Kontinuerte grænser på diskrete Schrödinger-operatorer på et kvadratisk gitter

Speciale
MAT9 2020 og MAT10 2021 ANALYSE
Matematik
Aalborg Universitet
Juni 04, 2021

Forord

Denne rapport er skrevet i løbet af det 9. og 10. semester af matematikuddanelsen ved Matematisk Institut på Aalborg Universitet. Et stort tak til Horia Cornean for hyppig og effektiv vejledning.

Mikkel Kjeldsen	
Mikkel Kristian Kjeldsen	Sebastian Brix

AALBORG UNIVERSITY
STUDENT REPORT

The Faculty of Engineering and Science
Mathematics
Skjernvej 4A
9220 Aalborg Øst
http://www.math.aau.dk/

Title:

Kontinuerte grænser på diskrete

Schrödinger-operatorer på et kvadratisk gitter

Projekt:

Specialeprojekt

Projektperiode:

1. september 2020 - 4. juni 2021

Projektgruppe:

F21MatSpec 2

Medlemmer:

Sebastian Brix
Mikkel Kristian Kjeldsen

Vejleder:

Horia Cornean

Antal:

1

Sidetal:

71

Afslutningsdato:

4. juni 2021

Abstract:

In Chapter 2 we introduce a few results that are used in the following chapters.
In Chapter 3 we define our Schrödinger-operator, its discrete version and the functions P_h and P_h^* that are used in our main result. These are all based on the Laplace-operator. We then introduce our main theorem, prove several lemmas that are necessary, and finally prove our main theorem. The theorem states that in the $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}_h)$ norm, the difference between our continuous and discrete Schrödinger operators is bounded by a constant times the square of the mesh size.
In Chapter 4 we introduce several different Schrödinger-operators, and prove results corresponding to our main theorem for these new operators. In each case, the bound of the difference between the continuous and discrete operators depends on the specific choice of operator.
In Chapter 5 we examine whether an analogous result to our main theorem is valid, when we, once again, choose the Laplace-operator as our Schrödinger-operator, and limit it to the real half-plane, along with a homogeneous Dirichlet or Neumann boundary condition.
In Chapter 6 we examine whether or not the Laplace-operator is essentially selfadjoint on different choices of domain.

Indholdsfortegnelse

1 | Indledning

Følgende er specialeprojekt i matematik på Aalborg Universitet med fokus på matematisk analyse. Projektet omhandler Schrödinger-operatorer, H, på formen

$$H = H_0 + V(x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

defineret på $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, hvor $V(x) = 0$. Det primære fokus er $H_0 = -\Delta$, som er den negative Laplace-operator. Første mål for projektet er at vise, at der for den diskrete Schrödinger-operator, $H_h = H_{0,h}$, på $\mathcal{H}_h = \ell_2(h\mathbb{Z})$, med skridtlængde h, gælder, at

$$\|P_h^*(H_h - \mu)^{-1}P_h - (H - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \to 0 \text{ når } h \to 0, \tag{1.1}$$

hvor $P_h : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_h$, defineret ved $P_h u(z) = \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \varphi_{h,z}(x)v(z),\ h > 0,\ v \in \mathcal{H}_h$. Her er $\varphi_{h,z}(x)$ defineret ved

$$\varphi_{h,z}(x) = \varphi(h^{-1}(x - z)),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

hvor $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ h > 0$ og $z \in h\mathbb{Z}^d$. Dernæst fokuseres på 4 andre eksempler på generelle elliptiske partielle differentialligninger, som valg af Schrödinger-operator. For disse forsøges det ligeledes at bevise (1.1), idet det ønskes undersøgt, hvorvidt dette resultat gælder for Schrödinger-operatorer, der ikke anvender $H_0 = -\Delta$. Disse 4 Schrödinger-operatorer er definerede ved

$$\begin{aligned}
(H_1 f)(x) &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \\
(H_2 f)(x) &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - i\frac{\partial f}{\partial x}, \\
\widehat{H}_3(\xi) &= \sqrt{1 + (2\pi\xi)^2} - 1, \\
\widehat{H}_4(\xi_1, \xi_2) &= (2\pi\xi_1)^2 + (2\pi\xi_2)^4 - 2(2\pi\xi_1)(2\pi\xi_2).
\end{aligned}$$

Herefter vendes der igen tilbage til $H_0 = -\Delta$ til valg af Schrödinger-operator, for at undersøge hvorvidt, der gælder et tilsvarende resultat til (1.1), for Laplace-operatoren på den positive halvakse, med henholdvis homogen Dirichlet og Neumann randbetingelse. For at bevise dette resultat, defineres ét domæne for hver Schrödinger-operator, $-\Delta_D, -\Delta_N$, med deres respektive randbetingelse, dernæst bevises det, at disse netop svarer til Laplace-operatorerne T_D, T_N med tilsvarende randbetingelser.

I bilaget forefindes definitioner og resultater om integraloperatorer, integralkerner og Schwartz-funktioner, samt et længere afsnit om operatorteori.

2 | Indledende resultater

I følgende kapitel præsenteres resultater, der benyttes i senere afsnit.

2.1 Fouriertransformationen og Parsevals sætning

Definition 2.1.1. Fouriertransformation, [1, s. 183], [2, s.2]
For $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ defineres Fouriertransformationen som

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} f(x) \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Definition 2.1.2. Schwartzrum, [1, s. 185]
Schwartzrummet er defineret ved

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \ \mid \ \sup\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}.$$

Sætning 2.1.3. Parsevals formel for $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, [3, s. 184]
For $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gælder

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)\mathrm{d}x} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

Bevis. Lad $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, Fouriers inversionsformel giver

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \mathrm{d}\xi.$$

Ved brug af denne på g fås

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\xi}\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\mathrm{d}x \right)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

hvor ombytningen af integrationsrækkefølge følger af Fubinis sætning. ■

3 Hovedsætning og bevis

3.1 Schrödinger-operatoren

Betragt Schrödinger-operatoren

$$H = H_0 + V(x),\ H_0 = -\Delta,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

på $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, hvor $d \geq 1$. Lad $h > 0$ være skridtlængden og

$$\mathcal{H}_h = \ell_2(h\mathbb{Z}^d),\quad h\mathbb{Z}^d = \{(hz_1, \dots, hz_d)|z \in \mathbb{Z}^d\},$$

med normen $\|v\|^2_{\mathcal{H}_h} = h^d \sum |v(hz)|^2$ for $v \in \mathcal{H}_h$. Lad $e_j = (\delta_{jk})^d_{k=1} \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \dots, d$ betegne standardbasis for $\mathbb{R}^d$, så er den diskrete Schrödinger-operator givet ved

$$H_h = H_{0,h} + V(z),\ z \in h\mathbb{Z}^d,$$

hvor

$$H_{0,h}v(z) = h^{-2} \sum_{j=1}^{d} (2v(z) - v(z + he_j) - v(z - he_j)),\ v \in \mathcal{H}_h.$$

er den diskrete Laplace-operator.
I resten af dette projekt vil potentialet, $V(x)$, i Schrödinger-operatoren ikke indgå.

For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ h > 0$ og $z \in h\mathbb{Z}^d$, lad

$$\varphi_{h,z}(x) = \varphi(h^{-1}(x - z)),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

og definer $P_h : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_h$ ved

$$P_h u(z) := h^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{h,z}(x)} u(x) \mathrm{d}x,\ h > 0,\ z \in h\mathbb{Z}^d.$$

Den adjungerede operator, $P_h^* : \mathcal{H}_h \to \mathcal{H}$, er givet ved

$$P_h^* v(x) = \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \varphi_{h,z}(x) v(z),\ h > 0,\ v \in \mathcal{H}_h.$$

Lemma 3.1.1. [2, s. 8]
Lad $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, så er følgende udsagn ækvivalente

1. P_h^* er en isometri.
2. $P_h P_h^* = I_d$.
3. $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}\mathrm{d}x = \delta_{n,0}$ for $n \in \mathbb{Z}^d$.
4. $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 = 1$ når $\xi \in \mathbb{R}^d$, hvor $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$.

Bevis. Først vises ækvivalens mellem punkt 1 og 2. Definitionen på en isometri giver,

$$\langle \widetilde{v},\ P_h P_h^* v\rangle_{\mathcal{H}_h} = \langle P_h^*\widetilde{v},\ P_h^* v\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \langle \widetilde{v}, v\rangle_{\mathcal{H}_h},$$

hvilket medfører, at

$$\langle \widetilde{v}, (P_h P_h^* - I_d)v\rangle = 0\ \forall \widetilde{v},$$

altså, $P_h P_h^* = I_d$.
Hvis $P_h P_h^* = I_d$ gælder, så er

$$\langle P_h^*\widetilde{v},\ P_h^* v\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \langle \widetilde{v},\ P_h P_h^* v\rangle_{\mathcal{H}_h} = \langle \widetilde{v}, v\rangle_{\mathcal{H}_h},$$

hvilket betyder, at P_h^* er en isometri.

Ækvivalensen mellem 1 og 3 følger af, at

$$\begin{aligned}\|P_h^* v(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varphi_{h,nh}(x)v(nh),\ \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \varphi_{h,mh}(x)v(mh)\right\rangle \\ &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} v(nh)\overline{v(mh)}\langle \varphi_{h,nh},\ \varphi_{h,mh}\rangle \\ &= \|v(x)\|^2_{\mathcal{H}_h}, \qquad (3.1)\end{aligned}$$

hvor (3.1) gælder, idet P_h^* er en isometri. Dette betyder at der skal gælde

$$\langle \varphi_{h,nh},\ \varphi_{h,mh}\rangle = \begin{cases} 0 \text{ når } n \neq m, \\ h^d \text{ når } n = m,\end{cases}$$

fordi normen i $\mathcal{H}_h$ er givet ved $\|v\|^2_{\mathcal{H}_h} = h^d \sum |v(hz)|^2$. Dette undersøges nærmere ved at betragte det indre produkt $\langle \varphi_{h,nh},\ \varphi_{h,mh}\rangle$

$$\langle \varphi_{h,nh}, \varphi_{h,mh}\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(h^{-1}(x-nh))\overline{\varphi(h^{-1}(x-mh)}\mathrm{d}x.$$

Integralet forskydes med n, dermed betragter vi det indre produkt mellem $\varphi_{h,0}$ og $\varphi_{h,l}$, hvor $l = \frac{mh}{h} - n$.

$$\langle \varphi_{h,0}, \varphi_{h,l} \rangle = h^d \langle \varphi(y),\ \varphi(y-l) \rangle,$$

hvorfra det følger, at

$$\langle \varphi(y),\ \varphi(y-l) \rangle = \begin{cases} 0 \text{ hvis } l \neq 0 \\ 1 \text{ hvis } l = 0 \end{cases} = \delta_{l,0}.$$

skal gælde.

Følgende viser ækvivalensen mellem punkt 3 og 4. Betragt det indre produkt

$$\langle \varphi_{h,hn}, \varphi_{h,z} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(h^{-1}(x - hn))\overline{\varphi(h^{-1}(x-z)}\mathrm{d}x$$

Integralet forskydes med n, dermed betragter vi det indre produkt mellem $\varphi_{h,0}$ og $\varphi_{h,m}$, hvor $m = \frac{z}{h} - n$.

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{h,0}, \varphi_{h,m} \rangle &= h^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\overline{\varphi(y-m)}\mathrm{d}y && (3.2) \\ &= h^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\mathrm{d}y \\ &= h^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}\mathrm{d}\xi. && (3.3) \end{aligned}$$

Her er der i (3.2) substitueret med $\frac{x}{h} = y$, altså $\varphi_{h,0}(x) = \varphi(\frac{x}{h}) = \varphi(y)$, hvilket giver $\mathrm{d}x = h^d \mathrm{d}y$. I (3.3) anvendes Parsevals Sætning 2.1.3.

For funktionen $\psi(y) = \varphi(y - m)$ gælder

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi y}\psi(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi y}\varphi(y-m)\mathrm{d}y \\ &= e^{-2\pi i \xi m}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi (y-m)}\varphi(y-m)\mathrm{d}y \\ &= e^{-2\pi i \xi m}\ \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Dermed er

$$h^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}\mathrm{d}\xi = h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \xi m}\ |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

$\mathbb{R}^d$ kan opdeles i intervaller af størrelsen $[0,1]^d$ ved hjælp af vektorer på formen $\gamma \in \mathbb{Z}^d$.

$$\begin{aligned} h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \xi m} \, |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi &= h^d \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i (\zeta+\gamma) m} |\widehat{\varphi}(\zeta+\gamma)|^2 \mathrm{d}\zeta \\ &= h^d \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i \zeta m} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\zeta+\gamma)|^2 \mathrm{d}\zeta, \end{aligned} \tag{3.4}$$

hvor $\zeta \in [0,1]^d$. Da $\gamma, m \in \mathbb{Z}^d$ begge er fastholdt i hvert sumled, giver deres prikprodukt blot en skalar i $\mathbb{Z}$, dermed er eksponentialfunktionen på formen $e^{2\pi i c}$, hvor $c \in \mathbb{Z}$, hvilket blot giver 1. Mængden $\{e^{2\pi i m \zeta}\}_{m \in \mathbb{Z}^d}$ er ydermere ortonormal på $[0,1]$ jævnfør følgende beregning. Lad $n \neq m$, så er

$$\begin{aligned} \langle e^{2\pi i n \zeta}, e^{2\pi i m \zeta} \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i n \zeta} \, \overline{e^{2\pi i m \zeta}} \mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (n-m) \zeta} \mathrm{d}\zeta \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i (n-m)} e^{2\pi i (n-m)\zeta} \right]_{\zeta=0}^{\zeta=1} \\ &= \frac{1}{2\pi i (n-m)} (1-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hvis der derimod gælder $n = m$ er

$$\begin{aligned} \langle e^{2\pi i n \zeta}, e^{2\pi i n \zeta} \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i n \zeta} \, \overline{e^{2\pi i n \zeta}} \mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (n-n) \zeta} \mathrm{d}\zeta \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dermed kan følgende integral opfattes som

$$\int_{[0,1]^d} e^{2\pi i \zeta m} \mathrm{d}\zeta = \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i \zeta m} \; e^{2\pi i \zeta 0} \mathrm{d}\zeta,$$

hvilket giver 0 når $m \neq 0$ og 1 når $m = 0$. Dette viser at hvis punkt 4 er opfyldt, så giver integralet i (3.4) $\delta_{0,m}$. Ligeledes hvis punkt 3 er opfyldt, det vil sige at integralet i (3.4) skal give $\delta_{0,m}$, så må

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\zeta+\gamma)|^2 = 1.$$

■

3.2 Hovedsætning

Lad $\mathcal{B}(X)$ betegne Banachrummet af operatorer på et Banachrum X.

> **Sætning 3.2.1.** [2, s. 2]
> Lad P_h, P_h^*, H og H_h være definerede som ovenfor, lad φ overholde punkt 4 i Lemma 3.1.1, og antag ydermere at $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi}) \subset (-1,1)^d$, så gælder for ethvert $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, at
> $$\|P_h^*(H_h - \mu)^{-1}P_h - (H-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \to 0 \text{ når } h \to 0.$$

Før ovenstående sætning bevises, skal følgende resultater bruges.

3.2.1 Opvarmning til bevis af Sætning 3.2.1

Den diskrete Fouriertransformation, $F_h : \mathcal{H}_h \to \widehat{\mathcal{H}}_h$, defineres som

$$(F_h v)(\zeta) = h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} v(z), \quad \zeta \in h^{-1}\mathbb{T}^d,\, v \in \mathcal{H}_h,$$

hvor $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ og $\widehat{\mathcal{H}}_h = L_2(h^{-1}\mathbb{T}^d)$. Den diskrete Fouriertransformation, F_h, er ydermere unitær, og dens adjungerede er givet ved

$$(F_h^* g)(z) = \int_{h^{-1}\mathbb{T}^d} e^{2\pi i z\zeta} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \quad z \in h\mathbb{Z}^d,\, g \in \widehat{\mathcal{H}}_h.$$

Definer nu multiplikationsoperatoren $\widehat{H}_0(\xi) = (2\pi\xi)^2$, og betragt funktionen $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Husk, $H_0\psi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}$, og ved at anvende Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ fås

$$(\mathcal{F}H_0\psi)(\xi) = (2\pi\xi)^2(\mathcal{F}\psi)(\xi),$$

jævnfør egenskaberne for Fouriertransformationen. Lad nu $\varphi(\xi) = (\mathcal{F}\psi)(\xi)$, så er $\psi = \mathcal{F}^*\varphi$, og ydermere

$$(\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^*\varphi)(\xi) = (2\pi\xi)^2\varphi(\xi) = \widehat{H}_0(\cdot)\varphi(\xi),$$

hvilket også viser, at

$$H_0 = \mathcal{F}^*\widehat{H}_0(\cdot)\mathcal{F}. \tag{3.5}$$

Nu defineres operatoren

$$\widehat{H}_{0,h}(\zeta) = 2h^{-2}\sum_{j=1}^d (1 - \cos(2\pi h\zeta_j)), \quad \zeta \in h^{-1}\mathbb{T}^d.$$

Som ovenfor bruges denne operator til at vise ækvivalensen

$$H_{0,h} = F_h^* \widehat{H}_{0,h}(\cdot) F_h.$$

For at eftervise ækvivalensen, vises det, at

$$\widehat{H}_{0,h}(\cdot) F_h = F_h H_{0,h}. \tag{3.6}$$

Venstresiden giver

$$\begin{aligned}
(\widehat{H}_{0,h}(\cdot)F_h v)(\zeta) &= 2h^{-2}\sum_{j=1}^{d}(1-\cos(2\pi h\zeta_j))h^d \sum_{z\in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} v(z) \\
&= h^{d-2}\sum_{j=1}^{d}(2 - e^{2\pi h i\zeta_j} - e^{-2\pi h i \zeta_j}) \sum_{z\in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} v(z) \\
&= h^{d-2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{z\in h\mathbb{Z}^d}\left(2e^{-2\pi i z\zeta} - e^{2\pi i(h\zeta_j - z\zeta)} - e^{-2\pi i(h\zeta_j + z\zeta)}\right) v(z),
\end{aligned}$$

og højresiden giver ligeledes

$$\begin{aligned}
(F_h H_{0,h} v)(z) &= F_h(h^{-2}\sum_{j=1}^{d}(2v(z) - v(z+he_j) - v(z-he_j)) \\
&= h^{d-2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{z\in h\mathbb{Z}^d}\left(2e^{-2\pi i z\zeta} - e^{-2\pi i(z+he_j)\zeta} - e^{2\pi i(he_j - z)\zeta}\right) v(z) \\
&= h^{d-2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{z\in h\mathbb{Z}^d}\left(2e^{-2\pi i z\zeta} - e^{-2\pi i(z\zeta + h\zeta_j)} - e^{2\pi i(h\zeta_j - z\zeta)}\right) v(z),
\end{aligned}$$

hvilket viser (3.6).

Definer nu operatoren

$$Q_h := F_h P_h \mathcal{F}^*, \quad Q_h : \widehat{\mathcal{H}} \to \widehat{\mathcal{H}}_h, \tag{3.7}$$

hvor $\widehat{\mathcal{H}} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Følgende lemma giver en funktionsforskrift for Q_h.

Lemma 3.2.2. [2, s. 4]
For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, er forskriften for Q_h givet ved

$$(Q_h f)(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\zeta + n)} f(\zeta + h^{-1}n), \ \zeta \in h^{-1}\mathbb{T}^d.$$

For $g \in \widehat{\mathcal{H}}_h$, gælder

$$(Q_h^* g)(\xi) = \widehat{\varphi}(h\xi)\widetilde{g}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{3.8}$$

hvor $\widetilde{g}$ er den periodiske udvidelse af g på $\mathbb{R}^d$.

Bevis. Ved direkte udregning bliver

$$\begin{aligned}
(Q_h f)(\zeta) &= h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} \left(h^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{h,z}(x)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{h,z}(x)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi\left(\frac{x-z}{h} \right)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x \\
&= h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i z\zeta} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(\tilde{x})} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i (h\tilde{x} + z)\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tilde{x} \\
&= h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i z(\xi - \zeta)} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi)} f(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{h^{-1}(\mathbb{T}^d + n)} e^{2\pi i z(\xi - \zeta)} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi)} f(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{h^{-1}\mathbb{T}^d} e^{2\pi i z(\xi - \zeta)} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} f(\xi + h^{-1}n) \mathrm{d}\xi \\
&= h^d \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \int_{h^{-1}\mathbb{T}^d} e^{2\pi i z(\xi - \zeta)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} f(\xi + h^{-1}n) \mathrm{d}\xi \\
&= (F_h F_h^*) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\zeta + n)} f(\zeta + h^{-1}n) \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\zeta + n)} f(\zeta + h^{-1}n),
\end{aligned}$$

hvor $\mathbb{R}^d$, ligesom tidligere, opdeles i mindre intervaller $\mathbb{T}^d$, ved hjælp af vektoren $n \in \mathbb{Z}^d$.

Betragt nu $Q_h^* = \mathcal{F} P_h^* F_h^*$, så

$$\begin{aligned}
\langle Q_h^* g, f\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \langle g, Q_h f\rangle_{L_2(h^{-1}\mathbb{T}^d)} \\
&= \int_{h^{-1}\mathbb{T}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} g(\zeta)\widehat{\varphi}(h(\zeta + h^{-1}n))\overline{f(\zeta+h^{-1}n)}\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_{h^{-1}\mathbb{T}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{g}(\zeta+h^{-1}n)\widehat{\varphi}(h(\zeta + h^{-1}n))\overline{f(\zeta+h^{-1}n)}\mathrm{d}\zeta \qquad (3.9)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{g}(\xi)\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{f(\xi)}\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

hvor $\widetilde{g}(\zeta + h^{-1}n) := g(\zeta)$ er den periodiske udvidelse af g i (3.9). Ovenstående medfører (3.8). ■

Lemma 3.2.3. [2, s. 4]
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes $C > 0$ således, at

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_0 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \le Ch^2, \quad h > 0.$$

Bevis. Jævnfør (3.5) og definitionen (3.7) på Q_h følger det, at

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_0 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|(1 - Q_h^* Q_h)(\widehat{H}_0(\cdot) - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})}$$

Lad nu $f \in \widehat{\mathcal{H}}$ og lad $g = (\widehat{H}_0 - \mu)^{-1} f$, så medfører Lemma 3.2.2

$$\begin{aligned}
(1 - Q_h^* Q_h)g(\xi) &= g(\xi) - Q_h^*\Bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}g(\xi+h^{-1}n)\Bigg) \\
&= g(\xi) - \widehat{\varphi}(h\xi)\Bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}g(\xi+h^{-1}n)\Bigg) \\
&= g(\xi) - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2 g(\xi) - \widehat{\varphi}(h\xi)\Bigg(\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}^d}} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}g(\xi+h^{-1}n)\Bigg) \\
&= (1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2) g(\xi) - \widehat{\varphi}(h\xi)\Bigg(\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}^d}} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}g(\xi+h^{-1}n)\Bigg). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Betragt det første led i ovenstående sum. Fra antagelserne i Sætning 3.2.1 gælder, at $\mathrm{supp}(\widehat{\varphi}) \subset (-1,1)^d$, og

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 = 1.$$

Hvis $\delta > 0$ vælges lille nok, således at $|\xi| \leq h^{-1}\delta$, så vil det eneste bidrag i summen være når $n = 0$, og dermed er $|\widehat{\varphi}(h\xi)| = 1$. Dette medfører

$$\begin{aligned}\|(1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} &\leq \sup_{|\xi|>h^{-1}\delta} ||2\pi\xi|^2 - \mu|^{-1}\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\leq Ch^2\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}}.\end{aligned}$$

For at vise sidste ulighedstegn skal det nu vises, at

$$\exists\, C\, \exists\, h_0 \text{ således at der } \forall h \leq h_0 \text{ gælder at } ||2\pi\xi|^2 - \mu|^{-1} \leq Ch^2 \text{ når } |\xi| > h^{-1}\delta.$$

$$||2\pi\xi|^2 - \mu|^{-1} = |\xi|^{-2}\left|\left(4\pi^2 - \frac{\mu}{\xi^2}\right)^{-1}\right| \leq \frac{h^2}{\delta^2}\frac{1}{4\pi^2 - \frac{\mu}{|\xi|^2}}. \tag{3.11}$$

Vælg nu h_0 således, at $\frac{h_0^2|\mu|}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}$, og brug at $|\frac{\mu}{|\xi|^2}| \leq \frac{h^2|\mu|}{\delta^2}$, så er $\left|\frac{\mu}{|\xi|^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ $\forall h \leq h_0$. Dermed er

$$\left|4\pi^2 - \frac{\mu}{|\xi|^2}\right| \geq 4\pi^2 - \left|\frac{\mu}{|\xi|^2}\right| \geq 4\pi^2 - \frac{1}{2}.$$

(3.11) giver nu

$$||2\pi\xi|^2 - \mu|^{-1} \leq \frac{1}{\delta^2(4\pi^2 - \frac{1}{2})}h^2 = Ch^2 \ \ \forall h \leq h_0.$$

Betragt nu andet led i summen i (3.10). Alle ledene i sumtegnet forsvinder, bortset for $n \in \{-1, 1\}^d$, på grund af antagelserne i Sætning 3.2.1. Af samme årsag som i argumentet for det første led er $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} = 0$ når $|\xi + h^{-1}n| \leq h^{-1}\delta$ for et lille $\delta > 0$. Dermed kan en lignende udregning vise at det andet led også er begrænset af Ch^2, nemlig

$$\begin{aligned}&\| - \widehat{\varphi}(h\xi) \sum_{\substack{n\neq 0 \\ n\in\mathbb{Z}^d}} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}g(\xi + h^{-1}n)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\leq \sup_{|y|>h^{-1}\delta}\|g(y)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &= \sup_{|y|>h^{-1}\delta}||2\pi y|^2 - \mu|^{-1}\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\leq Ch^2\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}}.\end{aligned}$$

■

Lemma 3.2.4. [2, s. 5]
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes et $C > 0$ således, at

$$\|(H_{0,h} - \mu)^{-1}P_h - P_h(H_0 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \leq Ch^2, \quad h > 0.$$

Bevis. Jævnfør Lemma 3.1.1 er P_h^* en isometri, ($\|P_h^* v\| = \|v\|$), det vil sige, at normen i ovenstående lemma kan omskrives

$$\begin{aligned}
&\|(H_{0,h} - \mu)^{-1} P_h - P_h (H_0 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \\
&= \|P_h^*(H_{0,h} - \mu)^{-1} P_h - P_h^* P_h (H_0 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \\
&= \|Q_h^*(\widehat{H}_{0,h}(\cdot) - \mu)^{-1} Q_h - Q_h^* Q_h (\widehat{H}_0(\cdot) - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\mathcal{H}}_h)}.
\end{aligned}$$

Lad nu $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, så er

$$\begin{aligned}
&(Q_h^*(\widehat{H}_{0,h}(\cdot) - \mu)^{-1} Q_h - Q_h^* Q_h (\widehat{H}_0(\cdot) - \mu)^{-1}) f(\xi) \\
&= Q_h^*(\widehat{H}_{0,h}(\cdot) - \mu)^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} f(\xi + h^{-1}n) \\
&- Q_h^* \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} (\widehat{H}_0(\xi + h^{-1}n) - \mu)^{-1} f(\xi + h^{-1}n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} B_h(\xi + h^{-1}n) f(\xi + h^{-1}n), \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

hvor $B_h(\xi) := (\widehat{H}_{0,h}(\xi) - \mu)^{-1} - (\widehat{H}_0(\xi) - \mu)^{-1}$. Ligesom i beviset for Lemma 3.2.3, medfører antagelserne i Sætning 3.2.1, at $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} = 0$ når $n \notin \{0, 1, -1\}^d$.

Givet en funktion $f(t) = F(t\xi)$, hvor $f'(t) = \xi \nabla F(t\xi)$, er det nu muligt at udlede ved analysens fundamentalsætning samt partiel integration, at

$$\begin{aligned}
f(1) - f(0) &= \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 f'(x)(1-x)'\mathrm{d}x \\
&= f'(0) - \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)((1-x)^2)'\mathrm{d}x \\
&= f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 f'''(x)(1-x)^2\mathrm{d}x \\
&= f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(0) - \frac{1}{6}\int_0^1 f^{(4)}(x)(x-1)^3\mathrm{d}x. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Ovenstående udledning anvendes nu på funktionen

$$\widehat{H}_{0,h}(\zeta) = 2h^{-2}\sum_{j=1}^{d}(1 - \cos(2\pi h\zeta_j)), \quad \zeta \in h^{-1}\mathbb{T}^d. \qquad (3.14)$$

Ved valget af $\zeta \in \{0, \xi\}$ vil ovenstående funktion give henholdsvis 0 og $\widehat{H}_{0,h}(\xi)$, dermed kan vi bruge den ovenstående diskussion ved at betragte $\widehat{H}_{0,h}(\xi) - 0$, hvor

$$f(t) = F(t\xi) = 2h^{-2}(1 - \cos(2\pi h t\xi)),$$

således, at $F(\xi) - F(0) = f(1) - f(0)$. Altså

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2h^{-2}\sin(2\pi h t\xi)2\pi h\xi, \\ f''(t) &= 2h^{-2}\cos(2\pi h t\xi)(2\pi h\xi)^2, \\ f'''(t) &= -2h^{-2}\sin(2\pi h t\xi)(2\pi h\xi)^3, \\ f^{(4)}(t) &= -2h^{-2}\cos(2\pi h t\xi)(2\pi h\xi)^4. \end{aligned}$$

Ved brug af dette og (3.13) fås

$$\begin{aligned} &h^{-2}(2\pi h\xi)^2 - \frac{1}{6}\int_0^1 -2h^{-2}\cos(2\pi h x\xi)(2\pi h\xi)^4((x-1)^3)\mathrm{d}x \\ &= h^{-2}(2\pi h\xi)^2 + (2h^{-2})(2\pi h\xi)^4\frac{1}{6}\int_0^1 \cos(2\pi h x\xi)(x-1)^3\mathrm{d}x \\ &\leq (2\pi\xi)^2 + 2(2\pi)^4h^2\xi^4\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^3\mathrm{d}x \\ &= (2\pi\xi)^2 - \frac{4}{3}\pi^4h^2\xi^4, \end{aligned}$$

hvor $\cos(2\pi h\xi t) \leq 1$. For $f(t) = F(t\xi) = \widehat{H}_0(t\xi)$ fås blot

$$-(f(1) - f(0)) = -(2\pi\xi)^2.$$

Dette giver dermed, at $|\widehat{H}_{0,h}(\xi) - \widehat{H}_0(\xi)| \leq Ch^2|\xi|^4$.
Hvis $h\xi \in \operatorname{supp}(\widehat{\varphi})$, kan man vælge et lille $c_0 > 0$, således, at $\widehat{H}_{0,h}(\xi) \geq c_0|\xi|^2$. Betragt et cosinus-led i $|\widehat{H}_{0,h}|$

$$\begin{aligned} 1 - \cos(x) &= x^2\int_0^1 \cos(xt)(1-t)\mathrm{d}t \\ &\geq x^2\cos(x_0)\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t \\ &= x^2\cos(x_0)\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

hvor $0 \leq x \leq x_0 < \frac{\pi}{2}$, hvilket medfører, at $\cos(x_0) \leq \cos(tx) \leq 1$. Ved brug af disse uligheder fås

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|(\widehat{H}_{0,h}(\xi) - \mu)^{-1} - (\widehat{H}_0(\xi) - \mu)^{-1}| \\ &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{\widehat{H}_{0,h}(\xi) - \mu} - \frac{1}{\widehat{H}_0(\xi) - \mu}\right| \\ &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{0,h}(\xi) - \mu)}(\widehat{H}_0(\xi) - \widehat{H}_{0,h}(\xi))\frac{1}{(\widehat{H}_0(\xi) - \mu)}\right| \qquad (3.15) \\ &\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|C\left(\frac{1}{|\xi|^2}h^2|\xi|^4\frac{1}{|\xi|^2}\right)\right| \\ &= Ch^2|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2, \qquad (3.16) \end{aligned}$$

for et $C > 0$. Betragt nu støtten for $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}$ og $n \neq 0$, der gælder

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{0,h}(\xi + h^{-1}n) &= 2h^{-2}\sum_{j=1}^{d}(1 - \cos(2\pi h(\xi + h^{-1}n)_j)) \\ &\geq 2h^{-2}\sum_{j=1}^{d} 2 \;=\; 4dh^{-2} \;\geq\; c_1 h^{-2} \end{aligned} \tag{3.17}$$

og ligeledes

$$\begin{aligned}\widehat{H}_0(\xi + h^{-1}n) &= (2\pi(\xi + h^{-1}n))^2 \\ &= 4\pi^2(\xi + h^{-1}n)^2 \\ &= 4\pi^2\xi^2 + 4\pi^2 n^2 h^{-2} + 2\xi n h^{-1} \\ &\geq c_1 h^{-2}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

hvilket medfører at $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| = O(h^2)$ når $h \to 0$. Brug dette og at $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} = 0$ når $n \notin \{0, 1, -1\}^d$, (3.12) og (3.16), så gælder

$$\begin{aligned}&|(Q_h^*(\widehat{H}_{0,h}(\cdot) - \mu)^{-1}Q_h - Q_h^* Q_h(\widehat{H}_0(\cdot) - \mu)^{-1})f(\xi)| \\ &= |\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}B_h(\xi + h^{-1}n)f(\xi + h^{-1}n)| \\ &\leq Ch^2 \sum_{n\in\{0,\pm1\}^d} |\widehat{\varphi}(h\xi)||\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}||f(\xi + h^{-1}n)| \\ &\leq \tilde{C}h^2 \sum_{n\in\{0,\pm1\}^d} |f(\xi + h^{-1}n)|, \;\; \xi \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

hvor $\sum_{n\in\{0,\pm1\}^d} |\widehat{\varphi}(h\xi)||\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}| \leq c_2$, for et $c_2 > 0$, grundet støtten af $\widehat{\varphi}$. Dette fuldender beviset. ■

3.3 Bevis for hovedsætningen

Her præsenteres igen Sætning 3.2.1.

> **Sætning 3.2.1.** [2, s. 2]
> Lad P_h, P_h^*, H og H_h være definerede som ovenfor, lad φ overholde punkt 4 i Lemma 3.1.1, og antag ydermere at $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi}) \subset (-1,1)^d$, så gælder for ethvert $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, at
> $$\|P_h^*(H_h-\mu)^{-1}P_h - (H-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \to 0 \text{ når } h \to 0.$$

Bevis for Sætning 3.2.1. Betragt

$$\begin{aligned}&P_h^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}P_h - (H_0-\mu)^{-1}\\&= P_h^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}P_h - P_h^*P_h(H_0-\mu)^{-1} - (1-P_h^*P_h)(H_0-\mu)^{-1}.\end{aligned}$$

Fra Lemma 3.2.3 fås

$$\|(1-P_h^*P_h)(H_0-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq Ch^2.$$

Det andet led estimeres ved Lemma 3.2.4

$$\|P_h^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}P_h - P_h^*P_h(H_0-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \leq Ch^2.$$

■

4 | Generelle elliptiske partielle differentialligninger

4.1 Eksempel 1

Følgende er et eksempel på en fjerdeordens elliptisk partiel operator H_1

$$(H_1 f)(x) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Igen er $H_1 = \mathcal{F}^* \widehat{H}_1(\cdot)\mathcal{F}$ på $L_2(\mathbb{R})$, som giver $\widehat{H}_1(\xi) = (2\pi\xi)^4$ i Fourierbilledet. Den diskrete operator i frekvensdomænet, $\widehat{H}_{1,h}(\cdot)$, er givet ved

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{1,h}(\xi) &= 2^4 h^{-4} \sin^4(\xi h \pi) \\ &= h^{-4}(6 - 8\cos(2\pi h\xi) + 2\cos(4\pi h\xi)).\end{aligned}$$

Lemma 4.1.1.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes $C > 0$ således, at

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_1 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq Ch^4, \quad h > 0.$$

Bevis. Jævnfør beviset for Lemma 3.2.3 fås

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_1 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|(1 - Q_h^* Q_h)(\widehat{H}_1(\cdot) - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})}.$$

Lad nu $f \in \widehat{\mathcal{H}}$ og lad $g = (\widehat{H}_1 - \mu)^{-1} f$, så medfører Lemma 3.2.2 atter

$$(1 - Q_h^* Q_h)g(\xi) = (1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi) - \widehat{\varphi}(h\xi)\Bigg(\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}g(\xi + h^{-1}n)\Bigg). \tag{4.1}$$

Med samme argumentation som i beviset for Lemma 3.2.3 vises den ønskede ulighed. Betragt nemlig det første led i ovenstående sum. Fra antagelserne i Sætning 3.2.1 gælder, at $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi}) \subset (-1,1)$, og

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 = 1.$$

Hvis $\delta > 0$ vælges lille nok, således at $|\xi| \leq h^{-1}\delta$, så vil det eneste bidrag i summen være når $n=0$, og dermed er $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2 = 1$. Dette medfører

$$\begin{aligned}\|(1-|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} &\leq \sup\nolimits_{|\xi|>h^{-1}\delta}||2\pi\xi|^4-\mu|^{-1}\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\leq Ch^4\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}}.\end{aligned}$$

For at vise sidste ulighedstegn skal det nu vises, at

$$\exists\, C\, \exists\, h_0 \text{ således at, der } \forall h \leq h_0 \text{ gælder, at } ||2\pi\xi|^4-\mu|^{-1} \leq Ch^4 \text{ når } |\xi| > h^{-1}\delta.$$

Betragt

$$||2\pi\xi|^4-\mu|^{-1} = |\xi|^{-4}\left|\left(16\pi^4-\frac{\mu}{\xi^4}\right)^{-1}\right| \leq \frac{h^4}{\delta^4}\frac{1}{16\pi^4-\frac{\mu}{|\xi|^4}}. \tag{4.2}$$

Vælg nu h_0 således, at $\frac{h_0^4|\mu|}{\delta^4} \leq \frac{1}{2}$, og brug at $|\frac{\mu}{|\xi|^4}| \leq \frac{h^4|\mu|}{\delta^4}$, så er $\left|\frac{\mu}{|\xi|^4}\right| \leq \frac{1}{2}\ \forall h \leq h_0$. Dermed er

$$\left|16\pi^4-\frac{\mu}{|\xi|^4}\right| \geq 16\pi^4-\left|\frac{\mu}{|\xi|^4}\right| \geq 16\pi^4-\frac{1}{2}.$$

(4.2) giver nu

$$||2\pi\xi|^4-\mu|^{-1} \leq \frac{1}{\delta^4(16\pi^4-\frac{1}{2})}h^4 = Ch^4,\ \ \forall h \leq h_0.$$

Betragt nu andet led i summen i (4.1). Alle ledene i sumtegnet forsvinder bortset for $n \in \{-1,1\}$, på grund af antagelserne i Sætning 3.2.1. Af samme årsag som i argumentet for det første led er $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)} = 0$ når $|\xi+h^{-1}n| \leq h^{-1}\delta$ for et lille $\delta > 0$. Dermed kan en lignende udregning vise at det andet led også er begrænset af Ch^4, nemlig

$$\begin{aligned}&\|-\widehat{\varphi}(h\xi)\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}^d}}\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}g(\xi+h^{-1}n)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\qquad\leq \sup\nolimits_{|y|>h^{-1}\delta}\|g(y)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\qquad= \sup\nolimits_{|y|>h^{-1}\delta}||2\pi y|^4-\mu|^{-1}\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \\ &\qquad\leq Ch^4\|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}}.\end{aligned}$$

■

Nu vises Lemma 3.2.4 i dette tilfælde.

Lemma 4.1.2. [2, s. 5]
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes et $C > 0$ således, at

$$\|(H_{1,h} - \mu)^{-1} P_h - P_h (H_1 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \leq Ch^2, \quad h > 0.$$

Bevis. Det er nødvendigt at tage flere led med i Taylorudviklingen. Dette gøres ved at betragte

$$f(1) - f(0) = f'(0) + \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f'''(0) - \frac{1}{24} f^{(4)}(0) + \frac{1}{120} f^{(5)}(0) - \frac{1}{120} \int_0^1 f^{(6)}(x)(x-1)^5 \mathrm{d}x.$$

I det nuværende tilfælde er

$$f(t) = F(t\xi) = h^{-4}(6 - 8\cos(2\pi ht\xi) + 2\cos(4\pi ht\xi)). \tag{4.3}$$

Dermed er de seks første afledte

$$\begin{aligned}
f'(t) &= h^{-4}(8(2\pi h\xi)\sin(2\pi ht\xi) - 2(4\pi h\xi)\sin(4\pi ht\xi)),\\
f''(t) &= h^{-4}(8(2\pi h\xi)^2\cos(2\pi ht\xi) - 2(4\pi h\xi)^2\cos(4\pi ht\xi)),\\
f'''(t) &= h^{-4}(-8(2\pi h\xi)^3\sin(2\pi ht\xi) + 2(4\pi h\xi)^3\sin(4\pi ht\xi)),\\
f^{(4)}(t) &= h^{-4}(-8(2\pi h\xi)^4\cos(2\pi ht\xi) + 2(4\pi h\xi)^4\cos(4\pi ht\xi)),\\
f^{(5)}(t) &= h^{-4}(8(2\pi h\xi)^5\sin(2\pi ht\xi) - 2(4\pi h\xi)^5\sin(4\pi ht\xi)),\\
f^{(6)}(t) &= h^{-4}(8(2\pi h\xi)^6\cos(2\pi ht\xi) - 2(4\pi h\xi)^6\cos(4\pi ht\xi)).
\end{aligned}$$

Disse afledte bruges i (4.3) for at opnå

$$\begin{aligned}
&f(1) - f(0) =\\
&\quad \frac{1}{24} h^{-4} 384(\pi h\xi)^4 + \frac{1}{120}\int_0^1 h^{-4}(8(2\pi h\xi)^6\cos(2\pi ht\xi) - 2(4\pi h\xi)^6\cos(4\pi ht\xi))(x-1)^5\mathrm{d}x\\
&\quad \leq \frac{1}{24} h^{-4} 384(\pi h\xi)^4 + \frac{1}{120}\int_0^1 h^{-4}(8(2\pi h\xi)^6 - 2(4\pi h\xi)^6)(x-1)^5\mathrm{d}x\\
&\quad = 16\pi^4\xi^4 + \frac{1}{120}\int_0^1 h^{-4}(8(2\pi h\xi)^6 - 2(4\pi h\xi)^6)(x-1)^5\mathrm{d}x\\
&\quad = 16\pi^4\xi^4 - 64h^{-4}(\pi h\xi)^6\int_0^1 (x-1)^5\mathrm{d}x\\
&\quad = 16\pi^4\xi^4 + \frac{64}{6} h^{-4}(\pi h\xi)^6\\
&\quad = 16\pi^4\xi^4 + C\xi^6 h^2.
\end{aligned}$$

Ligeledes for Taylorudviklingen for

$$f(t) = F(t\xi) = |2\pi\xi t|^4,$$

fås

$$-(f(1) - f(0)) = -|2\pi\xi|^4.$$

Dette må betyde at

$$|\widehat{H}_{1,h}(\xi) - \widehat{H}_1(\xi)| \leq Ch^2|\xi|^6.$$

Hvis $h\xi \in \operatorname{supp}(\widehat{\varphi})$, kan man vælge et lille $c_0 > 0$, således, at $\widehat{H}_{1,h}(\xi) \geq c_0|\xi|^4$. Dette bevises ved at observere at $\frac{\sin^4(x)}{x^4}$ er nedadtil begrænset når $|x| \leq \pi - \delta$. Dermed er $\sin^4(x) \geq c_0 x^4$.

Ved brug af ovenstående uligheder fås

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|(\widehat{H}_{1,h}(\xi) - \mu)^{-1} - (\widehat{H}_1(\xi) - \mu)^{-1}| \\
&= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{1,h}(\xi) - \mu)} - \frac{1}{(\widehat{H}_1(\xi) - \mu)}\right| \\
&= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{1,h}(\xi) - \mu)}(\widehat{H}_{1,h}(\xi) - \widehat{H}_1(\xi))\frac{1}{(\widehat{H}_1(\xi) - \mu)}\right| \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|C\left(\frac{1}{|\xi|^4}h^2|\xi|^6\frac{1}{|\xi|^4}\right)\right| \\
&= Ch^2\frac{1}{|\xi|^2}|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2,
\end{aligned}$$

for et $C > 0$. Betragt nu støtten for $\widehat{\varphi}(h\xi)\widehat{\varphi}(h\xi+n)$ og $n \neq 0$. Der gælder at $\widehat{H}_{1,h}(\xi+h^{-1}n)$ er periodisk og for

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_1(\xi + h^{-1}n) &= (2\pi(\xi + h^{-1}n))^4 \\
&= 16\pi^4(\xi + h^{-1}n)^4 \\
&\geq c_1 h^{-4},
\end{aligned}$$

hvilket medfører at $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| = O(h^2)$ når $h \to 0$. Brug dette og at $\widehat{\varphi}(h\xi)\widehat{\varphi}(h\xi+n) = 0$ når $n \notin \{0, 1, -1\}$, således,

$$\begin{aligned}
&|(Q_h^*(\widehat{H}_{1,h}(\cdot) - \mu)^{-1}Q_h - Q_h^*Q_h(\widehat{H}_1(\cdot) - \mu)^{-1})f(\xi)| \\
&= |\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}B_h(\xi + h^{-1}n)f(\xi + h^{-1}n)| \\
&\leq Ch^2\sum_{n\in\{0,\pm1\}}|\widehat{\varphi}(h\xi)||\overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)}||f(\xi + h^{-1}n)| \\
&\leq \tilde{C}h^2\sum_{n\in\{0,\pm1\}}|f(\xi + h^{-1}n)|, \quad \xi \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

hvor $\sum_{n\in\{0,\pm1\}} |\widehat{\varphi}(h\xi)||\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}| \leq c_2$, for et $c_2 > 0$, grundet støtten af $\widehat{\varphi}$. Dette fuldender beviset. ■

4.2 Eksempel 2

Betragt nu endnu et eksempel på en fjerdeordens elliptisk partiel operator H_2

$$(H_2 f)(x) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - i\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Multiplikationsoperatoren, $\widehat{H}_2(\cdot)$, defineret ved $H_2 = \mathcal{F}^* \widehat{H}_2(\cdot)\mathcal{F}$, er givet ved

$$\widehat{H}_2(\xi) = (2\pi\xi)^4 + 2\pi\xi,$$

som følger af egenskaberne for Fouriertransformationen. Den diskrete operator i frekvensdomænet, $\widehat{H}_{2,h}(\cdot)$, er givet ved

$$\widehat{H}_{2,h}(\zeta) = h^{-4}\sin^4(2\pi h\zeta) + h^{-1}\sin(2\pi h\zeta) + h^{-1}\sin^2(\pi h\zeta).$$

Ved hjælp af denne er det muligt at finde den diskrete operator, $H_{2,h}$, givet ved $H_{2,h} = F^* \widehat{H}_{2,h}(\cdot)F_h$. Denne findes nu ved hjælp af $(\widehat{H}_{2,h}(\cdot)F_h v)(\zeta)$,

$$\begin{aligned}
(\widehat{H}_{2,h}(\cdot)F_h v)(\zeta) &= \left(h^{-4}(\sin^4(2\pi h\zeta)) + h^{-1}(\sin(2\pi h\zeta))h^{-1}(\sin^2(\pi h\zeta))\right)\left(\sum_{z\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i z\zeta} v(z)\right) \\
&= \left(h^{-4}\left(\frac{(e^{2\pi i h\zeta} - e^{-2\pi i h\zeta})^4}{(2i)^4}\right) + h^{-1}\left(\frac{(e^{2\pi i h\zeta} - e^{-2\pi i h\zeta})}{(2i)}\right)\right. \\
&\quad \left. + h^{-1}\left(\frac{(e^{\pi i h\zeta} - e^{-\pi i h\zeta})^2}{(2i)^2}\right)\right) \cdot \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i z\zeta} v(z)\right) \\
&= \left(h^{-4}\left(\frac{6 - 4e^{-4\pi i h\zeta} - 4e^{4\pi i h\zeta} + e^{-8\pi i h\zeta} + e^{8\pi i h\zeta}}{16}\right)\right. \\
&\quad \left. + h^{-1}\left(\frac{e^{2\pi i h\zeta} - e^{-2\pi i h\zeta}}{2i}\right) + h^{-1}\left(\frac{e^{2\pi i h\zeta} + e^{-2\pi i h\zeta} - 2}{-4}\right)\right) \cdot \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i z\zeta} v(z)\right) \\
&= \sum_{z\in\mathbb{Z}} \left(h^{d-4}\left(\frac{6e^{-2\pi i z\zeta} - 4e^{-2\pi i(2h+z)\zeta} - 4e^{2\pi i(2h-z)\zeta} + e^{-2\pi i(4h+z)\zeta} + e^{2\pi i(4h-z)\zeta}}{16}\right)\right. \\
&\quad \left. + h^{d-1}\left(\frac{e^{2\pi i(h-z)\zeta} - e^{-2\pi i(h+z)\zeta}}{2i}\right) + h^{d-1}\left(\frac{e^{2\pi i(h-z)\zeta} + e^{-2\pi i(h+z)\zeta} - e^{-2\pi i z\zeta}}{-4}\right)\right) v(z) \\
&= F_h\Big(h^{-4}(6v(z) - 4v(z+2h) - 4v(z-2h) + v(z+4h) + v(z-4h))(16)^{-1} \\
&\quad + h^{-1}(v(z-h) - v(z+h))(2i)^{-1} + h^{-1}(v(z-h) + v(z+h) - 2v(z))(-4)^{-1}\Big)
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
(H_{2,h}v)(z) = h^{-4}&(6v(z) - 4v(z+2h) - 4v(z-2h) + v(z+4h) + v(z-4h))(16)^{-1} \\
&+ h^{-1}(v(z-h) - v(z+h))(2i)^{-1} + h^{-1}(v(z-h) + v(z+h) - 2v(z))(-4)^{-1}
\end{aligned}$$

Det er nu muligt at vise Lemma 3.2.3 for dette eksempel.

Lemma 4.2.1.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes $C > 0$ således, at

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_2 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq Ch^4, \quad h > 0.$$

Bevis. Med samme argumentation som i beviset for Lemma 3.2.3 defineres funktionen $g = (\widehat{H}_2(\cdot) - \mu)^{-1} f$, hvor $f \in \widehat{\mathcal{H}}$, og følgende udtryk benyttes

$$(1 - Q_h^* Q_h)g(\xi) = (1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi) - \widehat{\varphi}(h\xi)\left(\sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \overline{\widehat{\varphi}(h\xi + n)} g(\xi + h^{-1}n)\right).$$

Hvis $\delta > 0$ vælges lille nok, således at $|\xi| \leq h^{-1}\delta$, så vil det eneste bidrag i $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + n)|^2 = 1$ være når $n = 0$, og derfor er $|\widehat{\varphi}(h\xi)| = 1$. Dermed er

$$\|(1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \leq \sup_{|\xi| > h^{-1}\delta} |\ (2\pi\xi)^4 + 2\pi\xi - \mu\ |^{-1}\ \|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}}$$

Det skal nu vises, at ovenstående er mindre end $Ch^4 \|f\|_{\widehat{\mathcal{H}}}$ for et $C > 0$. Med samme fremgangsmetode som i beviset for Lemma 3.2.3 arbejdes der med

$$\exists\, C\, \exists\, h_0 \text{ således at, der } \forall h \leq h_0 \text{ gælder, at } |(2\pi\xi)^4 + 2\pi\xi - \mu|^{-1} \leq Ch^4 \text{ når } |\xi| > h^{-1}\delta.$$

$$\begin{aligned}
\sup_{|\xi| > \frac{\delta}{h}} |\ (2\pi\xi)^4 + 2\pi\xi - \mu\ |^{-1} &\leq \frac{1}{(2\pi\xi)^4 - |2\pi\xi| - \mu} \\
&= \frac{1}{(2\pi\xi)^4} \frac{1}{1 - \frac{1}{|2\pi\xi|^3} - \frac{\mu}{(2\pi\xi)^4}} \\
&\leq h^4 \frac{1}{(2\pi\delta)^4} \frac{1}{1 + h^3 \frac{1}{|2\pi\delta|^3} - h^4 \frac{\mu}{(2\pi\delta)^4}} \\
&= Ch^4,
\end{aligned}$$

hvor $|\xi|^{-1} \leq \frac{h}{\delta}$. ■

Nu vises Lemma 3.2.4 for (4.4).

Lemma 4.2.2.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes et $C > 0$ således, at

$$\|(H_{2,h} - \mu)^{-1} P_h - P_h (H_2 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_h)} \leq Ch, \quad h > 0.$$

Bevis. Jævnfør beviset for Lemma 3.2.4 gælder

$$\|(H_{2,h}-\mu)^{-1}P_h-P_h(H_2-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} = \|Q_h^*(\widehat{H}_{2,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h-Q_h^*Q_h(\widehat{H}_2(\cdot)-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\mathcal{H}}_h)}.$$

For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gælder der jævnfør (3.12), at

$$(Q_h^*(\widehat{H}_{2,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h-Q_h^*Q_h(\widehat{H}_2(\cdot)-\mu)^{-1})f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}B_h(\xi+h^{-1}n)f(\xi+h^{-1}n),$$

hvor $B_h(\xi) := (\widehat{H}_{2,h}(\xi)-\mu)^{-1}-(\widehat{H}_2(\xi)-\mu)^{-1}$. Ligesom i beviset for Lemma 3.2.3, medfører antagelserne i Sætning 3.2.1, at $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)} = 0$ når $n \notin \{0, 1, -1\}$.
Betragt nu

$$\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \widehat{H}_2(\xi) = \frac{1}{h}\sin^2(\pi h\xi) + \widehat{H}_2((2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi)) - \widehat{H}_2(\xi). \tag{4.5}$$

Definer

$$F(t) = \widehat{H}_2(t(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi) + (1-t)\xi),$$

så er

$$F(0) = \widehat{H}_2(\xi),$$
$$F(1) = \widehat{H}_2((2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi)),$$

og dermed kan (4.5) skrives

$$\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \widehat{H}_2(\xi) = \frac{1}{h}\sin^2(\pi h\xi) + F(1) - F(0).$$

Ved brug af analysens fundamentalsætning fås

$$|F(1) - F(0)| = \left|((2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi) - \xi)\int_0^1 \widehat{H}_2'(t(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi) + (1-t)\xi)\mathrm{d}t\right|. \tag{4.6}$$

Ved hjælp af taylorudviklingen for sinus, udledt i (9.6), fås

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-t)^2\cos(tx)\mathrm{d}t.$$

Betragt $|(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi) - \xi|$ i (4.6)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi h}\sin(2\pi h\xi)-\xi\right| &= \left|\frac{1}{2\pi h}\left(2\pi h\xi-\frac{(2\pi h\xi)^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\cos(t2\pi h\xi)\mathrm{d}t\right)-\xi\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2\pi h}\left(2\pi h\xi-\frac{(2\pi h\xi)^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\mathrm{d}t\right)-\xi\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi h}\left(2\pi h\xi-\frac{(2\pi h\xi)^3}{6}\right)-\xi\right| \\
&= \left|\xi-\frac{(2\pi h)^2\xi^3}{6}-\xi\right| \\
&= \left|\frac{-(2\pi h)^2}{6}\xi^3\right| \\
&= Ch^2|\xi|^3, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

for et $C>0$. Brug nu, at

$$|\widehat{H}_2'(\xi)| = 64\pi^4|\xi|^3+2\pi \leq C\langle\xi\rangle^3,$$

hvor det udnyttes at $|x|<\langle x\rangle=\sqrt{1+x^2}$, og indse, at

$$\left|\int_0^1 \widehat{H}_2'(t(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi)+(1-t)\xi)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_0^1 C\langle(t(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi)+(1-t)\xi)\rangle^3\mathrm{d}t\right|.$$

Indmaden i $\langle(t(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi)+(1-t)\xi)\rangle^3$ omskrives nu ved hjælp af trekantsuligheden

$$\left|t(2\pi h)^{-1}\sin(2\pi h\xi)+(1-t)\xi\right| \leq t\left|\frac{\sin(2\pi h\xi)}{2\pi h}\right|+(1-t)|\xi|, \qquad (4.8)$$

hvor

$$\left|\frac{\sin(2\pi h\xi)}{2\pi h}\right| = |\xi|\left|\frac{\sin(2\pi h\xi)}{2\pi h\xi}\right| \leq |\xi|,$$

idet $\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$. Udregningen i (4.8) fortsættes nu

$$t\left|\frac{\sin(2\pi h\xi)}{2\pi h}\right|+(1-t)|\xi| \leq t|\xi|+|\xi|-t|\xi| = |\xi|. \qquad (4.9)$$

Ved at kombinere (4.6), (4.7) og (4.9) fås

$$\begin{aligned}
|F(1)-F(0)| &\leq Ch^2|\xi|^3\int_0^1\langle\xi\rangle^3\mathrm{d}t \\
&\leq Ch^2\langle\xi\rangle^6.
\end{aligned}$$

Da

$$h^{-1}\sin^2(\pi h\xi) \leq h^{-1}(\pi h\xi)^2 \leq Ch\langle\xi\rangle^2,$$

er

$$|\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \widehat{H}_2(\xi)| = \left|\frac{1}{h}\sin^2(\pi h\xi) + F(1) - F(0)\right| \leq Ch\langle\xi\rangle^6,$$

for et $C > 0$.
De to tilfælde $|\xi| \leq \delta h^{-1}$ og $|\xi| \geq \delta h^{-1}$ betragtes individuelt. Lad derfor nu $|\xi| \geq \delta h^{-1}$. Der gælder at $|\widehat{H}_2(\xi) - \mu|^{-1} \leq C\langle\xi\rangle^{-4}$. Betragt nu $|\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \mu|^{-1}$. Lad $\min(f)$ betegne minimum for funktionen $f(x) = x^4 - x$, og vælg $\mu = \min(f) - c_0$, så er

$$\begin{aligned}
|\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \mu|^{-1} &= |f(h^{-1}\sin(2\pi h\xi)) + h^{-1}\sin^2(\pi h\xi) - \min(f) + c_0|^{-1} \\
&\leq |h^{-1}\sin^2(\pi h\xi) + c_0|^{-1} \\
&\leq Ch,
\end{aligned}$$

for et $C > 0$, hvor det udnyttes at $0 < \sin^2(\xi\pi h) < 1$, da $\delta h^{-1} \leq |\xi| < h^{-1}$ og at $f(h^{-1}\sin(2\pi h\xi)) - \min(f) \geq 0$.
Lad nu $|\xi| \leq \delta h^{-1}$. Det er stadig tilfældet at $|\widehat{H}_2(\xi) - \mu|^{-1} \leq C\langle\xi\rangle^{-4}$. Desuden er

$$\begin{aligned}
|\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \mu|^{-1} &= \left|\frac{1}{h^{-4}\sin^4(2\pi h\xi) + h^{-1}\sin(2\pi h\xi) + h^{-1}\sin^2(\pi\xi h) - \mu}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{h^{-4}\sin^4(2\pi h\xi) + h^{-1}\sin(2\pi h\xi) - \mu}\right| \\
&\leq \frac{1}{16\pi^4\xi^4 - |2\pi\xi| - |\mu|} \\
&\leq C\langle\xi\rangle^{-4},
\end{aligned}$$

for $|\xi| \geq 1$.

Som ovenfor betragtes følgende

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{2,h}(\xi) - \mu)}(\widehat{H}_2(\xi) - \widehat{H}_{2,h}(\xi))\frac{1}{(\widehat{H}_2(\xi) - \mu)}\right| \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|C\big(\langle\xi\rangle^{-4}h\langle\xi\rangle^6 C\langle\xi\rangle^{-4}\big)\right| \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2 Ch\langle\xi\rangle^{-2} \qquad (4.10) \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2 Ch\langle\xi\rangle^{-2} \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

hvor det anvendes at $h \leq \frac{\delta}{|\xi|}$, hvilket følger fra $|\xi| \leq \frac{\delta}{h}$.
Betragt nu støtten for $\widehat{\varphi}(h\xi)\widehat{\varphi}(h\xi+n)$ og $n \neq 0$. Det gælder, at $\widehat{H}_{2,h}(\xi+h^{-1}n)$ er periodisk, og dermed er denne begrænset præcis som $\widehat{H}_{2,h}(\xi)$ er, og for $\widehat{H}_2(\xi)$ gælder

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_2(\xi + h^{-1}n) &= (2\pi((\xi + h^{-1}n))^4 \\
&= 16\pi^4(\xi + h^{-1}n)^4 \\
&\geq c_1 h^{-4},
\end{aligned}$$

hvilket medfører at $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| = O(h)$ når $h \to 0$. Slutteligt giver dette

$$|(Q_h^*(\widehat{H}_{2,h}(\cdot) - \mu)^{-1}Q_h - Q_h^*Q_h(\widehat{H}_2(\cdot) - \mu)^{-1})f(\xi)| \leq Ch \sum_{n \in \{0,\pm 1\}} |f(\xi + h^{-1}n)|, \;\; \xi \in \mathbb{R}.$$

■

4.3 Eksempel 3

Lad nu $\widehat{H}_3(\xi) = \sqrt{1+(2\pi\xi)^2} - 1$ betegne den Fouriertransformerede version af H_3. Betragt $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$, det følger naturligt at denne funktion har globalt minimum for $x = 0$. Den diskrete operator i frekvensdomænet, $\widehat{H}_{3,h}(\xi)$, er givet ved

$$\widehat{H}_{3,h}(\xi) = \sqrt{1 + 4h^{-2}\sin^2(\pi\xi h)} - 1.$$

Grundet kompleksiteten af $H_{3,h}$ i tidsdomænet, findes den ikke for dette eksempel. Nu præsenteres Lemma 3.2.3 for dette eksempel.

Lemma 4.3.1.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes $C > 0$ således, at

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_3 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq Ch, \quad h > 0.$$

Bevis. Alt argumentation følger som i beviset for Lemma 3.2.3.
Det skal nu vises at $\|(1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})} \leq Ch$

$$\begin{aligned}
\|(1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})} &\leq \sup_{|\xi|>h^{-1}\delta} |\sqrt{1+(2\pi\xi)^2} - 1 - \mu|^{-1} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2\pi\delta)^2}{h^2}} - 1 - \mu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{h^{-2}}\sqrt{h^2 + (2\pi\delta)^2} - 1 - \mu} \\
&\leq \frac{1}{h^{-1}2\pi\delta - 1 - \mu} \\
&\leq Ch.
\end{aligned}$$

■

Lemma 4.3.2.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes et $C > 0$ således, at

$$\|(H_{3,h} - \mu)^{-1}P_h - P_h(H_3 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \leq Ch, \quad h > 0.$$

Bevis. Jævnfør beviset for Lemma 3.2.4 gælder

$$\|(H_{3,h}-\mu)^{-1}P_h - P_h(H_3-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} = \|Q_h^*(\widehat{H}_{3,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h - Q_h^*Q_h(\widehat{H}_3(\cdot)-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\mathcal{H}}_h)}.$$

For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gælder der, jævnfør (3.12), at

$$(Q_h^*(\widehat{H}_{3,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h - Q_h^*Q_h(\widehat{H}_3(\cdot)-\mu)^{-1})f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}B_h(\xi+h^{-1}n)f(\xi+h^{-1}n),$$

hvor $B_h(\xi) := (\widehat{H}_{3,h}(\xi)-\mu)^{-1} - (\widehat{H}_3(\xi)-\mu)^{-1}$. Ligesom i beviset for Lemma 3.2.3, medfører antagelserne i Sætning 3.2.1, at $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)} = 0$ når $n \notin \{0,1,-1\}$.
Betragt nu

$$\widehat{H}_{3,h}(\xi) - \widehat{H}_3(\xi) = \widehat{H}_3((\pi h)^{-1}\sin(\pi h\xi)) - \widehat{H}_3(\xi). \tag{4.12}$$

Definer

$$F(t) = \widehat{H}_3(t(\pi h)^{-1}\sin(\pi h\xi) + (1-t)\xi),$$

så kan (4.12) skrives

$$\widehat{H}_{3,h}(\xi) - \widehat{H}_3(\xi) = F(1) - F(0).$$

Betragt nu

$$|F(1)-F(0)| = \left|((\pi h)^{-1}\sin(\pi h\xi) - \xi)\int_0^1 \widehat{H}_3'(t(\pi h)^{-1}\sin(\pi h\xi) + (1-t)\xi)\mathrm{d}t\right|.$$

Vurderingen fra eksemplet ovenfor anvendes nu

$$\left|\frac{1}{\pi h}\sin(\pi h\xi) - \xi\right| \le Ch^2|\xi|^3,$$

for et $C > 0$. Brug nu, at

$$\begin{aligned}|\widehat{H}_3'(\xi)| &= \left|\frac{4\pi^2\xi}{\sqrt{1+(2\pi\xi)^2}}\right| \\ &\le C|\xi|\langle\xi\rangle^{-1} \\ &\le C.\end{aligned}$$

Dermed fås

$$\begin{aligned}|F(1)-F(0)| &\le Ch^2|\xi|^3\int_0^1 C\mathrm{d}t \\ &\le Ch^2\langle\xi\rangle^3,\end{aligned}$$

for et $C > 0$.
Nu betragtes de to tilfælde $|\xi| \le \delta h^{-1}$ og $|\xi| \ge \delta h^{-1}$.
Lad $|\xi| \ge \delta h^{-1}$. Der gælder $|\widehat{H}_3(\xi)-\mu|^{-1} \le C\langle\xi\rangle^{-1}$, da

$$\begin{aligned}|\widehat{H}_3(\xi)-\mu|^{-1} &= |\sqrt{1+(2\pi\xi)^2} - 1 - \mu|^{-1} \\ &\le C\langle\xi\rangle^{-1}.\end{aligned}$$

Betragt nu $|\widehat{H}_{3,h}(\xi)-\mu|^{-1}$,

$$\begin{aligned}|\widehat{H}_{3,h}(\xi)-\mu|^{-1} &= |\sqrt{1+4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)}-1-\mu|^{-1}\\ &\leq C\langle\xi\rangle^{-1},\end{aligned}$$

for et $C>0$. Nu omskrives

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{3,h}(\xi)-\mu)}(\widehat{H}_3(\xi)-\widehat{H}_{3,h}(\xi))\frac{1}{(\widehat{H}_3(\xi)-\mu)}\right|\\ &\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|C\langle\xi\rangle^{-1}h^2\langle\xi\rangle^3\langle\xi\rangle^{-1}\right|\\ &\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2C\langle\xi\rangle^{-1}, \qquad (4.13)\end{aligned}$$

for et $C>0$, hvor $\frac{\delta}{h}\leq|\xi|\leq c_0\frac{\delta}{h}$.
Lad nu $|\xi|\leq\delta h^{-1}$. Der gælder at $|\widehat{H}_3(\xi)-\mu|^{-1}\leq C\langle\xi\rangle^{-1}$. Desuden er

$$\begin{aligned}|\widehat{H}_{3,h}(\xi)-\mu|^{-1} &= \left|\frac{1}{\sqrt{1+h^{-2}\sin^2(2\pi h\xi)}-1-\mu}\right|\\ &\leq \left|\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi\xi)^2}-1-\mu}\right|\\ &\leq C\langle\xi\rangle^{-1}.\end{aligned}$$

Nu betragtes igen

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{3,h}(\xi)-\mu)}(\widehat{H}_3(\xi)-\widehat{H}_{3,h}(\xi))\frac{1}{(\widehat{H}_3(\xi)-\mu)}\right|\\ &\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|C\big(\langle\xi\rangle^{-1}h^2\langle\xi\rangle^3C\langle\xi\rangle^{-1}\big)\right|\\ &\leq Ch^2\langle\xi\rangle|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2,\end{aligned}$$

Betragt nu støtten for $\widehat{\varphi}(h\xi)\widehat{\varphi}(h\xi+n)$ og $n\neq0$. Der gælder at $\widehat{H}_{3,h}(\xi+h^{-1}n)$ er periodisk, og dermed er denne begrænset præcis som $\widehat{H}_{3,h}(\xi)$ er, og for $\widehat{H}_3(\xi)$ gælder

$$\begin{aligned}\widehat{H}_3(\xi+h^{-1}n) &= \sqrt{1+(2\pi(\xi+h^{-1}n))^2}-1\\ &\geq C\langle\xi\rangle,\end{aligned}$$

hvilket medfører at $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)|=O(h)$ når $h\to0$. Slutteligt giver dette

$$|(Q_h^*(\widehat{H}_{3,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h-Q_h^*Q_h(\widehat{H}_3(\cdot)-\mu)^{-1})f(\xi)|\leq Ch\sum_{n\in\{0,\pm1\}}|f(\xi+h^{-1}n)|,\ \ \xi\in\mathbb{R}.$$

■

4.4 Eksempel 4

Følgende er et todimensionelt eksempel på en Schrödinger-operator, lad nemlig den Fouriertransformerede version af en operator, H_4, være givet ved

$$\widehat{H}_4(\xi_1,\xi_2) = (2\pi\xi_1)^2 + (2\pi\xi_2)^4 - 2(2\pi\xi_1)(2\pi\xi_2).$$

Definer nu funktionen $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2xy$, denne funktion har globalt minimum i punktet $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Den diskrete operator i frekvensdomænet, $\widehat{H}_{4,h}(\xi)$, er givet ved

$$\widehat{H}_{4,h}(\xi) = 4h^{-2}\sin^2(\pi\xi_1 h) + 16h^{-4}\sin^4(\pi\xi_2 h) - 8h^{-2}\sin(2\pi\xi_1 h)\sin(2\pi\xi_2 h).$$

Nu præsenteres Lemma 3.2.3 for dette eksempel.

Lemma 4.4.1.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes $C > 0$ således, at

$$\|(1 - P_h^* P_h)(H_4 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq Ch^2, \quad h > 0.$$

Bevis. Alt argumentation følger som i beviset for Lemma 3.2.3.
Det skal nu vises at $\|(1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})} \leq Ch^2$

$$\|(1 - |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2)g(\xi)\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})} \leq \sup_{|\xi|>h^{-1}\delta} |(2\pi\xi_1)^2 + (2\pi\xi_2)^4 - 2(2\pi\xi_1)(2\pi\xi_2) - \mu|^{-1}.$$

Lad $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4 - 2x_1x_2$ og brug at $x_1x_2 \leq \frac{1}{2}(\varepsilon x_1)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}x_2)^2$. Da er

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4 - 2x_1x_2 \geq x_1^2 + x_2^4 - \varepsilon^2 x_1^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}x_2^2.$$

Vælg nu $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, så giver ovenstående

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^4 - \varepsilon^2 x_1^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}x_2^2 &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2^4 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}|x|^2 + C, \end{aligned}$$

idet $x_2^4 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2^2 \geq C$ for $C \in (-\infty, \frac{-26}{16})$. Det vil sige, at der for $|x| > \frac{\delta}{h}$, gælder

$$f(x_1,x_2) - C \geq \frac{\delta^2}{2}h^{-2}$$

og af dette følger, at for valget $\mu = C, x_1 = 2\pi\xi_1, x_2 = 2\pi\xi_2$, er

$$\sup_{|\xi|>h^{-1}\delta} |(2\pi\xi_1)^2 + (2\pi\xi_2)^4 - 2(2\pi\xi_1)(2\pi\xi_2) - \mu|^{-1} \leq \tilde{C}h^2,$$

for et $\tilde{C} > 0$. ■

Lemma 4.4.2.
For $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ findes et $C > 0$ således, at

$$\|(H_{4,h} - \mu)^{-1} P_h - P_h(H_4 - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} \leq Ch, \quad h > 0.$$

Bevis. Jævnfør beviset for Lemma 3.2.4 gælder

$$\|(H_{4,h}-\mu)^{-1}P_h-P_h(H_4-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_h)} = \|Q_h^*(\widehat{H}_{4,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h-Q_h^*Q_h(\widehat{H}_4(\cdot)-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\mathcal{H}}_h)}.$$

For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gælder der jævnfør (3.12), at

$$(Q_h^*(\widehat{H}_{4,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h-Q_h^*Q_h(\widehat{H}_4(\cdot)-\mu)^{-1})f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}B_h(\xi+h^{-1}n)f(\xi+h^{-1}n),$$

hvor $B_h(\xi) := (\widehat{H}_{4,h}(\xi)-\mu)^{-1}-(\widehat{H}_4(\xi)-\mu)^{-1}$. Ligesom i beviset for Lemma 3.2.3, medfører antagelserne i Sætning 3.2.1, at $\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)} = 0$ når $n \notin \{0, 1, -1\}$.

Området deles op i to tilfælde, $|\xi| > \frac{1}{\sqrt{h}}$ og $|\xi| < \frac{1}{\sqrt{h}}$.
For $|\xi| > \frac{1}{\sqrt{h}}$ er det tilstrækkeligt at finde en øvre grænse for $|\widehat{H}_4(\xi)-\mu|^{-1}$ og $|\widehat{H}_{4,h}(\xi)-\mu|^{-1}$.
For $|\widehat{H}_4(\xi) - \mu|^{-1}$ kan beviset for Lemma 4.4.1 bruges dog med den ændring at $|\xi| > \frac{1}{\sqrt{h}}$, således, at

$$f(x_1, x_2) - C \geq \frac{1}{2}|x|^2 > \frac{1}{2}h^{-1}.$$

gælder for $|x| > \frac{1}{\sqrt{h}}$. Det vil altså sige, at

$$|\widehat{H}_4(\xi) - \mu|^{-1} \leq Ch. \tag{4.14}$$

For $|\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \mu|^{-1}$ kan den samme bevisteknik anvendes, således:

Lad $g(x_1, x_2) = \sin^2(x_1)+\sin^4(x_2)-2\sin(2x_1)\sin(2x_2)$, så er det muligt at finde konstanter, så

$$g(x_1, x_2) \geq cx_1^2 + cx_2^4 - 8|x_1||x_2|. \tag{4.15}$$

Konstanterne findes idet $c_0 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ på støtten af $\widehat{\varphi}$. Brug nu at $x_1x_2 \leq \frac{1}{2}(\varepsilon x_1)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}x_2)^2$, så er

$$g(x_1, x_2) \geq cx_1^2 + cx_2^4 - 8\varepsilon^2 x_1^2 - 8\frac{1}{\varepsilon^2}x_2^2.$$

Vælg nu ε som minimum for højresiden af (4.15), således at

$$x_1^2 + x_2^4 - \varepsilon^2 x_1^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}x_2^2 \geq C_0|x|^2 + C.$$

Det vil sige, at der for $|x| > \frac{1}{\sqrt{h}}$ gælder

$$g(x_1, x_2) - C \geq C_0|x|^2 > C_0 h^{-1},$$

altså

$$|\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \mu|^{-1} \leq Ch. \tag{4.16}$$

Det ses at både (4.14) og (4.16) er små, differensen mellem disse vil være mindre end eller lig med summen af disse, og dermed er det ikke nødvendigt at arbejde med B_h i dette tilfælde.
Nu fokuseres på området hvor $|\xi| < \frac{1}{\sqrt{h}}$. Her findes først en grænse for $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)|$, ved hjælp af (3.15).

Indse, at

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \widehat{H}_4(\xi) = \widehat{H}_4((\pi h)^{-1}\sin(\pi h\xi)) + 8h^{-2}\sin(\pi h\xi_1)\sin(\pi h\xi_2) \\ - 8h^{-2}\sin(2\pi h\xi_1)\sin(2\pi h\xi_2) - \widehat{H}_4(\xi),\end{aligned} \tag{4.17}$$

og brug dette til at definere

$$F(t) = \widehat{H}_4(t(\pi h)^{-1}\sin(\pi h\xi) + (1-t)\xi),$$

så kan (4.17) skrives

$$\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \widehat{H}_4(\xi) = F(1) - F(0) + 8h^{-2}\sin(\pi h\xi_1)\sin(\pi h\xi_2) - 8h^{-2}\sin(2\pi h\xi_1)\sin(2\pi h\xi_2). \tag{4.18}$$

Noget tilsvarende Eksempel 3 fås

$$|F(1) - F(0)| = \left| \left(\frac{1}{\pi h}\sin(\pi h\xi) - \xi\right) \int_0^1 \nabla\widehat{H}_4\left(t\frac{1}{\pi h}\sin(\pi h\xi) + (1-t)\xi\right) \mathrm{d}t \right|.$$

Ved brug af (4.7) fås

$$\left| \left(\frac{1}{\pi h}\sin(\pi h\xi) - \xi\right) \right| \leq Ch^2|\xi|^3.$$

Brug nu, at

$$\begin{aligned}|\nabla\widehat{H}_4(\xi)| &= \left| \begin{bmatrix} 2\xi_1 - 2\xi_2 \\ -2\xi_1 + 4\xi_2^3 \end{bmatrix} \right| \\ &= \sqrt{8\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 16\xi_2^6 - 8\xi_1\xi_2 - 16\xi_2^3\xi_1} \\ &\leq \sqrt{8\langle\xi\rangle^2 + 4\langle\xi\rangle^2 + 16\langle\xi\rangle^6 + 8\langle\xi\rangle^2 + 16\langle\xi\rangle^4} \\ &\leq \sqrt{52\langle\xi\rangle^6} \\ &\leq C\langle\xi\rangle^3,\end{aligned}$$

for $C > 0$, hvor der gøres brug af trekantsulighed og at $|\xi_i| \leq \langle \xi \rangle$ for $i = 1, 2$. Ved at bruge samme argumentation som i (4.8) og (4.9) fås

$$\left| t\frac{1}{\pi h}\sin(\pi h\xi) + (1-t)\xi \right| \leq |\xi|.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} |F(1) - F(0)| &\leq Ch^2|\xi|^3 \int_0^1 C\langle \xi \rangle^3 \mathrm{d}t \\ &\leq Ch^2\langle \xi \rangle^6. \end{aligned}$$

Betragt nu de to ekstra led i (4.17), det første led kan vurderes opadtil ved

$$\begin{aligned} 8h^{-2}\sin(\pi h\xi_1)\sin(\pi h\xi_2) &\leq Ch^{-2}(\pi h)^2\xi_1\xi_2 \\ &\leq C\xi_1\xi_2 \\ &\leq C|\xi|^2 \end{aligned}$$

hvor det udnyttes, at $\xi_1\xi_2 \leq |\xi|^2$. Det andet led vurderes

$$\begin{aligned} 8h^{-2}\sin(2\pi h\xi_1)\sin(2\pi h\xi_2) &\leq Ch^{-2}(2\pi h\xi_1)(2\pi h\xi_2) \\ &\leq C\xi_1\xi_2 \\ &\leq C|\xi|^2. \end{aligned}$$

Dermed giver (4.18)

$$\begin{aligned} |\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \widehat{H}_4(\xi)| &= |F(1) - F(0) + 8h^{-2}\sin(\pi h\xi_1)\sin(\pi h\xi_2) - 8h^{-2}\sin(2\pi h\xi_1)\sin(2\pi h\xi_2)| \\ &\leq C_1h^2\langle \xi \rangle^6 + C_2|\xi|^2 + C_3|\xi|^2 \\ &\leq Ch^2\langle \xi \rangle^6, \end{aligned}$$

for $C_1, C_2, C_3, C > 0$.

Det gælder, at $|\widehat{H}_4(\xi) - \mu|^{-1} \leq C\langle \xi \rangle^{-2}$, da

$$\begin{aligned} |(2\pi\xi_1)^2 + (2\pi\xi_2)^4 - 2(2\pi\xi_1)(2\pi\xi_2) - \mu| &\geq ||(2\pi\xi_1)^2 + (2\pi\xi_2)^4| - |2(2\pi\xi_1)(2\pi\xi_2)| - |\mu|| \\ &\geq |C_1|\xi|^2 - C_2|\xi|^2 - |\mu|| \\ &\geq C|\xi|^2. \end{aligned}$$

Det vises nu, at $|\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \mu|^{-1} \leq C\langle \xi \rangle^{-2}$

$$\begin{aligned} |\widehat{H}_{4,h}(\xi) - \mu| &\geq ||4h^{-2}\sin^2(\pi\xi_1 h) + 16h^{-4}\sin^4(\pi\xi_2 h)| - |8h^{-2}\sin(2\pi\xi_1 h)\sin(2\pi\xi_2 h)| - |\mu|| \\ &\geq ||c_1\xi_1^2 + c_2\xi_2^4| - |c_3\xi_1\xi_2| - |\mu|| \\ &\geq C|\xi|^2. \end{aligned}$$

Følgende øvre grænse kan dermed opnås

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|\frac{1}{(\widehat{H}_{4,h}(\xi)-\mu)}(\widehat{H}_4(\xi)-\widehat{H}_{4,h}(\xi))\frac{1}{(\widehat{H}_4(\xi)-\mu)}\right| \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2\left|C\langle\xi\rangle^{-2}h^2\langle\xi\rangle^6\langle\xi\rangle^{-2}\right| \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2Ch^2\langle\xi\rangle^2 \\
&\leq |\widehat{\varphi}(h\xi)|^2Ch, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

hvor det udnyttes at $|\xi| < \frac{1}{\sqrt{h}}$. Betragt nu støtten for $\widehat{\varphi}(h\xi)\widehat{\varphi}(h\xi+n)$ og tilfældet hvor $n \neq 0$. Vælg $\xi + h^{-1}n = x$, så er $|x| > \frac{n}{h}$, og dermed er

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{4,h}(\xi+h^{-1}n) &\geq 4h^{-2}\sin^2(\pi h(\xi_1+h^{-1}n)) + 16h^{-4}\sin^4(\pi h(\xi_2+h^{-1}n)) \\
&\quad + 8h^{-2}\sin(2\pi h(\xi_1+h^{-1}n))\sin(2\pi h(\xi_2+h^{-1}n)) \\
&= 4h^{-2}\sin^2(\pi hx_1) + 16h^{-4}\sin^4(\pi hx_2) + 8h^{-2}\sin(2\pi hx_1)\sin(2\pi hx_2) \\
&\geq C_1x_1^2 + C_2x_2^4 - C_3|x_1x_2| \\
&\geq C_1x_1^2 + C_2x_2^4 - \varepsilon^2x_1^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}x_2^2 \qquad (4.20) \\
&\geq C_0|x|^2 \qquad (4.21) \\
&\geq Ch^{-2}, \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

hvor $C_0, C_1, C_2, C_3, C > 0$. (4.20) og (4.21) følger fra argumenterne i beviset for (4.4.1), og (4.22) følger fra, at $|x| > \frac{n}{h}$.

For $\widehat{H}_4(\xi + h^{-1}n)$ fås

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_4(\xi+h^{-1}n) &= (2\pi(\xi_1+h^{-1}n))^2 + (2\pi(\xi_2+h^{-1}n))^4 - 2(2\pi(\xi_1+h^{-1}n)(\xi_2+h^{-1}n)) \\
&\geq Ch^{-2}, \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

af samme argumentation som for $\widehat{H}_{4,h}(\xi + h^{-1}n)$.

Ved brug af grænserne (4.14), (4.16), (4.19), (4.22) og (4.23), fås $|\widehat{\varphi}(h\xi)|^2|B_h(\xi)| = O(h)$ når $h \to 0$. Brug dette og at $\widehat{\varphi}(h\xi)\widehat{\varphi}(h\xi+n) = 0$ når $n \notin \{0,1,-1\}^2$, således,

$$\begin{aligned}
&|(Q_h^*(\widehat{H}_{4,h}(\cdot)-\mu)^{-1}Q_h - Q_h^*Q_h(\widehat{H}_4(\cdot)-\mu)^{-1})f(\xi)| \\
&= |\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\widehat{\varphi}(h\xi)\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}B_h(\xi+h^{-1}n)f(\xi+h^{-1}n)| \\
&\leq Ch\sum_{n\in\{0,\pm1\}^2}|\widehat{\varphi}(h\xi)||\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}||f(\xi+h^{-1}n)| \\
&\leq \tilde{C}h\sum_{n\in\{0,\pm1\}^2}|f(\xi+h^{-1}n)|, \;\; \xi\in\mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

hvor $\sum_{n\in\{0,\pm1\}^2} |\widehat{\varphi}(h\xi)||\overline{\widehat{\varphi}(h\xi+n)}| \leq c_2$, for et $c_2 > 0$, grundet støtten af $\widehat{\varphi}$. Dette fuldender beviset.

■

5 Laplace-operatoren på uendelige halvlinjer

I dette kapitel arbejdes med et domæne på formen $[0, \infty)$, hvor der tidligere er blevet arbejdet med hele rummet.

5.1 Et nærmere kig på konstruktionen af P_h

Lad atter Schrödinger-operatoren være givet ved Laplace-operatoren

$$H = H_0, \quad H_0 = -\Delta, \quad x \in \mathbb{R},$$

på $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$.
Betragt en glat funktion, G, med reelle værdier mellem 0 og 1, og lad denne have kompakt støtte, som vist på Fig. 5.1.

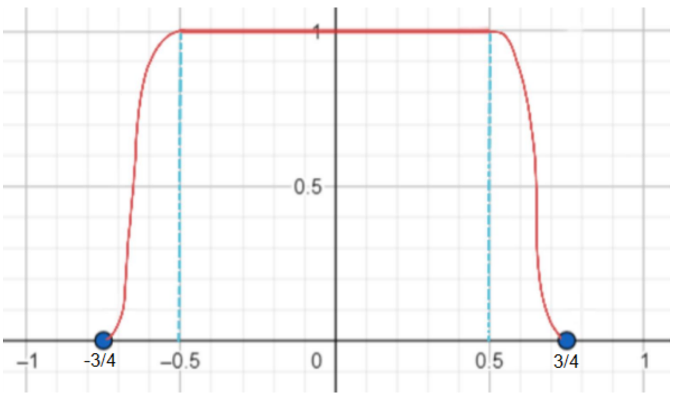

Figure 5.1: Glat funktion, $G(\xi)$, der er lig 1 på $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ og med kompakt støtte inden for $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$

Ydermere gælder for G

$$1 \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} G^2(\xi + \gamma) \leq 2, \tag{5.1}$$

idet, der findes én G-funktion, der er 1 på ethvert interval af typen $\xi + \gamma$, hvor $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ og $\gamma \in \mathbb{Z}$. Funktionen i (5.1) er også glat, da G er, og ydermere periodisk. Nu defineres en ny funktion $\widehat{\varphi}$ ved

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \frac{G(\xi)}{\sqrt{\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} G^2(\xi+\gamma)}}, \tag{5.2}$$

for denne funktion gælder, at $0 \leq \widehat{\varphi}(\xi) \leq 1$, jævnfør $0 \leq G(\xi) \leq 1$ og (5.1). Da G er valgt til at være en lige funktion, $G(\xi) = G(-\xi)$, medfører dette, at $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi)$, jævnfør (5.2). For $\widehat{\varphi}$ gælder ydermere identiteten

$$\sum_{n\in Z} |\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 = 1 \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

da

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{G^2(\xi+n)}{\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} G^2(\xi+\gamma+n)}\right| = 1.$$

Ved brug af den inverse Fouriertransformation fås

$$\varphi(x) = \int e^{2\pi i\xi x}\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Det kan vises at φ ligeledes er en lige funktion,

$$\begin{aligned}
\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)} &= \int e^{-2\pi i\xi x}\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int e^{2\pi i\xi x}\widehat{\varphi}(-\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int e^{2\pi i\xi x}\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \varphi(x),
\end{aligned}$$

hvor det udnyttes at $\widehat{\varphi}$ er en lige funktion. φ er altså en reel lige funktion, da $\varphi(x) = \overline{\varphi(x)}$ og $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

5.1.1 Egenskaber for Δ

Definer nu $\Pi_\pm : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ ved

$$(\Pi_\pm F)(x) := \frac{F(x) \pm F(-x)}{2}.$$

De to funktioner er begge projektioner, altså $\Pi_\pm^2 = \Pi_\pm$, hvilket fremgår af

$$\begin{aligned}
(\Pi_\pm^2 F)(x) &= \frac{\frac{F(x)\pm F(-x)}{2} \pm \frac{F(-x)\pm F(x)}{2}}{2} \\
&= \frac{F(x) \pm F(-x)}{2} \\
&= (\Pi_\pm F)(x).
\end{aligned}$$

Ved at summere de to projektioner fås identiteten,

$$((\Pi_+ + \Pi_-)(F))(x) = \frac{F(x)+F(-x)}{2} + \frac{F(x)-F(-x)}{2} = F(x). \tag{5.4}$$

Laplace-operatoren og de to funktioner kommuterer, det vil sige, at $\Pi_\pm \Delta = \Delta \Pi_\pm$,

$$\begin{aligned}(\Pi_\pm \Delta F)(x) &= \Pi_\pm(F''(x)) \\ &= \frac{F''(x) \pm F''(-x)}{2} \\ &= \Delta\left(\frac{F(x) \pm F(-x)}{2}\right) \\ &= (\Delta \Pi_\pm F)(x).\end{aligned}$$

Denne lighed medfører ydermere

$$\begin{gathered}\Pi_\pm(-\Delta+1) = (-\Delta+1)\Pi_\pm \\ \Leftrightarrow \\ (-\Delta+1)^{-1}\Pi_\pm = \Pi_\pm(-\Delta+1)^{-1}.\end{gathered}$$

$(-\Delta+1)^{-1}$ er altså en selvadjungeret operator der kommuterer med projektionerne $\Pi_\pm$. (5.4) medfører at enhver $L_2(\mathbb{R})$ funktion kan skrives som en sum af en lige og en ulige funktion, hvor $(\Pi_+ f)(x)$ og $(\Pi_- f)(x)$ betegner henholdsvis en lige og en ulige funktion. Ydermere er 0 den eneste funktion der både er lige og ulige. Til sammen medfører dette, at $(-\Delta+1)^{-1}$ kan skrives som en direkte sum

$$(-\Delta+1)^{-1} = \Big(\Pi_+(-\Delta+1)^{-1}\Pi_+\Big) \oplus \Big(\Pi_-(-\Delta+1)^{-1}\Pi_-\Big),$$

og

$$-\Delta = \Big(\Pi_+(-\Delta)\Pi_+\Big) \oplus \Big(\Pi_-(-\Delta)\Pi_-\Big), \tag{5.5}$$

hvor billedet af $\Pi_+(-\Delta)\Pi_+$ vil være funktioner med Neumann-randbetingelser, og billedet af $\Pi_-(-\Delta)\Pi_-$ vil være funktioner med Dirichlet-randbetingelser. For at se dette, vælges $D_0 = \Pi_-\mathcal{S}(\mathbb{R})$, og $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Definer nu en funktion, f, ved

$$f(x) := \Pi_- F(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2} \quad \text{når } x \geq 0. \tag{5.6}$$

Når f er kendt for alle $x \geq 0$, kan (5.6) bruges til at finde funktionsværdierne for f, for $y \leq 0$, nemlig

$$-f(-y) = \Pi_- F(y) = \frac{F(y)-F(-y)}{2},$$

hvor funktionsudtrykket kan bruges, idet $-y \geq 0$. Dermed gælder for denne f, at $f(x) = -f(-x)$, f er derfor ulige og dermed 0 i origo, hvilket forklarer hvorfor man kan betragte den som en funktion med homogen Dirichlet-randbetingelse. For $D_0 = \Pi_+\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vil en tilsvarende udregning give $f(x) = f(-x)$, hvilket er en lige funktion. Her vil f' være en ulige funktion, da $f'(x) = -f'(-x)$, hvilket betyder at $f'(0) = 0$, hvilket forklarer hvorfor man kan betragte den som en funktion med en homogen Neumann-randbetingelse. Med henblik på at udregne integralkernen for $(-\Delta+1)^{-1}$ betragtes

$$\begin{aligned}\{(-\Delta+1)^{-1}\psi\}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi\xi)^2+1}\widehat{\psi}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i\xi(x-x')}}{(2\pi\xi)^2+1}\mathrm{d}\xi\psi(x')\mathrm{d}x'. \end{aligned} \tag{5.7}$$

For at udregne integralet $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i\xi(x-x')}}{(2\pi\xi)^2+1}\mathrm{d}\xi$ anvendes *Jordans lemma* [4, s.65]. Lad $(x-x')$ og $\mathrm{Im}(\xi)$ være positive, da betragtes den øvre halvcirkel C_r med radius, $r>0$, som beskrevet i [4]. I dette tilfælde er $f(z) = e^{2\pi i\xi(x-x')}\frac{1}{(2\pi z)^2+1}$, og der gælder for denne funktion, at

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{z\in\{C_r\}}|f(z)| = 0, \tag{5.8}$$

Det er dermed muligt at udregne integralet ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k),$$

hvor $\mathrm{Res}(f,z_k)$ betegner resten for f i singulariteten z_k. f har kun en pol i den øvre halvplan, nemlig $\xi = i$, dermed fås

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\xi(x-x')}}{(2\pi\xi)^2+1}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi(x-x')}}{(\xi+i)(\xi-i)}\mathrm{d}\xi \\ &= i\mathrm{Res}(f,i) \\ &= \lim_{\xi\to i} i\left(\frac{e^{i\xi(x-x')}}{(\xi+i)}\right) \\ &= \frac{e^{-(x-x')}}{2}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Hvis i stedet at $(x-x')$ er negativ, skal også $\mathrm{Im}(\xi)$ være negativ, således at $\mathrm{Re}(e^{2\pi i\xi(x-x')})$ ikke er positiv, da (5.8) ikke gælder i denne situation. I dette tilfælde betragtes den nedre halvcirkel og

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\xi(x-x')}}{(\xi+i)(\xi-i)}\mathrm{d}\xi &= -i\mathrm{Res}(f,-i) \\ &= \lim_{\xi\to(-i)}(-i)\left(\frac{e^{(i\xi(x-x')}}{(\xi-i)}\right) \\ &= \frac{e^{(x-x')}}{2}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.9) og (5.10) medfører, at

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi(x-x')}}{(2\pi\xi)^2+1}\mathrm{d}\xi = \frac{e^{-|x-x'|}}{2}.$$

Definer $K(x-x') := \frac{e^{-|x-x'|}}{2}$, så gælder, at K er en lige funktion, $K(x-x') = K(x'-x)$, og, at (5.7) giver

$$\{(-\Delta+1)^{-1}\psi\}(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-x')\psi(x')\mathrm{d}x'.$$

Nu beregnes effekten af at multiplicere med Π_-

$$\begin{aligned}
(\Pi_-(-\Delta+1)^{-1}\Pi_-\psi)(x) &= \frac{1}{2}[(-\Delta+1)^{-1}\Pi_-\psi](x) - \frac{1}{2}[(-\Delta+1)^{-1}\Pi_-\psi](-x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} K(x-y)(\Pi_-\psi)(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} K(-x-y)(\Pi_-\psi)(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x-y)-K(-x-y)]\underbrace{(\Pi_-\psi)(y)}_{=f(y)}\mathrm{d}y \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 [K(x-y)-K(-x-y)]\underbrace{(\Pi_-\psi)(y)}_{=-f(-y)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x-y)-K(-x-y)]f(y)\mathrm{d}y \\
&- \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 [K(x-y)-K(-x-y)]f(-y)\mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

lav nu koordinatskifte fra y til $-y$ i (5.11), så fås

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 [K(x-y)-K(-x-y)]f(-y)\mathrm{d}y &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x+y)-\underbrace{K(-x+y)}_{=K(x-y)}]f(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x-y)-K(x+y)]f(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$(\Pi_-(-\Delta+1)^{-1}\Pi_-\psi)(x) = \int_0^\infty [K(x-y)-K(x+y)](\Pi_-\psi)(y)\mathrm{d}y. \tag{5.12}$$

Nu beregnes effekten af at multiplicere med Π_+

$$
\begin{aligned}
(\Pi_+(-\Delta+1)^{-1}\Pi_+\psi)(x) &= \frac{1}{2}[(-\Delta+1)^{-1}\Pi_+\psi](x) + \frac{1}{2}[(-\Delta+1)^{-1}\Pi_+\psi](-x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} K(x-y)(\Pi_+ - \psi)(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} K(-x-y)(\Pi_+\psi)(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x-y)+K(-x-y)]\underbrace{(\Pi_+\psi)(y)}_{=f(y)}\mathrm{d}y \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 [K(x-y)+K(-x-y)]\underbrace{(\Pi_+\psi)(y)}_{=f(-y)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x-y)+K(-x-y)]f(y)\mathrm{d}y \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 [K(x-y)-K(-x-y)]f(-y)\mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

lav nu koordinatskifte fra y til $-y$ i (5.13), så fås

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 [K(x-y)+K_0(-x-y)]f(-y)\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x+y)+\underbrace{K(-x+y)}_{=K(x-y)}]f(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty [K(x-y)+K(x+y)]f(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
(\Pi_+(-\Delta+1)^{-1}\Pi_+\psi)(x) = \int_0^\infty [K(x-y)+K(x+y)](\Pi_+\psi)(y)\mathrm{d}y. \tag{5.14}
$$

5.2 Laplace-operatoren med Dirichlet randbetingelse

I dette afsnit ønskes det at bevise, at (5.12) definerer resolventen af Laplace-operatoren med Dirichlet randbetingelse og derved gør det muligt at finde Laplace-operatoren med Dirichlet randbetingelse, skrevet $-\Delta_D$. Dette gøres på baggrund af Korollar 9.1.15. Først defineres domænet for Laplace-operatoren med Dirichlet randbetingelse

$$D = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{C},\ f \in C^2((0,\infty)),\ f \in C^1([0,\infty)),\ f^{(k)} \in L_2(\mathbb{R}) \text{ for } k \in \{0,1,2\},\ f(0) = 0\}$$

med operatoren $T_D : D \to L_2([0,\infty)) = \mathscr{H}$, hvor $(T_D f)(x) = -f''(x)$.
Definer nu integralkernen

$$K_{-1}^D(x,x') := K(x-x') - K(x+x').$$

For et generelt tal z, der ikke ligger på den positive akse defineres en tilsvarende integralkerne for Laplace-operatoren på hele den reelle akse:

$$\begin{aligned}(-\Delta - z)^{-1}(x,x') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi(x-x')}}{\xi^2 - z}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{i}{2\sqrt{z}}e^{i\sqrt{z}|x-x'|} \\ &=: K_z(x-x').\end{aligned}$$

Definer nu

$$K_z^D(x,x') = K_z(x-x') - K_z(x+x').$$

Domænet for operatoren, Δ_D, associeret med integralkernen K_i^D, er D_0, som er givet ved

$$D_0 = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{C}\ :\ \exists \varphi \in C_0^\infty((0,\infty))\ s.a.\ f(x) = \int_0^\infty K_i^D(x,x')\varphi(x')\mathrm{d}x'\}.$$

Proposition 5.2.1.
Lad D_0, D, T_D og Δ_D være givet som ovenfor, så er

(a) $D_0 \subset D$

(b) $\mathrm{Ran}(T_D - i) = C_0^\infty((0,\infty))$

(c) $(-\Delta_D - i)^{-1}\varphi = (\overline{T}_D - i)^{-1}\varphi,\ \forall \varphi \in L_2((0,\infty))$

Bevis. Først vises punkt (a). Vælg $f \in D_0$, så er

$$f(x) = \int_0^\infty K_i(x-x')\varphi(x')\mathrm{d}x' - \int_0^\infty K_i(x+x')\varphi(x')\mathrm{d}x'. \tag{5.15}$$

Da φ har kompakt støtte kan integralet udvides, til at gå fra $-\infty$ til ∞, uden at ændre på værdien af integralet. Lad g betegne det første integral i (5.15), så er

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_i(x-x')\varphi(x')\mathrm{d}x' = \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi(x')\mathrm{d}x'.$$

Da $i\sqrt{i} = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ er $e^{i\sqrt{i}|x-x'|}$ aftagende, når afstanden mellem x og x' bliver større. Det observeres, at differentiation af $e^{i\sqrt{i}|x-x'|}$ med hensyn til x, giver det samme som at differentiere udtrykket med hensyn til $-x'$. Ved at differentiere g med hensyn til x fås

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\partial}{\partial x'} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\right)\varphi(x')\mathrm{d}x' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi'(x')\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

hvor der i andet lighedstegn er anvendt delvis integration på g', hvor det udnyttes at φ er en funktion med kompakt støtte. Dermed kan g differentieres i forhold til x, ved blot at differentiere φ i forhold til x', og g er dermed glat, ligesom φ er. Lad nu m betegne det andet integral i (5.15)

$$m(x) = \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_0^{\infty} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x',$$

hvor $|x+x'| = (x+x')$ da x og x' begge er ikke-negative. Når m differentieres med hensyn til x, differentieres blot $e^{i\sqrt{i}(x+x')}$, og da denne er glat, er også $m \in C^\infty((0,\infty))$, og dermed er $f \in C^\infty((0,\infty))$.

Da $K_z(x-x')$ er en lige funktion, følger det, at

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{\infty} K_z^D(0,x')\varphi(x')\mathrm{d}x' \\ &= \int_0^{\infty} (K_z(-x') - K_z(x'))\varphi(x')\mathrm{d}x' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Det sidste, der skal vises, er at $f^k \in L_2(\mathbb{R})$ for $k \in \{0,1,2\}$, betragt derfor f''

$$f''(x) = \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi''(x')\mathrm{d}x' - \frac{i}{2\sqrt{i}}(i\sqrt{i})^2 \int_0^{\infty} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x'.$$

Ved at bruge Schurs test Lemma 9.2.2 på de to integraloperatorer

$$\begin{aligned} (T_1\varphi'')(x) &= \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi''(x')\mathrm{d}x', \\ (T_2\varphi)(x) &= \frac{i}{2\sqrt{i}}(i\sqrt{i})^2 \int_0^{\infty} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

med operatornorm

$$\|T_1\|_{L_2\to L_2} \leq \sqrt{\sup_{x\in[0,\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\right| \mathrm{d}x' \cdot \sup_{x'\in\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left|e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\right| \mathrm{d}x}$$
$$\|T_2\|_{L_2\to L_2} \leq \sqrt{\sup_{x\in[0,\infty)} \int_0^{\infty} \left|e^{i\sqrt{i}(x+x')}\right| \mathrm{d}x' \cdot \sup_{x'\in[0,\infty)} \int_0^{\infty} \left|e^{i\sqrt{i}(x+x')}\right| \mathrm{d}x}$$

fås

$$\|f''\|_{L_2} \leq (\|T_1\|_{L_2\to L_2} + \|T_2\|_{L_2\to L_2})\|\varphi\|_{L_2}.$$

Da funktioner på formen $e^{i\sqrt{i}|x|}$ har negativ realdel i eksponenten, vil funktionen være eksponentielt aftagende i x. Integralet af en funktion $e^{i\sqrt{i}|x-x'|}$ vil derfor give det samme for alle valg af x og x', $x \neq x'$, og dermed er

$$\|T_1\|_{L_2\to L_2} \leq C_1,$$
$$\|T_2\|_{L_2\to L_2} \leq C_2,$$

og

$$\|f''\|_{L_2} \leq C_3\|\varphi\|_{L_2},$$

for $C_1, C_2, C_3 > 0$. Da $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$ er $\varphi \in L_2((0,\infty))$, og dermed gælder også $f'' \in L_2((0,\infty))$. Lignende argumenter kan bruges til at vise at $f^{(k)} \in L_2((0,\infty))$ for $k = 0, 1$. Dermed er $f \in D$, og $D_0 \subset D$.
Nu vises punkt (b). Lad $f \in D_0$, så er

$$\begin{aligned}(T_D - i)f &= -f''(x) - if(x)\\ &= \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}(-\varphi''(x') - i\varphi(x'))\mathrm{d}x' + (-i)\int_0^\infty \frac{i}{2\sqrt{i}} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x'\\ &+ i\int_0^\infty \frac{i}{2\sqrt{i}} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x'\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\Delta - i)^{-1}(x,x')((-\Delta - i)\varphi)(x')\mathrm{d}x'\\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

altså er $(T_D - i)f = \varphi$, så $\mathrm{Ran}(T - i) = C_0^\infty([0,\infty))$, som er en tæt mængde i $L_2([0,\infty))$. Dette betyder at $\overline{\mathrm{Ran}(T_D - i)} = L_2([0,\infty))$.

Slutteligt vises punkt (c). Lad $\psi \in D$ og $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$. Fra punkt (b) gælder, at $(T_D - i)f = \varphi$, hvor $f \in D_0$. Da $((-\Delta_D - i)^{-1}\varphi)(x) = \int_0^\infty K_i^D(x,x')\varphi(x')\mathrm{d}x'$ følger det af definitionen på D_0, at $(-\Delta_D - i)^{-1}\varphi \in D_0$. Dermed er

$$\begin{aligned}\langle (T_D + i)\psi, (-\Delta_D - i)^{-1}\varphi\rangle &= \langle \psi, (T_D - i)(-\Delta_D - i)^{-1}\varphi\rangle\\ &= \langle \psi, \varphi\rangle \qquad \forall \psi \in D,\end{aligned}$$

hvor det udnyttes at T_D er symmetrisk. Fra punkt (b) gælder, at aflukningen af T_D genererer hele Hilbertrummet $\mathcal{H}$. Derfor kan ψ erstattes af et vilkårligt element fra aflukningen af T_D, og der gælder

$$\langle(\overline{T}_D + i)\psi, (-\Delta_D - i)^{-1}\varphi\rangle = \langle\psi, \varphi\rangle \qquad \forall\psi \in \mathrm{dom}(\overline{T}_D), \tag{5.16}$$

hvor det bruges at $\overline{T}_D$ er symmetrisk. (5.16) medfører, at

$$(\overline{T}_D - i)(-\Delta_D - i)^{-1}\varphi = \varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty((0,\infty)).$$

Da $(\overline{T}_D - i)$ er en selvadjungeret operator, jævnfør punkt (b), er den også invertibel, og der gælder

$$(-\Delta_D - i)^{-1}\varphi = (\overline{T}_D - i)^{-1}\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty((0,\infty)).$$

Da $C_0^\infty((0,\infty))$ er en tæt delmængde i $L_2((0,\infty))$, og da begge operatorer er begrænsede, må ovenstående lighed gælde for alle $\varphi \in L_2((0,\infty))$. ■

På baggrund af Proposition 5.2.1 må $-\Delta_D$ altså være Laplace-operatoren med Dirichlet randbetingelse.

5.3 Laplace-operatoren med Neumann randbetingelse

Følgende afsnit benytter samme fremgangsmetode som i afsnit 5.2.

I dette afsnit ønskes det at bevise at (5.14) definerer resolventen af Laplace-operatoren med Neumann randbetingelse og derved gør det muligt at finde Laplace-operatoren med Neumann randbetingelse, skrevet $-\Delta_N$. Dette gøres på baggrund af Korollar 9.1.15. Først defineres domænet for Laplace-operatoren med Neumann randbetingelse

$$D = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{C},\ f \in C^2((0,\infty)),\ f \in C^1([0,\infty)),\ f^{(k)} \in L_2(\mathbb{R}) \text{ for } k \in \{0,1,2\},\ f'(0) = 0\},$$

med operatoren $T_N : D \to L_2([0,\infty)) = \mathscr{H}$, hvor $(T_N f)(x) = -f''(x)$.
Definer nu integralkernen

$$K_{-1}^N(x,x') := K(x-x') + K(x+x').$$

For et generelt tal z, der ikke ligger på den positive akse defineres en tilsvarende integralkerne for Laplace-operatoren på hele den reelle akse:

$$\begin{aligned}(-\Delta - z)^{-1}(x,x') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi(x-x')}}{\xi^2 - z}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{i}{2\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x-x'|} \\ &=: K_z(x-x').\end{aligned}$$

Definer nu

$$K_z^N(x,x') := K_z(x-x') + K_z(x+x').$$

Domænet for operatoren, Δ_N, associeret med integralkernen K_i^N er D_0, som er givet ved

$$D_0 = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{C}\ :\ \exists \varphi \in C_0^\infty((0,\infty))\ s.a.\ f(x) = \int_0^\infty K_i^N(x,x')\varphi(x')\mathrm{d}x'\}.$$

Proposition 5.3.1.
Lad D_0, D, T_N og Δ_N være givet som ovenfor, så er

(a) $D_0 \subset D$

(b) $\mathrm{Ran}(T_N - i) = C_0^\infty((0,\infty))$

(c) $(-\Delta_N - i)^{-1}\varphi = (\overline{T}_N - i)^{-1}\varphi,\ \forall \varphi \in L_2((0,\infty))$

Bevis. Først vises punkt (a). Vælg $f \in D_0$, så er

$$f(x) = \int_0^\infty K_i(x-x')\varphi(x')\mathrm{d}x' + \int_0^\infty K_i(x+x')\varphi(x')\mathrm{d}x'. \tag{5.17}$$

Da φ har kompakt støtte kan integralet udvides, til at gå fra $-\infty$ til ∞, uden at ændre på værdien af integralet. Lad g betegne det første integral i (5.17), så er

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_i(x-x')\varphi(x')\mathrm{d}x' = \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi(x')\mathrm{d}x'.$$

Da $i\sqrt{i} = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ er $e^{i\sqrt{i}|x-x'|}$ aftagende, når afstanden mellem x og x' bliver større. At differentiere $e^{i\sqrt{i}|x-x'|}$ med hensyn til x, giver det samme som at differentiere udtrykket med hensyn til $-x'$. Ved at differentiere g med hensyn til x fås

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\partial}{\partial x'} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\right)\varphi(x')\mathrm{d}x' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi'(x')\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

hvor der i andet lighedstegn er anvendt delvis integration på g', hvor det udnyttes at φ er en funktion med kompakt støtte. Dermed kan g differentieres i forhold til x, ved blot at differentiere φ i forhold til x', og g er dermed glat, ligesom φ er. Lad nu m betegne det andet integral i (5.17)

$$m(x) = \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{0}^{\infty} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x',$$

hvor $|x+x'| = (x+x')$ da x og x' begge er ikke-negative. Når m differentieres med hensyn til x differentieres blot $e^{i\sqrt{i}(x+x')}$, og da denne er glat, er også $m \in C^{\infty}((0,\infty))$, og dermed er $f \in C^{\infty}((0,\infty))$.
Det vises nu, at $f'(0) = 0$. f differentieres først, og derefter sættes $x = 0$. Da $K_i^N(x,x') = K_i(x-x') + K_i(x+x')$ er det eneste i (5.17) der afhænger af x, differentieres dette

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(K_i(x-y) + K_i(x+y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i}{2\sqrt{i}}\left(e^{i\sqrt{i}|x-x'|} + e^{i\sqrt{i}|x+x'|}\right)\right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{i}}\left(\frac{i\sqrt{i}(x-x')}{|x-x'|}e^{i\sqrt{i}|x-x'|} + \frac{i\sqrt{i}(x+x')}{|x+x'|}e^{i\sqrt{i}|x+x'|}\right), \end{aligned}$$

hvor der for $x = 0$ fås

$$\frac{i}{2\sqrt{i}}\left(\frac{-(i\sqrt{i})x'}{|x'|}e^{|x'|} + \frac{(i\sqrt{i})x'}{|x'|}e^{i\sqrt{i}|x'|}\right) = 0.$$

Det vises nu, at $f^k \in L_2(\mathbb{R})$ for $k \in \{0,1,2\}$, betragt derfor f''

$$f''(x) = \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi''(x')\mathrm{d}x' + \frac{i}{2\sqrt{i}}(i\sqrt{i})^2 \int_{0}^{\infty} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x'.$$

Ved at bruge Schurs test Lemma 9.2.2 på de to integraloperatorer

$$\begin{aligned} (T_1\varphi'')(x) &= \frac{i}{2\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\varphi''(x')\mathrm{d}x', \\ (T_2\varphi)(x) &= \frac{i}{2\sqrt{i}}(i\sqrt{i})^2 \int_{0}^{\infty} e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

med operatornorm

$$\|T_1\|_{L_2\to L_2} \leq \sqrt{\sup_{x\in[0,\infty)}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\right|\mathrm{d}x' \cdot \sup_{x'\in\mathbb{R}}\int_0^{\infty}\left|e^{i\sqrt{i}|x-x'|}\right|\mathrm{d}x}$$
$$\|T_2\|_{L_2\to L_2} \leq \sqrt{\sup_{x\in[0,\infty)}\int_{0}^{\infty}\left|e^{i\sqrt{i}(x+x')}\right|\mathrm{d}x' \cdot \sup_{x'\in[0,\infty)}\int_0^{\infty}\left|e^{i\sqrt{i}(x+x')}\right|\mathrm{d}x}$$

fås

$$\|f''\|_{L_2} \leq (\|T_1\|_{L_2\to L_2} + \|T_2\|_{L_2\to L_2})\|\varphi\|_{L_2}.$$

Da funktioner på formen $e^{i\sqrt{i}|x|}$ har negativ realdel i eksponenten, vil funktionen være eksponentielt aftagende i x. Integralet af en funktion $e^{i\sqrt{i}|x-x'|}$ vil derfor give det samme for alle valg af x og x', $x \neq x'$, og dermed er

$$\|T_1\|_{L_2\to L_2} \leq C_1,$$
$$\|T_2\|_{L_2\to L_2} \leq C_2,$$

og

$$\|f''\|_{L_2} \leq C_3\|\varphi\|_{L_2},$$

for $C_1, C_2, C_3 > 0$. Da $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$ er $\varphi \in L_2((0,\infty))$, og dermed gælder også $f'' \in L_2((0,\infty))$. Lignende argumenter kan bruges til at vise at $f^{(k)} \in L_2((0,\infty))$ for $k = 0, 1$. Dermed er $f \in D$, og $D_0 \subset D$.
Nu vises punkt (b). Lad $f \in D_0$, så

$$\begin{aligned}(T_N - i)f &= -f''(x) - if(x)\\ &= \frac{i}{2\sqrt{i}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{i}|x-x'|}(-\varphi''(x') - i\varphi(x'))\mathrm{d}x' + i\int_0^\infty \frac{i}{2\sqrt{i}}e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x'\\ &\quad - i\int_0^\infty \frac{i}{2\sqrt{i}}e^{i\sqrt{i}(x+x')}\varphi(x')\mathrm{d}x'\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(-\Delta - i)^{-1}(x,x')((-\Delta - i)\varphi)(x')\mathrm{d}x'\\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

altså er $(T_N - i)f = \varphi$, så $\mathrm{Ran}(T_N - i) = C_0^\infty([0,\infty))$, som er en tæt mængde i $L_2([0,\infty))$. Dette betyder at $\overline{\mathrm{Ran}(T_N - i)} = L_2([0,\infty))$.

Slutteligt vises punkt (c). Lad $\psi \in D$ og $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$. Fra punkt (b) gælder, at $(T_N - i)f = \varphi$, hvor $f \in D_0$. Da $((-\Delta_N - i)^{-1}\varphi)(x) = \int_0^\infty K_i^N(x,x')\varphi(x')\mathrm{d}x'$ følger det af definitionen på D_0, at $(-\Delta_N - i)^{-1}\varphi \in D_0$. Dermed er

$$\begin{aligned}\langle (T_N + i)\psi, (-\Delta_N - i)^{-1}\varphi\rangle &= \langle \psi, (T_N - i)(-\Delta_N - i)^{-1}\varphi\rangle\\ &= \langle \psi, \varphi\rangle \qquad \forall \psi \in D,\end{aligned}$$

hvor det udnyttes at T_N er symmetrisk. Fra punkt (b) gælder, at aflukningen af T_N genererer hele Hilbertrummet $\mathcal{H}$. Derfor kan ψ erstattes af et vilkårligt element fra aflukningen af T_N, og der gælder

$$\langle(\overline{T}_N + i)\psi, (-\Delta_N - i)^{-1}\varphi\rangle = \langle\psi, \varphi\rangle, \qquad \forall\psi \in \mathrm{dom}(\overline{T}_N) \tag{5.18}$$

hvor det bruges at $\overline{T}_N$ er symmetrisk. (5.18) medfører, at

$$(\overline{T}_N - i)(-\Delta_N - i)^{-1}\varphi = \varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty((0,\infty)).$$

Da $(\overline{T}_N - i)$ er en selvadjungeret operator, jævnfør punkt (b), er den også invertibel, og der gælder

$$(-\Delta_N - i)^{-1}\varphi = (\overline{T}_N - i)^{-1}\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty((0,\infty)).$$

Da $C_0^\infty((0,\infty))$ er en tæt delmængde i $L_2((0,\infty))$, og da begge operatorer er begrænsede, må ovenstående lighed gælde for alle $\varphi \in L_2((0,\infty))$. ∎

På baggrund Proposition 5.3.1 må $-\Delta_N$ være Laplace-operatoren med Neumann randbetingelse.

5.4 Hovedresultat for Δ_D og Δ_N på en halvlinje

Dette afsnit har til hensigt at bevise et resultat lignende Sætning 3.2.1 for Δ_D og Δ_N. Først ønskes det at udregne hvordan de diskrete udgaver af Δ_D og Δ_N ser ud.

5.4.1 Beregning af $\Pi_- P_h^*(H_{0,h}+1)^{-1}P_h\Pi_-$

Det undersøges hvad der sker når man lader $P_h\Pi_-$ agere på en funktion,

$$\begin{aligned}(P_h\Pi_-\psi)(z) &= h^{-1}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\frac{x-z}{h}\right)\Pi_-\psi(x)\mathrm{d}x \\ &= h^{-1}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x-z}{h}\right)f(x)\mathrm{d}x + h^{-1}\int_{-\infty}^0 \varphi\left(\frac{x-z}{h}\right)f(x)\mathrm{d}x \\ &= h^{-1}\int_0^\infty \left(\varphi\left(\frac{x-z}{h}\right)-\varphi\left(\frac{-x-z}{h}\right)\right)f(x)\mathrm{d}x \qquad (5.19) \\ &= h^{-1}\int_0^\infty \left(\varphi\left(\frac{x-z}{h}\right)-\varphi\left(\frac{x+z}{h}\right)\right)f(x)\mathrm{d}x, \qquad (5.20)\end{aligned}$$

hvor der i (5.19) og (5.20) udnyttes at φ og f henholdsvis er en lige og ulige funktion jævnfør deres definition. Definer nu $\widetilde{P}_{h-}$ ved

$$(\widetilde{P}_{h-}f)(z) = h^{-1}\int_0^\infty \left(\varphi\left(\frac{x-z}{h}\right)-\varphi\left(\frac{x+z}{h}\right)\right)f(x)\mathrm{d}x,$$

så vil

$$(P_h\Pi_-\psi)(z) = (\widetilde{P}_{h-}f)(z) = -(\widetilde{P}_{h-}f)(-z).$$

Bemærk at $P_h : L_2(\mathbb{R}) \to \ell_2(h\mathbb{Z})$ og $\widetilde{P}_{h-} : L_2(\mathbb{R}_+) \to \ell_2(h\mathbb{N})$.
Det ønskes nu at finde et udtryk for $(H_{0,h}+1)^{-1}$. Dette gøres ved at tage udgangspunkt i $(\widehat{H}_{0,h}+1)^{-1}$ og Fouriertransformere denne, således:

Lad $u \in L_2(\mathbb{R})$,

$$((\widehat{H}_{0,h}+1)^{-1}F_h u)(z) = \frac{1}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}h\sum_{z\in h\mathbb{Z}} e^{-2\pi i z\xi}u(z).$$

Det vil sige, at

$$
\begin{aligned}
((H_{0,h}+1)^{-1}u)(z) &= (F_h^*(\widehat{H}_{0,h}+1)^{-1}F_hu)(z) \\
&= \int_{h^{-1}\mathbb{T}} e^{2\pi i\xi z}\frac{1}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}h\sum_{z'\in h\mathbb{Z}} e^{-2\pi i z'\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}\sum_{z'\in h\mathbb{Z}} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{z'\in h\mathbb{Z}}\int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Definer nu

$$
f(z-z') := \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}e^{2\pi i(z-z')\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{5.21}
$$

Det ønskes nu at vise, at

$$
f(z-z') = f(-(z-z')). \tag{5.22}
$$

Ved koordinatskift $\xi \to -\xi$ fås

$$
\int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}e^{2\pi i(z-z')\xi}\mathrm{d}\xi = \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}e^{2\pi i(-(z-z'))\xi}\mathrm{d}\xi.
$$

Dermed må $f(z-z') = f(-(z-z'))$, da $\sin^2$ er en lige funktion.

Da $(H_{0,h}+1)^{-1}$ anvendes på en ulige funktion, $(\widetilde{P}_{h-}\Pi_-\psi)(z) = u(z)$, er det nu muligt, ved hjælp af symmetriegenskaber, at skrive $(H_{0,h}+1)^{-1}\widetilde{P}_{h-}$ som en sum af $z' \in h\mathbb{Z}^+$, således

$$
\begin{aligned}
((H_{0,h}+1)^{-1}u)(z) &= \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}\sum_{z'\in h\mathbb{Z}} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}\sum_{z'\in h\mathbb{Z}^+} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&+ \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}\sum_{z'\in h\mathbb{Z}^-} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \qquad (5.23) \\
&= \sum_{z'\in h\mathbb{Z}^+} u(z')\int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}(e^{2\pi i(z-z')\xi} - e^{2\pi i(z+z')\xi})\mathrm{d}\xi \qquad (5.24) \\
&= \sum_{z'\in h\mathbb{Z}^+} u(z')(f(z-z') - f(z+z')). \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

Det udnyttes i (5.23) at der nødvendigvis må gælde $u(0) = 0$, for at have en ulige funktion.

For $z = 0$ gælder

$$
\begin{aligned}
&\sum_{z' \in h\mathbb{Z}^+} u(z') \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi) + 1} (e^{2\pi i(-z')\xi} - e^{2\pi i(z')\xi}) \mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{z' \in h\mathbb{Z}^+} u(z') \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi) + 1} (-2i \sin(2\pi z'\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

fordi der integreres over en ulige funktion på et symmetrisk interval.

Når $\widetilde{P}^*_{h-}$ anvendes på det ovenstående, vil ovenstående være en approksimation af Laplace-operatoren med homogen Dirichlet-randbetingelse.

5.4.2 Beregning af $\Pi_+ P_h^* (H_{0,h} + 1)^{-1} P_h \Pi_+$

For Π_+ vil en analog udregning gælde.

Betragt først $P_h \Pi_+$ anvendt på en funktion

$$
\begin{aligned}
(P_h \Pi_+ \psi)(z) &= h^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x - z}{h}\right) \Pi_+ \psi(x) \mathrm{d}x \\
&= h^{-1} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{x - z}{h}\right) f(x) \mathrm{d}x + h^{-1} \int_{-\infty}^0 \varphi\left(\frac{x - z}{h}\right) f(x) \mathrm{d}x \\
&= h^{-1} \int_0^\infty \left(\varphi\left(\frac{x - z}{h}\right) + \varphi\left(\frac{-x - z}{h}\right)\right) f(x) \mathrm{d}x \qquad (5.26) \\
&= h^{-1} \int_0^\infty \left(\varphi\left(\frac{x - z}{h}\right) + \varphi\left(\frac{x + z}{h}\right)\right) f(x) \mathrm{d}x, \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

hvor det i (5.26) og (5.27) udnyttes at f og φ er lige funktioner.

Definer nu $\widetilde{P}_{h+}$ ved

$$
(\widetilde{P}_{h+} f)(z) = h^{-1} \int_0^\infty \left(\varphi\left(\frac{x - z}{h}\right) + \varphi\left(\frac{x + z}{h}\right)\right) f(x) \mathrm{d}x,
$$

så vil

$$
(P_h \Pi_+ \psi)(x) = (\widetilde{P}_h f)(z) = (\widetilde{P}_h f)(-z).
$$

Bemærk igen, at $P_h \ : \ L_2(\mathbb{R}) \to \ell_2(h\mathbb{Z})$ og $\widetilde{P}_h \ : \ L_2(\mathbb{R}_+) \to \ell_2(h\mathbb{N})$.

Nu anvendes den samme funktion, som ovenfor

$$
f(z - z') = \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi) + 1} e^{2\pi i(z - z')\xi} \mathrm{d}\xi.
$$

Da $(H_{0,h}+1)^{-1}$ anvendes på en lige funktion, $(P_h\Pi_+\psi)(z) = u(z)$, er det nu muligt, ved hjælp af symmetriegenskaber, at skrive $(H_{0,h}+1)^{-1}P_h\Pi_+$ som en sum af $z' \in h\mathbb{Z}^+$, således

$$\begin{aligned}
((H_{0,h}+1)^{-1}u)(z) &= \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1} \sum_{z'\in h\mathbb{Z}} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1} \sum_{z'\in h\mathbb{Z}^+} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&+ \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1} \sum_{z'\in h\mathbb{Z}^-\setminus\{0\}} e^{2\pi i(z-z')\xi}u(z')\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{z'\in h\mathbb{Z}^+\setminus\{0\}} u(z') \int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}(e^{2\pi i(z-z')\xi}+e^{2\pi i(z+z')\xi})\mathrm{d}\xi \\
&+ u(0)\int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}e^{2\pi iz\xi}\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{z'\in h\mathbb{Z}^+\setminus\{0\}} u(z')(f(z-z')+f(z+z')) \\
&+ u(0)\int_{h^{-1}\mathbb{T}} \frac{h}{4h^{-2}\sin^2(\pi h\xi)+1}e^{2\pi iz\xi}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Når $\widetilde{P}_{h+}^*$ anvendes på det ovenstående, vil dette være en approksimation af Laplace-operatoren med Neumann-randbetingelse. I det kontinuerte Neumann tilfælde skal man sikre, at $\Psi'(0) = 0$, hvor man for den diskrete model skal vise at $u(1) = u(-1)$. Idet u er en lige funktion, er dette kriterie opfyldt.

5.4.3 Bevis for diskret approksimation af Laplace på en halvlinje

Sætning 5.4.1.
Lad $\widetilde{P}_{h-}^*, \widetilde{P}_{h-}$ og $H_{0,h}$ være givet som ovenfor, lad Δ_D være den kontinuerte Laplace-operator med Dirichlet randbetingelse, og lad $H_{0,h}$ betegne den diskrete udgave. Lad ydermere $\mathcal{H}^+ = L_2([0,\infty))$. For $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ gælder, at

$$\|\widetilde{P}_{h-}^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}\widetilde{P}_{h-} - (-\Delta_D-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^+)} \to 0 \text{ når } h \to 0. \tag{5.28}$$

Bevis. Indmaden i (5.28) kan omskrives ved brug af Sammenhæng mellem Δ og Δ_D

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{h-}^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}\widetilde{P}_{h-} - (\Delta_D-\mu)^{-1} \\
&= \widetilde{P}_{h-}^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}\widetilde{P}_{h-} - \Pi_-(H_0-\mu)^{-1}\Pi_- \\
&= \Pi_-(P_h^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}P_h - (H_0-\mu)^{-1})\Pi_-.
\end{aligned}$$

Dermed gælder

$$\|\Pi_-(P_h^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}P_h-(H_0-\mu)^{-1})\Pi_-\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\to 0,$$

for $h\to 0$, jævnfør Sætning 3.2.1. ■

Sætning 5.4.2.
Lad $\widetilde{P}_{h+}^*, \widetilde{P}_{h+}$ og $H_{0,h}$ være givet som ovenfor, lad Δ_N være den kontinuerte Laplace-operator med Neumann randbetingelse, og lad $H_{0,h}$ betegne den diskrete udgave. Lad ydermere $\mathcal{H}^+ = L_2([0,\infty))$. For $\mu\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gælder, at

$$\|\widetilde{P}_{h+}^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}\widetilde{P}_{h+}-(-\Delta_N-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^+)}\to 0 \text{ når } h\to 0. \tag{5.29}$$

Bevis. Beviset følger af samme argumenter som beviset for Sætning 5.4.1. ■

6 Perspektivering

I sektion 5.2 og 5.3 var det vigtigt at vise, at operatorerne T_D og T_N var essentielt selvadjungerede, før det var muligt at drage lighedstegn mellem disse Laplace-operatorer med henholdsvis Dirichlet og Neumann randbetingelse, og vores operatorer $-\Delta_D$ og $-\Delta_N$, men for hvilke valg af domæne er Laplace-operatoren essentielt selvadjungeret? I denne perspektivering undersøges to valg af domæner for Laplace-operatoren, og hvorvidt Laplace-operatoren er essentielt selvadjungeret på disse.

6.1 Domæne 1: $D(T) = C_0^\infty((0,\infty))$

Lad nu en operator $T : C_0^\infty((0,\infty)) \to L_2((0,\infty))$ være givet ved

$$(Tf)(x) = -f''(x),\ x > 0.$$

T er symmetrisk, da der for $f, h \in C_0^\infty((0,\infty))$ gælder

$$\begin{aligned}\langle Tf, h\rangle &= \int_0^\infty f''(x)h(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty f(x)h''(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle f, Th\rangle.\end{aligned}$$

Det vil vise sig at denne operator ikke er essentielt selvadjungeret, altså det er ikke nok at aflukke operatoren for at få en selvadjungeret operator. Dette ses ved at kigge på funktionen $g(x) = e^{-x}$, så er

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= -\int_0^\infty f''(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty f'(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty f(x)g''(x)\mathrm{d}x \\ &= -\langle f, g''\rangle \\ &= -\langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

Da $-\langle f, g\rangle$ er et begrænset lineært funktional i f for alle $f \in D(T)$ og $T^*g = -g$, er $g \in D(T^*)$ jævnfør Definition 9.1.7.
Lad nu $\psi \in D(\overline{T})$, hvilket betyder at der findes en følge $\{f_n\} \subset D(T)$ således, at $f_n \to \psi$, for $n \to \infty$, og $\{Tf_n\}$ er en Cauchyfølge.

$$\begin{aligned}\langle \overline{T}\psi, g\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle Tf_n, g\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} (-\langle f_n, g\rangle) \qquad (6.1) \\ &= -\langle \psi, g\rangle, \qquad (6.2)\end{aligned}$$

hvor (6.1) gælder for hvert fast n og (6.2) gælder ved at flytte grænsen ind. Dermed er $g \in D(\overline{T}^*)$, hvilket betyder at $D(\overline{T}^*) \neq D(\overline{T})$, da $g \notin D(\overline{T})$.

6.2 Domæne 2: $D(T) = C_0^\infty(\mathbb{R})$

Nu undersøges det om operatoren $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, som er givet ved $Tf = -f''(x)$ er essentielt selvadjungeret.

Dette gøres ved at tage udgangspunkt i Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Lad derfor $\widetilde{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ være givet ved $\widetilde{T}\psi = -\psi''(x)$.

For $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gælder det, at

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-x'|}}{2} \big((-\Delta + 1)\psi\big)(x')\mathrm{d}x',$$

da $\frac{e^{-|x-x'|}}{2}$ er integralkernen for $(-\Delta+1)^{-1}$. Definer nu

$$\varphi(x') = \big((-\Delta + 1)\psi\big)(x').$$

Ovenstående funktion er en $L_2(\mathbb{R})$-funktion, da det er en betingelse for at ψ ligger i definitionsområdet af $\widetilde{T}$. For enhver $L_2(\mathbb{R})$-funktion gælder

$$\exists\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ s.a. } \|\varphi_n - \varphi\| \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Definer nu

$$\psi_n(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-x'|}}{2} \varphi_n(x')\mathrm{d}x'.$$

Ovenstående funktion kan opfattes som en foldning, som kan skrives ækvivalent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-x'|}}{2} \varphi_n(x')\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-x')\frac{e^{-|x'|}}{2}\mathrm{d}x'. \qquad (6.3)$$

Hvis man tager udgangspunkt i højresiden af (6.3) er dette en $C^\infty(\mathbb{R})$-funktion, da det kun er φ_n, som skal differentieres og $\varphi_n \in C_0^\infty$. Afledte af ψ_n vil nemlig være som følgende

$$\psi_n^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(x-x')\frac{e^{-|x'|}}{2}\mathrm{d}x.$$

Det ønskes nu at vise at $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mere konkret skal konstanter C_k og $C_{k,N}$ findes, således, at

$$|x||\psi_n^{(k)}(x)| \leq C_k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

og

$$|x|^N||\psi_n^{(k)}(x)| \leq C_{k,N} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Først observeres det ved trekantsuligheden, at

$$|x| \leq |x - x'| + |x'|,$$

og dermed er

$$\begin{aligned} |x||\psi^{(k)}(x)| &= |x| \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n^{(k)}(x - x')\frac{e^{-|x'|}}{2}|\mathrm{d}x' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x||\varphi_n^{(k)}(x - x')\frac{e^{-|x'|}}{2}|\mathrm{d}x' \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (|x - x'| + |x'|)|\varphi_n^{(k)}(x - x')\frac{e^{-|x'|}}{2}|\mathrm{d}x'. \end{aligned}$$

Her er

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - x'||\varphi_n^{(k)}(x - x')\frac{e^{-|x'|}}{2}|\mathrm{d}x' \leq C_k,$$

fordi hvis $|x - x'|$ bliver stor nok vil $\varphi_n^{(k)}(x - x') = 0$, da det er en funktion med kompakt støtte. Det er altså ikke muligt at $|x - x'|$ bliver uendelig stor. For det andet led fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x'||\varphi_n^{(k)}(x - x')\frac{e^{-|x'|}}{2}|\mathrm{d}x' \leq C_k,$$

da $e^{-|x'|}$ vil aftage hurtigere end $|x'|$ vokser, samt at $\varphi_n^{(k)}(x-x')$ er en funktion med kompakt støtte. Noget tilsvarende gælder for

$$|x|^N||\psi_n^{(k)}(x)| \leq C_{k,N} \quad \forall x\mathbb{R}.$$

I dette tilfælde vil man blot have forskellige potenser af $|x'|, |x'||x - x'|$ og $|x - x'|$, men disse vil være begrænset på samme måde som beskrevet ovenfor. Ovenstående viser altså at $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Det kan nu vises at $\|\psi_n - \psi\| \to 0$ for $n \to \infty$. Lad

$$\psi - \psi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-x'|}}{2}(\varphi(x') - \varphi_n(x'))\mathrm{d}x'.$$

Ved brug af Schurs test, Lemma 9.2.2, på integraloperatoren

$$\widetilde{T}(\varphi - \varphi_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-x'|}}{2}(\varphi(x') - \varphi_n(x')\mathrm{d}x'$$

fås

$$\|\widetilde{T}\|_{L_2\to L_2} \le \sqrt{\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left|e^{-|x-x'|}\right|\mathrm{d}x' \cdot \sup_{x'\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left|e^{-|x-x'|}\right|\mathrm{d}x} = C,$$

for et $C>0$. Dermed er

$$\|\psi-\psi_n\|_{L_2} \le C\|\varphi-\varphi_n\| \to 0 \text{ for } n\to\infty.$$

Slutteligt undersøges det om $\widetilde{T}\psi_n$ er konvergent og i så fald hvad grænsen er. Dette gøres, da det ønskes at beregne hvad aflukningen af operatoren på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er. Betragt

$$\begin{aligned}\widetilde{T}\psi_n &= (\widetilde{T}+I_d)\psi_n - \psi_n\\ &= (\widetilde{T}+I_d)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|x-x'|}}{2}\varphi_n(x')\mathrm{d}x' - \psi_n\\ &= \varphi_n - \psi_n,\end{aligned}$$

hvor det tredje lighedstegn følger af, at $\widetilde{T}$ agerer som $-\Delta$ på funktioner i $C_0^\infty(\mathbb{R})$, hvormed $\frac{e^{-|x-x'|}}{2}$ er $(-\Delta+I_d)^{-1}(x,x')$. Nu gælder for $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\varphi_n-\psi_n &\to \varphi-\psi\\ &= (-\Delta+I_d)\psi-\psi\\ &= -\Delta\psi.\end{aligned}$$

Altså fås

$$\widetilde{T}\psi_n \to -\Delta\psi,$$

hvilket betyder at den selvadjungerede operator, $-\Delta$, som er blevet arbejdet med tidligere i projektet, er afslutningen af $\widetilde{T}$. Altså

$$\overline{\widetilde{T}} = -\Delta.$$

Nu ønskes det at vise $\overline{T} = -\Delta$. Dette gøres ved at modificere ψ_n.

Betragt funktioner J_h som i Fig. 6.1

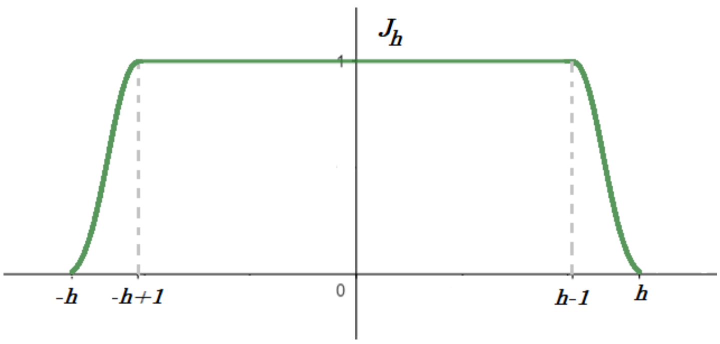

Figure 6.1: Glat funktion, $J_h(x)$, der er lig 1 på $[-h+1, h-1]$ og med kompakt støtte inden for $[-h,h]$.

Antag at $\text{supp}(\varphi_n) \subset [-M, M]$, hvor φ_n er funktionerne som ovenfor. Definer nu

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi_n}(x) &:= J_{n+M}(x)\psi_n(x)\\ &= J_{n+M}\int_{-M}^{M}\frac{e^{-|x-x'|}}{2}\varphi_n(x')\mathrm{d}x'.\end{aligned}$$

Så vil $\widetilde{\psi_n} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, da $e^{-|x-x'|} \in C^\infty(\mathbb{R})$ og det hele er ganget med $J_{n+M} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Nu betragtes hvorledes ψ_n og $\widetilde{\psi_n}$ er forskellige

$$\psi_n(x) - \widetilde{\psi_n}(x) = (1 - J_{n+M}(x))\psi_n(x).$$

Det ønskes at bevise, at ovenstående differens går mod 0 i L_2-normen, når $n \to \infty$. Først observeres det at $(1 - J_{n+M}(x)) \neq 0$, i et område, hvor x er mindst på en afstand $n-1$ fra $\text{supp}(\varphi_n)$, se Fig. 6.2. Så

$$\begin{aligned}|\psi_n(x) - \widetilde{\psi_n}(x)| &= |(1 - J_{n+M}(x))\psi_n(x)|\\ &\leq |1 - J_{n+M}(x)|\int_{-M}^{M}\frac{e^{-|x-x'|}}{2}|\varphi_n(x')|\mathrm{d}x'\\ &= |1 - J_{n+M}(x)|\int_{-M}^{M}\frac{e^{-|x-x'|/2-|x-x'|/2}}{2}|\varphi_n(x')|\mathrm{d}x'\\ &\leq |1 - J_{n+M}(x)|e^{-(n-1)}\int_{-M}^{M}\frac{e^{-|x-x'|/2}}{2}|\varphi_n(x')|\mathrm{d}x'. \qquad (6.4)\end{aligned}$$

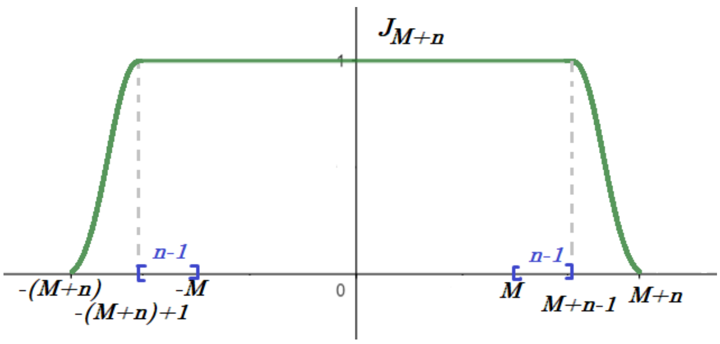

Figure 6.2: Glat funktion, $J_{n+M}(x)$, der er lig 1 på $[-(n+M)+1, (n+M)-1]$ og med kompakt støtte inden for $[-(n+M), n+M]$. Da $\text{supp}(\varphi_n) \subset [-M, M]$ kan afstanden aflæses til at være mindst $n-1$.

I (6.4) ses det altså, at $e^{-(n-1)}$ sørger for at (6.4) går mod 0, når $n \to \infty$. Dette sker da $|1 - J_{n+M}(x)| \leq 1$ og

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M}\frac{e^{-|x-x'|/2}}{2}|\varphi_n(x')| &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|x-x'|/2}}{2}|\varphi_n(x')|\\ &\to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|x-x'|/2}}{2}|\varphi(x')| \text{ for } n \to \infty,\end{aligned}$$

som er begrænset på grund af den tidligere diskussion, hvor det er vist, at $\varphi(x')$ og $e^{-|x-x'|}$ er $L_2(\mathbb{R})$-funktioner. Ovenstående betyder altså at $\psi_n - \widetilde{\psi_n}$ går hurtigt mod 0 i L_2-normen. Noget tilsvarende gælder for afledte af $(\psi_n - \widetilde{\psi_n})$. Betragt altså

$$\begin{aligned}(\psi_n - \widetilde{\psi_n})' &= \psi_n'(x) - \widetilde{\psi_n}'(x) &(6.5)\\ &= (1 - J_{n+M}(x))\psi_n'(x) + J_{n+M}'(x)\psi_n(x). &(6.6)\end{aligned}$$

For ledet $(1-J_{n+M}(x))\psi_n'(x)$ kan samme type argument som for $(1-J_{n+M}(x))\psi_n(x)$ bruges, da φ_n ikke afhænger af x. For det andet led $J_{n+M}'(x)\psi_n(x)$ kan noget tilsvarende gøres, da $J_{n+M}'(x) \neq 0$, når x er i et område af samme type, som beskrevet ovenfor. Altså i et område, hvor x er mindst på en afstand $n-1$ fra $\operatorname{supp}(\varphi_n)$. Dette kan også bevises for de resterende afledte af $(\psi_n - \widetilde{\psi_n})$. Alt dette giver altså

$$T\widetilde{\psi_n} - \widetilde{T}\psi_n \to 0 \text{ når } n \to \infty, \tag{6.7}$$

hvilket betyder, at hvis $\widetilde{T}\psi_n$ har en grænse er det den samme som $T\widetilde{\psi_n}$. Konklusionen er derfor, at

$$\overline{T} = \overline{\widetilde{T}} = -\Delta. \tag{6.8}$$

7 | Konklusion

I dette specialeprojekt er det blevet bevist, at hvis $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 = 1$ når $\xi \in \mathbb{R}^d$, hvor $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ og $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ samt $\mathrm{supp}(\widehat{\varphi}) \subset (-1,1)^d$, så gælder for ethvert $\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\|P_h^*(H_h-\mu)^{-1}P_h - (H-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \to 0 \text{ når } h \to 0, \tag{7.1}$$

hvor H og H_h har betegnet flere forskellige operatorer, primært $H = -\Delta$. Dette gøres blandt andet ved at betragte ovenstående i Fourierbilledet, og dernæst udnytte egenskaber ved operatoren $Q_h := F_h P_h \mathcal{F}^*$, som er blevet undersøgt nærmere i projektet. (7.1) beviser altså, at den diskrete Schrödinger-operator nærmer sig den kontinuerte, når $h \to \infty$.
Det har været nødvendigt at undersøge konstruktionen af $\widehat{\varphi}$ yderligere for at bevise tilsvarende resultater til (7.1) for $-\Delta_D$ og $-\Delta_N$. Til at gøre dette betragtes to projektioner $\Pi_\pm : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, som er givet ved

$$(\Pi_\pm)(x) := \frac{F(x) \pm F(-x)}{2}.$$

De tilsvarende resultater til (7.1) er

$$\|\widetilde{P}_{h-}^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}\widetilde{P}_{h-} - (-\Delta_D-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^+)} \to 0 \text{ når } h \to 0, \tag{7.2}$$

hvor $\widetilde{P}_{h-}^* = P_h\Pi_-$ og

$$\|\widetilde{P}_{h+}^*(H_{0,h}-\mu)^{-1}\widetilde{P}_{h+} - (-\Delta_N-\mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^+)} \to 0 \text{ når } h \to 0, \tag{7.3}$$

hvor $\widetilde{P}_{h+}^* = P_h\Pi_+$. For at bevise (7.2) og (7.3), anvendes det, at operatorerne, T_D, T_N er essentielt selvadjungerede på deres respektive domæner.
I konstruktionen af T_D, T_N er to meget specifikke domæner valgt, for at disse operatorer er essentielt selvadjungerede. Afslutningsvis undersøges valg af domæne nærmere, ved at betragte to alternative domæner for Laplace-operatoren. Det viser sig, at ved at vælge $C_0^\infty((0,\infty))$ som domæne for en operator, T, givet ved

$$(Tf)(x) = -f''(x), \ x > 0, \tag{7.4}$$

vil denne operator ikke være essentielt selvadjungeret. Hvis domænet derimod er $C_0^\infty(\mathbb{R})$, er det blevet bevist at denne operator er essentielt selvadjungeret.

8 Litteraturliste

[1] Teschl G. Topics in Real Analysis; 2010. Available from: https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ra/index.html.

[2] Nakamaura S, Tadano Y. On a continuum limit of descrete Schrödinger operators on square lattice; 2019. Available from: https://arxiv.org/abs/1903.10656.

[3] Berg C, Madsen TG. Mål– og integralteori; 2001. Available from: http://web.math.ku.dk/noter/filer/3mi.pdf.

[4] Knörr HK. Complex functions - An introduction to complex analysis; 2018. Available from: https://www.moodle.aau.dk/pluginfile.php/1127960/course/section/361826/lectnotes-complexfcts-20180430.pdf.

[5] Reed M, Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics 1: Functional Analysis. Academic Press, Inc.; 1972.

[6] Rasmussen MG. Punktmængdetopologi, metriske rum, fuldstændighed; 2017. Available from: http://people.math.aau.dk/~morteng/Homepage_files/E17A1/a1fl1711.pdf.

[7] Wikipedia. Riesz' represntation theorem;. Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/Riesz_representation_theorem#Riesz_representation_theorem.

[8] Wikipedia. Schur Test;. Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/Schur_test.

9 Bilag

9.1 Operatorteori

Følgende sektion er baseret på resultater fra [5].

Definition 9.1.1. Tæt mængde, [6, s. 4]
Lad (X, d) være et metrisk rum, en delmængde $A \subset X$ af det metriske rum kaldes tæt i X, hvis der for ethvert $x \in X$ og $\varepsilon > 0$ gælder

$$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing,$$

hvor $B_\varepsilon(x)$ betegner en åben kugle med centrum i x og radius ε.

En operator, T, på et Hilbertrum, $\mathcal{H}$, defineres som en lineær afbildning fra et lineært underrum af $\mathcal{H}$ ind i $\mathcal{H}$. I resten af dette afsnit vil domænet, $D(T)$, af T være et tæt lineært underrum af $\mathcal{H}$.

Definition 9.1.2. Grafen af en lineær transformation, [5, s. 250]
Grafen af en lineær transformation, T, er mængden af par

$$\Gamma(T) = \{(\varphi, T\varphi) \mid \varphi \in D(T)\},$$

hvor $D(T)$ betegner domænet af T.

$\Gamma(T)$ er dermed en delmængde af $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Definition 9.1.3. Lukket operator, [5, s. 250]
T kaldes en lukket operator, hvis $\Gamma(T)$ er en lukket delmængde af $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Definition 9.1.4. Udvidelse, [5, s. 250]
Lad T_1 og T være operatorer på $\mathcal{H}$. Hvis $\Gamma(T_1) \supset \Gamma(T)$, så kaldes T_1 en udvidelse af T, og skrives $T_1 \supset T$. $T_1 \supset T$ gælder hvis og kun hvis $D(T_1) \supset D(T)$ og $T_1\varphi = T\varphi$ for alle $\varphi \in D(T)$.

Definition 9.1.5. Kan lukkes
Lad $T : D(T) \to \mathcal{H}$, T siges at kan lukkes, hvis der for ethvert valg af $\{f_n\} \subset D(T)$, for hvilken der gælder $f_n \to 0$ når $n \to \infty$, $\{Tf_n\}$ er en Cauchyfølge og $Tf_n \to y$, gælder, at $y = 0$.

Definition 9.1.6. Aflukning
Lad $T : D(T) \to \mathcal{H}$, og lad $D(\overline{T}) \supset D(T)$. En funktion ψ er indeholdt i $D(\overline{T})$, hvis der eksisterer en følge $\{f_n\} \subset D(T)$ således, at $f_n \to \psi$ når $n \to \infty$ og $\{Tf_n\}$ er en Cauchyfølge. $\overline{T}\psi := \lim_{n\to\infty} Tf_n$.

Grænsen $\overline{T}\psi$ er uafhængig af hvilken følge man bruger:
Lad $\{f_n\}$ og $\{g_n\}$ være to følger, for hvilke der gælder $g_n \to \psi$, $f_n \to \psi$ når $n \to \infty$, og $\{Tf_n\}$, $\{Tg_n\}$ er Cauchyfølger. Så gælder $T(f_n - g_n) \to 0$ når $n \to \infty$.

Lad $\psi \in D(T)$, $\varphi \in \mathcal{H}$, og betragt skalarproduktet

$$\langle T\psi, \varphi\rangle = F_\varphi(\psi)$$

hvilket er et lineært funktional af ψ. Hvis $|F_\varphi(\psi)| \leq C_\varphi\|\psi\|$ kan F_φ udvides til et funktional på hele $\mathcal{H}$, idet det er lineært og kontinuert. Riesz' repræsentationssætning [7] giver nu, at

$$\exists!\ \widetilde{\varphi} \in \mathcal{H} \ \text{ således at } \langle T\psi, \varphi\rangle = F_\varphi(\psi) = \langle \psi, \widetilde{\varphi}\rangle \ \forall\psi \in D(T).$$

Afbildningen der sender φ ind i $\widetilde{\varphi}$ er lineær. Antag nemlig, at $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ således at $|\langle T\psi, \varphi_i\rangle| \leq C_i\|\psi\|\ \forall\psi \in D(T)$, for $i = 1, 2$, så er

$$\langle T\psi, \varphi_i\rangle = \langle \psi, \widetilde{\varphi}_i\rangle \ \text{ for } i = 1, 2,$$

og

$$\begin{aligned} \langle T\psi, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle &= \overline{\alpha}\langle \psi, \widetilde{\varphi}_1\rangle + \overline{\beta}\langle \psi, \widetilde{\varphi}_2\rangle \\ &= \langle \psi, \alpha\widetilde{\varphi}_1 + \beta\widetilde{\varphi}_2\rangle. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Da $|\langle T\psi, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle| \leq C\|\psi\|$ gælder det også, at

$$\langle T\psi, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = \langle \psi, \widetilde{\varphi}'\rangle,\ \forall\psi \in D(T), \quad \widetilde{\varphi}' \in \mathcal{H} \tag{9.2}$$

Ved at tage differensen mellem (9.1) og (9.2), fås det, at differensen mellem φ'erne står vinkelret på alle elementer, ψ, fra den tætte delmængde $D(T)$ af $\mathcal{H}$. Dette medfører, at

$$\widetilde{\varphi}' = \alpha\widetilde{\varphi}_1 + \beta\widetilde{\varphi}_2,$$

og afbildningen der sender φ ind i $\widetilde{\varphi}$ er dermed lineær. Altså er $\widetilde{\varphi}' = T^*\varphi$, for en operator T^*, dette leder til følgende definition.

Definition 9.1.7. Adjungeret operator, [5, s. 252]
Lad T være en operator på Hilbertrummet $\mathcal{H}$. Lad $D(T^*)$ være mængden af $\varphi \in \mathcal{H}$, hvor der gælder $|\langle T\psi, \varphi\rangle| \leq C_\varphi \|\psi\|$, og for hvilken der eksisterer $\eta \in \mathcal{H}$, således at

$$\langle T\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \eta\rangle \text{ for alle } \psi \in D(T).$$

For ethvert $\varphi \in D(T^*)$ defineres $T^*\varphi = \eta$, og T^* kaldes den adjungerede af T.

Sætning 9.1.8. [5, s. 253]
Lad T være en operator defineret på et Hilbertrum $\mathcal{H}$. Så gælder

(a) T^* er lukket.

(b) T kan lukkes hvis og kun hvis $D(T^*)$ er tæt, i dette tilfælde er $\overline{T} = T^{**}$.

(c) Hvis T kan lukkes er $(\overline{T})^* = T^*$.

Bevis udeladt.

Definition 9.1.9. Symmetrisk operator, [5, s. 255]
En operator, T, på Hilbertrummet $\mathcal{H}$ kaldes symmetrisk, hvis $T \subset T^*$, altså $D(T) \subset D(T^*)$ og $T\varphi = T^*\varphi$ for alle $\varphi \in D(T)$. T er symmetrisk hvis og kun hvis

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T\psi\rangle \text{ for alle } \varphi, \psi \in D(T).$$

En symmetrisk operator kan altid lukkes.

Sætning 9.1.10.
Lad $T : D(T) \to \mathcal{H}$. Hvis T er symmetrisk, kan T lukkes.

Bevis. Lad $\{f_n\}$ være en følge i $D(T)$, der konvergerer mod 0, og lad $Tf_n \to y$, det skal nu vises at $y = 0$. Lad $g \in D(T)$ og betragt

$$\langle Tf_n, g\rangle = \langle f_n, Tg\rangle \to 0 \quad \text{når } n \to \infty, \tag{9.3}$$

idet $f_n \to 0$, og det udnyttes at T er symmetrisk. Venstresiden i (9.3) konvergerer ligeledes mod $\langle y, g\rangle$, det vil sige

$$\langle y, g\rangle = 0 \quad \text{for alle } g \in D(T),$$

y står derfor vinkelret på en tæt delmængde i $\mathcal{H}$, så $y = 0$. ∎

Definition 9.1.11. Selvadjungeret operator, [5, s. 255]
T kaldes en selvadjungeret operator hvis $T = T^*$.

Af de forrige definitioner fremgår det, at T er selvadjungeret hvis og kun hvis T er symmetrisk og $D(T) = D(T^*)$.

Definition 9.1.12. Essentielt selvadjungeret, [5, s. 256]
En symmetrisk operator T kaldes essentielt selvadjungeret hvis dens aflukning $\overline{T}$ er selvadjungeret.

Sætning 9.1.13.
Lad $T : D(T) \to \mathcal{H}$ være en symmetrisk operator, så er

$$\overline{\operatorname{Ran}(T - i)} = \operatorname{Ran}(\overline{T} - i).$$

Bevis. Det vises først, at $\overline{\operatorname{Ran}(T - i)} \subset \operatorname{Ran}(\overline{T} - i)$, vælg derfor $f \in \overline{\operatorname{Ran}(T - i)}$. Jævnfør Definition 9.1.6 er $f \in \overline{\operatorname{Ran}(T - i)}$, hvis

$$\exists\{f_n\} \subset \operatorname{Ran}(T - i) \text{ og } f_n \to f \text{ for } n \to \infty. \tag{9.4}$$

At $f_n \in \operatorname{Ran}(T - i)$ betyder, at der eksisterer $x_n \in D(T)$ således, at $f_n = (T - i)x_n = Tx_n - ix_n$. Jævnfør (9.4) er $\{f_n\}$ en konvergent følge, der konvergerer mod f, det betyder at $\{f_n\}$ er en Cauchyfølge, og dermed er

$$\begin{aligned}
\|f_m - f_p\|^2 &= \langle T(x_m - x_p) - i(x_m - x_p), T(x_m - x_p) - i(x_m - x_p)\rangle \\
&= \langle T(x_m - x_p) - i(x_m - x_p), T(x_m - x_p)\rangle - \langle T(x_m - x_p) - i(x_m - x_p), i(x_m - x_p)\rangle \\
&= \langle T(x_m - x_p), T(x_m - x_p)\rangle - \langle i(x_m - x_p), T(x_m - x_p)\rangle \\
&- \langle T(x_m - x_p), i(x_m - x_p)\rangle + \langle i(x_m - x_p), i(x_m - x_p)\rangle \\
&= \|T(x_m - x_p)\|^2 + \|(x_m - x_p)\|^2,
\end{aligned} \tag{9.5}$$

hvor det udnyttes at T er en symmetrisk operator. Da $\{f_n\}$ er en Cauchyfølge, findes der for $\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon > 0$, således at der for $m, p > N_\varepsilon$ gælder, at $\|f_m - f_p\|^2 < \varepsilon$, og grundet (9.5) må også $\{Tx_n\}$ og $\{x_n\}$ være Cauchyfølger. Altså må der findes grænser $Tx_n \to \psi$ og $x_n \to \tilde{x}$, for $n \to \infty$. Definition 9.1.6 giver nu, at $\overline{T}\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \psi$, og at

$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \overline{T}\tilde{x} - i\tilde{x} = (\overline{T} - i)\tilde{x}$. Dermed er $f \in \mathrm{Ran}(\overline{T} - i)$.
Det vises nu, at $\overline{\mathrm{Ran}(T - i)} \supset \mathrm{Ran}(\overline{T} - i)$, vælg derfor $f \in \mathrm{Ran}(\overline{T} - i)$. Det betyder, at $\exists x \in D(\overline{T})$ således, at $f = \overline{T}x - ix$. Da $x \in D(\overline{T})$, medfører Definition 9.1.6, at $\exists\{x_n\} \subset D(T)$ således, at $x_n \to x$ og $Tx_n \to \overline{T}x$, for $n \to \infty$, dermed vil $(T-i)x_n = Tx_n - x_n \to f$, for $n \to \infty$. Lad nu $f_n := (T-i)x_n$, så er $f_n \in \mathrm{Ran}(T-i)$, og denne følge af elementer fra $\mathrm{Ran}(T - i)$ konvergerer til f, dermed må f være et element i $\overline{\mathrm{Ran}(T - i)}$. Dette afslutter beviset. ■

Sætning 9.1.14. Kriterier for selvadjungerede operatorer, [5, s. 256f]
Lad T være en symmetrisk operator på et Hilbertrum $\mathcal{H}$, så er følgende tre udsagn ækvivalente

(a) T er selvadjungeret.

(b) T er lukket og $\mathrm{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$.

Bevis. Først vises det, at (a) medfører (b). Antag at T er en selvadjungeret operator, og at der eksisterer et $\varphi \in D(T^*) = D(T)$ således at $T^*\varphi = i\varphi$. Så er $T\varphi = i\varphi$ og

$$i\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle i\varphi, \varphi\rangle = \langle T\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi, T^*\varphi\rangle = \langle\varphi, T\varphi\rangle = -i\langle\varphi, \varphi\rangle$$

og dermed er $\varphi = 0$. Med samme metode kan man vise at $T^*\varphi = -i\varphi$ ikke har nogen løsninger, udover $\varphi = 0$. Ydermere er T lukket, idet enhver selvadjungeret operator er lukket, se Sætning 9.1.8.
Det vises nu, at (b) medfører (c). Da $(\mathrm{Ran}(T - i))^\perp = \mathrm{Ker}(T - i) = \{0\}$, jf. (b), må $\mathrm{Ran}(T - i)$ være tæt i $\mathcal{H}$. Da $\mathrm{Ran}(T - i)$ er tæt skal det kun vises at den er lukket, før (c) er vist. For alle $\varphi \in D(T)$ gælder

$$\|(T - i)\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Hvis $\varphi_n \in D(T)$ og $(T - i)\varphi_n \to \psi_0$, må φ_n konvergere mod et φ_0 og $T\varphi_n$ må også konvergere. Da T er lukket er $\varphi_0 \in D(T)$ og $(T-i)\varphi_0 = \psi_0$. Dermed er $\mathrm{Ran}(T-i)$ lukket, hvilket viser at $\mathrm{Ran}(T - i) = \mathcal{H}$. Lignende argumenter viser at $\mathrm{Ran}(T + i) = \mathcal{H}$.
Til sidst vises at (c) medfører (a). Lad $\varphi \in D(T^*)$. Siden $\mathrm{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$, må der findes et $\eta \in D(T)$ således $(T - i)\eta = (T^* - i)\varphi$. Da T er symmetrisk gælder $D(T) \subset D(T^*)$, og dermed er $\varphi - \eta \in D(T^*)$ og

$$\begin{aligned}(T^* - i)(\varphi - \eta) &= (T^* - i)\varphi - (T^* - i)\eta \\ &= (T^* - i)\varphi - (T - i)\eta \\ &= 0,\end{aligned}$$

idet symmetrien af T medfører, at $T\eta = T^*\eta$ for alle $\eta \in D(T)$. Da $\mathrm{Ran}(T - i) = \mathcal{H}$ er $\mathrm{Ker}(T^* - i) = \{0\}$, dermed må $\varphi = \eta \in D(T)$. Dermed er $D(T^*) \subset D(T)$. Dette beviser at $D(T^*) = D(T)$ og T er dermed selvadjungeret. ■

Korollar 9.1.15. Kriterier for essentielt selvadjungerede operatorer, [5, s. 257]
Lad T være en symmetrisk operator på et Hilbertrum. Så er følgende ækvivalent.

(a) T er essentielt selvadjungeret.

(b) $\mathrm{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Ran}(T \pm i)$ er tæt i $\mathcal{H}$.

Bevis. Det vises først at (a) medfører (b). Hvis T er essentielt selvadjungeret er $\overline{T}$ selvadjungeret, og dermed giver Sætning 9.1.14 at

$$\mathrm{Ker}((\overline{T})^* \pm i) = \{0\}.$$

Da T er en symmetrisk operator kan den lukkes, og Sætning 9.1.8 medfører at $(\overline{T})^* = T^*$, hvilket giver (b).
Det vises nu at (b) medfører (c). $\overline{T}$ er per definition lukket, og (b) sikrer, at

$$\mathrm{Ker}((\overline{T})^* \pm i) = \mathrm{Ker}(T^* \pm i) = \{0\},$$

jævnfør Sætning 9.1.8. Sætning 9.1.14 medfører nu, at

$$\overline{\mathrm{Ran}(T \pm\, i)} = \mathrm{Ran}(\overline{T} \pm\, i) = \mathcal{H},$$

hvilket er definitionen på, at $\mathrm{Ran}(T \pm i)$ er tæt i $\mathcal{H}$.
Slutteligt vises det, at (c) medfører (a). Punkt (c) giver, at $\mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i) = \mathcal{H}$. Sætning 9.1.14 giver nu at $\overline{T}$ er selvadjungeret, hvilket netop betyder at T er essentielt selvadjungeret. ■

9.2 Supplerende resultater

9.2.1 Taylorudvikling for sinus

Ved brug af partiel integration fås

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x\int_0^1 \cos(tx)\mathrm{d}t \\
&= -x\int_0^1 \cos(tx)(1-t)'\mathrm{d}t \\
&= x + \frac{x^2}{2}\int_0^1 \sin(tx)((1-t)^2)'\mathrm{d}t \\
&= x - \frac{x^3}{2}\int_0^1 \cos(tx)(1-t)^2\mathrm{d}t. \qquad (9.6)
\end{aligned}$$

9.2.2 Schwartzfunktioner er begrænsede

For en funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gælder

$$|\varphi(x)| \leq C_N \sqrt{1+|x|^2}^{-N},$$

for en konstant C_N der afhænger af φ. Til at eftervises dette benyttes [3, s. 178ff]. Ved brug af Definition 2.1.2 på Schwartzrummet, kan man tjekke hvorvidt en funktion, φ, er en Schwartzfunktion ved at vise, at for ethvert $N \in \mathbb{N}_0$, gælder

$$p_N(\varphi) := \sup\{(1+|x|^2)^N |\partial^\beta \varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^d, |\beta| \leq N\} < \infty,$$

hvor det bruges, at $|x^\alpha| \leq 1 + x^{2\alpha} \leq (1+|x|^2)^N$, for $|\alpha| \leq N$. Dermed gælder der for φ, at

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq C_N \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \\ &= C_N \sqrt{(1+|x|^2)}^{-2N} \\ &= C_{\tilde{N}} \sqrt{(1+|x|^2)}^{-\tilde{N}}. \end{aligned}$$

9.2.3 Integraloperator, integralkerne og Schurs test

Definition 9.2.1. Integraloperator
En integraloperator T er defineret ved

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u) f(t) \mathrm{d}t,$$

hvor K kaldes integralkernen for operatoren T.

Lemma 9.2.2. Schurs test [8]
Lad X og Y være to målelige rum. Lad T være en integraloperator med en ikke-negativ Schwartzkerne $K(x,y), x \in X, y \in Y$ således, at

$$Tf(x) = \int_Y K(x,y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Hvis der eksisterer tal $\alpha, \beta > 0$ således

$$\int_Y K(x,y) \mathrm{d}y \leq \alpha \qquad \text{for næsten alle } x, \tag{9.7}$$

$$\int_X K(x,y)\mathrm{d}y \leq \beta \qquad \text{for næsten alle } y, \tag{9.8}$$

så kan T udvides til en kontinuert operator $T : L^2 \to L^2$ med operator norm

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq \sqrt{\alpha\beta}.$$

Bevis. Ved brug af Cauchy-Schwarz og (9.7) fås

$$\begin{aligned}
|Tf(y)|^2 &= |\int_Y K(x,y)f(y)\mathrm{d}y|^2 \\
&= |\int_Y \sqrt{K(x,y)}^2 f(y)\mathrm{d}y|^2 \\
&\leq \int_Y K(x,y)\mathrm{d}y \int_Y K(x,y)f(y)^2\mathrm{d}y \\
&\leq \alpha \int_Y K(x,y)f(y)^2\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ved at integrere det ovenstående for x, bruge Fubinis sætning og (9.8)

$$\begin{aligned}
\|Tf(y)\|^2 &\leq \alpha \int_X \int_Y K(x,y)f(y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \alpha \int_Y \int_X K(x,y)\mathrm{d}x f(y)^2\mathrm{d}y \\
&\leq \alpha\beta \int_Y f(y)^2\mathrm{d}y \\
&= \alpha\beta\|f\|^2.
\end{aligned}$$

■