Analyse af progression i matematikforståelse gennem et 0. klasses forløb

Ahsen Büsra Seker

Matematik, 2022-01

Master Thesis

STUDENTER RAPPORT
AALBORG UNIVERSITY

This report is written and typeset using LaTeX. Furthermore the R programming was used to the data preparation for the statistical analysis, and to include plots and summary of the statistics.

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Skjernvej 4A
9220 Aalborg Ø
http://www.math.aau.dk

Titel:

Analyse af progression i matematikforståelse gennem et 0. klasses forløb

Projektperiode:

Efterårssemestret 2021

Deltager:

Ahsen Büsra Seker

Vejleder:

Poul Svante Eriksen

Oplagstal: 1

Sidetal: 68

Afleveringsdato:

31. januar 2022

Abstract:

Dette projekt undersøger børnehaveklasse elevers progressionen i matematikforståelse ud fra en statistisk analyse af deres testresultater i matematik, indsamlet i skoleåret 2020/2021.

Til analysen er generaliserede lineære modeller anvendt, hvor der blev opstillet modeller ud fra fire forklarende variable, samt en random effekt til at forudsige, om der var kønsforskel i forbedringen af testresultaterne.

Konklusionen af analysen er, at eleverne har haft en forbedring i deres testresultater fra oktober til maj, både når der kigges på den samlede og den individuelle progression. Det betyder, at eleverne har med matematik undervisningen udviklet deres matematikforståelse.

Abstract

This master thesis focuses on the theory of generalized linear models, which will be used for a statistic analysis of the binomial data regarding the test results collected from class 0 in the school year 2020-2021, where the first test was performed in October 2020 and the second in May 2021. The tasks in the test are beginners level and are formed in order to test the basic mathematical knowledge of children in grade 0. The task consist of numbers, addition, subtraction, forms, etc. To understand these tasks a description of the education, and the mathematical understanding is given before the statistics analysis of the data is made.

Since we are dealing with binomial data, the familiy in the generalized linear models are specified to be a binomial distribution. The distinctive with these models are that they are able to deal with nonlinear data, when the usual regression assumptions are not satisfied. To get a linear relation between the predictor and the response variable, the mean value is transforming with a function, called the link function. In the binomial case the link function is chosen to be the logit function, which gives results in log of the odd ratios.

The generalized linear models are used to construct models for the data, with different effects. We deal with 5 models when studying the data. They each consist of some explanatory variables, that change for each model. These variables are the id, task, month and lastly gender. The first model consist of the main effects, and this will be the model I will use in comparison to the other models. The model-check is done with a c^2-test to study if the effect is significant, thereafter an effect modification is made for the second model according to the result. The effect in the second model is modified with an interaction between id and month, where the interaction is between task and month for the third model. The fourth model consist of a random effect to examine the significance of the gender in the model. Lastly the effect of the fifth model is modified to an interaction between the random effect and month, to examine the improvement in relation to the gender. Thereafter, the models will be examined by the QQ-plot of the residuals, which identifies the dispersion from the normality.

The results show that, the students in the class get a better score in May; both in the overall improvement of the class in model 1, and in the individual improvement of the pupils in model 2. This means that there has been an improvement of the children's mathematical understanding. Since the students get a better result in May, it means that they have extended their knowledge, competences and skills by the education they get until the second test in May.

Indhold

Forord

Dette speciale er udarbejdet af Ahsen Büsra Seker i efterårssemesteret 2022 under vejledningen af Poul Svante Eriksen. Projektet er skrevet i forbindelse med 11. semesters projekt på matematikstudiet i Institut for Matematisk Fag ved Aalborg Universitet.

Læseren forventes at have kendskab til matematikken, der dækker et niveau svarende til en bacheloruddannelsen i matematik, med viden der strækker sig indenfor statistisk analyse og inferens. Opgaven er skrevet på et niveau så læseren, hvis ikke bekendt med matematikken, vil være tilbøjelig til at forstå resultaterne, analysen og konklusionen. Formålet med projektet er at kunne vise relationen mellem test og undervisning ud fra elevernes progression, og herudfra forudsige om progressionen er god i forhold til undervisningen og om undervisningen er tilstrækkelig for, at eleverne kan udvikle sig.

Det skal nævnes, at det uden tilladelse fra den pågældende skole ikke ville være muligt at tilgå besvarelser til testen *"Matematikvurdering i 0. klasse"*. Derfor vil jeg særligt takke ledelsen på skolen for at dele scoringsresultaterne med mig, dette særligt fordi resultaterne har været af væsentlig betydning for udarbejdelsen af dette projekt. Skolens navn og alle data vil anonymiseres og behandles helt fortroligt i projektet.

I Kapitel 2 vil der være mulighed for at læse om testen Matematikvurdering 0. klasse, samt resultaterne for testen, dens opbygning og indholdet. Kapitlet er vigtigt for at have kendskab til datasættet og for en bedre forståelse af resultaterne i den statistiske analyse.

Det statistiske software program R bruges til at konstruere statistiske modeller, som særligt vil benyttes til at analysere datasættet om børnehaveklasse elevers matematik testresultater. Kildehenvisningerne vil angives med APA-metode, hvor de anvendte kilder vil fremgå af referencelisten.

Særligt tak til min vejleder Poul Svante Eriksen, der med en motiverende og inspirerende vejledning har hjulpet og guidet mig igennem det lange projektforløb med tålmodighed og sympati.

Aalborg University, 31. januar 2022

Ahsen Büsra Seker

<aseker16@student.aau.dk>

Kapitel 1

Introduktion

Dette kapitel er en introduktion til den statistiske analyse af 0. klasses progression i matematikundervisningen. De grundlæggende principper og begreber, der vil hjælpe med at forstå analysen vil gennemgås i dette kapitel.

Børne- og Undervisningministeriet udarbejder teste for udvalgte fag og bestemte klassetrin i henhold til gældende lovgivning,"Bekendtgørelse af lov om folkeskolen" §13, stk. 3, jf. LBK nr. 1887 af 01.10.2021, hvor det i dette projekt vil navngives til Folkeskoleloven. Disse test bliver udført på skolerne for at vurdere elevernes færdigheder og kompetencer. Matematik er også et af de fag eleverne bliver testet i på skolerne. I børnehaveklassen er det, jf. Folkeskoleloven §11, stk. 3, kun obligatorisk at udføre en sprogvurdering. Selvom matematikvurdering i løbet af børnehaveklasse ikke er obligatorisk, skal der, jf. folkeskoleloven §13, stk. 2, laves en evaluering af elevernes udbytte af undervisningen, og elevens tilegnelse af kundskaber og færdigheder i forhold til kompetencemål og opmærksomhedspunkter. Disse mål og punkter indgår sammen med formålet med undervisningen i de regler, som bliver fastsat af Børne- og Undervisningsministeriet, jf. folkeskoleloven §10.

Det skal dog bemærkes, at Børne- og Undevisningsministeriet ikke udvikler test for børnehaveklassen. Evalueringen af elevernes udbytte kan udføres ved at anvende forskellige test, som bliver udviklet for at vurdere elevernes kunden og færdigheder i matematikundervisningen i børnehaveklassen. "*Matematikvurdering 0. klasse*" er én blandt flere andre matematikttest for børnehaveklasseelever, og tester i elevernes matematiske færdigheder og kompetencer, hvilket vil beskrives dybdegående i Afsnit 2.1. Den nærværende undersøgelse bygger på denne test.

Formålet med dette projekt er at undersøge resultaterne af testen Matematikvurdering 0. klasse for eleverne i børnehaveklassen i skoleåret 2020/2021. De har udført testen Matematikvurdering 0. klasse to gange i løbet af skoleåret; den første i starten af skolåret og den anden i slutningen. Elevernes testresultater som er opnået i de to testgange, vil analyseres statistisk, og resultater vil anvendes til at drage konklusioner om elevernes progression i matematikforståelse i løbet af børnehaveklassen.

I testen "Matematikvurderingen 0. klasse" er der opgaver, som afprøver elevernes kendskab indenfor forskellige emner som talrækken, at tælle, talgenkendelse, antalsforståelse, former og mønstre, simpel addition og subtraktion (Heinze & Kemner, 2019). Der vil i Kapitel 3 forsøges at beskrive de færdigheder som en elev, der går i børnehaveklasse er i stand til at lære i forhold til sit alder.

I det følgende vil der præciseres nogle vigtige begreber med henblik på at give et indblik i hvordan begreberne forstås i dette projekt. Det er for dette projekt vigtigt at beskrive betydningen af visse begreberne, da begreberne rent faktisk kan have forskellige betydninger i den pædagogiske vinkel, afhængigt af hvilken sammenhæng den bruges i.

1.1 Begrebsafklaring

I dette afsnit vil begreberne "børnehaveklasse", "evaluering", "vurdering"og "pædagogisk test" forklares, dette med henblik på at give en bedre forståelse af begreberne, når det anvendes senere i kapitler.

Børnehaveklasse er det begreb, der bruges til at beskrive en klasse, som består af elever, der er kommet fra børnehaven og som skal til at begynde i det obligatoriske skolegang. Ifølge den danske ordbog er børnehaveklasse "den klasse i skolen, hvor pædagoguddannede personer giver børn i 6-årsalderen en forberedende undervisning inden de starter i 1. klasse" ("Børnehaveklasse", u.å.). Børnehaveklasse er således en klasse, hvor nybegyndende elever forberedes til at starte i første klasse. Derfor anses børnehaveklassen som en bro mellem børnehaven og skolen, og derfor antages som en overgang til 1. klasse. Børnehaveklassen har været obligatorisk lige siden 2009, og har fået en særlig undervisningstilgang.

Navnet 0. klasse bliver brugt som et synonym til ordet børnehaveklasse. Dette har ledet an til en del forvirring, dog vil denne forvirring ikke berøres i dette projekt, da det ingen relevans har for den nærværende undersøgelse. Det skal dog bemærkes, at der i folkeskoleloven bruges ordet børnehaveklasse, hvor det tværtimod i testens navn anvendes udtrykket 0. klasse. Med henblik på at danne overskuelighed i begrebsbrug vil der i dette projekt fremover bruges ordet børnehaveklasse konsekvent, selvom begrebet 0. klasse indgår i testens overskrift.

Der er med uddrag fra lovgivningen blevet nævnt, at det er et krav at udføre en "evaluering"af elevernes udbytte af undervisningen. Derudover er testen, som det også fremgår i navnet, en vurderingstest – Matematikvurdering 0. klasse. Herudfra synes det at være relevant at beskrive begreberne evaluering og vurdering for at give en bedre forståelse af sammenhængen mellem testens hensigt om matematikvurdering og kravet om evaluering ifølge lovgivningen.

Evaluering er knyttet direkte til et mål og ofte knyttet til overvejelser, refleksioner, der finder sted uden for undervisningen, hvorimod vurdering ofte er en integreret del af lærerens undervisning (Peter Allerup, 2011, s. 161). Den løbende interne evaluering, som enhver lærer foretager i undervisning, er ofte sammensat af lærerens vurderinger (Peter Allerup, 2011, s. 161). Det vil sige, summen af de vurderinger, der foretages i undervisningen, kommer til at indgå i lærerens evaluering (Peter Allerup, 2011, s. 161).

Ifølge Bendixen og Kreiner (2009, s. 12) består en pædagogisk test af en række spørgsmål og delopgaver indenfor et bestemt område (Peter Allerup, 2011, s. 128), hvor disse opgaver forudsætter en bestemt færdighed for at blive besvaret. Testen giver en præcis måling af elevernes færdigheder Bendixen og Kreiner (2009, s. 12) og giver en systematisk viden om læring og måler en bestemt færdighed, viden eller kompetence. Elevernes færdigheder bliver ikke vurderet subjektivt med en test, men de bedømmes ud fra de fastlagte kriterier, testen er baseret på (Peter Allerup, 2011, s. 128). Testens resultater skal kunne bruges til videreudvikling, således at det kan tilrettelægge undervisningen efter behovet.

1.2 Generaliserede Lineær Modeller

I dette projekt vil generaliserede lineære modeller bruges til at opstille modeller, hvor elevernes dygtighed i forhold til at besvare opgaverne rigtigt eller forkert vil undersøges. Variationen i den generaliseret lineær model, der bruges i dette projekt er ikke normalfordelt, den er binomialfordelt. Det vil sige, at antallet af point eleverne kan score er binomialfordelt med en hvis sandsynlighed, samt en antalsparameter, der svarer til den maksimale antal point en elev kan få.

Det der er særligt ved generaliserede lineære modeller er, at det hentyder til en måde at modellere ikke-normale data, når de sædvanlige regressionsantagelser ikke er tilfredsstillet. Prædiktoren er lineær, men relationen mellem responsvariablen og prædiktoren er ikke lineær. Derfor vælges en bestemt funktion ud fra modellens fordeling for at transformere responsvariablen således, at den transformerede responsvariabel er lineært relateret til prædiktoren. Det betyder, at generaliserede lineære modeller beskriver den lineære del i form af en funktion af middelværdien. Mere om generaliserede lineære modeller kan læses i Kapitel 4.

Formålet i dette projekt er at undersøge eleverne i børnehaveklassens progression i matematikforståelse fra oktober 2020 til maj 2021. Derfor vil der foretages en statistisk analyse af 0. klasse elevers testresultater i matematik foretaget med bi generaliserede lineære modeller.

Kapitel 2

Data Præsentation

I dette kapitel vil datasættet til undersøgelsen og den statistiske analyse af testen Matematikvurdering 0. klasse blive præsenteret. Dette vil indledes med en beskrivelse af testen Matematikvurdering 0. klasse herunder testens opgaver og komponenter, samt formålet med testen og de enkelte opgaver. Dernæst vil følge en beskrivelse af datasættet og dets konstruktion med henblik på at give en bedre forståelse af analysen.

2.1 Matematikvurderingen 0. klasse

Matematikvurdering 0. klasse er en test udviklet af Inger-Lise Heinze og Karina Lehmann Kemner til Dansk Psykologisk Forlag med det formål at teste og vurdere elevers kompetencer og forudsætninger i matematik i slutningen af børnehaveklassen (Heinze & Kemner, 2019, s. 5). Matematikvurdering 0. klasse består af en elevhæfte, der indeholder 11 opgaver som forventes at blive gennemført af elever under testningen. Til elevhæftet er der udarbejdet en lærervejledning, hvori der angives instruktioner til opgaverne, samt en rettevejledning og facitliste til opgaverne.

Testen berører forskellige matematiske færdigheder. Ifølge Dansk Psykologisk Forlag tester den elevernes kunnen indenfor talrækken og talrækker, antalsforståelse, antal og symboler, talgenkendelse, addition og subtraktion, flest og færrest (Dansk Psykologisk Forlag, u.å.). Ifølge de forenklede Fælles Mål forventes det, at hver elev i børnehaveklassen tilegner sig tilstrækkelig viden og færdigheder indenfor disse områder i matematikken (Dansk Psykologisk Forlag, u.å.).

I det følgende vil de enkelte opgaver i testen blive forklaret, som det fremgår i vejledningen (Heinze & Kemner, 2019, s. 6–8).

Opgave A - Talrækken

Med det formål at vurdere elevernes kendskab til talrækken er der i testen opstillet en opgave, hvor eleven forventes at fuldføre fire figurer ved at tegne streg fra tal til tal/prik til prik. Opgaven bliver gradvis sværere for hver figur. Da hver figur tæller som en opgave er der i alt mulighed for at opnå fire rigtige i denne opgave.

I vurderingen er det vigtigt at bemærke om hvorvidt eleven har været præcis i at trække streger fra tal til tal og om der benyttes de rigtige talrækker til figurfuldførelsen. Det er eksempelvis vigtigt at bemærke, om tallene 6 og 9 bliver forvekslet, eller om eleven har styr på tallene fra 11-20.

Opgave B - Talrækker

Formålet med opgaven er, at vurdere om eleven har kendskab til tælleremser og om hvorvidt den kan springe i en tælleremse. Dette testes med otte rammer af talrækker, der starter forskellige steder mellem 1 og 20, hvor hver ramme indeholder bestemt antal kolonner og celler. Som en del af opgaven er der i nogle af cellerne i talrækken ikke angivet et tal, dette som følge af at det af eleven forventes at udfylde cellerne med et tal der passer ind i talrækken. Dette forudsætter eleven kendskab til talrækker, hvor det eksempelvis i de sidste to rammer i opgaven kræves viden i ti-tabellen (10, 20, 30...) og to-tabellen (2, 4, 6...). I denne talopgave skal der specielt lægges mærke til, hvorvidt eleven kan talremserne ti-tabellen og to-tabellen. Der er tolv tomme pladser, som eleven forventes at udfylde, og der er mulighed for at få i alt 12 rigtige i opgaven.

Opgave C - Antalsforståelse

På siden tyder der seks rammer, der er opdelt i to kolonner. På venstre celle er der angivet et tal, mens højre celle ligger tomt. Eleven forventes at tegne genstande i den tomme celle, således at det i antallet svarer til tallet der er angivet i venstre celle. I denne opgave registreres det, om eleven har tegnet et rigtigt antal genstand i hver af de seks tomme rammer. Der er derfor mulighed for at få 6 rigtige i opgaven. Formålet med opgaven er at vurdere, i hvor høj grad eleven er i stand til at genkende tal, og om eleven kan anslå antallet til tallene. Der kan være to mulige fejlårsager i denne opgave - enten kender eleven ikke tallet, eller så er eleven ikke i stand til at tælle antallet af tegnede genstande.

Opgave D - Antal og symboler

På siden er der seks rammer, der er opdelt i to kolonner. På højre celle er der angivet et vis antal genstande, mens venstre celle ligger tom. Eleven skal tælle genstande på højre celle og nedskrive tallet det svarer til i venstre celle. Der er mulighed for at få 6 rigtige i opgaven.

Denne opgave har til formål at vurdere, hvorvidt eleven kan én til én korrespondance, det vil sige at tælle genstande, og derved angive talsymbolerne for antallet af genstande.

Opgave E - Antal og talgenkendelse

På opgavesiden er der angivet syv forskellige genstande i venstre side. Eleven forventes at tælle antallet af genstande, og derefter finde og markere talsymbolet i en talrække, som er placeret lige overfor genstandende. Der er mulighed for at få 7 rigtige i opgaven. Der tælles antal rigtige svar, der er knyttet til antal genstande.

Formålet med opgaven er at vurdere, hvorvidt eleven kan én til én korrespondance og om eleven kan tælle og genkende det rigtige talsymbol blandt forvekslingsmulighederne.

Opgave F - Tælle og talsymbol

Opgaven går ud på at eleverne på en tegning øverst i opgavesiden skal finde og tælle antallet af seks forskellige genstande, der er angivet i en ramme til venstre under tegningen. Eleverne forventes at tælle antallet af genstande, og nedskrive talsymbolet for antallet i rammen til højre for genstanden. Der er seks genstande i alt, hvilket betyder, at der er mulighed for at få 6 rigtige i alt.

Denne opgave er forskellig i det omfang, at det kræves at kunne overskue flere stimuli på en gang, hvor det for nogle elever derfor kan være svært at bevare overblikket og få talt alle genstande. Formålet med opgaven er derfor at vurdere, om eleven kan ordne en større mængde af stimuli, dog ligeledes om eleven kan tælle med eller uden tællemateriale, og om eleven kan knytte et talsymbol til en vis mængde.

Opgave G - Addition

På opgavesiden er der angivet to forskellige opgaver, som måler elevernes kendskab til addition. Øverst på siden tyder der fem additionsstykker med to led, som eleverne skal regne. Overfor hver af dem er der en bjælke med det antal kasser, der svarer til resultatet. Eleverne skal farve så mange rammer som den første led viser med rød farve, og så mange rammer som den anden led viser med blå farve.

Nederst på siden i den næste opgave skal eleverne selv udfylde de tomme linjer i de fem additionsstykker. Overfor additionsstykket er der to terninger, der svarer til de to led i additionsstykket. Eleverne skal tælle øjnene i hver terning, og skrive antallet på linjerne. Derefter skal de regne eller tælle det samlede antal, og skrive det ned. Der er mulighed for at få 10 rigtige i hele opgaven.

Formålet med opgaven er at vurdere, om eleven har kendskab til addition og om eleven kan opskrive et additionsstykke.

I denne opgave er det vigtigt at notere om, eleven klarer begge dele af opgaven; den første hvor rammerne skal farves og stykket skal regnes, og den anden, hvor regnestykket skal findes. Det er vigtigt at bemærke, om eleven har benyttet konkrete materialer til beregning, eller om der er blevet regnet på anden måde.

Opgave H - Flest/færrest

Øverst på siden fremgår der to røde og to grønne rammer. I hver af rammerne er der to celler med den samme type genstand, dog er cellerne forskellige ved at indeholde diverse antal af genstanden. Eleverne skal i de røde rammer vurdere hvilken celle der indeholder flest genstande, for derved at sætte kryds i kassen ved den passende celle. I de grønne rammer skal eleverne finde og markere cellen som indeholder færrest genstande. Der er mulighed for at få 4 rigtige i alt i denne opgave.

Formålet med opgaven er at vurdere, om eleven har kendskab til førfaglige matematiske begreber; flest og færrest. De to begreber er kun et lille udpluk af de vigtige førfaglige begreber, som er nødvendigt at have kendskab til i børnehaveklassen.

Opgave I - Subtraktion

Denne opgave har til formål at vurdere elevens kendskab til subtraktion. Nederst på opgavesiden forventes det, at eleverne beregner et regnestykke med minus, og nedskriver resultatet. De kan hente hjælp til højre fra bjælken med kasserne. Derefter sætter eleverne kryds i det antal, der skal fjernes, hvor de derved kan tælle, hvor mange der er tilbage. De kan også gøre brug af andre hjælpemidler, som de er vant til i hverdagen. Dog er det ikke krav at anvende de små kasser til udregningen. Der er mulighed for at få 4 rigtige i opgaven.

Under prøven er det væsentligt at være opmærksom på hvordan eleven løser opgaven, og om eleven eksempelvis bruger konkrete materialer til at tælle. Dette kan give læreren viden om, hvor langt eleven er nået i tilegnelsen af subtraktion.

Opgave J - Former

Med det formål at vurdere elevens kendskab til trekanter, cirkler, firkanter og kvadrater, samt de forskellige typer af trekanter og firkanter er der på siden i denne opgave introduceret fire former i forskellige farver. Det forventes, at eleven farver de tomme former i den bestemte farve som er angivet i opgaven. Trekanter skal farves røde, cirkler gule, kvadrater grønne og alle de andre firkanter blå. Opgaven kan være udfordrende for eleven, da der er forskellige trekanter, som ligesidet, ligebenede og retvinklede, samt forskellige firkanter, som rektangler, trapezer og kvadrater. Der er i alt otte trekanter, tre cirkler, tolv firkanter og fem kvadrater, og dermed mulighed for at få 28 rigtige i alt.

Der kan være nogle elever, som kun kan genkende figurer, der ligner de fire former, som er anvist øverst på siden i opgaven, dog kan der ligeledes være nogle elever der er tilbøjelige til at genkende former i forskellige størrelser. Derfor er det relevant at registrere hvilke typer former eleven kan genkende og hvilke former eleven ikke har kendskab til.

Opgave K - Mønstre

Formålet med denne opgave er at vurdere, om eleven kan se mønstre, samt tegne og farve videre på halvfærdige mønstre. Dette sker ved at der på opgavesiden fremgår ufærdige fem forskellige mønstre, hvor mønstrene øverst på siden farves og færdiggøres ved brug af to forskellige farver, mens mønstrene nederst på siden tegnes og færdiggøres.

Som det er nævnt i begyndelsen af kapitlet er testens formål at få viden om elevens matematiske kompetencer og forudsætninger. Herudover er testen også brugbar som en overleveringssamtale mellem børnehaveklasselæreren og 1. klasses matematiklærer (Heinze & Kemner, 2019, s. 5), idet testen afdækker hver enkelt elevs matematiske forudsætninger i slutningen af børnehaveklassen (Heinze & Kemner, 2019, s. 5) og derfor kan fungere som elevens startsbasis i matematik i det nye skoleår. Derudover kan testen, ligeledes anvendes til at tilrettelægge en differentieret undervisning særligt for de svage elever i matematik enten i slutningen af børnehaveklassen eller i starten af 1. klasse eller begge dele for derved at forbedre eleven i matematik. Der kan eksempelvis dannes et hold med svage elever med det formål at styrke deres svage sider (Heinze & Kemner, 2019, s. 5).

2.2 Data

I dette afsnit vil datasættet beskrives, hertil hvordan datasættet er opsamlet og hvilken konstruktion den bygger på samt populationen.

2.2.1 Studieperiode

Dataene til denne undersøgelse er dannet på baggrund af en test, der er udført på en skole i skoleåret 2020/2021 i matematikundervisning i en børnehaveklasse. Testen er blevet gennemført ved brug af en elevhæfte, som er blevet udleveret til eleverne og derefter stykkevis er blevet udfyldt af eleverne gennem en løbende introduktion til opgaverne. Vejledning til udførsel af testen fremgår i instruktionen i lærervejledningen, hvilket kan findes i Heinze og Kemner, 2019, s. 10–14. Efter elevernes gennemførelse blev opgaven rettet og alle elevers testresultater blev opsamlet.

Testen blev gennemført to gange på et skoleår, hvor den første i starten af skoleåret, det vil sige oktober 2020. Op til den første test blev eleverne undervist i matematik i omkring to måneder i emner som at tælle fra 1-100 med hele klassen, og at tælle samt øve i at skrive tallene fra 1-9. Den anden test blev foretaget i slutningen af skoleåret, det vil sige i maj 2021. Undervisning der blev tilrettelagt efter den første test og op til den anden var baseret på opgaver, der primært havde fokus på tal, talsymboler, antal, talord, figurer, former og mønstre. Disse emner blev undervist ved brug af en matematik arbejdsbog og kopisider fra andre bøger, som er udviklet for elever i børnehaveklasseniveau og som leder eleven frem mod at opnå de kompetencer, der er en forudsætning for at mestre opgaverne i testen.

Som det fremgår i vejledningen anbefales testen at blive udført i slutningen af børnehaveklassen, typisk i maj måned (Heinze & Kemner, 2019, s. 9), idét eleverne til den tid forventes at tilegne sig de emner, der indgår i testen, og derfor vurderes til at være i stand til at løse opgaverne. Det anbefales, at dele prøven over fire dage med én lektion i hver af de dage til at udføre testen (Heinze & Kemner, 2019, s. 9). Denne anbefaling blev rådet, da børnenes koncentration ikke varer i lang tid. Seksårsalderen svarer til det alder hvor der sker udvikling af et bestemt område i hjernen, som er særligt egnet til at stimulere koncentrationsevnen, hvilket betyder at eleverne i børnehaveklasseniveau som typisk rammer seksårsalderen med tiden bliver bedre til at lære at arbejde koncentreret. Koncentrationen kan vare mellem 5-20 minutter afhængig af opgavens sværhedsgrad. Hvis det er en udfordrende opgave kan det for eleverne vare længe om at løse opgaverne, hvor det modsat dette vil være betydeligt nemmere at løse lette opgaver.

Ifølge vejledningen er det meget vigtigt (Heinze & Kemner, 2019, s. 10), at læreren følger testens instrukser, og fortæller opgaven, som det står beskrevet i lærervejledningen. Dette som følge af at undgå misforståelser relateret til opgaveudførslen, da der blandt elever også kan være nogle svage ressourcesvage elever som kan være særligt udfordret med at forstå opgaven. Desuden er det tilladt at spørge læreren om hjælp, men læreren må kun hjælpe i et begrænset omfang. I udførsel af denne test er vejledningen blevet fulgt nøje og opgaverne er præsenteret for eleverne, som det fremstår i vejledningen.

Eleverne har brugt blyant og viskelæder til at løse de fleste opgaver. Derudover har eleverne også gjort brug af farveblyanter i farverne rød, gul grøn og blå til opgave J og opgave K. Der har været tællematerialer til rådighed, som eleverne kunne benytte sig af under prøven (Heinze & Kemner, 2019, s. 7). Derudover har der været nogle elever, som gjorde brug af deres poser med ispinde som tællemateriale.

Afslutningsvis skal det bemærkes, at testen er udviklet for elever, der er nået til slutningen af børnehaveklassen, dette betyder, at eleverne i den første test i starten af børnehaveklassen endnu ikke fået de nødvendige forudsætninger for at gennemføre testen, og at de derfor ikke har de samme vilkår for at løse opgaverne .

2.2.2 Populationen af elever

Resultaterne for datasættet er udarbejdet i børnehaveklassen på skoleåret 2020/2021. Klassen bestod af 21 tosprogede elever på fem og seks år, hvoraf 16 af dem var piger, og 5 var drenge. Undervisnigspligten indtræder, jf. folkeskoleloven §34, den 1. august i det kalenderår, hvor barnet fylder seks år (Folkeskoleloven, LBK nr. 1887 af 01.10.2021). Derfor kan der også være nogle elever der starter i skole i femårsalderen, netop fordi at det er obligatorisk, at alle børn skal starte i skole i det kalenderår, de fylder seks. Det betyder, at fødselsdatoen og folkeskoleloven er bestemmende for, hvornår et barn skal begynde i skole og ikke elevernes kompetencer.

Eleverne i børnehaveklassen, der indgår i populationen er født i år 2014. Nogle elever er født i starten af året, mens andre er født i slutningen, hvilket betyder, at eleverne kan være forskellige i alderen månedligt i forhold til hvornår de begynder i skole. Da eleverne i den samme klasse har forskellige fødselsdato, er der nogle uger eller måneders forskel mellem elevernes fødselsdage, og dermed også forskel i deres udvikling. Det vil sige, at elevernes varierende fødselsdato på året har betydning for deres forskelligheder i udviklingen. Tierney og Nelson III (2009, s. 2) understreger, at forskelle i elevernes alder på tværs kan betyde, at eleverne indbyrdes kan være forskellige i den mentale udvikling. Der kan være flere dage, uger eller måneder mellem børnene, og det kan have betydning for deres faglige udvikling. Dette kan netop have betydning for testresultaterne, da den mentale udvikling er et basis for at børn tilegner sig viden og færdigheder. Det kan ikke alene siges, at de ældste elever er bedre end de yngste, men forskellen mellem fødselsdagene kan have en indflydelse under testningen og for resultatet, netop fordi de kan have forskellige kompetencer og færdigheder med hensyn til skrivning, tænkning, forståelse og koncentration. Der opstår også tilfælde i starten af børnehaveklassen, hvor yngre elever har bedre kompetencer og færdigheder end de ældre. Det ses ofte, at denne forskel aftager med tiden, fordi de i løbet af børnehaveklassen får den samme undervisning i klassen, der har til formål at kunne rumme alle elever uanset færdigheder og kompetencer. Når eleverne når slutningen af børnehaveklassen, kan de med den undervisning de får, nærmest sidestilles med hinanden. Der fremgår ikke elevernes fødselsdato i testen, derfor har der i denne undersøgelse ikke været muligt at undersøge alderen som et variabel.

Desuden kommer eleverne fra forskellige miljøer, som kan variere i adgangen til ressourcer, hvor eleverne derfor kan være forskellige i kompetencer og færdigheder. Disse kompetencer og færdigheder kan være forskellige for eksempel med hensyn til den sproglige forståelse og den motoriske udvikling. Ifølge Tierney og Nelson III (2009, s. 4) udvikles de mange funktioner i den menneskelige hjerner ikke på samme tid hos alle individer, og deres udviklingsmønstre følger heller ikke samme tidsramme. Det kan derfor siges, at både fordi de har forskellige fødselsdatoer på året de begynder i skole, og fordi de er opvokset i forskellige miljøer, har eleverne udviklet sig forskelligt, hvor de derfor ikke har indvundet de samme kompetencer og færdigheder inden de startede i skole. De er hver især forskellige individer, der er påvirket af forskellige gen og miljø interaktioner, og har varierende fødselsdage.

Ud fra disse forskelle kan det siges, at nogle elever kan være særligt udfordret i at opnå færdigheder og kompetencer, hvor det eksempelvis kan påvirke eleverne i talskrivning, som herved kan tyde som en fejl i opgavebesvarelsen. De kan også lave fejl, når der skal tælles antal genstande i eksempelvis opgave A, opgave E og opgave F, dette ved at overse nogle genstande der er vigtig for opgavebesvarelsen.

2.2.3 Beskrivelse af datasættet

Det grundlæggende i datasættet er testresultaterne for Matematikvurdering 0. klasse. Der er resultater for både den første test i oktober 2020 og den anden test i maj 2021. De 21 elever i børnehaveklassen, der har udført testen to gange, har svaret på 11 spørgsmål i hver test. Det vil sige, at hver elev har samlet set svaret på i alt 22 spørgsmål – det svarer til 22 testresultater per elev. Alt i alt svarer det til 462 observationer/rækker i datasættet. Der er derudover 6 forskellige parametre/forklarende variable, som vil indgå i analysen. Disse seks parametre er;

- **id:** - Det er en udtryk der bruges for hver enkelt elev, der har udført testen, og betegnes med "*Elev01*, *Elev02*, ..., *Elev21*".
- **opgave:** Det angiver den opgave, der er besvaret af eleven og betegnes ved "*A*, *B*, ..., *K*". Desuden er alle opgaver i testen beskrevet i Afsnit 2.1.
- **resultat:** Det står for resultatet af elevernes opgavebesvarelse – og svarer til hvor mange rigtige eleven har opnået i opgaven.
- **max:** Det står for maksimum, og angiver det antal rigtige, eleverne højest kan få i den tilsvarende opgave.
- **maaned:** Det står for den måned opgavebesvarelsen stammer fra – enten er det fra oktober måned, forkortet med "*okt*", eller så er det fra maj måned, angivet ved "*maj*".
- **koen:** Det angiver elevernes køn, hvor "*p*" står for pige, og "*d*" står for dreng.

Kapitel 3

Grundlæggende Færdigheder i Matematik

Der er brug for en forståelse af udviklingen af matematik hos den enkelte individ for at kunne snakke om elevernes progression og opgavernes sværhedsgrad i forhold til elevernes besvarelser. Det kan være nyttigt for elevernes udvikling, at drage kendskab til børnenes færdighedsudvikling i matematik og i matematikforståelse. Først derefter kan elevernes indlæring og forbedring tages i betragtning, når de skal undervises.

At tælle er det mest basale aktivitet et barn laver, når det omhandler matematisk udvikling. De første færdigheder eleverne lærer og udvikler i skolen, er at tælle og tilknytte objekter med talsymboler.

Hvad er færdighed

Færdighed kan udover de praktiske, kropslige og motoriske færdigheder også vedrøre de intellektuelle færdigheder; at besidde stor viden opfattes som en intellektuel færdighed. Det der er fælles kendetegn ved alle disse typer af færdigher, er at de kan udvikles, forøges og forbedres (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 11–12). Det forventes at børn med tiden udvikler deres færdigheder, og prøver at opnå de kompetencer voksne mennesker besidder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 13). Men det er svært for børn at besidde færdigheder, som de endnu ikke har udviklet kompetencer til. Da hjernen er en del af kroppen, omfatter de mentale færdigheder også de kropslige færdigheder. Derfor kan de grundlæggende færdigheder i matematik og talfærdigheder trækkes til de motoriske og kropslige færdigheder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 15). Udviklingen af færdigheder sker i forbindelse med hjernens udvikling. Ifølge Sigmundsson og Haga2007 refereres færdighed til "en handling eller en opgave, som udføres og som har et bestemt mål eller en bestemt hensigt". Færdigheder er handlinger et individ selv styrer, eksempelvis er dét at tælle en kognitiv færdighed, som man gør, når man for eksempel skal tælle genstande. Derudover kan færdighedsudvikling også beskrives ved kvantitative og kvalitative ændringer af færdigheder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 22). Kvantitative ændringer i færdigheder betyder, at man erhverver nye færdigheder, mens kvalitative ændringer svarer til forbedringer af de færdigheder, man i forvejen har erhvervet (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 22). Ordet kan ifølge "Børnehaveklasse" også beskrives med ordet dygtighed. Når dette tages i betragtning kræver dygtigheden ikke kun at en handling udføres, men også at den gøres godt. Det er også forskelligt, hvor godt man udfører en vis handling eller besidder en færdighed.

Ifølge Sigmundsson og Haga (2007, s. 43) defineres udvikling som forandring over tid, hvor man udvikler sig fra en tilstand til en anden. Når dette tages i betragtning i forhold til udviklingen af færdigheder, er udviklingen et resultat af gentagelse og øvelse af den pågældende færdighed (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 43). Det betyder, at hvis eleven vil mestre en færdighed, må den målrettet øve sig i den pågældende handling. Hvis eleven for eksempel ikke genkender talsymboler, skal eleven øve sig i det, hvor eleven først efter vis antal gange kan indvinde færdigheden og dermed udviklet sig (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 43).

Læring af færdigheder bør specificeres til den færdighed, eleven ikke behersker særlig godt (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 31). Hvis den færdighed en elev ikke behersker særlig godt, indeles i delfærdigheder, har eleven mulighed for at udvikle sig mere effektivt (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 31). Man kan ikke alene sige at eleven har gode matematikfærdigheder, for eleven kan ikke nødvendigvis være lige så god til alle delopgaverne i matematik (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 31). Eleven kan for eksempel være bedre til talsymbolerne end formerne. Elever har individuelle forskelle, og det er ud fra disse forskelle, elevernes kompetencer skal udvikles.

3.1 Matematik undervisningen i børnehaveklasse

I dette afsnit vil der fortælles om børnenes overgang fra børnehaven til undervisning i børnehaveklassen. Der vil fortælles meget kort om, hvordan børnene i vuggestuen og børnehaven bliver gjort klar til skolen. Det er vigtigt at vide, at eleverne bliver støttet op omkring deres udvikling med vurdering i daginstitutionen (vuggestuen og børnehaven), fordi det ifølge de epigenetiske teorier bygger hvert stadium i udviklingen på de tidligere stadier (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 25). Når barnet bliver støttet op om udviklingen i de tidligere stadier, vil barnet udviklingsmæssigt følge med i den stadium, barnet er nået til. Det vil medføre, at når barnet skal starte i skole, har barnet udviklet sig nok til at kunne blive undervist, samt udføre en test som dette. Afslutningsvis vil der i dette afsnit forklares om hvad Fælles Mål for børnehaveklassen siger om undervisningen i matematik.

I daginstitutioner bliver barnets hverdag observeret i forhold til, om deres udvikling og kompetencer er alderssvarende. Ifølge EVA (Danmarks Evalueringsinstitut) indebærer vurderingsredskaber, som anvendes i daginstitutioner, områder som børns personlige udvikling, trivsel, leg, læring, sociale kompetencer, sproglige udvikling, motoriske udvikling og overgang til børnehave og skole (Danmarks Evalueringsinstitut, 2014). Disse vurderingsredskaber gør, at børnene bliver støttet op om deres udvikling, hvor eleverne gøres klar til at begynde i skole (Danmarks Evalueringsinstitut, 2014). Daginstitutioner har deres egen vurderingsredskaber, når de skal følge op på og støtte i børnenes udvikling. Da de enkelte elever har været på forskellige institutioner, er de støttet op om deres udvikling med forskellige metoder. Det der er vigtigt for elevernes faglige udvikling, er hvor meget de ved, og hvad de kan, når de starter i skolen. Grunden til, at observationen i daginstitutionen nævnes, er fordi at eleverne, som skal testes med matematikvurdering 0. klasse, kommer fra en daginstitution, som har anvendt de nødvendige redskaber for barnets udvikling, og derfor anses som værende klar til undervisningen på skolen.

Der er forskel på hvilket niveau, hver enkelt elev er på, og hvilke kompetencer de har, når de begynder i skole. Der er nogle børn, som allerede har fået viden og erfaring i hverdagen om matematik, hvor der derimod også kan være nogle elever, som først i børnehaveklassen begynder at arbejde med tal og matematiske begreber. Eleverne er også forskellige med hensyn til deres sproglige- og motoriske udvikling. Men selvom eleverne i bund og grund er forskellige fra hinanden med deres kompetencer, skal undervisningen i børnehaveklassen tilrettelægges således, at den skal kunne rumme alle elever uanset deres forskelle i kompetencer.

Som det er nævnt i Introduktionen 1 udarbejder Børne- og Undervisningsministeriet, jf. folkeskoleloven §10, regler om formålet med undervisningen. Dette kaldes for Fælles Mål, og det er de nationale mål, som beskriver, hvad eleverne skal lære i skolens fag og emner samt børnehaveklasse (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021, 22. juni). Hver klasse og fag har sin egen Fælles Mål, som undervisningen bliver tilrettelagt efter. Fælles Mål består af fagets formål, kompetencemål og underliggende færdigheds- og vidensområder (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021, 22. juni), der således danner de overordnede faglige elementer for lærerens overvejelser om tilrettelæggelsen af undervisningen samt indholdet (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 3). Færdigheds- og vidensområderne bliver beskrevet med vejledende færdigheds- og vidensmål (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021, 22. juni). I udvalgte områder i dansk og matematik er der opstillet opmærksomhedspunkter (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021, 22. juni). Børne- og Undervisningsministeriet udvikler også vejledende læseplaner, der uddyber færdigheds- og vidensmålene i Fælles Målet. Undervisningen i børnehaveklassen skal, jf. folkeskoleloven §11, gives overvejende i form af leg og andre udviklende aktiviteter (Folkeskoleloven, LBK nr. 1887 af 01.10.2021). Indholdet af undervisningen skal også, ifølge det samme lov, indholde bestemte kompetenceområder, hvor en af disse områder er matematisk opmærksomhed. Ifølge kompetenceområdet matematisk opmærksomhed skal undervisningen lede eleven frem mod at anvende tal og geometrisk sprog i hverdagssituationer (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 4). Dette er det kompetencemål, eleven forventes at have opnået ved slutningen af børnehaveklassen (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 4). De fire færdigheds- og vidensområder som matematisk opmærksomhed omfatter, er som beskrevet nedenunder (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 16):

- **Tal** fokuserer på elevernes forståelse af sammenhænge mellem mængde, antal, talord og talsymbol.
  Opmærksomhedspunktet for tal er, at eleverne kan genkende og ordne talsymbolerne og anvende dem til antalsbestemmelse.

- **Antal** fokuserer på, at eleverne gennem lege og i praktiske situationer skal udvikle varierende metoder til antalsbestemmelse.

- **Figurer og mønstre** fokuserer på, at eleverne skal arbejde med enkle geometriske figurer bl.a. kvadrat, firkant, trekant og cirkel.

- **Sprog og tankegang** fokuserer på, at eleverne arbejder med enkle mundtlige forklaringer i forbindelse med antalsbestemmelser.

Ifølge læseplanen for børnehaveklassen tager området matematisk opmærksomhed udgangspunkt i den legende og undersøgende tilgang i forhold til elevernes talforståelse og forståelse af matematik, logik og analytisk tænkning (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 9). Matematisk opmærksomhed handler både om konkrete ting, for eksempel tal, mængder og figurer, men også om, hvor vi kan se matematikken i hverdagen, hvilket sprog vi bruger i matematik, og hvordan vi kan være nysgerrige og undersøgende på matematik og matematiske begreber (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 9). Ifølge læseplanen, arbejdes der i undervisningen med tal, symboler, mængder, begreber, geometri, figurer med mere for at opnå kompetencemålet for matematik (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 9). Eleverne får derigennem mulighed for at samtale om matematik og udvikle deres matematiske sprog (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 9).

Det forventes, at eleverne i slutningen af skoleåret indlærer og får de forskellige kompetencer indenfor matematik og opfylder kompetencemålene. Det forventes at eleverne tilegner sig viden og færdigheder i undervisningen, som er tilrettelagt i forhold til de færdigheds- og vidensmål der indgår i kompetenceområdet "matematisk opmærksomhed" i børnehaveklassens Fælles Mål.

3.2 Grundlæggende matematisk færdighedsudvikling hos børn

De undersøgelser der er foretaget blandt studerende har vist sig, at mange af dem mangler grundlæggende matematiske færdigheder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 146). Derfor er det vigtigt, at rette opmærksomheden mod udviklingen af de basale færdigheder i matematik i skolen. Hvis eleven ikke har klaret sig godt eller har ikke haft en fremskridt i opgaven, viser det sig at eleven ikke har trænet nok i netop det område, som opgavet omfatter. Eleven har ikke udviklet sine færdigheder i det område.

I læseplanet og undervisninsplanet for børnehaveklasse er de særlige grundlæggende færdigheder, som er vigtige for elevernes faglige og personlige udvikling beskrevet. Matematisk opmærksomhed er én af de områder i kompetencemål, som støtter barnets faglige og personlige udvikling. Under dette kompetenceområde er der færdigheds- og vidensområdet, det vil sige tal, der indholder et opmærksomhedspunkt. Ifølge læseplanet (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 27) er opmærksomhedpunkt "en beskrivelse af det forventede beherskelsesniveau af grundlæggende færdigheder eller udvalgte mål, som er en forudsætning for, at eleverne kan få tilstrækkeligt udbytte af de efterfølgende klassetrin og fag". Det er vigtigt at være opmærksom på, om eleverne opnår disse grundlæggende viden og færdigheder, da det påvirker elevens fremtidige præstation og læring. Undersøgelser der er blevet foretaget har vist sig, at mange studerende mangler grundlæggende matematiske færdigheder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 146). De grundlæggende færdigheder i matematik er derfor vigtige at være opmærksom på i skolen, da det er mest i skolen, at mennesker lærer og udvikler sig. Udviklingen af de grundlæggende færdigheder må ske i skolen i det alder, som giver dem muligheden for det. Det vil ikke nytte at sætte et mål for eleven, som endnu ikke har udviklet de fysiske og kognitive kompetencer, der er nødvendige for de ønskede færdigheder eleven skal opnå. De områder som er centrale for eleven i begyndelsen af skolen er tal, talopfattelse og talbehandling (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 146).

Frostad beskriver de grundlæggende færdigheder i matematik med to kundskabstyper; procedurekundskab og konceptuel kundskab (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 146). Procedurekundskab handler om at kunne løse forskellige typer matematikopgaver. Dette kan gøres ved løsning af simple additions- og subtraktionsopgaver og at tælle. Det er blevet nævnt, at når elever begynder i skole har de fået bekendskab med talsymboler i forskellige sammenhænge, både som navne; bus nummer og nummerplade eller som redskaber for at kvantificere antal ved at tælle (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 147). Ifølge Frostad (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 147) handler at kunne tælle sig om to færdigheder; for det første er det at lære en symbolrække, som altid må siges i en bestem rækkefølge, for det andet må man lære sig/have kendskab til regler for, hvordan denne symbolrække skal anvendes, når man tæller (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 153).

Sigmundsson og Haga (2007, s. 147–148) nævner fem principper, som er identificeret af Gelman og Gallisted. Disse principper må børn have en indsigt i for at kunne anvende tælling på en korrekt måde. Disse principper er beskrevet således;

1. En-til-en-princippet, som siger at hvert objekt, der skal tælles, kun skal knyttes til ét unikt tælleord. Dette bliver anvendt i opgave D om antal og talsymboler.

2. Fast tællefølge-principper, som siger, at tælleordene altid skal anvendes i en fast rækkefølge. Dette princip bliver anvendt i opgave A, om talrækken og opgave B om talrækker.

3. Kardinalitetsprincippet, som siger, at det tælleord, man siger, når man peger på det sidste objekt, repræsenterer antallet (eller kardinaliteten) for hele mængden. Dette princip bliver anvendt i opgave D om antal og symboler, og opgave E om antal og talgenkendelse.

4. Vilkårlig rækkefølge-princippet, som siger, at man kan tælle objekterne i en vilkårlig rækkefølge, så længe en-til-en-princippet følges. Dette princip bliver anvendt i opgave F om tælle og talsymbol, og opgave D om antal og symboler.

5. Abstraktionsprincippet, som siger, at forskellige typer objekter kan tælles samtidig. Dette princip vedrører opgave F om tælle og talsymbol. Dette princip bliver anvendt i opgave D.

Målet med matematikundervisningen er, at elever skal have kundskaber til at udvikle grundlæggende færdigheder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 152). Børn kan fortolke talsymbolerne forskelligt (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 155). De kan tolke det som, at talsymbolerne kommer i en bestemt rækkefølge i symbolrækken; det vil sige som en sekvens. Børnenes opfattelse af talsymbolerne på denne måde vil medøre, at barnet forstår handlingen af at tælle som en måde at gå frem i talrækken på (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 155). Ifølge Piaget udvikler børn, der opfatter talsymbolet som en sekvens, ikke en mængdeopfattelse, og derfor lærer de proceduren uden en begrebsmæssig forståelse knyttet til proceduren (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 155). Den anden måde at opfatte talsymbolerne på er, at indse at de repræsenterer strukturerende mængder (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 155). For disse børn er talsymboler ikke kun en repræsentation i talrækken, men også en mængdeopfattelse af det symbolet repræsenterer, hvor børn med denne opfattelse kan regne med mentale objekter; det vil sige barnet tænker matematisk (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 155).

Når barnet ikke mestrer en færdighed, er det ofte, fordi barnet mangler mere træning i den færdighed,. der skal forbedres. Nogle børn har ikke fået tilstrækkelig stimuli og øvelser til at mestre forskellige færdigheder. (Sigmundsson & Haga, 2007, s. 21).

Kapitel 4

Metode

I dette kapitel vil den matematiske teori, der er basis for den statistiske analyse af testen matematikvurdering 0. klasse forklares. Dette kapitel er primært baseret på (Madsen & Thyregod, 2011, Kapitel 4) og (McCullagh & Nelder, 1990, Kapitel 2).

Generaliserede lineære modeller anvendes i dette projekt, fordi den virker på responsvariabler, der ikke nødvendigvis er kvantitative, kontinuerte eller normalfordelte. I generaliserede lineære modeller er fejlledene ikke normale, som det er i den klassiske lineær model, og variansen vil ændre sig med middelværdien. For at opfylde forudsætningerne for klassisk lineær modellering anvendes en anden måleskala. I geneneraliserede lineære modeller opnås dette med en transformation af middelværdien m_i, hvor der anvendes en bestemt funktion for at udforme lineære modeller. På den måde bevares observationerne og deres fordelingsmæssige egenskaber ikke-transformeret.

Et vigtigt egenskab ved generaliserede lineære modeller er, at de kan arbejde ud fra uafhængige observationer med kendte størrelser (McCullagh & Nelder, 1990, s. 21). Da generaliserede lineær modeller er en udvidelse af den klassiske lineær model (McCullagh & Nelder, 1990, s. 26), kan det forstås bedre, hvis udvidelsen og forskellen fra lineære modeller til generaliserede lineære modeller forklares.

Derfor konstrueres der først en klassisk lineær model. Betragt en vilkårlige variabel $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$, hvis komponenter er uafhængigt fordelt med middelværdien m. En realisation af **Y**, som angives ved $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, er en vektor af observationer med n komponenter. Hermed kan m beskrives i form af modelvektoren $\mathbf{x}_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og parametervektoren $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$. I den klassiske lineær model tager m formen

$$m = \overset{k}{\underset{1}{\mathring{a}}} \mathbf{x}_j b_j, \tag{4.1}$$

hvor parametrene b er ukendte, og som derfor skal estimeres ud fra data. Hvis vi lader i være en indeks for observationerne, får vi

$$E[Y_i] = m_i = \overset{k}{\underset{1}{\mathring{a}}} x_{ij} b_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Det skal bemærkes, at x_{ij} er værdien for den j´te kovariat for observationen i. Dette kan skrives som en matrix form ved

$$m = \mathbf{X}b,$$

hvor **X** er $(n \times k)$–matrix, der kaldes for *modelmatricen*.

I den klassiske lineær model følger fejlleddene en Gaussisk fordeling (normalfordeling). Når det hele opsummeres, kan formen på den klassiske lineær model beskrives som: En vilkårlig variabel **Y**, hvor komponenterne er uafhængige normale variable med en konstant varians s^2 og

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y}] = m \qquad \text{hvor} \quad m = \mathbf{X}b. \tag{4.3}$$

Ligning (4.3) for en klassisk lineær model anvendes nu til at producere en række specifikationer, der vil gøre det lettere at forstå overgangen til generaliserede lineære modeller. Specifikationerne for den klassiske lineær model er som følgende (McCullagh & Nelder, 1990, s. 27):

1. **Den vilkårlige komponent:** Komponenterne for **Y** er uafhængige og normalfordelte med $E[Y] = m$ og konstant varians s^2 ;

2. **Den systematiske komponent:** Kovariaterne $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ producerer en lineær prædiktor h som er givet ved

$$h = \overset{k}{\underset{1}{\mathring{a}}} \mathbf{x}_j b_j \; ; \tag{4.4}$$

3. **Link:** Forbindelsen mellem den vilkårlige og systematiske komponent sker ved
$$m = h. \tag{4.5}$$

Det ses, at generaliseringen introducerer en ny symbol h for den lineære prædiktor, og på den måde viser den tredje komponent, at m og h i virkeligheden er identisk med hinanden. Ved at skrive

$$h_i = g(m_i), \tag{4.6}$$

inddrages $g(\cdot)$, og den vil blive kaldt for *linkfunktionen*.

Det ses ud fra specifikationerne, at en klassisk lineær model har en (Gaussisk) normalfordeling i den første komponent og identitetsfunktionen som link i den tredje komponent. Når der tages udgangspunkt i disse specifikationer, kan det siges, at den generaliserede lineær model tillader to udvidelser. Den første er, at fordelingen i den første komponent kan komme fra en anden eksponentiel familie andet end en normalfordeling, og det andet udvidelse er linkfunktionen i den tredje komponent, som kan være en hvilken som helst monoton differentierbar funktion (McCullagh & Nelder, 1990, s. 27). Disse udvidelser fører os til specifikationerne for den generaliserede lineær model, som er følgende (Madsen & Thyregod, 2011, s. 100):**??**

1. **Fordelingen/Variansfunktionen:** Bestemmelse af fordelingen/variansfunktionen $V(m)$, som fortæller hvorledes variansen ændrer sig med m ;

2. **Lineær Prædiktor:** Bestemmelse af den lineære afhængighed af de forklarende variable
$$g(m) = h = (\mathbf{x})^T b \; ; \tag{4.7}$$

3. **Linkfunktionen:** Bestemmelsen af linkfunktionen $g(\cdot)$, som er en funktion af middelværdien, der kan beskrives lineært ved de forklarende variable. Den danner relationen mellem fordelingen/variansfunktionen og den lineære prædiktor ;

4. **Præcision:** Præcision er valgfrit, og hvis der er behov for dens anvendelse, er den formuleret som kendte individuelle vægte, $l_i = w_i$, hvor $l > 0$ er en *præcisionsparamter* og w_i en vægt, eller som en fælles spredningsparameter, $l = 1/s^2$, eller en kombination af dem, $l_i = w_i/s^2$.

De nævnte komponenter skal beskrives for den model, der passer til datasættet, beskrevet i Afsnit 2.2. De forklares i det omfang, det er relevant for datasættet. Der begyndes med en uddybning af eksponentielle familier af fordelinger, da det er modellens fordeling, der først skal blive specificeret. Derefter vil generaliserede lineære modeller og linkfunktionen præsenteres. Det skal nævnes, at præcision ikke anvendes i modellen, derfor er der ikke behov for en yderligere forklaring til dette.

Eksponentielle familier af fordelinger

Generaliserede lineære modeller er knyttet til bestemte fordelinger, som er eksponentielle familier af fordelinger. Det antages, at responsvariablen Y er en vilkårlig variabel med en fordeling givet ved en familie af tæthedsfunktioner $f_Y(y; q)$, hvor $q \in W$, og hvor parameterrummet $W \subseteq R$. Herved kan en familie af sandsynlighedstætheder skrives på formen

$$f_Y(y; q) = c(y) \exp(qy - k(q)). \tag{4.8}$$

Dette kaldes for den *naturlige eksponentielle familie* af fordelinger, og er karakteriseret ved dens støtte, som er mængden af y værdier, hvor $f_Y(y; q) > 0$. Funktionen $k(q)$ kaldes for *kumulant generatoren*. Repræsentationen i ligning (4.8) kaldes for den kanoniske parametrisation af familien, fordi den bliver udtrykt med parameteren q, som kaldes for den *kanoniske parameter*.

Et vigtigt element indenfor eksponentielle familier er deres spredning. Når der indføres en ekstra parameter, l, til den naturlige eksponentielle familie, giver det muligheden for en beskrivelse af fordelinger uden en entydig relation mellem middelværdien og variansen. Når præcisionsparameteren $l > 0$ indføres for en familie af sandsynlighedstætheder fås den *eksponentielle spredningsfamilie* af fordelinger

$$f_Y(y;q) = c(y, l)\exp(l\{qy - k(q)\}). \tag{4.9}$$

Formålet med spredningsfamilier er at adskille middelværdi relaterede fordelingsegenskaber, der er beskrevet med $k(q)$, fra spredningsegenskaberne som teststørrelse og fælles varians. Hvis Y har en fordeling givet ved ligning (4.8), så er egenskaberne for eksponentielle spredningsfamilier, der er bestemt ud fra $k(q)$ og l givet ved

$$\mathrm{E}[Y] = k'(q) \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Var}[Y] = \frac{k''(q)}{l}. \tag{4.10}$$

Variansoperatoren, $\mathrm{Var}[Y]$, beregner variansen i sandsynlighedsfordelingen af en vilkårlig variabel Y. Funktionen

$$t(q) = k'(q) = m \tag{4.11}$$

er hermed monoton, og den definerer en én til én afbildning, $m = t(q) \Leftrightarrow q = t^{-1}(m)$, af den kanoniske parameter q fra parameterrummet W ind i middelværdirummet $\mathcal{M} \subseteq \mathsf{R}$. Middelværdirummet er det konvekse hylster for fordelingens støtte. For nogle fordelinger er middelværdirummet en delmængde af R, mens det for den binomiale fordeling er $0 < m < n$, hvor n er antalsparameter.

Der er to repræsentationer for en eksponentiel spredningsfamilie, der supplerer hinanden med hver deres fordele. Den ene er repræsentationen i form af kumulant generatoren, $k(\cdot)$, parametriseret med den kanoniske parameter q og præcisions parameteren l. Fordelen med dette er, at parameterrummet er i den reelle linje, og derfor er god til lineære operationer, som netop det vi lige har gennemgået.

Den anden er repræsentationen i form af variansfunktionen, $V(\cdot)$, der bestemmer variansen som en funktion af middelværdiparameteren $m \in \mathcal{M}$ parametriseret med l. Lineære modeller i den kanoniske paramter er specielt anvendelige for normalfordelingen. Modellens tilpasning til datasættet kan på denne måde undersøges direkte, da middelværdien er målt med de samme enheder, som observationerne y. Sammenligning af observationer y med parameterværdierne m kan gøres med *enhedsdeviansen*, givet ved

$$d(y;m) = 2\int_m^y \frac{y-u}{V(u)}du, \tag{4.12}$$

hvor $V(\cdot)$ betegner variansfunktionen. Variansen kan udtrykkes som en funktion af middelværdiparameteren i ligning (4.10) for en givet familie af fordelinger ved

$$V(m) = k''(t^{-1}(m)). \tag{4.13}$$

$V(m)$ kaldes for *enhedsvariansfunktionen*, og det ses, at den relaterer variansen til middelværdien. Tætheden for den eksponentielle spredningsfamilie, ligning (4.9), kan hermed udtrykkes ved middelværdiparameteren m ved

$$g_Y(y;m,l) = a(y,l)\exp\left\{-\frac{l}{2}d(y;m)\right\}. \tag{4.14}$$

Relationen mellem de to parametriseringer er bestemt ud fra $m = t(q)$, hvor $t(\cdot)$ er givet ved ligning (4.11). Den inverse afbildning vil resultere i

$$q = t^{-1}(m), \tag{4.15}$$

og kaldes for den *kanoniske linkfunktion*. Den kanoniske linkfunktion transformerer middelværdien til den kanoniske parameter for den eksponentielle spredningsfamilie; det er funktionen, hvor $g(m) = q$.

Generaliserede Lineære Modeller

Antag, at $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ er indbyrdes uafhængige, og at fordelingerne kan beskrives ved en eksponentiel spredningsmodel, ligning (4.9), med samme variansfunktion $V(m)$. En *generaliseret lineær model* for $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ beskriver en affin hypotese for $h_1, h_2, \ldots, h_n$, hvor

$$h_i = g(m_i), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.16}$$

er en transformation af middelværdien $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Betragtes det lineære underrum $L = \text{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ af R^n udspændt af k vektorer, hvor $k < n$, er hypotesen på formen

$$\mathcal{H}_0 : h - h_0 = Xb \in L \qquad \text{med} \quad b \in \mathsf{R}^k, \tag{4.17}$$

hvor h_0 betegner en vektor af kendte forskydningsværdier, og hvor $\mathbf{X}$ har fuld rang. Matricen $\mathbf{X}$ er $(n \times k)$-modelmatricen, hvor den i'te række i modelmatricen, givet ved $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})$, er modelvektoren for den i'te observation.

Det andet komponent i generaliseringen, linkfunktionen, er hermed en én til én kontinuert differentiabel transformation, $g(m_i)$, hvor relationen mellem den lineære prædiktor h_i og middelværdiparameteren $m_i = E[Y_i]$ er givet ved ligning (4.16).

Da linkfunktionen er invertibel, udtrykker den inverse afbildning $g^{-1}(\cdot)$ middelværdien, m, som en funktion af den lineære prædiktor h ved

$$m = g^{-1}(h) \tag{4.18}$$

således, at

$$m_i = g^{-1}({x_i}^T b) = g^{-1}\left(\mathop{\text{å}}_j x_{ij} b_j\right). \tag{4.19}$$

Afbildningen af linkfunktionen sker fra middelværdirummet til (en delmængde af) den reelle akse, og bruges til at forme den lineære prædiktor, $\mathbf{X}b$. Derfor kan relationen mellem de forventede værdier af responsvariablen og de forklarende variable defineres med regressionsmodellen i form af

$$h_i = b_1 x_{i1} + \cdots + b_k x_{ik} = \mathbf{x}_i^T b. \tag{4.20}$$

Det kan ses, at der med denne ligning bygges en lineær model for transformationen af de forventede værdier af responsvariablen, hvor der på højre side er den lineære komponent af modellen. Modellen for alle n observationer, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, kan således skrives på formen

$$\begin{pmatrix} g(m_1) \\ \vdots \\ g(m_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1k}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{nk}^T \end{pmatrix} b \tag{4.21}$$

eller ved

$$g(m) = \mathbf{X}b, \tag{4.22}$$

hvor matricen $\mathbf{X}$ har kendte koefficienter, og parametrene b_k er fast men ukendt. Formålet er hermed at opnå estimater, $\widehat{b}$, for b. Modeller med en fast parameter (fixed effect) kaldes fixed effects models (Madsen & Thyregod, 2011, s. 6). Hvis interessen ikke er i den individuelle faste parameter, men i variationen af den underliggende sande parameter, vil det lede til *random effect models*.

4.1 Den binomiale fordelingsmodel

I dette projekt bliver en statistisk metode anvendt til at udforme modeller, som skal forudsige de forventede værdier af resultatet for respons variablen, Y_i, som en funktion af de kendte uafhængige variable, $x_{i1}, \ldots, x_{ik}$, hvor $i = \{1, \ldots, n\}$ og $k = \{1, \ldots, j\}$. Det vil sige, med de k antal variable vil forskellige modeller analyseres til forventningen af $E[Y_i] = m_i$. Da formålet med projektet er at undersøge elevernes progression, kigges der på elevernes dygtighed ved at betragte deres rigtige og forkerte besvarelser til opgaverne. Det svarer til en binær data, hvor der for eksempel er succes/fiasko. Derfor er det passende at anvende en binomialfordeling for at konstruere generaliserede lineære modeller.

Det datasæt der betragtes som binomielle data, er datasættet bestående af elevernes testresultater i oktober 2020 og maj 2021; beskrivelsen kan findes i Afsnit 2.2. Responsvariablen i binomialfordelingen er en vektor med antallet af succes, svarende til p, og antallet af fiasko, svarende til $1 - p$. Bemærk, at selvom vi modellerer p, som er middelværdien af fraktionen, er responsvektoren en vektor af heltal. I datasættet betragtes elevernes rigtige besvarelse af opgaverne som succes, p, og elevernes forkerte besvarelse som fiasko, $1 - p$. På den måde vil binomialfordelingen anvendes som responsfordeling til den statistiske analyse af datasættet.

Den statistiske analyse udføres ved at tilpasse modeller til datasætttet, hvor der på den måde kan kommenteres på elevernes dygtighed, opgavernes sværhedsgrad, klassens generelle progression og om kønseffekten har en betydning for progressionen. Generaliserede lineære modeller vil finde den ligning, der bedst forudsiger chancen for, at eleverne løser opgaven rigtigt ud fra værdierne for elevernes testresultater. Derfor vil de specifikationerne for generaliserede lineære modeller, der er beskrevet i starten af Kapitel 4, forklares i forhold til binomialfordelingen. Når dette er gjort vil konstruktionen af modellerne, som skal anvendes til den statistiske analyse blive beskrevet.

Antag, at en vilkårlig diskret variabel Z med n_i observationer er binomialfordelt med p_i som sandsynlighedsparameter. Modellen kan betegnes ved $Z \sim \text{Bin}(n_i, p_i)$, hvor tæthedsfunktionen for den stokastisk variabel Z kan for $0 \leq p_i \leq 1$, skrives ved

$$g_Z(n,p) = \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} \tag{4.23}$$

$$= \binom{n}{z} \exp\left(z \log\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\log(1-p)\right) \qquad \text{for } z = \{0,\ldots,n\}. \tag{4.24}$$

Hvis vi indsætter den kanoniske parameter og kumulant generatoren givet ved

$$q = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) \qquad \text{og} \qquad k(q) = \log\left(1+\exp(q)\right)$$

i ligning (4.24), kan sandsynlighedsfunktionen for Z udtrykkes ved

$$g_Z(p,n) = c(z,n)\exp(n\{qz - k(q)\}). \tag{4.25}$$

Hermed ses det, at binomialfordelingen er en eksponentiel spredningsmodel, da den opfylder ligning (4.9) med præcisionsparameteren $l = n$, der repræsenterer kendt antal observationer.

Middelværdien $E[Z]$ findes ved at anvende ligning (4.10) med den kanoniske parameter for binomialfordelingen, og der fås med ligning (4.11), at

$$m = k(q)' = \frac{\exp(q)}{1+\exp(q)} = p_i \tag{4.26}$$

Parameteren p_i er hermed middelværdien for en enhedsobservation.

Linkfunktion, der er relevant i forhold til projektet, er den kanoniske linkfunktion, der hedder *logit-funktionen*. Den kanoniske linkfunktion er direkte knyttet til den anvendte tæthed, altså binomialfordelingen i dette tilfælde. Når ligning (4.15) anvendes på den kanoniske parameter, q, for binomialfordelingen fås den kanoniske linkfunktion, som er givet ved

$$q = t^{-1}(m) = h = \log\left(\frac{m}{1-m}\right). \tag{4.27}$$

Linkfunktionen for middelværdien betragtes som logit-transformationen

$$g(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right), \tag{4.28}$$

som fører $p \in]0,1[$ over i hele den reelle akse, $n \in \mathrm{R}$, hvor det er naturligt at benytte lineære modeller. Enhedsvariansfunktionen, $V(m)$, for binomialfordeling findes ved

$$V(m) = t'(t^{-1}(m)) = m(1-m) = p(1-p), \tag{4.29}$$

som anvendes i enhedsdeviansen, og der fås

$$d(z;m) = 2\left\{z\log\left(\frac{z}{m}\right) + (n-z)\log\left(\frac{1-z}{1-m}\right)\right\}. \tag{4.30}$$

Tæthedsfunktionen for binomialfordelingen kan hermed udtrykkes ved deviansen

$$f_Z(m,n) = a(z;n)\exp\left(-n\left\{z\log\left(\frac{z}{m}\right) + (1-z)\log\left(\frac{1-z}{1-m}\right)\right\}\right). \tag{4.31}$$

Der vil nu for de transformerede middelværdier blive formuleret en lineær model, $g(p_i)$, som en funktion af de observerede logit værdier,

$$g(p_i) = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right), \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{4.32}$$

Det indikerer en model med lineær prædiktor på formen

$$h_i = b_0 + b_1x_1, \ldots, b_jx_i. \tag{4.33}$$

Når parametrene, b_j bliver estimeret opnår man estimaterne $\widehat{b_0}, \widehat{b_1}, \ldots, \widehat{b_j}$. Det er nu muligt at anvende den inverse transformation, som giver prædiktionen af sandsynlighederne, $\widehat{p}_i$, for x ved at anvende logistisk funktion,

$$g^{-1}(h) = m = \frac{\exp(\widehat{b_0} + \widehat{b_1}x_1 + \cdots + \widehat{b_j}x_i)}{1 + \exp(\widehat{b_0} + \widehat{b_1}x_1 + \cdots + \widehat{b_j}x_i)} = \widehat{p}. \tag{4.34}$$

Denne tilgang kaldes for en logistisk regression, og er en speciel tilfælde af generaliserede lineære modeller. Det ses, at denne model vil sikre, at $\hat{p}$ er mellem 0 og 1. Dette viser også relationen mellem observationernes middelværdi og varians.

4.2 Modellering

I dette afsnit modelleres generaliserede lineær modeller til datasættet, hvor observationerne er binomialfordelte. I R vil koden `glm` blive brugt til at tilpasse modeller for datasættet, hvor familien i modellen bestemmes til at være den eksponentielle spredningsfamilie for en binomialfordeling. R vælger hermed logit-funktionen, som den kanoniske linkfunktion automatisk, når familien er valgt til at være binomial. Logit-funktionen resulterer i responsværdier, der er log af odds; det vil sige, logaritmen af forholdet mellem sandsynligheden for at en hændelse indtræffer (succes) divideret med sandsynligheden, for at den ikke indtræffer (fiasko).

I datasættet vil elevernes dygtighed i forhold til at besvare opgaverne i testen blive undersøgt. Dette vil gøres ved at tilføje forskellige forklarende variable, som faste effekter (fixed effects), når modellerne bliver konstrueret. I modellerne undersøges, hvorledes de forklarende variable anvendt i modellen enten ved en tilføjelse eller en interaktion af forskellige forklarende variable, har betydning for responsvariablen. De fire mulige forklarende variable i datasættet, som kan indføres i de modeller, der bliver konstrueret i R er `id`, `opgave`, `maaned` og `koen` – de er blevet beskrevet i Afsnit 2.2.3.

Responsvariablen i modellerne der bliver tilpasset ud fra generaliserede lineære modeller, er elevernes score i opgaven, som er variablen `resultat`, og det maksimum antal rigtige eleven kan få i opgaven, som er max. Lad x_{ijk} være observationen for den i'te elevs score i opgave j besvaret under testningen i måned k, hvor $i = \{Elev01, \ldots, Elev021\}$, $j = \{A, B, \ldots, K\}$ og $k = \{okt, maj\}$. Antag, at X_{ijk} er en binomialfordeling med n_j uafhængige observationer, der svarer til maksimum antal point, der kan scores i en opgave, og med sandsynligheden, p_{ijk}, som fortæller om, hvor sandsynligt det er, at eleven er i stand til at opnå et givet point. Modellen med værdierne kan hermed beskrives ved $X_{ijk} \sim \text{Bin}(n_j, p_{ijk})$, hvor observationen x_{ijk} er givet ved

$$\log\left(\frac{p_{ijk}}{1-p_{ijk}}\right) = a + b_i + g_j + d_k. \tag{4.35}$$

Dette svarer til modellen med hovedvirkninger fra de tre forklarende variable, som hermed vil blive kaldt for Model 1. Desuden er $b_{\text{Elev01}} = g_{\text{A}} = d_{\text{okt}} = 0$, da de er en form for reference parameter, som bruges til at sammenligne, de andre resultater med. Det skal bemærkes, at b_i svarer til effekten af person i, g_j er effekten af hvilken opgave det er, og d_k er forskellen på måneder. De modeller som vil blive konstrueret suppleres tillige med de tilhørende QQ-plot for residualerne. QQ-plot bruges til at identificere asymptotiske afvigelser fra normalitet, samt for en identifikation af de observationer, som afviger derfra. Observationerne, der falder på linjen er normalfordelte, mens de andre kunne være outliers.

Når de ønskede modeller bliver konstrueret, vil modellerne med hver deres forklarende variable, blive testet i forhold til modellen med effekterne af alle mulige forklarende variable; det vil sige modellen med hovedvirkninger. Modeltilpasningen (goodness of fit) kan vurderes ved at udføre et c^2-test for deviansen svarende til den maksimale model. Denne test udføres med R koden `drop1`. Den sammenligner den maksimale model med modellen, hvor der er effekter, der bliver fjernet fra den maksimale.

Modeltilpasningen udføres på fem modeller med forskellige interaktioner for at undersøge elevernes forbedring. På den måde undersøges om en tilføjet interaktion er vigtigt at inkludere. Modellerne, der vil blive testet for, om de anvendte udtryk er en god tilpasning til datasættet, er; Model 2 med udtrykket, der inkluderer en interaktion af `id` og `maaned` for at undersøge den individuelle forbedring hos eleverne; Model 3 med udtrykket, der inkluderer en interaktion af `opgave` og `maaned` for at undersøge opgavernes sværhedsgrad; Model 4 med udtrykket, der inkluderer en random effekt faktor på `1|id`, for at undersøge om kønnet har en betydning for resultaterne; Model 5 med en interaktion af random effekt faktoren `1|id` og `maaned`, for at undersøge om der er en forbedring i forhold til kønnet.

I outputtet for testen kan det ud fra en lav værdi for `Pr`$(>$ `Chi`$)$, der er tæt på nul, aflæses at udtrykket er vigtigt at inkludere i modellen, da det ellers vil medføre en dårligere model. Lave værdier fortæller os, at det vil gøre en signifikant forskel at bruge interaktionen i modellen. Modellerne vil hermed blive analyseret på baggrund af outputtet af modellerne, QQ-plot af modellens residualer og c^2-test.

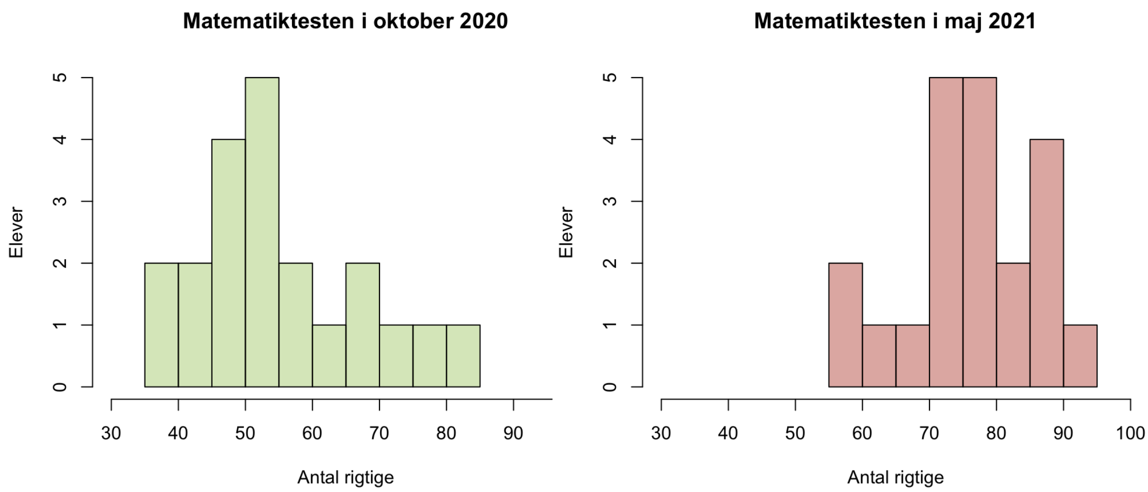
Kapitel 5

Dataanalyse

Fokusset i dette kapitel er, den statistiske analyse af elevernes testresultater i `R`-programmering ved anvendelse af generaliserede lineære modeller, som er beskrevet i Kapitel 4. Modellerne beskrevet i Afsnit 4.2 vil blive konstrueret med funktionen `glm`, hvor det første element i funktionen først og fremmest er fordelingen, som specificeres til at være en binomialfordeling. Det er netop denne specificering, der gør, at modellen anvender logistisk regression. Det andet element er linkfunktionen, som automatisk vælges til at være den kanoniske linkfunktion, *logit*, da fordelingen er binomial. Ved at bruge generaliserede lineære modeller specificeret med binomialfordelingsfamilie forsøger undertegnede at forudsige elevernes dygtighed og progression fra oktober 2020 til maj 2021.

Resultaterne fra modellen vil præsenteres i dette afsnit, dog vil der først være en beskrivelse af elevernes generelle testresultater med histogrammer, dette med henblik på at undersøge om udviklingen kan ses grafisk. Derefter vil elevernes testresultater vises ved brug af en graf over begge deres resultater, hvor der herved kan sammenlignes, hvor højt eleverne har scoret i den første og i den anden test. Dette vil give indblik i, om eleven forbedrer sig op til den anden testgang. Dernæst vil en statistisk analyse af modellerne foretages ved at fortolke estimaterne for de forklarende variable. Fortolkningen af resultaterne vil primært omhandle opgavernes sværhedsgrad og elevernes scoring, samt klassens generelle udvikling og forbedring af de enkelte elever.

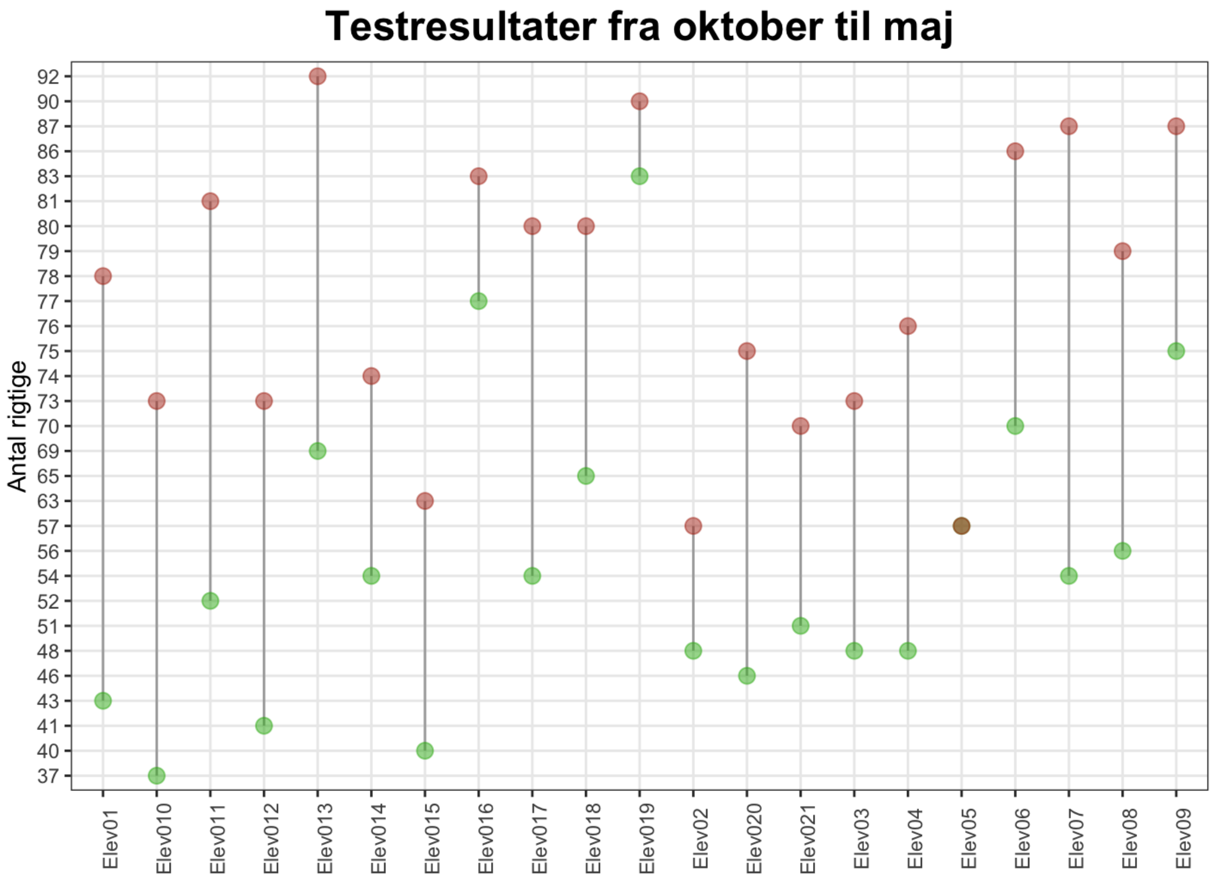
Fordelingen af elevernes testresultater kan ses med et histogram over antal rigtige, som eleverne har scoret i deres testbesvarelser. Her kan det ses, hvordan den samlede scoring fordeler sig blandt eleverne i børnehaveklassen i henholdsvis den første test i oktober måned, Figur 5.1a, og den anden test i maj måned, Figur 5.1b. Den sidstnævnte figur viser en højere scoring i maj måned som følge af en stigning i antallet af rigtige. Årsagen til denne forbedring kan forklares ved elevernes faglige udvikling fra den ene testgang til den anden. Det ses, at størstedelen af eleverne i den første test, 9 ud af 21 elever, har ramt en samlet score på 45-55 rigtige, modsat dette har der ikke været en eneste elev, der har fået en samlet score lavere end 55 rigtige i den anden testgang. 16 elever har scoret 70-90 rigtige i den anden testgang, hvilket svarer til størstedelen af eleverne i klassen, hvor det derimod kun var de færreste, i alt 3 elever, der scorede lige så mange rigtige i den første testgang.



(a) (b)

Figur 5.1: Histogram over elevernes testresultater i oktober 2020 (a) og maj 2021 (b).

I histogrammerne er der ikke ekstreme værdier blandt resultaterne. Ekstreme værdier vil for testen betyde, at der enten er bund- eller lofteffekter. Bundeffekter i testen betyder, at testen diskriminerer blandt de svageste elever, mens lofteffekt betyder, at testen diskriminerer blandt de stærkeste elever (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 103). Spredningen af antal rigtige besvarelser ser ud til at være pænt fordelt i klassen både i oktober og maj måned, hvilket betyder, at der kun har været få elever, der har scoret mange få eller mange rigtige svar. Hvis der fremtonede bund- og lofteffekter, ville det være interessant at undersøge, om testen var særligt målrettet til visse elevgrupper, og om den hertil diskriminerede nogle elever (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 103).



Figur 5.2: Figuren viser hver elevs testresultater i oktober 2020 og maj 2021.

I Figur 5.2 vises der en generel oversigt i udviklingen af de enkelte elever fra den første test til den anden testgang. Overordnet viser figuren, at alle elever på nær Elev05 scorer højere i anden testgang, hvilket svarer til en forbedring i elevernes besvarelser. Det kan aflæses, at Elev05 har scoret det samme antal rigtige i begge test, scoring på 57 rigtige ud af 92, hvilket betyder, at der ikke har været en forbedring hos eleven fra den første testgang til den anden. En forbedring i elevernes testresutlater betyder, at elever med den givne undervisning mere eller mindre har lært de emner, som var nødvendigt for at kunne udføre testen.

5.1 Model 1 - hovedvirkninger

Den første model der er tilpasset til datasættet ud fra ligning (4.35), indholder hovedvirkningerne `opgave`, `maaned` og `id`. Parameter estimaterne for Model 1 fås ved at bruge `summary` funktionen i `R`. Resultaterne for opgavernes sværhedsgrad fremgår af Tabel 5.1, den generelle udvikling i maj måned af Tabel 5.3 og elevernes score af Tabel 5.2. Der undersøges på baggrund af de estimerede værdier, om der er signifikante forskelle, hvor p-værdien er tæt på nul.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-0.3116	0.2462	-1.27	0.2056
Opgave B	0.0426	0.2061	0.21	0.8364
Opgave C	1.3297	0.2617	5.08	0.0000
Opgave D	1.1896	0.2562	4.64	0.0000
Opgave E	2.0725	0.2899	7.15	0.0000
Opgave F	0.8799	0.2461	3.57	0.0004
Opgave G	-0.3387	0.2093	-1.62	0.1056
Opgave H	1.4626	0.3023	4.84	0.0000
Opgave I	-1.0746	0.2484	-4.33	0.0000
Opgave J	0.2238	0.1913	1.17	0.2420
Opgave K	-0.1687	0.2375	-0.71	0.4775

Tabel 5.1: Tabel over resultaterne for variablen `opgave` i Model 1.

Den første estimat `intercept`, der står for $\hat{a} = -0.312$ i Model 1, er en reference, som vi skal bruge til at sammenligne de andre resultater med. Resultaterne for de andre opgaver vil derfor blive sammenlignet med opgave A, der omhandler talrækken. Når p-værdierne i Tabel 5.1 undersøges, kan det ses, at der er signifikant forskel i opgave C (Antalsforståelse), opgave D (Antal og talsymboler), opgave E (Antal og talgenkendelse), opgave F (Tælle og talsymbol), opgave H (Flest/færrest) og opgave I (Subtraktion). Parameterestimaterne for de signifikante resultater, der har logit-værdier, er for $\hat{g}_C = 1.33$, $\hat{g}_D = 1.19$, $\hat{g}_E = 2.073$, $\hat{g}_F = 0.88$ og $\hat{g}_H = 1.463$. Når de bliver sammenlignet med $a = -0.312$ viser det, at opgave C, D, E, F og H har været nemmere at løse end opgave A, dette er interessant, da opgave A, som svarer til matematikken der handler om talrækken, faktisk er noget af det første børnene lærer. Opgave E som har været den nemmeste opgave for eleverne, har en odds værdi på

$$\exp(2.073) = 7.948,$$

hvilket betyder, at eleverne har haft nemmere, ved at løse opgaven med antal og talgenkendelse. Estimatet $\hat{g}_I = -1.075$, viser, at opgave I har været sværere at løse for eleverne. Opgave I, som har været den sværeste opgave at løse, har en odds værdi på

$$\exp(-1.075) = 0.34,$$

hvilket betyder, at eleverne ikke har været gode til at løse minusstykker. Dette er forventet, da eleverne i den første test endnu ikke havde lært hverken addition eller subtraktion.

Når elevernes individuelle score i oktober måned betragtes, er de elever, der har signifikante resultater givet ved Tabel 5.2. Resten af eleverne havde ikke signifikante værdier, derfor er de ikke inkluderet i tabellen. Resultaterne for eleverne viser, hvor gode eller dårlige eleverne har været til at besvare opgaverne i forhold til elev01. Estimaterne viser, at elev06, elev07, elev08, elev09, elev13, elev,15, elev16 og elev19 har scoret højere end elev01, p-værdierne er enten nul eller tæt på nul for disse elever. Det kan aflæses, at elev19 har fået et estimat, der er højere end de andre elever, som er $\widehat{b}_{\text{Elev19}} = 2.36$ på logit-skalaen. Det betyder også, at elev19 har scoret den højeste point i klassen. Hermed kan det beregnes, hvad log-odds værdierne er for Elev19 i oktober

$$-0.3116 + 2.36_{\text{Elev19}} = 2.0498.$$

Når sandsynligheden for elevens dygtighed i oktover beregnes fås

$$\frac{\exp(2.0498)}{1 + \exp(2.0498)} = 0.89.$$

Resultaterne viser også et negativ estimat for elev15, $\widehat{b}_{\text{Elev15}} = -0.5$, der er den laveste logit-værdi blandt alle elever. Når dygtigheden for elev15 i forhold til elev01 beregnes, fås en faktor på

$$-0.312 - 0.5_{\text{Elev15}} = -0.8131.$$

Dermed kan sandsynligheden for at eleven løser opgaverne rigtigt i oktober findes ved

$$\frac{\exp(-0.8131)}{1 + \exp(-0.8131)} = 0.3;$$

Det skal bemærkes, at der ikke er så stor forskel i faktoren mellem elev01 og elev15, som betyder, at deres score i oktober måned ligger tæt op af hinanden.

Herudfra kan det konkluderes, at nogle opgaver var særlig svære at udføre i den første testgang, netop fordi eleverne ikke havde indvundet de nødvendige kompetencer til at løse opgaverne. Eleverne har i den anden testgang scoret højere, hvilket bunder i undervisningen, der er tilrettelagt efter at opfylde kompetencemålene i Fælles Mål. Eleverne er med undervisningen blevet mere kompetente og dygtige til at løse testens opgaver. Som følge af at eleverne opnår en tilfredsstillende score kan der herved argumenteres, at eleverne som udgangspunkt passer ind i målgruppen – det vil sige at være på vej hen imod at afslutte børnehaveklassen. Det skal dog bemærkes, at opgaverne i testen er udviklet ud fra kompetencemålene, som ligeledes er de mål der sætter rammerne i undervisningen. Dette betyder, at eleverne bliver undervist og testet indenfor de samme rammer i Fælles Mål.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-0.3116	0.2462	-1.27	0.2056
idElev06	1.2375	0.2764	4.48	0.0000
idElev07	0.6333	0.2538	2.50	0.0126
idElev08	0.4297	0.2487	1.73	0.0840
idElev09	1.5464	0.2933	5.27	0.0000
idElev13	1.4907	0.2899	5.14	0.0000
idElev15	-0.5015	0.2370	-2.12	0.0343
idElev16	1.4369	0.2868	5.01	0.0000
idElev18	0.7786	0.2581	3.02	0.0026
idElev19	2.3614	0.3626	6.51	0.0000

Tabel 5.2: Tabel over resultaterne for variablen `id` i Model 1.

Elevernes generelle forbedring, som er forskellen mellem oktober og maj, er givet ved estimatet for `maanedmaj` i tabel Tabel 5.3, $\widehat{d}_{\text{maj}} = 1.397$. Klassens samlede forbedring i maj viser, at odds for at løse opgaverne i maj bliver firdoblet med en faktor på

$$\exp(1.397) = 4.04. \tag{5.1}$$

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-0.3116	0.2462	-1.27	0.2056
maanedmaj	1.3965	0.0842	16.58	0.0000

Tabel 5.3: Tabel over resultaterne for variablen `maaned` i Model 1.

Eleverne har en betydelig forbedring fra oktober til maj med en faktor på 4.04, hvor det antages, at udviklingen er ens for alle elever. Dette antyder, at alle børnehaveklasseelever vil få en forbedring i matematiske kompetencer med en målrettet undervisning, og derfor vil score højere i maj måned. Sandsynligheden for at score flere rigtige i maj for elev01 kan med værdien

$$-0.3116 + 1.3965_{\text{maj}} = 1.0854$$

beregnes til at være

$$\frac{\exp(1.0854)}{1 + \exp(1.0854)} = 0.75.$$

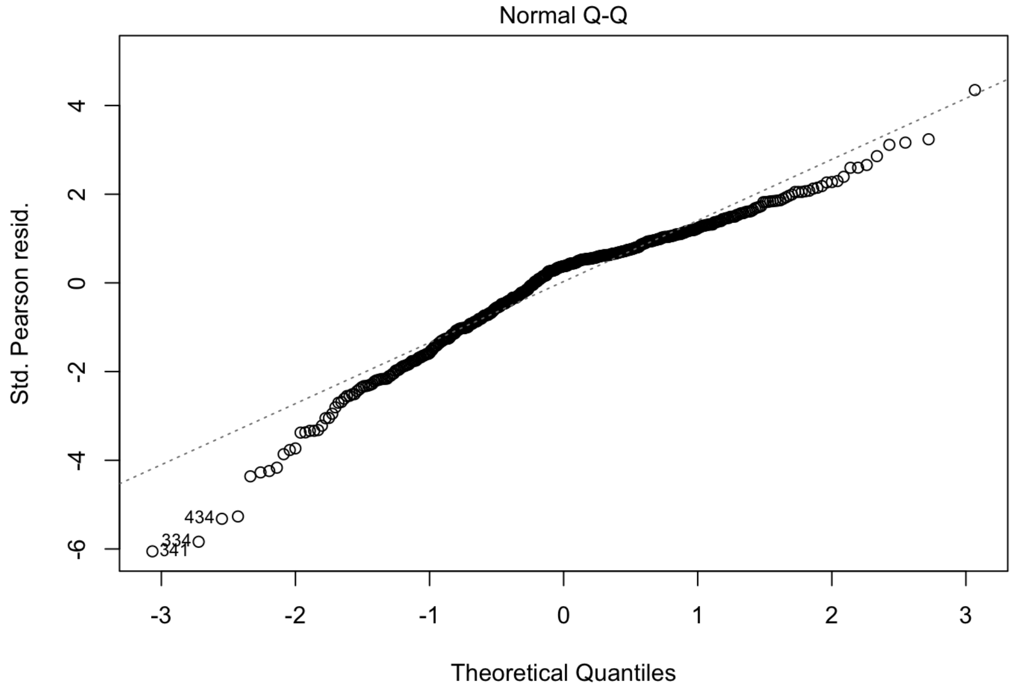
Der udføres en test med koden `drop1` for at undersøge om de forklarende variabler i modellen er signifikante for modellen.

	Df	Deviance	AIC	LRT	Pr(>Chi)
<none>		980.38	1603.71		
opgave	10	1287.62	1890.95	307.24	0.0000
maaned	1	1282.25	1903.59	301.87	0.0000
id	20	1263.82	1847.15	283.44	0.0000

Tabel 5.4: Tabel over resultaterne af `drop1` testen udført på modellen med hovedvirkninger.

Det ses af resultaterne, at de tre forklarende variabler er vigtige for modellen, da `Pr(>Chi)` er nul for alle sammen. Derfor vil de tre variabler fortsat være inkluderet i modellen. Der vil blive tilpasset modeller med effekt modifikation, hvor der inkluderes en interaktion af `id` og `maaned`.

Modellen kontrolleres også med en QQ-plot for at se om residualerne er normalfordelte. Hvis det er tilfældet vil punkterne følge den rette linje, og det modsatte hvis punkterne afviger sig stærkt fra linjen. Når punkterne ligger sig tæt op af den rette linje, betyder det, at modellen er godt tilpasset. Da QQ-plot til residualerne for Model 1 ligger tilnærmelsesvis godt på den rette linje, ud over punkterne i enden, kan det siges, at modellen passer godt. Punkterne i enden, som ikke følger linjen opstår, hvis der optræder outliers, hvilket er helt normalt. Fordelen ved plottet er også netop, at disse punkter kan identificeres.



Figur 5.3: QQ-plots for Model 1.

Da udviklingen fra oktober til maj er ens for alle elever i Model, kan det derfor være interessant at undersøge forskellen i scoring fra oktober til maj for hver elev med henblik på at forstå, om udviklingen skal beskrives individuelt. Dette vil berøres i det næste afsnit.

5.2 Model 2 - interaktionen af id og måned

De tre variabler, som var signifikante i forhold til Model 1, bliver også anvendt i Model 2, blot med en ændring i de forklarende variable i form af en interaktion; dette kaldes også for effekt modifikation. Der vil med en modifikation undersøges om forskellige kombinationer af forklarende variable giver mening i modellen, eller kortere sagt om det har en betydning i forhold til elevernes dygtighed. Formålet med denne model er at undersøge elevernes forbedring på et individuelt plan– det vil sige,at undersøge hvor stort eleverne har udviklet sig i forhold til den første test. Følgelig konstrueres en model, hvor der er en vekselvirkning mellem `maaned` og `elev`.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
maanedmaj	2.0298	0.3730	5.44	0.0000
maanedmaj:idElev02	-1.5807	0.4893	-3.23	0.0012
maanedmaj:idElev03	-0.6424	0.5090	-1.26	0.2069
maanedmaj:idElev04	-0.4156	0.5181	-0.80	0.4225
maanedmaj:idElev05	-2.0298	0.4916	-4.13	0.0000
maanedmaj:idElev06	-0.4450	0.6221	-0.72	0.4744
maanedmaj:idElev07	0.6411	0.6369	1.01	0.3141
maanedmaj:idElev08	-0.5524	0.5331	-1.04	0.3001
maanedmaj:idElev09	-0.5973	0.6578	-0.91	0.3639
maanedmaj:idElev10	-0.0941	0.5113	-0.18	0.8540
maanedmaj:idElev11	-0.1497	0.5446	-0.27	0.7834
maanedmaj:idElev12	-0.2967	0.5098	-0.58	0.5606
maanedmaj:idElev13	14.6092	423.9744	0.03	0.9725
maanedmaj:idElev14	-0.8668	0.5127	-1.69	0.0909
maanedmaj:idElev15	-0.8662	0.4944	-1.75	0.0798
maanedmaj:idElev16	-1.4140	0.5931	-2.38	0.0171
maanedmaj:idElev17	-0.3538	0.5382	-0.66	0.5109
maanedmaj:idElev18	-0.9373	0.5450	-1.72	0.0855
maanedmaj:idElev19	-0.4083	0.8852	-0.46	0.6446
maanedmaj:idElev20	-0.3961	0.5147	-0.77	0.4416
maanedmaj:idElev21	-0.9935	0.5029	-1.98	0.0482

Tabel 5.5: Tabel over resultaterne for Model 2 med en interaktion mellem `id` og `maaned`.

Model 2 formes efter Model 1, ligning (4.35), og er givet ved

$$\log\left(\frac{p_{ijk}}{1-p_{ijk}}\right) = a + g_j + b_{ik}. \tag{5.2}$$

Når estimaterne for `opgave` betragtes i Model 2, er der ikke signifikant forskel fra Model 1, da den ikke afhænger af variablerne `maaned` og `id`, derfor medtages resultaterne ikke. Elevernes individuelle estimater i maj, som er listet i Tabel 5.5, beskriver elevernes udvikling fra oktober til maj, derfor vil fokusset ligge på fortolkningen af disse estimater med henblik på at sige noget om den individuelle udvikling.

Resultaterne viser, at der er en signifikant forskel på elev01, elev02, elev05, elev16 og elev21. Det ses, at `maanedmaj`, som er forbedringen af elev01 fra oktober til maj er givet ved $b_{Elev01,maj} = 2.02$. Elev02, der har et estimat på $b_{Elev02,maj} = -1.58$, har en udvikling på

$$2.02 - 1.58_{Elev02,maj} = 0.44, \tag{5.3}$$

hvilket svarer til en forbedring på næsten en halv logit-skala. Det samme forbedring gælder også for elev16, der har et estimat på $b_{Elev16,maj} = -1.58$, men den ser ikke ud til at være særlig signifikant som elev02.

Når der kigges på estimater for Elev05, som er $b_{Elev05,maj} = -2.02$, ses der, at den er 2 logit ringere end elev01, og derfor er der ingen forbedring, da

$$2.02 - 2.02_{Elev05,maj} = 0. \tag{5.4}$$

Det fremkom også tydeligt i Figur 5.2, som viste elevernes testresultater fra oktober til maj. Figuren viste, at elev05 havde scoret den samme point i begge test, dette er hermed bekræftet ud fra estimatet. Det tyder på, at elev05 ikke har udviklet sig fagligt, og at kompetencemålene derfor ikke var opfyldt af eleven. I det tilfælde, at underviseren overvejer differentieret undervisning vil Elev05 være én blandt de få svage elever, der særligt kunne gøre brug af denne mulighed. Elevens svage sider kan konstateres ved at skimme de opgaver og emner, eleven har mest besvær med, og herudfra kan der arbejdes målrettet indtil slutningen af skoleåret.

Elev21, der har et estimat på $b_{Elev21,maj} = -0.99$, har en p-værdi, der er meget tæt på 0.05, derfor er den ikke særlig signifikant, selvom den har en logit-værdi, der er 1 mindre end elev01,

$$2.02 - 0.99_{Elev21,maj} = 1.03. \tag{5.5}$$

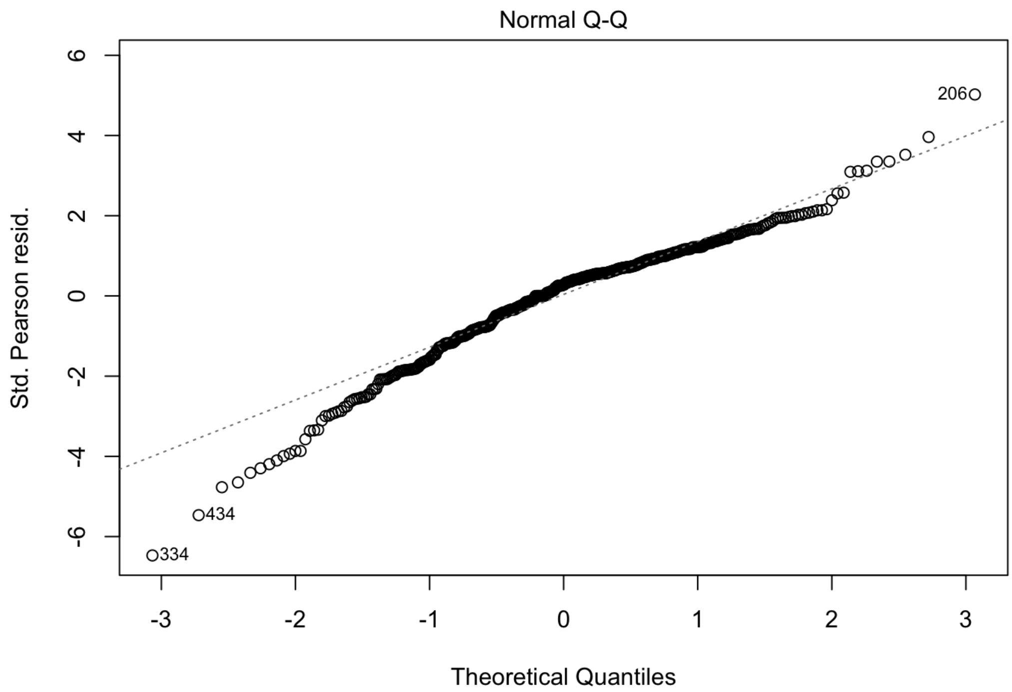
Udover dette tyder estimatet for elev13 $b_{Elev13,maj} = 14.6$ på en ekstrem forbedring på logit-skalaen, dog tyder det på, at der må være noget algoritmen ikke kan beregne. Disse tilfælde kan opstå, hvis sandsynlighederne er tæt på 0 eller 1. Logit-værdierne vil derfor være $-¥$ for $p = 0$ og $+¥$ $p = 1$. Det ses, desuden i den anden test Figur 5.2, at elev13 har scoret 92, hvilket betyder, at eleven har svaret alle opgaverne rigtigt, og dermed har fået den højeste score i klassen i maj. Analysen suppleres med en c^2-test, hvor der undersøges om interaktionen mellem `id` og `maaned` er signifikant. I `R` bruges koden `drop1`, hvor Model 2 bliver specificeret. Resultaterne af testen fremgår af Tabel 5.6, der viser, at p-værdierne for interaktionen er 0, hvilket viser at interaktionen er signifikant.

	Df	Deviance	AIC	LRT	Pr(>Chi)
<none>		917.18	1580.51		
opgave	10	1227.47	1870.81	310.30	0.0000
maaned:id	20	980.38	1603.71	63.20	0.0000

Tabel 5.6: Tabel over resultaterne for Model 2 med en interaktion af `id` og `maaned`.

Det kan konkluderes ud fra testen, at Model 2 konstrueret med en interaktion er signifikant bedre end Model 1 med hovedvirkningerne. I Model 1 ses forbedringen værende ens for alle elever, dette kan ses med en firdoblet stigning fra første testgang. Model 2 beskriver derimod individuelle forbedringer, hvor der konkluderes, at alle elever på nær elev05 havde forbedret sig.

Der kan også kigges på en QQ-plot af residualerne for Model 2, der kan ses i Figur 5.4.



Figur 5.4: QQ-plots for Model 2.

Langt hovedparten af residualerne fra Model 2 følger pænt normalfordelingen – der er ingen voldsomme afvigelser fra linjen. Der er dog visse afvigelser ved enderne af linjen.

Hvis der fortsættes med denne effekt modifikation, hvor variablerne for interaktionen bliver ændret, kan en mulig interaktion være `opgave` og `maaned`, hvor man vil undersøge sværhedsgraden af opgaverne i maj måned. Dette vil forsøges med Model 3.

5.3 Model 3 - interaktionen mellem opgave og måned

Der vil formes en model ud fra Model 1, ligning (4.35), hvor der foretages en effekt modifikation ved at ændre på variablerne, der skal interagere. Derfor vil der sættes en interaktion mellem `opgave` og `maaned`, hvor opgavernes sværhedsgrad i maj vil undersøges. Dette vil blive kaldt for Model 3 og er givet ved

$$\log(x_{ijk}) = a + b_i + g_{jk}. \tag{5.6}$$

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
maanedmaj	4.6670	0.7606	6.14	0.0000
opgaveB:maanedmaj	-2.3436	0.7964	-2.94	0.0033
opgaveC:maanedmaj	-4.1756	0.8497	-4.91	0.0000
opgaveD:maanedmaj	-3.3643	0.8589	-3.92	0.0001
opgaveE:maanedmaj	-3.0253	0.9505	-3.18	0.0015
opgaveF:maanedmaj	-4.2877	0.8294	-5.17	0.0000
opgaveG:maanedmaj	-2.0954	0.7998	-2.62	0.0088
opgaveH:maanedmaj	-4.7804	0.8976	-5.33	0.0000
opgaveI:maanedmaj	-0.5706	0.8996	-0.63	0.5259
opgaveJ:maanedmaj	-4.2472	0.7722	-5.50	0.0000
opgaveK:maanedmaj	-3.1482	0.8254	-3.81	0.0001

Tabel 5.7: Tabel over resultaterne for Model 3 med en interaktion mellem `opgave` og `maaned`.

Resultaterne for Model 3, som fremgår af Tabel 5.7 vil blive fortolket på baggrund af opgavernes beskrivelser i Afsnit 2.1. Opgave A udført i maj måned, angivet som `maanedmaj` i tabellen, har et estimat på $g_{A,maj} = 4.66$ og en p-værdi, der er signifikant. Dette estimat skal tages i betragtning, når resultaterne for de andre opgaver skal fortolkes. De fleste elever havde ingen problemer med at sætte streger fra tal til tal, hvilket betyder, at de genkender talrækken. Dette betyder, at opgave A har været meget nemmere at løse i maj end i oktober. Et af de aspekter, der gør opgave A nemmere at løse i forhold til de andre opgaver kan begrundes med, at opgaven gøres mere overkommelig ved at sætte streger fra tal til tal/prik til prik. Dette betyder, at eleverne får lært talrækken færdig, når de når slutningen af børnehaveklassen.

Når der ses på estimaterne for opgave C, F, H og J har de signifikante resultater, hvor estimaterne er næsten det samme. Estimaterne er givet ved, $g_{C,maj} = -4.17$, $g_{Fmaj} = -4.28$, $g_{H,maj} = -4.78$ og $g_{J,maj} = -4.24$, og når de sammenlignes med opgave A, ses det, at eleverne har været lige gode til at løse disse opgaver som opgave A. Det viser at eleven har udviklet kompetencer og færdigheder, der svarer til at løse opgaver, der omfatter emner, der strækker sig i opgave C, F, H og J. Færdigheder der vedrører opgave C er at knytte et antal genstande til tallene, mens det i opgave F omhandler at skrive talsymboler for vis antal genstande. Disse opgaver forudsætter eleven færdigheder i talgenkendelse. At overskue mange genstande og tælle dem én for én kan være svært for nogle elever i børnehaveklasseniveau, dog har dette ikke tydet som en udfordring for elever i den pågældende børnehaveklasse. Opgave H der handler om at vise kendskab til de førfaglige begreber flest og færrest, har været nem at løse for eleverne, dette i begge testgange. Det tyder frem i resultaterne til opgave J, at eleverne har udvidet deres kendskab til former fra de basale størrelser til de forskellige typer af trekanter og firkanter, som ligesidet trekanter og retvinklet firkanter.

Opgave B og G, som har estimaterne $g_{B,maj} = -2.34$ og $g_{G,maj} = -2.09$, har været halvt så nemt som opgave A. Disse opgaver omhandlede talrækker og addition, og resultaterne viser, at eleverne har været bedre til at løse opgave G i maj end i oktober. Opgave B der handler om talrækker har været nem at løse i begge testgange. Eleverne har været lige gode til at løse opgaver om talrækker og addition. Det betyder, at eleverne har fået de nødvendige kompetencer og færdigheder, der vedrører opgave B og G. For opgave B er kompetencerne at springe ind i en tælleremse og skrive tal, samt kendskab til andre tælleremser. For opgave G handler det om kendskab til addition og nedskrivning af additionsstykker. Disse områder svarer til det, en elev forventes at have lært i slutningen af børnehaveklasse ifølge kompetencemålene i Fælles Mål.

Opgave D og E er også signifikante, hvilket betyder, at de har været næsten lige nemme med estimater på $g_{D,maj} = -3.36$, $g_{E,maj} = -3.02$ og $g_{K,maj} = -3.14$. De er ca. 1.5 logit mindre end opgave A, men da logit-værdien er høj for opgave A, har opgave D og E alligevel været nemme at løse. Opgave D, som omhandler antal og talsymboler, viser at eleven har lært at tælle og genkende talsymbolet for antallet. Dette var også formålet med opgave E, som dækker emner, der omhandler antal og talgenkendelse. Der har været redskaber tilgængelige for elever, hvis eleverne havde svært med opgave D og E, dette ved at læreren kunne hjælpe med tælleøvelser, så eleverne herved kunne knytte talsymboler til tallene, men det har der ikke været brug for. Opgave K er den eneste opgave, der ikke har signifikante resultater i Model 3. Når der kigges på estimatet for opgave K, $g_{K,maj} = -3.14$, ser det ud til at eleverne har klaret sig godt i opgavebesvarelsen, men det har ikke været ligeså nemt som i opgave A. Elevernes arbejde i opgave K handlede om at farve og fortsætte forskellige mønstre, hvilket har været svært for børnehaveklassebørn, fordi motorikken relateret til denne opgave ikke er udviklet tilstrækkeligt for børn i den alder. Motorikken kan udvikle sig i løbet af skoleåret gennem træning, dog kan det stadig være svært for nogle elever at se og tegne mønstre . Der kan for disse elever tilbydes træningsopgaver med mosaikbrikker eller andet konkret mønstermateriale.

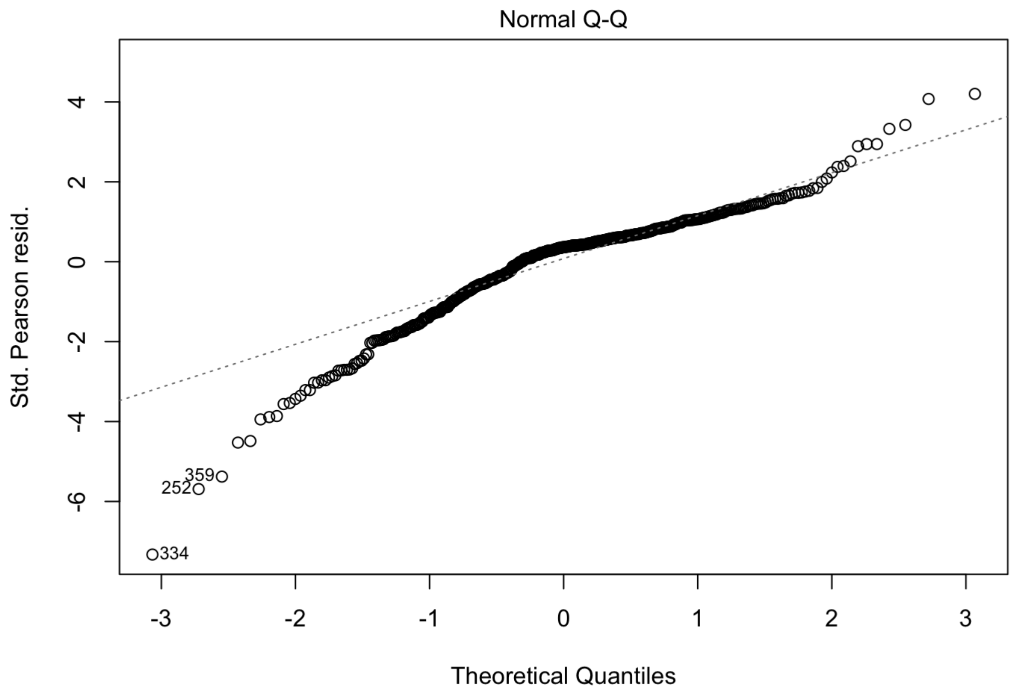
Den sværeste opgave at løse i oktober viser sig at være opgave I, dog tyder estimatet $g_{I,maj} = -0.57$ på, at der fra oktober til maj er sket en firdoblet forbedring i opgaveudførslen. Det tyder på at eleverne, som ikke havde kendskab til subtraktion under den første testning, har op til slutningen af børnehaveklassen dannet viden og færdigheder nok til at kunne løse minusstykker i den anden testgang.

Der foretages en c^2-test for at undersøge, om de forklarende variable er signifikante for Model 3. Resultaterne fremgår af Tabel 5.8, som viser, at interaktionen er signifikant med en teststørrelse, der er lavere end modellen med hovedvirkninger.

	Df	Deviance	AIC	LRT	Pr(>Chi)
<none>		785.16	1428.49		
id	20	1089.91	1693.24	304.75	0.0000
opgave:maaned	10	980.38	1603.71	195.22	0.0000

Tabel 5.8: Tabel over resultaterne af `drop1` testen udført på modellen med en interaktion mellem `id` og `maaned`.

Når residualerne undersøges i QQ-plot, vist i Figur 5.5, kan det ligeledes ses, at der er en pæn fordeling i midten, mens punkterne i enderne begynder at afvige sig mere. Endvidere kan det ses, at Model 3 ikke er lige så god som Model 2, da der er flere punkter i enderne, der afviger sig fra linjen. På trods af dette ser Model 3 bedre ud i forhold til Model 1 med hovedvirkningerne.



Figur 5.5: QQ-plots for Model 3.

Det kan konkluderes ud fra Model 3, at eleverne generelt har været bedre til at løse opgaverne i maj. Det skal desuden bemærkes, at logit-værdierne for opgaverne i Tabel 5.7 er negative værdier, og er lavere end estimatet for `maanedmaj`, men større end 0. Dette betyder, at når opgavernes estimater bliver sammenlignet med opgave A, som var den nemmeste opgave at løse i maj, giver det positive værdier for opgaverne. Det betyder, at alle opgaver har været nemme at løse i maj. Dette er forventeligt, da eleverne op til slutningen af skoleåret har udviklet deres færdigheder og kompetencer, hvor opgaverne derfor har været nemmere at løse. Dette tyder særligt frem med opgave I, som var betydeligt nemmere at løse i maj måned, på trods af at det var den mest udfordrende opgave i den første testgang. Da kønsfordelingen i klassen ikke er ligeligt fordelt med 16 piger og 5 drenge, kunne det heraf være interessant at undersøge om `koen` har haft en effekt i resultaterne. Tre af de variable, som er nævnt i Afsnit 4.2 har været brugt i de første 3 modeller, hvori variablen `koen` ikke blev anvendt. Derfor vil der nu konstrueres en ny model, hvor kønseffekten medregnes, dette for at undersøge hvor mange drenge og piger, der viser sig at være forbedret i den anden testgang.

5.4 Model 4 og 5 - kønseffekt

Denne model konstrueres for at undersøge, om kønseffekten har en betydning for elevernes progression. Formålet med kønseffekten er ikke at undersøge kønseffekten for hver enkelt elev, men hvorledes elever, der er tilfældigt valgt i forhold til et køn, har klaret sig under testen. I datasættet er der for hver enkelt elev tilknyttet et køn, ved at konstruere en generaliseret lineær model med random effekt (tilfældig effekt) vil elevenerne ikke længere blive knyttet til den bestemte køn, men de vil blive betragtet som tilfældige repræsentanter for gruppen. Derfor vil `id` blive betragtet som en tilfældig effekt, mens `opgave`, `maaned` og `koen` som faste effekter. Den lineær model er i dette tilfælde en kombination af faste effekter og tilfældige effekter. I `R` vil koden `glmer` blive brugt til at tilpasse datasættet en generaliseret lineær model med tilfældig effekt. Modellen er defineret ved

$$\log\left(\frac{p_{ijk}}{1-p_{ijk}}\right) = b_i + g_j + d_k + e_l, \tag{5.7}$$

hvor e_l er parameteren for `koen`, der beskriver deviansen for resultaterne i den samme gruppe. Interessen er ikke i individuelle værdier for eleverne, men i variationen mellem grupperne af køn, hvor det antages, at b_i, som er de tilfældige effekter, er normalfordelt, $b_i \sim \mathrm{N}(a, s^2)$ og e_l er fast (fixed). Den tilfældige effekt er specificeret i `R` ved `1|id`, hvor `id` er en random faktor. Når modellen bliver tilpasset, er standarden i `R`, at den automatisk dreng som reference.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-0.03882	0.36814	-0.105	0.916009
opgaveB	0.04203	0.20520	0.205	0.837691
opgaveC	1.32378	0.26082	5.076	0.0000
opgaveD	1.18402	0.25528	4.638	0.0000
opgaveE	2.06566	0.28909	7.145	0.0000
opgaveF	0.87523	0.24524	3.569	0.000359
opgaveG	-0.33640	0.20836	-1.615	0.106417
opgaveH	1.45648	0.30138	4.833	0.0000
opgaveI	-1.06547	0.24712	-4.312	0.0000
opgaveJ	0.22212	0.19046	1.166	0.243518
opgaveK	-0.16774	0.23641	-0.710	0.478005
maanedmaj	1.38950	0.08392	16.558	0.0000
koenp	0.21290	0.37057	0.575	0.565619

Tabel 5.9: Tabel over resultaterne for Model 4 med en random effekt.

Estimatet `koenp` beskriver kønsforskellen. Når resultatet for denne estimat aflæses fra tabel, ses det, at p-værdien er høj, og estimatet er ikke signifikant for modellen. Derfor foretages der en c^2-test for at se modeltilpasningen, hvor resultaterne er angivet i Tabel 5.10.

	npar	AIC	LRT	Pr(Chi)
<none>		1646.05		
opgave	10.00	1931.77	305.72	0.00
maaned	1.00	1944.40	300.35	0.00
koen	1.00	1644.38	0.33	0.57

Tabel 5.10: Tabel over resultaterne af `drop1` testen udført på Model 4.

Det ses ud fra p-værdien for `koen`, at modellen ikke viser signifikant kønsforskel, derfor vil der konstrueres en ny model, hvor pigernes og drengenes forbedring i maj måned undersøges ved interaktionen af `maaned` og `koen`. Model 5 er således givet ved

$$\log(p_{ijk}) = b_i + g_j + e_{kl}. \quad (5.8)$$

Når vi undersøger forbedringen for begge køn, piger og drenge, findes drengenes forbedring at være estimatet givet ved $d_{maj} = 0.870$, mens pigernes forbedring findes til at være

$$0.870_{maj} + 0.708_{maj,pige} = 1.578.$$

Logit-værdierne for pigerne og drengene viser, at pigerne har forbedret sig markant mere end drengene. Det tyder frem, at pigernes forbedring er næsten femdoblet med

$$\exp(1.578) = 4.845256.$$

c^2-testen foretages for Model 5 for at undersøge om modellen med random effekt, hvor der er foretaget en interaktion er en bedre tilpasning til datasættet. Resultaterne i Tabel 5.12 viser, at p-værdien for `maaned : koen`, når eleverne bliver udvalgt tilfældigt uden et tilknyttet køn er nul, som betyder at interaktionen er signifikant for modellen. Derfor vælges Model 5 med en interaktion og tilfældig effekt til at være den model, der beskriver datasættet bedst i forhold til køn.

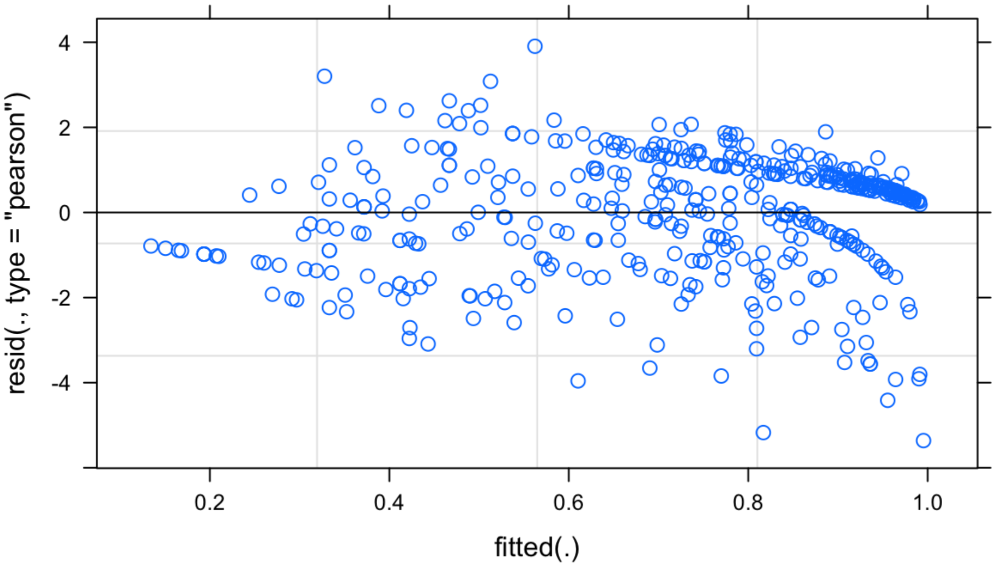
Figur 5.6 viser, at residualerne fordeler sig pænt omkring linjen.Da spredningen er lige omkring den vandrette linje, betyder det, at der er en lineær sammenhæng.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	0.17220	0.37437	0.460	0.645523
opgaveB	0.04252	0.20564	0.207	0.836180
opgaveC	1.32739	0.26116	5.083	0.0000
opgaveD	1.18750	0.25564	4.645	0.0000
opgaveE	2.06976	0.28936	7.153	0.0000
opgaveF	0.87817	0.24563	3.575	0.000350
opgaveG	-0.33780	0.20885	-1.617	0.105794
opgaveH	1.46015	0.30169	4.840	0.0000
opgaveI	-1.07190	0.24790	-4.324	0.0000
opgaveJ	0.22331	0.19087	1.170	0.242007
opgaveK	-0.16822	0.23696	-0.710	0.477763
maanedmaj	0.87040	0.15842	5.494	0.0000
koenp	-0.06572	0.38015	-0.173	0.862757
maanedmaj:koenp	0.70768	0.18618	3.801	0.000144

Tabel 5.11: Tabel over resultaterne for Model 5 med en random effekt og interaktion mellem `maaned` og `koen`.

	npar	AIC	LRT	Pr(Chi)
<none>		1633.81		
opgave	10.00	1920.46	306.64	0.00
maaned:koen	1.00	1646.05	14.24	0.00

Tabel 5.12: Tabel over resultaterne af `drop1` testen udført på Model 4 med interaktionen `maaned` og `koen`.



Ud fra en samlet vurdering af de fem modeller, kan det herved siges, at Model 2 og Model 5 har været en bedre tilpasning til datasættet ifølge c^2-testen. Undersøgelsen har endvidere vist signifikante resultater i forhold til elevernes progression. Det kan konkluderes, at der fra oktober til maj kan ses en klar forbedring, både i Model 1 med en samlet estimat for forbedringen, og Model 2 med individuelle estimater for forbedringen, der beskriver elevens egen dygtighed. I Model 2 havde alle elever på nær én elev, en positiv individuel forbedring fra oktober til maj. Denne forbedring skyldes faglig læring i matematikundervisning op til den anden testgang, hvilket herved også viser, at eleverne har indlært de færdigheder og kompetencer, som var rammesat af de Fælles Mål og derfor er parat til at afslutte børnehaveklassen.

Kapitel 6

Konklusion og Diskussion

I dette kapitel vil der gives en konklusion for de opnåede resultater, og en diskussion af modellen.

6.1 Resultater

Testresultaterne for matematikvurdering 0. klasse opsamlet i skoleåret 2020/2021 er blevet statistisk analyseret ved anvendelse af generaliserede lineære modeller. De opstillede modeller har haft forskellige virkninger, hvor der derfor har været forskellige resultater i hver model.

I Model 1 er hovedvirkningerne af de tre forklarende variable anvendt. Resultatet viste, at opgave C, D, E, F og H var nemme at løse end opgave A. Emner der vedrører de nemme opgaver er primært antal, tal og talsymboler. Resultatet viste også en samlet forbedring i elevernes matematiske faglighed fra oktober til maj. Det viste sig, at elevernes udvikling bliver firdoblet uanset hvilken elev det omhandler, og uafhængigt af opgavetypen. Resultater over eleverne viste, at der har været signifikante resultater for ni elever. Eleven som har scoret flest antal rigtige er elev19, hvorimod eleven der har scoret mindst er elev15.

I Model 2 blev elevernes individuelle forbedring undersøgt for maj måned. Det viste sig, at der var signifikante resultater for fem elever. De væsentligste resultater var for elev01, som har fordoblet sin forbedring fra oktober til maj. Den anden er elev05 som ikke havde forbedret sig fra oktober til maj. Elev14 som ikke viste signifikante resultater, har haft en ekstrem forbedring. Dette skyldes, at eleven i maj måned har besvaret alle opgaverne rigtigt, og dermed haft en sandsynlighed der er tæt på 1, som vil svare til logit-værdier, der går mod uendelighed.

Model 3 blev udviklet for at undersøge opgavernes sværhedsgrad i maj måned. Det viste sig, at alle opgaver har været betydelig nemme at løse i maj måned. Selvom opgave I ikke har en signifikant resultat, vil det nævnes, at eleverne har været bedre til at svare på opgave I i maj måned end det var i oktober. Eleverne ser ud til at have lært princippet i subtraktion.

Da det er svært for generaliserede lineære modeller at finde kønseffekten med den simple model, blev der i Model 4 indført en random effekt. Det viste sig, at køn ikke havde signifikant forskel, hvor det samme også kunne ses i c^2-testen, som viste, at der ikke var signifikant kønsforskel i modellen. Modellen blev justret ved, at der blev tilføjet en interaktion, Model 5, som beskrev kønsforskellen i maj måned. Det viste sig, at pigernes forbedring var næsten femdoblet.

Det kan ses ud fra fra resultaterne for modellerne, at chancen for at svare korrekt på en opgave vokser med elevens dygtighed.

6.2 Diskussion af modellen

I den generaliserede lineær model sammenligner man altid resultaterne med den første værdi, og det er ud fra det, man konkluderer, om der er en forbedring eller ej. Dette kunne undgås, hvis man havde valgt en anden metode som Rasch-modellen. Modellen som de fleste test bliver undersøgt ud fra er Rasch-modellen, som er en statistisk test, der kan anvendes til at vurdere pædagogiske og psykologiske test (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 61). Det specielle ved Rasch-modellen er, at sandsynligheden for, at en elev svarer korrekt på en opgave, afhænger af forskellen mellem elevens dygtighed og opgavens sværhedsgrad. Dette er afgørende om der svares korrekt eller forkert (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 63). Rasch-modellen kan hermed sige noget om, hvor svær opgaverne er i forhold til hinanden, men den kan ikke sige noget om hvor let eller hvor svær opgaverne er (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 63). Værdierne i Rasch-modellen for dygtigheden og sværhedsgraden måles på en logitskala (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 72) ligesom i generaliserede lineære modeller. Logit-funktionen er funktionen $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, hvor ln er den naturlige logaritme og hvor x antages at være et tal mellem 0 og 1 (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 72). For at komme fra sandsynligheden for, at en elev svarer rigtigt på en opgave, til forskellen på dygtigheden og sværhedsgraden, må man beregne logit-funktionen af sandsynligheden (Bendixen & Kreiner, 2009, s. 72). Dygtigheden måles med logitskalaen. I Rasch-modellen er dygtigheden det samme for alle opgaver for den enkelte elev. Eleven er ligeså dygtig, når der besvares de forskellige opgaver.

Børn udvikler den del af hjernen der er ansvarlig for skrivning senere i livet, i 7 års alderen. At udsætte børn for noget hjernen ikke har udviklet er besværligt for barnet. Hvis barnet ikke er i stand til at skrive, kan barnet ikke testes i deres færdigheder og evner ved skrivning. Det bør gøres mundtligt.

Når opgaverne i testen og kompetencemålene i matematisk opmærksomhed Kapitel 3, bliver sammenlignet, kan det ses at opgaverne stemmer overens med disse kompetencemål. Dette gives også tilkende af Dansk Psykologisk Forlag (u.å.); Dette er bemærkelsesværdigt, da undervisning i matematik har været tilrettelagt på baggrund af disse kompetencemål. Dette betyder, at elevernes undervisning er dannet ud fra kravene i Fælles Mål, som tjener til formål at opfylde kompetencemålene, dog er testningen ligeledes dannet på baggrund af de samme mål, hvilket betyder at både undervisningen og testningen er dannet ud fra de samme rammer. Det kan hertil overvejes, hvor stor en rolle disse kompetencemål har i undervisningen, og om hvorvidt elevernes matematiske færdighedsudvikling er fastlagt på baggrund af kompetencemålene.

Referenceliste

Bendixen, C. & Kreiner, S. (2009). *Test i folkeskolen*. Hans Reitzel.

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019a). *Børnehaveklassen Fælles Mål*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_F%C3%A6llesM%C3%A5l_B%C3%B8rnehaveklassen.pdf (Tilgået den 14.11.2021)

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019b). *Børnehaveklassen Læseplan*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_l%C3%A6seplan_b%C3%B8rnehaveklassen_2020.pdf (Tilgået den 14.11.2021)

Børne- og Undervisningsministeriet. (2021, 22. juni). *Om Fælles Mål*. https://www.uvm.dk/folkeskolen/fag-timetal-og-overgange/faelles-maal/om-faelles-maal (Tilgået den 14.11.2021)

Børnehaveklasse. (u.å.). I *Den Danske Ordbog*. https://ordnet.dk/ddo/ordbog?query=b%C3%B8rnehaveklasse. (Tilgået den 02.01.2022)

Danmarks Evalueringsinstitut. (2014). Pædagogers vurderinger af børn i daginstitutioner. https://www.eva.dk/sites/eva/files/2017-07/Paedagogers%20vurderinger%20af%20born%20i%20daginstitutioner_web.pdf (Tilgået den 14.11.2021)

Dansk Psykologisk Forlag. (u.å.). Matematikvurdering. https://matematikvurdering.dpf.dk/default.aspx?ReturnUrl=%2f (Tilgået den 14.11.2021)

Folkeskoleloven. (LBK nr. 1887 af 01.10.2021). *Bekendtgørelse af lov om folkeskolen*. https://www.retsinformation.dk/eli/lta/2021/1887 (Tilgået den 14.11.2021)

Heinze, I.-L. & Kemner, K. L. (2019). *Matematikvurdering 0. klasse – Vejledning*. Dansk Psykologisk Forlag.

Madsen, H. & Thyregod, P. (2011). *Introduction to General and Generalized Linear Models*. CRC Press.

McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1990). *Generalized linear models*. Chapman; Hall.

Peter Allerup, M. J. o. P. W. (2011). *Evaluering i skolen*. Dafolo.

Sigmundsson, H. & Haga, M. (2007). *Udvikling af færdigheder hos børn*. Dansk Psykologisk Forlag.

Tierney, A. L. & Nelson III, C. A. (2009). Brain Development and the Role of Experience in the Early Years. *Zero Three*, *30*(2), 9–13.