

Gammel vin på nye flasker?

Et studie af videomediets plads i gymnasial matematikundervisning

Mathias D. Kristensen & Mikkel Lie

Matematik, 4.206c, 2023-01

Kandidatspeciale





AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

**Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige
Fakultet**

Matematik

Skjernvej 4a

9220 Aalborg Ø

<https://www.engineering.aau.dk/>

Titel

Gammel vin på nye flasker? Et studie af videomediets plads i gymnasial matematikundervisning

Emne

Matematisk fagdidaktik

Projektperiode

02/09/2022 - 06/01/2023

Gruppe

4.206c

Forfattere

Mathias Damsgaard Kristensen

Mikkel Lie

Vejleder

Bettina Dahl Søndergaard

Kopier printet 6

Sidetæl 136

Færdiggjort 04/01/2023

Synopsis:

The goal of this master's thesis was to explore the possibilities of including video lectures in danish high school mathematics classes, based on the affordances of the video media as a whole. This was examined by splitting two danish high school classes into two groups, where one group was presented with basic two-dimensional vector calculus through a video lecture recorded and produced by the authors of this thesis, while the second group was presented with the same theory through a traditional classroom teaching with a particular focus on accountable talk and student involvement. All students were given a final exam, to test their understanding of the presented theory, as well as a final questionnaire, in which they evaluated their understanding of the theory, as well as their likes and dislikes of the form of teaching they received. The student who participated in the classroom lecture outperformed their classmates, who were taught through the video lecture in the majority of the tasks in the final exam, with the answers to two of these tasks having significantly large dependency on the received teaching. This lead to the conclusion that video lectures are best suited in a form of 'flipped classroom'-model, in which the video lectures replaces the homework rather than the teaching.

Rapportens indhold er frit tilgængeligt, men offentliggørelse (med kildeangivelse) må kun ske efter aftale med forfatterne.

Abstract

The goal of this master's thesis was to explore the possibilities of including video lectures in danish high school mathematics classes, based on the affordances of the video media as a whole.

This was examined by splitting two danish high school classes into two groups, based on their mathematical abilities, based on an initial exam, as well as their preferred type of homework, based on an initial questionnaire. The students were divided into the two groups by the authors of this thesis, and both tested and compared, making the experiment a quasi-experiment with threads from the design regarding logic of comparison. The two groups were divided in such a way, that the mathematically strong and mathematically challenged students were evenly split, to ensure a fair test of the video media's instructional abilities.

The authors of this thesis chose, that the participants were to be presented with fundamental two-dimensional vector calculus, through either a video lecture, or a classroom lecture with particular focus on accountable talk and student involvement. Thus, the experiment was based on the experiments carried out by Tairab et al. (2020) as well as Heckler and Scaife (2015), in which high school students' understanding of vector calculus is studied. Based on their findings, the theory regarding vector addition and subtraction was chosen to be taught through the theory regarding reduction, as a way of implementing the *ijk*-method into the danish high school curriculum. Thus, this thesis mainly explores the possibilities of presenting the theory regarding fundamental vector calculus through video, however, the findings may be broadened to concern other mathematical subjects as well.

Prior to recording and producing the video lecture, an extensive exploration of the affordances of the video media was necessary. The video media was found to be suited for individual instructional teaching due to the students' possibility of interaction, in the form of pausing and scrubbing in the video, as well as the video medias asynchronous nature.

However, the asynchronous teaching through video limited the students' possibilities of asking questions and communicating with their teacher and fellow students, which resulted in the mathematical challenged students needing more help than they could get.

The experiment took place at a danish high school, and was concluded by a final exam and a final questionnaire, in order to evaluate each groups general understanding of the presented theory, as well as their own thoughts regarding the teaching they received. Given that the teachings take place through different medias, the thesis focuses heavily on theories regarding educational philosophies, how the classroom affects the teaching, as well as students' conceptual and procedural understandings of mathematics.

Following the teachings, the results of the final exams are compared, to determine the subjects of which the students in one group attained a significantly better understanding, while the understandings of some subjects were more evenly distributed between the two groups. The students who was taught in the classroom, scored significantly higher in the questions regarding vector addition, as well as in questions, in which the students were to solve an equation containing a vector. In general, the students from the classroom lecture attained higher general scores in all questions in the final exam, excluding one question regarding graphical representation of vector subtraction.

Furthermore, from both the initial and final questionnaires, it was clearly seen that the students themselves preferred being taught through classroom lectures, both with regard to their educational gain, as well as their ability to interact with the teacher and their classmates. The students even found the illustrations of the vectors to be better in the classroom lecture than in the video lecture, despite the video lecture using as many affordances as possible.

Forord

Dette speciale er udarbejdet af Mathias Damsgaard Kristensen og Mikkel Lie i eftersårs-semesteret i 2022, på kandidatuddannelsen i Matematik og Mediefag, ved henholdsvis Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet på Aalborg Universitet og Det Humanistiske Fakultet på Aalborg Universitet.

Figurer og tabeller nummereres efter kapitel og fortløbende, og det samme gør sig gældende for spørgsmål og opgaver i de prøver og spørgeskemaer, der findes i de vedlagte appendikser.

Dette speciale ville ikke have været muligt uden samarbejdet med den lærer, der lånte os sine elever og undervisningstimer. Af denne grund skal der lyde et stort tak til læreren og dennes elever, da deres velvilje til at indgå i undersøgelsen var fundamental for projektets tilblivelse.

Foruden de deltagende elever og disses lærer, vil vi også gerne benytte lejligheden til at takke vores vejleder Bettina Dahl Søndergaard for hendes kyndige vejledning og altid gode humør. Derudover gives der ligeledes et stort tak til studieleder på Institut for Matematiske Fag, Morten Grud Rasmussen, for at muliggøre, at vi kunne skrive vores speciale med fokus på matematisk fagdidaktik.

Aalborg Universitet, 4. januar 2023

Underskrifter

Mathias D. Kristensen

Mathias Damsgaard Kristensen

Mikkel Lie

Mikkel Lie

Indhold

Abstract	i
Forord	iii
I Specialets tilblivelse	1
1 Indledning	3
1.1 Problemformulering	6
1.2 Undersøgelsesprocessen	7
2 Metode	9
2.1 De syv centrale undersøgelselementer	9
2.2 Quasi-undersøgelser	13
2.2.1 Sammenligningslogik	15
2.3 Spørgeskemaer	16
2.3.1 Likert-skalaen	18
II Teori	19
3 Læringsteorier	21
3.1 Konstruktivisme og Piaget	21
3.2 Den sociokulturelle læringsteori og Vygotsky	24
3.3 Klasseværelset som læringsmiljø	27
3.3.1 Det didaktiske miljø og det didaktiske dobbeltspil	28
4 Undervisningsformer	31
4.1 Broadcastperspektivet og diskussionsperspektivet	31
4.2 Blended Learning	32

4.2.1	Flipped classroom	35
4.3	Medrivende dialog	37
5	Matematik som undervisningsfag	40
5.1	Matematiske symboler	42
5.2	Det konceptuelle og det procedurale	45
5.3	Vektorer som emne	47
6	Design af læringsforløbene	50
6.1	Den indledende og afsluttende prøve	50
6.2	Affordances og digital læring	51
6.3	Tilrettelæggelse af den fysiske undervisning	57
6.4	Tilrettelæggelse af undervisningsvideoen	63
6.4.1	Anvendelse af computergrafik	64
III	Udførelsen af undersøgelsen	67
7	Undersøgelsens indledende faser	69
7.1	Udarbejdelse af spørgeskema	69
7.2	Det indledende spørgeskema	71
7.3	Den indledende prøve	74
7.4	Opdeling af elever	79
8	Undervisningen	81
8.1	Den fysiske klasseværelsesundervisning	81
8.2	Videoundervisningen	86
IV	Analyse	89
9	De afsluttende spørgeskemaer	91

9.1	Videoundervisning	91
9.2	Fysisk klasseværelsesundervisning	95
9.3	Sammenligning af spørgeskemabesvareelserne	98
10	Den afsluttende prøve	102
10.1	Introduktion	102
10.2	Videobesvareelser	104
10.3	Fysiske besvareelser	109
10.4	Sammenligning af prøvebesvareelserne	113
11	Signifikans af undersøgelsen	118
12	Diskussion	129
	Konklusion	135
	Referencer	ix
V	Appendikser	xv
A	Indledende spørgeskema	A-1
B	Indledende prøve (45 minutter)	B-1
C	Transskription af videoundervisning	C-1
D	Afsluttende prøve (30 minutter)	D-1
E	Afsluttende spørgeskema (Video)	E-1
F	Afsluttende spørgeskema (Fysisk)	F-1

Del I

Specialets tilblivelse

1 | Indledning

Gennem adskillige år har der været stor fokus på at løfte den gennemsnitlige matematiske forståelse blandt elever i grundskolen og på ungdomsuddannelserne. Dette ses i diverse folkeskole- og gymnasiereformer, hvor matematik specifikt nævnes som et af de fag, hvor der er store udfordringer, og dermed størst fokus. Matematikudredningen (Jessen et al., 2015) beskriver hvordan udfordringer med matematikforståelsen i gymnasiet stammer fra manglende forståelse af basale regnefærdigheder og talteori, som burde være blevet lært i grundskolen. Grundet matematikkens hierarkiske opbygning besværliggør denne manglende grundlæggende viden tilegnelsen af ny viden, hvormed den gymnasiale matematikundervisning naturligvis må antages at være begrænset af grundskolens matematikundervisning. Dette speciale skal dog ikke ses som en kritik af hverken tidligere folkeskolereformer eller gymnasiereformer, men derimod en undersøgelse af, om visse matematikudfordringer kan løses ved inddragelse af videomediet i den gymnasiale matematikundervisning, enten som reel videoundervisning, eller som erstatning for lektier, i en 'flipped classroom'-model, hvor timerne på skolen i højere grad fokuserer på anvendelse af teori, frem for læring af ny teori.

Inddragelsen af elektroniske og digitale hjælpemidler i den gymnasiale matematikundervisning er dog ikke noget nyt fænomen, da overgangen fra analoge til elektroniske hjælpemidler naturligvis har fulgt med tiden, hvorfor regnestokken og logaritmetabellerne i tidens løb er blevet til CAS-værktøjer som **Maple** eller **TI-Nspire**. I forlængelse af inddragelsen af disse CAS-værktøjer konkluderer OECD (2015) dog, at "The results also show no appreciable improvements in student achievement in reading, mathematics or science in the countries that had invested heavily in ICT for education" (s. 3). Elevernes faglige niveau afhænger altså ikke af, hvor ofte og hvor mange digitale teknologier benyttes, men i stedet hvordan disse benyttes. Dette ses tydeligt i Matematikudredningen, hvortil Grønbæk et al. (2017) beskriver at "Inddragelsen af CAS har haft stærkt negativ indvirkning på elevernes udvikling og besiddelse af basale færdigheder..."

Formålet med denne undersøgelse er derfor at præsentere eleverne for en anvendelse

af elektroniske medier til andet end blot at være avancerede regnemaskiner i form af CAS-værktøjer. Som det vil blive beskrevet i **Afsnit 6.2**, har de undersøgte gymnasieelever naturligvis allerede et kendskab til anvendelsen af både elektroniske og digitale medier, grundet nutidens mediematrix¹. Foruden elevernes brug af computer, smartphones og andre digitale medier i deres fritid, må eleverne ligeledes antages at have mødt anvendelse af disse i løbet af deres grundskole. De undersøgte gymnasieelever gik nemlig i udskolingen under COVID-19-pandemien, hvorfor disse antageligvis har været del af e-læringsforløb.

E-læring beskrives af Haythornthwaite et al. (2016) som havende "at times been equated with the implementation of institutional learning management systems (LMS), also known as virtual learning environments (VLE). Yet, e-learning encompasses far more than the technology alone and more than educational institutional environments" (s. 2). Man kan som lærer altså godt bare optage sin normale klasseværelsesundervisning af et specifikt emne, gøre det tilgængeligt for sine elever online, og så kalde det for e-læring - dette er dog blot et lille (og dårligt) eksempel på, hvordan e-læring kan finde sted. Her spiller videomediet blot rollen som de nye flasker, til de traditionelle undervisningsmetoder og -traditioner, der spiller rollen som den gamle vin.

Baseret på det pludselige skift i læringsmiljø, som lærerne under COVID-19-pandemien var nødsaget til at lave, har de indledende elektroniske undervisninger ikke kunne være nøje planlagt, eller baseret på diverse anerkendte teorier og metoder, hvorfor elevernes generelle undervisningsudbytte antages at være faldet i perioden - i hvert fald i dennes begyndelse, da både lærerne og eleverne har skulle omstille sig til henholdsvis at formidle information og modtage information på en ny måde, gennem nye medier. Dette undebygges af Christensen et al. (2022), der beskriver hvordan "størstedelen af elever og lærere oplevede, at kvaliteten var lavere end normalt, og at eleverne ikke lærte lige så meget, som under normale omstændigheder..." (s. 12), til trods for, at det danske udgangspunkt for at overgå til digital undervisning egentligt antagedes til at være godt, grundet elevernes kendskab til digitale medier samt udbredelsen af anvendelsen af disse i undervisningssammenhæng.

Dette projekt fokuserer på de aspekter af e-læring, der omhandler blandede og hybride

¹Det fulde mediebillede, altså de sameksisterende medier og samspillet mellem disse

læringsmiljøer, hvorfra teorien om 'flipped classroom' ligeledes udspringer. Baseret på dette er der naturligvis fundet litteratur omhandlende netop disse emner. Derudover er der søgt litteratur vedrørende projektets andre teori- og undersøgelsesområder, disse værende forskellige læringsteorier, tilgange til undervisning, teorier om didaktiske og adidaktiske læringssituationer, mediers affordances og dennes påvirkning af læring og e-læring, samt gymnasieelevers udfordringer med udbyttet af den traditionelle klasseværelsesundervisning. Særligt har der været fokus på at finde videnskabelige artikler vedrørende undervisning i vektorer i 2D, da eleverne i denne undersøgelse netop modtog undervisning i dette emne. Gennem en omfangsrig litteratursøgning viste det sig dog, at gymnasieelevers udfordringer med vektorer på ingen måde er et stort forskningsområde. Denne undersøgelse baserer sig derfor på undersøgelser foretaget i Forenede Arabiske Emirater (Tairab et al., 2020) samt i USA (Heckler og Scaife, 2015), da disse tilnærmelsesvis behandler samme emner som dette speciale. Disse undersøgelser foretages på henholdsvis "grade 11 science students" (s.1) i Tairab et al. (2020) og "students enrolled in a first semester (Mechanics) or second semester (Electricity and Magnetism) introductory physics course" (s. 2) i Heckler og Scaife (2015). Disse undersøgelser beskriver de undersøgte studerendes udfordringer med matematik som fag, ligesom dette speciale har til hensigt at gøre. Når der i dette speciale omtales gymnasieelevers udfordringer med matematik som fag, skal disse forstås som

a state of inability to grasp a concept or idea due to factors associated with: (1) the nature of the knowledge system possessed by students, or inadequacy of such knowledge in relation to the concept to be acquired; (2) the demand of handling the task in term of information processing compared with students' handling capacity; (3) communication problems arising from language use; and (4) the mismatch between the teacher's instruction method and students' preferred learning mode. (Tairab et al., 2020, s. 2)

De studerende i begge undersøgelser antages at være på et højere matematikfagligt niveau, end de gymnasieelever, der indgik i denne undersøgelse, grundet de studerende og elevernes valg af uddannelse og studieretninger. De studerende hos Tairab et al. (2020) samt Heckler

og Scaife (2015) har alle aktivt valgt en naturvidenskabelig uddannelse, mens gymnasieeleverne i denne undersøgelse derimod har valgt humanistiske og samfundsvidenskabelige studieretninger, og dermed aktivt fravalgt matematik på A-niveau.

Undersøgelserne anses dog som værende anvendelige til indledningsvis at forudsige, hvilke udfordringer de deltagende gymnasieelever kunne støde på, i mødet med vektorer i 2D, da de studerende i Tairab et al. (2020) samt Heckler og Scaife (2015) ligeledes støder på diverse udfordringer med teorien. De studerende i Tairab et al. (2020) minder mest om denne undersøgelses danske gymnasieelever, da de studerende i Tairab et al. (2020) er i gang med deres 11. skoleår, ligesom 1.g ville være for en stor del af gymnasieeleverne. Heckler og Scaife (2015) beskriver derimod førsteårs universitetsstuderende, der derfor naturligvis må antages at være ældre, da de er længere i deres uddannelsesforløb.

1.1 Problemformulering

Med udgangspunkt i Heckler og Scaife (2015) samt Tairab et al. (2020) søger dette projekt at undersøge hvorvidt videomediet kan være med til at afhjælpe elevernes udfordringer med forståelsen af den indledende teori omkring vektorer i 2D. Videoundervisningen sammenlignes med en fysisk klasseværelsesundervisning afholdt af specialeforfatterne, med stort fokus på medrivende dialog, i et forsøg på at danne en jævn fælles viden blandt de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Dette leder frem til den følgende problemformulering:

Hvilke muligheder har videomediet for at indgå i den gymnasiale matematikundervisning?

Til at besvare denne problemformulering, ses der på videomediets affordances, samt dets muligheder for at optræde som reel videoundervisning eller som led i et flipped classroom, hvor videomediet i stedet erstatter elevernes hjemmearbejde.

1.2 Undersøgelsesprocessen

På baggrund af problemformuleringen skulle specialeforfatterne selvsagt konstruere en undersøgelse, hvis datasæt kunne være med til at besvare det pågældende problem. Her blev det besluttet, at videoundervisningen skulle sammenlignes med en fysisk klasseværelsesundervisning med særligt fokus på medrivende dialog. Specialeforfatterne ønskede selv at designe og udføre både video- og klasseværelsesundervisning af gymnasieeleverne, og derefter beskrive elevernes engagement, deltagelse og udbytte af læringsforløbene, samt deres egne holdninger til disse forløb.

Til dette skulle der naturligvis bruges gymnasieelever, hvorfor specialeforfatterne tidligt i specialeforløbet sendte e-mails til rektorer og matematiklærere på adskillige gymnasier. Kun to af disse e-mails blev besvaret, hvoraf den ene besvarelse var af en matematiklærer, der desværre ikke kunne hjælpe specialeforfatterne, mens den anden gymnasielærer gerne ville låne de specialeforfatterne sine elever i et par moduler. Konstruktionen af undersøgelsen blev aftalt med den pågældende gymnasielærer, mens undervisningsgangene og afholdelserne af de forskellige prøver ligeledes blev placeret på baggrund af gymnasielærerens ønsker. Den pågældende gymnasielærer rådede over tre 1.g-klasser, hvoraf to af dem havde matematik på B-niveau, mens den sidste klasse havde valgt matematik på A-niveau. Det blev besluttet af specialeforfatterne, at det udelukkende var eleverne i de to B-niveau-klasser, der skulle indgå i undersøgelsen, både på baggrund af praktiske årsager, i forbindelse med planlægning af undervisningsgangene, samt for at sikre, at alle de elever, der indgik i undersøgelsen, havde samme udgangspunkt, og samme tilhørsforhold til matematik, idet ingen havde valgt matematik på et højere eller lavere niveau end andre af deltagerne.

Da de deltagende gymnasieelever skulle opdeles i to hold, hvor det ene hold modtog fysisk klasseværelsesundervisning med særligt fokus på medrivende dialog, mens det andet hold modtog videoundervisning, ønskede specialeforfatterne at sikre, at eleverne ikke blev opdelt på en sådan måde, at alle de matematikstærke endte på det ene hold, mens de elever, der var mere udfordrede, endte på det andet hold. Dette kunne føre til et resultat af

undersøgelsen, der ikke var repræsentativt for den egentlige anvendelighed af videomediet, hvorfor gymnasieeleverne indledningsvis skulle besvare en indledende prøve, der bestod af opgaver i matematiske emner der blev behandlet i grundskolen og elevernes gymnasiale grundforløb. Ydermere besvarede eleverne et indledende spørgeskema, der ligeledes indgik i specialeforfatternes opdeling af gymnasieeleverne. Hvordan denne opdeling fandt sted, er beskrevet i **Afsnit 7.4**.

De dele af undersøgelsen, som gymnasieeleverne gennemgik, bestod af de følgende fem faser, i den pågældende rækkefølge.

- (i) Besvarelse af indledende spørgeskema
- (ii) Besvarelse af indledende prøve
- (iii) Fysisk klasseværelsesundervisning eller videoundervisning
- (iv) Besvarelse af afsluttende prøve
- (v) Besvarelse af afsluttende spørgeskema

Planlægning af hver af disse faser, samt elevernes besvarelser af de to prøver og de to spørgeskemaer, beskrives og analyseres i løbet af projektet. Det indledende spørgeskema kan findes i **Appendiks A**, den indledende prøve i **Appendiks B**, den afsluttende prøve findes i **Appendiks D**, mens de afsluttende spørgeskemaer findes i **Appendiks E** og **Appendiks F**. En transskription af undervisningsvideoen, produceret af specialeforfatterne (Kristensen og Lie, 2022), findes i **Appendiks C**.

Inden planlægningen af undersøgelsen, samt elevernes besvarelser af de udleverede prøver og spørgeskemaer behandles, beskrives først den undersøgelsesmetode, der ligger til grund for udarbejdelsen af specialet, samt diverse teorier vedrørende konstruktivistisk og sociokulturel læringsteori, læringsmiljøer og det didaktiske dobbeltspil, blended learning og flipped classroom, medrivende dialog, matematik som undervisningsfag og vektorer som emne, konceptuel og procedural matematisk forståelse, samt mediers affordances.

2 | Metode

Som nævnt i introduktionen, har dette speciale til formål at undersøge videomediets plads i gymnasial matematikundervisning, på baggrund af to selvudførte undervisningsforløb, konstrueret som henholdsvis asynkron videoundervisning og fysisk klasseværelsesundervisning med særligt fokus på medrivende dialog. Alan Bryman skriver i sin bog, *Social Research Methods* (2016), hvordan brugbare undersøgelser bør foretages. Heri gennemgås både hvorledes en undersøgelse bør forberedes, såvel som hvordan forskere bør bearbejde det data, som følger af undersøgelsen.

Forskere bør som det første tage stilling til, hvorvidt undersøgelsen skal udføres induktivt, deduktivt, eller som en blanding af begge tilgange. Bryman (2016) beskriver den deduktive metode som en undersøgelsesmetode hvori forskerne opstiller hypoteser på baggrund af eksisterende teori, hvorefter disse hypoteser accepteres eller forkastes som følge af undersøgelsen. Revurderes teorien bag undersøgelsesemnet derimod på baggrund af den indsamlede empiri, udføres undersøgelsen induktivt.

Undersøgelsen, der er udarbejdet i forbindelse med dette speciale, betragtes som værende induktiv, eftersom undersøgelsen ikke har til formål at acceptere eller forkaste en hypotese, men derimod undersøge videomediets plads i gymnasial matematikundervisning, og dermed danne ny teori, på baggrund af undersøgelsen.

2.1 De syv centrale undersøgelseselementer

Bryman (2016) mener, at undersøgelser bør inddeles i syv faser, disse værende *litteraturreview, koncepter og teori, undersøgelsesspørgsmål, valg af cases, dataindsamling, databehandling* og *rapportering* (ss. 6-11).

Bryman (2016) fastslår, at et grundigt litteraturreview er et nødvendigt trin i enhver undersøgelse. I litteraturreviewet klarlægger forskerne allerede kendte koncepter og teorier inden for det område, som undersøgelsen ønsker at behandle. Ydermere fokuseres der på

hvilke tidligere undersøgelsesmetoder og -strategier, der har været anvendt, samt hvilke kontroverser og uenigheder, der eventuelt er opstået mellem tidligere anerkendte forskere på området. Bryman (2016) nævner ligeledes, at mange forskningsområder har en lang historie med nærmest utællelige mængder af research, hvorfor det sjældent er muligt at klarlægge alle grene af den eksisterende teori vedrørende det emne, man ønsker at undersøge. Litteraturreviewet bør da indskærpe mængden af potentielle kilder, mens rapporteringen af dette litteraturreview bør klargøre årsagerne bag, hvorfor noget teori er frasortet, mens andet er tilvalgt. De relevante nedslag i dette speciales anvendte litteratur, blev beskrevet i **Kapitel 1**.

Efter litteraturreviewet er gennemført, bør forskerne fortsætte til fasen vedrørende koncepter og teorier. Bryman (2016) beskriver, hvordan tidligere forskere har anvendt mærkater om signifikante aspekter af personer eller samfund, som de fleste forskere forbinder med fællestræk. Eksempelvis kunne mærkater være status, karisma, magt, eller lignende. Disse mærkater betegnes som koncepter, og er en nødvendig del af de anvendte teorier, da undersøgelser blandt andet organiseres på baggrund af disse koncepter, mens de ligeledes er med til at kommunikere undersøgelsens fokuspunkter til potentielle læsere. Man bør derfor som forsker klargøre, hvilke koncepter og teorier man baserer sin forskning på, samt hvilke koncepter og teorier der var grundlæggende for de undersøgelser, der indgår i den litteratur, man baserer sin forskning på.

Fasen vedrørende koncepter og teorier bør opfølges af udarbejdelsen af undersøgelses-spørgsmål. Her konkretiseres emnet, der ønskes undersøgt, ved hjælp af konstruktionen af konkrete spørgsmål. Bryman (2016) forklarer hvordan udarbejdelsen af undersøgelses-spørgsmålene essentielt er "narrowing down and focusing more directly on what it is you want to know about" (s. 8). Undersøgelsesspørgsmålene gavner forskerne, idet de guider dem mod hvilke data, der bør indsamles, og fra hvem dataet skal indsamles, samtidigt med, at de hjælper dem med at fokusere og begrænse undersøgelsens bredde, således at der ikke indsamles data fra kilder, der senere viser sig ikke at være brugbare i databehandlingen. Undersøgelsesspørgsmålene giver ligeledes læserne af undersøgelsesrapporten et bedre indblik i undersøgelsens formål. Bryman (2016) beskriver ligeledes, hvordan udarbejdelsen

af undersøgelsesspørgsmålene og litteraturreviewet bør gå hånd i hånd, da undersøgelsesspørgsmålene netop er med til at tydeliggøre, hvilken litteratur, der bør inddrages. Man bør som forsker derfor indlede sin undersøgelse med at læse forskellig litteratur, der umiddelbart leder til konstruktionen af diverse spørgsmål. Disse spørgsmål fører forskeren på et dybere dyk i forskningsemnets eksisterende litteratur, der kan resultere i revurderinger af de oprindelige spørgsmål, eller endda afføde nye spørgsmål. Dette speciale ønsker at undersøge videomediets plads i gymnasial matematikundervisning, hvori der blandt andet indgår en undersøgelse af, hvilke af videomediets affordances, beskrevet i **Afsnit 6.2**, der kan styrke dets anvendelighed i en matematisk fagdidaktisk kontekst, der konkretiseres i følgende undersøgelsesspørgsmål: *Kan videomediet anvendes til at styrke gymnasieelevers evne til at visualisere matematiske objekter og koncepter, eksempelvis de geometriske egenskaber ved todimensionale vektorer?* og *Hvilke fordele er der ved fysisk klasseværelsesundervisning, som ikke umiddelbart kan overføres til videoundervisning?*.

Når man som forsker har konstrueret sine undersøgelsesspørgsmål, bør man ifølge Bryman (2016) fokusere på at vælge 'cases'. I denne fase udvælger forskerne de datakilder, som de anser som værende relevante, og mulige, at inddrage data fra. Denne udvælgelse kalder Bryman (2016) for "samplings" (s. 9). I de fleste undersøgelser vil det være umuligt at inddrage data fra alle relevante datakilder, eksempelvis grundet tidsbegrænsninger, økonomiske betingelser, eller blot mængden af datakilder, hvorfor disse skal begrænses. Forskernes til- og fravalg af cases bør derfor overvejes nøje, så man sikrer sig, at man ikke fravælger vigtige cases, mens cases, der viser sig ikke at være anvendelige i undersøgelsen, fejlagtigt tilvælges. Eksempelvis kan forskerne vælge at lave en repræsentativ sampling, hvor man udvælger sine datakilder således, at de eksempelvis, så godt som muligt, repræsenterer en befolkning af et geografisk område eller lignende. Den primære datakilde i dette projekt er netop datasættet indsamlet på baggrund af den undersøgelse, der er blevet udført i forbindelse med projektet. Her blev der, som nævnt i **Kapitel 1**, sendt e-mails til adskillige rektorer og matematiklærere på danske gymnasier, i håb om, at nogle af disse ville stille deres elever til rådighed for specialeforfatterne. Da kun én gymnasielærer gjorde dette, var der ikke mulighed for et omfattende til- og fravalg af cases, omend én af

lærerens tre klasser blev fravalgt at indgå i undersøgelsen, grundet skemaplanlægning og tidsbegrænsning. I klassen, der blev fravalgt, havde alle eleverne valgt en studieretning med matematik på A-niveau, i kontrast til de to deltagende klasser, hvori alle elever havde valgt matematik på B-niveau. Specialeforfatterne ønskede ligeledes, at udføre undersøgelsen på gymnasieelever, der potentielt havde udfordringer med matematik som fag, da elever, der har nemt ved faget, nok skal 'klare sig' med den traditionelle klasseværelsesundervisning. Skulle videomediet vise sig at øge den generelle matematiske forståelse og det matematiske niveau blandt gymnasieelever, er det altså vigtigt, at det ikke blot er de matematikstærke, der bliver endnu stærkere i faget, men at det netop er de udfordrede elever, der oplever et løft af deres forståelse.

Det femte undersøgelseselement, beskrevet af Bryman (2016), er selve dataindsamlingen. I denne fase skal forskerne vælge, hvordan de vil indsamle deres data. Dataindsamlingens grad af struktur varierer fra undersøgelse til undersøgelse, da der kan findes fordele og ulemper ved mere og mindre strukturerede dataindsamlinger. Eksempelvis kunne dataindsamlinger med meget struktur tage form som strukturerede interviews eller spørgeskemaundersøgelser, som ifølge Bryman (2016) er bedre til at belyse det intenderede undersøgelsesområde, end dataindsamlinger med mindre struktur, der i stedet lettere kan resultere i data, der kan belyse et andet undersøgelsesområde end intenderet. Disse kan eksempelvis bestå af deltagerobservationer eller semistrukturerede interviews.

I dette speciale består dataet af de deltagende elevers besvarelser af prøver og spørgeskemaer, der udarbejdes af specialeforfatterne, de to sessioner af både videoundervisning og fysisk klasseværelsesundervisning, samt specialeforfatternes betragtninger og opfattelser af disse undervisninger. Besvarelserne af prøverne resulterer i analyserbar kvantitativ data, der kan beskrive det generelle matematiske niveau blandt de deltagende gymnasieelever, samt give et billede af deres forståelse af det teori, der gennemgås i undervisningerne. Disse data suppleres af elevernes besvarelser af de udleverede spørgeskemaer, der omend de stadig anses som værende kvantitativ data, giver et mere nuanceret syn på elevernes oplevelser af undervisningsforløbene og deres udbytte af disse, samt deres tanker vedrørende videomediet og matematik som fag. Selve undersøgelsen udarbejdes som en 'quasi-

undersøgelse', hvorfor sådanne undersøgelser vil blive beskrevet i **Afsnit 2.2**.

Efter al data er indsamlet, når forskerne til databehandlingsfasen. Ifølge Bryman (2016) omhandler denne fase primært komprimeringen af den indsamlede data til en overkommelig mængde. Dette bør gøres omhyggeligt, således at man som forsker ikke misfortolker data eller ved en fejltagelse fjerner relevant data. Komprimeringen af den indsamlede data i dette projekt, er sket på baggrund af, hvorvidt dataet stammer fra elevernes besvarelser af spørgeskemaerne, eller fra deres besvarelser af prøverne. Spørgeskemabesvareelserne komprimeres ved brug af Likert-skalaen, og indskrives i tabeller i henholdsvis **Afsnit 7.2** og **Kapitel 9**, for at give et tydeligt billede over, hvor mange af de deltagende gymnasieelever, der har valgt de forskellige svarmuligheder, til de forskellige spørgsmål. Det indsamlede data, der stammer fra elevernes besvarelser af de udleverede prøver, behandles og komprimeres i henholdsvis **Afsnit 7.3** og **Kapitel 10**. Her komprimeres dataet til eksempelvis at omhandle, hvor mange elever der har angivet det korrekte svar, til hvert spørgsmål, eller til at give et overblik over det gennemsnitlige antal optjente point for eleverne der modtog videoundervisning, og for eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. I dele af analysen frasorteres der ligeledes data fra den afsluttende prøve, grundet misvisende resultater. Dette beskrives nærmere i **Kapitel 10**.

Afslutningsvis beskriver Bryman (2016) hvordan forskere bør rapportere de fund, de har gjort sig i forbindelse med udførelsen af undersøgelsen. Ifølge Bryman (2016) bør enhver form for rapportering indeholde visse kerneelementer, disse værende en *introduktion*, et *litteraturreview*, et *metodeafsnit*, undersøgelsens *resultater*, en *diskussion af resultaterne* samt en *konklusion på undersøgelsen*. For denne undersøgelse udgør netop specialerapporten denne rapportering, hvorfor rapporten indeholder alle de nævnte kerneelementer, omend der ikke optræder et decideret fritstående litteraturreview.

2.2 Quasi-undersøgelser

Som supplement til de syv centrale undersøgelselementer, som blev beskrevet ovenover, beskriver Bryman (2016) ligeledes forskellige undersøgelsesmetoder. En metode, man som

forsker kan følge, hvis man skal udføre en undersøgelse, er at gøre brug af eksperimentelle designs, herunder ved at udføre såkaldte quasi-undersøgelser.

Eksperimentelle undersøgelser udmærker sig ved at bestå af to grupper, hvor den ene betegnes som eksperimentalgruppen, mens den anden betragtes som værende kontrolgruppen. Eksperimentalgruppen modtager en form for 'experimental treatment', mens kontrolgruppen ikke modtager samme behandling. Efter dette sammenlignes resultaterne i de to grupper, for at vurdere, hvorvidt den eksperimentelle behandling har fungeret. Sådanne undersøgelsesdesign, og undersøgelser generelt, bør leve op til en vis mængde af krav om intern validitet, for at resultatet af undersøgelsen kan betragtes som værende validt. Spørgsmålet om intern validitet omhandler ofte påvisningen af kausalitet, hvor man som forsker skal sikre, at det netop er de hændelser, man analyserer til at være udslagsgivende, der reelt er udslagsgivende, og man dermed undgår at beskrive hændelser af spuriøse sammenhænge, i stedet for egentlige kausale sammenhænge.

Quasi-undersøgelser er derimod eksperimentelle undersøgelser, der ikke lever op til alle de normale krav om intern validitet, eksempelvis hvis "participants to the two groups are not randomly assigned" (Bryman, 2016, s. 50). Overholdes disse krav ikke, kan det have effekt på den generelle opfattelse af undersøgelsens gyldighed og validitet, da forskernes egen fordeling af deltagerne i henholdsvis eksperimentalgruppen og kontrolgruppen, potentielt kan have påvirket resultatet af den udførte undersøgelse.

Undersøgelsen, der udføres i forbindelse med dette speciale, betragtes som værende en quasi-undersøgelse, idet specialeforfatterne selv har fordelt de deltagende gymnasieelever på de forskellige hold, på baggrund af deres besvarelser af en indledende prøve og et indledende spørgeskema. Som bekendt modtager det ene hold videoundervisning, mens det andet hold modtager fysisk klasseværelsesundervisning, hvorfor sidstnævnte hold kan betragtes som værende kontrolgruppen, omend der i den fysiske klasseværelsesundervisning er særligt fokus på elevinddragelse og medrivende dialog. Dette skyldes, at den eksperimentelle videoundervisning ønskes sammenlignet med den bedst mulige fysiske klasseværelsesundervisning. Eleverne er opdelt på en sådan måde, at de matematisk stærke og udfordrede elever, baseret på besvarelserne af den indledende prøve, er ligeligt fordelt på de to hold,

således at ingen af undervisningsformerne opnår en uretfærdig fordel, når eleverne efterfølgende skal besvare en prøve omhandlende den gennemgåede teori. Undersøgelsen har dog ikke udelukkende til formål at vurdere fordele og ulemper ved videoundervisning, men ligeledes fordelene og ulemperne ved den udførte fysiske klasseværelsesundervisning med særligt fokus på medrivende dialog, hvorfor denne gruppe ikke udelukkende kan betragtes som værende en kontrolgruppe, men derimod også have træk fra en eksperimentalgruppe. Af denne grund beskrives teorien vedrørende 'logic of comparison' nedenfor.

2.2.1 Sammenligningslogik

'Logic of comparison', også kaldet sammenligningslogik, er ligesom quasi-undersøgelser, en form for eksperimentelt design. Bryman (2016) beskriver hvordan enhver undersøgelse "entails a *comparison*" (s. 52), hvor denne sammenligning som oftest sker mellem eksperimentalgruppen og kontrolgruppen. Som tilfældet er i dette speciale, kan der dog udføres undersøgelser uden en reel kontrolgruppe, hvorfor forskellige eksperimentalgrupper i stedet skal sammenlignes. En af fordelene ved sådanne undersøgelser er, at "we understand the phenomenon that we are interested in better when we compare it with something else that is similar to it" (Bryman, 2016, s. 52), hvilket netop bliver gjort i dette speciale.

Som nævnt sammenlignes to hold af gymnasieelever, der modtog to forskellige typer af undervisning, i samme emne. Eleverne undervises i samme materiale, hvorfor deres forståelse af dette kan tolkes til at være sammenhængende med hvilke type af undervisning, teorien blev formidlet gennem. Ved hjælp af besvarelserne af den afsluttende prøve og de afsluttende spørgeskemaer, kan fordelene og ulemperne af de to undervisningsmetoder analyseres og vurderes.

Teori om netop spørgeskemaer beskrives nedenfor, som afslutning på metodedelen af denne specialerapport.

2.3 Spørgeskemaer

I dette speciale indsamles der data gennem såkaldte "self-administered questionnaires" (Bryman, 2016, s. 220), altså spørgeskemaer, der besvares af deltagerne selv, hvorfor der i dette afsnit beskrives teori vedrørende design og anvendelse af disse.

Bryman (2016) beskriver, hvordan 'self-administered questionnaires' minder om strukturerede interviews, hvor den store forskel naturligvis er, at der ikke er en interviewer til stede til at stille spørgsmålene. Af denne grund er det nødvendigvis heller ikke muligt for respondenterne at bede om uddybende forklaringer, hvis der er et eller flere spørgsmål, de umiddelbart ikke forstår. Dette gør, at et sådan spørgeskema skal udarbejdes, så det er "especially easy to follow and its questions have to be particularly easy to answer" (Bryman, 2016, s. 222). Dette kan eksempelvis sikres ved primært at stille lukkede spørgsmål, udforme spørgeskemaet i et simpelt design, samt begrænse spørgeskemaets længde. De to sidste faktorer er med til at forhindre, at respondenterne bevidst springer over spørgsmål eller oplever "respondent fatigue" (Bryman, 2016, s. 222). I forlængelse af dette beskriver Bryman (2016) hvordan spørgsmålene i spørgeskemaer bør være "salient" (s. 23), altså skal de skille sig ud fra hinanden. Dette er med til at fastholde respondentens koncentration og interesse. I dette speciale er lethed af spørgeskemaet afprøvet ved at få eksterne personer til at gennemlæse spørgsmålene og svarmulighederne, hvorefter deres respons er blevet anvendt til at udarbejde de endelige versioner, som kan ses i henholdsvis **Appendiks A**, **Appendiks E** og **Appendiks F**.

En af årsagerne til, at der i forbindelse med dette speciale anvendes spørgeskemaer frem for interviews eller fokusgrupper, er spørgeskemaets styrke i dataindsamlingen. Her indsamles hurtigt og relativt let en masse kvantitativ data, der kan ligge til grund for både undersøgelsesspørgsmål, problemformuleringer eller opfølgende interviews. Dataindsamlingen, og databehandlingen, ville tage markant længere tid, skulle hver enkelt gymnasieelev interviewes individuelt, eller indgå i fokusgrupper af bestemte størrelser.

Eftersom dette speciale undersøger udbyttet af undervisningen for samtlige elever,

findes det mere relevant at få input fra hele klasser end dybdegående input fra få elever. Samtidigt kan det individuelle spørgeskema fremme sandsynligheden for, at respondenterne besvarer spørgsmålene sandfærdigt. Dette ses eksempelvis i en undersøgelse udført af Preisendörfer og Wolter (2014), der undersøgte hvor stor en andel af respondenter, der sandfærdigt indrømmede at være blevet dømt for (mindre) lovovertrædelser, i henholdsvis spørgeskemaer og interviews. Det antages, at respondenter generelt vil have sværere ved at indrømme, at de er blevet dømt for mindre lovovertrædelser, end at de har svært ved matematik på gymnasiet. Dog kan begge dele være noget, der kan medføre skamfuldhed hos individet, hvorfor indrømmelsen af et lavt matematisk niveau til en vis grad anses som værende sammenligneligt med undersøgelsen af Preisendörfer og Wolter (2014). Denne undersøgelse viste yderligere, at respondenter der besvarer spørgeskemaerne hurtigt, ofte svarer mere præcist og korrekt, end de der først besvarer spørgeskemaerne efter en påmindelse. Af disse grunde besvares spørgeskemaerne i denne undersøgelse på klassen, og gives eksempelvis ikke for som lektier, da sidstnævnte sandsynligvis ville resultere i færre besvarelser, samt mere upræcise og mindre sandfærdige besvarelser.

Spørgeskemaer har naturligvis også visse begrænsninger og ulemper. Som tidligere nævnt er de oplagte til at indsamle store mængder af kvantitativ data hurtigt, dog kan disse datamængder vise sig ikke at være fyldestgørende eller konkrete nok, da spørgeskemaerne som udgangspunkt besvares, uden at forskerne kan stille uddybende spørgsmål, skulle en respondent afgive et interessant svar. Man kan på denne måde være begrænset i, hvor kvalitativ data man kan indsamle ved brug af spørgeskemaer. Ydermere begrænses spørgeskemaerne af deres længde. Et langt spørgeskema øger sandsynligheden for, at deltagere springer visse spørgsmål over. Dette kan resultere i manglende data for visse elementer af undersøgelsen.

Specialeforfatterne gjorde i denne undersøgelse brug af fysiske spørgeskemaer, der udleveredes til eleverne inden de besvarede den indledende prøve, og efter de besvarede den afsluttende prøve. De fysiske spørgeskemaer blev valgt til fordel for henholdsvis e-mail- eller web-spørgeskemaer, da disse alternativer kan resultere i lav svarprocent eller tilfældige valg af svarmuligheder, for blot at 'klikke sig igennem' spørgeskemaet. Fordelene ved disse kan

dog findes i anonymisering af data, samt automatisk gruppering og analysering af dette data. Dette vejede dog ikke op for den potentielt lave svarprocent, havde de deltagende gymnasieelever skulle besvare spørgeskemaerne som lektier.

Hvordan forfatterne bag dette speciale har anvendt teorien beskrevet i Bryman (2016), til at udarbejde undersøgelsens tre spørgeskemaer, behandles i **Afsnit 7.1**.

2.3.1 Likert-skalaen

Da størstedelen af de spørgsmål, der indgår i denne undersøgelses spørgeskemaer, angiver svarmuligheder der følger Likert-skalaen, beskrives denne kort. En Likert-skala beskriver svarmuligheder, ofte fra 1 til 5, rangeret i numerisk rækkefølge eller som en tallinje, hvorpå svaret skal angives. Anvendes Likert-skalaen gøres der oftest brug af et ulige antal svarmuligheder, da dette "serves the purpose of providing a central neutral response and an equal number of positive and negative responses above and below the neutral middle point" (Emerson, 2017, s. 488). Her tænkes der specifikt på eksempler, hvor skalaen er opstillet vertikalt, men samme princip gør sig gældende for horisontale svarmuligheder.

Inkluderingen af den neutrale svarmulighed gør, at respondenterne ikke tvinges til at tage stilling til et spørgsmål, hvis de ikke har en særlig ekstrem holdning vedrørende emnet. Denne svarmulighed kan på visse punkter anses som det 'lette valg', men kan også reflektere visse respondents egentlige holdning til spørgsmålet, da reelt neutrale respondenter ikke tvinges til at vælge en positiv eller negativ svarmulighed. Af denne grund medtages den neutrale svarmulighed i flere af de spørgsmål, der indgår i spørgeskemaerne, der ses i **Appendiks A** samt i **Appendiks E** og **Appendiks F**.

Ydermere nævner Emerson (2017), at svarmulighederne bør formuleres på en sådan måde, at der er "an equal sense of distance between them" (s. 488), hvorfor en skala med tallene 1-5 ofte anvendes. I dette projekt er svarmulighederne dog ikke angivet i form af tal, men der er forsøgt at skabe svarmuligheder med samme distance, eksempelvis via skalaerne: *Meget ofte - Ofte - Sommetider - Sjældent - Meget sjældent*, eller *Optimalt - Meget - Hverken meget eller lidt - Lidt - Minimalt*.

Del II

Teori

3 | Læringsteorier

Gennem tiderne har der været adskillige syn på, og teorier om, hvordan læring finder sted. Filosofer og eksperter inden for området er sjældent enige om faserne og faktorerne i læringsprocessen. Dette skyldes, som Carl Winsløw skriver i sin bog *Didaktiske elementer: En indføring i matematikkens og naturfagets didaktik*, at "Læringsteori . . . altså ikke [er] - i det mindste endnu da - en 'naturvidenskab'" (Winsløw, 2013, s. 91), og brugen af internettet og nyere digitale kommunikationsmetoder i undervisnings- og læringssammenhænge, har kun ført til større debat. I dette kapitel beskrives konstruktivismen og den sociokulturelle læringsteori. Andre tidligere læringsteorier, eksempelvis behaviorisme, behandles altså ikke i dybden, da disse ses som liggende uden for dette speciales omfang.

3.1 Konstruktivisme og Piaget

Den konstruktivistiske læringsteori adskiller sig fra tidligere læringsteorier gennem et større fokus på den lærendes mentale aspekt, og konstruktivister, såsom Piaget, mener, at læring netop er resultatet af den lærendes mentale arbejde. Hos Piaget opfattes den lærende altså som aktiv, og tilegnelsen af ny viden skal derfor ikke forstås som en internalisering, hvor individet "på en relativt passiv måde lærer at 'kopiere' udefrakommende viden" (Beck, 2017, s. 28). Derimod omformer den lærende selv oplevelserne og erfaringerne, så de passer til ens eget formål. Om læring skriver Piaget (1983)

For at kunne præsentere et adækvat læringsbegreb må man først være i stand til at forklare, hvordan det kan lade sig gøre for individet at konstruere og opfinde, og ikke hvordan det bliver i stand til at gentage og kopiere.

(oversat og citeret i Beck, 2017, s. 41)

Den lærendes mentale arbejde er baseret på erfaringer, som den lærende har gjort sig tidligere i læringsforløbet, eller tidligere i livet, hvortil den nye læring skal tilpasses, enten

via assimilation eller akkomodation (Hoadley, 2016, s. 28). Ved assimilation forstås processen hvor "the learner incorporates ideas unproblematically into their current way of thinking" (Hoadley, 2016, s. 30), mens de lærende ved akkommodation er nødsaget til at "stretch their minds" (Hoadley, 2016, s. 30), for at kunne tilegne sig den nye viden, de bliver præsenteret for. På denne måde afspejler den lærendes kognitive udvikling snarere et biologisk system, eksempelvis en organisme, frem for et mekanisk system, som eksempelvis ses hos behaviorismen. En måde at karakterisere det mentale arbejde, der ifølge Piaget (1970) foregår hos den lærende, er ved at inddele viden i to semantiske skemaer. Disse beskrives af Winsløw (2013) som

- *Figurative skemaer*, som vedrører fænomener (ting, personer, egenskaber m.v.).
- *Operative skemaer*, som vedrører handlinger (i bred forstand) og deres konsekvenser.

(s. 96)

De figurative skemaer fungerer altså, med en simpel metafor, "som en slags mentale 'kasser'" (Winsløw, 2013, s. 96), men beskrives måske bedre ved "mængder" (i matematisk forstand)" (Winsløw, 2013, s. 96). Disse skemaer anvendes altså til at genkende konkrete genstande, men også til at sætte ting i systemer, eksempelvis andengradslikninger.

Hvor de figurative skemaer organiserer fænomenerne, så anvendes de operative skemaer til at "*gøre noget med/ved fænomenerne*" (Winsløw, 2013, s. 96). Operative skemaer udgøres som udgangspunkt af tre faser: "(a) forestillinger om en situation eller tilstand, som aktiverer skemaet; (b) specifikationer af selve den handling, som udføres i situationen; og endelig (c) en forventning om handlingens konsekvenser, som kan sammenlignes med den faktisk oplevede effekt" (Winsløw, 2013, ss. 96-97). Som eksempel på denne tredelte proces, kan dagligdagens møder med lukkede døre anvendes. Her genkender individet først døren som en dør, og ønsker individet at passere gennem denne, specificeres den nødvendige handling til at omhandle interaktionen med dørhåndtaget. Hertil ville handlingen forventes at føre til en åben dør. Denne forventede handlingskonsekvens kan eksempelvis modarbejdes af en låst dør, hvormed den egentlige konsekvens ikke stemmer overens med det forventede

udfald. Brugen af de operative skemaer kræver naturligvis også arbejde med de figurative skemaer, da situationen eller tilstanden, der aktiverer de operative skemaer, indledningsvis forsøges genkendt eller karakteriseret. De to typer af semantiske skemaer spiller altså sammen i de fleste læringssituationer, eksempelvis ved løsningen af en andengradsligning, som beskrevet af Winsløw (2013), hvor ligningen først skal genkendes til at være af den specifikke type, der gøres ved brug af de figurative skemaer, hvorefter koefficienterne skal findes, og ligningen så kan løses ved brug af standardformlen samt de operative skemaer. Det skal dog pointeres, at Piaget selv aldrig direkte forskede i feltet omkring undervisning, men udtalte sig dog stadig om undervisning og fag i skolen.

I løbet af livet udvikles og udbygges disse skemaer, hvad end de er figurative eller operative, i mødet med ny viden, nye fænomener og nye situationer. Dette sker, som nævnt tidligere, via assimilation og akkommodation. Udvides beskrivelsen fra Hoadley (2016), så den modsvarer teorien om semantiske skemaer, er assimilationsprocessen "hvor det "nye" umiddelbart passer ind i eksisterende skemaer" (Winsløw, 2013, s. 98), mens akkommodation betegner situationen, hvor "det nye ikke passer i vores relevante skemaer, der derfor må tilpasses" (Winsløw, 2013, ss. 98-99). Beck (2017) beskriver Piagets opfattelse af assimilation som "den mest grundlæggende form for bearbejdelse af ydre stimuli" (Beck, 2017, s. 27), og knytter ordet til dets anvendelse i biologi, hvor dette beskriver "organismers energi- og næringsstofoptagelse" (Beck, 2017, s. 27). Hos mennesker skal assimilationen forstås som optagelsen af erfaringer og oplevelser. Som tidligere nævnt kan ny viden også optages via akkommodation, og selvom processerne som udgangspunkt kan opfattes som modsætninger, er det "på det overordnede plan det mentale livs rolle og på det partikulære plan netop intelligensens rolle at koordinere de to modsætninger" (Piaget, 1937, citeret og oversat i Beck, 2017, s. 29). Disse læringsprocesser koordineres i håbet om at opnå 'ligevægt', da mennesket, ifølge Piaget, er problemløser, der ønsker balance mellem det indre og det ydre, og det er netop denne ligevægtstræng, der driver individet frem, i ønsket om at lære noget nyt.

Piagets syn på lærings- og undervisningssituationer er dog ikke individuel og egocentrisk, som man ellers potentielt kunne tro. Piaget ønsker en skole hvor eleverne "lærer gennem

samarbejde og bidrager til fællesskabet" (Beck, 2017, s. 47), og disse "skal under ingen omstændigheder reduceres til passive modtagere af lærerens og bøgernes visdom" (Beck, 2017, s. 47), hvilket ligner den sociokulturelle læringsteori, der behandles i det følgende afsnit.

3.2 Den sociokulturelle læringsteori og Vygotsky

Hvor den konstruktivistiske læringsteori primært fokuserer på, hvordan ny viden behandles i hjernen hos den lærende, så interesserer den sociokulturelle læringsteori sig mere eksplicit for hvordan "omverdenen eller kulturen fungerer som ressource for individets læring" (Beck, 2017, s. 65). Dermed beskriver den sociokulturelle læringsteori hvordan læringen er en proces mellem flere personer, og ikke udelukkende foregår hos den lærende, ifølge Hoadley (2016).

Den sociokulturelle læringsteori er baseret på Vygotskys idé om mediering, der beskriver hvordan relationen mellem den lærende, og det, der skal læres, altid foregår "via et redskab, enten fysisk i form af teknologi, eller mentalt i form af tegn og sprog" (Rømer, 2005, s. 232). Dermed er al læring omfattet af de affordances, hvert medie (eller redskab, som Rømer (2005) kalder det) er påvirket af. Med affordances menes der eksempelvis hvilke kommunikative begrænsninger, et givet medie har, samt hvilke muligheder der er for at interagere med kommunikationen. De affordances, der er relevante for de medier, der anvendes i denne undersøgelse, beskrives i **Afsnit 6.2**.

Da alle former for læring skal kommunikeres, har ethvert menneskes læring en "social oprindelse" (Rømer, 2005, s. 233), og Vygotsky (1978) beskriver selv hvordan

Every function of the child's cultural development appears twice: first on the social level, and later, on the individual level. First, between people and then inside the child. This applies equally to voluntary attention, to logical memory, and to the formation of concepts. All the higher functions originate as actual relations between human individuals. (Vygotsky, 1978, s. 57)

De redskaber, der er med til at mediere mellem kultur og individ, er eksempelvis "forskellige talsystemer, hukommelsesteknikker, algebraiske symbolsystemer, kunstværker, skrivning, skemaer, diagrammer osv." (Beck, 2017, s. 70), dog er det absolut vigtigste medie, ifølge Vygotsky, sproget. Sproget muliggør kommunikationen mellem mennesker, og lægger også fundamentet for udførelsen af avancerede handlinger. Vygotsky mener, at der hos børn både findes "en sproglig fase, der er førintellektuel, og en kognitiv fase, der er førlingvistisk" (Beck, 2017, s. 71). Det er netop mødet mellem disse faser, hvor sproget bliver rationelt, og tænkningen bliver sproglig, der giver anledning til menneskets "unikke evne til at kunne generalisere og abstrahere" (Beck, 2017, s. 71). På samme måde, som de figurative skemaer danner rammerne for optagelse af ny viden hos Piaget, er det individets adgang til sprog, der er centralt for Vygotsky (1987). Det er gennem sproget, mennesker lærer at bruge begreber, der netop gør det muligt at abstrahere, generalisere og systematisere. Ligheder mellem Piaget og Vygotsky ses også i deres teorier om børns udvikling, som Piaget inddeler i stadier, mens Vygotsky taler om nydannelser. Disse baseres igen på henholdsvis barnets evne til at assimilere og akkommodere ny viden og på barnets sproglige udvikling. Disse fundamentale dele af både Piaget og Vygotskys forskning behandles dog ikke i dette speciale, da teorierne udelukkende beskriver børn af yngre aldre end de danske gymnasie-elever, der indgår i denne undersøgelse, hvorfor der fokuseres på filosofernes grundtanker om læring, frem for deres syn på den menneskelige udvikling fra barn til voksen.

Ligesom Piaget var Vygotsky også interesseret i skolens betydning for barnets udvikling. Dette førte til Vygotskys teori omkring zonen for nærmeste udvikling, også kaldet "zone of proximal development" (Hoadley, 2016, s. 29), sommetider forkortet ZPD. Med dette menes, at et barn er i stand til at lære mere, hvis dette er ledsaget af en voksen, end hvis barnet er alene. Med denne teori sætter Vygotsky to streger under sin holdning om, at læring skal forstås socialt, da teorien baserer sig på, at "Hvad barnet i dag er i stand til at gøre gennem samarbejdet, er han i morgen i stand til at gøre på egen hånd" (Vygotsky, 1987, citeret og oversat i Beck, 2017, s. 82). Dette samarbejde er dog kun gavnligt, hvis den instruktion, som den lærende modtager, er et stykke foran dennes udvikling. Dermed stimulerer og vækker hjælpen en "række funktioner, som er i færd

med at modnes i zonen for nærmeste udvikling" (Vygotsky, 1987, citeret og oversat i Beck, 2017, s. 82). Foregribes dette speciales anvendelse af den sociokulturelle læringsteori en smule, er det værd at nævne, at denne voksne naturligvis ville være læreren i en traditionel undervisningssituation på danske ungdomsuddannelser, dog kan denne rolle også udfyldes af en jævnaldrene, der besidder større viden inden for området. På denne måde kan gymnasieelever altså godt være i en zone for nærmeste udvikling, til trods for, at læreren eksempelvis ikke befinder sig i klasseværelset. Dette behandles nærmere i **Kapitel 4**. Derudover behandles klasseværelseslæring yderligere i **Afsnit 3.3**.

Dette syn på læring uddybes yderligere af Lave og Wenger (1991), hvor læring ses som "more of a social process than a mental one" (Hoadley, 2016, s. 29). Dette resulterer i, at læringsprocessen anses som værende en personlig udvikling, hvormed det lærte tilføres ens identitet, da man er i stand til at indgå i nye praksisfællesskaber. Dermed beskriver Hoadley (2016), at "a situated learning theorist might think less about how learners absorb the content of mathematics, and more about how learners 'become matematicians'" (s. 29). Lave og Wenger (2003) beskriver teorien om situeret læring, hvor nye medlemmer optages i et praksisfællesskab, og udvikler sig fra "legitim perifer deltagelse til fuld deltagelse i praksisfællesskabet" (Beck, 2017, s. 126). Denne form for læring beskrives i daglig tale som mesterlære, og den umiddelbare situation, hvor denne type læring finder sted, er da også hos eksempelvis malerlæringer, der gennem et længere forløb går 'op og ned' af deres mestre, for at lære det praktiske ved malerfaget. Denne type læring kan dog også forekomme i en gymnasieklasse, hvor læreren er mesteren, der vejleder og forklarer eleverne, hvordan den grundlæggende teori om eksempelvis todimensionale vektorer skal forstås. I forløbets begyndelse, ville eleverne have behov for en stor mængde assistance, og derfor kun deltage perifert, mens eleverne mod slutningen af læringsforløbet gerne skulle have opnået en sådan grad af forståelse for emnet, at de er i stand til indgå i et 'praksisfællesskab', og dermed samtale med deres lærer om netop dette emne.

Dette afslutter afsnittene om Piaget og Vygotskys læringsteorier. Hvordan disse anvendes i dette speciales undersøgelse, beskrives i **Kapitel 6**. Forinden dette, præsenterer **Afsnit 3.3** teorier om, hvordan der skabes de bedste betingelser for læring i et traditionelt klasseværelse.

3.3 Klasseværelset som læringsmiljø

Når man taler om faglig 'viden' i didaktiske sammenhænge, kan denne opdeles i to, nemlig 'personlig viden', også kaldet *connaissance*, og 'officielle viden', kaldet *savoir* (Winsløw, 2013). Som de danske navne antyder, er den personlige viden et udtryk for den enkeltes opfattelser om et specifikt emne, mens den officielle viden blandt andet er at finde i lærebøger og videnskabelige artikler. I matematikken, og andre naturvidenskabelige fag, er den officielle viden overvejende stabil og generel, hvor det modsatte netop gør sig gældende for den personlige viden. Når ny viden opnås, sker dette først som en udvidelse i den personlige viden, hvorefter denne viden kan deles med andre, og dermed blive til officiel viden. Dette eksempel gør sig gældende for forskere, der forsøger at opdage ny viden og teori inden for et bestemt emne, der endnu ikke er dækket af den officielle viden inden for området. Winsløw (2013) beskriver hvordan læringen hos en gymnasieelev som udgangspunkt foregår tilsvarende. Her sker der en personliggørelse af den viden, læreren underviser i, hvormed eleven bliver i stand til at forholde sig til emnet og teorien bag. Brousseau (2002) beskriver dog også, hvordan tilegnelsen af matematisk viden ikke blot består af "simply learning definitions and theorems in order to recognize when to use and apply them" (s. 22). En uddybet beskrivelse af matematik som undervisningsfag findes i **Kapitel 5**.

Ønsker man som lærer ikke, at ens elever blot lærer formler og metoder udenad, kan man skabe et læringsmiljø, hvor eleverne forsøger at emulere forskningsarbejde, og dermed selv, gennem lærerens hjælp og vejledning, kan komme frem til den korrekte formel eller fremgangsmåde. Brousseau (2002) argumenterer for, at

A faithful reproduction of a scientific activity by the student would require that she produce, formulate, prove, and construct models, languages, concepts and theories; that she exchange them with other people; that she recognize those which conform to the culture; that she borrow those which are useful to her; and so on (s. 22)

Når hver elev har konstrueret deres egen personlige viden, mener Brousseau (2002), ligesom Piaget og Vygotsky, at denne skal fællesgøres. Denne fællesgørelse af viden kan eksempelvis ske gennem medrivende dialog, der beskrives i **Afsnit 4.3**. Dermed opnår klassen en udvidet fælles viden, mens den generelle personlige forståelse af emnet ligeledes antageligvist forbedres. Både personliggørelsen hos den enkelte elev, og fællesgørelsen af viden blandt eleverne i klassen, muliggøres af det didaktiske miljø, som læringssituationen foregår i. Dette miljø, samt det didaktiske dobbeltspil og lærerens rolle i disse læringssituationer, beskrives i det følgende afsnit.

3.3.1 Det didaktiske miljø og det didaktiske dobbeltspil

Det didaktiske miljø beskriver hvilke omgivelser, der er til rådighed for eleven i lærings-situationen. Disse kunne eksempelvis være "problemstillinger, opgaver, hjælpemidler mv." (Winsløw, 2013, s. 135). Disse omgivelser introduceres af læreren, og alt efter hvilke der er til rådighed, er det didaktiske miljø mere eller mindre "befordrene for elevernes tilegnelse af en tilsigtet viden" (Winsløw, 2013, s. 135). I modsætning til eleverne, og de førnævnte forskere, arbejder læreren i undervisningssituationen indledningsvis med at re-personliggøre den allerede eksisterende officielle viden, idet den omsættes til et didaktisk miljø, hvorefter hver enkelt elevs personlige viden igen re-fællesgøres. Undervisningssituationen påvirkes derfor både af elevernes arbejde med lærerens didaktiske miljø, samt af lærerens interaktion i dette arbejde. Denne vekselvirkning mellem didaktiske situationer, hvor eleverne arbejder med det didaktiske miljø, og didaktiske situationer, hvor læreren interagerer med elevernes didaktiske arbejde, kaldes det didaktiske dobbeltspil.

Winsløw (2013) inddeler det didaktiske spil i fem faser, der kort beskrives nedenfor, da de indgår i specialeforfatterens tilrettelæggelse og produktion af den traditionelle undervisning, undervisningsvideoen, samt den afsluttende prøve. Hertil skal det nævnes, at faserne ikke nødvendigvis udspiller sig i den præsenterede rækkefølge, i forskellige undervisningssituationer. Første fase omhandler 'devolution'. Her introduceres eleverne for en opgave og dens betingelser, hvormed det didaktiske miljø overgives til eleverne. Det er som

udgangspunkt lærerens opgave at sikre, at devolutionen er foregået på en sådan måde, at eleverne har opnået en tilstrækkelig forståelse for opgaven, dog er eleverne også selv ansvarlige for at modtage overleveringen af opgavebetingelserne. I anden fase udspiller der sig 'handlingssituationer', hvor læreren har trukket sig, og lader eleverne udforske den stillede opgave. Brousseau (2002) beskriver hvordan eleven "teaches herself" a method of solving her problem" (s. 9), ved at eksperimentere med forskellige problemløsningsmetoder. Herefter bevæger eleverne sig over i 'formuleringssituationer', hvor "Eleverne formulerer - evt. efter opfordring fra læreren - deres første *hypoteser* om den givne problemstilling" (Winsløw, 2013, s. 138). Her er det centralt, at eleven udtrykker sig på en sådan måde, at personer på samme matematiske niveau, kan forstå deres hypotese, samt hvilke metoder og strategier, der indgår (Brousseau, 2002). Disse hypoteser skal muligvis konkretiseres og præciseres, inden eleverne bevæger sig videre til 'valideringssituationer', hvor hypoteserne, som fasens navn antyder, valideres eller afvises. Denne validering kan foregå forskelligt, eksempelvis i plenum, hvor eleverne præsenterer deres hypoteser for opgaveløsningen, eller i små hold, hvor hver elev gennemgår deres opgaveløsning med hinanden. I denne fase mener Brousseau (2002), at "Children must be given the chance to discover their errors" (s.17), da dette anses som en fundamental proces i læringen. Læreren skal altså ikke blot afvise hypotesen og præsentere den korrekte fremgangsmåde, men derimod vejlede eleven mod den rette løsning. Den sidste fase i det didaktiske spil er 'institutionaliseringen', hvor læreren præsenterer den officielle viden. Denne fase kan ydermere fungere som en "stadfæstelse af indvunden fælles viden" (Winsløw, 2013, s. 139), hvormed det tilsigtes, at klassen gerne skulle ende med samme forståelse af opgaven, selvom nogle elever muligvis ikke fik opstillet en hypotese, der kunne valideres. Et overblik over de forskellige faser, samt lærerens og elevernes rolle i disse, kan ses i **Tabel 3.1** på den følgende side.

	Lærerens rolle	Elevernes rolle	Miljø	Situation
Devolution	Igangsætte afklaring	Modtage og forstå opgave	Etableres	Didaktisk
Handling	Observere Reflektere	Handle Reflektere	Problemfelt Udforskningsfelt	Adidaktisk
Formulering	Organisere Spørge	Formulere Præcisere	Åben diskussion	Adidaktisk eller didaktisk
Validering	Præsentere Evaluerer	Argumentere Reflektere	Styret diskussion og bedømmelse	Normalt didaktisk
Institutiona- lisering	Præsentere Forklare	Lytte Reflektere	Institutionel viden	Didaktisk

Tabel 3.1: Faser i det didaktiske spil (klasseværelsesundervisning) (Winsløw, 2013, s. 140)

Winsløw (2013) beskriver ligeledes, hvordan disse faser ikke skal opfattes som "en opskrift på, hvordan man skal undervise" (Winsløw, 2013, ss. 140-141) men derimod bruges til identifikation af vigtige elementer og momenter i klasseværelsesundervisningen. Årsagen til, at et undervisningsforløb dog bør indeholde disse faser, er, at "det ikke er realistisk eller nødvendigt, at eleverne tilegner sig al den faglige viden gennem handlingssituationer" (Winsløw, 2013, s. 141), hvorfor lærerens rolle dermed bliver at vurdere, hvilke emner, der ikke blot kan institutionaliseres, og derfor bør indgå mere praktisk i undervisningen. Dette beskriver Winsløw (2013) som både værende et designproblem, idet undervisningen netop skal designes således, at disse emner spiller en central rolle i elevernes praktiske arbejde. Hvilke designovervejelser, specialeforfatterne har gjort sig, i forbindelse med tilrettelæggelsen af klasseværelsesundervisningen, samt i produktionen af undervisningsvideoen, beskrives i **Kapitel 6**.

4 | Undervisningsformer

Nu da konstruktivisme og den sociokulturelle læringsteori er blevet beskrevet, vil deres relevans for, og anvendelse i, dette speciale blive klargjort. Dette gøres gennem en karakterisering af læringsteoriernes indvirkning på 'broadcastperspektivet' og 'diskussionsperspektivet' samt på teorierne om 'flipped classroom' og 'medrivende dialog'.

4.1 Broadcastperspektivet og diskussionsperspektivet

Ifølge Weller (2007) deles de pædagogiske syn inden for e-læring op i to perspektiver. Disse værende 'broadcastperspektivet' og 'diskussionsperspektivet'.

Broadcastperspektivet skal forstås som den tilgang til læring, hvor et undervisningsmedie videregiver læring til dets tilhørere, som en form for radio- eller tv-broadcast, hvoraf navnet ligeledes stammer. I sammenhæng med e-læring gøres dette ved at tilgængeliggøre indhold og ressourcer til alle; og ved at muliggøre, at indholdet kan tilgås 'on demand', kan videreformidlingen af læring gøres fuldkommen asynkron. På denne måde anskuer broadcastperspektivet læring som en selvdrevent og individualiseret proces, hvor de studerende selv opnår kontrol over deres læring (Weller, 2007). Broadcastperspektivet lægger sig hermed op af den konstruktivistiske læringsteori, da det er individets egen forståelse, der er vægt på. Institutionelt er læring fra broadcastperspektivet attraktivt, da undervisningsressourcerne gøres genanvendelige, og dermed også kosteffektive. Modstandere af broadcastperspektivet omtaler det som "a means of commoditizing education, deprofessionalizing the educator and commercializing universities" (Weller, 2007, s. 6). Broadcastperspektivet bygger altså på, at læring foregår som en transmission af viden fra en lærer til én eller flere lærende. Det er læreren, som tilrettelægger undervisningen, og det er ligeledes denne, der har ansvaret for, at de lærende opnår den tilsigtede viden. Broadcastperspektivet anskuer dermed læring som en opadgående lineær bevægelse, med en fastlagt plan for, hvad der skal læres, og hvornår.

Som pendant til broadcastperspektivet haves diskussionsperspektivet, der i stedet anser læring som kommunikation mellem individer. Her styrkes læringen gennem dialog, hvad enten denne foregår mellem elev og lærer, eller to elever, så længe dialogen medvirker til formningen af viden hos én eller flere af individerne. Dermed anses diskussionsperspektivet som en anvendelse af den sociokulturelle læringsteori, hvor individerne i fællesskab stiler mod større viden og forståelse, og indgår i diverse zoner for nærmeste udvikling, i deres samtaler med deres medstuderende. Ligesom hos broadcastperspektivet, påvirker menneskers brug af internettet også diskussionsperspektivet, således at dialogen ikke bliver "limited by time and space" (Weller, 2007, s. 6). Undervises der ud fra diskussionsperspektivet er det underviserens rolle at fremme dialog og søgen efter viden gennem samarbejde, samt at vejlede de studerende i deres forståelse af de ressourcer, de har til rådighed. Hermed konstruerer de lærende selv viden ud fra meningsfuld kommunikation med andre lærende, hvormed diskussionsperspektivet ligeledes tager inspiration fra konstruktivisme, på samme måde som Piaget mente, at undervisning burde indeholde dele af dialog og diskussion. Til forskel fra broadcastperspektivet, hvor læring blot anses som videregivelse af allerede eksisterende viden, ser diskussionsperspektivet læring som en konstruktion hos den enkelte, der dog er funderet i de samtaler, som den lærende har med sine medstuderende.

Broadcastperspektivet og diskussionsperspektivet er to eksempler på, hvordan viden tilegnes gennem (især elektroniske) læringsforløb. Disse perspektiver beskriver dog ikke, hvordan de i praksis skal anvendes. Eksempler på anvendelse af disse perspektiver findes derimod i undervisningskoncepterne 'flipped classroom' og 'medrivende dialog', hvorfor disse beskrives i henholdsvis **Underafsnit 4.2.1** og **Afsnit 4.3**.

4.2 Blended Learning

Inden konceptet om flipped classroom kan præsenteres, er det nødvendigt at præsentere endnu en bagvedliggende teori, kaldet 'blended learning'. Af denne grund indledes dette afsnit med en præsentation af netop denne teori, hvorefter flipped classroom behandles.

Ifølge Hrastinski (2019) er det muligt at definere blended learning på forskellige måder,

hvoraf de mest populære findes hos Graham (2006) og Garrison og Kanuka (2004). Graham (2006) definerer blended learning som systemer der kombinerer "face-to-face instruction with computer-mediated instruction" (s. 5), mens Garrison og Kanuka (2004) definerer det som gennemtænkt integration af "classroom face-to-face learning experiences with online learning experiences" (s. 96). Det ses, at der er enighed om, at blended learning er en kombination af face-to-face-elementer med digitale elementer.

Hrastinski (2019) nævner, at definitionen hos Graham (2006) er bredere, da denne blot kræver en form for kombination af de ovenstående elementer, hvorimod Garrison og Kanuka (2004) forlanger et kvalitativt aspekt, da integrationen af elementerne skal være gennemtænkt. Ydermere ses det hos Graham (2006), at det indragede medie blot skal være et computermedie, mens der hos Garrison og Kanuka (2004) er krav om læring gennem onlineoplevelser. Slutteligt bør det bemærkes, at Graham (2006) gør brug af begrebet 'instruktion', mens Garrison og Kanuka (2004) beskriver 'læring'. Oftest beskrives teorien om blended learning fra instruktørens perspektiv, hvorfor denne omhandler 'instruktioner', mens eventuel data oftest indsamles hos de lærende, som modtog instruktionerne. Dermed omhandler datasættene 'læring', hvormed de to begreber forbindes.

Dette sammenspil mellem to begreber findes ligeledes hos Vygotsky (1987), der beskriver forskellen mellem 'mening' og 'betydning'. Ifølge Beck (2017) refererer Vygotskys 'mening' til, hvordan ord bliver opfattet i den offentlige sfære, altså hvordan mennesker kollektivt opfatter et ord. Dertil beskriver Vygotsky (1987), at 'betydning' refererer til hvordan ord opfattes i den private sfære, hvormed ordets betydning "forbindes med den personlige erfaring og er fyldt med personlige associationer og konnotationer" (Beck, 2017, s.78). Da kan der drages tydelige paralleller mellem måden hvorpå Vygotsky (1987) omtaler 'mening' og 'betydning', og hvordan 'instruktion' og 'læring' omtales i undersøgelser om blended learning. Her anses instruktionerne til forveksling som den offentlige sfæres opfattelse af den delte viden, mens læringen refererer til de lærendes individuelle opfattelse af videnen. I begge tilfælde anses det individuelle som værende det vigtigste fokus, idet Vygotsky (1987) anså ordets 'betydning' som det vigtigste i det psykologiske perspektiv, mens didaktiske undersøgelser ligeledes anser elevernes udbytte af instruktionen, nemlig læringen, som det

centrale. Graham (2006) antager, at brugen af blended learning vil stige i fremtiden, hvorfor fremtidige læringsmetoder vil blive "differentiated not based on *whether* they blend but rather by *how* they blend" (Graham, 2006, s. 6).

For at anvende teorien om blended learning, kan man som underviser gøre brug af diverse 'blended learning'-modeller. Disse modeller foreslår, ifølge Hrastinski (2019), på et meget fysisk niveau, hvordan et blended learning miljø opnås. Eksempler på disse modeller findes blandt andet i Staker og Horn (2012), hvor fire distinkte modeller introduceres. Den første af deres modeller, den såkaldte rotationsmodel, indebærer at de studerende roterer mellem læringsforme, eksempelvis mellem forelæsning, gruppeprojekt og online videoundervisning. I deres anden model, kaldet flex-modellen, leveres læringen gennem online medier, hvor de studerende "move on an individually customized schedule" (Hrastinski, 2019, s. 565). Her vejleder læreren de studerende face-to-face, i takt med, at behovet for hjælp opstår, enten via gruppevejledning eller individuel vejledning. Den tredje model kaldes self-blend-modellen, og her deltager de lærende, på eget initiativ, i ekstra onlinekurser, der er med til at supplere deres fysiske kurser. Slutteligt karakteriseres "The enriched-virtual model" (Hrastinski, 2019, s. 566), hvor de lærende deler deres tid mellem fysisk undervisning på campus, og onlineundervisning uden for klasseværelser. Disse fire modeller er alle eksempler på, hvordan digital læring kan supplere, eller sommetider nærmest helt erstatte, traditionel face-to-face-læring, og da modellerne inddrager det digitale på forskellige måder, har de selvsagt forskellige styrker og svagheder i læringsudbyttet. Man bør derfor tænke kritisk over, hvilke modeller man anvender, for mest effektivt at udnytte de styrker hos blended learning, der passer til det pågældende emne, som de lærende skal tilegne sig viden i.

Graham (2006) beskriver hvordan spørgsmålet om, hvordan man laver god blended learning, afhænger af den kontekst, man arbejder i. Der er ikke nødvendigvis en 'rigtig model', som altid bør følges - derimod kan modellen, der viser sig mest effektiv, variere alt efter situationen, den skal anvendes i. Graham (2006) beskriver hvordan face-to-face-undervisning og computermedieret undervisning, hver har deres styrker og svagheder. Effektiv blended learning er dermed et produkt af de forskellige læringsmetoders styrker.

Som eksempel nævner Graham (2006), at klassediskussioner har forskellige styrker og svagheder, alt efter om disse foregår face-to-face, eller er computermedierede. Her er nogle af fordelene ved den computermedierede undervisning, de lærendes spatiale (og potentielt temporale) fleksibilitet, samt deres øgede mulighed for at undersøge et emne, inden de kommer med et spørgsmål eller argument. Den computermedierede undervisning risikerer dog at fremstå upersonlig, hvormed troværdigheden ligeledes kan svækkes. Derimod giver fysiske diskussioner større mulighed for at sammenkoble idéer mellem flere individer, og tilliden blandt de deltagende opbygges ligeledes hurtigere, på bekostning af deltagernes temporale og spatiale fleksibilitet. Graham (2006) afslutter med at pointere vigtigheden i at identificere succesfulde 'blended learning'-modeller, baseret på deres anvendelse i forskellige læringskontekster. Dette gøres ved at forstå og anvende de forskellige affordances, der er til rådighed ved face-to-face-undervisningen og computermedierne. Mediernes affordances, samt dette speciales anvendelse af disse, vil blive uddybet i **Afsnit 6.2**.

4.2.1 Flipped classroom

Reidsema et al. (2017) skriver i deres forord, at "there is no one way to flip a class" (s. v), samt at modellen, som bogen uddyber, skal adapteres og kontekstualiseres af underviseren før brug. De mener, ligesom Graham (2006) nævner om blended learning, at 'flipped classroom'-principperne bør anvendes i "their contexts to meet the needs of their students" (Reidsema et al., 2017, s. v). Eksempelvis bør en 'flipped' matematikklasse fungere anderledes end en tilsvarende 'flipped' fysikklasse.

'Flipped classroom'-modellen i Reidsema et al. (2017) adskiller sig fra andre 'blended learning'-modeller, idet eleverne har skulle forberede sig til hver kursusgang ved at "engage in or complete some form of preliminary learning online" (Reidsema et al., 2017, s. 6). Til kursusgangen vil underviserne have forberedt en relevant læringsaktivitet, som de studerende så deltager i, på baggrund af deres online forberedelse. Hvor traditionel klasseværelsesundervisning præsenterer læringsmaterialet i klasseværelset, og efterfølgende tildelel hjemmearbejde i form af relevante opgaver eller aktiviteter, præsenteres eleverne i et

flipped classroom i stedet for læringsindholdet derhjemme, og arbejder med aktiviteter eller opgaver i klasseværelset. Derved adskiller flipped classroom sig fra traditionel klasseværelsesundervisning ved at bytte om på, hvor man *lærer* indholdet og hvor man *anvender* indholdet.

En anden vigtig differentiering mellem de to læringsmetoder er, at elevernes, såvel som lærerens, forståelse af klasseværelsesdynamikken ændres. Underviseren bør forberede sig på, at i stedet for at holde oplæg for elever, som aldrig er blevet introduceret for materialet før, skal de gå blandt elever, som allerede er armeret med viden omkring området, og forventer, at deres indsats hjemmefra bliver belønnet med indsigtsfulde aktiviteter, der øger deres kompetencer. Derudover er et flipped classroom "likely to be interfering with our students conceptions of teaching and the student-teacher relationship" (Reidsema et al., 2017, s. 6), da denne undervisningsform afviger meget fra de traditionelle metoder. Med denne omvæltning af tidligere normer, kan eleverne dog få bedre hands-on erfaringer med undervisningsemnerne, uden at det er på bekostning af deres teoretiske viden, baseret på Reidsema et al. (2017):

The good news is that with careful curriculum design, the evidence suggests that students learn in flipped mode just as well, and usually better, than they do if they are simply attending a lecture. This is actually great news because those precious minutes on campus which would consist of sitting quietly in a lecture theatre . . . can be replaced by doing things and thereby engaging in practice. (Reidsema et al., 2017, s. 7)

Reidsema et al. (2017) noterer ligeledes, at yngre generationer allerede anvender internettet naturligt, og at større mængder af vidensdeling allerede foregår online. Eksempelvis anvendes hjemmesider såsom Wikipedia, Khan Academy, LinkedIn Learning og Skillsoft til at tilgå ny information og lære nye færdigheder, og på baggrund af dette argumenterer Reidsema et al. (2017) ligeledes for, at fremtiden inden for undervisning er online.

Dette sætter spørgsmålstegn ved, hvilke rum der efterlades til universiteter og andre uddannelsesinstitutioner. Disse rum skal ses som værende beregnede til alternative undervisningsformer, og ifølge Reidsema et al. (2017) udvikler klasseværelset sig til et sted for

aktiviteter frem for et sted for informationstransmission. Det bliver universiteternes job at lære de studerende, hvordan man finder information, få de studerende engageret i reel problemløsninger, og at lære dem at dele information og samarbejde om opgaver. Dette kan være med til at give de studerende en vigtig evne i deres kommende arbejdsliv, da dette, som udgangspunkt, ikke kommer til at minde om traditionel klasseværelsesundervisning. Inden dette kan blive til virkelighed, skal der laves en overgang fra den fysiske forelæsning til den fremtidige blended learning, og det er netop her, at flipped classroom kommer ind i billedet: "We believe that flipped learning is an important transition stage" (Reidsema et al., 2017, s. 10). Ydermere beskrives det, hvordan "One thing is for certain; we will engage students in a very different manner. Professional practice will be the focus, not knowledge acquisition. This will have long-term implications for staffing" (Reidsema et al., 2017, s. 12). Anvendelsen af flipped classroom er dermed et samspil mellem den konstruktivistiske læringsteori, samt den sociokulturelle læringsteori, idet videnen først konstrueres via broadcast til den enkelte elev, hvorefter denne viden deles og anvendes i form af aktiviteter og opgaveløsning på uddannelsesinstitutionen, eventuelt suppleret af en indledende eller afsluttende diskussion af materialet.

4.3 Medrivende dialog

Medrivende dialog beskrives i Andresen og Dahl (2018) som værende en "bestemt type lærerstyret klasserumsdialog, der har til formål at udvikle klassens kollektive viden" (s. 39). Den medrivende dialog starter ofte som en IRE-dialog, hvor IRE-dialogen er karakteriseret af de tre faser: 'initiation', 'response' og 'evaluation'.

IRE-dialog er en kort struktur, som simpelt beskrevet initieres af en lærer, der stiller et spørgsmål. Dette følges op af én eller flere elevers responderinger på spørgsmålet, hvorefter læreren evaluerer dialogen, oftest ved at be- eller afkræfte elevens, eller elevernes, svar. Ifølge Nottingham et al. (2016) kan IRE-dialog dog være uhensigtsmæssig, da eleverne ikke gives tid til at gå i dialog med læreren, og i stedet blot forsøger at 'gætte' på, hvilket svar læreren søger. Supplerende til dette beskrives det i Andresen og Dahl (2018), hvordan

"Kritikken går ud på, at de fleste IRE-spørgsmål sigter mod at skabe procedural viden. De er fokuseret på elevernes hukommelse og på gengivelse af allerede lært viden" (ss. 40-41). Altså egner IRE-dialog sig ikke til at fremme forståelse og højere ordens tænkning, hvorfor eleverne let kan få indtryk af, at faget blot omhandler "paratviden, udenadslære og faste løsningsmetoder" (Andresen og Dahl, 2018, s. 41). Der findes naturligvis også positive træk ved IRE-dialogen, blandt andet kan IRE-dialog være med til at fremme aktiv deltagelse i et klasselokale, og ifølge Andresen og Dahl (2018) kan det ligeledes øge elevernes motivation og følelse af anerkendelse, idet deres korrekte svar bliver bekræftet og anerkendt af læreren. IRE-dialoger har dermed en plads i undervisning, dog bør disse anvendes eftertænksomt.

Andresen og Dahl (2018) beskriver medrivende dialog som en interaktion, hvori læreren og eleverne sammen gennemgår et emne, en case eller en opgave. Til trods for, at dialogen er styret af læreren, ligesom i en traditionel forelæsning eller IRE-dialog, så adskiller medrivende dialog sig ved, at læreren inddrager elevernes bidrag. Det er lærerens opgave at sørge for, "at hver elevs ytring kommer til at bidrage i udviklingen af klassens samlede viden" (Andresen og Dahl, 2018, s. 40). Dette understøttes af Resnick et al. (2010), som ligeledes skriver, at forskellen mellem IRE-dialog og 'accountable talk', der beskriver nogle af de samme teorier som medrivende dialog, er, at elevernes bidrag inkorporeres af læreren, i dennes forklaring af emnet eller problemet. Disse svar anvendes og inkorporeres, selvom de potentielt er meget korte eller forkerte i deres formuleringer. Et forkert svar kan dog have elementer af det korrekte svar gemt i sig, og det er lærerens opgave at finde disse, og få eleverne til at tænke over, hvordan svaret kan ændres, således at det bliver korrekt.

De samme tanker, som ligger til grund for medrivende dialog, beskrives ligeledes af Nystrand (1997), blot som 'dialogically organized instruction'. En undervisning, der gør brug af denne type instruktion, indeholder færre spørgsmål fra læreren end traditionelle forelæsninger, og flere samtaledrejninger, der bliver spundet af lærere og elever, som alle bidrager til dialogen med egne idéer og tanker, hvormed de udvikler en samlet forståelse af det omtalte emne. På denne måde sammenkædes medrivende dialog med teorierne bag Vygotskys zone for nærmeste udvikling, idet de fleste elever opnår en større forståelse ved at indgå i, eller blot lytte til, dialogen mellem deres medstuderende og lærer.

En stor forskel mellem medrivende dialog og IRE-dialog, er lærerens anerkendelse af potentialet i elevernes tanker og svar, selvom disse indeholder fejl, unøjagtigheder eller ufuldstændige elementer, hvor simpel IRE-dialog blot ville evaluere sådanne svar som forkerte. Andresen og Dahl (2018) opsummerer forskellene mellem medrivende dialog og IRE-dialog til tre fokuspunkter. Den første af disse beskriver, hvordan lærerens spørgsmål i medrivende dialog ikke har til formål at kontrollere hverken "eleverne, deres viden eller tænkning" (Andresen og Dahl, 2018, s. 46). Dette stemmer overens med definitionen af 'dialogically organized instruction' fra Nystrand (1997), hvor læreren gør plads til elevernes stemmer, således at lærerens stemme, trods dens vigtighed, blot er én af mange stemmer i dialogen. Det andet punkt, hvor medrivende dialog adskiller sig fra IRE-dialog, er gennem et større fokus på den fælles gennemgang af materialet. Da alle elever opfordres til at deltage i dialogen, udvælger læreren ikke nødvendigvis specifikke elever til at besvare konkrete spørgsmål, men i stedet udvindes det rigtige svar fra alle elevernes bidrag til problemløsningen. Den sidste forskel er, at lærerens reaktion på elevernes svar, i medrivende dialog, skal "forstås som en inkludering af eleven ind i den fælles aktivitet og ikke som en evaluering af den enkelte elevs præstation" (Andresen og Dahl, 2018, s. 46). Medrivende dialog fokuserer altså mere på aktiv deltagelse blandt eleverne, end på at elevernes skal vise deres kunnen.

Andresen og Dahl (2018) anvender en fransk fletning som metafor for funktionen i medrivende dialog. I en fransk fletning flettes individuelle totter af hår sammen til det endelige produkt. Dette gøres af stylisten, der har ansvaret for at inkorporere hver enkelt tot, og samtidigt sikre kvaliteten af det endelige produkt, som dermed bliver et symbol på lærerens rolle i klasseværelset, der ligeledes skal sammenflette elevernes individuelle bidrag til en endelig fælles forståelse blandt eleverne. Derudover er det også lærerens ansvar at holde undervisningen inden for tidsrammen og emnet, hvor læreren kan være nødt til at styre dialogen tilbage til det specifikke emne, og koncentrere den om de vigtige pointer, der er opstået undervejs.

5 | Matematik som undervisningsfag

I dette kapitel indsnævres de hidtil behandlede teorier og metoder til udelukkende at omhandle matematik som fag på de gymnasiale ungdomsuddannelser. Dertil beskrives grundelementerne i matematik som fag, mens gymnasieelevers hyppigste udfordringer ved matematikken ligeledes karakteriseres. Alt dette ligger til grund for udarbejdelsen af den indledende prøve, undervisningsvideoen, den fysiske klasseværelsesundervisning, samt den afsluttende prøve, der indgår i denne undersøgelse, og som alle beskrives i **Kapitel 6**.

I den - på nuværende tidspunkt - senest udarbejdede gymnasireform af Undervisningsministeriet (2017) var der blandt andet særligt fokus på matematik, som der ligeledes har været i tidligere gymnasireformer. Dette antages at skyldes matematikkens vigtighed for samfundet, men også gymnasieelevernes besværligheder ved matematikken som skolefag. Grønbæk et al. (2017) beskriver hvordan matematikken har rod i kontekst, men samtidigt kræver en robust forståelse af matematikken abstraktion, i form af løsrivelse fra denne kontekst. Den matematiske teori, hvori man netop har opnået et højt abstraktionsniveau, kan igen rekontekstualiseres, eksempelvis i form af matematisk modellering, hvormed "Matematiktilegnelsen må gå gennem tre stadier" (Grønbæk et al., 2017, s. 5). Dette medfører ydermere, at "matematik er meget tættere skolebunden end mange andre fag. Mens de fleste andre fag kunne 'eksistere' uden deres skoletilknytning i kraft af deres mere direkte konteksttilknytning, er skolens betydning for, at matematiks potentiale kan realiseres, fundamental" (Grønbæk et al., 2017, s. 5). Dette ligger ligeledes til grund for forfatternes interesse i at undersøge, hvorvidt videomediet kan anvendes til formidling af centrale matematiske teorier, da faget netop opfattes som kraftigt 'skolebunden'.

Grønbæk et al. (2017) beskriver ligeledes hvordan basale færdigheder i matematik er grundlæggende for, at man kan opnå en vedvarende matematikforståelse, og de basale færdigheder er ydermere "afgørende for begge overgange, fra folkeskole til gymnasium og fra gymnasium til videregående uddannelse" (s. 6). Dette skyldes matematikkens hierarkiske opbygning, hvor man ikke blot kan bevæge sig videre til et nyt emne, hvis man ikke har

forstået de teorier og metoder, der ligger bag. Selv for matematiske eksperter, kan det være svært at læse og forstå, hvad deres fagfæller arbejder med. Ramskov (gust) beskriver i sin artikel *Matematiske beviser er blevet tungere og mere uforståelige med årene - selv for eksperter*, hvordan Jordan Ellenberg, professor i matematik ved University of Wisconsin, beskrev Shinichi Mochizukis, professor ved Kyoto University, påståede bevis for Szpiros formodning, og deraf også for den velkendte abc-formodning¹, med: "Ved første øjekast føles det, som om man læser noget fra det ydre rum" (Ramskov, gust, par. 34). Der er naturligvis forskel på, hvor robust matematisk forståelse, samt matematiske abstraktionsniveau, der er nødvendigt for at læse Mochizukis bevis, og for at følge en matematikundervisning i gymnasiet. Ovenstående eksempel vidner dog om, at matematik som fag, og som videnskab, på mange måder kan virke fjernt fra dagligdagens måde at 'bruge hovedet på', og det er derfor ikke overraskende, at matematik er et af de fag i gymnasiet, som mange elever har udfordringer med.

Siden folkeskolereformen i 2014 er danske folkeskoleelever blevet "markant dårligere til matematik" (Vad, mber, par. 4), og som beskrevet af Grønbæk et al. (2017), trækkes dette lavere niveau med over i gymnasierne, da de basale færdigheder ikke er på plads. En undersøgelse udarbejdet af analysefirmaet Morphic for Matematiklærerforeningen i 2019, tegner et billede af tidspresset på de danske matematiklærere i gymnasiet. Her er tidspresset en stor faktor, og påstanden er, at "Konsekvensen bliver, at eleverne kommer til at vide næsten ingenting om alt" (Haaning, ober, par. 5). Ydermere indikerer undersøgelsen, at de skærpede krav om inddragelse af IT, beskrevet i gymnasireformen i 2017, samt det lavere antal afleveringer, gør, at eleverne bliver mindre trænet i basal matematik, hvormed den robuste grundforståelse udebliver.

¹For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer der et endeligt antal 'triplets' af indbyrdes primiske heltal a, b, c hvorom det gælder at $a + b = c$ og $\text{rad}(abc)^{1+\varepsilon} < c$, hvor $\text{rad}(n) = \prod_{p \mid n} p$

5.1 Matematiske symboler

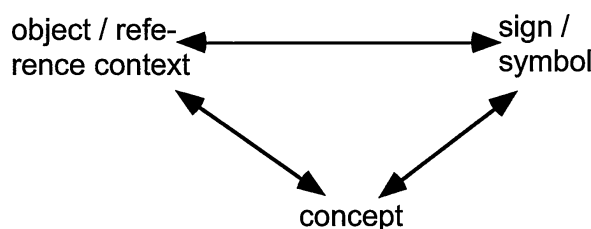
Som nævnt omhandler dette speciale en undersøgelse af danske gymnasieelevers udbytte af to former for undervisning i samme emne, dette værende en introduktion til vektorer i to dimensioner. For bedst at kunne tilrettelægge disse undervisninger, er det vigtigt at have et indblik i, hvilke udfordringer gymnasieelever kan opleve, ved en gennemgang af det omtalte emne. Forinden dette beskrives de hyppigste udfordringer ved matematik generelt, da disse ligeledes kan konkretiseres til at omhandle vektorer. Schou (2018) beskriver, at det i særdeleshed er "gymnasiematikkens udstrakte brug af algebraiske symboler" (s. 7), der volder de nye elever problemer. For bedre at kunne forstå vigtigheden af symboler i gymnasiematematik, og matematik generelt, beskrives disse i dette afsnit. Ydermere eksemplificeres den behandlede teori til at omhandle todimensionale vektorer.

Ifølge Duval (2006) er semiotiske repræsentationer, såsom symboler til at beskrive vektorer, funktioner, eller blot ubekendte i en ligning, essentielle betingelser for udviklingen af matematiske tanker. Det gør sig, ifølge blandt andre Steinbring (2006), også gældende for menneskers tanker generelt, der ligeledes er bundet op på symboler. Steinbring (2006) inddeler matematiske symboler i to kategorier, hvori symbolerne har forskellige funktioner

- (1) A semiotic function: the role of the mathematical sign as "something which stands for something else".
- (2) An epistemological function: the role of the mathematical sign in the frame of the epistemological constitution of mathematical knowledge.

(Steinbring, 2006, s. 134)

Baseret på disse to typer af symboler, kan matematikken altså ikke eksistere, uden et tilhørende system af symboler, der umiddelbart ikke har nogen betydning i sig selv, men tillægges mening på baggrund af den kontekst, som symbolet optræder i. Symboler skal dog også have skabt en relation til det bagvedliggende matematiske begreb, illustreret ved den epistemologiske trekant, der ses i **Figur 5.1**.



Figur 5.1: Den epistemologiske trekant (Steinbring, 2006, s. 135)

Relationerne er selvsagt afhængige af den sammenhæng symbolet bliver brugt i, samt hvilken rolle symbolet spiller i denne sammenhæng. Ses der eksempelvis på vektorer i to dimensioner, starter $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sandsynligvis med at betegne vektoren fra $(0,0)$ til punktet $(1,2)$, for de fleste gymnasieelever. Denne betydning udvides til senere at kunne rumme alle vektorer, med 1 som første indgang, og 2 som anden indgang, hvorend de måtte ligge i koordinatsystemet. Det samme gælder for skrivemåden $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$, der indledningsvis betegner en specifik vektor, hvorefter den generelle forståelse opnås, og vektorer derfor generelt kan skrives som eksempelvis $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Dermed kan symbolet indgå i matematiske påstande og sætninger, der gælder generelt for vektorer, uden at der er tale om en specifik vektor, eksempelvis i formlen for skalarproduktet: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = x \cdot a + y \cdot b$. Dette kan eleverne generalisere til at omhandle alle vektorer, og ikke blot vektorer med indgangene x , y , a og b , ved at bruge pilen mellem 'sign/symbol' og 'concept' i **Figur 5.1**, og dermed se symbolet "i forhold til det overordnede begreb" (Schou, 2018, s. 9). Den semiotiske relation i **Figur 5.1**, der er relationen mellem symbolet og det objekt, som symbolet står for, beskriver kategorien, hvor symbolet "udelukkende fungerer som en *etikette* eller et label" (Schou, 2018, s. 10), der dog kan ændre sig, baseret på konteksten, som etiketten optræder i. Dette eksemplificeres af Schou (2018) ved bogstavet a , der både kan optræde som den ene katete i en retvinklet trekant, som hældningskoefficienten for en ret linje, eller som en koefficient i en andengradsfunktion. Nogle etiketter er dog også faste, eksempelvis π og e , hvis der arbejdes med Eulers tal. Disse faste etiketter kan dog også variere, eksempelvis ved brøker og divisionsstykker, der kan skrives på flere forskellige måder, eller blot π og e , hvor π kan udtrykkes ved en cirkels omkreds delt med dens diameter, mens e kan betegnes

med den uendelige sum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. De andre kategorier, hvori de matematiske symboler kan indgå, omhandler 'omskrivninger', eksempelvis ved ligningsløsning, der kan føre til ny viden om symbolet, 'matematiske påstande', der beskriver symbolernes rolle i den substans, der ligger bag opstillingen og eftervisningen af matematiske påstande, samt 'rollespil', hvor flere symboler samles, og i samspil skaber et nyt udtryk. Dette kunne eksempelvis være linjens parameterfremstilling, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \cdot \vec{r}$, hvor t skal identificeres som en uafhængig variabel, x og y skal identificeres som afhængige variable, mens x_0 , y_0 og $\vec{r}$ optræder som konstanter. Her spiller de egentlige symboler ingen rolle, da udtrykket $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + c \cdot \vec{v}$ parametriserer samme linje, hvis blot $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{r} = \vec{v}$. Det er derimod snarere symbolernes indbyrdes placering, der er med til at karakterisere deres betydning, og dermed også udtrykkets samlede meningsfuldhed, betydning og validitet.

Supplerende til dette beskriver Sfard (1991), hvordan matematik, med hensyn til dets sprogbrug, ikke adskiller sig bemærkelsesværdigt fra andre naturvidenskaber, som eksempelvis fysik og biologi. Disse videnskaber omhandler alle et bestemt univers med specifikke objekter, der er underlagt veldefinerede love og sammenhænge. En af de væsentlige forskelle er dog, at emnerne og objekterne i matematik for det meste er "inaccessible to our senses" (Sfard, 1991, s. 3), hvorfor disse kun kan 'ses' imaginært, ved at forestille sig, hvordan sådanne objekter ville se ud. Dermed er objekterne nødt til at blive repræsenteret af symboler, da de i sig selv ikke kan illustreres. En manglende evne til at 'se' disse objekter, kan være en af årsagerne til, at mange opfatter matematik som værende "practically impermeable" (Sfard, 1991, s. 3), mens en manglende forståelse af hvilke objekter, der henvises til, ved brugen af forskellige symboler, yderligere besværliggør indlæringen. Dermed spiller elevernes brug og forståelse af de matematiske symboler en stor rolle for deres mulighed for abstraktion, og for at opnå et højt fagligt niveau.

5.2 Det konceptuelle og det procedurale

Den matematiske forståelse hos eleven, som beskrevet ovenfor, kan inddeles i to kategorier. Disse er 'konceptuel' viden og 'procedural' viden. Hiebert og Lefevre (1986) beskriver konceptuel viden som værende "knowledge that is rich in relationships" (s. 4), og dermed udgøres af vores evne til at forbinde den viden vi har om forskellige teorier og koncepter. Her er de individuelle stykker information kun lige så vigtige som de sammenhænge, de indgår i. Sammenhængene kan opstå mellem dele af den allerede eksisterende viden, hvormed ny viden skabes, og alternativt kan der trækkes tråde til allerede eksisterende viden, når man bliver præsenteret for ny information. Sidstnævnte sammenhæng er tilsvarende til Piagets assimilation, hvor det nye, som nævnt, allerede passer ind i eksisterende skemaer (Winsløw, 2013). Disse sammenhænge og relationer kan være enten 'primære' eller 'refleksive', baseret på graden af abstraktion, der indgår i den mentale relation. Et eksempel på dette findes i Hiebert og Lefevre (1986), hvor sammenhængen mellem betydningen af placeringen af et decimaltal bag kommaet, her tænkes der på tiere, hundrededer mv., og videnen om, at kommaerne placeres 'over hinanden', når man adderer kommatotal, munder ud i, at eleven 'regner ud', at man lægger tierne fra det ene tal sammen med tierne fra det andet tal, hundrederne lægges sammen med hundrederne, og så fremdeles. Denne nye viden er så tæt forbundet med den sammenhæng, som den er opstået ud af, at den ikke kan betragtes som værende på et højere abstraktionsniveau, hvormed sammenhængen betragtes som primær. De refleksive sammenhænge opstår oftest ved genkendelsen af "similar core features in pieces of information that are superficially different" (Hiebert og Lefevre, 1986, s. 5). Her kan kommatallene fra førnævnte eksempel erstattes af brøker. Hvis eleven reflekterer over, hvorfor det kun er brøker med fælles nævner, der kan adderes, og kommer frem til, at det naturligvis giver mening, da man kun kan addere ting der er 'ens', eksempelvis tal med tal, vektorer med vektorer samt funktioner med funktioner, så har eleven opnået en relationel forståelse af matematiske sammenhænge, der repræsenterer et højere abstraktionsniveau, end de elementer, der indgår i sammenhængen, hvormed denne sammenhæng er refleksiv.

Som med den konceptuelle viden, så kan den procedurale viden ligeledes inddeles i to delmængder. Den ene mængde består af "the formal language, or symbol representation system, of mathematics" (Hiebert og Lefevre, 1986, s. 6), mens den anden udgøres af "the algorithms, or rules, for completing mathematical tasks" (s. 6). Det er altså den procedurale viden, der gør os i stand til hurtigt og effektivt at løse (matematiske) problemer. Den første af disse delmængder hænger naturligvis sammen med den symbolforståelse, der blev beskrevet i **Afsnit 5.1**, samt en forståelse af korrekt syntaks, hvad end dette er i opgavebeskrivelser eller bevisførelse. Dette eksemplificeres af Hiebert og Lefevre (1986) som forståelse af, at $3.5/x = 2.71$ matematisk og syntaktisk giver mening, mens $6 + = x2$ ikke gør. Hvor konceptuel og procedural viden tidligere blev opfattet som disjunkte naboer, argumenterer Hiebert og Lefevre (1986) samt Matić og Dahl (2014) for, at det snarere er samspillet mellem disse former for viden, der er det mest interessante. Af denne grund uddybes det konceptuelle og procedurale ikke yderligere som individuelle videnskoncepter, men i stedet fokuseres der på teorien i Tall (2018), hvor netop samspillet mellem det konceptuelle og det procedurale er i fokus.

Tall (2018) beskriver hvordan matematisk læring foregår i tre verdener, den første værende "the *conceptual-embodied world*" (Tall, 2018, s. 7). Denne verden består af det, som den lærende kan se og sanse, hvad end dette er i virkeligheden eller mentalt, eksempelvis geometriske figurer. Her kan en specifik trekant, som vi støder på i virkeligheden, godt opfylde rollen som 'trekant', da den stemmer overens med de krav vores mentale billede har for trekanter. Ser vi noget, som vi tidligere har arbejdet med, bliver dette altså sammenlignet med den prototype, der er gemt i vores hjerne, for at blive klassificeret korrekt. Den anden verden, som Tall (2018) beskriver, er "the *proceptual-symbolic world*" (Tall, 2018, s. 7). I denne verden opererer symboler fleksibelt som enten koncepter eller procedurer. Disse symboler kan godt bestå af en sammensætning af de matematiske symboler, der blev beskrevet i **Afsnit 5.1**, eksempelvis $\frac{8}{2}$, der både beskriver en proces, der kan udføres, samt konceptet, der opnås, ved udførelsen af processen. Disse kombinationer af symboler, koncepter og processer kalder Tall (2018) for "procepts" (s. 7). Slutteligt benævnes den tredje verden som "the *axiomatic-formal world*" (Tall, 2018, s. 7), der ud-

springer af den lærendes konstruerede sammenhænge mellem de to andre verdener, og består af formelle definitioner og beviser. Opbygningen af viden sker naturligt ved, at de handlinger, vi udfører med elementerne af "the *conceptual-embodied world*" (Tall, 2018, s. 7) bliver rutineprægede, grundet gentagne møder med dem, hvormed de kan illustreres ved hjælp af et af de symboler, der findes i "the *proceptual-symbolic world*" (Tall, 2018, s. 7). Matić og Dahl (2014) beskriver hvordan denne udvikling ikke nødvendigvis foregår lineært, men at den lærende i stedet kan bevæge sig frem og tilbage mellem verdenerne, og dermed oprette forbindelser mellem forskellige elementer af disse, der slutteligt fører til etableringen af en formel forståelse og en formel verden.

5.3 Vektorer som emne

I dette speciale er det netop vektorer, der er det matematiske emne, hvorpå undersøgelsen bygger. Af denne grund beskriver dette afsnit de specifikke udfordringer, der kan opstå, når gymnasieelever stifter bekendtskab med emnet for første gang. Disse udfordringer baseres primært på en undersøgelse af 'grade 11 science students' i Forenede Arabiske Emirater, der er beskrevet i Tairab et al. (2020). Resultaterne i Tairab et al. (2020) spiller naturligvis en rolle i tilrettelæggelsen af både den fysiske klasseværelsesundervisning, samt undervisningsvideoen, der er udarbejdet i forbindelse med dette speciale. Dette behandles yderligere i **Kapitel 6**.

Undersøgelsen i Tairab et al. (2020) beskriver gymnasieelevernes udfordringer i fire specifikke emner, disse værende "Distinguish between vectors and scalars", "Add vectors graphically and mathematically", "Determine the vector magnitude and direction" samt "Multiply vectors by numbers" (Tairab et al., 2020, s. 7). Elevernes forståelse af emnerne testes ved hjælp af en skriftlig prøve, hvor et svar anses som værende korrekt, hvis eleven har afgivet et korrekt videnskabeligt svar, og som ukorrekt, hvis svaret er ufærdigt eller videnskabeligt uacceptabelt. Undersøgelsen udførtes på i alt 58 elever, og følgende skema illustrerer antallet af elever, der havde udfordringer med hvert af de førnævnte fire emner.

Domain	Description	Number (N)	Percentage (%)
1	Distinguish between vectors and scalars	4	6.9 %
2	Add vectors graphically and mathematically	14	24.1 %
3	Determine vector magnitude and direction	13	22.4 %
4	Multiply vectors by numbers	27	46.6 %

Tabel 5.1: "Levels of difficulty associated with the domains of vectors" (Tairab et al., 2020, s. 7, Table 2)

Her ses det, at det i særdeleshed er ved skalering af vektorer, at gymnasieeleverne fra FAE udfordres. Ydermere har stort set samme andel udfordringer ved henholdsvis at lægge vektorer sammen, og ved at bestemme længden og retningen af en vektor. Baseret på deres undersøgelser konkluderer Tairab et al. (2020), at eleverne kan inddeles i to kategorier, den første bestående af de elever, der ikke kunne kende forskel på en vektor og en skalar, og den anden bestående af eleverne, "who make calculations without knowing the relationships between scalar and vector quantities or vector direction" (Tairab et al., 2020, s. 9). Disse elever er udfordret i deres forståelse af vektorer som elementer i et koordinatsystem, og den klassiske tilgang, hvor vektorer adderes ved at blive tegnet i forlængelse af hinanden, er ikke blevet en selvfølgelighed for eleverne.

Denne udfordring beskrives ligeledes i Heckler og Scaife (2015), hvor den generelle konklusion lyder: "Overall, the results suggest that many student difficulties with these simple vector problems lie with the arrow representation itself" (Heckler og Scaife, 2015, s. 1). Her argumenteres der for, at den traditionelle vektorrepræsentation, med pile i et koordinatsystem, medfører, at eleverne har visse forudindtagede og forkerte opfattelser af, hvordan beregninger med disse foregår, omend pilerepræsentationen ligeledes beskrives som værende "undoubtedly pedagogically, intuitively, conceptually, and technically useful" (Heckler og Scaife, 2015, s. 1). Ydermere umuliggør pilerepræsentationen illustrationen af vektorer i fire eller højere dimensioner, og undervises der på en klassisk kridttavle eller et whiteboard, er de tredimensionale vektorer ligeledes besværlige at portrættere. For at undgå dette kan den såkaldte *ijk*-metode anvendes, hvor vektoren opskrives som en linearkombination af n enhedsvektorer, hvor n er antallet af dimensioner i det pågældende vektorrum.

For vektorer i én dimension konkluderer Heckler og Scaife (2015), at eleverne er stort set lige gode til at lægge vektorer sammen, hvad end der er tale om pilerepræsentation eller *ijk*-repræsentation (der i dette tilfælde blot ville være *i*). Der er dog store forskelle i procentdelen af korrekte svar, når vektorerne skal trækkes fra hinanden, specielt i opgaverne, hvor en vektor med negativt fortegn trækkes fra en vektor med positivt fortegn. Her besvarer over 93 % af eleverne korrekt på spørgsmålene med *ijk*-repræsenterede vektorer, mens kun 59 % af eleverne besvarer tilsvarende opgaver med pilerepræsenterede vektorer korrekt (Heckler og Scaife, 2015, s. 4). Denne store forskel tyder på, at eleverne udfordres på deres rumlige forståelse af pilerepræsentationen, omend denne kun er endimensional. Ændres opgaverne til at omhandle vektorer i to dimensioner, svarer 96 % af eleverne korrekt på additionsopgaver med *ijk*-repræsentationen, mens 88 % besvarer subtraktionsopgaverne korrekt. Tilsvarende besvarer 72 % af eleverne korrekt på additionsopgaverne med pilerepræsentationen, mens kun 52 % af eleverne besvarer disse subtraktionsopgaver korrekt (Heckler og Scaife, 2015, s. 4). De fire grundlæggende fejl, som eleverne lavede, ved subtraktion af todimensionale vektorer på pilerepræsentation, beskrives i Heckler og Scaife (2015) som værende: "(a) Overall sign error . . . (b) Add instead of subtract . . . (c) Add one dimension, subtract in the other . . . (d) Incorrectly determine the negative of a vector" (s. 7), med disse fejl værende blevet begået af henholdsvis 10 % - 20 % af eleverne, 10 % - 15 % af eleverne, 5 % - 10 % af eleverne, samt cirka 5 % af eleverne.

Baseret på disse resultater, vil deltagerne i dette speciale ligeledes blive introduceret til vektorer gennem både pilerepræsentationen samt *ijk*-repræsentationen. Danske gymnasieelever er vant til at regne med vektorer som pile eller på formen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, hvorfor brugen af *ijk*-repræsentationen skiller sig ud fra den klassiske danske vektorregning. Denne repræsentationsmetode anses dog for værende anvendelig, da regneoperationerne minder om basale reduktionsopgaver, som de deltagende gymnasieelever, ved undersøgelsens udførsel, for nyligt har lært i deres respektive gymnasiale grundforløb, om end disse har fundet sted på stx, hhx eller htx. Eleverne introduceres derfor ikke for *ijk*-metoden i samme form, som i Heckler og Scaife (2015), men derimod som led i reduktionsopgaver.

6 | Design af læringsforløbene

Det ses ud fra undersøgelsen i Heckler og Scaife (2015), at eleverne har store udfordringer ved at trække modsatrettede vektorer fra hinanden, når vektorerne er illustreret ved hjælp af pilrepræsentationen. Af denne grund lægges der stor vægt på netop dette i både den fysiske klasseværelsesundervisning, samt i den producerede undervisningsvideo. Da de deltagende elevers matematiklærer stadig ønsker, at eleverne kender til den traditionelle vektorrepræsentation, samt de regneoperationer, der tilhører denne repræsentation, vil de deltagende elever naturligvis blive introduceret til vektorer på denne måde. Dog suppleres dette med et variant af *ijk*-repræsentationen fra Heckler og Scaife (2015), da antagelsen er, at dette 'dobbeltspil' vil styrke den samlede forståelse for vektorregning og -repræsentation.

I de følgende afsnit beskrives anvendelsen af de teorier og metoder, der er blevet introduceret i projektets tidligere kapitler, samt hvilke overvejelser, specialeforfatterne har gjort sig i designet af læringsforløbene.

6.1 Den indledende og afsluttende prøve

Som nævnt er målet med dette speciale at vurdere, hvilke elementer fra videomediet, der potentielt kan inkluderes i den traditionelle gymnasiale matematikundervisning, for at styrke elevernes matematiske forståelse, abstraktionsniveau, og potentielt også deres grad af engagement. For at gøre dette, inddeles de deltagende gymnasieelever i to hold, hvor det ene hold modtager fysisk klasseværelsesundervisning, med særligt fokus på medrivende dialog og elevdeltagelse, mens det andet hold individuelt præsenteres for samme materiale via en undervisningsvideo, hvorefter de kort samtaler om materialet, med en af specialeforfatterne som dialogstarter. Gymnasieeleverne inddeles i hold, på en sådan måde, at det gennemsnitlige matematiske niveau, så vidt muligt, er ens på begge hold. For at kunne gøre dette, skal deltagerne besvare en indledende prøve, der kan være med til at belyse deres generelle forståelse af de emner og teorier, der blev gennemgået i deres gymnasiale grundforløb.

Hermed skal den indledende prøve altså være en generel afprøvning i forskellige matematiske emner, disse værende *brøker*, *procentregning*, *potensregning*, *grundlæggende algebra*, herunder *reduktionsopgaver*, *ligningsløsning*, *to ligninger med to ubekendte*, *lineære funktioner* samt *geometri*. Opgaverne i den indledende prøve baseres dels på opgaver fra tidligere eksamenssæt på B- og C-niveau, samt opgaver og øvelser fra *Gyldendals Gymnasiematematik G/Grundforløbsbogen* fra 2017. Specielt er inklusionen af reduktionsopgaver relevant for tilrettelæggelsen af den fysiske undervisning, da der tages udgangspunkt i disse for gennemgangen af vektorer ved *ijk*-repræsentationen, som grundet undersøgelsen af Heckler og Scaife (2015) findes relevant for denne undersøgelse. Dette uddybes i **Afsnit 6.3**.

Inddelingen af eleverne baseres ligeledes på deres besvarelser af det indledende spørgeskema. Dette vil blive yderligere behandlet i **Afsnit 7.4**.

6.2 Affordances og digital læring

Begrebet affordances blev introduceret af James J. Gibson i 60'erne. Affordances er et begreb der dækker både over muligheder og begrænsninger. Altså er et objekts affordances, de muligheder og begrænsninger objektet tilegner. Man kan, ifølge Hutchby (2001), kigge på affordances for både naturlige objekter, såvel som fysiske miljøer, andre dyrearter, medlemmer af ens egen art og menneskeskabte objekter. Dette speciale vil fokusere på mediers affordances, med fokus på digitale medier. Siden Gibsons tid har internettet, og andre digitale medier, udviklet og udbredt sig. Mediers konstante udvikling ligger som baggrund for forskeres interesse i at undersøge hvilke affordances forskellige medier har, og fungerer også som motivationen bag dette speciales interesse i anvendelsen af digitale mediers affordances i forbindelse med gymnasial matematikundervisning. Hutchby (2001) skriver at det specielle ved affordances ved menneskeskabte objekter, som han kalder 'artefacts', er at affordances "can also be designed into the artefact" (s. 12). Derudover skriver Hutchby (2014), at affordances kan komme i to udgaver, nemlig "both *functional* and *rational*" (s. 87).

Funktionelle affordances refererer til muligheder og begrænsninger, der teoretisk kan påvirke brugen af mediet. Disse affordances kan ikke variere, hvormed et medie har et fast og defineret sæt af funktionelle affordances. Til forskel fra dette, betegner et medies relationelle affordances de muligheder og begrænsninger som træder i kræft alt efter hvem, eller hvad, brugeren af mediet er. Eksempelvis nævner Hutchby (2014), at en vandflades relationelle affordance for visse insekter er, at vand kan gås på. Det kan ses, at dette eksempelvis ikke er en relationel affordance for det almene menneske. Et medies relationelle affordances varierer altså, baseret på hvem der interagerer med dem.

Undersøgelser af muligheder for inddragelse af digitale medier i læringssituationer er ikke noget nyt fænomen. McLuhan (1964) skriver om et forsøg, hvori universitetsstuderende blev inddelt i fire grupper, der alle skulle lære det samme materiale, dog gennem fire forskellige metoder, og fire forskellige medier. Den første gruppe overværede en forelæsning, hvor forelæseren ikke inddrog de studerende, og ikke anvendte en tavle eller lignende til at illustrere sine pointer. Ydermere havde de studerende ej heller mulighed for at stille uddybende og opklarende spørgsmål. Den anden gruppe overværede samme forelæsning, blot gennem et fjernsyn. Den tredje gruppe af studerende lyttede til denne forelæsning, dette foregik dog gennem en radio. Den fjerde og sidste gruppe havde udelukkende mulighed for selv at læse om den beskrevne teori, og modtog altså hverken auditiv eller visuel forklaring af materialet. Hver gruppe havde 30 minutter til at overvære, lytte til eller læse materialet. Dette blev opfulgt af en test i det gennemgåede materiale, hvor de studerende der blev undervist gennem henholdsvis fjernsyn eller radio, klarede sig bedre end de studerende, der var til stede ved forelæsningen eller blot læste undervisningsmaterialet. McLuhan (1964) bemærker yderligere, at de studerende, der overværede undervisning gennem fjernsynet, var dem der klarede sig bedst i den afsluttende prøve.

Denne undersøgelse gjorde brug af fire forskellige medier, uden at anvende disses specifikke tilknyttede affordances, hvorfor undersøgelsen blev opfulgt af en undersøgelse hvor "each medium was allowed full opportunity to do its stuff" (McLuhan, 1964, s. 311). For at anvende de affordances, der er tilknyttede de forskellige formidlingssituationer og -medier, blev fjernsyns- og radioundervisningen dramatiseret, hvormed der indgik auditive effekter

i begge, samt visuelle effekter i fjernsynsundervisningen. Ved forelæsningen anvendtes tavlen, og de studerende blev opfordret til at diskutere det gennemgåede materiale, mens læsematerialet fremhævede vigtige pointer ved hjælp af typografien og sidernes layout. Her viste det sig stadigvæk at gælde, at forståelsen af materialet var højest ved grupperne der modtog undervisning gennem henholdsvis radio eller fjernsyn. Dog var det de studerende, der overhørte forelæsningen gennem radioen, der klarede prøven bedst. McLuhan (1964) uddyber ikke, hvorvidt de studerende forstod materialet bedre i andet forsøg end det første, han sammenligner blot hvor gode de fire medier var til at forklare det gennemgåede materiale. Derved menes der ikke, at fjernsyn nødvendigvis blev værre ved at dramatisere materialet, blot at radiomediet gavnedes signifikant mere af dramatiseringen. Årsagen til dette kan findes i McLuhans klassificering af medier, hvor radioen opfattes som et varmt medie, mens fjernsynet opfattes som koldt. Dette uddybes ved:

A hot medium is one that extends one single sense in "high definition". High definition is the state of being well filled with data ... Telephone is a cool medium, or one of low definition, because the ear is given a meager amount of information. And speech is a cool medium of low definition, because so little is given and so much has to be filled in by the listener. On the other hand, hot media do not leave so much to be filled in or completed by the audience. Hot media are, therefore, low in participation, and cool media are high in participation or completion by the audience. (McLuhan, 1964, ss. 22-23)

Altså var fjernsynet ikke ligeså velegnet til dramatiseringen, da der dermed bliver "less opportunity for participation" (McLuhan, 1964, s.311). Med 'opportunity for participation' mener McLuhan (1964), hvor meget informationen skal bearbejdes af modtagerne, eller hvor meget der mangler at blive udfyldt af modtagerne, for at danne en sammenhængende forståelse.

Hutchby (2014) skriver, at "The internet affords new and distinctive forms of mediated interaction again" (s. 88). Nogle af disse nye distinkte affordances ses eksempelvis ved internettets udbredelse af asynkron kommunikation, hvor samtalen foregår forskudt både i

tid og rum. Dette var naturligvis også muligt inden udbredelsen af internettet, eksempelvis via breve eller telegrammer, dog tilføjer internettet et nyt medie til denne type kommunikation, og dermed tilføres også nye affordances til kommunikationsformen. Med internettets indtog bliver langdistancekommunikation lettere tilgængeligt, hvad end denne kommunikation er temporalt synkron eller asynkron, da data kan transmitteres globalt og ligeledes kan lagres i potentielt uendelig lang tid, hvilket netop er affordances for internettet som kommunikationsmedie.

Disse affordances gælder ligeledes for videoer, der tilgås på internettet, hvad end disse er ment som underholdning eller videreformidling af information. I dette speciale anvendes videomediet til at formidle teori omkring vektorer i to dimensioner, samt visse regneregler og -operationer for disse. Hvilke affordances, der specifikt er indlejret i den producerede undervisningsvideo, behandles i **Afsnit 6.4**.

Generelt gælder det for videomediet, at der er en vis grad af interaktionsmulighed. Seerne af videoerne har som oftest mulighed for at 'scrubbe' i videoen, hvormed specifikke informationsmængder kan gentages. Selvom seerne let kan få gentaget en forklaring af et emne, så kan denne information altså ikke omformuleres på opfordring. Dermed bør producenterne af videoer være bevidste om tydeliggørelsen af de forklaringer, der indgår i videoerne. Videomediet giver ligeledes seerne mulighed for at pause videoen, således at de kan notere vigtige pointer, eller hvis de uventet bliver afbrudt mens de ser den. Ydermere har producenterne en større kontrol over, hvad der bliver vist og fortalt, da videoen kan redigeres, og eventuelt genoptages, hvis der findes fejl i videoen. Samtidigt kan eventuelle afbrydelser af gennemgangen af videoens indhold også klippes ud, hvilket er endnu en affordance hos videomediet, der ikke findes ved fysisk klasseværelsesundervisning.

Derudover muliggør videomediet anvendelse af computergrafik til at visualisere koncepter. Denne affordance deles som udgangspunkt med fysisk klasseværelsesundervisning, hvis der eksempelvis forefindes en projektor eller et SmartBoard i klasseværelset. Inddragelsen af computergrafik er dog lettere i en videooptagelse, hvor der er længere tid til at lave setup før optagelsen påbegyndes, eller hvis videoen, som i denne undersøgelse, optager computerskærmen direkte. I denne undersøgelse gør undervisningsvideoen brug af com-

putergrafik til at visualisere diverse egenskaber ved todimensionale vektorer, mens den fysiske klasseværelsesundervisning ikke anvender denne affordance. I stedet gøres der i den fysiske klasseværelsesundervisning brug af whiteboards til at visualisere disse egenskaber. Endeligt muliggør videomediet også, at underviseren kan foretage flere ting på én gang, da de visuelle og auditive elementer kan optages separat. Underviseren kan altså indtale voice-over'en efter billedsiden er optaget, og dermed ikke skulle koncentrere sig om begge dele samtidigt. Videomediet forhindrer ligeledes situationer hvor læreren 'snakker ind i tavlen', der kan hæmme formidlingen af teori og dermed læringen hos eleverne. Ligeledes er det nemmere for undervisere der anvender videomediet, at 'highlighte' vigtige fokuspunkter, eksempelvis via ikke-diegetiske ringe eller pile, der kort optræder i videoen for at rette fokus mod noget bestemt, hvorefter disse forsvinder igen.

De affordances, der er indlejrede i både video- og computermediet gavner naturligvis kun elevernes læring, hvis eleverne har kompetencerne til at udnytte disse. Boie et al. (2020) nævner, at Prensky (2001) introducerede begrebet 'digital natives', eller digitalt indfødte, der betegner den del af menneskeheden, der er vokset op med teknologi i form af eksempelvis smartphones og laptops. Prensky (2001) beskriver hvordan unge efter "the arrival and rapid dissemination of digital technology" (s. 1) lærer fundamentalt anderledes, og at generationerne efter de digitale mediers udbredelse "think and process information" (Prensky, 2001, s. 1) helt anderledes end tidligere generationer. Boie et al. (2020) nævner dog også hvordan Prensky (2001), og andre teoretikere inden for emnet omkring digitalt indfødte, er blevet kritiseret for deres konklusioner, da man ikke bør behandle generationer "som en homogen gruppe eller argumentere for bestemte fordele eller ulemper ved teknologier uden at forbinde det til specifikke sammenhænge" (Boie et al., 2020, s. 3). Teknologierne bør i stedet ses som elementer, der forstærker graden og tilgængeligheden af information, hvad end denne er sand eller falsk. Teknologierne og de digitale medier har ifølge Toyama (2015) altså gjort informationsbilledet mere ekstremt, og har dermed ikke udelukkende haft positiv effekt på læring og informationstilegnelse, som tilfældet er hos Prensky (2001). Vores tankegang ændres altså af samtidens mediematrix. Af denne grund er det relevant at undersøge individers mediebrug, og disse mediers indvirkning på skole, arbejde og fritid,

samt adfærdsmønstre, forventninger og bekymringer. Ydermere beskriver Boie et al. (2020) hvordan visse undersøgelser forkaster hypotesen om eksistensen af hele generationer af digitalt indfødte, og i stedet konkluderer at "brug af digitale teknologier fylder meget i unge menneskers liv" (Boie et al., 2020, s. 3).

Specifikt undersøgte Boie et al. (2020) gymnasieelevers digitale færdigheder, hvor der blev interviewet 37 elever, observeret færdigheder i 14 klasser, samt modtaget erfaringsbeskrivelser fra 100 elever. Boie et al. (2020) noterede, at interviewene synliggjorde et særligt træk ved måden eleverne håndterede de digitale teknologier på. Eleverne beskrev hvordan de udviklede et 'digitalt instinkt' med tiden, som gav eleverne mulighed for at anvende de digitale teknologier, som om det "bare er noget, man gør" (Boie et al., 2020, s. 7). Boie et al. (2020) tilknytter det digitale instinkt en intuitiv karakteristik, på trods af, at det ikke er medfødt. Det er en færdighed som eleverne, gennem deres tid i folkeskolen og gymnasiet, tillærte sig selv gennem opbygningen af erfaringer, og efter de lærte færdigheden kunne de ikke beskrive den som andet end en naturlig agering i det digitale miljø.

I samme undersøgelse gav elevernes erfaringsbeskrivelser og interview ligeledes udtryk for, at de digitale medier, heriblandt hovedsageligt internettet, gjorde eleverne i stand til at anvende digitale teknologier i undervisningen, ved at finde frem til ny information, og producere produkter, der findes relevante for deres undervisning. Adskillige af elevernes erfaringsbeskrivelser omhandlede, hvordan de anvendte internettet til at genopfriske emner, hvortil de havde glemt kerneelementer, eller hvordan internettet kunne anvendes til at undersøge emner, som eleverne ikke forstod, da det blev gennemgået i undervisningen. Boie et al. (2020) beskriver hvordan "Som eksemplerne viser, *hjælper Google* til, at de får den information, de har brug for og sætter dem i stand til at svare" (s. 8), hvilket tyder på, at elevernes digitale kompetencer gavner deres skolegang. Boie et al. (2020) konkluderer at elevernes digitale kompetencer er erfaringsbaserede, hvorfor "elevernes handlingsduelighed ikke er tilstrækkelig for, at de kan handle kompetent med digitale teknologier" (ss. 13-14). Dertil mener Boie et al. (2020), at elever anvender digitale teknologier som "kognitive partnere, der forstærker deres handlerum og evne til at løse opgaver i et partnerskab med teknologien" (s. 13).

Baseret på dette forventes det, at de gymnasieelever, der deltager i undersøgelsen, der er udarbejdet i forbindelse med dette speciale, er i stand til at anvende de af videoens affordances, som nævnes ovenfor, da eleverne er vant til at anvende digitale teknologier i læringskontekster, og derved kender videomediet, og de muligheder, det tillader.

6.3 Tilrettelæggelse af den fysiske undervisning

I dialog med de deltagende elevers gymnasielærere, blev det besluttet, at der blev afsat 45 minutter til den fysiske klasseværelsesundervisning. Hermed var der gjort plads til en kort introduktion til undersøgelsen, besvarelsen af den afsluttende prøve og det afsluttende spørgeskema, samt eventuelle uforudsete tidsrøvere, i det 90-minutters modul, som eleverne låntes i, på den pågældende dag. Denne tidsbegrænsning af undervisningen satte selvsagt nogle naturlige rammer for, hvilke, og hvor mange, emner, eleverne kunne præsenteres for. Som nævnt bestod læringsforløbet af en introduktion til vektorer, forskellige repræsentationer af disse, samt basale vektoroperationer. Dermed blev følgende emner udvalgt til at indgå i såvel klasseværelsesundervisningen som undervisningsvideoen.

- (i) Vektorrepræsentation med pile- og *ijk*-metoden
- (ii) Vektorskalering med konstanter
- (iii) Vektoraddition/-subtraktion med begge repræsentationer
- (iv) Vektorer mellem to punkter
- (v) Længden af en vektor
- (vi) Prikprodukt

Det blev vurderet, på baggrund af diverse gennemgange af materialet, samt 'mock-up'-undervisninger, at disse fem emner alle kunne behandles på de afsatte 45 minutter. Dertil blev det ligeledes anslået, at der var tid til store mængder elevinddragelse og medrivende dialog. Der lagdes stor vægt på netop elevdeltagelse, da dette ses som én af de store

fordele ved den fysiske klasseværelsesundervisning, frem for flipped classroom-modellen, med individuel videoundervisning. Eleverne opfordredes til at deltage i den fælles læring, eksempelvis ved at deltage i dialogen om emnet, eller ved at 'gå til tavlen', og løse korte opgaver, som læreren opstillede undervejs. Disse opgaver omfattede beregningen af en vektorsum, illustration af selvsamme addition af to vektorer, eller gennemgangen af et bestemt prikprodukt.

I de følgende underafsnit beskrives den specifikke teori, eleverne blev introduceret til, inden for de forskellige emner, samt hvilke overvejelser der lå bag udvalget af disse.

Vektorrepræsentation med pile- og *ijk*-metoden

Baseret på undersøgelsen af Heckler og Scaife (2015) vurderedes det, at de danske gymnasieelever, der indgik i denne undersøgelse, ligeledes ville have udbytte af karakterisering af vektorer gennem brug af *ijk*-repræsentationen. Denne vurdering skyldtes, at de 1000 amerikanske elever, der deltog i undersøgelsen udført af Heckler og Scaife (2015), alle var førsteårs 'high-schoolers', der havde valgt studieretninger med kurser omhandlende fysik, hvor vektorregning selvsagt er et centralt element. Grundet de amerikanske elevers aktive tilvalg af fysikkurser, vurderedes disse til at have en matematisk interesse og forståelse, der var højere end, eller som minimum tilsvarende til, de danske førsteårs gymnasieelever, der deltog i denne undersøgelse, da disse ikke aktivt havde tilvalgt matematik på B-niveau, men snarere aktivt havde fravalgt matematik på A-niveau. Baseret på dette, samt på konklusionen i Heckler og Scaife (2015) om, at anvendelsen af en blanding af *ijk*-repræsentationen og pilerepræsentationen gavner elevers forståelse for vektorer, både grafisk og algebraisk, mest muligt, blev det valgt, at læringsforløbet i denne undersøgelse skulle anvende begge repræsentationsformer. Dette stemmer derudover overens med, at læringsforløbet også skulle tage hensyn til, at eleverne skulle kunne besvare de spørgsmål om vektorer, der kunne indgå i en potentiel eksamen.

Vektorskalering med konstanter

I det planlagte læringsforløb var skalering af vektorer den første regneoperation, som eleverne introduceredes for. Ifølge undersøgelsen af Tairab et al. (2020) ses det, at næsten halvdelen af eleverne, på lignende matematisk niveau som deltagerne i denne undersøgelse, svarede forkert på spørgsmål omhandlende vektorskalering. Blandt de 46,5% af eleverne, der svarede forkert på vektorskaleringsspørgsmål, var problemet for 15,5% den grafiske forståelse, hvorimod de resterende 31,0% oplevede problemer med løsninger af ligningerne. Til trods for den store mængde af elever, der oplevede udfordringer med vektorskalering, vurderedes emnet alligevel egnet til at være det først gennemgåede, da skalering med tallet '-1' kan anvendes til forståelsen for dannelsen af en modsatvektor, der er central for teorien om vektorsubtraktion. Skalering blev introduceret ved egenskaberne:

- Skaleres der med et positivt tal større end 1, vil vektoren forlænges
- Skaleres der med et positivt tal mindre end 1, vil vektoren forkortes
- Skaleres der med et negativt tal inverteres vektorens retning, hvorefter vektoren enten forkortes eller forlænges, baseret på størrelsen af skalaren
- Skaleres der med 0, eller skaleres nulvektoren, fås nulvektoren.

Derved introducerede undervisningen først de grafiske egenskaber ved vektorskalering, hvorefter selve regneoperationerne blev gennemgået. Disse regneoperationer blev præsenteret ved, at man blot skalerer en to-dimensional vektor ved at multiplicere begge indgangene med skalaren.

Vektoraddition/-subtraktion med begge repræsentationer

I et forsøg på at gøre introduktionen til vektoraddition så let som muligt, blev der taget udgangspunkt i reduktionsopgaver, som eleverne havde beskæftiget sig med på deres grundforløb. Som det første blev udtrykket $(a - b) \cdot (a + b) - 2a^2 + 2b^2$ skrevet op på tavlen, hvorefter specialeforfatteren, der stod for at undervise eleverne, spurgte ind til, om nogle

af eleverne kunne reducere udtrykket. Eleverne havde, til forveksling, mødt udtrykket tidligere, da et lignende udtryk indgik i **Opgave B.7** i den indledende prøve. Som udgangspunkt ønskedes det, at en af gymnasieeleverne gik til tavlen og løste opgaven. Dette ville både være med til at beskrive processen i at opdele udtrykket i led med a^2 og b^2 , og samtidigt forhåbentligt give eleverne et indtryk af, at det ikke var 'farligt' at deltage i undervisningen.

Efter udtrykket var reduceret til $b^2 - a^2$, blev eleverne spurgt ind til, hvorfor ledene a^2 og b^2 ikke kan trækkes fra hinanden. Da disse led er to forskellige ukendte udtryk, kan de ikke forkortes yderligere, og eleverne forklarede, at der gælder samme princip, hvis ledene i stedet bestod af to forskellige retninger, eller to forskellige variable. Dette genkendte eleverne muligvis fra løsningen af ligninger med to ubekendte, hvis dette blev behandlet i deres respektive grundforløb. Efter dette blev det åbne spørgsmål: "Hvordan tror I så, man lægger to vektorer sammen?" stillet, i håb om, at nogle af eleverne bød ind med deres konstruerede idéer om, hvordan vektoraddition burde fungere, for at det gav mening for dem. Her var forhåbningen, at dette ville lede frem til, at koordinatvis addition netop er den logiske måde at addere to vektorer, hvormed vektoraddition blev opstillet som logisk og ligefrem. En tilsvarende tilgang blev anvendt til vektorsubtraktion, og begge operationer illustreredes ligeledes ved hjælp af pilerepræsentation. Dette ønskedes også gjort med hjælp af en gymnasieelev, der gik til tavlen og tegnede de vektorer, der udsprang af henholdsvis summen og differensen af to givne vektorer. Under gennemgangen af subtraktionen blev der ikke direkte lagt vægt på at opskrive det som reduktionsudtryk, som det blev gjort ved addition, men derimod blot nævnes, at subtraktion foregår ligesom addition, blot med modsatvektoren af den vektor, der skal trækkes fra. Heckler og Scaife (2015) fandt frem til, at eleverne hovedsageligt blev udfordret ved subtraktion af pilerepræsenterede vektorer, i deres undersøgelse. Til trods for dette, blev der ikke afsat mere tid til forklaring og gennemgang af reduktionsopgave-repræsentationen, under gennemgangen af vektorsubtraktion, da denne netop lagde fundamentet for vektorer opskrevet på matrixform. Her var forhåbningerne, at eleverne selv kunne oversætte en subtraktionsopgave fra matrixform til at være *ijk*-repræsenteret, eller på reduktionsopgaveform, hvis de foretrak at løse opgaver

med denne repræsentation. Matrixrepræsentationen antagedes ikke at forvolde samme mængde problemer som pilerepræsentationen, da eleverne i undersøgelsen udført af Heckler og Scaife (2015) hovedsageligt begik fejl på baggrund af forvirring om vektorenes retning i forhold til hinanden, når disse skulle subtraheres, hvorfor den algebraiske matrixform bør undgå denne forvirring.

Vektorer mellem to punkter

Efter at have undervist eleverne i vektorsubtraktion, omhandlede undervisningen bestemmelsen af en vektor mellem to punkter. Dette blev forbundet med vektorsubtraktion ved at opsætte regneudtrykket $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, hvor $\overrightarrow{AB}$ var vektoren mellem de to punkter A og B , mens $\vec{a}$ og $\vec{b}$ betegnede stedvektorerne til henholdsvis punkt A og B . Denne ligning indtegnedes ligeledes i et koordinatsystem på tavlen, hvormed eleverne forhåbentligt kunne se, at resultatet af additionsstykket $\vec{a} + \overrightarrow{AB}$ netop er $\vec{b}$. Denne 'stedvektorligning' hjalp forhåbentligt eleverne til at forstå metoden bag bestemmelsen af en vektor mellem to punkter, da de ikke blot blev præsenteret for formlen, men også for den grundlæggende geometriske forståelse. Efterfølgende blev det naturligvis vist, at man blot skal isolere $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, hvormed $\overrightarrow{AB}$ netop kan beregnes via vektorsubtraktion. Dette emne blev afsluttet med en redegørelse for, hvordan vektoren mellem de to punkter ændres, hvis dens retning ændres. Med dette menes, at eleverne blev forklaret, at $\overrightarrow{BA}$ blot er $-\overrightarrow{AB}$, da $\overrightarrow{BA}$ netop er $\overrightarrow{AB}$'s modsatvektor, hvormed der blev trukket tråde tilbage til både vektorskalering og vektorsubtraktion. I løbet af gennemgangen af vektorer mellem to punkter appelleredes der altså hovedsageligt til elevernes konceptuelle viden, da forståelsen for emnet opbyggedes rundt om relationerne til den tidligere gennemgåede teori.

Længden af en vektor

Ligesom i gennemgangen af vektorer mellem to punkter, var fokus i gennemgangen af længden af en vektor ligeledes på elevernes anvendelse af kendte teorier og metoder. Hvordan man matematisk kan udregne længden af en vektor, blev præsenteret for eleverne

ved at indtegne vektoren som hypotenusen af en retvinklet trekant, mens vektorens 'skridt' langs x -aksen og y -aksen udgjorde de to kateter. På denne måde blev elevernes forståelse for basal trigonometri sammensat med deres nylærte viden om vektorindgangenes betydning for vektorens længde og retning. Dette stemmer overens med hvordan Tall (2018) beskriver hvordan matematisk læring foregår. Eleverne blev først trukket ind i "the *conceptual-embodied world*", ved at være i tankegangen om vektorer. Efterfølgende ville deres tidligere møder med retvinklede trekanter, og specifikt Pythagoras' læresætning, trække dem ind i "the *proceptual-symbolic world*", altså den anden verden. Derefter trækkes eleverne ind i den tredje verden, eftersom Tall (2018) beskriver denne som en kombination af de to tidligere verdener, da den gamle teori pludselig får en ny anvendelse grundet nylært teori.

Prikprodukt

Indtil dette punkt omhandlede undervisningen hvorvidt eleverne kunne anvende matematiske regneoperationer og koncepter, de allerede havde kendskab til, på vektorer. Til gengæld, eftersom multiplikation mellem vektorer ikke er muligt, blev prikproduktet introduceret som en særegenskab ved vektorer. Forhåbningen var, at dette kunne sikre elevernes vilje til, og interesse i, at lære om prikproduktet og dets egenskaber. Prikproduktet introduceredes altså ved at omvælte elevernes forventninger til multiplikationen af to vektorer, da vi antog, at elevernes umiddelbare tanke var, at $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \end{bmatrix}$. Derfor indledtes dette emne med italesættelsen af multiplikation af vektorer, hvorefter det blev afsløret, at dette dog ikke kan gøres, hverken matematisk eller grafisk. Dette fulgtes op af formelen for, hvordan prikproduktet udregnes, nemlig $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. Herefter lagde specialeforfatteren vægt på, at resultatet af et prikprodukt ikke er en vektor, men derimod et tal, til forskel fra addition, subtraktion og skalering af vektorer. Dette er med til at adskille prikproduktet fra de tidligere regneoperationer. Efterfølgende forklaredes anvendelsen af prikproduktet, til at kunne be- eller afkræfte hvorvidt to vektorer er ortogonale på hinanden. Da vektorer netop er ortogonale på hinanden hvis deres indbyrdes prikprodukt giver nul, behandledes prikproduktet mellem en vilkårlig vektor og nulvektoren. Det blev

påpeget, at eftersom begge af nulvektorens indgange er nul, vil prikproduktet mellem den og enhver anden vektor være lig nul. Derefter blev det forklaret, hvordan dette medfører, at nulvektoren nødvendigvis defineres til at være ortogonal på enhver anden vektor. Slutteligt blev en alternativ måde at udregne prikproduktet introduceret, nemlig formelen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(V)$, hvor V er vinklen mellem de to vektorer. Denne formel viser bedre prikproduktets sammenhæng med vinklen mellem de to vektorer, hvorfor det blev fundet relevant at inddrage denne, til trods for elevernes lille kendskab til trigonometriske funktioner.

6.4 Tilrettelæggelse af undervisningsvideoen

I dette afsnit beskrives de overvejelser, der indgik i tilrettelæggelsen og produktionen af den beskrevne undersøgelsesvideo.

Grundlæggende følger undervisningsvideoen samme struktur som den fysiske klasseværelsesundervisning. Dette betyder, at videoen introducerer de samme emner, teorier og metoder, som kombineres på samme måde som beskrevet ovenfor. En af de store forskelle på undervisningsvideoen og klasseværelsesundervisningen, er brugen af CAS-værktøjet og illustrationsprogrammet **GeoGebra**, til at indtegne vektorer og udføre regneoperationer med disse. Illustrationerne og beregningerne suppleres med grafik, der efterligner opskrivning af udtryk på en kridttavle, der dog manipuleres på en måde, der ikke er mulig ved anvendelse af en fysisk tavle. Eksempelvis flyttes noget af teksten, for at illustrere opdelingen af én ligning i to, for derefter at omskrive det til vektorer. Disse vil blive gennemgået i dybden i **Underafsnit 6.4.1**.

Ved tilrettelæggelsen af undervisningsvideoen, indgik der naturligvis overvejelser vedrørende videomediets affordances, samt de affordances der er til stede på de platforme, som undervisningsvideoen potentielt kunne publiceres på. Blandt andet blev videoen udarbejdet således, at den varede kortere tid, end den planlagte undervisning, der skulle gennemgå samme materiale. Dermed tillod videoundervisningen, at de elever som så videoen, havde mulighed for at 'scrubbe' i denne, for at kunne få genfortalt visse pointer. Derfor blev eleverne, i starten af undervisningen, opfordret til at 'scrubbe' i videoen når end det kunne

gavne dem, eftersom tidsplanen tillod dette. Derudover begrænses videoen nødvendigvis af dens manglende evne til at uddybe ting der bliver sagt deri, på opfordring af eleverne. I et forsøg på at minimere effekten af denne begrænsning, blev der inden prøven afsat en mængde tid, hvori eleverne kunne indgå i en faglig dialog omhandlende undervisningsvideoens emner og pointer. Dette gjorde, at de elever, som ikke forstod nogle af videoens punkter til at starte med, kunne få dem omformuleret af deres klassekammerater, som muligvis kunne forklare teorien med andre ord.

Det blev valgt, at videoen blev lagt op på **Google Drev**, fremfor dedikerede videoplatforme, som eksempelvis **YouTube**, i et forsøg på at gøre videoen mere direkte rettet mod de deltagende elever. Fordelen ved at lægge videoen op på eksempelvis **YouTube**, findes ved hvor let tilgængelig videoen bliver. Lægges videoen op på **YouTube**, kan det derfor fremstå som om, at videoen blev lavet som en undervisningsvideo til alle danske gymnasieelever, hvorimod det at lægge den op på **Google Drev**, i stedet får videoen til at fremstå mere 'privat' og derved i højere grad rettet mod netop de elever, som deltager i undersøgelsen. Undervisningsvideoen skulle naturligvis være let tilgængelig for de elever, der skulle se den som led i videoundervisningen, hvorfor det blev valgt i **Google Drev**, at alle med videoens link kunne se denne. På denne måde fik alle eleverne i de to klasser adgang til videoen gennem **Lectio**, hvor klassernes lærer lagde linket op på modulet, hvori undervisningen foregik. Således kunne eleverne tilgå videoen ved brug af ethvert elektronisk apparat med adgang til **Lectio**. Udover dette spillede layoutet af **Google Drev** ligeledes ind på valget af denne som publiceringsside. Når en video tilgås via **Google Drev**, er videoen det eneste, der ses på siden. Derved mødte eleverne færre distraktioner, end hvis videoen var tilgået gennem en side med eksempelvis reklamer, eller forslag til andre videoer de kunne se.

6.4.1 Anvendelse af computergrafik

I produktionen af undervisningsvideoen var der naturligvis stort fokus på anvendelser af mediets affordances, der netop kommer til udtryk i muligheden for diverse levende illustrationer. I introduktionen til vektorer tegnes der en tallinje, der senere dublikeres

og roteres, således at et koordinatsystem dannes. Dette gøres i takt med, at vektorer præsenteres som et tal i to dimensioner, der er givet ved "dens længde og dens retning" (Kristensen og Lie, 2022, 00:10).

Koordinatsystemet erstattes af notationerne for en vektor, altså $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, der er skrevet med hvidt på et baggrundsbillede af en tavle, for at efterligne traditionel tavleundervisning, således at eleverne både bevidst, såvel som ubevidst, anser videoen som værende informativ, og tilgår materialet med læring i fokus. Mens vektorene stadig ses på billedet, bliver først teksten "Indgange", med pile der peger mod vektorens indgange, fadet ind i billedet, efterfulgt af et koordinatsystem. Dette gøres for at illustrere betydningen af hver indgang i vektoren, i forhold til vektorens grafiske repræsentation i et klassisk koordinatsystem. Efterfølgende fades der over til en optagelse af **GeoGebra**, der viser en indtegnning af stedvektorerne $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Efter vektorerne er indtegnede, nævnes det, at stedvektorer er karakteriseret ved, at de starter i (0,0), hvorfor der kortvarigt tegnes en rød cirkel om dette punkt. Efterfølgende flyttes der rundt på én af vektorene, for at vise, at vektorens indgange ikke er afhængige af dens startpunkt, men udelukkende af dens retning og længde. Dette er netop en fordel ved anvendelsen af eksempelvis **GeoGebra**, hvor man kan 'tage fat' i en vektor, og flytte den rundt i koordinatsystemet, uden at ændre på forholdene mellem dens startpunkt og slutpunkt. For at sikre, at elevernes fokus er rettet mod vektorens indgange, mens denne translateres, erstattes cirklen om (0,0) med en cirkel om indgangene i $\vec{b}$, da det er denne vektor, der flyttes. For at vise, at vektorens indgange netop afhænger af dens retning og længde, ændres vektorens slutpunkt herefter, mens dens startpunkt forbliver fast. Her er cirklen stadig rundt om indgangene, for at få elevernes fokus til at forblive herpå.

Efterfølgende nævnes det, at "To vektorer der ligger hvert deres sted i koordinatsystemet, kan altså godt være samme vektor, hvis deres indgange er ens" (Kristensen og Lie, 2022, 01:09), hvilket suppleres af indtegningen af adskillige vektorer med samme retning og længde, men med forskellige placeringer, i koordinatsystemet. Der indtegnes ligeledes en cirkel rundt om den indtegnede stedvektors slutpunkt, samt en pil fra denne cirkel til vektorernes indgange, da det nævnes at "det gælder for stedvektorer, at deres slutpunkt

har samme koordinatsæt, som indgangene i vektoren" (Kristensen og Lie, 2022, 01:22).

Generelt anvendes **GeoGebra** til at illustrere de grafiske egenskaber ved vektorer, mens disse suppleres af overlæggende grafik, der skal flytte seernes fokus specifikke steder hen. Disse billeder erstattes sommetider af tavlebaggrunden med hvid skrift, der forklarer de algebraiske egenskaber ved vektorer, eksempelvis formelen for prikproduktet, mens beregningen af længden af en vektor præsenteres via overlæggende grafik, der 'tegnes' oven på koordinatsystemet i **GeoGebra**.

Vektoraddition forklares, som tidligere nævnt, først ved hjælp af *ijk*-repræsentation, ved brug af reduktionsopgaven $(a-b) \cdot (a+b) - 2a^2 + 2b^2$. Her indtegnes de første mellemregninger på tavlebaggrunden, der ender ud i udtrykket $1a^2 - 2a^2 - 1b^2 + 2b^2$. De øvre linjer fades herefter ud, mens den tilbageværende linje flyttes op, så der er plads under denne (Kristensen og Lie, 2022, 02:44). Dette udtryk deles derefter op i to linjer, henholdsvis $1a^2 - 2a^2$ og $-1b^2 + 2b^2$, hvor den ene linje flyttes ned under den anden, for at seerne tydeligt ser, at der står det samme på de to linjer, som der stod i den samlede linje tidligere. Herefter ganges a^2 og b^2 uden for parenteserne, som skrives til højre for hver linje, hvorefter der indtegnes et koordinatsystem i nederste venstre hjørne af skærmen, hvor akserne er henholdsvis a^2 og b^2 . a^2 -aksen tegnes med rød, mens b^2 -aksen tegnes med blå, for at det første tal i hver linje kan markeres med en henholdsvis rød og blå cirkel, hvor de to tal svarer til indgangene i den første vektor i det vektoradditionsstykke, der opstilles på baggrund af reduktionsopgaven. Samme farveskala opretholdes, så længe der forklares om vektoraddition i undervisningsvideoen.

En enkelt gang anvendes **GeoGebra** som 'picture in picture' mens tavlen stadig agerer baggrund. **GeoGebra**-billedet ses i nederste venstre hjørne, for at vise vinklen mellem to vektorer, mens prikproduktet mellem disse vektorer beregnes på resten af billedsiden, hvormed sammenhængen mellem prikproduktet og vinklen illustreres.

Den beskrevne brug af farver til at adskille indgangene i vektorerne, samt brugen af **GeoGebra** og overlægningsillustrationer til at flytte fokus, går igen i resten af videoen, i et forsøg på at skabe en konsistent billedside, hvorfor det ikke anses som relevant at analysere brugen af disse affordances og virkemidler yderligere.

Del III

Udførelsen af undersøgelsen

7 | Undersøgelsens indledende faser

7.1 Udarbejdelse af spørgeskema

I dette afsnit beskrives udarbejdelsen af de tre spørgeskemaer, der indgår i dataindsamlingen for dette projekt.

Som det kunne ses i **Afsnit 2.3**, beskriver Bryman (2016) diverse fordele og ulemper ved anvendelsen af spørgeskemaer til at indsamle data. En af de store udfordringer, man som dataindsamler kan opleve ved brug af spørgeskemaer, er som nævnt "respondent fatigue" (Bryman, 2016, s. 222). Af denne grund er spørgeskemaerne til denne undersøgelse forsøgt udformet på en sådan måde, at sandsynligheden for 'respondent fatigue' minimeres. Spørgeskemaerne er holdt korte, således at det længste spørgeskema, dette værende det indledende, indeholder 13 spørgsmål. Her skal respondenterne oplyse deres navn som svar på det første spørgsmål, mens de resterende 12 spørgsmål besvares ved at afkrydse én af fem svarmuligheder, opstillet som en Likert-skala. Da spørgsmålene er konstrueret med lignende svarmuligheder og -metoder, anses spørgeskemaerne som værende "especially easy to follow" (Bryman, 2016, s. 222), mens spørgsmålene anses som værende "particularly easy to answer" (Bryman, 2016, s. 222). Ydermere, som følge af brug af Likert-skalaen, er 11 ud af de foromtalte 12 spørgsmål på lukket form, altså uden mulighed for at komme med uddybende kommentarer. Det er udelukkende ved sidste spørgsmål i det indledende spørgeskema (**Spørgsmål A.13**), at respondenterne har mulighed for at svare andet end de angivne svarmuligheder. Her gives svarmuligheden *Andet*, samt muligheden for at beskrive hvad dette 'andet' er. Denne svarmulighed er givet, da specialeforfatterne ikke med sikkerhed ved, hvilke typer af lektier, som de deltagende elever har haft mødt, i løbet af deres skoletid, og derfor sandsynligvis ej heller kan opstille alle disse som svarmuligheder.

Selvom spørgeskemaerne er forsøgt udformet i letforståeligt sprog, samt med korte og præcise spørgsmål, så er der stadig en sandsynlighed for, at nogle af respondenterne ikke forstår visse spørgsmål. I et forsøg på at sikre, at besvarelseserne ikke bliver mangelfulde,

havde respondenterne mulighed for at stille spørgsmål til specialeforfatterne, under besvarelsen af spørgeskemaerne, selvom dette normalt ikke ses ved 'self-administered questionnaires'. Det indledende spørgeskema besvares umiddelbart inden den indledende prøve, og de afsluttende spørgeskemaer besvares umiddelbart efter den afsluttende prøve. Spørgeskemaerne besvares altså under prøvelignende forhold, hvor eleverne opfordres til ikke at samtale, men godt må stille spørgsmål til specialeforfatterne. Dette kalder Bryman (2016) for "supervised self-administered questionnaires" (s. 221).

En anden måde, hvorpå respondenter af spørgeskemaer kan miste interessen, er hvis de skal besvare spørgsmål, der ikke virker relevante for dem. Denne sandsynlighed forsøges ligeledes mindsket, ved valget om at konstruere to afsluttende spørgeskemaer, baseret på hvilken type undervisning, respondenterne modtog. På denne måde besvarer respondenterne kun spørgsmål, der omhandler deres oplevelse med det specifikke læringsforløb, og skal eksempelvis ikke springe over spørgsmål vedrørende undervisningsvideoen, hvis de ikke har set denne, i forbindelse med deres forløb. Konstruktionen af to afsluttende spørgeskemaer skyldes ligeledes, at inkluderingen af spørgsmål, som eleverne er ment til at springe over, potentielt kan føre til, at eleverne springer over andre spørgsmål, som de er ment til at svare på, enten grundet forvirring eller specialeforfatternes egen legitimering af at springe spørgsmål over.

I et forsøg på ikke at blive for begrænset af spørgeskemaets restriktioner, kan respondenterne i forbindelse med de afsluttende spørgeskemaer give forfatterne lov til at kontakte dem efterfølgende, skulle der opstå uddybende spørgsmål vedrørende deres besvarelser.

Det indledende spørgeskema kan findes i **Appendiks A**, mens de to afsluttende spørgeskemaer, baseret på hvilken type undervisning respondenterne modtog, kan findes i **Appendiks E** og **Appendiks F**.

7.2 Det indledende spørgeskema

Som første led i undersøgelsen, blev de deltagende gymnasieelever præsenteret for det indledende spørgeskema (**Appendiks A**). Nummereres svarerne fra 1 til 5, baseret på deres placering, således at svaret længst til venstre betragtes som 1, mens svaret længst mod højre tilsvarende benævnes med 5, så fordeler svarene sig således, på spørgsmålene fra det indledende spørgeskema

	1	2	3	4	5	Ugyldigt svar eller intet svar
Spørgsmål A.2	2	9	12	12	10	0
Spørgsmål A.3	2	11	22	10	0	0
Spørgsmål A.4	1	6	23	11	3	1
Spørgsmål A.5	0	8	12	17	8	0
Spørgsmål A.6	1	19	16	9	0	0
Spørgsmål A.7	0	10	16	15	3	1
Spørgsmål A.8	0	11	13	13	8	0
Spørgsmål A.9	0	1	6	8	27	3
Spørgsmål A.10	10	17	14	1	0	3
Spørgsmål A.11	9	17	14	2	0	3
Spørgsmål A.12	1	6	23	8	4	3
Spørgsmål A.13	11	7	11	3	1	12

Tabel 7.1: Antal besvarelser af hver svarmulighed i det indledende spørgeskema

Intentionen med det indledende spørgeskema var at skabe en forståelse for elevernes syn på deres matematiske forståelse og færdigheder, samt deres generelle deltagelse i klasseværelsesundervisning, deres generelle udbytte af denne klasseværelsesundervisning, samt deres erfaringer med videoundervisning og dermed computermediets affordances. Til trods for, at hele 27/45 (60 %) meget sjældent bruger deres fritid på at se videoer der gennemgår forskellige emner og teorier, eksempelvis på kanaler som Kurzgesagt - In a Nutshell, Khan Academy og 3Blue1Brown, så oplevedes der ingen tekniske problemer under videoundervisningen. Her skulle eleverne altså blot følge et link, der blev lagt op på den hjemmeside, hvor de normalt tilgår deres skema, finder lektier og afleverer afleveringer, hvorefter de blev videresendt til en video på Google Drev, de individuelt skulle starte. Baseret på ungdommens adgang til, og gennemsnitlige brug af, deres personlige computere, bør tilgængelsen og afspilningen af videoen ej heller være en udfordring. Der var dog visse resultater af det afsluttende spørgeskema, besvaret af de elever, der modtog videoundervisning, der potentielt kan afspejle elevernes begrænsede erfaringer med de fornævnte informationsvideoer. Dette beskrives yderligere i **Afsnit 9.1**.

Baseret på **Spørgsmål A.2**, hvor eleverne skulle sammenligne deres faglige niveau i matematik med deres niveau i andre gymnasiefag, bærer tydelige præg af, at klasserne ikke havde valgt en naturvidenskabelig studieretning. De to klasser havde derimod henholdsvis en sproglig og samfundsvidenskabelig studieretning, begge klasser med matematik på B-niveau. Da det pågældende gymnasium, der indgik i undersøgelsen, ikke tilbyder matematik på C-niveau, har eleverne altså ikke aktivt valgt at have matematik på B-niveau, men måske snarere fravalgt at have matematik på A-niveau, i hvert fald som linjefag. Dette afspejler sig i elevernes syn på deres matematiske niveau, hvor 12/45 (26,7 %) vurderer dette til at være gennemsnitligt, sammenlignet med de andre gymnasiefag, mens henholdsvis 12/45 (26,7 %) og 10/45 (22,2 %) vurderer deres matematiske niveau til at ligge *Lidt under gennemsnittet* og *En del under gennemsnittet*. Derudover oplever eleverne ligeledes et stort behov for lærerassistance, både i læringen af ny teori, samt til opgaveløsning og anvendelse af nylært teori. Her fordeler svarene på **Spørgsmål A.10** og **Spørgsmål A.11** sig nærmest ens, da to svarmuligheder begge afviger med én respondent, mens de resterende

svarmuligheder er identiske. Baseret på disse to spørgsmål er der altså ikke en tydelig plads til videogennemgang af matematiske teorier og metoder i undervisningen, da dette begrænser muligheden for lærerassistance ved læring af ny teori. Udfordringen med dette ses ligeledes i besvarelsen af det afsluttende spørgeskema, for de elever, der modtog videoundervisning, hvilket uddybes i **Afsnit 9.1**.

Afslutningsvis ses det, at eleverne vurderer deres eget udbytte af klasseværelsesundervisning og videoundervisning til at være relativt forskelligt. En respondent vurderer sit udbytte af klasseværelsesundervisning til at være *Optimalt*, mens henholdsvis 19/45 (42,2 %) og 16/45 (35,6 %) vurderer deres udbytte til at være *Meget* eller *Hverken meget eller lidt*. Det er kun 9/45 (20 %) der opfatter deres udbytte af klasseværelsesundervisning som *Lidt*, mens ingen respondenter vurderer deres udbytte som *Minimalt*. Dette forholder sig anderledes ved elevernes vurdering af deres udbytte af videoundervisning, hvor kun 10/45 (22,2 %) vurderer at de får *Meget* udbytte af videoundervisning, 16/45 (35,6 %) får *Hverken meget eller lidt* udbytte, mens 15/45 (33,3 %) vurderer, at de får *Lidt* udbytte af videoundervisningen, og 3/45 (6,7 %) får *Minimalt* udbytte.

Respondenterne må derfor siges at have et mere positivt syn på klasseværelsesundervisning frem for videoundervisning. Dette kan eventuelt skyldes COVID-19-pandemien, der fandt sted mens de deltagende gymnasieelever stadig gik i folkeskole. Her skulle mange lærere pludseligt til at undervise online, enten via programmer som **Microsoft Teams** eller **Zoom**, eller ved produktion af undervisningsvideoer og hjemmeopgaver. Dette skulle gøres med kort varsel og minimale erfaringer, hvorfor en del af undervisning må antages ikke at være blevet optimal, og dermed kan have resulteret i negative opfattelser af onlineundervisning som helhed hos eleverne. Ydermere skulle eleverne også tilpasse sig læringssituationerne i onlineundervisningerne, og dermed lære på helt nye måder, der ligeledes kan have besværliggjort optagelsen af ny viden hos den enkelte elev, og dermed mindsket udbyttet af undervisningstimerne.

7.3 Den indledende prøve

Som andet led i undersøgelsen skulle gymnasieeleverne besvare den indledende prøve. Som det ses i **Appendiks B**, så kunne eleverne selv læse, og blev ligeledes forklaret, at prøven bevidst var konstrueret på en måde, hvor specialeforfatterne ikke forventede, at alle deltagerne kunne nå at løse alle opgaverne. Dette blev valgt på baggrund af, at prøven skulle fungere som det grundlæggende element i opdeling af eleverne, og løste størstedelen af eleverne alle opgaverne, ville det antageligvis være svært for specialeforfatterne at vurdere, hvilke af eleverne der havde svært ved at løse opgaverne, men klarede det inden for tiden, fra de elever, der havde nemt ved at løse opgaverne, og egentligt kunne have afleveret prøven tidligere. Eleverne blev stillet spørgsmål i emnerne *brøker*, *procentregning*, *potensregneregler*, *grundlæggende algebra*, herunder *reduktionsopgaver*, *ligningsløsning*, *to ligninger med to ubekendte*, *lineære funktioner* og *geometri* - altså emner som de tidligere har modtaget undervisning i, enten i løbet af folkeskolen, eller i deres nyligt overståede grundforløb.

Der blev ikke taget højde for korrekte mellemregninger eller korrekt reducerede udtryk, det blev udelukkende vurderet, hvorvidt det angivne svar var korrekt. Eksempelvis blev både 1 og $\frac{6}{6}$ godtaget i **Opgave B.3 (c)**. I nedenstående tabel kan det ses, hvor mange point specialeforfatterne vurderede, at et korrekt svar på de forskellige opgaver i den indledende prøve skulle resultere i. Dette blev vurderet inden eleverne besvarede prøven, og er derfor ikke baseret på, hvor mange elever, der besvarede opgaverne korrekt.

Opgave	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pointfordeling	(a) 1 (e) 1	(a) 1 (e) 2	(a) 1	(a) 2	(a) 1 (d) 2							
	(b) 1 (f) 1	(b) 1 (f) 2	(b) 1	(b) 2	(b) 1 (e) 2							
	(c) 1 (g) 1	(c) 1 (g) 2	(c) 1	(c) 2	(c) 1 (f) 2							
	(d) 1 (h) 1	(d) 1 (h) 2	(d) 1	(d) 2								
Samlede point	8	12	4	8	9	4	4	4	8	6	10	10

Tabel 7.2: Pointfordeling af spørgsmål og underspørgsmål i den indledende prøve

De blanke felter betyder at opgaven, ikke indeholder underspørgsmål. Af **Tabel 7.2** ses det, at det maksimale antal point, der kunne optjenes ved at svare rigtigt på samtlige spørgsmål, og dertilhørende underspørgsmål, var 87 point.

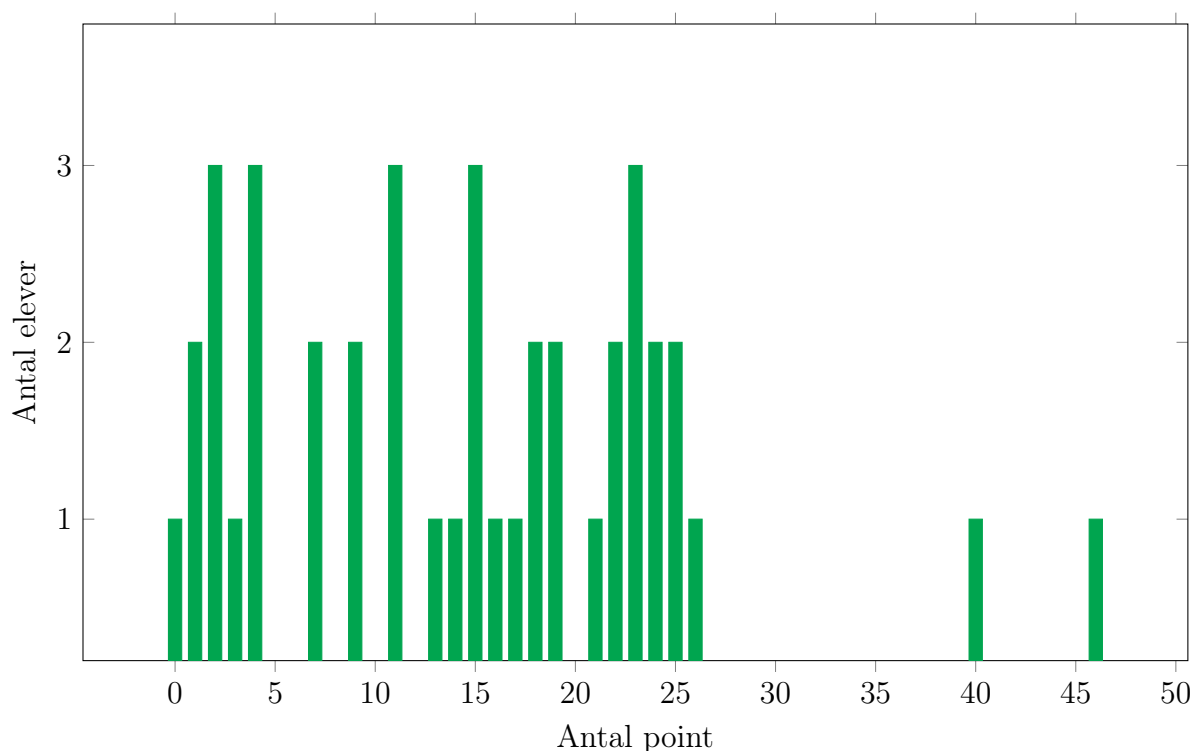
I **Tabel 7.3** ses de deltagende elevers resultater i den indledende prøve. Ud af 87 mulige point opnåede den deltagende gymnasieelev med flest point altså 46, mens eleven med færrest optjente point opnåede 0 point, og altså ikke havde besvaret nogen af opgaverne korrekt.

Interval	Point	Antal elever
0	0	1
1 - 5	1,1,2,2,2,3,4,4,4	9
6 - 10	7,7,9,9	4
11 - 15	11,11,11,13,14,15,15,15	8
16 - 20	16,17,18,18,19,19	6
21 - 25	21,22,22,23,23,23,24,24,25,25	10
26 - 30	26	1
31 - 35		0
36 - 40	40	1
41 - 45		0
46 - 50	46	1

Tabel 7.3: Eleverne optjening af point i den indledende prøve

Ses der på **Tabel 7.2** er det klart, at de opgaver, som specialeforfatterne vurderede til at være de mest komplicerede, ligeledes er tildelt flest point.

For at give et overblik over pointfordelingen blandt besvarelserne af den indledende prøve, opstilles disse som et søjlediagram i **Figur 7.1**.



Figur 7.1: Pointfordeling blandt besvarelsene af den indledende prøve

I dette søjlediagram ses det, at størstedelen af besvarelsene er forholdsvis jævnt fordelt mellem 0 og 26, på nær i intervallet mellem 5 og 10, samt med to tydelige outliers på henholdsvis 40 og 46.

Som nævnt forventede specialeforfatterne ikke, at nogen af de deltagende gymnasieelever opnåede de maksimale 87 point. Dog forventedes det, at en større andel af gymnasieeleverne ville besvare de indledende spørgsmål om brøker og procentregning korrekt, da disse opgaver betragtes som værende på folkeskoleniveau. Ses der på hvilke opgaver, som gymnasieeleverne oftest besvarer korrekt, er det da også delopgaverne **a-d** i **Opgave B.2**, hvor der gennemsnitligt optjenes 2,225 point, samt **Opgave B.6**, hvor eleverne gennemsnitligt optjener 2,9 point. Derudover ses det, at kun én elev besvarer **Opgave B.12** korrekt, dette værende eleven der optjente 40 point, mens ingen af de deltagende gymnasieelever kunne løse **Opgave B.13**. Eleven med flest point, altså 46, besvarede altså hverken **Opgave B.12** eller **Opgave B.13** korrekt, og scorede ligeledes 0 point i både **Opgave B.8**, **Opgave B.9** og **Opgave B.10**, der ligeledes voldte store problemer for de andre elever.

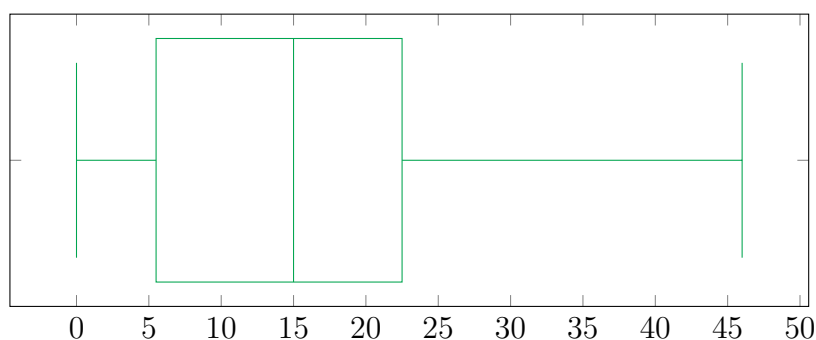
Nærmere bestemt besvarede ingen elever hverken **Opgave B.8** eller **Opgave B.10** korrekt, mens to elever løste **Opgave B.9**.

I **Tabel 7.4** ses antallet af elever, der optjente point i de forskellige opgaver i den indledende prøve. Pointoptjening garanterer ikke, at eleven har optjent det fulde antal mulige point for opgaven. Det er tværtimod størstedelen af eleverne, der ikke modtager det fulde antal mulige point for de opgaver, de er angivet ved.

Opgave	B.2	B.3	B.4	B.5	B.6	B.7	B.8	B.9	B.10	B.11	B.12	B.13
Antal elever der optjente point	29	24	32	18	37	2	0	2	0	5	0	0

Tabel 7.4: Antal elever, der har optjent point i de forskellige opgaver

Opstilles resultaterne som et boksplot i **Figur 7.2** ses det, at den gennemsnitlige mængde optjente point, der er 14,9 er stort set det samme som datasættets median på 15 point. Dette betyder, at det udregnede gennemsnit anses som værende anvendeligt til at beskrive det gennemsnitlige matematiske niveau blandt gymnasieeleverne, til trods for nogle relativt store outliers. Ydermere gælder det, at datasættets nedre kvartil ligger på 5,5 point, mens den øvre kvartil er på 22,5 point.



Figur 7.2: Boksplot over resultaterne af den indledende prøve

Til trods for, at prøven indledes med "Derudover er sværhedsgraden af nogle af opgaverne også høj, så der er sandsynlighed for, at du støder på opgaver, som du har svært ved at løse. Dette forventer vi . . .", så var forventningen til mængden af ukorrekte besvarelser

noget lavere, end den egentlige mængde. Besvarelsene viser en tydelig forskel mellem det, af specialeforfatterne, forventede matematiske niveau og det reelle matematiske niveau blandt gymnasieeleverne. Denne fejlvurdering af matematisk niveau skyldes formodentligt, at de deltagende gymnasieelever sandsynligvis snarere har fravalgt at have matematik på A-niveau, frem for at have tilvalgt matematik på B-niveau, som tidligere nævnt, da gymnasiet ikke tilbyder matematik på C-niveau på nogen af dets studieretninger.

Selvom der ikke blev givet point for korrekte mellemregninger og korrekt tankegang i opgaveudførelsen, så tyder besvarelsene på, at eleverne både oplever udfordringer med det konceptuelle og det procedurale. Dette baseres ligeledes på udtalelser fra eleverne under prøven, hvor der hos nogle elever opstod spørgsmål vedrørende manglen af tal i eksempelvis **Opgave B.7**, der tyder på en manglende grundlæggende konceptuel forståelse for algebra, der naturligvis medfører udfordringer med at løse opgaverne.

Under udførelsen af den indledende prøve oplevedes det, at eleverne var hurtige til at 'give op', og stoppe med at forsøge at løse opgaverne. Eleverne havde til den indledende prøve fået at vide, at de måtte holde fri, når de var færdige med prøven, og da denne ikke havde nogen betydning for deres karakterer, eller blev vist til deres lærer, var der sandsynligvis mere begejstring ved at være tidligt færdig med prøven, end ved at løse en udfordrende opgave efter længerevarende beregninger. Dette antages at have indflydelse på den gennemsnitlige pointfordeling, hvilket vil blive behandlet nærmere i **Kapitel 12**.

7.4 Opdeling af elever

På baggrund af besvarelsenerne af det indledende spørgeskema og den indledende prøve, blev gymnasieeleverne i hver klasse inddelt i to hold. Da undersøgelsen netop blev udført i to forskellige gymnasieklasser, på to forskellige tidspunkter, var opdelingen nødt til at ske adskilt i de to klasser, selvom dette ikke nødvendigvis resulterede i den jævnest fordeling af matematisk niveau.

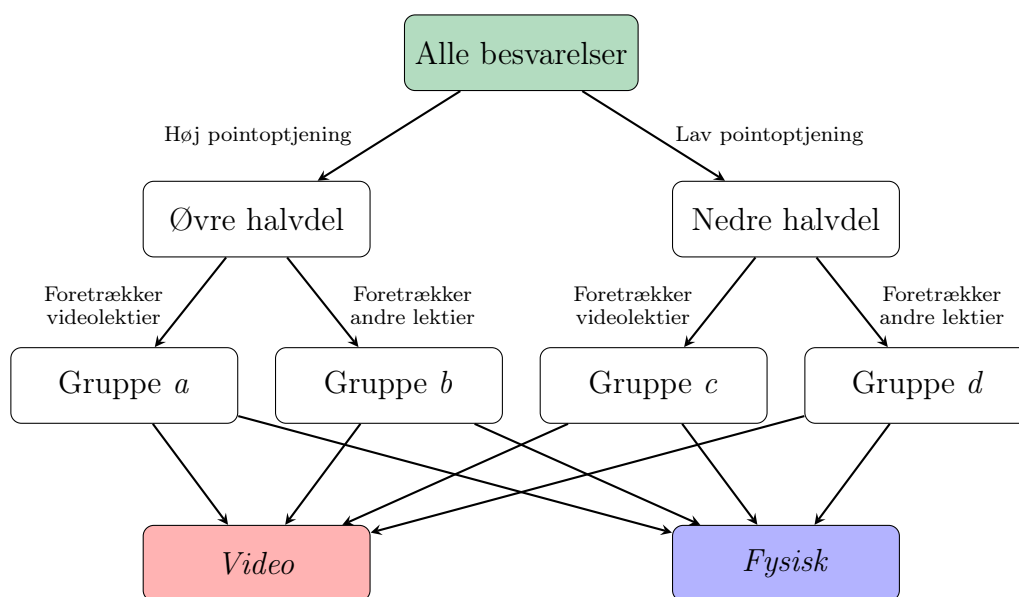
Efter den indledende prøve blev besvaret i den første klasse, blev disse naturligvis rettet, hvorefter besvarelsenerne blev inddelt i en 'øvre halvdel' og en 'nedre halvdel'. Den øvre halvdel bestod af de 14 besvarelser, der havde scoret flest point, disse værende 18 eller flere point, mens den nedre halvdel bestod af de 13 besvarelser med færrest optjente point.

Herefter blev de to halvdele hver opdelt i to grupper, baseret på deres besvarelse af **Spørgsmål A.13** i det indledende spørgeskema. Her lagdes de, der tilkendegav, at de foretrak at se video som lektier, i en gruppe for sig, mens de resterende besvarelser grupperedes. Dette gjordes adskilt med den øvre halvdel og den nedre halvdel, hvormed fire grupper var fundet. Disse kan ses i **Tabel 7.5**.

	Foretrækker video	Foretrækker ikke video
Øvre halvdel	Gruppe <i>a</i>	Gruppe <i>b</i>
Nedre halvdel	Gruppe <i>c</i>	Gruppe <i>d</i>

Tabel 7.5: De fire grupper

Slutteligt blev de fire grupper hver fordelt på *Video* og *Fysisk*, således at halvdelen af hver gruppe var at finde på *Video*, mens den anden halvdel var at finde på *Fysisk*. Her var der igen fokus på, at de fire grupper blev repræsentativt fordelt i forhold til optjente point i den indledende prøve, således at to elever med tilsvarende point fra gruppe *a*, kom på hvert deres hold. På denne måde blev alle elever i hver gruppe 'parret' med en 'makker' fra samme gruppe, hvis optjente point var tætte på hinanden, hvorefter disse blev delt på *Video* og *Fysisk*. Fordelingsprocessen er tydeligtgjort i **Figur 7.3**, på den følgende side.



Figur 7.3: Fordelingsproces for eleverne, baseret på besvarelserne af deres indledende prøve og deres foretrukne form for lektier

Samme fordelingsmetode blev anvendt i den anden gymnasieklasse, hvormed de to endelige hold var fastlagte. Dette medførte, at eleverne, der endte med at modtage videoundervisning, havde et pointgennemsnit fra den indledende prøve på 14,2, mens eleverne, der endte med fysisk klasseværelsesundervisning, havde et gennemsnit på 15,7 point.

Disse gennemsnit er ikke helt repræsentative for den oprindelige fordeling af eleverne, da nogle elever efterfølgende er blevet sorteret fra, da de enten kun har besvaret den indledende eller afsluttende prøve. Derudover skiftede en enkelt elev hold fra videoundervisning til fysisk klasseværelsesundervisning, grundet tekniske problemer med hovedtelefoner. Eleven der skiftede hold var del af den øvre halvdel i den ene klasse, hvorfor forskellen mellem de senere udregnede pointgennemsnit for de to hold antages at være større end ved den oprindelige elevfordeling. Dette betød at 45 elever blev skåret ned til 41 elever, hvoraf 22 modtog videoundervisning og 19 modtog fysisk klasseværelsesundervisning.

8 | Undervisningen

I dette kapitel analyseres de to sessioner af fysisk klasseværelsesundervisning samt de to videoundervisninger. I analysen af den fysiske klasseværelsesundervisning lægges der primært vægt på graden af medrivende dialog og elevdeltagelse, mens der ved videoundervisningerne analyseres på læringssituationer, læringsmiljøer samt didaktiske og adidaktiske situationer. Disse miljøer og situationer inddrages naturligvis også i analysen af den fysiske klasseværelsesundervisning.

8.1 Den fysiske klasseværelsesundervisning

Som tidligere nævnt blev der afsat 45 minutter til den fysiske klasseværelsesundervisning, hvori der skulle gennemgås de seks emner: vektorrepræsentation med pile- og *ijk*-metoden, vektorskalering med konstanter, vektoraddition og -subtraktion med de to repræsentationer, vektorer mellem to punkter, længden af en vektor samt beregning af prikproduktet på to måder, og dettes sammenhæng med vinklen mellem de to prikkede vektorer.

Grundet undervisningsvideoens korte længde, blev det antaget, at disse emner alle kunne dækkes på 45 minutter, mens der stadig var tid til store mængder medrivende dialog og elevdeltagelse. På baggrund af dette gik den specialeforfatter, der stod for den fysiske klasseværelsesundervisning i den første klasse, ind til undervisningen med relativ stor tidsoptimisme. Det viste sig dog, netop grundet store mængder medrivende dialog og elevdeltagelse, at undervisningen endte med at vare over en time, da specialeforfatteren ikke var opmærksom på, hvor lang tid der var gået, og dertil havde misforstået tidspunktet for, hvornår eleverne havde fri fra det pågældende modul. Dette betød, at eleverne i den pågældende klasse, der havde modtaget fysisk klasseværelsesundervisning, var nødsaget til først at besvare den indledende prøve den følgende dag, da der ikke var tid i skemaet til, at det kunne lade sig gøre umiddelbart efter undervisningen. Dette betød ligeledes, at specialeforfatterne sadledede en smule om i forhold til planen om, at begge gymnasieklasser

skulle undervises af den samme specialeforfatter, for at sikre tilsvarende undervisning.

I stedet modtog klasse 2 fysisk klasseværelsesundervisning af den anden specialeforfatter, der forinden havde gennemset den fysiske klasseværelsesundervisning af klasse 1, for at kunne tilrettelægge undervisningen til at foregå på en tilsvarende måde. Derudover blev det valgt, at klasse 2 ikke skulle undervises i prikproduktet og dets egenskaber, i et forsøg på at holde undervisningen under de afsatte 45 minutter. Dette betød, at de to klassers fysiske klasseværelsesundervisninger adskilte sig en smule fra hinanden, dog anses disse forskelligheder i undervisningsforløbet ikke som hverken kritiske eller som havende stor indflydelse på udbyttet af undervisningen, hvorfor eleverne fra de to klasser stadig analyseres som en helhed i de følgende kapitler, og ikke opdeles i de to klasser. Dette gøres ligeledes på baggrund af, at ingen af de to klasser klarede sig nævneværdigt bedre i den afsluttende prøve end den anden klasse, hvilket ligeledes var tilfældet ved den indledende prøve.

I løbet af de fysiske klasseværelsesundervisninger, var der naturligvis stor fokus på elevinddragelse og medrivende dialog. Dette blev ligeledes nævnt for eleverne indledningsvis, hvor de blev opfordret til at stille spørgsmål og bryde ind, hvis der var noget af det nye teori, de oplevede udfordringer med at forstå. Derudover nævnte specialeforfatterne, at undersøgelsen netop omhandlede elevernes deltagelse i undervisningen, hvorfor de meget gerne måtte forsøge at besvare specialeforfatternes spørgsmål, selvom de ikke var sikre på, at svaret var korrekt. Ved at eleverne ikke kun svarede korrekt på alle specialeforfatternes spørgsmål, blev det nemmere at starte en medrivende klasseværelsesdialog omkring et specifikt spørgsmål eller emne, i stedet for at undervisningen blot bestod af simpel IRE-dialog.

Efter gennemsening af de to undervisningsgange er det talt sammen til, at eleverne blev stillet spørgsmål 53 gange, hvoraf 45 spørgsmål blev besvaret i nogen grad, mens de resterende spørgsmål ikke resulterede i en respons fra gymnasieeleverne. Af de 45 spørgsmål, der blev besvaret, førte 29 af dem til IRE-dialog, 15 af dem til medrivende dialog, mens det ene spørgsmål førte til en længere samtale med en enkelt elev, der kunne have været betragtet som medrivende dialog, havde flere elever budt ind og deltaget i samtalen. Altså er en tredjedel af alle elevinteraktioner analyseret til at være medrivende dialog.

Typisk indgik to elever i den medrivende dialog, dog var der i løbet af undervisningen også eksempler på medrivende dialoger, hvori der indgik fire og fem elever. I disse bød eleverne alle ind med deres idéer til, hvordan en specifik problemstilling skulle løses, eller hvad navnet på den lange side i en retvinklet trekant er. Nedenunder ses et eksempel på en af de medrivende dialoger, der udspillede sig i løbet af de fysiske klasseværelsesundervisninger.

I gengivelsen af den medrivende dialog betegnes specialeforfatteren, der afholdte den pågældende undervisning, med 'SF'.

Eksempel 8.1. Eksempel på medrivende dialog

SF: Hvis vi så skal finde ud af: 'hvor lang er den her vektor så?', så kigger vi så på - jamen hvor langt går den på x -aksen og hvor langt går den på y -aksen.

[SF ser en oprakt hånd]

SF: Ja?

ELEV 1: Men er det så $a^2 + b^2 = c^2$.

SF: Ja det er nemlig Pythagoras vi skal bruge - Præcis. Så hvis vi så går de her 4 skridt ud af x -aksen, og så de 3 skridt op af y -aksen og så tegner dem ind, så får vi nemlig lige præcis en retvinklet trekant. Og så som du siger skal vi bruge Pythagoras som siger at $a^2 + b^2 = c^2$. Kan I huske hvad a , b og c står for?

[SF kigger på ELEV 1]

SF: Du kunne huske Pythagoras, kan du huske hvad den - hvad den siger også?

ELEV 1: Altså det er sådan - den der man skal finde, det er jo c .

SF: Den der?

[SF peger på hypotenusen i den retvinklede trekant.]

ELEV 1: Ja.

SF: Kan du huske hvad den hedder?

[SF peger på ELEV 2]

ELEV 2: Hmm... øh... et eller andet med 'h'?

SF: Ja.

[SF peger på ELEV 3]

SF: Ja?

ELEV 3: Ejjj...

SF: Prøv bare.

ELEV 3: Øhmm... Hypotens eller et eller andet

SF: Tæt på.

[SF peger på ELEV 4]

ELEV 4: Nej ikke noget alligevel.

SF: Er der nogen der har den?

[SF peger på ELEV 5]

SF: Yes?

ELEV 5: Er det ikke hypotenusen?

SF: Det er hypotenusen, jo! Så c^2 her beskriver altid hypotenusen, altså den side der er modsat den rette vinkel herved. Og så a og b , det er så de to andre sider, kan I huske hvad de hedder?

[ELEV 5 rækker hånden op, og SF peger på ELEV 5]

SF: Ja?

ELEV 5: Kateter.

SF: Yes, lige præcis.

Af dette eksempel ses det, at fem elever indgik i opbygningen af den fælles viden om, at man finder længden af en vektor ved at anse den som hypotenusen i en retvinklet trekant, hvorefter Pythagoras' læresætning kan anvendes.

Analyseres **Eksempel 8.1** ud fra Winsløws fem faser i det didaktiske spil ved fysisk klasseværelsesundervisning ses det ligeledes, at dialogen gennemgår alle fem faser, omend hurtigt. Indledningsvis etableres det didaktiske miljø gennem specialeforfatterens introduktion til teorien bag længden af en vektor. Under denne præsentation observerer og reflekterer gymnasieeleverne, hvilket udløser en handlingssituation, hvori Elev 1 selv tager initiativ til at række hånden op og formulere et bud på, hvordan problemet skal angribes. Herefter evaluerer specialeforfatteren elevens bud på en løsning, og går derefter tilbage til formuleringsfasen, ved at få eleverne til reflektere over, hvilken side i en retvinklet trekant, som c^2 i Pythagoras' læresætning henviser til, samt over hvad denne side hedder. Herefter udspiller der sig flere eksempler på handlings-, formulerings- og valideringsfaser, idet flere elever byder ind med deres bud på navnet af hypotenusen, hvor disse bud netop skaber nye refleksioner og muligheder for præcision hos de andre gymnasieelever. Efter Elev 5 har angivet korrekt svar til navnet på hypotenusen forklarer specialeforfatteren, at hypotenusen altid betegner siden der er modsat den rette vinkel, og at længden af denne altid betegnes med c^2 i Pythagoras' læresætning. På denne måde forklares teorien for alle eleverne, hvormed de præsenteres for den institutionelle viden, med ønske om, at denne viden skal indgå i elevernes fælles viden.

Som nævnt var der dog også interaktioner med eleverne, der i stedet blev karakteriseret som IRE-dialog. Et typisk eksempel på disse dialoger ses i **Eksempel 8.2**.

Eksempel 8.2. Eksempel på IRE-dialog

SF: Hvad så hvis jeg har - lad os bare sige vektor $\vec{w}$ her - og skalerer den med 0, hvad sker der så?

[SF ser en oprakt hånd]

SF: Ja, ELEV 1?

ELEV 1: Den bliver bare 0.

SF: Ja lige præcis, for så ganger vi bare 0 ind på begge led - eller begge indgange, og vi ved, at hvis vi ganger noget med 0, så giver det 0.

Her ses det, at det kun er én elev, der indgår i selve dialogen. Dog forsøger specialeforfatteren stadig at bygge videre på elevens svar, i stedet for blot at validere, hvorvidt svaret er korrekt eller forkert. Med dette forsøges der at skabes en form for pseudo-medrivende dialog, hvor læreren påtager sig rollen som en af de elever, der 'rives med' i dialogen, ved at forklare hvorfor svaret er korrekt. Dette gøres i håbet om, at de resterende elever i klassen lærer mere af, at få forklaret hvorfor svaret er rigtigt, i stedet for blot at blive præsenteret for det korrekte svar. Havde klasseværelsesundervisningen ikke været tidsbegrænset, havde specialeforfatteren naturligvis bedt eleverne om selv at validere, hvorvidt svaret var korrekt, samt at argumentere for dette. Dette kunne have resulteret i en langt større andel medrivende dialog, end undervisningstimerne endte med at indeholde, dog anser specialeforfatterne den egentlige mængde af medrivende dialog som værende stor og ikke mindst tilfredsstillende for undersøgelsen.

Resultaterne og konsekvenserne af dette fokus på medrivende dialog analyseres på baggrund af gymnasieelevernes besvarelser af de afsluttende spørgeskemaer, der findes i **Kapitel 9** på de følgende sider. Inden dette behandles videoundervisningssessionerne.

8.2 Videoundervisningen

Gymnasieeleverne, der modtog videoundervisning, blev ledt ind i et andet lokale, af specialeforfatteren, der skulle sikre, at eleverne ikke oplevede tekniske udfordringer, samt stå for etableringen af den faglige dialog efter undervisningsvideoen var blevet gennemset af eleverne. Eleverne medbragte deres computere og hovedtelefoner, således at videoundervisningen som udgangspunkt kunne foregå individuelt. Videoen var tilgængelig for eleverne

på **Lectio** via et link, der videreførte dem til **Google Drev**, hvor videoen kunne afspilles. Eleverne blev forklaret, at videoen ikke tilnærmelsesvis udgjorde hele de 45 minutter, der var sat af til gennemseningen, hvorfor eleverne havde tid til at pause og scrubbe i videoen, for at fremme deres forståelse af den præsenterede teori. Eleverne blev informeret om, at videoen kunne ses i de første 35 minutter, hvorefter de skulle indgå i den faglige dialog vedrørende teorien. Efter at størstedelen af eleverne, gjorde specialeforfatteren opmærksom på, at de havde gennemset videoen, eller de 35 minutter var gået, påbegyndte specialeforfatteren den faglig dialog, i et forsøg på at få eleverne til at sætte ord på deres forståelse af den gennemgåede teori. Denne faglige dialog blev etableret, for at gøre brug af de muligheder der var for at konstruere et 'flipped classroom'.

Under den første udførelse af videoundervisning blev flere af eleverne ikke færdige med gennemseningen af undervisningsvideoen, inden de 35 minutter var passeret. Ved etableringen af den efterfølgende faglige dialog blev det ligeledes gjort klart for specialeforfatteren, at størstedelen af eleverne ikke havde forstået den gennemgåede teori, og dermed ikke kunne indgå i en faglig dialog. Specialeforfatteren var derfor selv nødt til at gennemgå de basale teorier, der blev præsenteret i videon, inden eleverne besvarede den afsluttende prøve og det afsluttende spørgeskema. Konsekvenserne af dette behandles yderligere i **Kapitel 12**. I den anden udførelse af videoundervisning deltog størstedelen af eleverne i den faglige dialog, mens tre elever brugte tiden på at gennemse undervisningsvideoen en yderligere gang.

Del IV

Analyse

9 | De afsluttende spørgeskemaer

I dette kapitel analyseres de deltagende gymnasieelevers besvarelser af de afsluttende spørgeskemaer. Da spørgeskemaerne var forskellige, baseret på hvorvidt eleverne modtog fysisk klasseværelsesundervisning eller videoundervisning, opdeles elevernes besvarelser ligeledes i disse hold. Først behandles besvarelserne fra de elever, der modtog videoundervisning.

9.1 Videoundervisning

*Det afsluttende spørgeskema for modtagerne af videoundervisning ses i **Appendiks E**.*

Ud af de 22 besvarelser af det afsluttende spørgeskema målrettet eleverne der modtog videoundervisning, fordelte svarene sig som det ses i **Tabel 9.1**, hvor svarmulighederne til spørgsmålene igen beskrives med tallene fra 1 til og med 5, baseret på deres placering fra venstre mod højre, ligesom tilfældet var ved **Tabel 7.1**.

	1	2	3	4	5	Ugyldigt svar eller intet svar
Spørgsmål E.3	0	2	6	6	7	1
Spørgsmål E.4	0	5	3	9	5	0
Spørgsmål E.5	2	5	2	11	2	0
Spørgsmål E.6	3	7	8	2	2	0
Spørgsmål E.7	0	3	3	8	8	0
Spørgsmål E.8	2	3	4	4	7	2
Spørgsmål E.9	1	1	5	2	12	1

Tabel 9.1: Antal besvarelser af hver svarmulighed i det afsluttende spørgeskema, blandt eleverne der modtog videoundervisning

De to gange, hvor svarmulighed 1 er blevet valgt i **Spørgsmål E.5**, er i skemaet markeret med rød, da specialeforfatterne vurderer, at disse skyldes en misforståelse af formuleringen af **Spørgsmål E.5**. I dette spørgsmål skulle gymnasieeleverne vurdere, hvor stor en del af det gennemgåede teori, de oplevede udfordringer med at forstå, hvortil svarmulighederne er: *Intet*, *Lidt*, *Hverken meget eller lidt*, *Meget* og *Det hele*. Uden at kunne være sikre, så antages det, at de elever, der har svarer *Intet*, har ment, at de forstod intet af det gennemgåede teori, i stedet for, at de oplevede udfordringer med at forstå intet af det nye teori. Dette baseres på de andre angivne svar i de to specifikke spørgeskemaer, samt resultaterne af de afsluttende prøver udført af selvsamme elever.

Tages der udgangspunkt i **Spørgsmål E.3**, da **Spørgsmål E.1** og **Spørgsmål E.2** blot bruges til at parre elevernes spørgeskemaer med deres prøvebesvarelser, samt til at kontrollere hvorvidt eleverne har modtaget den korrekte form for undervisning, ses det, at det er meget få af de deltagende elever, der føler, at videoundervisningen gav dem et større udbytte end de tidligere moduler, de har haft i matematik på gymnasiet. Kun to ud af 22 elever svarer, at deres udbytte har været *En smule bedre*, end de traditionelle klasseværelsesundervisninger, mens syv elever vurderer deres udbytte af videoundervisningen til at være *Markant værre* end udbyttet af tidligere moduler i matematikundervisningen. Dertil svarer seks elever, at deres udbytte var *Hverken bedre eller værre*, mens seks andre elever vurderer deres udbytte til at være *En smule værre*. Dette tyder altså på, at størstedelen af de adspurgte gymnasieelever ikke ville have gavn af, at deres traditionelle klasseværelsesundervisning blev erstattet af videoundervisning.

Til trods for undervisningsvideoens store fokus på visualiseringer af vektorer og regnearter, så vurderede størstedelen af gymnasieeleverne, at visualiseringerne hjalp *Lidt* eller *Minimalt* på deres forståelse af vektorer. Eleverne havde dog ikke mulighed for at sammenligne videoen med en gennemgang af materialet uden visualiseringer, hvorfor disses egentlige hjælp potentielt kan være udfordrende at vurdere. Dermed ikke sagt, at visualiseringerne ikke kan have haft lidt eller minimal effekt på nogle af elevernes udbytte af videoen - dette stemmer nemlig overens med undersøgelsen beskrevet af McLuhan (1964), hvor radiomediet klarer sig bedst, når medierne gør maksimalt brug af deres affordances, som

nævnt i **Afsnit 6.2**.

Denne lille hjælp, som eleverne oplevede ved videoens visualiseringer, stemmer overens med de angivne svar vedrørende elevernes udfordringer ved forståelsen af den gennemgåede teori i **Spørgsmål E.5**. Her svarer to (potentielt fire) elever, at de oplevede udfordringer med at forstå *Det hele*, mens 11 elever var udfordret på *Meget* af teorien. Altså oplever over halvdelen af de adspurgte elever udfordringer med at forstå *Meget* eller al den gennemgåede teori. Dette kan naturligvis skyldes, at vektorer er et matematisk emne der adskiller sig meget fra de emner, der ellers gennemgås i gymnasiet, og som eleverne har stiftet bekendtskab med i deres grundforløb. Dog tegner besvarelser snarere et billede af, at det netop er videomediet, der har besværliggjort forståelsen af teorien. Dette skyldes forskellen i besvarelser af **Spørgsmål E.5** og **Spørgsmål F.5** i spørgeskemaerne for henholdsvis de elever, der modtog videoundervisning, og de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. **Spørgsmål F.5** og besvarelserne af spørgeskemaet for eleverne der deltog i den fysiske klasseværelsesundervisning, behandles i **Afsnit 9.2**, dog nævnes det her, at eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning i mindre grad følte sig udfordrede i forståelsen af den gennemgåede teori, og besvarede ligeledes flere spørgsmål korrekt i den afsluttende prøve. Besvarelserne af den afsluttende prøve præsenteres og analyseres i **Kapitel 10**.

En af de måder, hvorpå videomediet kom til sin ret, var gennem gymnasieelevernes brug af mediets interaktive affordances. Eleverne kunne naturligvis ikke deltage i undervisningen på samme måde som eleverne i den fysiske klasseværelsesundervisning kunne, men under videoundervisningen havde eleverne mulighed for at pause eller scrubbe i videoen, for at styrke deres forståelse af den præsenterede teori. Her gjorde 10 elever *Ofte* eller *Meget ofte* brug af denne affordance, mens otte elever *Sommetider* pausede eller scrubbede i videoen. Det var altså kun 4 ud af de 22 elever, der sjældent eller meget sjældent interagerede med undervisningsvideoen. Dette tegner altså et billede af, at eleverne, til en vis grad, godt kan vurdere, hvordan de får mest udbytte af videoundervisningen, til trods for at hele 35 af de 45 elever, der besvarede det indledende spørgeskema, *Sjældent* eller *Meget sjældent* brugte deres fritid på at se videoer, der gennemgår forskellige emner og teorier, og derfor som

udgangspunkt må antages at have begrænsede erfaringer med asynkron¹ videoundervisning, da det antages, at den online undervisning, der blev udført under COVID-19-pandemien primært var synkron². Dertil skal det dog nævnes, at eleverne virkede til at opfatte videomediets affordances som begrænsninger frem for muligheder. 16 elever opfattede det som værende en *Stor* eller *Meget stor* hindring, at de ikke kunne stille opklarende spørgsmål om teorien til en lærer, mens seks elever kun så det som en *Lille* eller *Meget lille* hindring.

Endeligt opnåede en stor del af eleverne ej heller det store udbytte af den lærerstyrede dialog med deres klassekammerater, efter gennemsejningen af undervisningsvideoen. Disse svar er ligeledes påvirket af, at nogle af eleverne simpelthen ikke nåede at deltage i denne dialog, da de ikke var færdige med videoen, og derfor blev instrueret af den ene specialeforfatter til at angive deres udbytte som værende *Minimalt* i **Spørgsmål E.8**. Derudover var der i den ene klasse behov for at gennemgå noget af teorien, og ligefrem definere vektorer på tavlen, hvorfor disse elever ikke havde muligheden for at indgå i en faglig dialog om teorien, hvilket afspejles af de mange *Minimalt*-besvarelser i **Spørgsmål E.9**. Konsekvensen af dette behandles yderligere i **Kapitel 12**.

¹Asynkron undervisning betegner situationen, hvor formidlingen af materialet og elevens læring af dette ikke finder sted på samme tid eller samme sted.

²Med dette menes, at undervisningen antages at have foregået over Zoom eller Microsoft Teams, hvorfor denne var spatial asynkron, men temporal synkron.

9.2 Fysisk klasseværelsesundervisning

*Det afsluttende spørgeskema for modtagerne af fysisk klasseværelsesundervisning ses i **Appendiks F**.*

Af de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, er 18 af disse medtaget som data omhandlende besvarelser af det afsluttende spørgeskema. Som tidligere nævnt kan visse elever være blevet sorteret fra, hvis de kun har besvaret enten den indledende prøve eller den afsluttende prøve, for bedst at kunne sammenligne elevernes niveau i de to prøver. Én elev skulle dog gå i løbet af undervisningsgangen, og nåede derfor ikke at besvare det afsluttende spørgeskema. Dog indgår denne elevs besvarelse af den afsluttende prøve stadig i undersøgelsens data. Besvarelserne af det afsluttende spørgeskema for modtagerne af fysisk klasseværelsesundervisning ses i **Tabel 9.2**

	1	2	3	4	5	Ugyldigt svar eller intet svar
Spørgsmål F.3	1	8	8	1	0	0
Spørgsmål F.4	2	8	6	0	1	1
Spørgsmål F.5	0	6	6	4	1	1
Spørgsmål F.6	1	4	1	8	4	0
Spørgsmål F.7	1	4	11	1	0	1
Spørgsmål F.8	1	2	8	3	4	0
Spørgsmål F.9	0	1	13	3	1	0

Tabel 9.2: Antal besvarelser af hver svarmulighed i det afsluttende spørgeskema, blandt eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning

Her ses det tydeligt, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, vurderede deres udbytte til at være markant højere, end de elever, der deltog i videoundervisningen.

Af eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, vurderede 17 af de i alt 18 elever, at udbyttet af undervisningen enten var tilsvarende eller større, end udbyttet af deres tidligere moduler i matematik på deres ungdomsuddannelse. Heraf vurderede otte af disse elever udbyttet som værende *En smule bedre*, og én elev vurderede udbyttet til at være *Markant bedre*. En sammenligning af besvarelserne fra eleverne, der modtog den fysiske klasseværelsesundervisning, og eleverne, der modtog videoundervisning, findes i **Afsnit 9.3**.

Der ses ligeledes en stor forskel i de to holds vurdering af, hvor meget visualiseringerne i undervisningen hjalp dem med at forstå det gennemgåede teori. Blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, oplevede to, at de blev hjulpet *Maksimalt* af visualiseringerne, mens otte blev hjulpet *Meget* af disse. Seks af eleverne følte sig *Hverken meget eller lidt* hjulpet af visualiseringerne, mens en enkelt elev angav, at disse hjalp *Minimalt* på dennes forståelse af vektorer. Besvarelserne af **Spørgsmål F.4** tegner et billede af, at den fysiske klasseværelsesundervisnings store fokus på visualiseringer og eksempler ikke var spildt, da eleverne tydeligt angiver, at deres forståelse blev hjulpet på vej af disse.

Besvarelserne af **Spørgsmål F.5** er i tråd med det ovenstående, da kun fem elever følte sig udfordret i forståelsen af *Meget* eller *Det hele* af det gennemgåede teori, mens seks elever oplevede udfordringer ved *Hverken meget eller lidt* af teorien, og seks elever følte sig udfordret af *Lidt* af teorien. Disse besvarelser tyder på, at den medrivende dialog i klasseværelsesundervisningerne har virket, hvilket afspejler sig en smule i de svar, som eleverne har angivet til **Spørgsmål F.7**. Her vurderede én elev, at denne lærte *Lidt* af at lytte til dennes klassekammeraters besvarelser af specialeforfatterens spørgsmål, 11 elever vurderede, at de lærte *En smule*, mens henholdsvis fire og én elev lærte *Meget* eller *Rigtig meget* at lytte til de andre elevers dialoger med specialeforfatterne. Til trods for, at størstedelen af besvarelserne af **Spørgsmål F.7** angives som nummer 3 på Likert-skalaen fra 1 til 5, så anses dette ikke som værende en 'neutral' svarmulighed, i forhold til elevernes bedømmelse af virkningen af den medrivende dialog. Det er nærmere svarmuligheden placeret som nummer 5, altså at eleven lærte *Nærmest intet* af den medrivende dialog,

der kan betragtes som det neutrale svar, da dette ville betyde, at den medrivende dialog ikke fremmede læringen hos eleven, og undervisningen derfor ikke udmærkede sig positivt sammenlignet med elevernes tidligere undervisningsmoduler i matematik. Af denne grund kan spørgsmålet beskyldes for ikke at give eleverne en reel mulighed for at udtrykke, at den medrivende dialog nærmere var en hindring end en hjælp for deres forståelse af det gennemgåede teori, dog ses det, at ingen af eleverne angav *Nærmest intet* som svar, hvorfor eventuelle svarmuligheder, der anses som værende mere negative overfor den medrivende dialog, må konkluderes ikke at have manglet.

Et yderligere tegn på, at den medrivende dialog var et centralt element i den fysiske klasseværelsesundervisning, ses i besvarelsene af **Spørgsmål F.8**, hvor eleverne skulle vurdere, hvor meget de selv indgik i den faglige dialog på klassen. Her vurderede otte elever, at de indgik *En smule* i dialogen, mens henholdsvis tre og fire elever vurderede, at de indgik *Lidt* eller *Minimalt*. Dog angav to elever, at de indgik *Meget* i den faglige dialog, og én elev syntes selv at have indgået *Maksimalt*. Disse svar vurderes til at afspejle situationerne i de fysiske klasseværelsesundervisninger ret præcist, da specialeforfatterens oplevelser ligeledes var, at visse elever deltog markant mere i den medrivende dialog end andre elever, der foretrak at lytte til deres klassekammeraters besvarelser og kommentarer til specialeforfatterens spørgsmål og forklaringer.

Dog følger størstedelen af gymnasieeleverne generelt ikke, at deres deltagelse i undervisningen, i form af spørgsmål eller forespørgsler om gentagelser af noget af det gennemgåede, er med til at forstyrre deres klassekammeraters læring. Her svarede 12 ud af 18 elever, altså $\frac{2}{3}$ af eleverne, at de var *Uenige* eller *Meget uenige* i udsagnet om, at deres spørgsmål eller lignende ville forstyrre deres klassekammeraters læring. Der var dog ligeledes fire elever, der er valgte svarmuligheden *Enig*, samt én elev, der var *Meget enig*. Eleverne blev dog ikke bedt om at bedømme, hvor meget deres klassekammeraters spørgsmål normalvis forstyrrer deres egen læring, hvorfor de elever, der er enige i udsagnet i **Spørgsmål F.6**, potentielt kan være det grundet usikkerhed eller nervøsitet over at deltage i undervisningen i plenum, og ikke nødvendigvis fordi de generelt anser spørgsmål i undervisningen som værende forstyrrende og begrænsende for den generelle læring. Dette blev eleverne dog ikke direkte adspurgt,

hvorfor årsagen til nogle af elevernes manglende deltagelse i den medrivende dialog ikke udelukkende kan konkluderes til at stamme fra én specifik årsag. Dette behandles yderligere i **Kapitel 12**, hvor elevernes manglende mulighed for at angive, hvorvidt de opfattede undervisningenstempoet til at være for højt eller for lavt, samt om eleverne fandt mængden af teori til at være passende, ligeledes beskrives. Dog ses det i **Spørgsmål F.9**, at 13 af de 18 adspurgte elever vurderede, at de havde *Passende* tid til at tage noter, mens fire elever følte de havde *En smule for lidt* eller *Alt for lidt* tid, og én elev syntes der var *En smule for meget* tid til at tage noter. Baseret på dette antages det, undervisningerne havde et fornuftigt tempo, hvorfor der netop blev beskåret i mængden af gennemgået teori, mellem første og anden undervisning, da specialeforfatterne ikke ønskede at gå på kompromis med mængden af medrivende dialog og elevernes noteskrivning, samt tiden eleverne skulle bruge på at forstå teorien, ved at gennemgå denne hurtigere og med indskrænket elevdeltagelse.

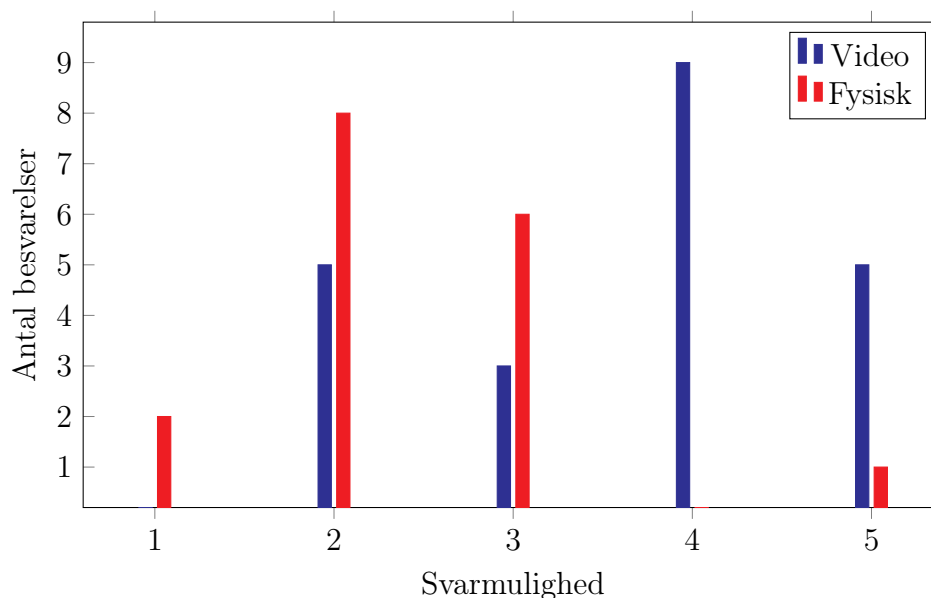
Dette afslutter præsentationen og de adskilte analyser af besvarelses af de to afsluttende spørgeskemaer, der vil blive sammenlignet i det følgende afsnit.

9.3 Sammenligning af spørgeskemabesvarelses

Som det kan ses i henholdsvis **Appendiks E** og **Appendiks F**, så indgår flere af de samme spørgsmål i begge de afsluttende spørgeskemaer. Af denne grund er det naturligvis oplagt at sammenligne besvarelses af disse, da dette, foruden elevernes resultater i den afsluttende prøve, kan give et indblik i elevernes udbytte af de to undervisningsmetoder, samt deres syn på disse.

Som forventet, især grundet antagelsen om elevernes erfaringer med onlineundervisning under COVID-19-pandemien, så responderer eleverne bedre på den fysiske klasseværelsesundervisning end videoundervisningen. Dette ses ligeledes i resultaterne af den afsluttende prøve, hvor eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, optjente flere point end eleverne, der modtog videoundervisning. Denne forskel, samt dennes signifikans, analyseres i **Kapitel 10**.

En af de store forskelle mellem de to spørgeskemaer, var elevernes vurdering af hvor meget hjælp de fik af visualiseringerne i undervisningen. Her vurderede 14 ud af de 22 elever, der modtog videoundervisning, af visualiseringerne og illustrationerne i videoen hjalp *Lidt* eller *Minimalt* på deres forståelse, hvor det tilsvarende kun var én af eleverne fra den fysiske klasseværelsesundervisning, der vurderede visualiseringerne til at hjælpe *Lidt* eller *Minimalt*.

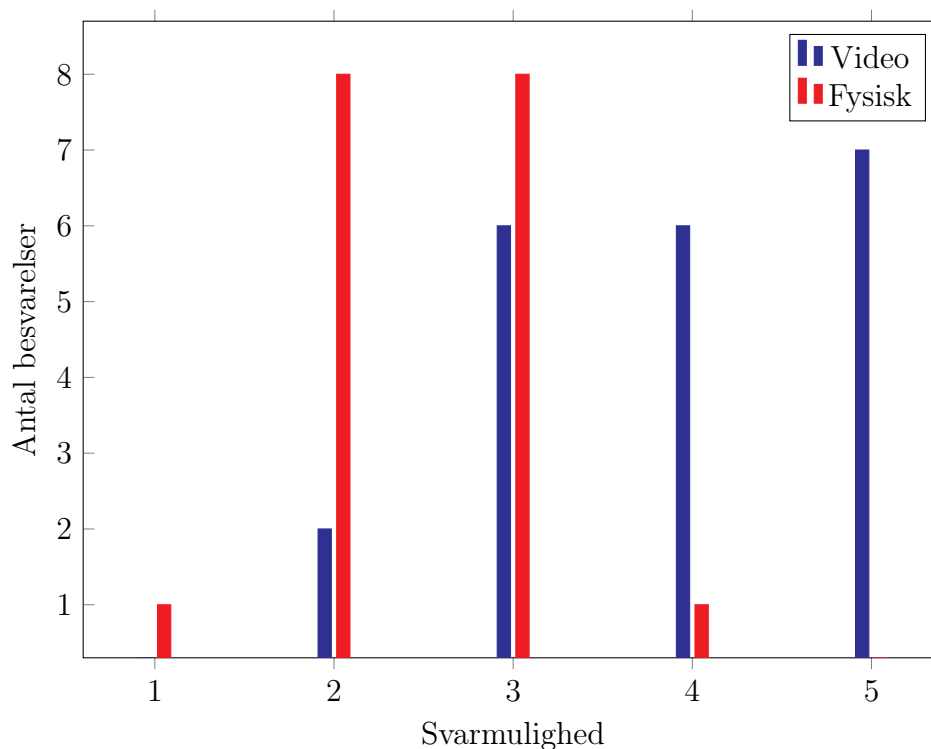


Figur 9.1: Antal besvarelser af **Spørgsmål E.4** og **Spørgsmål F.4**

Det antages, at denne store forskel hænger sammen med elevernes generelle opfattelse af undervisningen, og deres udbytte af denne. Det er naturligt, at elever, der vurderer deres udbytte af undervisningen til at være lavere end normalt, ikke synes at visualiseringerne hjalp nævneværdigt meget. Da en langt større andel af eleverne fra den fysiske klasseværelsesundervisning så positivt på undervisningen, er det forventeligt, at disse følte sig hjulpet mere på vej af visualiseringerne og illustrationerne. Hertil skal det også nævnes, at den fysiske klasseværelsesundervisning naturligvis tog længere tid end undervisningsvideoen, hvorfor der ligeledes blev brugt længere tid på visualiseringer, i et forsøg på at sikre, at samtlige elever i klassen havde forstået teorien bag. Eleverne, der modtog videoundervisning, havde dog mulighed for at pause og scrubbe i undervisningsvideoen, for at øge deres

forståelse af de forskellige emner. Dette har dog tydeligvis ikke haft samme effekt som repetitionen i den fysiske klasseværelsesundervisning.

Generelt ses det ud fra spørgeskemabesvarelsenerne, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, vurderede læringsforløbet til at være markant mere givende end de elever, der modtog videoundervisning. Dette gælder både i deres vurderinger af deres eget udbytte af undervisningen, hvor store dele af den gennemgåede teori de havde udfordringer med at forstå, samt deres vurdering af, hvor meget hjælp de fik af diverse visualiseringer, der blev præsenteret i løbet af både den fysiske klasseværelsesundervisning, og undervisningsvideoen.

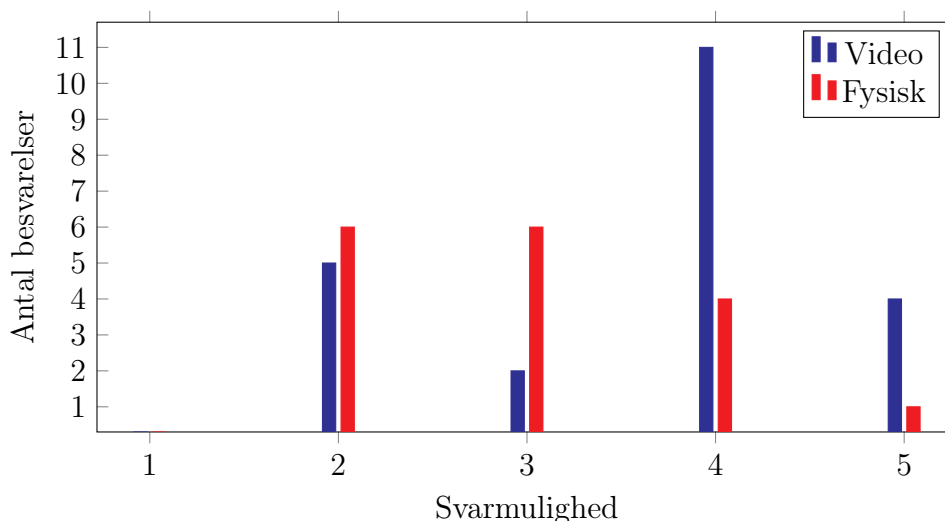


Figur 9.2: Antal besvarelser af **Spørgsmål E.3** og **Spørgsmål F.3**

Dette kunne man uden videre have analyseret til at vise, at den fysiske klasseværelsesundervisning forklarede teorien bedre end undervisningsvideoen, dog kan de deltagende elevers incitament til at være engagerede og koncentrerede, ved de forskellige typer undervisninger, potentielt spille ind, da dette incitament må antages at være større ved den fysiske klasseværelsesundervisning, da eleverne i højere grad kan føle sig 'overvåget' af læreren, i modsæt-

ningen til videoundervisningen, hvor eleverne arbejdede mere selvstændigt.

Dog ses det også af spørgeskemaerne, og besvarelsene af den afsluttende prøve, at en større andel af eleverne der modtog videoundervisning, havde udfordringer med at forstå den gennemgåede teori, end eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Antages det igen, at de to elever, der modtog videoundervisning, der har angivet som svar til **Spørgsmål E.5**, at de havde problemer med at forstå *Intet* af den gennemgåede teori, har misforstået spørgsmålet, og i stedet mente, at de forstod *intet* af den gennemgåede teori, og derfor burde have svaret, at de oplevede udfordringer med at forstå *Det hele*, fordeler besvarelsene af henholdsvis **Spørgsmål E.5** og **Spørgsmål F.5** sig således:



Figur 9.3: Antal (korrigerede) besvarelser af **Spørgsmål E.5** og **Spørgsmål F.5**

Til trods for, at stort set samme antal elever blandt de, der modtog videoundervisning, og de, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, oplevede udfordringer med *Intet* eller *Lidt* af teorien, så ses der alligevel en klar tendens i de efterfølgende svarmuligheder. Her aftager mængden af antallet af angivne besvarelser for de enkelte svarmuligheder, i takt med, at de bliver mere ekstreme, hos eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Samme tendens ses ikke hos de elever, der modtog videoundervisning, hvor hele 11 ud af 22 elever angav, at de havde udfordringer med at forstå *Meget* af det gennemgåede teori. Nogenlunde samme elevfordeling ses i besvarelsene af den afsluttende prøve, der analyseres i **Kapitel 10** på de følgende sider.

10 | Den afsluttende prøve

*Den afsluttende prøve kan ses i **Appendiks D**.*

Ligesom klasserne blev opdelt i to hold, hvor det ene hold modtog asynkron videoundervisning, mens det andet hold modtog fysisk klasseværelsesundervisning, opdeles dette kapitel på samme måde. Kapitlet starter med en gennemgang af den indledende prøve, herefter præsenteres besvarelsene fra de to hold separat, hvorefter disse sammenlignes og analyseres i forhold til hinanden.

10.1 Introduktion

Til forskel fra de afsluttende spørgeskemaer, var den afsluttende prøve identisk for alle eleverne, ligegyldigt om de modtog videoundervisning eller fysisk klasseværelsesundervisning. Prøven stillede spørgsmål i netop de emner, som undervisningen dækkede, altså *pile- og ijk-repræsentation af vektorer, vektoraddition, vektorsubtraktion, vektorskalering, løsning af ligninger med vektorer, vektorer mellem to punkter, længde af vektorer, prikprodukt og vinklen mellem to vektorer*.

Ligesom ved den indledende prøve, blev der udelukkende givet point for korrekte svar, uden fokus på mellemregninger eller lignende. Pointfordelingen af opgaverne blev endnu en gang udarbejdet inden prøverne var blevet besvaret af eleverne, og kan ses i **Tabel 10.1**.

Opgave	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pointfordeling	(a) 1	(a) 1		(a) 2			(a) 2		(a) 3	(a) 4		
	(b) 1	(b) 1		(b) 3			(b) 4		(b) 3	(b) 4		
	(c) 1	(c) 2		(c) 3					(c) 3	(c) 4		
Samlede point	3	4	3	8	5	4	6	6	9	12	6	8

Tabel 10.1: Pointfordeling af spørgsmål og underspørgsmål i den afsluttende prøve

Det kan ses i **Tabel 10.1** at det maksimale antal point, der kunne opnås i denne prøve, var 74 point. Ligesom ved den indledende prøve, var denne prøve designet til at være udfordrende, for at afspejle elevernes reelle udbytte af undervisningen, mens elevernes besvarelser ligeledes skulle sammenlignes med deres besvarelser af den indledende prøve. Af denne grund ville en lettere prøve kunne skævvride resultaterne til at vise, at specialeforfatternes undervisningsforløb mindskede skellet mellem de matematisk stærke og svage elever, hvorfor prøven eksempelvis indeholdt opgaver, hvor eleverne selv skulle finde frem til løsningsmetoden, og ikke blot blev præsenteret for et udtryk, der skulle beregnes.

Ud fra **Tabel 10.1** ses det, at de opgaver, som specialeforfatterne vurderede til at være sværest, og derved gav flest point, var opgaver hvor eleverne enten skulle kombinere flere af de gennemgåede teorier, eksempelvis *vektorskalering* og *vektoraddition* samt opgaver hvor eleverne selv skulle finde frem til den korrekte matematiske tankegang og løsningsmetode, eksempelvis beregningen af fugleflugtsafstanden mellem to lejligheder ved hjælp af vektorregning, eller anvendelse af *prikproduktet* til beskrivelse af vinklen mellem to vektorer. Specialeforfatterne forventede altså ikke, at flertallet af eleverne ville kunne besvare en særlig stor del af opgaverne vedrørende prikproduktet og vinklen mellem to vektorer, eller kunne kombinere den præsenterede teori omhandlende disse emner.

Baseret på besvarelserne af **Opgave D.11** antages det, at størstedelen af eleverne ikke har beregnet, hvorvidt de angivne vektorer er vinkelrette/ortogonale eller ej, men derimod blot har gættet. Dette baseres på, at der ikke angives mellemregninger i form af udregning af prikprodukt, samt adskillige angivelser af, at det første sæt af vektorer skulle være vinkelrette, det andet sæt som værende ortogonale, mens det tredje sæt ikke angives som værende hverken vinkelret eller ortogonalt, da eleverne ser ud til at være løbet tør for svarmuligheder. Dette tyder på, at eleverne har forstået 'vinkelrette' og 'ortogonale' som to modsætninger, i stedet for to begreber til at beskrive samme fænomen for todimensionale vektorer, antageligvis grundet opgaveformuleringen. Dette betyder, at nogle af eleverne har 'gættet' rigtigt på visse af opgavens underspørgsmål, hvilket har resulteret i optjening af point. Disse point indgår naturligvis i elevernes samlede pointoptjening, og dermed beregningerne af de gennemsnitlige optjente point.

Opgave D.11 behandles dog ikke yderligere, da besvarelsene af denne ikke ses som et retvisende billede af gymnasieelevernes forståelse af prikproduktets sammenhæng med ortogonalitet mellem to vektorer. Af denne grund er **Opgave D.11** markeret med gul i fremtidige tabeller.

10.2 Videobesvarelser

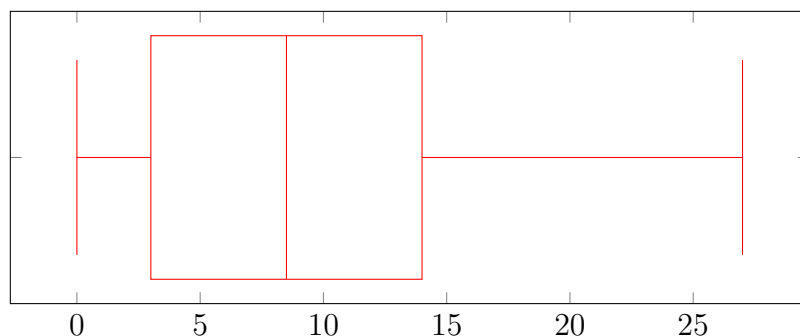
I **Tabel 10.2** ses pointfordelingen for eleverne, der modtog videoundervisning. Det er værd at bemærke, at fire elever optjente nul point, idet ingen af dem besvarede en eneste opgave korrekt, mens eleven der klarede sig bedst optjente 27 ud af 74 mulige point.

Interval	Point	Antal elever
0	0,0,0,0	4
1 - 4	3,3,3,4	4
5 - 8	6,6,8	3
9 - 12	9,10	2
13 - 16	13,14,14,14,14,15	6
17 - 20	17,18	2
21 - 24		0
25 - 28	27	1
29 - 32		0
33 - 36		0
37 - 40		0

Tabel 10.2: De optjente point blandt eleverne der modtog videoundervisning

Af disse pointoptjeninger beregnes det, at det gennemsnitlige antal optjente point blandt modtagerne af videoundervisning var 9, hvilket svarer til 12,2% af de 74 point, der maksimalt kunne opnås. Som nævnt i **Afsnit 7.4**, var det gennemsnitlige antal point i den indledende prøve, blandt disse elever, 14,2 hvilket svarer til 16,1% af de 87 mulige point. Altså faldt det gennemsnitlige procentvise pointopnåelse, blandt eleverne der modtog videoundervisning, med 3,9 procentpoint. Eftersom prøverne er forskellige, kan det ikke definitivt konkluderes, hvorvidt dette fald skyldes mangler i undervisningsvideoen, eller blot at den afsluttende prøve endte med at være sværere end den indledende.

Konstrueres der, ligesom i **Afsnit 7.3**, et boksplot over disse data, ses det i **Figur 10.1**, at medianen for disse besvarelser er 8,5. Denne median er tilpas tæt på det gennemsnitlige pointopnåelse på 9, til at gennemsnittet kan anvendes til at beskrive det matematiske niveau for den gennemsnitlige elev. Derudover ses den nedre kvartil til at være 3, mens den øvre kvartil tilsvarende er 14. Ligeledes ses det i **Figur 10.1**, at elevernes pointfordeling er højreskæv. Med andre ord har et fåtal af elever optjent markant flere point end de resterende, mens adskillige elever klarede prøven en smule værre end gennemsnitligt. Dette stemmer overens med elevernes pointfordeling i den indledende prøve, som set i **Figur 7.2**.



Figur 10.1: Boksplot over pointoptjeningen i den afsluttende prøve blandt eleverne der modtog videoundervisning

Tabel 10.3 beskriver videomodtagernes gennemsnitlige antal point i hver af opgaverne i den afsluttende prøve, samt hvor stor en procentdel af de mulige point, eleverne gennemsnitligt opnåede i hver opgave.

Opgave	Gennemsnitligt antal point	Procentdel af mulige point
D.2	1,68	56,1%
D.3	1,14	28,4%
D.4	1,23	40,9%
D.5	1,41	17,6%
D.6	0,91	18,2%
D.7	0,54	13,6%
D.8	0	0%
D.9	0	0%
D.10	0,82	9,1%
D.11	1,27	10,6%
D.12	0	0%
D.13	0	0%

Tabel 10.3: Den gennemsnitlige opnåelse af point i hver opgave i den afsluttende prøve, blandt eleverne der modtog videoundervisning

Blandt eleverne, der modtog videoundervisning, var der ingen korrekte besvarelser af hverken **Opgave D.8**, **Opgave D.9**, **Opgave D.12** eller **Opgave D.13**. Blandt disse anses det som særligt bemærkelsesværdigt, at ingen af eleverne besvarede **Opgave D.8** korrekt. Denne opgave er inddelt i to delopgaver, vurderet til henholdsvis 2 og 4 point, der omhandler bestemmelsen af en vektor mellem to punkter, samt beregningen af denne vektors længde. Ud fra denne opgave kan det ikke vurderes, hvorvidt eleverne havde problemer med at bestemme længden af en vektor, eftersom ingen af eleverne havde fundet frem til den rigtige vektor i første delopgave. Dog kan det konkluderes, at eleverne der

modtog videoundervisning oplevede store udfordringer med at bestemme vektoren mellem to givne punkter.

Ydemere ses det af **Opgave D.9**, som ingen elever ej heller har besvaret korrekt, at eleverne der modtog videoundervisning ligeledes er udfordrede på beregningen af længden af vektoren, eller på deres forståelse af, hvornår en opgave netop omhandler beregningen af længden af en vektor. Hertil bør det nævnes, at **Opgave D.9** ligeledes indeholder relativt store tal, idet vektoren har indgangene 150 og 200, hvis længde dog nemt kan beregnes, hvis der haves kendskab til 3-4-5-trekanter. **Opgave D.12** og **Opgave D.13** omhandlede henholdsvis beregningen af prikproduktet mellem to vektorer ud fra deres længder og cosinus til vinklen mellem disse vektorer, samt beregningen af cosinus til vinklen mellem to vektorer givet deres indgange, og kendskab til formlen for prikproduktet.

Til forskel fra den indledende prøve, var der ingen af opgaverne, som udelukkende blev besvaret korrekt af én, eller to, af elever der modtog videoundervisning. **Opgave D.7** og **Opgave D.10** var de opgaver, på nær opgaverne som ingen af eleverne besvarede korrekt, som færrest af eleverne opnåede point i. Disse opgaver blev besvaret korrekt af 3 elever, der modtog videoundervisning. En samlet angivelse af, hvor mange elever der optjente point i de forskellige opgaver, kan ses i **Tabel 10.4**.

Opgave	D.2	D.3	D.4	D.5	D.6	D.7	D.8	D.9	D.10	D.11	D.12	D.13
Antal elever der optjente point	15	11	9	8	4	3	0	0	3	5	0	0

Tabel 10.4: Antallet af elever, der modtog videoundervisning, der optjente point i de forskellige opgaver

Opgave D.7 bestod, som set i **Tabel 10.1**, udelukkende af én delopgave hvor eleverne skulle bestemme det t , der løste et givet vektoradditionsstykke, hvori t naturligvis indgik. **Opgave D.10** bestod af tre delopgaver, alle omhandlende beregningen af prikproduktet mellem to angivne vektorer. Bemærkelsesværdigt besvarede de tre elever, der optjente point i opgaven, hver kun to af delopgaverne korrekt. Ved en fejl havde specialeforfatterne lavet

Opgave D.10 (a) og **(c)** ens, dog er det kun to af de tre elever, der besvarede både **Opgave D.10 (a)** og **(c)** korrekt, og ligeledes besvarede **Opgave D.10 (b)** forkert. Den tredje elev besvarede derimod **Opgave D.10 (a)** og **(b)** korrekt, hvilket kunne tyde på, at denne sidstnævnte elev forstod hvordan man udregner prikproduktet, men uheldigvis lavede en regnefejl i den sidste delopgave, samtidigt med at vedkommende overså at de to vektorer i **Opgave D.10 (c)** var identiske med dem i **Opgave D.10 (a)**.

Derudover kan det i **Tabel 10.3** ses, at eleverne, der modtog videoundervisning, gennemsnitligt opnåede 56,1% af de mulige point i **Opgave D.2** - dette værende den største gennemsnitlige procentvise opnåelse blandt eleverne, der modtog videoundervisning. Denne opgave omhandlede indtegnelsen af stedvektorer i et koordinatsystem, givet deres indgange, hvoraf det bedømmes, at de fleste af eleverne, der modtog videoundervisning, har forstået hvordan stedvektorer indtegnes. Dog blev der ved den ene udførelse af den afsluttende prøve givet uddybende forklaringer, af den ene specialeforfatter, til de af eleverne, der ikke havde indgået i den opfølgende dialog vedrørende undervisningsvideoen. Dette har påvirket mængden af elever, der optjente point i denne opgave, da de hjulpne elever antageligvis ellers havde optjent 0 point hver. Den opgave, som eleverne, der modtog videoundervisning, optjente den næstestørste procentdel af point i, var **Opgave D.4** med 40,9% mens **Opgave D.3** med 28,4% var tredjehøjst. Disse opgaver omhandlede henholdsvis indtegnelsen af den grafiske repræsentation af en givet vektorsubtraktion, og indtegnelsen af to angivne vektorer samt vektoren givet ved deres addition.

Altså kan det ses, at de største styrker blandt eleverne, der modtog videoundervisning, lå i deres grafiske forståelse af vektorer, herunder også den grafiske repræsentation af vektoraddition og -subtraktion, mens de blev mest udfordret i beregningen af prikproduktet og dets betydning for aflæsningen af vinklen mellem vektorene, samt konstruktionen af vektorer mellem to punkter i et givet koordinatsystem og beregningen af dennes længden.

10.3 Fysiske besvarelser

Af **Tabel 10.5** ses det, at eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, i gennemsnit optjente 12,8 point, ud af de 74 mulige point. Dette svarer dermed til, at eleverne gennemsnitligt optjente 17,3% af de mulige point. Disse elever optjente gennemsnitligt 15,7 point i den indledende prøve, hvilket svarer til cirka 18% af de 87 point, der kunne opnås. Dermed kan det ses, at den gennemsnitlige procentlige pointopnåelse for eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, faldt med 0,7 procentpoint.

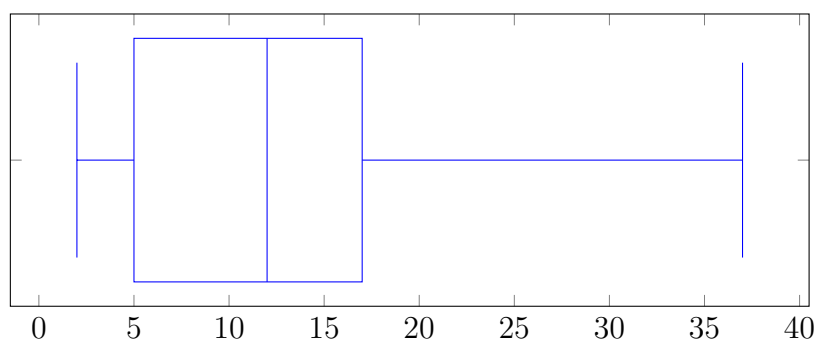
Interval	Point	Antal elever
0		0
1 - 4	2,3,4,4	4
5 - 8	5,5	2
9 - 12	9,9,10,12	4
13 - 16	13,14,14,16	4
17 - 20	17,18,20	3
21 - 24		0
25 - 28		0
29 - 32	32	1
33 - 36		0
37 - 40	37	1

Tabel 10.5: De optjente point blandt eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning

Ydermere ses det af **Tabel 10.5**, at alle, undtagen to, af de elever der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, optjente mellem 2 og 20 point. Pointoptjeningen hos de to

sidste elever er markant højere, disse værende henholdsvis 32 og 37 point. Det ses altså, at den matematiske forståelse af det gennemgåede teori varierer blandt eleverne. Disse markant højere outliers stemmer overens med specialeforfatterens forventninger til besvarelsenerne af den afsluttende prøve, omend den gennemsnitlige pointoptjening forventedes højere.

Konstrueres der et boksplot over disse elevers pointoptjening i den afsluttende prøve, ses det i **Figur 10.2**, at medianen er 12, med en nedre kvartil på 5 og en øvre kvartil på 17. Eftersom den gennemsnitlige pointoptjening blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, var 12,8, er datasættets gennemsnit og median tætte nok til, at den gennemsnitlige pointoptjening relativt præcist beskriver den gennemsnitlige forståelse, og det generelle niveau, når det kommer til todimensionale vektorer, blandt de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning.



Figur 10.2: Boksplot over pointoptjeningen i den afsluttende prøve blandt eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning

Det kan ses, at boksplottet i **Figur 10.2** er højreskævt, hvilket netop skyldes de fornævnte høje outliers - altså de elever der optjener markant flere point end deres klassekammerater. Dette stemmer ligeledes overens med niveauforskellen i den indledende prøve, som set i **Tabel 7.3** og **Figur 7.2**.

Blandt de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, blev der ej heller angivet nogen korrekte besvarelser til hverken **Opgave D.9**, **Opgave D.12** eller **Opgave D.13**, disse værende opgaver vedrørende bestemmelsen af fugleflugtsafstanden mellem to bopæle ved brug af vektorregning, beregningen af et prikprodukt givet længderne af to vektorer og vinklen mellem dem, samt beregningen af vinklen mellem to vektorer, givet disses indgange.

Derudover var der kun tre af eleverne fra den fysiske klasseværelsesundervisning, der optjente point i **Opgave D.8**, som omhandlede bestemmelsen af en vektor mellem to punkter, samt beregningen af dennes længde. Disse tre elever besvarede alle delopgaven om bestemmelsen af vektoren mellem punkterne, **Opgave D.8 (a)**, korrekt, mens de besvarede **Opgave D.8 (b)**, altså delopgaven om beregningen af længden, forkert.

Ligesom i **Afsnit 10.2**, kan der konstrueres et skema over den gennemsnitlige opnåelse af point i hver opgave, samt en tilsvarende beregning af, hvor stor en procentdel af de mulige point, disse udgør. Dette ses i **Tabel 10.6**.

Opgave	Gennemsnitligt antal point	Procentdel af mulige point
D.2	1,89	63,2%
D.3	1,58	39,4%
D.4	0,63	21,0%
D.5	3,16	39,5%
D.6	2,63	52,6%
D.7	0,84	21,0%
D.8	0,32	5,3%
D.9	0	0%
D.10	0,95	10,5%
D.11	0,84	7,0%
D.12	0	0%
D.13	0	0%

Tabel 10.6: Den gennemsnitlige optjening af point blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning

Ud fra **Tabel 10.6** ses det, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, gennemsnitligt opnåede 63,2% af de mulige point i **Opgave D.2**, hvilket var den opgave, hvori de opnåede den største gennemsnitlige procentdel af de mulige point, efterfulgt af 52,6% i **Opgave D.6** og 39,5% i **Opgave D.3**. Netop **Opgave D.2** omhandlende indtegnelsen af stedvektorer i et koordinatsystem, givet deres indgange, mens **Opgave D.6** omhandlede bestemmelse af en vektor, $\vec{x}$, der løste en ligning indeholdende et vektoradditionsstykke. Slutteligt omhandlede **Opgave D.3** indtegnelsen af to givne vektorer samt vektoren givet ved disse vektorers sum. Heraf kan det ses, at de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, havde bedst forståelse for den grafiske repræsentation af vektorer, i form af indtegnelse af disse i koordinatsystemer, samt teorien vedrørende addition af vektorer.

Samtidigt ses det, at udelukkende to af disse elever opnåede point i **Opgave D.10**, der bestod af tre delopgaver, der alle omhandler beregningen af et prikproduktet, givet to vektorer. Begge elever besvarede alle delopgaverne korrekt, hvoraf **Opgave D.10(a)** og **(c)**, som tidligere nævnt, ved en fejl var lavet identiske. Dog, som nævnt i **Afsnit 8.1**, blev eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning i klasse 2, ikke undervist i prikproduktet grundet tidsmangel. Da **Opgave D.10** netop omhandler beregningen af prikprodukter, er det forventeligt, at antallet af elever, der optjente point i denne opgave, var lavt. Antallet bør dog ikke forventes at have været fordoblet, hvis klasse 2 havde modtaget undervisning i prikproduktet, da denne klasse kun bestod af omtrent halvt så mange elever som klasse 1.

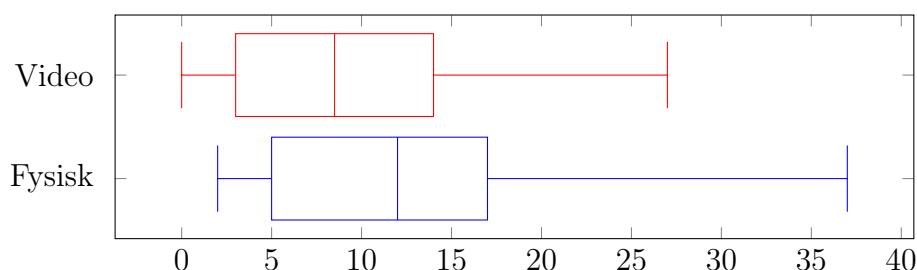
Altså kan det ses, at de største styrker blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, lå i indtegnelsen af vektorer, beregningen af vektoradditioner og indtegnelsen af vektorer givet ved vektoraddition, samt at løse ligninger indeholdende vektorer, mens deres største udfordringer lå i beregningen af prikprodukter, forståelsen af prikproduktets sammenhæng med vinklen mellem de selvsamme vektorer, samt beregningen af vektoren mellem to punkter, hvad end disse var angivet ved koordinater, eller beskrevet via deres indbyrdes placering.

10.4 Sammenligning af prøvebesvarelseserne

Det ses i de tidligere afsnit, at eleverne, uanset om de modtog videoundervisning eller fysisk klasseværelsesundervisning, faldt i gennemsnitlig procentvis pointoptjening. De elever, der modtog videoundervisning, faldt, som nævnt i **Afsnit 10.2**, med 3,9 procentpoint, mens de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, faldt, som nævnt i **Afsnit 10.3**, med 0,7 procentpoint. Dette tyder på, at den afsluttende prøve umiddelbart var sværere end den indledende prøve. Foruden det generelle fald i procentvis pointoptjening, ses det, at videoundervisningen generelt medførte lavere pointoptjening i den afsluttende prøve, og ligeledes resulterede i, at hele fire elever optjente 0 point i denne prøve.

Afslutningsvis, i både **Afsnit 10.2** og **Afsnit 10.3**, blev de to hold elevers generelle styrker og svagheder inden for vektorregning beskrevet. Her ses det tydeligt, at det var gennemgående for begge hold, at deres styrker lå i indtegningen af vektorer. Samtidigt var det gennemgående for begge hold, at de var udfordrede i beregningen af prikproduktet mellem to vektorer, bestemmelsen af vinklen mellem to vektorer, samt beregningen af vektoren mellem to punkter. Dog adskiller holdene sig ved, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, udmærkede sig ved at klare sig godt i **Opgave D.6**, hvori der skulle løses en ligning indeholdende et vektoradditionsstykke. Dette ansås ikke som en styrke ved eleverne der modtog videoundervisning.

Indtegnes de to boksploot fra henholdsvis **Figur 10.1** og **Figur 10.2** over hinanden, som i **Figur 10.3**, ses det, at eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning generelt klarede dig bedst.



Figur 10.3: De to boksploot over resultaterne af de afsluttende prøver, som set i **Figur 10.1** og **Figur 10.2**

Både den mindste og største værdi, samt nedre kvartil, median og øvre kvartil, for eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, er højere end de tilsvarende værdier for eleverne der modtog videoundervisning, hvilket afspejler en højere generel og gennemsnitlig forståelse af det gennemgåede teori. Boksplottene ligner hinanden i struktur, idet de begge er højreskæve, mens der er betydeligt mindre pointforskel blandt eleverne fra videoundervisningen, der ligger i den øvre kvartil, end hos eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Det ses ligeledes, at spredningen mellem medianen og den nedre kvartil er større hos eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, end hos eleverne der modtog videoundervisning.

Baseret på boksplottene, og det præsenterede data i **Afsnit 10.2** og **Afsnit 10.3**, kan det antages, at den fysiske klasseværelsesundervisning var bedre til at stimulere de stærke elever, mens videoundervisningen resulterede i et mere jævnt niveau blandt eleverne, omend dette niveau gennemsnitligt var lavere end blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning.

På den følgende side ses **Tabel 10.7**, der beskriver den gennemsnitlige pointforskel blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, og eleverne, der modtog videoundervisning. Skrives forskellen med blå, har eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning optjent gennemsnitligt flere point end eleverne, der modtog videoundervisning, mens røde tal angiver det inverse tilfælde. Som tidligere nævnt, besvarede ingen af eleverne **Opgave D.9**, **Opgave D.12** eller **Opgave D.13** korrekt, hvorfor der naturligvis ikke er nogen pointforskel i disse, der ligeledes er indskrevet med sorte tal.

I **Tabel 10.7** ses det, at eleverne, der modtog videoundervisning, udelukkende optjente flere point, end eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, i **Opgave D.4**, da **Opgave D.11**, som tidligere nævnt, ikke medregnes, grundet opgavens upræcise formulering, der medførte optjening af point, der ikke var retvisende for elevernes forståelse af emnet. Ydermere modtog eleverne fra klasse 2, der deltog i den fysiske klasseværelsesundervisning, ikke undervisning i prikproduktet, som **Opgave D.11** netop omhandler. Altså kunne det tyde på, at videoundervisningen umiddelbart gav bedre indblik i den grafiske repræsentation af vektorsubtraktion, da dette netop var emnet i **Opgave D.4**. Det ses, at

eleverne, der modtog videoundervisning, gennemsnitligt optjente 19,9 procentpoint mere, af de mulige point i **Opgave D.4**, end eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Denne procentpointmæssige forskel svarer til, at eleverne, der modtog videoundervisning, gennemsnitlig optjener cirka $\frac{19}{20}$ af de point, som eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, gennemsnitligt optjente i denne opgave, mere end de elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Udover dette ses det, at eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning klarede sig bedre i **Opgave D.2**, **Opgave D.3**, **Opgave D.5**, **Opgave D.6**, **Opgave D.7**, **Opgave D.8** og **Opgave D.10**.

Opgave	Gennemsnitlig pointforskel	Gennemsnitlig procentforskel
D.2	0,21	7,1%
D.3	0,44	11,1%
D.4	0,60	19,9%
D.5	1,75	21,9%
D.6	1,72	34,4%
D.7	0,30	7,4%
D.8	0,32	5,3%
D.9	0	0%
D.10	0,13	1,4%
D.11	0,43	3,6%
D.12	0	0%
D.13	0	0%

Tabel 10.7: Sammenligning mellem de gennemsnitlige pointoptjener i den afsluttende prøve

Pointforskellene mellem de to hold elever i **Opgave D.2** og **Opgave D.10**, er dog så små, at de cirka svarer til henholdsvis én ottendedel og én sjettedel af videomodtagernes gennemsnitlige point i disse opgaver. Det er klart, at en så lille pointforskel ikke medfører en signifikant forskel i undervisningsudbyttet mellem eleverne, der modtog videoundervisning, og eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Ud fra dette bedømmes de to hold til at have omtrent identiske forståelser for både indtegningen af stedvektorer i koordinatsystemer, givet deres indgange, og udregningen af prikprodukter, til trods for, at nogle af eleverne fra den fysiske klasseværelsesundervisning, som nævnt, ikke modtog undervisning i teorierne vedrørende prikproduktet.

Pointforskellen i **Opgave D.7** er den tredjemindste, omend den gennemsnitlige procentforskel kun er fjerdemindst. Pointforskellen på 0,30 ses til at svare til 54% af de point, som eleverne, der modtog videoundervisning gennemsnitligt optjente i denne opgave. Denne opgave omhandlede isoleringen af et tal i en vektorligning, og nærmest samme lille forskel ses i opgave **Opgave D.3**, der omhandler indtegningen af to vektorer samt vektoren givet ved deres sum. Pointforskellen i sidstnævnte opgave svarer til lidt over $\frac{1}{3}$ af det gennemsnitlige antal point, som eleverne der modtog videoundervisning, optjente i opgaven.

Årsagen til, at **Opgave D.8** ikke betegnes som en opgave, hvor den gennemsnitlige pointforskel er lav, skyldes at ingen af eleverne, der modtog videoundervisning, besvarede opgaven korrekt, hvorfor pointforskellen på 0,32 blot er den gennemsnitlige pointoptjening blandt eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning.

Slutteligt ses det, at der er stor forskel på den relative pointoptjening i **Opgave D.5**, **Opgave D.6** og netop **Opgave D.8**. I **Opgave D.5** svarer pointforskellen til cirka $\frac{5}{4}$ af de point, som eleverne der modtog video gennemsnitligt optjente, mens pointforskellen i **Opgave D.6** svarer til cirka $\frac{19}{10}$ af disse elevers gennemsnitligt optjente point. **Opgave D.5** omhandler beregningen af vektoradditioner med skalerede vektorer, mens **Opgave D.6** omhandler bestemmelsen af en vektor, der løser et vektoradditionsstykke. Altså bedømmes det ud fra resultaterne af **Opgave D.3**, **Opgave D.5**, **Opgave D.6** og **Opgave D.7**, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, havde et større udbytte af teorien vedrørende vektoraddition og ligningsløsning med vektorer, end eleverne, der modtog video-

undervisning. Ligeledes vurderes det ud fra **Opgave D.8**, at teorien vedrørende vektorer mellem to punkter bedst beskrives gennem fysisk klasseværelsesundervisning, frem for videoundervisning.

Ud fra dette ses det, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, havde en bedre forståelse for, hvordan man kan indtegne vektorer i koordinatsystemer, hvis man kender vektorernes indgange, samt hvordan man beregner et prikprodukt, til trods for, at ét af de to hold, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, ikke modtog undervisning i sidstnævnte emne. Slutteligt opnåede eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, en betydeligt bedre forståelse for skalering af vektorer, bestemmelsen af en vektor til løsning af en ligning, samt bestemmelsen af en vektor mellem to givne punkter. Helt generelt opnåede eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, en både bredere og dybere forståelse for de gennemgåede emner og teorier, idet den gennemsnitlige samlede pointoptjening blandt eleverne, der modtog videoundervisning, svarede til cirka 70,1% af pointene optjent af eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning.

Ses der helt bort fra **Opgave D.11**, ændres det gennemsnitlige antal opnåede point blandt eleverne, der modtog videoundervisning, til cirka 7,73, mens eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, gennemsnitligt optjente 12 point. Dette svarer til, at eleverne, der modtog videoundervisning, gennemsnitligt optjente 64,4% af de point, som eleverne der modtog fysisk undervisning opnåede.

Som tidligere nævnt, blev eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning i klasse 2, ikke undervist i prikproduktet samt dets sammenhæng med vinklen mellem to vektorer. Ses der af denne grund ligeledes bort fra **Opgave D.10**, **Opgave D.12** og **Opgave D.13**, optjente eleverne, der modtog videoundervisning gennemsnitligt 6,91 point, mens eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, gennemsnitligt opnåede 11,05 point. Derved udgør pointene optjent af eleverne der modtog videoundervisning cirka 62,5% af pointene optjent af eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Altså forstørredes forskellen mellem de gennemsnitlige pointoptjening, jo flere opgaver, der vurderedes som ugyldige. Dog gjaldt det i alle tilfælde, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, klarede sig bedre end de elever, der modtog videoundervisning.

11 | Signifikans af undersøgelsen

Ud fra det data, der blev præsenteret i **Kapitel 10**, undersøges det nu, hvorvidt forskellene i besvarelsenerne af de forskellige opgaver, i den afsluttende prøve, er signifikante nok til at påvise sammenhænge mellem elevernes præstationer i den afsluttende prøve og hvilken type undervisning, de modtog. Anvendes de gennemsnitlige point, som eleverne modtog i hver af opgaverne, som set i **Tabel 10.3** og **Tabel 10.6**, kan der laves en χ^2 -uafhængighedstest af disse. Specialeforfatterne har valgt at gøre brug af en χ^2 -uafhængighedstest frem for eksempelvis en t -test, da det ikke med tilstrækkelig sikkerhed kan påvises, at pointoptjeningerne i de forskellige opgaver er normalfordelte, hvorfor en ikke-parametrisk uafhængighedstest er valgt.

Til at udføre uafhængighedstestene anvendes CAS-værktøjet **Maple**, hvor der gøres brug af funktionen `ChiKvadratUtest`, der findes i **Gym**-pakken. CAS-værktøjet, og dets indbyggede funktion, anvendes for at reducere sandsynligheden for menneskelige fejl, der som udgangspunkt kun kan finde sted ved indtastning af forkerte værdier, eller ukorrekt aflæsning af resultaterne. **Maple** angiver ingen betingelser for brugen af `ChiKvadratUtest`, eller den tilsvarende `ChiSquareIndependenceTest`, hvorfor det må antages, at programmet selv anvender de korrekte korrektionsmetoder for at lave uafhængighedstest på datasættet.

De observerede data, der indgår i uafhængighedstestene ses i **Tabel 11.1**. Som det ses er **Opgave D.11** fravalgt grundet den uheldige opgaveformulering, og ligeledes analyseres der ikke på **Opgave D.9**, **Opgave D.12** og **Opgave D.13**, da ingen af eleverne optjente point i disse opgaver, hvormed der på ingen måde kan påvises nogen form for afhængighed.

Opgave	Gennemsnit blandt eleverne der modtog videoundervisning	Gennemsnit blandt eleverne der modtog fysisk klasseværelseundervisning
D.2	1,68	1,89
D.3	1,14	1,58
D.4	1,23	0,63
D.5	1,41	3,16
D.6	0,91	2,63
D.7	0,54	0,84
D.8	0	0,32
D.10	0,82	0,95

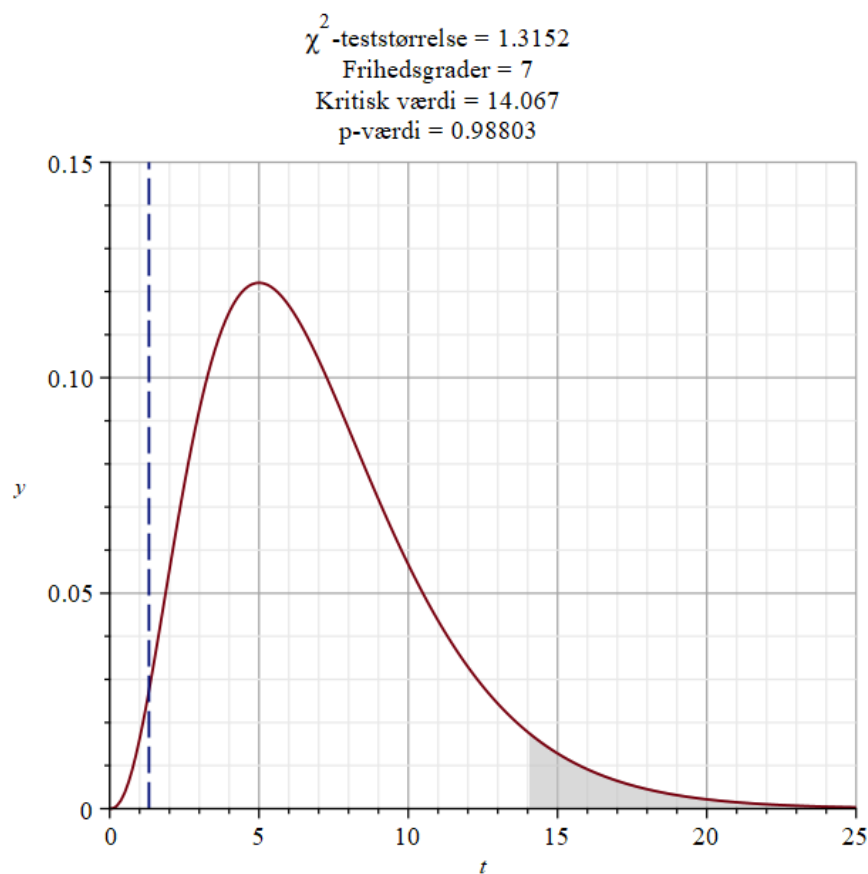
Tabel 11.1: De observerede gennemsnitlige point opnået i den afsluttende prøve

Ud fra de observerede data, kan de forventede data beregnes. Disse findes i **Tabel 11.2**, hvor **Opgave D.9**, **Opgave D.11**, **Opgave D.12** og **Opgave D.13** naturligvis ej heller inkluderes. Værdierne i **Tabel 11.2** er afrundede, hvorfor de forventede værdier for **Opgave D.7** i realiteten ikke er identiske med de observerede værdier, men dog alligevel tilpas tætte til at blive betragtet som værende identiske. Udover denne opgave, ses det, at de forventede gennemsnitlige point for eleverne, der modtog videoundervisning, er højere end den observerede værdier i **Opgave D.5**, **Opgave D.6** og **Opgave D.8**, mens de er lavere i de resterende opgaver. Det omvendte er naturligvis tilfældet for eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning.

Opgave	Forventet gennemsnit blandt eleverne der modtog video- undervisning	Forventet gennemsnit blandt eleverne der modtog fysisk klasse- værelseundervisning
D.2	1,40	2,17
D.3	1,07	1,65
D.4	0,73	1,13
D.5	1,79	2,78
D.6	1,39	2,15
D.7	0,54	0,84
D.8	0,13	0,19
D.10	0,69	1,08

Tabel 11.2: De forventede gennemsnitlige point opnået i den afsluttende prøve

De observerede og forventede værdier, blev indtastet i **Maple**, hvorefter χ^2 -uafhængighedstesten blev udført. Resultatet af denne uafhængighedstest ses i **Figur 11.1**. Eftersom der laves test på to grupperes besvarelser af otte forskellige opgaver, er der syv frihedsgrader i testen. Der beregnes en kritisk værdi på cirka 14,07, samt en χ^2 -teststørrelse på cirka 1,32, og en p-værdi på omkring 0,99. Altså viser den observerede data ikke en signifikant nok forskel til, at der kan påvises generel sammenhæng mellem resultaterne af den afsluttende prøve, og elevernes modtagne type undervisning.



Figur 11.1: χ^2 -plottet for de gennemsnitlige point

Udover uafhængighedstesten ovenover, kan der laves yderligere uafhængighedstest for de individuelle opgaver. I stedet for at anvende de gennemsnitlige point for disse opgaver, kigges der i stedet på, hvor mange elever der optjente point i opgaverne, og mere præcist: Antallet af elever, der har optjent de forskellige muligheder af point i opgaverne. Eksempelvis ses det i **Opgave D.5**, at eleverne kan optjene enten 0, 2, 3, 5, 6 eller 8 point, da det ene underspørgsmål krediteres med 2 point, og de to andre krediteres med 3 point hver.

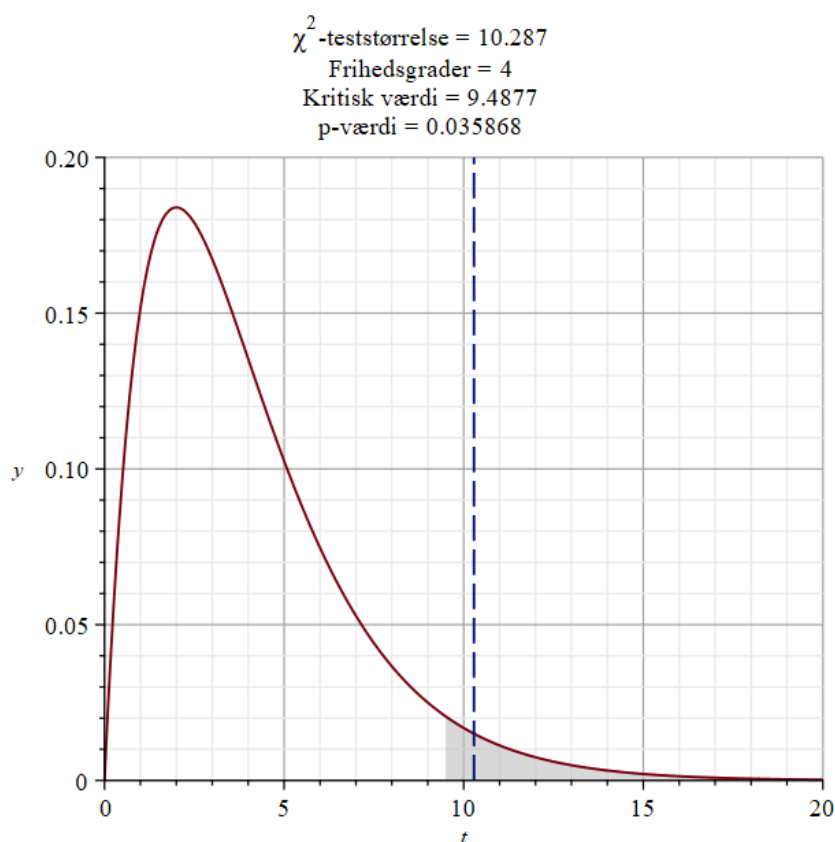
I **Tabel 11.3** ses det, hvor mange elever, opdelt efter deres modtagne type undervisning, der har optjent de forskellige muligheder for point i netop **Opgave D.5**. Her ses det, at 14 af eleverne, der modtog videoundervisning, ikke optjente point overhovedet, til stor forskel fra eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, eftersom det kun var tre af disse, der ikke optjente nogen point. Ligeledes ses det, at fire af eleverne, der modtog

videoundervisning, optjente to point, i modsætning til 8 af eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning. Ingen af eleverne optjente tre point, mens tre af eleverne, der modtog videoundervisning, optjente fem point, hvor antallet blandt eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, var fordoblet, idet seks af disse elever optjente 5 point. Én af eleverne, fra den fysiske klasseværelsesundervisning, optjente 6 point, mens én elev fra hvert hold formåede at optjene det højeste mulige antal point, nemlig 8.

Point	Antal elever der modtog videoundervisning	Antal elever der modtog fysisk klasseværelsesundervisning
0	14	3
2	4	8
3	0	0
5	3	6
6	0	1
8	1	1

Tabel 11.3: Antallet af elever der optjente de mulige antal point i **Opgave D.5**, opdelt efter elevernes modtagne type undervisning

Laves der en χ^2 -uafhængighedstest over disse data, resulterer det i det plot, som ses i **Figur 11.2**. Med seks mulige pointsummer at optjene, og de samme to grupper som tidligere, er der fire frihedsgrader, hvorfor den kritiske værdi for denne test er cirka 9,49. χ^2 -teststørrelsen udregnes til at være omkring 10,29, hvorfor testens p-værdi cirka bliver 0,036. Da denne er mindre end signifikansniveauet på 5%, kan det altså konkluderes med 95% sandsynlighed, at resultatet af **Opgave D.5** netop afhænger af, hvorvidt eleverne modtog videoundervisning eller fysisk klasseværelsesundervisning. Altså kan det konkluderes, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning fik større udbytte af undervisningen vedrørende additionen af vektorer samt additionen af skalerede vektorer.



Figur 11.2: χ^2 -plottet over pointfordelingen i **Opgave D.5**

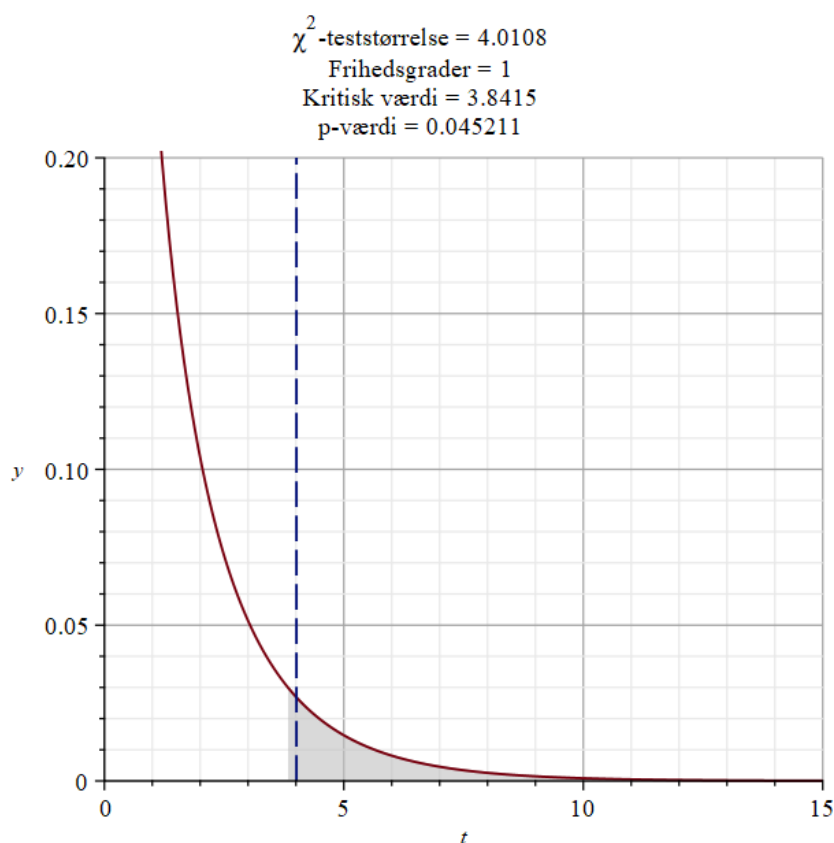
Foruden resultaterne af uafhængighedstesten for **Opgave D.5**, findes resultaterne af uafhængighedstestene for **Opgave D.6** og **Opgave D.8** ligeledes interessante. Nedenfor, i **Tabel 11.4**, ses antallet af elever, der optjente de mulige point i **Opgave D.6**, opdelt efter deres modtagne type undervisning. Da **Opgave D.6** udelukkende bestod af ét spørgsmål, kunne eleverne enten optjene ingen point, eller alle fem mulige point.

Point	Antal elever der modtog videoundervisning	Antal elever der modtog fysisk klasseværelsesundervisning
0	18	10
5	4	9

Tabel 11.4: Antallet af elever der optjente de mulige antal point i **Opgave D.6**, opdelt efter elevernes modtagne type undervisning

Det ses i **Tabel 11.4**, at blandt de 22 elever, som modtog videoundervisning, optjente kun fire af dem de mulige fem point, mens de resterende 18 ikke optjente nogen point. Samtidigt ses det, at blandt de 19 elever, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, optjente ni af disse ingen point, mens 10 optjente de maksimale fem point.

Uafhængighedstesten for **Opgave D.6** ses i **Figur 11.3**. Da opgaven kun kan resultere i to mulige pointoptjeninger, og uafhængighedstesten laves over de to samme grupper som tidligere, er der kun én frihedsgrad i denne test. Dette resulterer i en kritisk værdi på omkring 3,84, mens χ^2 -teststørrelsen angives til cirka 4,01, med en tilsvarende p-værdi på 0,045, der er lavere end signifikansniveauet på 5%.



Figur 11.3: χ^2 -plottet over pointfordelingen **Opgave D.6**

Der kan altså også ved denne opgave ses en forskel på pointfordelingerne blandt eleverne, som er signifikant nok til, at det kan konkluderes, at der er en sammenhæng mellem hvor godt eleverne har besvaret **Opgave D.6**, og hvilken type undervisning de har modtaget.

Da denne opgave omhandlede bestemmelsen af hvilken vektor $\vec{x}$, der opfyldte en givet ligning indeholdende et vektoradditionsstykke, kan det konkluderes, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, nemmere kunne løse ligninger indeholdende vektorer, der ligeledes stemmer godt overens med den påviste sammenhæng i **Opgave D.5**, omhandlende addition af vektorer.

Kigges der i stedet på **Opgave D.8**, bemærkes det først, at denne er inddelt i delopgaver, hvorfor det er muligt for eleverne enten at optjene henholdsvis 0, 2, 4 eller 6 point. Antallet af elever, der har optjent hver af disse pointmuligheder, ses i **Tabel 11.5**. Som tidligere nævnt, og som det kan ses i **Tabel 11.5**, optjente ingen af eleverne, der modtog videoundervisning, point i denne opgave, mens tre af eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, besvarede første delopgave korrekt, og dermed optjente 2 point. Denne opgave var den eneste, hvor ingen af eleverne fra det ene hold optjente point, mens der blev optjent point blandt nogle af eleverne på det andet hold.

Point	Antal videomodtagere	Antal fysisk modtagende
0	22	16
2	0	3
4	0	0
6	0	0

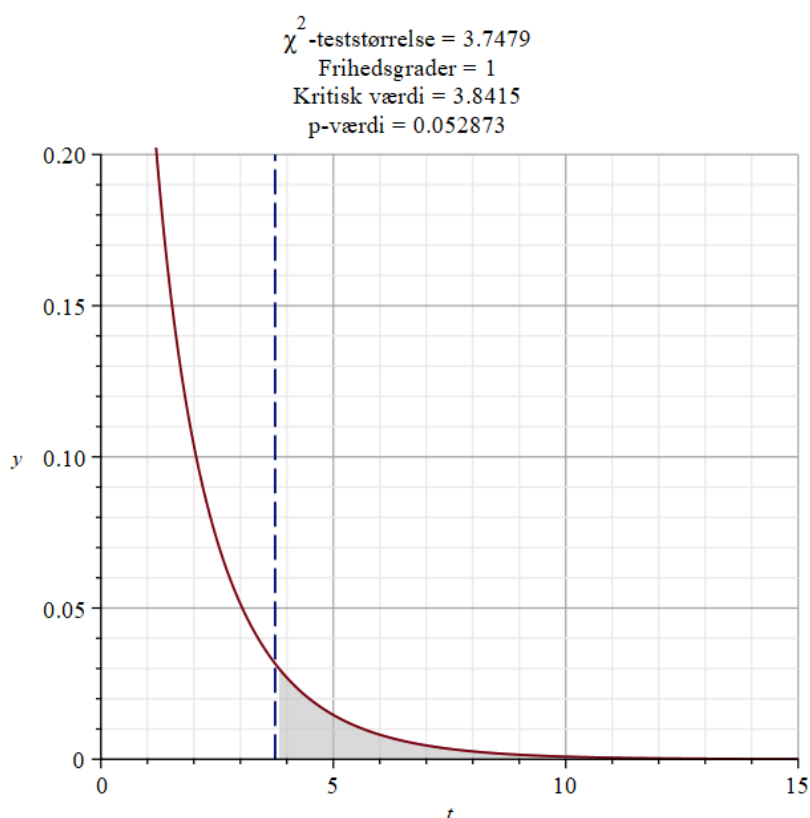
Tabel 11.5: Optælling af hvor mange elever i de to hold der optjente hvor mange point i **Opgave D.8**

På den følgende side ses **Figur 11.4**, der er plottet over uafhængighedstesten af **Opgave D.8**. Eftersom uafhængighedstesten i **Maple** printede en fejl, hvis der blev indtastet hele nulrækker, eller nulsøjler, af observeret data i **ChiKvadratUtest**-funktionen, blev der udelukkende lavet uafhængighedstest på de to øverste rækker af **Tabel 11.5**. Fejlen skyldes at χ^2 -teststørrelsen beregnes ved hjælp af formlen i (11.1)

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^k \frac{(O_{ij} - F_{ij})^2}{F_{ij}} \quad (11.1)$$

hvor O_{ij} betegner den observerede værdi i indgangen (i, j) , og F_{ij} betegner den forventede værdi af samme indgang. Den forventede værdi i en nulrække eller -søjle er 0, hvorfor der i beregningen af χ^2 -teststørrelsen ville indgå division med 0, hvis disse rækker eller søjler medtages. Af denne grund indgår de mulige pointoptjening, som ingen af eleverne har optjent, ikke i uafhængighedstestene.

Da de sidste to rækker forkastes, er der kun én frihedsgrad i denne test. Dette giver en kritiske værdi på cirka 3,84, mens χ^2 -teststørrelsen bestemmes til at være omtrent 3,75. Dette giver en p-værdi på omkring 0,053, hvorfor der lige præcis ikke kan konkluderes, at der er sammenhæng mellem hvor godt eleverne klarer sig i **Opgave D.8** og hvilken type undervisning, de modtog.



Figur 11.4: χ^2 -plottet over pointfordelingen i **Opgave D.8**

Opgave D.8 omhandlede bestemmelsen af vektoren mellem to punkter, hvilket ikke indgår i nogen af de signifikante opgaver, hvorfor elevernes udfordringer med teorien bag dette emne ikke kan konkluderes til at være sammenhængende med, hvorvidt de undervises gennem videomediet eller ved fysisk klasseværelsesundervisning.

De resterende χ^2 -uafhængighedstest er ligeledes blevet udført i forbindelse med denne undersøgelse. Disse resulterede alle i en p-værdi på over 0,085. Derved kan det altså ikke definitivt konkluderes, at der er afhængighed mellem, hvor godt eleverne klarede sig i de resterende opgaver, og hvilken type undervisning de modtog.

Dette afslutter specialerapportens analyse, der opfølges af en diskussion omhandlende de anvendte teorier og de opnåede resultater, inden der til sidst afrundes med en konklusion på undersøgelsen.

12 | Diskussion

I dette kapitel diskuteres undersøgelsens resultater, mens eventuelle fejlkilder og potentielle mangler i undersøgelsen ligeledes behandles.

Det er klart, at undersøgelsens helt essentielle data stammer fra de deltagende gymnasieelevers besvarelser af den afsluttende prøve og de afsluttende spørgeskemaer. Eleverne besvarede som udgangspunkt prøven og spørgeskemaerne i samme rum, som de havde modtaget undervisning i, umiddelbart efter denne var slut. I rummet var ligeledes den specialeforfatter, der havde stået for den pågældende type undervisning i den pågældende klasse, samt klassens matematiklærer, hos de elever der havde modtaget fysisk klasseværelsesundervisning. Som udgangspunkt var eleverne placeret på en sådan måde, at der var minimum én siddeplads mellem dem hver, hvorfor prøverne og spørgeskemaerne betragtes som værende udfyldt under prøvelignende forhold. Disse kalder Bryman (2016) for "supervised self-administered questionnaires" (s. 221), hvor det ligeledes antages, at respondenterne for det meste afgiver sandfærdige besvarelser, omend spørgeskemabesvarelserne potentielt kan være blevet mindre ekstreme af, at disse blev udført i samme lokale som de resterende respondenter, som nævnt i **Afsnit 2.3**. Dog gjaldt det for nogle af de elever, der modtog videoundervisning, at undervisningsvideoen blev set i grupper af to eller tre, hvilket medførte, at den afsluttende prøve, og det afsluttende spørgeskema, begge blev udarbejdet uden mellemrum mellem eleverne, og med relativt meget samtale undervejs. Dette kan selvsagt have haft indflydelse på, hvordan disse elever besvarede både den afsluttende prøve og det afsluttende spørgeskema, hvor det hos spørgeskemaet kan forventes, at besvarelserne bliver mindre ekstreme, grundet elevernes følelse af, at deres klassekammerater potentielt kunne 'kigge med'. Besvarelserne fra disse elever blev skimmet af specialeforfatteren, der var til stede ved den pågældende videoundervisning, for at kontrollere, at de var tilpas forskellige, hvilket blev vurderet til at være tilfældet. Besvarelserne fra disse elever blev derfor ikke sorteret fra, da de potentielle ændringer ved både den afsluttende prøve og det afsluttende spørgeskema, blev anset som værende

minimale, set i forhold til, hvis eleverne havde siddet adskilt.

Som det ses i besvarelsene af de indledende og afsluttende spørgeskemaer, så har de adspurgte gymnasieelever generelt et negativt syn på videoundervisning. Dette antages primært at skyldes COVID-19-pandemien, der fandt sted i løbet af gymnasieelevernes tid i udskolingen. Her har de antageligvis modtaget forskellige typer af videoundervisning, der har skulle planlægges inden for en relativ kort tidsramme, der må antages at have påvirket kvaliteten af undervisning, og dermed også læringsudbyttet af disse undervisningstimer, på baggrund af Christensen et al. (2022). Da eleverne herigennem har haft negative oplevelser med videoundervisning, og videomediet ej heller er 'nyt og spændende' som undervisningsmedie, er det forventeligt, at eleverne ikke opfattede specialeforfatterens planlagte videoundervisningsforløb som interessant eller nyt, og derfor måske ej heller ydede samme indsats, eller så videoen med samme grad af koncentration, som de potentielt ville have gjort, hvis de ikke tidligere havde stiftet bekendtskab med videoundervisning.

For spørgeskemaerne gælder det ligeledes, at eleverne, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, potentielt manglede et spørgsmål vedrørende undervisningens længde og mængde af indhold. Eleverne blev kun adspurgt, hvor god tid de syntes de havde til at tage noter, ikke hvorvidt de havde tid nok til at forstå al teorien, der blev gennemgået, samt om der blev gennemgået for meget teori. Som tidligere nævnt, blev det, efter første fysiske klasseværelsesundervisning, besluttet af specialeforfatterne, at der netop blev gennemgået for meget teori, hvorfor teorien vedrørende prikproduktet blev frasorteret ved næste fysiske klasseværelsesundervisning, da specialeforfatterne ikke ønskede at gå på kompromis med mængden af medrivende dialog og elevdeltagelse. Disse store mængder teori og medrivende dialog medførte, at det første hold, der modtog fysisk klasseværelsesundervisning, ikke havde mulighed for at besvare den afsluttende prøve samme dag som de modtog undervisning, og derfor måtte vente til dagen efter. Dermed havde de ikke de præcise forudsætninger og forhold, som var tiltænkt, og som gjorde sig gældende for de andre hold, hvilket ligeledes kan have påvirket resultaterne. Dels kan eleverne have glemt mere af den gennemgængede teori, og dels har de haft mulighed for at læse op på teorien i deres fritid mellem de to sessioner, hvilket opfattes som værende usandsynligt. Som udgangspunkt opfattes dette

altså udelukkende til at have haft potentiel negativ effekt på disse elevers pointoptjening i den afsluttende prøve, hvilket kan have svækket signifikansen af undersøgelsen. Eleverne, der først besvarede den afsluttede prøve dagen efter de modtog fysisk klasseværelsesundervisning, optjente dog i gennemsnit stadig flere point end eleverne, der modtog video-undervisning.

Ydermere blev det, som tidligere nævnt, valgt, at de to klasser skulle undervises af hver sin specialeforfatter, efter den første klasse skulle vente med at besvare den afsluttende prøve til dagen efter, grundet tidsmangel i den første fysiske klasseværelsesundervisning. Dette udelukkede muligheden for identiske undervisninger i de to klasser, hvilken alligevel ansås som værende så godt som umuligt, grundet undervisningens fokus på medrivende dialog og elevinddragelse. Specialeforfatteren, der skulle undervise det andet hold i deres fysiske klasseværelsesundervisning, brugte tid på at se videoer af, og analysere på, den første klasseværelsesundervisning, som forberedelse, for at sikre, at undervisningerne alligevel blev relativt ensartede. Af denne grund antages dette skift i den undervisende specialeforfatter ikke som havende haft stor indflydelse på undersøgelsens resultater.

Dette omtalte fokus på medrivende dialog, var centralt for undersøgelsen, da videomediets muligheder netop skulle sammenlignes med fysisk klasseværelsesundervisning af høj kvalitet, og med høj elevdeltagelse, da eleverne selvsagt ikke kan deltage i asynkron videoundervisning. Som det sås i besvarelserne af **Spørgsmål F.8**, var der tre elever, der vurderede, at de indgik *Lidt* i den medrivende dialog, mens fire elever vurderede deres egen deltagelse som *Minimalt*. Eleverne blev ikke adspurgt hvorfor de ikke indgik mere i den medrivende dialog, der potentielt kan skyldes nervøsitet, følelsen af at forstyrre sine klassekammerater, der kan ses i svarene til **Spørgsmål F.5**, eller blot fordi, de ikke havde forstået teorien, eller havde tid nok til at tænke over emnet, inden en anden klassekammerat fik ordet. Til trods for dette vurderer specialeforfatterne dog mængden af den medrivende dialog til at være en succes, selvom denne ofte foregik mellem de samme tre til fire elever i hver klasse. Det ses ligeledes af svarene af **Spørgsmål F.7**, at store dele af de deltagende gymnasieelever fik stort udbytte af at lytte til deres klassekammerater indgå i den medrivende dialog.

Endnu en faktor, der antages at have spillet ind i besvarelsene af samtlige prøver og spørgeskemaer, er lovningen om, at eleverne havde fri, når de var færdige med at løse den prøve og det spørgeskema, de fik udleveret den pågældende dag. Det er vanskeligt, konkret at vurdere, hvor stor indflydelse dette har haft på besvarelsene, da dette ville kræve en lignende undersøgelse, udført på en gruppe af elever, der ikke blev lovet fri, når de havde færdiggjort deres besvarelses. Denne lovning om fri antages at have haft indflydelse på den store mængde af elever, der opgav at besvare flere af opgaverne. Da eleverne ikke fik lov at gå, når de selv var færdige, men det i stedet gjaldt, at alle elever fik fri, når alle havde besvaret prøven og spørgeskemaet, kan de elever, der ellers havde lyst til at yde en ekstra indsats for at besvare opgaverne, følt skyld over, at holde på de af deres klassekammerater, der var færdige med at besvare prøven og spørgeskemaet. Dette kan have medført, at disse elever skyndte sig med at besvare de sidste opgaver, da de opdagede, at de var de sidste, der stadig arbejdede på prøven, hvilket potentielt kan forklare, hvorfor ingen af eleverne har svaret adskillige af de sidste opgaver, i både den indledende og afsluttende prøve, korrekt. Da undersøgelsen blev udført i de pågældende klassers første modul efter deres samling, på baggrund af elevernes valg af studieretning i slutningen af deres gymnasiale grundforløb, antages det, at eleverne som udgangspunkt ikke havde det store kendskab til hinandens matematiske niveau, hvorfor de elever, der netop sad sidst tilbage med prøverne, kunne få en opfattelse af, at de kom til at fremstå 'dumme' over for deres klassekammerater, hvis ikke de skyndte sig at besvare prøven, ligesom deres klassekammerater. Størstedelen af eleverne havde, som det kunne ses i løbet af rapporten, store udfordringer med prøverne, hvilket naturligvis ikke var kendt blandt eleverne under udførelserne af disse. Derfor kunne eleverne, der brugte lang tid på opgaverne netop tro, at de klassekammerater, der havde afleveret prøven hurtigt, havde haft nemt ved den, og havde besvaret alle opgaverne korrekt. Dette var dog på ingen måde tilfældet, da eleverne, der afleverede tidligt, i stedet havde besvaret et fåtal af opgaver korrekt, og blot opgivet at besvare resten. Denne effekt blev ligeledes forstærket af, at specialeforfatterne indsamlede prøver og spørgeskemaer løbende, i takt med, at eleverne markerede, at de var færdige. Dette gjorde det endnu tydeligere, hvilke elever der var færdige, og hvilke elever der stadig arbejdede.

Slutteligt bør det nævnes, at videomediet ikke havde mulighed for at komme til sin fulde ret, i løbet af denne undersøgelse. Specialeforfatterne vurderer, som det også vil fremgå af konklusionen, at videomediet er bedst egnet som erstatning for lektier i en form for 'flipped classroom'-model, hvor eleverne ser en undervisningsvideo derhjemme, hvorefter de mødes på skolen den følgende dag, og arbejder med de teorier og emner, der er blevet gennemgået i videoen, naturligvis med assistance fra deres lærer. Det blev valgt, at dette ikke skulle være måden, hvorpå videomediet blev inddraget i denne undersøgelse, da specialeforfatterne betvivlede, hvor stort et antal af de deltagende gymnasieelever, der havde set undervisningsvideoen, havde denne været blevet præsenteret som lektier til næste gang, specialeforfatterne besøgte klassen. Af denne grund blev det valgt, at undervisningsvideoen skulle ses på skolen, mens specialeforfatterne var til stede, i håb om, at dette kunne sikre, at samtlige elever, der blev udvalgt til at indgå i videoundervisningen, rent faktisk så den producerede undervisningsvideo. Dette kan ligeledes have haft negativ indvirkning på elevernes syn på undervisningsvideoen, og videomediet som helhed, da videoundervisningen erstattede den fysiske klasseværelsesundervisning, frem for lektier.

Skiftet i hvilken specialeforfatter, der skulle udføre den fysiske klasseværelsesundervisning, medførte naturligvis også et skift i, hvilken specialeforfatter, der skulle varetage videoundervisningen, samt lede den faglige dialog umiddelbart efter, at eleverne var færdige med at se videoen. Ved den første videoundervisning oplevede adskillige af eleverne udfordringer med den gennemgåede teori, hvorfor specialeforfatteren følte sig nødsaget til at gennemgå det grundlæggende teori på tavlen efterfølgende. Dette medførte, at der ikke var tid til en faglig dialog vedrørende de gennemgåede emner, hvorfor de gymnasieelever, der deltog i denne videoundervisning blev instrueret i at vælge svarmuligheden *Minimalt* i **Spørgsmål E.9**, vedrørende graden af deres deltagelse i den faglige dialog efter videoundervisningen. Besvarelsen af netop dette spørgsmål har derfor ikke indgået som et centralt element i analysen af undersøgelsens resultater, da besvarelsene ikke antages at være retvisende for, hvordan eleverne havde indgået i den faglige dialog vedrørende undervisningsvideoen, hvis denne var blevet afholdt under begge videoundervisningssessioner.

Konklusion

Dette speciale har haft til formål at undersøge videomediets mulighed for at indgå i den gymnasiale matematikundervisning, på baggrund af dets affordances, i form af videoundervisning eller som led i et flipped classroom, når disse læringsforløb sammenlignes med fysisk klasseværelsesundervisning, med særligt fokus på medrivende dialog. Gennem en undersøgelse af 41 danske 1.g-elever fra et alment gymnasium, med matematik på B-niveau, kunne der ses tydelige tendenser over elevernes udbytte af henholdsvis videoundervisning og fysisk klasseværelsesundervisning med særligt fokus på medrivende dialog, omend alle disse tendenser ikke var signifikante. Af de 12 opgaver i den afsluttende prøve, hvoraf fire er blevet sorteret fra, baseret på manglende undervisning i det matematiske emne, i den fysiske klasseværelsesundervisning af klasse 2, grundet tidsmangel, samt uhensigtsmæssig opgaveformulering ved den ene opgave, var besvarelsene af to af disse opgaver så forskellige, at der var signifikant forskel på niveauet hos de elever, der havde modtaget videoundervisning, og de elever, der havde modtaget fysisk klasseværelsesundervisning, hvor eleverne der modtog fysisk klasseværelsesundervisning klarede sig bedst.

De signifikante besvarelser findes i opgaver omhandlende teori vedrørende addition af todimensionale vektorer uden brug af koordinatsystem, addition af skaleringer af selvsamme vektorer, samt løsningen af en ligning, hvori der indgik addition eller subtraktion af vektorer. Baseret på dette, bør disse emner som udgangspunkt ikke formidles gennem videomediet, på samme måde, som det blev gjort i denne undersøgelse.

Specialeforfatterne anser flere faktorer for at spille ind på resultatet, hvor den primære opfattes som værende efterslæbet af COVID-19-pandemien. Da de deltagende gymnasieelever alle var en del af udskolingen under COVID-19-pandemien, har de antageligvis deltaget i diverse udgaver af online undervisning, der til en start angiveligvis har været spændende og potentielt engagementfremmende. Denne effekt har dog forladt onlineundervisningen som læringsmiljø, hvorfor størstedelen af de adspurgte gymnasieeleverne nu opfatter videoundervisning som et værre alternativ til fysisk klasseværelsesundervisning.

Baseret på undersøgelsen føler specialeforfatterne sig i stand til at konkludere, at videomediet som asynkront undervisnings- og formidlingsmedie ikke bør erstatte den fysiske klasseværelsesundervisning. I denne sammenhæng opfattes den asynkrone videoundervisning snarere som **gammel vin på nye flasker**, hvor overhældningen til de nye flasker samtidigt har forringet kvaliteten af den gamle vin.

Specialeforfatterne formoder, at videomediet ville udmærke sig, hvis det suppleres af samtaler om det lærte, hvadend disse foregår online, i plenum i et klasselokale, eller på andre platforme og gennem andre medier. Diskussionen af det lærte er med til at korrigere eventuelt fejllært teori, samt skabe en dybere forståelse for teorien, idet eleverne skal videreformidle denne, og derfor bliver bevidste om, hvorvidt de egentligt har lært det gennemgåede eller ej. Videomediet formodes derfor at præstere bedst i en form for 'flipped classroom'-model, hvor eleverne ser videoundervisningen hjemme, der på denne måde erstatter lektierne, hvorefter eleverne mødes på gymnasiet, for at gennemgå undervisningen og laver opgaver i det behandlede teori, med assistance fra deres lærer. Udover dette, kan det ud fra elevernes besvarelser af de afsluttende spørgeskemaer konkluderes, at anvendelsen af medrivende dialog i gymnasial klasseværelsesundervisning gavner elevernes indlæring af matematiske emner. Af denne grund anbefales det, at man gør brug af medrivende dialog i fysisk matematikundervisning på danske ungdomsuddannelser.

Referencer

- Andresen, M. & Dahl, B. (2018). Medrivende dialog som fransk fletning. *Tangenten: Tidsskrift for Matematikkundervisning*, 29(3), 39–47.
https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/468606468/tangenten_3_2018_Andresen_og_Dahl.pdf.
- Beck, S. (2017). *Al den snak om læring: Arven fra Piaget og Vygotsky i socio-eksistentiel belysning*. Frydenlund, 1. udgave. ISBN: 978-87-7118-804-2.
- Boie, M. A. K., Dalsgaard, C., & Caviglia, F. (2020). Det digitale instinkt: Gymnasieelevers digitale praksis. *Tidsskriftet Læring og Medier (LOM)*, 13.
<https://doi.org/10.7146/lom.v13i23.121737>.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers. ISBN: 0-792-34526-6.
- Bryman, A. (2016). *Social Research Methods*. Oxford University. ISBN: 978-0199689453.
- Christensen, J. H., Bundsgaard, J., Kjeldsen, C. C., & Petterson, M. (2022). *Skolen under coronapandemien*. Aarhus Universitetsforlag. ISBN: 978 87 7219 704 3.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>.
- Emerson, R. W. (2017). Likert scales. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 111, 488–488. <https://doi.org/10.1177/0145482X1711100511>.
- Garrison, D. R. & Kanuka, H. (2004). Blended learning: Uncovering its transformative

- potential in higher education. *Internet and Higher Education*, 7(2), 95–105.
<https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2004.02.001>.
- Graham, C. R. (2006). Blended learning systems: Definition, current trends and future directions. I: Bonk, C. J. & Graham, C. R. (Red.), *Handbook of Blended Learning: Global Perspectives, Local Designs*, s. 3–21. Pfeiffer Publishing. ISBN: 978-0-787-97758-0.
- Grønbæk, N., Rasmussen, A.-B., Skott, C. K., Bang-Jensen, J., Jensen, K. B. S., Fajstrup, L., Schou, M. H., Christensen, M., Lumholt, M., Kjærup, R. M., Jørgensen, S., Hansen, S. L., & Markvorsen, S. (2017). Matematikkommissionen - afrapportering. https://backend.orbit.dtu.dk/ws/portalfiles/portal/148756610/170116_Matematikkommissionen_afrapportering_1_.pdf.
- Haaning, K. (2019, 9. oktober). Ny undersøgelse om matematikundervisning på gymnasiet: »eleverne kommer til at vide næsten ingenting om alt«. *Berlingske*. url: <https://www.berlingske.dk/samfund/ny-undersogelse-om-matematikundervisning-pa-gymnasiet-eleverne-kommer-til>, Tilgået 26-11-2022.
- Haythornthwaite, C., Andrews, R., Fransman, J., & Meyers, E. M. (2016). Introduction to the sage handbook of e-learning research, second edition. I: *The SAGE Handbook of E-learning Research*, kapitel 1, s. 3–21. SAGE Publications Ltd. doi: 10.4135/9781848607859.
- Heckler, A. F. & Scaife, T. M. (2015). Adding and subtracting vectors: The problem with the arrow representation. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.*, 11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.010101>.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. I: *Conceptual and procedural knowledge: the case of*

- mathematics*, s. 1–27. Lawrence Erlbaum Associates. ISBN: 0-89859-556-8.
- Hoadley, C. (2016). Online pedagogy from the learning sciences perspective. I: Haythornthwaite, C., Andrews, R., Fransman, J., & Meyers, E. M. (Red.), *The SAGE Handbook of E-learning Research*, kapitel 2, s. 25–43. SAGE Publications Ltd. doi: 10.4135/9781473955011.n2.
- Hrastinski, S. (2019). What do we mean by blended learning? *TechTrends*, 63(1), 564–569. <https://doi.org/10.1007/s11528-019-00375-5>.
- Hutchby, I. (2001). Technologies, texts and affordances. *Sociology*, 35, 441–456. doi: 10.1017/S0038038501000219.
- Hutchby, I. (2014). Communicative affordances and participation frameworks in mediated interaction. *Journal of Pragmatics*, 72, 86–89. <https://doi.org/10.1016/j.pragma.2014.08.012>.
- Kristensen, M. D. & Lie, M. (2022). *Introduktion til vektorer i 2D*. <https://drive.google.com/file/d/1zthndF5ZFui-mJxgzmkRyXvQmj5Gr3ad/view>.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press, New York, NY. ISBN: 0521423740.
- Lave, J. & Wenger, E. (2003). *Situeret læring - og andre tekster*. Gyldendal. ISBN: 87-412-2548-1.
- Matić, L. J. & Dahl, B. (2014). Retention of differential and integral calculus: a case study of a university student in physical chemistry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45, 1167–1187. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.920531>.

- McLuhan, M. (1964). *Understanding Media*. McGraw-Hill. ISBN: 81-14-67535-7.
- Nottingham, J., Nottingham, J., & Renton, M. (2016). *Styrk læringen gennem dialog*. Dafolo. ISBN: 9788771603927.
- Nystrand, M. (1997). Dialogic instruction: When recitation becomes conversation. I: Nystrand, M., Gamoran, A., Kachur, R., & Prendergast, C. (Red.), *Opening dialogue: Understanding the dynamics of language and learning in the english classroom*. Teachers College Press.
<http://class.wceruw.org/documents/Opening%20Dialogue%20Ch%201.pdf>.
- OECD (2015). Students, computers and learning: Making the connection.
<https://doi.org/10.1787/9789264239555-en>.
- Preisendörfer, P. & Wolter, F. (2014). Who is telling the truth?: A validation study on determinants of response behaviour in surveys. *Public Opinion Quarterly*, 78, 126–146.
doi: 10.1093/poq/nft079.
- Prensky, M. (2001). Digital natives, digital immigrants part 1. *On the Horizon*, 9, 1–6.
<https://doi.org/10.1108/10748120110424816>.
- Ramskov, J. (2022, 11. august). Matematiske beviser er blevet tungere og mere uforståelige med årene - selv for eksperterne. *Ingeniøren*. url: <https://ing.dk/artikel/matematiske-beviser-blevet-tungere-mere-uforstaaelige-med-aarene-selv-eksperter-259348>, Tilgået 15-09-2022.
- Reidsema, C., Kavanagh, L., Hadgraft, R., & Smith, N. (2017). *The flipped classroom - Practice and Practices in higher education*. Springer. ISBN: 9811098670.
- Resnick, L. B., Michaels, S., & O'Connor, C. (2010). How (well structured) talks builds

- the mind. I: Preiss, D. D. & Sternberg, R. J. (Red.), *Innovations in educational psychology: Perspectives on learning, teaching and human development*. Springer. ISBN: 978-0-8261-2162-2.
- Rømer, T. A. (2005). Kan sociokulturel teori udtale sig om uddannelse? *Norsk Pedagogisk Tidsskrift*, 89(3), 231–242.
- Schou, M. H. (2018). Hvad sker der i matematikundervisningen? - om overgangen fra grundskole til gymnasium. *Matematik- og Naturfagsdidaktik (MONA)*, 2, 7–23. url: <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/106220>.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36. doi: 10.1007/BF00302715.
- Staker, H. & Horn, M. B. (2012). Classifying k-12 blended learning. url: <http://www.christenseninstitute.org/wp-content/uploads/2013/04/Classifying-K-12-blended-learning.pdf>.
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? - an epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 133–162. url: <https://www.jstor.org/stable/25472063>.
- Tairab, H., Arabi, K. A., Rabbani, L., & Hamad, S. (2020). Examining grade 11 science students' difficulties in learning about vector operations. *Physics Education*, 55. doi: 10.1088/1361-6552/aba107.
- Tall, D. (2018). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematical Education Research Journal*, 20, 5–24. doi: 10.1007/BF03217474.

- Toyama, K. (2015). *Geek heresy: Rescuing social change from the cult of technology*. Public Affairs. ISBN: 978-1610395281.
- Undervisningsministeriet (2017). *Love og bekendtgørelser for elever, som har påbegyndt uddannelsen efter 1. august 2017*. <https://www.uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/love-og-regler/love-og-bekendtgørelser>. Tilgået 27-10-2022.
- Vad, S. (2020, 8. december). Stine vad er matematiklærer: Elever har svært ved helt simple regnestykker i dag. *Berlingske*. url: <https://www.berlingske.dk/samfund/stine-vad-er-matematiklaerer-elever-har-svaert-ved-helt-simple>, Tilgået 01-11-2022.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society*. Harvard University Press, Massachusetts. ISBN: 9780674576292.
- Vygotsky, L. (1987). Thinking and speech. I: Rieber, R. & Carton, A. (Red.), *The collected works of Lev Vygotsky, Vol. 1*. Plenum, New York. ISBN: 978-1-4613-1655-8.
- Weller, M. (2007). *Virtual Learning Environments: Using, Choosing and Developing Your VLE*. Routledge, London. ISBN: 9780415414319.
- Winsløw, C. (2013). *Didaktiske elementer: En indføring i matematikkens og naturfagens didaktik*. Forlaget Biofolia. ISBN: 978-87-91319-33-4.

Del V

Appendikser

A | Indledende spørgeskema

Ved hvert spørgsmål bedes du sætte kryds i feltet under den svarmulighed, der stemmer mest overens med din holdning til spørgsmålet.

Spørgsmål A.1.

Hvad er dit navn? *(Dit navn bruges kun til at sammenligne dine prøver og besvarelser af spørgeskemaer, og indgår ikke i projektet)*

Navn: _____

Spørgsmål A.2.

Hvordan vurderer du dit eget niveau i matematik, sammenlignet med de andre fag, du har på gymnasiet, og havde i folkeskolen?

En del over gennemsnittet	Lidt over gennemsnittet	Gennemsnitligt	Lidt under gennemsnittet	En del under gennemsnittet
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.3.

Hvor svært har du ved at koncentrere dig og følge med i den undervisning, du modtager på gymnasiet?

Meget let	Let	Hverken let eller svært	Svært	Meget svært
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.4.

Hvordan vurderer du din egen evne til at visualisere grafiske og geometriske matematiske objekter?

En del over gennemsnittet	Lidt over gennemsnittet	Gennemsnitligt	Lidt under gennemsnittet	En del under gennemsnittet
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.5.

Hvordan vurderer du din egen evne til at løse matematiske opgaver uden brug af CAS-værktøjer?

En del over gennemsnittet	Lidt over gennemsnittet	Gennemsnitligt	Lidt under gennemsnittet	En del under gennemsnittet
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.6.

Hvor stort udbytte får du af klasseværelsesundervisning, hvor din lærer står ved tavlen og gennemgår matematiske emner og teorier?

Optimalt	Meget	Hverken meget eller lidt	Lidt	Minimalt
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.7.

Hvor stort udbytte får du af videoundervisning, hvori der bliver gennemgået matematiske emner og teorier?

Optimalt	Meget	Hverken meget eller lidt	Lidt	Minimalt
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.8.

Hvor meget deltager du i undervisningen (stiller spørgsmål, besvarer lærerens spørgsmål, indgår i fælles dialog i plenum)?

Maksimalt	Meget	Hverken meget eller lidt	Lidt	Minimalt
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.9.

Bruger du noget af din fritid på at se videoer (fx på YouTube), der gennemgår forskellige emner og teorier (fx Kurzgesagt, KhanAcademy og 3Blue1Brown)?

Meget ofte	Ofte	Sommetider	Sjældent	Meget sjældent
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.10.

Hvor ofte oplever du behov for at få hjælp af læreren til at lære ny matematisk teori?

Meget ofte	Ofte	Sommetider	Sjældent	Meget sjældent
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.11.

Hvor ofte oplever du behov for at få hjælp af læreren til at anvende nylært matematisk teori, eksempelvis til at løse opgaver?

Meget ofte	Ofte	Sommetider	Sjældent	Meget sjældent
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.12.

Hvor ofte laver du lektier i matematik, sammenlignet med lektionerne i andre fag?

Meget oftere	Oftere	Lige så ofte	Sjældnere	Meget sjældnere
☐	☐	☐	☐	☐

Spørgsmål A.13.

Hvilken type lektier foretrækker du at have for?

Løse opgaver

☐

Læse tekster

☐

Se videoer

☐

Træne med
flashcards

☐

Andet

☐

Hvis 'Andet', skriv:

B | Indledende prøve (45 minutter)

I denne prøve indgår der opgaver vedrørende *brøker, procentregning, potensregneregler, reduktion af udtryk, ligningsløsning, to ligninger med to ubekendte, funktioner og geometri*.

Besvarelsen af prøven gøres kun tilgængeligt for de to specialestuderende, og din lærer informeres derfor ikke om dine resultater. Du skal altså ikke frygte, at det har indflydelse på dine karakterer, hvis der er nogle opgaver du ikke besvarer korrekt.

Mængden af opgaver er bevidst sat til at være stor, i forhold til den mængde tid, der er til at løse disse. Du skal derfor forvente, at du nok ikke kan nå at løse alle opgaver. Derudover er sværhedsgraden af nogle af opgaverne også høj, så der er sandsynlighed for, at du støder på opgaver, som du har svært ved at løse. Dette forventer vi, så du skal ikke se det som et nederlag, eller miste modet, hvis dette sker. Gå da blot videre til næste opgave, eller tilbage til en tidligere opgave, du eventuelt sprang over.

Vi håber, at du vil gøre dig umage, og besvare prøven med samme koncentration og seriøsitet, som var der tale om en reel prøve. Dette giver os nemlig det mest retvisende billede af din forståelse af de matematiske emner.

Der må i forbindelse med prøven ikke anvendes nogen former for hjælpemidler, hverken lommeregner, formelsamling eller elektroniske hjælpemidler. Der må naturligvis regnes i hånden ved hjælp af papir og blyant.

Spørgsmål B.1.

Hvad er dit navn? *(Dit navn bruges kun til at sammenligne dine prøver og besvarelser af spørgeskemaer, og indgår ikke i projektet)*

Navn: _____

Opgave B.2.

Udregn følgende additions- og subtraktionsudtryk

(a)	$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} =$	(e)	$\frac{3}{5} - \frac{1}{7} =$
(b)	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$	(f)	$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} =$
(c)	$\frac{1}{9} + \frac{2}{3} =$	(g)	$\frac{2}{3} - \frac{3}{7} =$
(d)	$\frac{1}{6} + \frac{3}{5} =$	(h)	$\frac{7}{8} - \frac{3}{16} =$

Opgave B.3.

Udregn følgende multiplikations- og divisionsudtryk

(a)	$\frac{2}{19} \cdot 8 =$	(e)	$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{2}} =$
(b)	$6 \cdot \frac{1}{6} =$	(f)	$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{7}{9}} =$
(c)	$\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{9} =$	(g)	$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{5}} =$
(d)	$5 \cdot \frac{6}{29} =$	(h)	$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} =$

Opgave B.4.

Beregn følgende procentopgaver

- (a) 90 % af 500 kr. er = kr. (c) 36 kr. af 360 kr. er = %
- (b) 60 % af 2400 kr. er = kr. (d) 36 kr. af 720 kr. er = %

Opgave B.5.

Beregn følgende procentstigninger og -fald

- (a) Prisen på en vare er steget fra 320 kr. til 400 kr.
Stigningen i procent er
- (b) Prisen på en vare er faldet fra 200 kr. til 190 kr.
Faldet i procent er
- (c) Antal besøgende på Emmas hjemmeside er faldet fra 600 til 570.
Faldet i procent er
- (d) Antal besøgende på Jacobs hjemmeside er faldet fra 400 til 360.
Faldet i procent er

Opgave B.6.

Udregn følgende potensopgaver

- (a) 10^2 = (d) $x^2 + x^3$ =
- (b) 2^4 = (e) $2^x \cdot 2^y$ =
- (c) 7^2 = (f) $\frac{x^3}{x^2}$ =

Opgave B.7.

Reducér udtrykket

$$(a - b) \cdot (a + b) - 2a^2 + b^2 =$$

Opgave B.8.

Reducér udtrykket

$$\frac{x^2 - 2x}{x} =$$

Opgave B.9.Isolér y i ligningen

$$-15x + 5y - 45 = 0, \quad y =$$

Opgave B.10.Linjerne l og m er givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} l: \quad 3y &= 2x - 1 \\ m: \quad x &= 8 - 6y \end{aligned}$$

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m .

$$(x, y) =$$

Opgave B.11.To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x + 2 \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

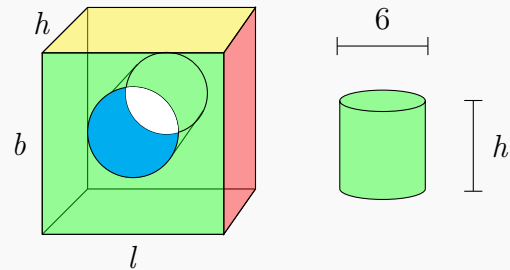
Bestem $g(f(2)) =$

Opgave B.12.

I en træklods med længde l , bredde b og højde h er der udskåret en cylinder med diameter 6, som vist på figuren (alle mål i cm).

Bestem volumen (rumfanget) af træet i klodsens udtrykt ved l , b og h , når cylinderen er udskåret.

$V =$

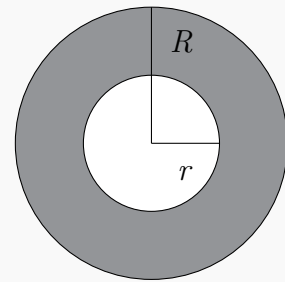
**Opgave B.13.**

På figuren ses to cirkler. Den lille cirkel har radius r , mens den store cirkel har radius R .

Det oplyses, at $R = 13$ og at arealet af det skraverede område er 144π

Bestem den lille cirkels radius r .

$r =$



C | Transskription af videoundervisning

Undervisningsvideoen kan ses via

<https://drive.google.com/file/d/1zthndF5ZFui-mJxgzmKrYxvQmj5Gr3ad/view>

I denne video gives der en kort introduktion til vektorer i 2D, og nogle af de regneoperationer og regneregler der gælder for disse.

Det der definerer en vektor, det er dens længde og dens retning, man kan med fordel tænke på en vektor som et tal i 2 dimensioner.

En vektor opskrives normalt som v med en pil over og så med x og y over hinanden i sådan nogle firkantede eller runde parenteser eller v med pil over og så v_1 og v_2 .¹

Vi kalder x og y , eller v_1 og v_2 , for indgangene i vektoren.

Her beskriver de to indgange hvor langt vektoren 'trækker' i de forskellige retninger.

Disse retninger er blot de normale akser, i et koordinatsystem.

x beskriver naturligvis afstanden langs x -aksen, mens y beskriver afstanden langs y -aksen.

Hvis jeg lige prøver at tegne nogle vektorer her, så kan I se, at de automatisk bliver placeret til at starte i origo, altså (0,0).

Men hvis jeg flytter rundt på dem, så kan I se her, at indgangene i vektoren ikke afhænger af hvor i koordinatsystemet vektoren er placeret, men udelukkende af forholdet mellem dens startpunkt og dens slutpunkt.

To vektorer, der 'ligger' hvert deres sted i koordinatsystemet, kan altså godt være samme vektor, hvis deres indgange er ens.

Tegner vi en vektor med startpunkt i origo, kalder vi det for en stedvektor, og det gælder for stedvektorer, at deres slutpunkt har samme koordinatsæt, som indgangene i vektoren.

De her vektorer dem kan vi også skalere, altså gange med en konstant, så de bliver længere eller kortere.

Vil vi eksempelvis skalere vektor $\vec{a}$ med 3, så gør vi det ved at gange 3 ind på begge indgange i vektoren, og vil vi skalere den med $\frac{1}{2}$, så ganger vi selvfølgelig bare $\frac{1}{2}$ ind i

$$^1 \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

stedet for.

Har man en vektor, der trækker med afstand 0 i begge retninger, så kaldes den for 0-vektoren, og vi skriver den 0 med en pil over, med 0 og 0 i begge indgange.²

Ligemeget hvordan vi skalerer nulvektoren, så vil det altid være nulvektoren, ligesom at når vi ganger 0 med et andet tal, så er det altid lig med 0.

Vi vil også gerne lægge to vektorer sammen, men for at gøre det, er vi nødt til at introducere en ny måde at repræsentere vektorer på.

Så hvis vi starter med at kigge på en af de opgaver, der var i jeres indledende prøve, så kan vi se, at I skulle reducere udtrykket $(a - b) \cdot (a + b) - 2a^2 + 2b^2$.

Her var fremgangsmåden, at man først ganger parenteserne ud, og derefter samler ledene med ens bogstaver.

Så kommer man frem til $a^2 - b^2 - 2a^2 + 2b^2$, og det kan vi skrive som $1a^2 - 2a^2 - 1b^2 + 2b^2$.

Kigger vi så på udtrykkene med ens bogstaver, så kan vi opdele regnestykket i to, og vi kan også sætte det på to linjer.

Så har vi $1a^2 - 2a^2$ øverst, og $-1b^2 + 2b^2$ nederst.

Her kan vi gange a^2 og b^2 uden for parenteserne i begge ligninger, og så får vi $(1 - 2)a^2$ øverst, og $(-1 + 2)b^2$ nederst.

Og hvis vi så tænker på et koordinatsystem, hvor akserne er henholdsvis a^2 og b^2 , så svarer denne reduktionsopgave faktisk til at lægge to vektorer sammen.

Det første tal i retningen a^2 svarer til første indgang i den ene vektor, og det første tal i retningen b^2 svarer til anden indgang i den samme vektor.

Gøres det samme med andet tal i både a^2 og b^2 , så kan vi tænke på de to vektorer som værende på formen $\vec{v} = 1a^2 - 1b^2$ og $\vec{w} = -2a^2 + 2b^2$.

Skriver vi disse på vektorform så får vi at $\vec{v} + \vec{w}$ er det samme som $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ +2 \end{bmatrix}$.

Og som vi kunne se ved reduktionsudtrykket, så er det de led, der har samme bogstav, og dermed samme retning, når vi snakker om vektorer, der skal lægges sammen.

$${}^2\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultatet af vektoradditionsstykket bliver så at vi lægger 1 sammen med -2 , og -1 sammen med $+2$, og dermed får vi $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som vores resultat.

Lægger vi for eksempel vektoren med indgangene 4 og -2 , sammen med vektoren $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, så skal vi altså udregne $4 + (-3)$ i første indgang, og $(-2) + 5$ i anden indgang, og så ender vi med vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Og lægger vi $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ sammen med $\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix}$, så får vi $\begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ ved at bruge samme metode.

Ser vi på, hvordan vektoraddition fungerer grafisk, kan vi se, at summen af to vektorer svarer til, at tegne dem i forlængelse af hinanden.

Man tegner altså vektor 2, så den starter i samme punkt, som den første vektor slutter.

Men som vi så ved den algebraiske tilgang til summen, så er resultatet en ny vektor, og vi kan ikke have en vektor med et knæk, som når de ligger i forlængelse af hinanden.

Resultatet er altså den vektor, der starter i det punkt, som den første vektor starter i, og slutter i det punkt, som den anden vektor slutter i.

Og lægger vi $\vec{0}$ til en anden vektor, så er summen lig med den anden vektor, ligesom når man lægger tallet 0 til et andet tal.

Tænk på, hvordan det ville se ud, hvis vi skulle tegne 0-vektoren i forlængelse af en anden vektor.

Og ligesom vi kan lægge to vektorer sammen, så kan vi også trække to vektorer fra hinanden, men grafisk, så giver det ikke lige mening at trække en vektor fra en anden vektor, så derfor skal vi bruge den såkaldte modsatte vektor, eller den inverse vektor.

Ligesom når vi regner med tal, så er den 'inverse' til vektor $\vec{n}$ den vektor, der når den adderes med $\vec{n}$, giver $\vec{0}$.

Tegner vi vektor $\vec{n}$ fra origo, kan vi finde den modsatte vektor.

Det er naturligvis vektoren, der går i den modsatte retning, og altså starter i det punkt, hvor $\vec{n}$ slutter, og ender i startpunktet for vektor $\vec{n}$.

Men hvad er det så for en vektor? Tegner vi den så kan vi se, at indgangene er de samme,

blot med omvendt fortegn.

Og lægger vi disse to vektorer sammen, kan vi da også se, at resultatet bliver $\vec{0}$.

Har vi $\vec{n} + (-\vec{n})$, så er det $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n_1 \\ -n_2 \end{bmatrix}$, og her lægger vi så n_1 sammen med $-n_1$ øverst og n_2 sammen med $-n_2$ nederst.

Og det giver selvfølgelig 0 på begge indgange.

Og helt naturligt, så betegner vi den modsatte vektor til $\vec{n}$ med $-\vec{n}$, da den modsatte vektor netop svarer til at skalere den oprindelige vektor med konstanten -1 .

På denne måde, der kan vi definere vektorsubtraktion til blot at være addition med en modsatvektor.

Vil vi eksempelvis gerne trække vektor $\vec{w}$ fra vektor $\vec{v}$, så gør vi det ved at lægge vektor $\vec{w}$'s modsatvektor til vektor $\vec{v}$.

Dermed har vi, at $\vec{v} - \vec{w}$ er det samme som $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{w}$, og har vi de samme vektorer som tidligere, så er det $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(-2) \\ -2 \end{bmatrix}$, som så giver $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ til sidst.

Grafisk kan vi se, at subtraktionsstykket $\vec{v} - \vec{w}$ svarer til at tegne modsatvektoren $-\vec{w}$ i forlængelse af vektor $\vec{v}$. Og ligesom ved addition, så ændrer subtraktion med $\vec{0}$ heller ikke på indgangene i vektorerne.

Dog skal man huske, at hvis man trækker en vektor fra $\vec{0}$, så ender man med den modsatte vektor som resultat.

Addition og subtraktion med vektorer fungerer derfor på samme måde som med almindelige tal, hvor rækkefølgen er ligemeget ved addition, men har stor betydning ved subtraktion.

En vektor mellem to forskellige punkter findes ret logisk, når man ved, hvordan man trækker to vektorer fra hinanden.

For at illustrere, hvordan dette hænger sammen, så vælger vi to punkter i vores koordinat-system, og så kan vi godt tegne en vektor mellem dem.

Her giver CAS-værktøjer os svaret på, hvilke indgange, der skal være i vektoren, for at den ligger mellem de to punkter.

Vi kan dog også beregne, hvordan denne vektor skal tegnes.

Tegner vi stedvektoren ud til de to punkter, så kan vi opstille en ligning, der hedder $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, og her betegner $\overrightarrow{AB}$ vektoren mellem punktet A , der er slutpunktet for $\vec{a}$, og punktet B , der er slutpunktet for $\vec{b}$.

Denne ligning løser vi som en normal ligning, hvor vi isolerer det udtryk, vi ønsker beskrevet.

Isolerer vi $\overrightarrow{AB}$ ser vi, at udtrykket bliver at $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, og gør vi det koordinatvis, så ser vi, at indgangene er $\begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$, og det her er netop formlen for en vektor mellem to punkter, $A = (a_1, a_2)$ og $B = (b_1, b_2)$.

Vil vi eksempelvis finde vektorene mellem punkterne $P = (2, 3)$ og $Q = (10, 4)$, så indsætter vi disse tal i formlen ovenfor.

Dermed ser vi, at $\overrightarrow{PQ}$ har indgangene $10 - 2 = 8$ og $4 - 3 = 1$.

Vil vi derimod finde vektoren i den modsatte retning, altså fra punktet Q til punktet P , så skulle talene indsættes i omvendt rækkefølge.

Dette ville selvfølgelig give modsatvektoren, altså vektoren med indgangene $\begin{bmatrix} -8 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Nu har vi snakket en masse om vektorers retning og placering, men som det blev nævnt i starten af videoen, så spiller vektorens længde også en central rolle for dens karakterisering.

For at beregne længden af en vektor, betragter vi vektoren som hypotenusen i en retvinklet trekant.

Har vi indgangene i vektoren, så kender vi faktisk allerede længderne på de to kateter, i den retvinklede trekant.

Længden af den horisontale katete er netop første indgang i vektoren, altså hvor langt den trækker i retning af x -aksen, mens den lodrette katetes længde kan aflæses i anden indgang i vektoren.

Hermed kan vi tænke tilbage på Pythagoras' læresætning, der netop anvendes til at beregne længden af hypotenusen i en retvinklet trekant, hvis længden af de to kateter kendes.

Som bekendt er Pythagoras' læresætning givet ved $a^2 + b^2 = c^2$, hvor c betegner hypotenusen.

Og har vi vektoren $\vec{v}$ med indgangene $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, så ser vi, at længden, som vi betegner således³, bliver $|\vec{v}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Dette giver os som bekendt længden af hypotenusen i anden, hvorfor vi blot skal tage kvadratroden af resultatet, for at finde den egentlige længde af vektoren.

Dermed bliver $|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}|^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vi kan se, at en modsatvektor har samme længde som sin oprindelige vektor, da indgangene blot er de samme med omvendt fortegn, og det har ikke nogen betydning, da indgangene kvadreres i beregningen af længden.

Udregner vi $|- \vec{v}| = \left| \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \right|$, så bliver længden $\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$, som er det samme som $\sqrt{3^2 + 4^2}$, ligesom før.

Det samme gælder ligemeget hvor mange minusser der er i vektoren, og på hvilke indgange disse er placeret.

Skaleres en vektor med en konstant s , så har dette naturligvis også indflydelse på dens længde.

Her kan længden naturligvis kun være positiv, hvorfor formelen er følgende: Har vi en konstant s der er ganget på $\vec{v}$, og vil finde længden af denne vektor⁴, så svarer det til at tage $|s| \cdot |\vec{v}|$, hvor $|s|$ betegner den numeriske værdi af s , altså tallet med positivt fortegn.

Skaleres vi vektorer med et negativt tal, så forbliver længden altså positiv, men retningen på vektoren ændres, på samme måde som skaleringen med -1 gav modsatvektoren.

Det sidste vi vil kigge på i denne video, er prikproduktet mellem to vektorer.

Nu har vi lagt vektorer sammen og trukket dem fra hinanden, så det er nærliggende at tænke på, hvordan man ganger to vektorer sammen.

Det kan man dog ikke, så derfor anvender vi i stedet noget der hedder et prikprodukt, og som også kaldes skalarproduktet.

Prikproduktet af to vektorer, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, og $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, er givet ved $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

³ $|\vec{v}|$
⁴ $|s \cdot \vec{v}|$

Her kan vi se, at svaret er et tal, da vi ganger og summerer indgangene i vektorerne, og det er altså ikke en tredje vektor, som i tilfældene med addition og subtraktion.

Læg mærke til, at det ikke er et gange-tegn, der står mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, men en prik, der netop er grunden til, at vi kalder det for et prikprodukt.

De mest interessante tilfælde, er dem hvor prikproduktet giver nul.

Dette sker nemlig kun hvis de to vektorer er ortogonale, også kaldet vinkelrette, på hinanden.

Hvis vi for eksempel kigger på vektorerne $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$, kan vi se, at de er ortogonale.

Beregner vi deres prikprodukt, så giver det altså os $1 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 = (-6) + 6 = 0$.

Dette er blot ét eksempel på det, og havde vektorerne været placeret et andet sted i koordinatsystemet, og havde de hver især haft andre længder, så var prikproduktet stadigvæk 0, så længe vinklen mellem dem forbliver 90° .

Dette er også grunden til, at $\vec{0}$ er defineret til at være ortogonal på alle andre vektorer, da prikproduktet mellem $\vec{0}$ og en anden vektor altid giver 0.

Prikproduktet er altså et effektivt værktøj til at beregne, om to kendte vektorer er ortogonale på hinanden.

Udover denne måde at beregne prikproduktet på mellem to vektorer, så er der også en anden formel, der kan bruges.

Dette kræves, at vi kender længden af de to vektorer, samt vinklen mellem dem.

Her er prikproduktet nemlig givet ved $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(V)$.

Her kan vi lægge mærke til, at vi godt kan gange længderne af vektorerne sammen, da det jo bare er almindelige tal, selvom vi ikke kan gange vektorer sammen normalt.

Når vi kender denne formel, kan vi også beregne vinklen mellem to vektorer.

Denne finder vi ved at isolere V i udtrykket. Her får vi at $\cos(V) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, og dermed kan vi isolere V ved at tage $\cos^{-1}$ til begge sider af lighedstegnet.

D | Afsluttende prøve (30 minutter)

I denne prøve indgår der opgaver vedrørende *vektorrepræsentation*, *vektoraddition*, *vektorsubtraktion*, *vektorskalering*, *ligningsløsning med vektorer*, *vektorer mellem to punkter*, *længden af vektorer* og *beregning af prikprodukt*.

Besvarelsen af prøven gøres kun tilgængeligt for de to specialestuderende, og din lærer informeres derfor ikke om dine resultater. Du skal altså ikke frygte, at det har indflydelse på dine karakterer, hvis der er nogle opgaver du ikke besvarer korrekt.

Mængden af opgaver er bevidst sat til at være stor, i forhold til den mængde tid, der er til at løse disse. Du skal derfor forvente, at du nok ikke kan nå at løse alle opgaver. Derudover er sværhedsgraden af nogle af opgaverne også høj, så der er sandsynlighed for, at du støder på opgaver, som du har svært ved at løse. Dette forventer vi, så du skal ikke se det som et nederlag, eller miste modet, hvis dette sker. Gå da blot videre til næste opgave, eller tilbage til en tidligere opgave, du eventuelt sprang over.

Vi håber, at du vil gøre dig umage, og besvare prøven med samme koncentration og seriøsitet, som var der tale om en reel prøve. Dette giver os nemlig det mest retvisende billede af din forståelse af de matematiske emner.

Der må i forbindelse med prøven ikke anvendes nogen former for hjælpemidler, hverken lommeregner, formelsamling eller elektroniske hjælpemidler. Der må naturligvis regnes i hånden ved hjælp af papir og blyant.

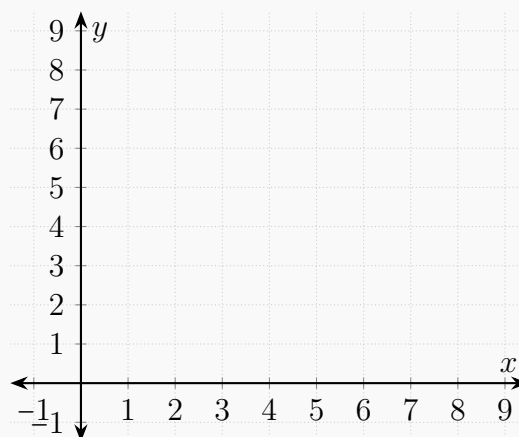
Spørgsmål D.1.

Hvad er dit navn? (*Dit navn bruges kun til at sammenligne dine prøver og besvarelser af spørgeskemaer, og indgår ikke i projektet*)

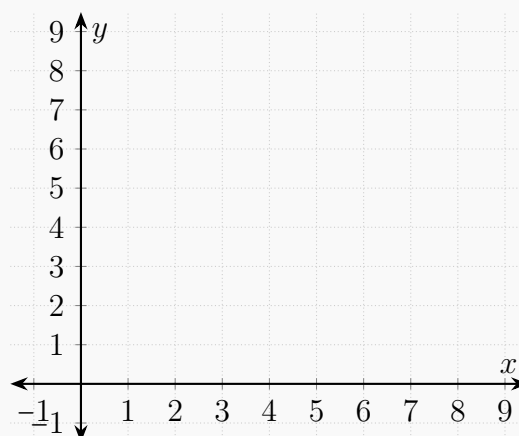
Navn: _____

Opgave D.2.

Indtegn stedvektorerne $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ i koordinatsystemet.

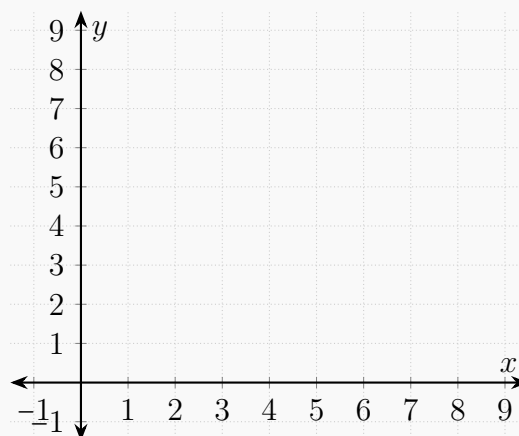
**Opgave D.3.**

Indtegn de to vektorer $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$, samt den grafiske repræsentation af $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ i koordinatsystemet.



Opgave D.4.

Indtegn den grafiske repræsentation af $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ i koordinatsystemet.

**Opgave D.5.**

I et to-dimensionalt koordinatsystem er to vektorer defineret ved

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Beregn følgende udtryk

(a) $\vec{a} + \vec{b} =$

(b) $5\vec{a} + 3\vec{b} =$

(c) $3\vec{a} + (-2)\vec{b} =$

Opgave D.6.

Lad de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være givet ved

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -43 \end{bmatrix}$$

Bestem $\vec{x}$, så ligningen $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$ er opfyldt.

$\vec{x} =$

Opgave D.7.

Bestem det t , der løser ligningen

$$\begin{bmatrix} t^2 - 5 \\ 2t + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$t =$

Opgave D.8.

I et koordinatsystem er der indsat to punkter, henholdsvis $A = (3, 8)$ og $B = (15, 13)$.

(a) Bestem $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} =$$

(b) Bestem $|\overrightarrow{AB}|$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

Opgave D.9.

Mikkel har inviteret Mathias over til en øl. Mathias ved, at hvis han først går 150 meter direkte mod vest, og derefter 200 meter direkte mod syd, så er han hjemme ved Mikkel. Hvor lang er afstanden A i fugleflugt mellem Mikkel og Mathias' bopæle?

$A =$

Opgave D.10.

Beregn prikproduktet mellem de følgende vektorer

(a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$

(b) $\begin{bmatrix} -11 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} =$

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$

Opgave D.11.

Beregn hvorvidt vektorerne er ortogonale/vinkelrette

(a) $\begin{bmatrix} -12 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{21}{4} \\ -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

Opgave D.12.

For to vektorer gælder det, at $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, samt at $\cos(V) = 0.7$, hvor V betegner vinklen mellem de to vektorer. Beregn prikproduktet mellem de to vektorer.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

Opgave D.13.

Bestem $\cos(V)$, når V betegner vinklen mellem vektorerne $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$

$$\cos(V) =$$

E | Afsluttende spørgeskema (Video)

Ved hvert spørgsmål bedes du sætte kryds i feltet under den svarmulighed, der stemmer mest overens med din holdning til spørgsmålet.

Spørgsmål E.1.

Hvad er dit navn? *(Dit navn bruges kun til at sammenligne dine prøver og besvarelser af spørgeskemaer, og indgår ikke i projektet)*

Navn: _____

Spørgsmål E.2.

Hvilken type undervisning modtog du under undersøgelsen?

Videoundervisning

☐

Klasseværelsesundervisning

☐

Spørgsmål E.3.

Hvordan vurderer du dit udbytte af denne undervisning, sammenlignet med tidligere moduler i matematikundervisningen?

Markant bedre

☐

En smule bedre

☐

Hverken bedre eller værre

☐

En smule værre

☐

Markant værre

☐

Spørgsmål E.4.

Hvor meget hjalp visualiseringen under dette undervisningsmodul på din forståelse af vektorer?

Maksimalt

☐

Meget

☐

Hverken meget eller lidt

☐

Lidt

☐

Minimalt

☐

Spørgsmål E.5.

Hvor stor en del af det gennemgåede teori, oplevede du udfordringer med at forstå?

Intet

Lidt

Hverken lidt
eller meget

Meget

Det hele

☐☐☐☐☐**Spørgsmål E.6.**

Hvor ofte pausede, eller spolede, du i videoen for at forstå teorien bedre, eller for at tage noter?

Meget ofte

Ofte

Sommetider

Sjældent

Meget sjældent

☐☐☐☐☐**Spørgsmål E.7.**

Hvor stor en hindring føler du det var, ikke at kunne stille en lærer opklarende spørgsmål?

Ingen

Meget lille

Lille

Stor

Meget stor

☐☐☐☐☐**Spørgsmål E.8.**

Hvor stort udbytte synes du at du fik ved at kunne snakke med dine klassekammerater om videoen du så lige inden?

Optimalt

Meget

Hverken meget
eller lidt

Lidt

Minimalt

☐☐☐☐☐

Spørgsmål E.9.

Hvor meget deltog du i samtaler med dine klassekammerater om videoundervisningen?

Maksimalt

☐

Meget

☐

En smule

☐

Lidt

☐

Minimalt

☐**Spørgsmål E.10.**

Må vi kontakte dig, hvis vi eventuelt gerne vil have uddybninger af dine besvarelser?

Ja

☐

Nej

☐

Hvis 'Ja', kontaktinformation:

F | Afsluttende spørgeskema (Fysisk)

Ved hvert spørgsmål bedes du sætte kryds i feltet under den svarmulighed, der stemmer mest overens med din holdning til spørgsmålet.

Spørgsmål F.1.

Hvad er dit navn? *(Dit navn bruges kun til at sammenligne dine prøver og besvarelser af spørgeskemaer, og indgår ikke i projektet)*

Navn: _____

Spørgsmål F.2.

Hvilken type undervisning modtog du i løbet af undersøgelsen?

Videoundervisning

☐

Klasseværelsesundervisning

☐

Spørgsmål F.3.

Hvordan vurderer du dit udbytte af denne undervisning, sammenlignet med tidligere moduler i matematikundervisningen?

Markant bedre

☐

En smule bedre

☐

Hverken bedre eller værre

☐

En smule værre

☐

Markant værre

☐

Spørgsmål F.4.

Hvor meget hjalp visualiseringen under dette undervisningsmodul på din forståelse af vektorer?

Maksimalt

☐

Meget

☐

Hverken meget eller lidt

☐

Lidt

☐

Minimalt

☐

Spørgsmål F.5.

Hvor stor en del af det gennemgåede teori, oplevede du udfordringer med at forstå?

Intet

Lidt

Hverken lidt
eller meget

Meget

Det hele

☐☐☐☐☐**Spørgsmål F.6.**

Hvor enig er du i følgende udsagn? *Jeg føler at jeg forstyrrer mine klassekammeraters læring, hvis jeg stiller spørgsmål, eller beder læreren om at gentage noget*

Meget enig

Enig

Hverken enig
eller uenig

Uenig

Meget uenig

☐☐☐☐☐**Spørgsmål F.7.**

Hvor meget lærte du af at lytte til dine klassekammeraters besvarelser af lærerens spørgsmål?

Rigtigt meget

Meget

En smule

Lidt

Nærmest intet

☐☐☐☐☐**Spørgsmål F.8.**

Hvor meget indgik du selv i den faglige dialog på klassen?

Maksimalt

Meget

En smule

Lidt

Minimalt

☐☐☐☐☐

Spørgsmål F.9.

Hvor meget tid følte du, at du havde til at tage noter?

Alt for meget

En smule
for meget

Passende

En smule
for lidt

Alt for lidt

☐☐☐☐☐**Spørgsmål F.10.**

Må vi kontakte dig, hvis vi ønsker uddybninger af dine besvarelser?

Ja

Nej

☐☐

Hvis 'Ja', kontaktinformation:
