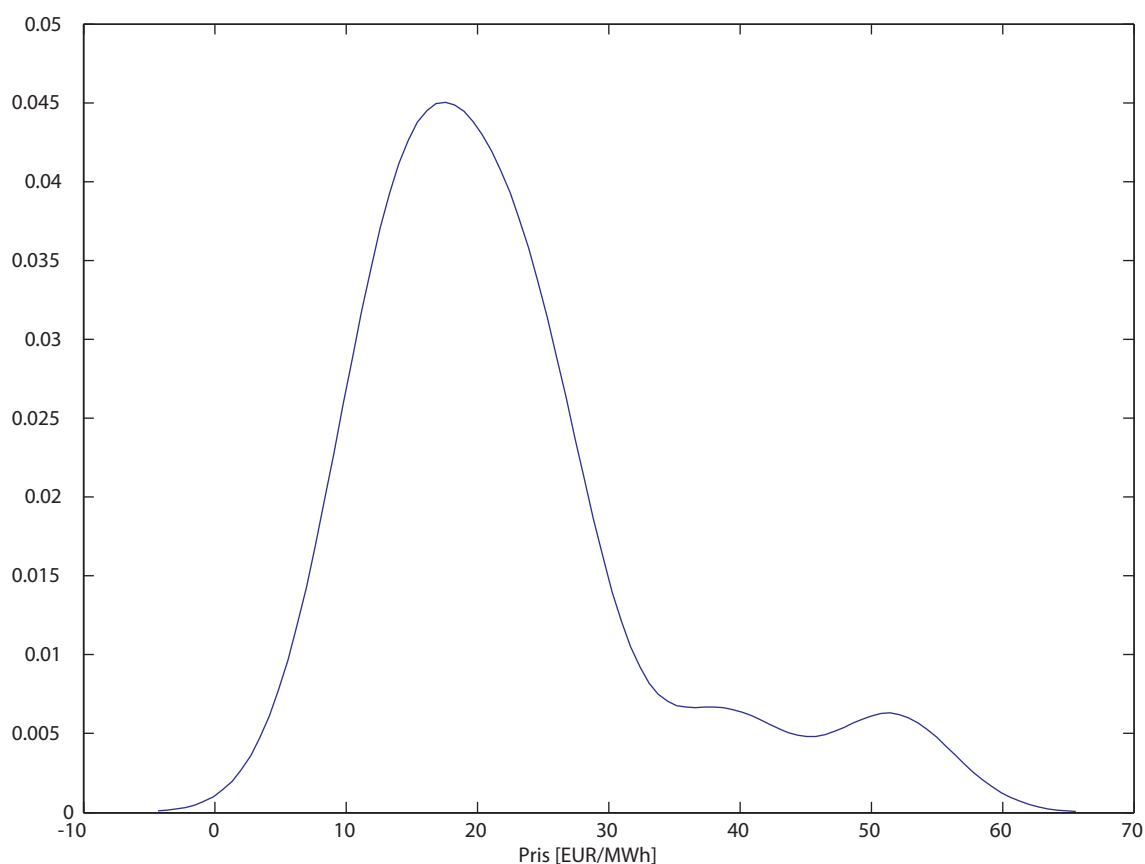
Det ses som før nævnt, at begge modeller underestimerer værdien af den asiatiske option. Dette kan skyldes, at februar 2011, i høj grad var påvirket af lave temperaturer. Dette bør modellen imidlertid tage højde for. Temperaturerne var dog så lave, at elvene i Sverige dannede ispropper. Dette medførte, at en del af hydrokraften blev ude af stand til at producere elektricitet. Dannelsen af ispropper er hverken synlig i temperatur data eller hydrobalancen. Dermed er der en faktor modellen ikke nødvendigvis kan fange, som medfører et højere niveau af spotprisen, og dermed en højere værdi af den asiatiske option.

For at se, hvordan modellerne performer, når ekstremer i temperaturen ikke kan danne ispropper beregnes værdien af den samme option, for juni 2010. Dermed har optionen en strike på 30 EUR, og der vælges et k på 10.000. Residualet for den 31/5 er 12.97254, og den betingede varians er 66.17246.

Først prisfastsættes optionen via GARCH modellen. Det skal gøres opmærksom på, at parametrene i GARCH modellen ikke reestimeres, da det formodes, at udtagelse af en måneds data ikke vil have en stor effekt på parameterestimererne. Optionen prisfastsættes til 19.2339 EUR/MWh. Dernæst prisfastsættes optionen via jump-diffusion modellen. Ved denne model prisfastsættes optionen til 20.0166 EUR/MWh. Det bemærkes, at der ikke er stor forskel på prisfastsættelsen af optionen mellem de to modeller.

Såfremt, optionen evalueres via det faktiske data, er optionen 14.7612 EUR/MWh værd. Det ses at modellen denne gang overestimerer værdien af optionen. Modellerne er imidlertid ikke lige så langt fra den sande værdi af optionen som i februar 2011.

For at kunne afgøre, hvorvidt modellerne er tilfredsstillende ses først på den empiriske fordeling af de faktiske værdier for optionen igennem hele tidsserien. På data cd'en er disse værdier udregnet. Nedenstående figur viser en udjævnet empirisk tæthedsfunktion for værdien af en asiatisk option med strike 30, der løber en måned.

Figur 35 - Empirisk tæthedsfunktion

Det ses at i ovenstående figur, at værdien kan blive negativ, dette er ikke i praksis muligt, men skyldes, at ovenstående tæthedsfunktion er udglattet. Det ses imidlertid også ud fra ovenstående figur, at største tæthed er imellem 10 og 30 EUR/MWh. Simuleringerne viser også en værdi for optionerne der ligger indenfor den største tæthed. Det ses imidlertid også, at optionsværdierne kan nå helt op på 60 EUR/MWh, hvilket viser, at der er stor variation i prisen på optionen over de forskellige måneder. Dermed er der også stor usikkerhed omkring optionsværdien, og dermed kan det være svært at simulere optionsværdien helt præcist i forhold til den faktiske værdi.

Næst udarbejdes et 95 % konfidensinterval for simuleringerne. De 10.000 simuleringer sorteres således, at de går fra de mindste værdier til de største. Derefter fjernes de 250 største og mindste værdier. På denne måde findes grænserne for et 95 % konfidensinterval. For GARCH modellen i februar 2011 er den nedre grænse er 0 EUR/MWh, hvilket også var forventet, da optionens værdi ikke kan blive mindre end 0. Den øvre grænse for konfidensintervallet er 53.6122 EUR/MWh. Dermed falder optionensværdi på 27.9276 EUR/MWh indenfor konfidensintervallet. For jump-diffusion er den nedregrænse 0 EUR/MWh, mens den øvre grænse er 61.3005 EUR/MWh. Dermed falder den faktiske optionsværdi på 27.9276 EUR/MWh også indenfor et 95 % konfidensinterval for jump-diffusion modellen.

Den samme analyse foretages for juni 2010 simuleringerne. For GARCH modellen er den nedre grænse 0 EUR/MWh, mens den øvre grænse er 44.2957 EUR/MWh. For jump-diffusion modellen er den nedre grænse 0, mens den øvre grænse er 60.8247 EUR/MWh. Det ses, at begge modeller producerer et konfidensinterval, hvor den faktiske værdi af optionen på 14.7612 EUR/MWh ligger indenfor. Det bemærkes imidlertid at GARCH modellen i begge tilfælde producerer mindre konfidensintervaller.

Der er imidlertid muligheder for udvidelser, såfremt modellerne skulle justeres. Ovenstående modeller bør udvides med mere fundamental data. Såfremt det var muligt at få estimater for den forventede produktionskapacitet, ville det måske være muligt at modellere de tidspunkter, hvor spotprisen spiker på grund af pludselig kapacitetsknaphed.

Ovenstående jump-diffusion model kan også formuleres som en simpel mean-reversion model, hvor forwardprisen anvendes som mean-reversion level. Dermed kunne det være interessant at afgøre, hvorvidt ovenstående jump-diffusion model baseret på nogle fundamentaler performer bedre end en model, som anvender forwardprisen. Jump-diffusion modellen kunne ligeledes sammenlignes med en regime-switch model, hvor spikesene ikke har en permanent indflydelse på spotprisen. Disse mulige udvidelser overlades til senere forskning.

Når en tilfredsstillende model er udarbejdet bør modellen desuden løbende reestimeres, såfremt den skal anvendes til kommerciel prisfastsættelse af optioner. Dette skyldes, at data for spotprisen kan opleve strukturelle brud, hvilket medfører, at koefficient estimaterne i modellen ikke længere er gældende. Et sådant strukturelt brud kunne eksempelvis tænkes at finde sted efter jordskælvet i Japan den 11 marts 2011. Dette jordskælv har haft konsekvenser for atomkraftværker over hele verden. Eksempelvis har Tyskland valgt at lukke deres atomkraftværker indtil nærmere undersøgelser omkring sikkerheden er gennemført. Dette medfører højere priser på elektricitet i Tyskland såvel som Norden. Grunden til, at Norden bliver berørt af dette, er, at Norden eksporterer strøm til Tyskland, og dermed vil priserne til en vis grad konvergere mod hinanden.

Ovenstående resultater medfører, at det er svært at konkludere hvilken af jump-diffusion modellen eller GARCH modellen, der er den bedste. Det ses at jump-diffusion modellen estimerer optionsværdien tættere på den faktiske værdi både i juni 2010 og februar 2011. GARCH modellen producerer imidlertid smallere konfidensintervaller, hvor den faktiske værdi af optionen er indeholdt i konfidensintervallet. Det er imidlertid efter min mening vigtigere at den simulerede værdi er tættere på den faktiske værdi i forhold til bredden af konfidensintervallerne. Derfor konkluderes det, at jump-diffusion modellen, er den bedste af de to ovenstående spotprismodeller.

KONKLUSION

13 Konklusion

I ovenstående opgave har jeg søgt at undersøge, hvilken model der er bedst til at modellere den nordiske spotpris på elektricitet. Som følge af, at elektricitet i høj grad handles på regionale markeder, har jeg valgt at fokusere på det nordiske marked. Det nordiske marked omfatter Finland, Norge, Sverige og Danmark. Det nordiske marked karakteriseret af en høj mængde vedvarende energi. Specielt energi produceret via hydrologisk teknologi er nominerende i det nordiske marked. Det kan argumenteres for, at denne hydrokraft har den effekt, at spotprisen i normalsituationer har færre spikes end spotprisen i andre lande, hvor hydrokraft ikke er fremtrædende. Dette skyldes, at hydrokraft indirekte kan lagre energi i vandmagasinerne.

Det er fundet i tidligere forskning, at spotprisen på elektricitet udviser tykke haler samt volatilitetsklumpning. Det er ligeledes fundet, at spotprisen udviser så kaldte spikes. Disse spikes samt de andre førnævnte karakteristika medfører, at spotprisen ikke kan modelleres via simple statistiske metoder. Denne påstand bekræftes i ovenstående opgave. Det ses, at en modellering via simpel lineær regression ikke producerer residualer, der over holder de givne antagelser for estimering via simpel lineær regression. Residualerne indeholder eksempelvis ARCH effekter, hvilket betyder, at regressionen ikke producerer homoskedastiske fejllid. Derfor er det nødvendigt at undersøge andre metoder til at modellere spotprisen.

De modeller der undersøges er ARCH-GARCH modeller samt jump-diffusion. modeller ARCH-GARCH modellerne bør kunne tage højde for volatilitetsklumpningen, mens jump-diffusion modellerne kan tage højde for spikes. I opgaven specificeres en GARHC(1,1) model. Denne model kan tage højde for de ARCH effekter som kunne observeres ved simpel lineær regression. Modellen underestimerer imidlertid spikes, hvilket giver motivation til at undersøge jump-diffusion modeller. Jump-diffusion modellen specificeres således, at modellen medtager fundamentale informationer så som hydrobalance samt temperatur data. Disse fundamentale informationer var ligeledes inkluderet i GARCH modellen. Udover de fundamentale informationer specificeres en spike komponent, som følger en Poisson fordeling. Denne model overestimerer umiddelbart volatiliteten af spotprisen.

For at kunne afgøre, hvilken af de to ovenstående modeller, som modellerer spotprisen i mest tilfredsstillende grad, prisfastsættes to asiatiske optioner. Den første option løber fra 1/2-2011 til og med den 28/2-2011 og den anden option løber fra den 1/6-2010 til og med den 30/6-2010. Optionerne specificeres som en average price call. Prisfastsættelsen af optionerne via de to modeller sammenlignes derefter med den faktiske værdi af optionerne. Den faktiske værdi af optionen er mulig at afgøre, da data for spotprisen i juni 2010 og februar 2011 er tilgængelig. Ud fra prisfastsættelsen af optionen er jump-diffusion modellen den bedste model til at beskrive spotprisen. GARCH modellen underestimerer i høj grad værdien af optionen. Jump-diffusion modellen underestimerer også værdien af optionen, men ikke i så høj grad som er tilfældet for GARCH modellen. Det konkluderes at den afvigelse, der ses fra den faktiske optionsværdi til den simulerede optionsværdi både via GARH og Jump-diffusion modellen skyldes normal variation, da den faktiske værdi for optionen falder indenfor et 95 % konfidensinterval for de simulerede optionsværdier.

14 Litteraturliste

14.1 Artikler

Blanco, Carlos et al., 2001, "*Mean Reverting Processes – Energy Price Processes Used for Derivatives Pricing and Risk Management*", *Commodities Now*, juni 2001.

Bunn, Derek W. et al., 2010, "*Fundamental and Behavioural Drivers of Electricity Price Volatility*", *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Volume 14, Issue 4, Article 4.

Cartea, Alvaró et al., 2005, "*Pricing Electricity Markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality*", *Applied Mathematical Finance*, Volume 12, Issue 4.

Hamilton, James D, 2005, "*Regime-Switching Models*", Working paper, University of California, San Diego, Department of Economics.

Jong, Cyriel De, 2006, "*The Nature of Power Spikes: A Regime-Switch Approach*", *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Volume 10, Issue 3, Article 3.

Tankov, Peter et al, 2009, "*Jump-Diffusion models: A practitioner's guide*", *Banque et Marchés*, March-April, 2009.

14.2 Bøger

Grinblatt, Mark et al., 2004, "*Financial Markets and Corporate Strategy*", 2. udgave, McGraw-Hill

Heij, Christiaan et. al, 2004, "*Econometric Methods with Applications in Business and Economics*", Oxford University Press, 1. udgave

Hull, John C., 2006, "*Options, Futures and Other Derivatives*", 6. udgave, Pearson Prentice Hall

Wooldridge, Jeffrey M., 2000, "*Introductory Econometrics – A modern approach*", South-Western Collage Publishing.

14.3 Publikationer

Nordpool 2009, "*Reminder: Implimentation of negative price floor in Elspot*", Exchange information, No. 99/2009.

Nordreg 2010, "*Nordic Market Report 2010 – Development in the Nordic Electricity Market*", Report 6/2010.

15 Bilag 1 – Simulering af GARCH model

%Monte Carlo Simulering med k simuleringer

```

k=1000;
% Condvar(1)=1.99138;
% Residual(1)=-0.100591;
% Condvar(1)=1.65732;
% Residual(1)=-30.8467;
Condvar(1)=66.17246;
Residual(1)=12.97254;
Spot2=[];
Strike=35;
% t=(28/365)*-1;
t=(30/365)*-1;
% r=0.01025;
r=0.008850;
for m=1:k;
    spot=[35.9800;41.9113;38.1796;36.1267;34.2375;33.4396;36.3433];
    for i=1:length(Hydro);
        condvar=0.19275+0.30173*(Residual(i)*Residual(i))+0.69827*Condvar(i);
        Condvar=[Condvar;condvar];
        residual=normrnd(0,sqrt(condvar));
        Residual=[Residual;residual];
        Spot=0.0092192+0.83223*spot(i+6)+0.13680*spot(i)+(-2.15359)*DummyTirs(i)+(-
2.1546)*DummyOns(i)+(-2.04922)*DummyTors(i)+(-2.45239)*DummyFre(i)+(-3.
70967)*DummyLor(i)+(-2.88914)*DummySon(i)+0.12475*TempSve(i)+(-
0.099028)*Hydro(i)+residual;
        spot(i+7)=Spot;
    end
    Spot2=[Spot2 spot];
    spot=[];
end

%Beregning af middelværdi
Spot2(1:7,:)=[];

for n=1:k
    S_avg(n)=mean(Spot2(:,n));
    value(n)=S_avg(n)-Strike;
    if value(n) <= 0
        final_value(n)=0;
    else final_value(n)=value(n);
    end
end

asian_avg=mean(final_value);

%Tilbagediskontering af optionsværdi
final_asian_avg=asian_avg*(1+r)^t

```

16 Bilag 2 – Simulering af Jump-diffusion model

%Monte Carlo Simulering med k simuleringer

```

k=1000;
% Condvar(1)=1.99138;
% Residual(1)=-0.100591;
% Condvar(1)=1.65732;
% Residual(1)=-30.8467;
Residual(1)=12.97254;
Condvar(1)=66.17246;
Spot2=[];
Strike=30;
% t=(28/365)*-1;
t=(30/365)*-1;
% r=0.01025;
r=0.008850;
for m=1:k;
    spot=[35.9800;41.9113;38.1796;36.1267;34.2375;33.4396;36.3433];
    for i=1:length(Hydro);
        condvar=0.19275+0.30173*(Residual(i)*Residual(i))+0.69827*Condvar(i);
        Condvar=[Condvar;condvar];
        residual=normrnd(0,sqrt(condvar));
        Residual=[Residual;residual];
        Spot1=0.0092192+0.83223*spot(i+6)+0.13680*spot(i)+(-2.15359)*DummyTirs(i)+(-
        2.1546)*DummyOns(i)+(-2.04922)*DummyTors(i)+(-2.45239)*DummyFre(i)+(-3-
        .70967)*DummyLor(i)+(-2.88914)*DummySon(i)+0.12475*TempSve(i)+(-
        0.099028)*Hydro(i)+residual;
        spikes=normrnd((2.064238), 17.73553)*poissrnd(0.083135);
        Spot=Spot1+spikes;
        spot(i+7)=Spot;
    end
    Spot2=[Spot2 spot];
    spot=[];
end

%Beregning af middelværdi
Spot2(1:7,:)=[];

for n=1:k
    S_avg(n)=mean(Spot2(:,n));
    value(n)=S_avg(n)-Strike;
    if value(n) <= 0
        final_value(n)=0;
    else final_value(n)=value(n);
    end
end

asian_avg=mean(final_value);

%Tilbagediskontering af optionsværdi
final_asian_avg=asian_avg*(1+r)^t

```