# Signalbehandling på Grafer

### Rekonstruktion og Støjreducering af Billeder

Malika Kuhlman Hansen Simon Nicolai Nielsen

Institut for Matematiske Fag Aalborg Universitet Juni 2020

Speciale





STUDENTERRAPPORT

**Titel:** Signalbehandling på Grafer

**Tema:** Anvendt Matematisk Analyse

**Specialeperiode:** Forårssemesteret 2020

**Gruppe:** 5.211a

**Deltagere:** Malika Kuhlman Hansen Simon Nicolai Nielsen

**Vejleder:** Morten Nielsen

**Oplagsantal:** 4

Sidetal: 87

**Bilagsantal:** 4

Afsluttet: 3. juni 2020

Institut for Matematiske Fag Skjernvej 4A 9220 Aalborg Øst www.ses.aau.dk

#### Synopsis:

I dette speciale forelægger en beskrivelse af signalbehandling på arbitrære grafer. Dette gøres ved at anvende to signalbehandlingsmetoder, henholdsvis graf Fouriertransformationen og den spektrale graf wavelet transformation. Begge metoder bygger på begreber indenfor spektral grafteori og anvendt lineær algebra. Tilgangen til signalbehandling på grafer, ved hjælp af de to metoder, er forholdsvis ens. Målet er, at koncentrere informationen i det oprindelige objekt i relative få led i en dekomposition. Graf Fouriertransformationen tager sit udgangspunkt i en spektral dekomposition af nabomatricen. Denne dekomposition kan resultere i, at der ikke er en lokal natur i basisfunktionerne. I denne forbindelse optræder den spektrale graf wavelet transformation, hvor der, ud fra graf Fourierkoefficienterne, er tilføjet mere lokaliserede repræsentationssystemer. Til sidst sammenlignes de to metoder, hvoraf det vurderes, hvilken af de to nævnte metoder, der er mest effektiv på et støjfyldt billede.

## Indhold

Fo	rord	ix									
Sy	mboloversigt	ix									
1	<b>Iledning</b> Problemanalyse         Problemformulering										
2	Introduktion										
	<ul> <li>2.1 Grundlæggende Grafteori</li> <li>2.2 Spektral Grafteori</li> <li>2.2.1 Spektrum af en Graf</li> <li>2.3 Jordan Dekomposition</li> <li>2.3.1 Jordan Normal Form</li> </ul>	5 7 10 16 16									
3	Signalbehandling på Grafer	23									
	3.1 Grafsignal	23									
	3.2 Graffilter	28									
4	Fouriertransformation										
	4.1 Diskret Fouriertransformation	33									
	4.2 Graf Fouriertransformation	36									
5	Wavelet Transformation	41									
	5.1 Klassisk Wavelet Transformation	41									
	5.2 Diskret Wavelet Transformation	46									
	5.2.1 Spektral Graf Wavelet Transformation	46									
	5.2.2 Skaleringsfunktion	48									
	5.3 Egenskaber for Spektral Graf Wavelet Transformation	49									
	5.3.1 Invers Kontinuert Spektral Graf Wavelet Transformation	49									
	5.4 Grænser for Spektral Wavelet Transformation	50									
	5.5 Polynomiel Approximation	52									
	5.6 Invers Spektral Graf Wavelet Transformation	56									
6	Billedbehandling         6.1       Billedrekonstruktion         6.2       Støjreducering         6.2.1       Støjreducering af Lastbil	<b>59</b> 59 67 67									

	6.2.2	Støjreducering af Fly	73
7	Konklusic	n	79
Li	tteratur		82
Bi	lag A Illus	tration af Kode	83
Bi	lag B Tabe	ller til Afsnit 6.1	85
Bi	lag C Tabe	ller til Afsnit 6.2	87

## Resumé

Dette speciale beskæftiger sig overordnet med signalbehandling på grafer. De grafer, der arbejdes med i dette speciale, indeholder ingen løkker og har ingen multiple kanter. Formålet, med specialet, er at give læseren et overblik over de egenskaber ved en graf, der anvendes til signalbehandling på grafer. Derudover vil to metoder, som anvendes til signalbehandling af grafer, blive beskrevet. Til slut vil der blive set på rekonstruktion og støjreducering af to forskellige typer af billeder. Disse billeder vil blive beskrevet ved hjælp af en graf for derefter at blive dekomponeret ved at anvende en af de to beskrevne metoder på signalværdierne. For at læse og forstå specialet behøves intet forhåndskendskab til grafteori, da grundlæggende grafteori beskrives. Dog vil en vis fortrolighed med grafer gøre det mere forståeligt. Derudover kræves en vis kendskab til harmonisk analyse, for at kunne forstå delene med de to metoder.

Kapitel 2 indeholder en gennemgang af den grundlæggende grafteori, som vil blive anvendt. Her vil der overordnet blive beskrevet de elementære dele ved en graf, eksempelvis hvad der kendetegner en graf, eller hvad valensen af et punkt er. Herefter beskrives spektral grafteori, da det primært er denne teori, som anvendes. Til slut beskrives Jordan dekompositionen, da der kan opstå tilfælde, hvor en grafs matricer ikke kan diagonaliseres.

I kapitel 3 beskrives helt generelt, hvad der menes med signalbehandling på en graf, herunder hvad et grafsignal er og det tilhørende filter til et grafsignal.

Kapitel 4 indeholder en gennemgang af Fouriertransformationen. Først beskrives den klassiske Fouriertransformation også kaldet den diskrete Fouriertransformation. Derefter føres denne viden videre til arbitrære grafer, og hvordan den diskrete Fouriertransformation kan anvendes på grafer. Der kan dog opstå tilfælde, hvor graf Fouriertransformationen ikke er tilfredsstillende nok. I disse tilfælde kan det være nødvendigt at anvende andre metoder.

Kapitel 5 indeholder en beskrivelse af en dekompositionsmetode kaldet wavelet transformationen. I dette kapitel beskrives først den klassiske wavelet transformation, derefter den spektrale graf wavelet transformation, da det er den, som skal anvendes på grafer. Udførelsen på computeren kan være vanskelig med denne metode, da den beregningsmæssigt er tung. Derfor bliver der i dette kapitel også beskrevet en metode, hvorpå den spektrale graf wavelet transformation kan approksimeres.

I kapitel 6 anvendes og diskuteres resultater fra den beskrevne teori. Dette gøres ved at implementere de to metoder, henholdsvis graf Fouriertransformationen og den spektrale graf wavelet transformation, i MATLAB. Disse metoder skal anvendes til at rekonstruere og støjreducere to forskellige typer af billeder. Først blev billederne komprimeret ved hjælp af graf Fouriertransformationen. Dette blev gjort for, at fastsætte tre parametre i koderne, hvor det kunne ses, at parameterværdierne skulle ændres, alt efter hvilket billede, der blev anvendt. Derefter blev der tilføjet støj til begge billeder. Det er her effektiviteten af graf Fouriertransformationen og den spektrale graf wavelet transformation blev testet. Dette blev gjort ved at sammenligne de to metoders resultater.

## Abstract

This master thesis mainly deals with signal processing on graphs. The graphs used in this master thesis do not contain loops or multiple edges. The purpose of this master thesis is to give the reader an idea of the properties of a graph used in signal processing. First, two different methods used for signal processing on graphs will be described. Second, we end up decomposing and noise reducing two different images. These images will be described employing a graph and then decomposed, using one of the two described methods on the signal values. To read and understand the master thesis, no prior knowledge of graph theory is necessary, as basic graph theory will be described. However, some familiarity with graphs will make it more understandable. Also, some knowledge of harmonic analysis is required to understand the parts of decompositions.

Chapter 2 provides a review of the basic graph theory that will be used in this master thesis. Here, the most important things will be described concerning this master thesis. It could be what characterizes a graph, or what the valence of a vertex is. Next, the spectral graph theory is described, as these properties that will be used later. Finally, Jordan decomposition is described, as there may be instances where a graph's matrices cannot be diagonalized.

Chapter 3 describes in general terms what is meant by signal processing on graphs and also describes what is meant by a filter on a graph.

Chapter 4 contains a review of the Fourier transform. First, the classic Fourier transform is described, also called the discrete Fourier transform. This knowledge is then passed on to graphs. Finally, the Fourier transform is described employing graphs. However, there may be cases where the application of the Fourier transform is not satisfiable. In these cases, other methods may be required.

Chapter 5 contains a description of a decomposition method, called the wavelet transform. This chapter first describes the classical wavelet transform, then the spectral graph wavelet transform. However, the problem with this method is that it may be demanding for the computer to perform, therefore this chapter also describes a method to approximate the spectral graph wavelet transform.

In Chapter 6, the theories are applied and the results are discussed. This is done by implementing the two methods, the graph Fourier transform and the spectral graph wavelet transform, in MATLAB. These methods are used to decompose two different images. First, the images are decomposed using the graph Fourier transform. This process is done to set three parameters in the coding, where it is seen that the value of the parameters change depending on which image is used. Then some noise is added to both images. This is where the graph Fourier transform and spectral graph wavelet transform are tested by comparing the results of the two methods.

## Forord

Dette speciale er udarbejdet af en gruppe specialestuderende på tiende semester ved *Institut for Matematiske Fag* på Aalborg Universitet. Specialet er udarbejdet i samarbejde med vejleder Morten Nielsen og har titlen *Signalbehandling på Grafer*. Dette emne befinder sig i grænsefladen mellem harmonisk analyse og diskret matematik. Specialet er en udredning af relevant teori og begreber indenfor både diskret og matematisk analyse med fokus på signalbehandling. Specialet henvender sig til personer med interesse for emnet, men læses bedst, hvis der haves en matematisk forståelse indenfor grafteori og harmonisk analyse.

Der vil gennem specialet fremtræde referencer, og disse vil være samlet i en litteraturliste bagerst. Der er i specialet anvendt kildehenvisning efter Vancouver-standarden. Det er i starten af hvert afsnit nævnt, hvilke kilder det er baseret på, og ved citeringer er kilden nævnt ved citatet. Igennem specialet følger definitioner, sætninger, eksempler og lignende samme nummerering, hvor det første tal indikerer kapitlet. Figurer og ligninger nummereres separat, sådan at første tal også indikerer kapitlet. For at gøre det tydeligt så er ligninger fremhævet med parenteser. Fremkommer figurer eller tabeller uden referencer vil disse være udarbejdet af gruppen selv. Endvidere hvis et bevis fremkommer i et kapitel, er dette afsluttet med symbolet ■ og bemærkninger med symbolet ◄. Dette er gjort med henblik på, at tydeliggøre enden på disse.

Der rettes stor tak til vejleder, Morten Nielsen, som under nedlukningen af Danmark i forbindelse med COVID-19 stadig kunne give inspirerende og konstruktiv vejledning.

Aalborg Universitet 3. juni 2020

Malika Kuhlman Hansen mhan15@student.aau.dk Simon Nicolai Nielsen snni15@student.aau.dk

## Symboloversigt

Denne oversigt beskriver symboler, der vil blive anvendt gennem projektet.

$\deg(v_i)  \dots  \dots  \dots$	Valensen af punktet $v_i$
$\mathcal{F}$	Den diskrete Fouriertransformation
$\mathcal{F}^{-1}$	Den inverse diskrete Fouriertransformation
<i>S</i>	Domænet af signaler
ω	Vægt
$\psi$	Moder wavelet funktion
$\psi_{s,a}(t)$	Familiefunktioner
$\sigma(A)$	Spektrum af nabomatricen, A
$JC_{i,j}$	Den $j'$ te Jordan kæde tilhørende egenværdi $\lambda_i$
JC <sub>i</sub> <sup></sup>	Foreningen af Jordan kæder tilhørende egenværdi $\lambda_i$
A, A(G)	Nabomatrix
$C_n$	Kreds
$D, D(G) \ldots \ldots$	Valensmatrix
E, E(G)	Kantmængde
<i>G</i>	Graf
H	Graffilter
J	Jordan matrix
$J_k(\lambda_i)$	Jordan blok af egenværdi $\lambda_i$
$L, L(G) \ldots \ldots$	Laplace matrix
$m_B(B)$	Minimal polynomium
$N(v_i)$	Nabomængde til punktet $v_i$
$p_A(\lambda)$	Karakteristisk polynomium
$P_n$	Vej
$S_k$	Fourierkoefficienter
$S_f(i)$	Skaleringskoefficienter
$V, V(G) \ldots \ldots$	Punktmængde
$v_i v_j \ldots \ldots$	Kant mellem punkterne $v_i$ og $v_j$
$W, W(G) \ldots \ldots$	Vægtet nabomatrix
$W_f(s,a)$	Klassisk wavelet transformation
$W_{\boldsymbol{f}}(t,i)$	Spektral graf wavelet transformation

## 1 | Indledning

Et af de centrale emner, som behandles indenfor matematisk analyse er harmonisk analyse. I harmonisk analyse betragtes et ganske simpelt setup, hvor der studeres dekompositioner af funktioner. De funktioner, hvis der ses på det i et anvendt perspektiv, kan typisk repræsentere signaler. Det kunne eksempelvis være et lydsignal eller et digitalt billede. En af de ting, der typisk er interesse i, er, at repræsentere disse signaler effektivt, således at de kan transmitteres fornuftigt over eksempelvis internettet. En måde at håndtere det på er ved at lave dekompositioner. Som regel betragtes et kompliceret objekt foreliggende i skalarlegemet  $\mathbb{C}$ , eksempelvis en kontinuert funktion  $f(x) \in \mathbb{C}$ , som er signalet i form af et digitalt billede eller andet. Det, som ønskes at blive gjort, er, at repræsentere dette signal som en sum af simple objekter, hvor

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f_n(x) \in \mathbb{C}$$
(1.1)

I ligning (1.1) betragtes en sum af koefficienter,  $c_n \in \mathbb{C}$ , og simple elementære funktioner,  $f_n(x) \in \mathbb{C}$ . Der er en fastlagt klasse af funktioner, som anvendes ved hjælp af et referencesystem til at udvikle det komplicerede objekt. Alternativt kan der i nogle tilfælde være interesse i at udvikle funktionen relativt til et integral. En overordnede regel er, at det at summere og det at integrere, er to sider af samme sag. I kontinuert kontekst kan der være en nødsaget tilgang til at skrive repræsentationen som et integral. Her vil der typisk blive integreret en amplitude funktion g(u) op mod en anden simpel funktion h(u, x) og dermed opnå en repræsentation af objektet f(x), hvor det oftest ses at  $x \in \mathbb{R}$ , hvorfor

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(u,x) \, du \tag{1.2}$$

Ligning (1.1) og (1.2) kan være smarte, da det ser ud til at det oprindelige objekt kan beskrives ved hjælp af en dekomposition. Det kræver ofte en del beregninger, og der skal helst være en form for gevinst, når sådan en dekomposition konstrueres. Betragtes igen rækketilfældet, jævnfør ligning (1.1), så er en af hovedgevinsterne, at det komplicerede objekt kan repræsenteres ved hjælp af en følge af koefficienter,  $c_n$ , og det komplicerede objekt, f(x), vil typisk være en funktion, som er defineret på den reelle akse eller i et delinterval af den reelle akse. Gemmes det komplicerede objekt, da skal der nødvendigvis være kendskab til alle funktionsværdierne. Det kan være udfordrende at skulle repræsentere alle funktionsværdierne i en computer, da de reelle tal er overtællelige og dermed ikke-tællelige. Da der i sådanne dekompositioner regnes med reelle tal på en computer, så er det kun muligt, hvis et endeligt antal reelle tal medtages. Det kan være mange, men det skal være et endeligt antal. Udarbejdes en dekomposition af typen i ligning (1.1), så indkodes informationen i det komplicerede objekt i disse koefficienter,  $c_n$ , og disse koefficienter er der tællelige mange af. Koefficienterne kan introduceres for computeren og dermed åbne muligheden for at kunne manipulere det pågældende signal, som faktisk viser sig, at være en fordel. En anden fordel er også, at hvis det gøres på den rigtige måde, så vil det blive bemærket, hvis ellers det objekt, der indsættes, er nogenlunde

pænt i den forstand, at når der ses på koefficienterne,  $c_n$ , så er der en ganske lille procentdel af dem, som er store, og de resterende er ganske små. Faktisk er en del af dem også forholdsvist ubetydelige. Eksempelvis kan objektet, f(x), repræsentere et stykke musik, hvor de små koefficienter frasorteres. Groft sagt svarer dette til MP3 kompressionsalgoritmen.

Betragtes derimod et digitalt billede, så bliver det ofte komprimeret på den pågældende telefon eller computer. Dette gøres ved at lave en udvikling som i ligning (1.1), og derefter se på de koefficienter, som er relativt ubetydelige. Måden disse små koefficienter håndteres på er ved, at forkaste dem, og derefter rekonstruere signalet eller billedet baseret udelukkende på de store koefficienter. Det er sådan, de forskellige algoritmer i computeren eller telefonen komprimerer billeder og lydsignaler på. Idéen er derfor simpel, og i de fleste tilfælde er det oftest de simple idéer, som viser sig, at være de mest effektive.

Der vil være ting, som kan ønskes ved sådanne dekompositioner. En af de ting, som har været på tale er, at det ønskes, at det komplicerede objekt, f(x), der udvikles, har egenskaber, som helst skal kunne reflekteres direkte i egenskaberne i de koefficienter, der opnås, således at hvis funktionen defineres til at være tilpas pæn, så skal tilsvarende koefficienter også være pæne. Der skal være en bestemt form for forudsigelse, det vil sige at hvis noget pænt indsættes, så vil der også kunne opnås noget pænt i frekvensdomænet. Et spørgsmål er, hvornår noget er pænt, når funktioner omtales. En klassisk egenskab ved at noget er pænt vil være, at funktionen er differentiabel.

Matematisk set vil et åbentlyst spørgsmål være, at selv om det er fornuftigt at have disse dekompositioner, hvilken klasse af funktioner kan tillades at blive substitueret ind i dekompositionen i ligning (1.1), således at det går godt. Der må eksistere en grænse, som ikke er mulig at presse forbi. Hvis objektet bliver for udfordrende, så vil metoden på et tidspunkt kollapse og dermed opnås ikke den repræsentation, som ønskes. Derfor er en væsentlig del af dette at få styr på en klasse af funktioner, således at det sikres, at når en funktion substitueres ind i ligning (1.1), så fungerer det. Jævnfør rækketilfældet i ligning (1.1), så optræder tallet  $\infty$ . Matematisk set kan det være bekymrende i den forstand, at når der adderes uendelige mange led, så er det en række, som gør, at der er risiko for, at objektet ikke er konvergent. Dels er det muligt, at højresiden kan konvergere og hvis den konvergerer, så er et nærtliggende spørgsmål om, hvornår lighedstegnet i (1.1) gælder. Det kan være for alle værdier af x eller et udvalg af x.

### 1.1 Problemanalyse

I harmonisk analyse og dermed også i signalbehandling er en klassisk metode Fouriertransformationen på den reelle akse. Fra en anvendelsessynsvinkel så har Fouriertransformationen sin berettigelse, når det kontinuerte signal, som ligger bag det samplede signal, betragtes. Typisk er den klassiske model af et signal, at når der samples, så er det en kontinuert bagvedliggende funktion, som samples. Nogen gange kan det være en idé at lave en analyse af signalbehandlingen af den bagvedliggende funktion fremfor udelukkende at arbejde på samples. Dette giver flere muligheder for at lave signalbehandling og have Fouriertransformationen til rådighed. En af de vigtigste egenskaber for Fouriertransformationen er, at den er informationsbevarende. Det vil sige, at når transformationen udføres på et signal, så vil der ikke gå information tabt.

En relativ ny udvikling af Fouriertransformationen er dens anvendelse på arbitrære grafer. Det er et område, som er vokset eksplosivt, da en af de ting, som der modelleres med, i forhold til grafer, er internettet. Det er det, som eksempelvis Google anvender til deres PageRank algoritme. Hvis der ses på Facebook brugere og hvor mange forbindelser, der er imellem dem, så er det noget, som naturligt bliver modelleret via en graf, og deraf haves et naturligt signal på grafen. Det kan eksempelvis være de beskeder en given person har sendt på Facebook på en given dag. Dette vil resultere i et signal, og sådanne datasæt ligger der rigtige mange af.

Der eksisterer klassiske tilgange til signalbehandling, som også optræder i forbindelse med signalbehandling på grafer. En klassisk metode er, at der haves et signal, og dette signal indeholder et ægte signal inkluderet eventuelt støj. Støjen ønskes reduceret, men spørgsmålet er, hvordan dette gøres, når signalet er defineret på en graf. Ved klassisk signalbehandling udvikles det pågældende signal i en passende basis. Herefter bemærkes det, at den ægte del af signalet ofte kan associeres med de lavere frekvenser, og støjen ligger gemt i de høje frekvenser. De høje frekvenser sorteres fra, og derefter vil en rekonstruktion blive lavet, baseret på de lavere frekvenser. Når Fouriertransformationen på en graf betragtes, så kan tilgange emuleres, da der haves en naturlig beskrivelse af, hvilke frekvenser der haves på den pågældende graf. Derefter kan signalet udvikles relativt til denne Fourier basis, hvorefter de høje frekvenser frasorteres.

En ulempe ved Fouriertransformationen er, at det er svært at uddrage lokal information. Det samme problem opstår, når der arbejdes med arbitrære grafer. Det vil sige, at når der ses nærmere på Fourierkoefficienterne i dekompositionen af en graf, så vil den typisk være spredt ud på alle punkter i grafen. Dette gør, at der ikke er en lokal natur af basisfunktionerne. Nogen gange ved signalbehandling, kan der være interesse i, at have en mere lokal natur af de basisfunktioner, som der udvikles efter. I denne forbindelse optræder wavelet funktioner, som er et velkendt begreb indenfor harmonisk analyse. Her er der fundet ækvivalenter for grafer. Så det er ud fra Fourierkoefficienterne, at der bliver tilføjet mere lokaliseret repræsentationssystemer. Hvis signaler måles, så vil signalerne ofte være naturlige globale, men signalerne kan også være lokale. Det kan eksempelvis være, hvis der sker noget tæt på et punkt, og langt væk fra punktet sker der ikke så meget. Hvis der udvikles en Fourierbasis, så vil der skulle anvendes mange koefficienter for at kunne repræsentere den lokale struktur. Hvis en basis er lokaliseret, så kan der anvendes de koefficienter, som lever omkring fænomenet til at repræsentere med. De andre koefficienter forbliver uændret og har en koefficient på nul. Dermed opnås en mere kompakt repræsentation. Dette speciale vil derfor undersøge, hvordan dette fungerer både i forhold til Fouriertransformationen på grafer og wavelet transformationen på grafer.

### 1.2 Problemformulering

Specialets omdrejningspunkt er besvarelsen af problemformuleringen:

Hvad er det bagvedliggende teori for signalbehandling på arbitrære grafer, og eksisterer der andre signalbehandlingsmetoder, som fungerer på arbitrære grafer?

Til besvarelsen af ovenstående problemfomulering er det nødvendigt med en grundig redegørelse for generel grafteori og lineær algebra. Herefter introduceres generel signalbehandling, herunder signalbehandling på grafer. Derefter beskrives Fouriertransformationen og dens anvendelse på grafer, hvorefter målet er at arbejde imod konstruktionen af wavelets på grafer.

## 2 | Introduktion

Formålet med dette kapitel er at beskrive grundlæggende og spektral grafteori. Kapitlet indeholder begreber indenfor grafteori, som læseren formodes at have et grundlæggende kendskab til. Begrebernes relevans består i at gøre notationen klar for læseren. I kapitlet er afsnit 2.1 baseret på [1], afsnit 2.2 baseret på [2] og afsnit 2.3 baseret på [10] med mindre andet er angivet. I dette speciale vil der ikke blive anvendt grafer indeholdende multiple og orienteret kanter samt løkker.

### 2.1 Grundlæggende Grafteori

I dette afsnit introduceres de grundlæggende begreber indenfor grafteori, som vil blive anvendt gennem specialet. Det første, som introduceres, er definitionen på en graf.

#### **Definition 2.1: Graf**

En graf, G, defineres som en tupel G = (V, E) bestående af en vilkårlig, ikke-tom og endelig punktmængde, V, og en endelig kantmængde, E.

For at fremhæve, at V og E er henholdsvis punkt- og kantmængden for en graf, G, vil dette ofte skrives V(G) og E(G). Antallet af elementer i punktmængden V(G) kaldes grafens orden og noteres n = |V| = |V(G)|. Kantmængden, E(G), er en mængde af par  $\{v_i, v_j\}$ , hvor  $v_i, v_j \in V(G)$ , som kaldes kanter. Dette er ikke-ordnede par, hvilket betyder, at kanterne i G ikke er underlagt en orientering. Nærmere bestemt, så er  $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ . Antallet af kanter i en graf, G, kaldes grafens størrelse og noteres m = |E| = |E(G)|. Enhver kant,  $\{v_i, v_j\}$ , i en graf, G, skrives ofte  $v_i v_j = v_j v_i$ . Hvis  $e = v_i v_j$  er en kant i G, så fortolkes e som kanten, der forbinder punktet  $v_i$  med  $v_j$ .

Består en graf, G, af en alternerende følge af punkter og kanter, som starter og slutter med to distinkte punkter, kaldes G en vej. En vej noteres  $P_n$  og har n punkter samt m = n - 1 kanter. I en vej er hver kant incident med punktet før og efter den i følgen, og intet punkt optræder mere end én gang. Punkterne mellem start- og slutpunktet kaldes indre punkter. Med længden af en vej menes antallet af kanter i vejen. På figur 2.1 er vejen  $P_4$  med n = 4 punkter og m = 3 kanter illustreret.



**Figur 2.1:** En vej,  $P_4$ , med en længde på 3.



**Figur 2.2:** En lige kreds,  $C_4$ , med n = m = 4.



**Figur 2.3:** En ulige kreds,  $C_5$ , med n = m = 5.

Består en graf, G, derimod af en alternerende følge af punkter og kanter, der starter og slutter i det

samme punkt, kaldes G en kreds. Hver kant er incident med punktet før og efter den i følgen. Bortset fra start- og slutpunktet er alle punkter og kanter forskellige. En kreds med n punkter noteres  $C_n$ . Der eksisterer både lige og ulige kredse. Med en lige kreds menes der en kreds med et lige antal punkter, og med en ulige kreds menes der en kreds med et ulige antal punkter. På figur 2.2 er den lige kreds  $C_4$  illustreret, og på figur 2.3 er den ulige kreds  $C_5$  illustreret.

Givet en kant  $e = v_i v_j$ , siges punktet  $v_i$  at være incident med kanten e, og ligeledes er  $v_j$  og e incidente. Punkterne  $v_i$  og  $v_j$  kaldes endepunkter for e. Desuden er to kanter naboer, hvis de deler et endepunkt, og kaldes uafhængige, hvis de ikke deler et endepunkt. Mængden af naboer til et punkt,  $v_i \in V$ , samt nabolaget til dette punkt defineres ved følgende.

Definition 2.2: Nabomængde og Nabolag

Lad G = (V, E) være en graf. For et punkt  $v_i \in V$  defineres nabomængden til  $v_i$  ved

 $N_G(v_i) = N(v_i) = \{v_j \in | v_i v_j \in E\}$ 

Et *K*-nabolag er mængden af punkter, hvor det er muligt at gå fra et punkt  $v_i$  til et punkt  $v_j$  af veje med længde *K*.

Antallet af kanter incidente med et givent punkt  $v_i \in V$  kaldes grafens valens, og defineres i det følgende.

**Definition 2.3: Valens** 

Lad G = (V, E) være en graf. Grafens valens angiver antallet af kanter, som er incidente med et givent punkt,  $v_i \in V$  og noteres som

$$\deg_G(v_i) = \deg(v_i) \text{ for } v_i \in V$$

Grafens maksimumvalens er givet ved

$$\Delta = \Delta(G) = \max\{\deg(v_i) \mid v_i \in V\}$$

Grafens minimumvalens er givet ved

$$\delta = \delta(G) = \min\{\deg(v_i) \mid v_i \in V\}$$

Hvis der om alle punkter  $v_i, v_j \in V$  i en graf G = (V, E) gælder, at  $\deg(v_i) = \deg(v_j)$ , kaldes grafen regulær. En regulær graf kaldes *k*-regulær, hvis  $\deg(v_i) = k$  for alle  $v_i \in V$ . Indimellem er det kun relevant at betragte en del af en given graf. Eksempelvis kan en vej eller en kreds ligge inde i en graf. Dette betegnes som en delgraf.

#### **Definition 2.4: Delgraf**

Lad *G* og *H* være grafer. En delgraf, *H*, af en graf, *G*, er en graf, hvor  $V(H) \subseteq V(G)$  og  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dette noteres som  $H \subseteq G$ .

En graf, G, kaldes sammenhængende, hvis der for hvert par af punkter  $v_i, v_j \in V$  eksisterer en vej, hvis start- og slutpunkt er henholdsvist  $v_i$  og  $v_j$ . Hvis en graf ikke er sammenhængende, kaldes dens maksimale sammenhængende delgrafer komponenter. At en sammenhængskomponent af en graf, G, er en maksimal sammenhængende delgraf af G betyder, at der eksisterer en delgraf i G, som ikke kan gøres større. Dette gøres klart i følgende definition.

Definition 2.5: Sammenhængende Graf og Sammenhængskomponent

En graf, G = (V, E), kaldes sammenhængende, hvis der eksisterer en vej fra punkt  $v_i$  til punkt  $v_j$  i G for alle punkter  $v_i, v_j \in V$ .

En sammenhængskomponent af en graf G er en maksimal sammenhængende delgraf af G.

**Bemærkning.** Fremover betragtes kun sammenhængende grafer, hvis ikke andet er nævnt.

Grafer kan beskrives visuelt ved at tegne dem i planen, men det er også muligt at beskrive grafer ved hjælp af spektral teori. En kendt matrix inden for spektral grafteori er nabomatricen,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Derudover eksisterer også en valensmatrix til en graf. Heraf er det muligt at inddrage forskellige begreber indenfor anvendt lineær algebra, som kan sammenkobles med grafteori. Eksempelvis vil det være muligt at undersøge grafens egenrum og det tilhørende karakteristiske polynomium.

### 2.2 Spektral Grafteori

I dette afsnit redegøres for den spektrale grafteori, som det er nødvendigt at have kendskab til for at løse den aktuelle problemstilling senere i specialet. Der eksisterer forskellige matricer, som beskriver forskellige egenskaber til grafer. Den mest kendte er nabomatricen.

#### **Definition 2.6: Nabomatrix**

Lad G = (V, E) være en graf med |V| = n punkter. Nabomatricen,  $A = A(G) = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ , til G er en reel  $n \times n$  matrix, hvor

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{hvis } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

**Bemærkning.** Ved spektral grafteori kan en arbitrær graf også noteres G = (V, A), da nabomatricen, A, beskriver relationen mellem punkterne.

En egenskab ved nabomatricen er, at summen af række *i* angiver valensen til punktet  $v_i$  i grafen *G*. Derudover gælder, for *G*, at nabomatricen er symmetrisk. Det vil sige, at  $A = A^{\top}$  og  $a_{ij} = a_{ji}$  for alle i, j = 0, ..., n - 1. Kanterne i en graf kan være underlagt en værdi, også kaldet en vægt. Hvis dette er tilfældet, så kaldes nabomatricen, *A*, en vægtet nabomatrix og noteres *W*.

#### **Definition 2.7: Vægtet Nabomatrix**

Lad G = (V, A) være en vægtet graf med |V| = n punkter. Den vægtede nabomatrix,  $W = W(G) = (w_{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ , til G er en  $n \times n$  matrix, hvor $w_{ij} = \begin{cases} \omega & \text{hvis } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{hvis } v_i v_j \notin E \end{cases}$ 

hvor  $\omega: E \to \mathbb{R}^+$ .

**Bemærkning.** Fremover noteres en vægtet graf som G = (V, W). Dette gøres for at tydeliggøre, at kantmængden indeholder vægte. I tilfælde hvor  $\omega = 1$ , for alle kanter i grafen, så vil W = A.

Der eksisterer også en anden type matrix. Dette er Laplace matricen. For at kende til Laplace matricen skal der være kendskab til både nabomatricen, A, og en valensmatrix. En valensmatrix, D = D(G), til en graf, G = (V, A), er en  $n \times n$  matrix, hvis diagonalindgang,  $d_{ii}$ , angiver valensen af punktet  $v_i$ . Rettere sagt, så defineres valensmatricen, D, som

$$D_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

Med andre ord, så er det en matrix, hvori der kun forekommer indgange forskellig fra 0 i diagonalen. Med kendskab til nabomatricen, *A*, og valensmatricen, *D*, kan Laplace matricen defineres som følgende.

#### **Definition 2.8: Laplace Matrix**

Lad G = (V, A) være en graf. Laplace matricen,  $L = L(G) = (l_{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ , til grafen G er en reel  $n \times n$  matrix, med rækkesummer lig nul, hvor

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{hvis } i = j \\ -1 & \text{hvis } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Lad A og D være henholdsvis nabomatricen og valensmatricen til G = (V, A). Så er

L=D-A

**Bemærkning.** For en vægtet graf, G = (V, W), er Laplace matricen givet ved L = D - W

Laplace matricen har de samme informationer som nabomatricen. Det vil sige, at Laplace matricen også er en symmetrisk og reel matrix. Hvis G = (V, A) er en *k*-regulær graf, kan Laplace matricen skrives som

$$L = kI - A$$

For at få en bedre forståelse af Laplace matricen gives følgende resultat. Hvis en vilkårlig vektor,  $u \in \mathbb{C}^n$ , multipliceres på Laplace matricen, L, således at Lu = w for  $w \in \mathbb{C}^n$ , da gælder det, at

$$(Lu)_i = w_i = \deg(v_i)u_i - \sum_{j:v_iv_j \in E} u_j = \sum_{j:v_iv_j \in E} (u_i - u_j)$$
(2.1)

Det betyder, at det *i*'te element af produktet Lu er summen af differensen mellem  $u_i$  og indeksene af u svarende til naboerne til punktet  $v_i$  i grafen G. En anden vigtig egenskab for Laplace matricen er, at den er positiv semidefinit. Inden dette vises defineres først hvad der forstås ved semidefinitte matricer.

#### **Definition 2.9: Semidefinit Matrix**

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Så siges *B* at være positiv semidefinit, hvis

 $\boldsymbol{u}^* B \boldsymbol{u} \geq 0$ , for alle  $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ 

#### **Proposition 2.10**

Laplace matricen, *L*, er positiv semidefinit.

#### Bevis

Lad  $u \in \mathbb{C}^n$  være en vilkårlig vektor. Det gælder for  $u^* = \overline{u}^\top$  og Laplace matricen, *L*, at

$$\begin{split} \boldsymbol{u}^* L \boldsymbol{u} &= \sum_i \overline{u}_i \sum_{j: v_i v_j \in E} (u_i - u_j) \\ &= \sum_{v_i v_j \in E} \overline{u}_i (u_i - u_j) \\ &= \sum_{i < j: v_i v_j \in E} (\overline{u}_i (u_i - u_j) + \overline{u}_j (u_j - u_i)) \\ &= \sum_{i < j: v_i v_j \in E} |u_i - u_j|^2 \ge 0 \end{split}$$

altså er matricen positiv semidefinit.

Dette betyder, at hvis vektoren  $u \in \mathbb{C}^n$  betragtes som tildelingen af tal til ethvert punkt i grafen G, så er  $u^*Lu$  præcis summen af kvadraterne af forskellen mellem værdierne for to naboer. Udover, at Laplace matricen indeholder de samme informationer som nabomatricen, så indeholder den også andre vigtige egenskaber omkring grafens spektrum.

#### 2.2.1 Spektrum af en Graf

I afsnit 2.2 blev det beskrevet, at grafer ikke kun kan repræsenteres grafisk, men også ved spektral teori. I det følgende beskrives forskellige begreber indenfor anvendt lineær algebra, som skal anvendes i forbindelse med matricerne til og spektrummet af en graf, G = (V, A). Spektret til en vilkårlig matrix,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , betegnes  $\sigma(B)$ , og defineres som

 $\sigma(B) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} \mid \lambda_i \text{ er en egenværdi for } B, i = 0, \dots, n-1\}$ 

og angiver mængden af egenværdier tilhørende *B*. Dette gør, at spektrummet af en graf kan defineres som følgende.

Definition 2.11: Spektrum af en Graf

Lad G = (V, A) være en graf. Spektrummet af grafen G er givet ved spektrummet til nabomatricen, A, og noteres  $\sigma(A)$ .

Siden at nabomatricen A er en symmetrisk matrix, så giver spektralsætningen, at der er n reelle egenværdier til A talt med multiplicitet. Eftersom at Laplace matricen indeholder de samme informationer som nabomatricen, så vil Laplace matricens egenværdier også angive et spektrum til grafen.

**Definition 2.12: Laplace Spektrum** 

Lad G = (V, A) være en graf. Så er Laplace spektrummet til G givet ved spektrummet til Laplace matricen, L, og noteres  $\sigma(L)$ .

Jævnfør proposition 2.10, så er Laplace matricen, L, en reel positiv semidefinit matrix, hvilket gør, at dens egenværdier  $\mu_i \in \mathbb{R}$  er ikke-negative. Det vil sige, at den mindste egenværdi er 0 og egenværdierne arrangeres i rækkefølgen

$$0 = \mu_0 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_{n-1}$$

Generelt bestemmes egenværdierne til en vilkårlig matrix,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ved hjælp af det karakteristiske polynomium. Det karakteristiske polynomium til en vilkårlig graf, G = (V, A), med tilhørende nabomatrix, A, defineres som følgende.

Definition 2.13: Det Karakteristiske Polynomium til Nabomatricen

Lad G = (V, A) være en graf med tilhørende nabomatrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  og lad I være identitetsmatricen. Det karakteristiske polynomium,  $p_A$ , til grafen G er givet ved

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \tag{2.2}$$

som er et polynomium af orden n.

**Bemærkning.** Det karakteristiske polynomium for nabomatricen kan også skrives  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Polynomiet er forskellig fra ligning (2.2) med en faktor  $(-1)^n$ .

Hvis  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  er en egenværdi af en matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , således at  $(t - \lambda_i)^k$ , hvor t er en konstant, er en faktor i det karakteristiske polynomium af B, så er k den algebraiske multiplicitet af  $\lambda_i$ . Dimensionen af egenrummet, null $(B - \lambda I_n)$ , kaldes den geometriske multiplicitet [3]. Fremover vil den geometriske multiplicitet for egenværdi  $\lambda_i$  noteres  $g_i$ . I forbindelse med spektrummet af en matrix, ønskes det oftest, at dekomponere matricen. For at kunne dekomponere, så skal matricen være diagonaliserbar.

#### **Definition 2.14: Diagonaliserbar Matrix**

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en vilkårlig matrix. Så er B diagonaliserbar, hvis og kun hvis B har n lineært uafhængige egenvektorer.

Hvis en vilkårlig matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er diagonaliserbar kan den omskrives til en dekomposition.

#### **Definition 2.15: Matrix Dekomposition**

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  være en vilkårlig matrix. Dekompositionen af matricen, B, er givet ved

$$B = PDP^{-1}$$

hvor  $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er en diagonal matrix med egenværdier,  $\lambda_i$ , i diagonalen og  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er en matrix givet ved de tilhørende egenvektorer  $u_i$  i søjlerne.

Bemærkning. For nabomatricen, A, gælder det at

$$A = PDP^{-1}$$

-	
_	
_	
-	

I lineær algebra indekseres søjler og rækker i en  $n \times n$  matrix fra 1 til n, mens ved matricer tilhørende grafer indekseres søjler og rækker, således at disse svarer til punktmængden V. Dette betyder, at for at kunne konstruere en nabomatrix, A, da skal punktmængden nummereres. Dette kan resultere i flere forskellige nabomatricer til den samme graf. Dette betyder ikke noget for spektrummet, da det ikke afhænger af nummereringen af punkterne  $v_i \in V$  for i = 0, ..., n - 1. Følgende eksempel illustrerer dette.

#### Eksempel 2.16: Spektrum

Lad G = (V, A) være en graf med n = 3 punkter og m = 2 kanter. Ved at nummerere punkterne forskelligt opnås tre distinkte grafer,  $G_i$  for i = 1, 2, 3. Disse grafer er illustreret på figur 2.4.



**Figur 2.4:** De tre distinkte grafer,  $G_1, G_2, G_3$ , med hver sin punktnummerering.

Ud fra graferne på figur 2.4 opnås følgende tre nabomatricer

	$v_0$	$v_1$	$v_2$				$v_0$	$v_1$	$v_2$				$v_0$	$v_1$	$v_2$
$v_{i}$	0]0	1	1	]		$v_0$	0	1	0]			$v_0$	0	0	1]
$A_1 = v$	1 1	0	0	,	$A_2 =$	$v_1$	1	0	1	, A	$A_{3} =$	$v_1$	0	0	1
$v_{1}$	2 1	0	0			$v_2$	0	1	0			$v_2$	1	1	0

Det karakteristiske polynomium er entydigt bestemt ud fra disse tre nabomatricer og udregnes til

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2)$$

og det tilhørende spektrum er angivet ved  $\sigma(A_i) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$  for i = 1, 2, 3, som er egenværdierne til nabomatricerne. Egenvektorerne tilhørende egenværdierne er givet ved

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^\top, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top, \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^\top$$

Jævnføres definition 2.8, så er Laplace matricerne,  $L_1, L_2, L_3$ , tilhørende graferne på figur 2.4 givet ved

	2	-1	$-1^{-1}$			1	-1	0			1	0	-1
$L_1 =$	-1	1	0	,	$L_2 =$	-1	2	-1,	,	$L_3 =$	0	1	-1
	$\lfloor -1 \rfloor$	0	1			0	-1	1			$\lfloor -1 \rfloor$	-1	2

Det karakteristiske polynomium er igen entydigt bestemt ud fra disse tre Laplace matricer, og udregnes til

$$p_L(\mu) = \mu(\mu - 1)(\mu - 3)$$

hvor det tilhørende spektrum er givet ved  $\sigma(L_i) = \{0, 1, 3\}$  for i = 1, 2, 3. Egenvektorerne tilhørende egenværdierne for Laplace matricerne,  $L_i$  for i = 1, 2, 3, er givet ved

 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\top}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{\top}$ 

Hvis en graf G = (V, A) er en *k*-regulær graf med tilhørende nabomatrix *A*, så gælder, for egenværdierne  $\lambda_i$ , at  $|\lambda_i| \leq k$ . Dette beskrives i følgende sætning.

Sætning 2.17: Egenværdier for Regulære Grafer

Lad G = (V, A) være en *k*-regulær graf med  $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$  og tilhørende nabomatrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . For enhver egenværdi  $\lambda \in \mathbb{R}$  til nabomatricen A gælder, at  $|\lambda| \leq k$ .

#### Bevis

Antag at  $Au = \lambda u$ , hvor  $u \neq 0$ . Lad  $u_j$  være indgangen af u med den største absolutte værdi. Det vil sige, at  $|u_j| \ge |u_i|$  for alle i = 0, ..., n - 1. For den j'te indgang af Au gælder, at

$$|\lambda||u_j| = |\lambda u_j| = |(A\boldsymbol{u})_j| = \left|\sum_{v_i \in N(v_j)} u_i\right| \le \sum_{v_i \in N(v_j)} |u_i| = \deg(v_j)|u_j| = k|u_j|$$

Heraf følger det, at  $|\lambda| \leq k$ .

Da eksempel 2.16 illustrererede, hvordan spektrummet af sammenhængende grafer kan bestemmes, så undersøges det nu, hvordan spektrummet af ikke-sammenhængende grafer kan bestemmes.

Proposition 2.18: Spektrum af Ikke-sammenhængende Grafer

Lad G = (V, A) være en graf med sammenhængskomponenter  $G_i$  for  $i \in \{1, ..., s\}$ . Så er spektrummet til grafen G foreningen af hvert spektrum til hver sammenhængskomponent,  $G_i$ .

**Bemærkning.** Proposition 2.18 gælder ligeledes for Laplace spektrummet  $\sigma(L)$ .

#### Eksempel 2.19: Spektrum af Ikke-sammenhængende Grafer

Lad G=(V,A)være den ikke-sammenhængende graf med |V|=5 og |E|=3illustreret på figur 2.5.



**Figur 2.5:** Den ikke-sammenhængende graf, G, med |V| = 5 og |E| = 3.

Jævnføres definition 2.5, så har grafen, G, på figur 2.5 to sammenhængskomponenter,  $G_1$  og

 $G_2$ . Nabomatricerne for  $G_1$ ,  $G_2$  og G er givet ved

							ı	<i>'</i> 0	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
			$v_2$	$v_3$	$v_4$		$v_0 [$	0	1	0	0	٦0
$v_0$	$v_1$		$v_2 \int 0$	1	0]		$v_1$	1	0	0	0	0
$A_1 = \begin{bmatrix} v_0 \\ 1 \end{bmatrix}_{1}^{0}$	$\begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix}$ ,	$A_2 =$	$v_3 \mid 1$	0	$1 \mid$ ,	$A_3 =$	$v_2$	0	0	0	1	0
$v_1 \lfloor 1$	0]		$v_4 \mid 0$	1	0		$v_3$	0	0	1	0	1
			L		-		$v_4$	0	0	0	1	0

Jævnføres definition 2.13, så udregnes det karakteristiske polynomium for de tre nabomatricer,  $A_1, A_2, A_3$ , som er givet ved

$$p_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$
  

$$p_{A_2}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 2)$$
  

$$p_{A_3}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2)$$

Spektrummet, tilhørende de tre nabomatricer, aflæses til henholdsvis

$$\sigma(A_1) = \{-1, 1\}$$
  
$$\sigma(A_2) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$
  
$$\sigma(A_3) = \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$$

Det bemærkes, at  $\sigma(A_3) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ .

Siden at Laplace matricen er defineret således, at hver række summer til nul, så er der mindst en egenværdi af Laplace matricen, som er nul. Betragtes en normaliseret vektor  $u \in \mathbb{C}^n$  givet ved

$$oldsymbol{u} = egin{pmatrix} rac{1}{\sqrt{n}} & \dots & rac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}^ op$$

og den i'te indgang <br/>i $L \pmb{u}$ , så bemærkes det, at Laplace spektrummet altid har mindst én egenværd<br/>i $\mu_0=0,$ da

$$(L\boldsymbol{u})_i = \sum_j u_i - u_j = \sum_j \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \ i = 0, \dots, n-1$$

Det næste resultat viser, at multipliciteten af Laplace egenværdien  $\mu_0 = 0$  svarer til antallet af sammenhængskomponenter i grafen *G*. Eksempelvis hvis  $\mu_0 = \mu_1 = 0$ , så er grafen ikke-sammenhængende.

#### Sætning 2.20

Lad G = (V, A) være en graf. Multipliciteten af Laplace egenværdien  $\mu_0 = 0$  af grafen G er lig antallet af sammenhængskomponenter  $G_i$  af G.

#### Bevis

Antag, at grafen, G = (V, A), har k sammenhængskomponenter. Det vises nu, at multipliciteten af Laplace egenværdien  $\mu_0 = 0$  er mindst lig antallet af sammenhængskomponenter af G.

Antag, at de *k* sammenhængskomponenter svarer til den disjunkte punktinddeling  $S_0, \ldots, S_{k-1}$  af *V*. Herefter konstrueres *k* vektorer,  $u_0, \ldots, u_{k-1}$ , således at

$$u_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|S_i|}} & \text{hvis } v_j \in S_i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$
(2.3)

Ud fra ligning (2.3) gælder, at  $||u_i||_2 = 1$  for i = 0, ..., k - 1. Da der for mængderne  $S_i$  og  $S_j$  gælder, at  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , vil der for  $i \neq j$  gælde, at  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ . Yderligere er

$$(L\boldsymbol{u})_i = 0, \ i = 0, \dots, n-1$$

hvilket medfører, at der eksisterer mindst k ortonormale vektorer, som alle er egenvektorer til Laplace matricen, L, med egenværdi  $\mu_0 = 0$ .

Det vises nu, at multipliciteten af Laplace egenværdien  $\mu_0 = 0$  højest er lig antallet af sammenhængskomponenter til grafen *G*. Jævnføres ligning (2.1), så er

$$\boldsymbol{u}^*L\boldsymbol{u} = \sum_{i < j: v_i v_j \in E} |u_i - u_j|^2$$

kun lig nul, hvis u er konstant til alle sammenhængskomponenter. Det skal derfor vises, at der ikke eksisterer en vektor  $u_k \in \mathbb{C}^n$ , som også er en egenvektor til Laplace egenværdien  $\mu_0 = 0$  og ortogonal til de k egenvektorer,  $u_0, \ldots, u_{k-1}$ . Det bemærkes, at egenvektorerne er forskellig fra nul på mindst én koordinatindgang. Antag derfor, at  $u_k$  er forskellig fra nul på én koordinatindgang fra  $S_i$ , og dermed forskellig fra nul samt konstant på alle indeksene i  $S_i$ . Dette medfører, at  $\langle u_i, u_k \rangle \neq 0$ , hvorfor der ikke eksisterer mere end k egenvektorer til Laplace egenværdien  $\mu_0 = 0$ .

Det skal bemærkes, at det ikke er muligt at konkludere, hvorvidt en graf er sammenhængende eller ikke-sammenhængende ved alene at se på spektrummet til nabomatricen, *A*, eller Laplace matricen, *L*. Dette er illustreret på figur 2.6 og 2.7.





Figur 2.7: Grafen G<sub>2</sub>.

De to grafer på figur 2.6 og 2.7 har begge et spektrum givet ved

$$\sigma(G_i) = \{-2, 0, 0, 0, 2\}, \text{ for } i = 1, 2$$
(2.4)

Udfra spektrummet haves en egenværdi med multiplicitet 3, men det er kun  $G_2$ , som har tre sammenhængskomponenter. Idet en vilkårlig matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ikke altid er diagonaliserbar, så vil der nu blive beskrevet, hvordan matricen gøres diagonaliserbar.

### 2.3 Jordan Dekomposition

I dette afsnit beskrives Jordan dekompositionen af en matrix. Afsnittet har til formål, at beskrive, hvordan en ikke-diagonaliserbar matrix gøres diagonaliserbar. En vilkårlig matrix,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , siges at være diagonaliserbar, hvis matricen har *n* lineært uafhængige egenvektorer, jævnfør definition 2.14. Matricen, *B*, kan dermed skrives som en dekomposition, jævnfør definition 2.15, givet ved

$$B = PDP^{-1} \tag{2.5}$$

hvor  $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er en diagonalmatrix med egenværdier,  $\lambda_i$ , og  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er en invertibel matrix med tilhørende egenvektorer i søjlerne.

Ì

En vilkårlig matrix,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , er ikke altid diagonaliserbar. Det kan eksempelvis være, hvis den har multiple egenværdier. I tilfælde, hvor en matrix ikke er diagonaliserbar, kan den repræsenteres ved en dekomposition, kaldet Jordan dekompositionen. Til dette anvendes Jordan normal formen.

#### 2.3.1 Jordan Normal Form

I det følgende beskrives relevante egenskaber af Jordan normal formen af en vilkårlig matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Lad  $\sigma(B) = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}\}$ , hvor  $m \leq n$ , være spektrummet til B bestående af m distinkte egenværdier. Lad hver egenværdi,  $\lambda_i$ , have geometrisk multiplicitet  $g_i$  repræsenteret ved  $g_i$  lineært uafhængige egenvektorer,  $u_0, \ldots, u_{g_i-1}$ . Hvis der ikke er egenvektorer nok til at udspænde  $\mathbb{C}^n$  introduceres generaliserede egenvektorer.

**Definition 2.21: Generaliseret Egenvektor** 

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  være en vilkårlig matrix med spektrum  $\sigma(B) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}\}$  for  $m \le n$ . For det mindste p > 0, hvor  $(B - \lambda_i I)^p = \mathbf{0}$ , da kaldes u for en generaliseret egenvektor med tilhørende egenværdi,  $\lambda_i$ , hvis

$$(B - \lambda_i I)^p \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$$
(2.6)

Ved at omskrive ligning (2.6) til

 $(B - \lambda_i I)^{p-q} (B - \lambda_i I)^q \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \ 0 \le q < p$ 

kan der opnås flere generaliserede egenvektorer tilhørende  $\lambda_i$ , da  $\boldsymbol{u} \in \text{null}((B - \lambda_i I)^p)$  og  $(B - \lambda_i I)^q \boldsymbol{u} \in \text{null}((B - \lambda_i I)^p)$  for q = 0, 1, ..., p - 1. Deraf kan  $g_i$  Jordan kæder konstrueres for  $\lambda_i$ . En Jordan kæde er defineret som følgende.

#### Definition 2.22: Jordan Kæde

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  være en vilkårlig matrix med spektrum  $\sigma(B) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}\}$  for  $m \le n$ . For en generaliseret egenvektor, u, til egenværdien  $\lambda_i$ , da er den j'te Jordan kæde, for det mindste p > 0, til  $\lambda_i$ , givet ved

$$JC_{i,j} = \{ (B - \lambda_i I)^{p-1} \boldsymbol{u}, (B - \lambda_i I)^{p-2} \boldsymbol{u}, \dots, (B - \lambda_i I) \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \}, \ i = 0, \dots, m-1, \ j = 0, \dots, g_i - 1 \}$$

Der dannes Jordan kæder, ved at mindske p > 0, indtil foreningen af Jordan kæder resulterer i en ny lineær uafhængig basis for *B*. Herefter samles Jordan kæderne til en invertibel matrix, *P*. Matricen *P* skal anvendes til Jordan dekompositionen, hvor Jordan matricen opnås. En Jordan matrix, *J*, består af Jordan blokke, som er mindre matricer, i diagonalen. Jordan blokke defineres i det følgende.

#### **Definition 2.23: Jordan Blok**

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  være en vilkårlig matrix og  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  være den *i*'te egenværdi. For  $n_{i,j} = \dim(\mathrm{JC}_{i,j})$  er Jordan blokken  $J_{n_{i,j}}(\lambda_i)$  en  $n_{i,j} \times n_{i,j}$  øvre bidiagonal matrix af formen

$$J_{n_{i,j}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \mathbf{0} \\ \lambda_i & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_{i,j} \times n_{i,j}}$$
(2.7)

Dimensionen af den j'te Jordan blok tilhørende  $\lambda_i$  er lig dimensionen af den j'te Jordan kæde tilhørende  $\lambda_i$ . For hver egenværdi  $\lambda_i$  eksisterer  $g_i$  Jordan blokke. Jordan blokkene anvendes til at beskrive Jordan matricen.

#### **Definition 2.24: Jordan Matrix**

Lad $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ være en vilkårlig matrix og  $\lambda_i\in\mathbb{C}$ være den i'te egenværdi. En Jordan matrix er givet ved



**Bemærkning.** Jordan matricen, *J*, kaldes også for den Jordan normale form af den vilkårlig matrix, *B*.

Jordan normal formen af en matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er entydigt bestemt, bortset fra rækkefølgen af Jordan blokkene, og anvendes til Jordan dekompositionen.

#### **Definition 2.25: Jordan Normal Form**

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  være en vilkårlig matrix. Den tilhørende Jordan normal form af B er givet ved

$$J = P^{-1}BP \tag{2.9}$$

hvor  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ er en invertibel matrix bestående af Jordan kæder.

Bemærkning. Ved omskrivning af ligning (2.9) opnås Jordan dekompositionen givet ved

$$B = PJP^{-1} \tag{2.10}$$

Følgende eksempel illustrerer hvordan Jordan dekompositionen af en ikke-diagonaliserbar matrix, *B*, opnås.

#### **Eksempel 2.26: Jordan Dekomposition**

Lad matricen  $B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  være givet ved

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Det karakteristiske polynomium for B udregnes til

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 2)^5$$

Dette giver én egenværdi,  $\lambda_0 = 2$ , med algebraisk multiplicitet  $a_0 = 5$ . Det ønskes, at konstruere egenvektorer, således at den geometriske multiplicitet,  $g_0$ , er lig den algebraiske multiplicitet,  $a_0$ . Derfor bestemmes egenvektorer til  $(B - 2I)^p$  for p = 1, 2, ... indtil  $(B - 2I)^p = 0_{5 \times 5}$ .

hvoraf to lineære uafhængige egenvektorer opnås

$$\operatorname{null}(B - 2I) = \{ \boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_1} \} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Da det bemærkes, at den geometriske multiplicitet er  $g_0 = 2$  må B være ikke-diagonaliserbar, jævnfør defintion 2.14.

For p = 2 opnås

Siden, at  $u_0, u_1 \in \text{null}(B - 2I)$ , da må de også være i null $((B - 2I)^2)$ . Det bemærkes, at der er fire frie variable, hvorfor der skal konstrueres yderligere to lineære uafhængige egenvektorer. Nulrummet for  $(B - 2I)^2$  er givet ved

For p = 3 opnås

$$(B-2I)^3 = 0_{5\times 5}$$

Det bemærkes, at der er fem frie variable, hvorfor der skal konstrueres yderligere én egenvektorer, da  $\{u_0, u_1, u_2, u_3\} \in \text{null}((B - 2I)^2)$ . Nulrummet for  $(B - 2I)^3$  er givet ved

$$\operatorname{null}((B-2I)^3) = \{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0\\-1\\1\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \right\}$$

Da der oprindeligt var to egenvektorer til B, da dannes nu to Jordan kæder til matricen B. For p = 3 vælges en egenvektor, u, således at

$$(B-2I)^3\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

Her vælges  $u = u_4$ , og følgende kæde opnås

$$JC_{0,0} = \{(B-2I)^{2}\boldsymbol{u}_{4}, (B-2I)\boldsymbol{u}_{4}, \boldsymbol{u}_{4}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\1\\2\\5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{bmatrix} \right\}$$

For p = 2 vælges en egenvektor, u, således at

$$(B-2I)^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

Her vælges  $u = u_3$ , hvorfor følgende kæde opnås

$$JC_{0,1} = \{ (B - 2I)\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3 \} = \left\{ \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \right\}$$

Det bemærkes, at disse to kæder er lineært uafhængige. Derved kan den invertible matrix  ${\cal P}$  konstrueres ved

$$P = \begin{bmatrix} (B-2I)^2 \boldsymbol{u}_4 \\ (B-2I)\boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{u}_4 \\ (B-2I)\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu kan Jordan normal formen bestemmes, som er givet ved

$$P^{-1}BP = J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Med begreber indenfor Jordan dekompositionen beskrevet, så kan det karakteristiske og minimale polynomium af en vilkårlig matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  bestemmes anderledes. Først defineres det minimale polynomium.

**Definition 2.27: Minimal Polynomium** 

Lad  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  være en vilkårlig matrix. Det minimale polynomium af matricen, B, er et monisk polynomium med mindst mulig grad, hvor

$$m_B(B) = \mathbf{0}$$

Den maksimale længde af Jordan kæder, tilhørende egenværdi  $\lambda_i$ , er givet ved

$$R_i = \max\{\dim\{JC_{i,0}\}, \dots, \dim\{JC_{i,g_i-1}\}\}, i = 0, \dots, m-1$$

Derved kan det minimale polynomium,  $m_B(x)$ , omskrives til følgende

$$m_B(x) = (x - \lambda_0)^{R_0} \cdots (x - \lambda_{m-1})^{R_{m-1}}$$

Graden af det minimale polynomium opfylder

$$\deg(m_B(x)) = \sum_{i=0}^{m-1} R_i \le m$$

Det karakteristiske polynomium til matricen, B, kan omskrives til følgende

$$p_B(x) = (x - \lambda_0)^{a_0} \cdots (x - \lambda_{m-1})^{a_{m-1}}, \ a_i = \sum_{j=0}^{g_i - 1} \dim\{JC_{i,j}\}$$
 (2.11)

Det bemærkes, jævnfør ligning (2.11), at  $deg(p_B(x)) = n$  og  $a_i$  beskriver den algebraiske multiplicitet af  $\lambda_i$ .

#### Eksempel 2.28

Dette eksempel er en fortsættelse af eksempel 2.26. Ud fra de to Jordan kæder er den maksimale længde,  $R_0$ , givet ved

$$R_{0} = \max\left\{ \dim\left\{ \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\5\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\5\end{bmatrix}, \dim\left\{ \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\} \right\} = \max\{3, 2\} = 3$$

og det minimale polynomium kan derfor omskrives til

$$m_B(x) = (x-2)^3$$

hvor det gælder, at  $\deg(m_B(x)) = R_0 = 3 \le 5$ . Jævnfør eksempel 2.26, så er der kun én egenværdi,  $\lambda_0 = 2$ , med algebraisk multiplicitet 5. Her gav  $\dim(\operatorname{null}(B-2I)) = 2$ , hvorfor den geometriske multiplicitet er  $g_0 = 2$ . Herefter udregnes  $a_0$ , hvorfor

$$a_0 = \sum_{j=0}^{g_0-1} \dim\{\mathsf{JC}_{0,j}\} = \sum_{j=0}^1 \dim\{\mathsf{JC}_{0,j}\} = \dim\{\mathsf{JC}_{0,0}\} + \dim\{\mathsf{JC}_{0,1}\} = 3+2 = 5$$

Det karakteristiske polynomium er derfor givet ved

$$p_B(x) = (x-2)^5$$
# 3 | Signalbehandling på Grafer

Formålet med dette kapitel er at introducere diskret signalbehandling på grafer. Det følgende kapitel er baseret på [4] og [10] med mindre andet er angivet.

Signalbehandling på grafer er et aktivt forskningsområde og en metode, som i de seneste år har resulteret i forskellige løsninger til forskellige problemstillinger. Metoden analyserer og behandler data repræsenteret ved arbitrære grafer. En af de mest tiltrækkende egenskaber ved signalbehandling på grafer er, at det giver en fælles ramme til at studere systemer, som er forskellige. Størrelsen på en graf kan variere, fra få hundrede punkter til millioner af punkter. Tilsvarende kan topologien af en graf variere, i den forstand at alle punkter har ens valens eller nogle punkter har større valens end andre. En graf, G = (V, A), indeholder en mængde af punkter, som kan være forbundet via kanter. En graf kan repræsentere et socialt netværk, hvor punkterne repræsenterer en mængde af personer og kanterne repræsenterer relationer mellem personerne. I generel signalbehandling arbejdes ofte i tids- og frekvensdomænet. Frekvensdomænet anvendes til at se, hvor højt frekvensindhold, der er i signalet. I tidsdomænet er signalet ofte samplet med ækvidistante tidsrum. Dette er nødvendigvis ikke tilfældet, når behandlingen af signalet foretages på en arbitrær graf. Her kan de enkelte samples, i signalet, være fordelt med forskellige tidsrum. Derfor vil grafsignaler i det følgende beskrives.

# 3.1 Grafsignal

I det følgende beskrives signaler på arbitrære grafer. Når data er indekseret af punkter i en graf, G = (V, A), så betragtes det som et grafsignal. I det følgende er det pågældende datasæt til signalbehandling på grafer deterministisk, og siden dataet er diskretiseret, da vil computeren have endelig hukommelse og derfor betragtes et antal udvalgte punkter.

I klassisk signalbehandling bliver tidsafhængige signaler ofte samplet ved ækvidistante tidsrum. Rækkefølgen af samplingen er derfor naturligt givet ved  $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ , som er et signal med n elementer. Mængden af signaler, **s**, ligger i signaldomænet, *S*, givet ved

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \end{pmatrix}^\top, \ s_i \in \mathbb{C} \right\}$$

og den relationelle information af signalet er kendt via en vægtet nabomatrix, W. Denne form for sampling kan illustreres ved en vægtet graf, G = (V, W). Hvert element,  $s_i$ , af signalet tilhører et punkt  $v_i$  for i = 0, ..., n - 1 og hver vægt  $w_{ij}$  af en kant mellem  $v_i$  og  $v_j$  angiver relationen mellem det *i*'te og *j*'te element. Et grafsignal er derfor en vektor, som repræsenterer data, hvor hver indgang svarer til dataværdien tilhørerende det pågældende punkt  $v_i \in V$ , og defineres derfor ved følgende.

#### **Definition 3.1: Grafsignal**

Lad G = (V, W) være en vægtet graf. Et grafsignal,  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \end{pmatrix}^\top \in S$ , kan repræsenteres ved  $\mathbf{s} : V \to \mathbb{C}$   $v_i \to s_i, \ i = 0, \dots, n-1$  (3.1) hvor  $v_i \in V$  og  $s_i \in \mathbf{s}$ .

For at tydeliggøre afstanden mellem hver sample,  $s_i$ , da kan vægtene,  $w_{ij}$ , på hver kant beskrive korrelationen af to punkter. Korrelationen udtrykker ligheden mellem to signalværdier, og signalværdierne siges, at korrelere, hvis de minder om hinanden. Hvis signalværdierne er samplet ved ækvidistante tidsrum, kan dette beskrives ved ens vægte på alle kanter. Det simpleste valg er, at vælge vægtene til at være normaliseret, hvorfor  $w_{ij} : E \rightarrow [0, 1]$ . På figur 3.1 er dette illustreret, hvor signalet, **s**, i tid er repræsenteret ved grafen  $G = P_8$ .



**Figur 3.1:** Grafen,  $G = P_8$ , hvor de røde linjer angiver signalværdien,  $s_i$ , i punktet  $v_i$  for i = 0, ..., 7.

Som tidligere nævnt kan et signal repræsentere noget, som er defineret i tid. Det kan være et lydsignal eller en video. Et signal kan også repræsenteres som noget, der er defineret i rummet. Det kan eksempelvis være et digitalt billede. Målet med signalet er, at repræsentere det effektivt. Et af formålene med at repræsentere det effektivt er, at undersøge, om der sker noget interessant i signalet. Det kan gøres ved at se på strukturen i signalet. Det kan være, hvis der er et lokalt frekvensindhold i signalet. Det vil sige, at der et sted i signalet eksisterer noget, som afviger fra hvordan det pågældende signal egentligt skulle have set ud.

Derfor analyseres ofte frekvensdomænet af et signal, når der laves signalbehandling. Frekvensen af et signal er en måde at observere, hvor meget en signalværdi skifter fra sample til sample. Dette er illustreret på figur 3.2, hvor punkterne  $v_5$  og  $v_7$  nu har negative signalværdier repræsenteret. Figur 3.2 repræsenterer et signal, **s**, i tid. Det bemærkes, at sample  $s_6$  er forskellig fra både sample  $s_5$  og sample  $s_7$ , og at der er en lokal variation. Dette betyder, at den lokale frekvens er høj. I de andre dele af dette tidssignal er variationen ikke så stor, og den lokale frekvens er derfor lavere.



**Figur 3.2:** Grafen,  $G = P_8$ , hvor de røde linjer angiver signalværdien,  $s_i$ , i punktet  $v_i$  for i = 0, ..., 7.

Der kan være tilfælde, hvor det samme signal,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n$ , opnår distinkte frekvenser afhængig af hvordan punkterne på distinkte grafer er forbundet. Udover vejen,  $G = P_8$ , repræsenteret på figur 3.2, så kan det samme signal repræsenteres på en kreds, jævnfør figur 3.3. Figur 3.3 gør signalet,  $\mathbf{s}$ , til et periodisk grafsignal. Dette betyder, at den sidste sample,  $s_{n-1}$ , efterfølges af den første sample  $s_0$ eller omvendt.



**Figur 3.3:** Grafen,  $G = C_8$ , hvor de røde linjer beskriver signalværdien,  $s_i$ , til punktet  $v_i$  for i = 0, ..., 7.

Sammenlignes figur 3.2 og 3.3, hvor det samme signal,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^8$ , er repræsenteret, bemærkes det, at signalet har forskellig variation afhængig af nabomængden til punkterne. Eksempelvis er der på figur 3.2 ingen nabopunkter til punktet  $v_0$ , som har værdier med modsat fortegn, mens der på figur 3.3 er én nabo med modsat fortegn. Dette indikerer, at signalet,  $\mathbf{s}$ , har højere frekvensindhold på fi-

gur 3.3. Dette kan skyldes, at kredsen er 2-regulær, så hvis der er stor variation mellem signalværdi,  $s_0$  og  $s_{n-1}$ , da påvirkes signalets frekvens mere end på figur 3.1, da start- og slutpunkterne ikke er forbundet. Sammenligningen af figur 3.2 og 3.3 illustrerer en vigtig detalje i den forstand, at når der signalbehandles på grafer, så er det i mange tilfælde nødvendigt, at vælge grafen, som er bedst egnet til at løse den specifikke problemstilling.

En egenskab ved et grafsignal,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n$ , er, at det kan forskydes på den pågældende graf, som det er defineret på. Betragt derfor grafsignalet  $\mathbf{s}$ . Forskydningen af dette signal på en graf kan defineres som ændringen af signalet samplet i punktet  $v_i$  langs alle veje af længde én. Dette gøres for alle punkter. Signalet forskudt med denne metode noteres som  $\mathbf{s}_1$ . Det forskudte signal defineres ved nabomatricen, A, og er givet ved

$$\mathbf{s}_1 = A\mathbf{s} \tag{3.2}$$

Forskydes det forskudte signal,  $s_1$ , yderligere opnås en ny forskydning givet ved

$$\mathbf{s}_2 = A\mathbf{s}_1 = A(A\mathbf{s}) = A^2\mathbf{s}$$

Dette betyder, at en forskydning af et signal, **s**, kan defineres generelt ved følgende.

#### Definition 3.2: Signalforskydning

Lad  $\mathbf{s}\in\mathcal{S}$  være et grafsignal og  $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$  være en nabomatrix. Den i'te signalforskydning er givet ved

$$\mathbf{s}_i = A\mathbf{s}_{i-1} = A^i\mathbf{s}, \ i = 0, \dots, n-1$$

I følgende eksempel illustreres, hvordan en forskydning kan repræsenteres på en arbitrær graf G = (V, A).

Eksempel 3.3: Forskydning af Grafsignal

Betragt grafen G = (V, A) på figur 3.4, hvor |V| = 8,  $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  er nabomatricen og signalet,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^8$ , er givet ved

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\top}$$

Anvendes definition 3.2, da er signalforskydningen af **s** givet ved

$$\mathbf{s}_1 = A\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

som er illustreret på figur 3.5. Den tilhørende MATLAB kode, herunder implementationen af *A* og signalet, **s**, til figur 3.4 kan findes i *Indreprodukt.m*.





Idéen med at introducere grafsignaler, som har indbygget en vis variation på tværs af punkterne, er, at det leder frem til at introducere frekvensrepræsentationer for grafsignaler, hvor højt frekvensindhold hurtig vil fange variationen i signalet på tværs af de sammenhængende punkter. I det tilfælde, hvor der er inkluderet et højt eller lavt frekvensindhold, anvendes et værktøj, som tager sig af disse variationer. I den forbindelse introduceres filtre for disse grafsignaler.

# 3.2 Graffilter

I dette afsnit beskrives filtre på grafer. Dette har det formål at tage sig af både den lav- og højfrekvente del i grafsignalet afhængig af, hvordan signalet er repræsenteret på grafen.

Indenfor klassisk signalbehandling eksisterer filtersystemer, som anvendes til at lade signalværdier inden for et givet frekvensområde passere og afvise signalværdier med en anden frekvens. Filtrene har til formål at fjerne uønskede dele af signalet. Der eksisterer fire forskellige slags filtre. Disse kaldes lavpas-, højpas-, båndpas- og båndafvisningsfilter. Lavpasfiltre lader signaler med lave frekvenser passere, mens højpasfiltre lader signaler med høje frekvenser passere. Båndpasfiltre lader signaler passere med frekvenser indenfor et givet interval passere, mens båndafvisningsfiltre afviser signaler med frekvenser indenfor et givet interval og lader alle andre frekvenser passere.

I afsnit 3.1 blev grafsignaler og forskydningen af disse beskrevet. Filtre, som er baseret på et forskudt grafsignal, kaldes et graffilter og noteres *H*. Dette graffilter har egenskaben, at det nødvendigvis er forskydningsinvariant. Et forskydningsinvariant graffilter, *H*, er et filter, hvor forskydningen af input signalet,  $\mathbf{s} \in S$ , før filtreringen, er lig forskydningen af output signalet,  $\mathbf{t} = H\mathbf{s}$ , efter filtreringen. Alle forskydningsinvariante graffiltre, *H*, er givet som polynomier ved nabomatricen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , hvilket gøres klart i følgende definition.

## Definition 3.4: Polynomiel Graffilter

Lad  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  være en nabomatix. Et lineært system,  $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ , siges at være et polynomielt graffilter, hvis der eksisterer et polynomium

$$h(x) = h_0 + h_1 x + \ldots + h_L x^L$$
(3.3)

med koefficienter  $h_{\ell} \in \mathbb{C}$  for  $\ell = 0, \dots, L$  og hvor L er ordenen af filtret, således at

$$H = h(A) = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell}$$
(3.4)

Graffiltre repræsenteres, som ved den klassiske signalbehandling, ved matrix-vektor produkter. Dette betyder, at ethvert graffilter  $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , der ved et input signal  $\mathbf{s} \in S$ , giver et output signal  $\mathbf{t} = H\mathbf{s}$ , som repræsenterer et lineært ligningssystem givet ved

$$\mathbf{t} = H\mathbf{s} = h(A)\mathbf{s} = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell} \mathbf{s}$$
(3.5)

Som sagt er graffiltret, *H*, forskydningsinvariant, men det er samtidig også lineært. Dette beskrives i følgende proposition.

#### **Proposition 3.5**

Graffiltret  $H = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell}$  er lineært og forskydningsinvariant.

#### Bevis

Siden at *H* er en matrix, så er lineariteten triviel idet for  $\mathbf{t}_1 = H\mathbf{s}_1$  og  $\mathbf{t}_2 = H\mathbf{s}_2$  er

$$H(\alpha \mathbf{s}_1 + \beta \mathbf{s}_2) = \alpha H \mathbf{s}_1 + \beta H \mathbf{s}_2 = \alpha \mathbf{t}_1 + \beta \mathbf{t}_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Det bemærkes, at en linear kombination af input signaler,  $s \in S$ , til ligning (3.5) giver en linear kombination af output signalerne, t = Hs.

For at vise, at H er forskydningsinvariant, så gælder det, at A kommuterer med  $A^i$  for alle i, og derfor er

$$H(A\mathbf{s}) = \left(\sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell}\right) A\mathbf{s} = A\left(\sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell}\right) \mathbf{s} = A(H\mathbf{s})$$
(3.6)

Hvis nabomatricen,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , er diagonaliserbar, så kan den skrives på formen  $A = PDP^{-1}$ , jævnfør definition 2.15. Dermed gælder, at

$$H = \left(\sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} (PDP^{-1})^{\ell} = P\left(\sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} D^{\ell}\right) P^{-1} = Ph(D)P$$

Følgende sætning giver et kriterium for, hvornår graffiltret, *H*, er forskydningsinvariant.

Sætning 3.6: Forskydningsinvariante Graffiltre

Lad  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  være en nabomatrix til en graf G = (V, A) og antag, at det karakteristiske og minimale polynomium er ens, altså

$$p_A(x) = m_A(x)$$

Så er graffiltret, H, lineært og forskydningsinvariant  $\iff$  H er et polynomium ved nabomatricen A.

#### Bevis

Beviset for sætning 3.6 ligger udenfor specialets rammer og kan studeres nærmere i [10].

Sætning 3.6 kræver dog, at der er lighed mellem det karakteristiske og minimale polynomium. Dette vil ikke altid være opfyldt for alle nabomatricer, *A*. Derfor kan resultatet i sætning 3.6 udvides til alle nabomatricer ved at anvende ækvivalente graffiltre. Ækvivalente graffiltre defineres som følgende.

#### Definition 3.7: Ækvivalente Graffiltre

Lad  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  og  $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  være to nabomatricer. To filtre  $h_1(A)$  og  $h_2(\widetilde{A})$  kaldes ækvivalente, hvis alle input signaler  $\mathbf{s} \in S$  giver samme output, altså

$$h_1(A)\mathbf{s} = h_2(\widetilde{A})\mathbf{s} = \mathbf{t}$$

Siden, at der ikke er nogen restriktioner på signalerne,  $\mathbf{s} \in S$ , i definition 3.7, så er definition 3.7 ækvivalent med at betragte filtrene  $h_1(A)$  og  $h_2(\widetilde{A})$  som  $n \times n$  matricer. Hvis der eksistererede restriktioner på disse signaler  $\mathbf{s} \in S$ , så ville disse to filtre nødvendigvis ikke være lig hinanden som matricer, men stadigvæk give samme output for den betragtede mængde af signaler  $\mathbf{s} \in S$ .

Lad  $G_1 = (V, A) \mod p_A(x) \neq m_A(x) \text{ og } G_2 = (V, \widetilde{A}) \mod p_{\widetilde{A}}(x) = m_{\widetilde{A}}(x)$  være to vilkårlige grafer med samme punktmængde, V, og forskellig kantmængde, E, og dermed også kantvægte. Så kan graffiltre på  $G_1$  udtrykkes som ækvivalente graffiltre på  $G_2$ , som beskrives i sætning 3.9. Inden da skal følgende lemma anvendes til at bevise sætning 3.9.

#### Lemma 3.8

Lad h(x), g(x) og p(x) = h(x)g(x) være givne polynomier, og lad  $J_{n_{i,j}}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{n_{i,j} \times n_{i,j}}$  være en Jordan blok. Så gælder det, at

$$h(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))g(J_{n_{i,j}}(\lambda_i)) = p(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))$$
(3.7)

#### Bevis

Lad  $h(J_{n_{i,i}}(\lambda_i))$  være en øvre trekantsmatrix, hvor den  $\ell m'$ te indgang er givet ved

$$h(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))_{\ell m} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m < \ell \\ \frac{1}{(m-\ell)!} h^{(m-\ell)}(\lambda_i) & \text{hvis } m \ge \ell \end{cases}$$
(3.8)

hvor  $h^{(m-\ell)}(\lambda_i)$  er den  $(m-\ell)'$ te afledte af  $h(\lambda_i)$ , jævnfør sætning 4 i [5]. Tilsvarende gælder for polynomiet g(x). Det gælder, at

$$h(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))g(J_{n_{i,j}}(\lambda_i)) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m < \ell\\ \sum_{r=\ell}^m h(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))_{\ell r} g(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))_{rm} & \text{hvis } m \ge \ell \end{cases}$$
(3.9)

Undersøges tilfældet for  $m \ge \ell$  i ligning (3.9) opnås

$$\sum_{r=\ell}^{m} h(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))_{\ell r} g(J_{n_{i,j}}(\lambda_i))_{rm} = \sum_{r=\ell}^{m} \frac{1}{(r-\ell)!} h^{(r-\ell)}(\lambda_i) \frac{1}{(m-r)!} g^{(m-r)}(\lambda_i)$$
$$= \frac{1}{(m-\ell)!} \sum_{r=\ell}^{m} \binom{m-\ell}{r-\ell} h^{(r-\ell)}(\lambda_i) g^{(m-r)}(\lambda_i)$$

$$= \frac{1}{(m-\ell)!} \sum_{k=0}^{m-\ell} {\binom{m-\ell}{k}} h^{(k)}(\lambda_i) g^{(m-\ell-k)}(\lambda_i)$$
  
$$= \frac{1}{(m-\ell)!} (h(\lambda_i)g(\lambda))^{(m-\ell)}$$
  
$$= \frac{1}{(m-\ell)!} (p(\lambda_i))^{(m-\ell)}$$
(3.10)

hvor ligning (3.10) opnås ved anvendelse af Leibniz generaliseret regel.

#### Sætning 3.9

For enhver matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eksisterer en matrix  $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  og et polynomium

$$r(x) = r_0 + r_1 x + \ldots + r_{n-1} x^{n-1}$$

således at  $B=r(\widetilde{B})$  og  $p_{\widetilde{B}}(x)=m_{\widetilde{B}}(x).$ 

#### Bevis

Lad  $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$  være *m* distinkte egenværdier til matricen *B*. Betragt Jordan dekompositionen af *B* ved  $B = PJP^{-1}$ , jævnfør ligning (2.10). For hver  $0 \le i \le m-1$  vælges distinkte tal  $\eta_{i,0}, \ldots, \eta_{i,g_i-1}$ . Nu kan Jordan matricen konstrueres som

$$\widetilde{J} = \begin{bmatrix} J_{n_{0,0}}(\eta_{0,0}) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & J_{n_{0,g_0-1}}(\eta_{0,0}) & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & J_{n_{m-1,g_{m-1}-1}}(\eta_{m-1,g_{m-1}-1}) \end{bmatrix}$$
(3.11)

Jordan blokkene på diagonalindgangene i  $\tilde{J}$  har de samme størrelser som Jordan blokkene af J i ligning (2.8), men deres elementer er forskellige.

Betragt polynomiet  $r(x) = r_0 + r_1 x + \ldots + r_{n-1} x^{n-1}$ , og antag at  $r(\tilde{J}) = J$ . Så er det ækvivalent til

$$\begin{cases} r(\eta_{i,d}) = \lambda_i \\ r^{(1)}(\eta_{i,d}) = 1 \\ r^{(\ell)}(\eta_{i,d}) = 0, \text{ for } 2 \le \ell \le g_i - 1 \end{cases}$$

for alle  $0 \le d \le g_i - 1$  og  $0 \le i \le m - 1$ , jævnfør lemma 3.8. Dette er et system af n lineære ligninger med n ubekendte, givet ved  $r_0, \ldots, r_{n-1}$ . Dette kan entydigt løses ved invers polynomiel

interpolation [5]. Jævnfør ligning (2.10), så gælder

$$B=PJP^{-1}=Pr(\widetilde{J})P^{-1}=r(P\widetilde{J}P^{-1})=r(\widetilde{B})$$

Den geometriske multiplicitet er lig 1 for alle  $\eta_{m,d}$ , da de alle er distinkte. Dette er ækvivalent med, at  $p_{\widetilde{B}}(x) = m_{\widetilde{B}}(x)$ .

En konsekvens af sætning 3.9 er, at ethvert filter på grafen  $G_1 = (V, A)$  er ækvivalent til et filter på grafen  $G_2 = (V, \tilde{A})$  siden at  $h(A) = h(r(\tilde{A})) = (h \circ r)(\tilde{A})$ , hvor  $h \circ r$  er kompositionen af polynomierne h og r, og er dermed et polynomium. Det kan dermed antages, at  $p_A(x) = m_A(x)$ , i sætning 3.9, gælder for enhver graf G = (V, A). Hvis ikke, kan grafen  $G_1 = (V, A)$  erstattes med en anden graf  $G_2 = (V, \tilde{A})$ , hvor antagelsen holder og lade  $A = \tilde{A}$ .

Der eksisterer en øvre grænse for antallet af koefficienter,  $h_i$ , i et graffilter. Det er derfor muligt, at minimere antallet af koefficienter.

Sætning 3.10

Lad  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  være en nabomatrix til en graf G = (V, A). Ethvert graffilter,

$$H = h(A) = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} A^{\ell}$$

har et entydigt ækvivalent filter på samme graf med højst  $\deg(m_A(x))$  koefficienter.

#### Bevis

Betragt filteret fra ligning (3.3), som er givet ved

$$h(x) = h_0 + h_1 x + \dots + h_L x^L$$

Ved division af polynomier, eksisterer entydige polynomier q(x) og r(x), således at

$$h(x) = q(x)m_A(x) + r(x)$$

hvor  $deg(r(x)) < deg(m_A(x))$ . Dette betyder, at filtret i ligning (3.4) kan udtrykkes ved

$$H = h(A) = q(A)m_A(A) + r(A)$$
  
= q(A)**0** + r(A)  
= r(A) (3.12)

hvor ligning (3.12) kommer af definition 2.27. Dette betyder, at H = h(A) = r(A), hvor  $deg(r(x)) < deg(m_A(x))$ .

# 4 | Fouriertransformation

Formålet med dette kapitel er at give en beskrivelse af teorien bag en af de signalbehandlingsmetoder, herunder klassisk diskret signalbehandling anvendt på grafer, som senere i specialet tages i brug for, at kunne billedkomprimere og støjreducere. Det følgende kapitel er baseret på [4] og [6] med mindre andet er angivet.

Fouriertransformationen er en metode, som kan benyttes på periodiske funktioner eller på data. Fouriertransformationen transformerer fra tidsdomænet til frekvensdomænet. Formålet med transformationen er, at gøre det muligt at vurdere, hvilke frekvenser, som har størst betydning for signalet, og på denne måde angive hvilke frekvenser, der skal anvendes til at sortere eventuel støj væk. Der eksisterer forskellige varianter af Fouriertransformationen. Det kan være Fouriertransformationen, som enten er tilpasset endelige eller uendelige signaler. Når Fouriertransformationen betragtes, så anvendes ofte en Fourierrække, som fungerer på diskrete følger defineret på heltallene  $\mathbb{Z}$ . Her kan et endelig signal betragtes som indlejret i følgerne på  $\mathbb{Z}$  ved at indsætte et vist antal nuller udenfor det område, hvor der haves information, og dermed anvende Fourieranalyse til sådanne signaler. Dog er det ikke naturligt at tillægge nuller i en matrix. Derfor vil der i det følgende blive beskrevet en Fouriertransform, som er tilpasset setuppet med endelige signaler.

# 4.1 Diskret Fouriertransformation

I det følgende beskrives en variant af Fouriertransformationen, kaldet den diskrete Fouriertransformation. Den diskrete Fouriertransformation kan anvendes til at analysere opsamlet diskret data, og en udgave af denne vil derfor blive anvendt i dette speciale. Den diskrete Fouriertransformation,  $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ , også forkortet DFT, er en invertibel og lineær transformation. Eftersom at det ønskes at have en invertibel transformation, så defineres denne transformation på  $\mathbb{C}^n$ , og den skal antage værdier i samme rum. Hvis dimensionerne ikke passer i definitions- og billedemængden, så kan en invertibel transformation ikke opnås. Til at starte med defineres den diskrete Fouriertransformation.

## Definition 4.1: Den Diskrete Fouriertransformation

Lad  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^n$  være et diskret signal. Den diskrete Fouriertransformation af et signal,  $\mathbf{s}$ , er givet ved

$$[\mathcal{F}(\mathbf{s})]_k = S_k = \sum_{m=0}^{n-1} s_m e^{\frac{-i2\pi mk}{n}}, \ k = 0, 1, \dots, n-1$$
(4.1)

hvor  $S_k$  er Fourierkoefficienterne af signalet.

En lineær transformation opnås idet at der anvendes summer. Det betyder, at hver eneste gang en lineær transformation,  $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ , haves, så kan den repræsenteres ved en passende matrix. Det

bemærkes, at der er en tilsvarende struktur som i Fourierrækker, men som er anderledes i den forstand, at der nu haves endelige summer og der haves diskrete frekvenser i definition 4.1. Derfor repræsenterer den diskrete Fouriertransformation signalerne i frekvensdomænet. Ønskes det at konvertere tilbage til signaldomænet og dermed opnå det originale diskrete signal, **s**, så anvendes den inverse diskrete Fouriertransformation, som defineres herunder.

#### **Definition 4.2: Den Inverse Diskrete Fouriertransformation**

Lad  $S_k$  være Fourierkoefficienter. Så er den inverse diskrete Fouriertransformation,  $\mathbf{s} = \mathcal{F}^{-1}(S)$ , givet ved

$$\left[\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{s})\right]_{k} = s_{k} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_{m} e^{\frac{i2\pi km}{n}}, \ k = 0, 1, \dots, n-1$$

hvor  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^n$  er et diskret signal.

Som sagt er formålet med den diskrete Fouriertransformation at vurdere, hvilke frekvenser, som har størst betydning for signalet, og på denne måde angive hvilke frekvenser, der skal anvendes til at sortere eventuel støj væk. Den diskrete Fouriertransformation er brugbar i forbindelse med billedbehandling. Når billedbehandling udføres, så kan der i visse situationer opstå et problem, som gør, at det pågældende billede kan virke uskarpt. Dette kaldes også for støj. Støj er forstyrrelser, som resulterer i uønskede dataændringer. Det er ikke nødvendigvis en enkelt form for forstyrrelse. Nærmere bestemt kan støj være en samling af en række faktorer, som går ind og forstyrrer. Støjen i et billede opstår eksempelvis naturligt i en billedesensor på grund af imperfektioner i denne og er typisk forskellig fra det ønskede signal, og der kan skelnes mellem det originale signal og støjen. Et meget bekvemt problem kan være, at der afspilles et musikstykke i radioen, og der på et tidspunkt vil forekomme ujævnheder i musikstykket. Her vil det være tydeligt at høre, at det ikke er en del af det oprindelige musikstykke.



Figur 4.1: Billede af et fly uden støj med  $64 \times 64$  pixels. [15]



**Figur 4.2:** Billede af et fly med støj med  $64 \times 64$  pixels. [15]

Et andet eksempel, som har mere relevans for dette speciale, kan være et støjfyldt billede. Betragtes de to billeder på figur 4.1 og 4.2, så er det tydeligt at se, at der på figur 4.1 fremstår et nogenlunde skarpt og detaljeret billede af et fly. At det ikke fremstår helt klar og tydeligt er grundet nedskaleringen af billedet fra  $256 \times 256$  til  $64 \times 64$  pixels. Derimod bemærkes det på figur 4.2, at dette fremstår uskarpt og mere sløret, men det er stadigvæk muligt at ane de rette linjer og et fly-lignende objekt. Et klassisk redskab til at reducere støj er Fourieranalyse. Fourieranalyse er et matematisk redskab til at kunne beskrive en funktion ved hjælp af en samling af de kendte cosinus- og sinusfunktioner. Denne specifikke analyse kan anvendes til støjbehandling, som gøres ved at frasortere uønskede frekvenser.

Tilgangen til graf Fouriertransformationen beskrives i det følgende ved hjælp af spektral dekomposition. Det vil sige, at der ved hjælp af en dekomposition af enten nabomatricen, A, eller Laplace matricen, L, vil resultere i noget, som anvendes til graf Fouriertransformationen. Spektral dekomposition hentyder til identifikationen af underrummene  $S_0, \ldots, S_{k-1}$  af signaldomænet S, som er invariant i forhold til filtrering, således at for et vilkårligt signal  $\mathbf{s}_i \in S_i$  og et graffilter h(A), da vil outputtet  $\mathbf{t}_i = h(A)\mathbf{s}_i$  være i det samme underrum  $S_i$ . Et signal kan dermed noteres som

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1 + \dots + \mathbf{s}_{k-1}$$

hvor hvert  $\mathbf{s}_i \in \mathcal{S}_i$ .

Sætning 4.3: Entydighed af Dekomposition

Dekompositionen givet ved  $\mathbf{s} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{s}_i$  for  $\mathbf{s}_i \in S_i$  er entydig for ethvert signal  $\mathbf{s} \in S \iff$ 

1. 
$$S_i \cap S_j = \{\mathbf{0}\}$$
 for  $i \neq j$ .

2. 
$$\dim\{\mathcal{S}_0\} + \dots + \dim\{\mathcal{S}_{k-1}\} = \dim\{\mathcal{S}\} = n$$

3. Hvert  $S_i$  er irreducibelt, hvorfor det ikke kan dekomponeres til mindre invariante underrum.

Hvis sætning 4.3 er opfyldt, da kan signaldomænet S skrives som en direkte sum af underrum  $S_i$  for i = 0, ..., k - 1, hvor

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{k-1} \tag{4.2}$$

Eftersom grafer kan have arbitrær struktur, så er der tilfælde, hvor nabomatricen,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , er ikkediagonaliserbar. Derfor betragtes Jordan dekompositionen, jævnfør ligning (2.10), hvor

$$A = PJP^{-1}$$

og hvor  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er Jordan normal formen og  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  er matricen bestående af Jordan kæder. Lad  $\lambda_i$  være en egenværdi af nabomatricen, A, og lad

$$\mathsf{JC}_{i,j} = \{\mathsf{JC}_{i,j,0}, \dots, \mathsf{JC}_{i,j,p-1}\}$$

Speciale

betegne en j'te Jordan kæde af generaliserede egenvektorer tilhørende egenværdien,  $\lambda_i$ . Lad

$$S_i = \operatorname{span} \{ \operatorname{JC}_{i,j,0}, \dots, \operatorname{JC}_{i,j,p-1} \}$$

være et vektor underrum af S med Jordan kæden som basis. Et vilkårligt signal  $s_i \in S_i$  har en entydig udvidelse i denne basis givet ved

$$\mathbf{s}_{i} = \mathsf{JC}_{i,j,0}\hat{t}_{i,0} + \dots + \mathsf{JC}_{i,j,p-1}\hat{t}_{i,p-1}$$
$$= P_{i}\hat{t}_{i}$$

hvor  $P_i$  er en matrix bestående af søjlerne  $JC_{i,j,0}, \ldots, JC_{i,j,p-1}$ . Anvendes Jordan dekompositionen, jævnfør ligning (2.10), vil forskydningen af signalet  $\mathbf{s}_i$  give et output  $\hat{t}_i = A\mathbf{s}_i$ , fra samme underrum. Eftersom, at

$$\widehat{t}_{i} = A\mathbf{s}_{i}$$

$$= AP_{i} \left[ \widehat{t}_{i,0} \cdots \widehat{t}_{i,p-1} \right]^{\top}$$

$$= P_{i}J_{n_{i,j}}(\lambda_{i}) \left[ \widehat{t}_{i,0} \cdots \widehat{t}_{i,p-1} \right]^{\top}$$

$$= P_{i} \begin{bmatrix} \lambda_{i}\widehat{t}_{i,0} + \widehat{t}_{i,1} \\ \vdots \\ \lambda_{i}\widehat{t}_{i,p-1} + \widehat{t}_{i,p-1} \end{bmatrix}$$
(4.3)
  
(4.3)
  
(4.3)

hvor  $J_{n_{i,j}}(\lambda_i)$  er den j'te Jordan blok tilhørende  $\lambda_i$ . Dermed er hvert underrum  $S_i \subseteq S$  forskydningsinvariant og  $S_i$  er irreducibel, jævnfør [7].

Anvendes Jordan dekompositionen, jævnfør ligning (2.10) og sætning 3.6, kan graffiltret  $h({\cal A})$ omskrives til

$$h(A) = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} (PJP^{-1})^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} PJ^{\ell} P^{-1} = P\left(\sum_{\ell=0}^{L} h_{\ell} J^{\ell}\right) P^{-1} = Ph(J)P^{-1}$$
(4.5)

Jævnfør ligning (4.4) bemærkes det, at hvis et signal  $\mathbf{s}_i \in S_i$  filtreres, så opnås et output  $\hat{t}_i \in S_i$  fra samme underrum givet ved

$$\widehat{\boldsymbol{t}}_{i} = H\boldsymbol{s}_{i} = h(A)\boldsymbol{s}_{i} = h(A)P_{i}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{t}}_{i,0}\\\vdots\\\widehat{\boldsymbol{t}}_{i,p-1}\end{bmatrix} = P_{i}h(J_{n_{i,j}}(\lambda_{i}))\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{t}}_{i,0}\\\vdots\\\widehat{\boldsymbol{t}}_{i,p-1}\end{bmatrix}$$

## 4.2 Graf Fouriertransformation

I dette afsnit beskrives graf Fouriertransformationen og den inverse graf Fouriertransformation, også kaldet GFT og IGFT. I klassisk signalbehandling er signalerne ofte analyseret og behandlet i frekvensdomænet. Arbejdet inden for frekvensdomænet har resulteret i mange simple og effektive algoritmer inden for klassisk signalbehandling. Den spektrale analyse og behandling kan udvides til grafsignaler.

I afsnit 2.2 blev Laplace matricen,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , beskrevet. Denne matrix har, som allerede nævnt, samme egenskaber som nabomatricen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Det vil sige, at det er en reel og symmetrisk matrix, som har en mængde af ortonormale egenvektorer, der udspænder  $\mathbb{R}^n$ . Disse ortonormale egenvektorer kan, som nævnt, være angivet ved  $JC_{i,j}$  for  $0 \le j \le p - 1$ , jævnfør definition 2.22. De tilhørende egenværdier,  $\mu_i$ , opfylder følgende

$$LJC_{i,j,k} = \mu_i JC_{i,j,k}, \ JC_{i,j,k} \neq \mathbf{0}$$

hvor JC<sub>*i*,*j*,*k*</sub> er den *k*'te generaliserede egenvektor i den *j*'te Jordan kæde tilhørende egenværdi  $\mu_i$ . Symmetrien af *L* medfører, at disse egenværdier er reelle, og derfor vælges disse i en stigende rækkefølge. For Laplace matricen, *L*, gælder, at egenværdierne alle er ikke-negative, den mindste egenværdi er  $\mu_0 = 0$ , og multipliciteten af egenværdien 0 er lig antallet af sammenhængskomponenter af den vægtede graf G = (V, L). Derfor er antagelsen om, at *G* er sammenhængende, veldefineret. Herefter kan arrangeringen af egenværdierne opstilles, således at de opfylder

$$0=\mu_0<\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\mu_{n-1}$$

For ethvert signal  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n$  defineret på punkterne i grafen G = (V, A), defineres graf Fouriertransformationen ved følgende.

**Definition 4.4: Graf Fouriertransformation** 

Lad  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^n$  være et diskret signal. Graf Fouriertransformationen er givet ved

$$\widehat{\boldsymbol{t}} = P^{-1} \mathbf{s} = F \mathbf{s} \tag{4.6}$$

hvor søjlerne i matricen  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  er nabomatricen eller Laplace matricens egenvektorer og  $\hat{t}$  er Fourierkoefficienterne.

**Bemærkning.** Er det tilfældet, at den valgte nabomatrix eller Laplace matricen er ikke-diagonaliserbar, så er søjlerne i *P* repræsenterede ved de tilhørende generaliserede egenvektorer.

Lad  $\hat{t}_i$ , for i = 0, 1, ..., n - 1, betegne det *i*'te element i  $\hat{t}$ . Hvis det er tilfældet, at  $P^{-1} = P^{\top}$ , så vil  $\hat{t}_i$  svare til projektionen af det betragtede signal ned på den *i*'te egenvektor. Graf Fouriertransformationen kan fortolkes som en signal dekomposition af en ortonormal mængde af generaliserede egenvektorer. Den inverse graf Fouriertransformation rekonstruerer det diskrete signal,  $\mathbf{s} \in S$ , fra Fourierkoefficienter.

#### **Definition 4.5: Invers Graf Fouriertransformation**

Lad  $\hat{t} = \begin{bmatrix} \hat{t}_0 & \hat{t}_1 & \dots & \hat{t}_{n-1} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^n$  være Fourierkoefficienter. Den inverse graf Fouriertransformation er givet ved

$$\tilde{s} = P\hat{t} = F^{-1}\hat{t} \tag{4.7}$$

Når Fouriertransformationen på grafer udføres, så laves først en dekomposition af nabomatricen, A, eller Laplace matricen, L, hvorefter egenværdier og egenvektorer for den valgte matrix bestemmes. Hvis en ortonormal basis af disse egenvektorer haves, som ikke er en Jordan dekomposition, da er det muligt at udregne det indre produkt mellem signalet, **s**, og dets basis element, jævnfør ligning (4.7). Dette giver en perfekt rekonstruktion af signalet, hvis alle Fourierkoefficienterne medtages. Det ønskes at rekonstruere signalet, **s**, ved at anvende så få Fourierkoefficienter som muligt. Dette kan eksempelvis gøres ved at sætte  $\frac{n-1}{2}$  Fourierkoefficienter lig nul. Det undersøges herefter, om det giver en god repræsentation af signalet. Det skal bemærkes, at der kan være en stor Fourierkoefficient, som kan være uheldig at sætte lig nul og dermed resultere i en dårlig rekonstruktion af signalet. En anden metode er at sortere Fourierkoefficienterne i størrelsesorden og sætte et givet antal af de mindste Fourierkoefficienter lig nul. Dette giver stadigvæk en mulighed for, at kunne rekonstruere signalet. Følgende eksempel viser en anvendelse af graf Fouriertransformationen.

**Eksempel 4.6: Graf Fouriertransformation** 

Lad  $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  være nabomatricen til grafen G = (V, A) i figur 3.4 givet ved

A =	0	1	1	0	0	0	0	1]
	1	0	1	1	1	0	0	1
	1	1	0	1	0	0	0	0
	0	1	1	0	1	1	0	1
	0	1	0	1	0	1	1	1
	0	0	0	1	1	0	1	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	1	1	0	1	1	0	0	0

Lad signalet,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^8$ , være givet ved

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$$

Det ønskes, at rekonstruere signalet, **s**, ved hjælp af Fourierkoefficienterne. Derfor er det nødvendigt at bestemme Fourierkoefficienterne til signalet. Jævnføres definition 4.4, så er Fourierkoefficienterne givet ved

 $\widehat{t} = F\mathbf{s}$ 

$$= \begin{bmatrix} -0,1723 & -0,7221 & -0,8232 & 0,0512 & -1,1547 & -0,0313 & -0,0579 & -1,5591 \end{bmatrix}$$

hvor F er matricen givet ved nabomatricens egenvektorer. Der er ikke benyttet generaliserede egenvektorer i dette eksempel, da den algebraiske og geometrisk multiplicitet er ens.

Ud fra disse Fourierkoefficienter ønskes det nu at rekonstruere signalet. Hele idéen med graf Fouriertransformationen er, at det ønskes at rekonstruere signalet ved at anvende så få Fourierkoefficienter som muligt og stadig bevare vigtig information i signalet. På figur 4.3 er signalet, s, samt tre rekonstruktioner af signalet illustreret, som henholdsvis har beholdt de otte, fem og én største Fourierkoefficienter.



Figur 4.3: Det originale signal, s, og de rekonstruerede signaler.

En generel observation er, at egenvektorerne typisk er flade, hvorfor lokaliserede signaler typisk repræsenteres dårligt ved få Fourierkoefficienter. For at kunne afgøre, hvor mange koefficienter, der skal anvendes for at opnå en acceptabel rekonstruktion, da udregnes normen for de rekonstruerede signaler. De er givet ved

 $||\mathbf{s} - \widetilde{\mathbf{s}}||_2 = \begin{cases} 0 & \text{ved } 8 \text{ koefficienter} \\ 0,0373 & \text{ved } 5 \text{ koefficienter} \\ 0,7168 & \text{ved } 1 \text{ koefficient} \end{cases}$ 

Disse absolutte normer indikerer, at hvis en fejl på 0,7 accepteres, da kan signalet rekonstrueres ved hjælp af én Fourierkoefficient. Jævnføres figur 4.3, da afviger rekonstruktionen med én koefficient væsentlig i forhold til det originale signal, **s**. Det optimale i dette tilfælde vil være en rekonstruktion ved fem koefficienter, da det ses, at afvigelsen er minimal i forhold til rekonstruktionen ved én koefficient.

### Sætning 4.7: Frekvensrespons af Graffiltre

Filtreringen af signalet, **s**, er ækvivalent med dets spektrum multiplicerede med frekvensresponsen af et filter i frekvensdomænet.

### Bevis

Frekvensresponsen af et filter karakteriserer dets effekt på frekvens domænet af et input signal **s**. Omskrives filtreringen af **s** ved h(A), jævnfør ligning (4.5) og (4.6) opnås

$$\boldsymbol{t} = H \boldsymbol{\mathrm{s}} = h(A) \boldsymbol{\mathrm{s}} = F^{-1} h(J) F \boldsymbol{\mathrm{s}} = F^{-1} h(J) \widehat{\boldsymbol{t}} \Longrightarrow F \boldsymbol{t} = h(J) \widehat{\boldsymbol{t}}$$

Dermed er spektrummet af output signalet, **t**, lig spektrummet af input signalet, **s**, som er multipliceret med en blokdiagonal matrix, h(J). Derfor repræsenterer h(J) frekvensresponsen af filteret h(A).

# 5 | Wavelet Transformation

Formålet med dette kapitel er at give en beskrivelse af den klassiske wavelet transformation, herunder den kontinuerte wavelet transformation defineret på Hilbertrummet  $L^2(\mathbb{R})$ , og derefter give en beskrivelse af wavelet transformationen på grafer. Det følgende kapitel er baseret på [11] med mindre andet er angivet.

## 5.1 Klassisk Wavelet Transformation

I dette afsnit beskrives generel klassisk teori inden for wavelet transformationen. En wavelet er en form for fundamental bølge, som anvendes, via translation og skalering, til at transformere et signal fra tidsdomænet til frekvensdomænet. Hvis en funktion skal wavelet transformeres skal den have endelig energi, hvilket betyder, at den skal opfylde følgende

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

En wavelet transformation er en afbildning af en funktion  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , som er givet ved en familie af wavelet funktioner, også kaldet wavelets. Disse wavelets hører sammen med en moder wavelet funktion,  $\psi$ , og familien af wavelets afviger fra hinanden med en skalerings- og translationsparameter på tidsaksen. Denne familie af funktioner,  $\psi_{s,a}(t)$ , hvor  $s, a \in \mathbb{Z}$  og s > 0, er defineret ved

$$\psi_{s,a}(t) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{t-a}{s}\right), \ t \in \mathbb{R}$$
(5.1)

Familiefunktionerne  $\psi_{s,a}(t) \in L^2(\mathbb{R})$  betragtes som integrable funktioner, og kan eksempelvis illustreres ved en Gauss klokke. Her kan  $\psi_{s,a}(t)$  være en sammenpresset funktion af den oprindelig  $\psi$  funktion. Tilfælde, hvor s er lille, vil oftest blive anvendt. Når s er lille, så er  $\frac{1}{s}$  stor, som svarer til, at argumentet  $\psi\left(\frac{t-a}{s}\right)$  multipliceres med en stor størrelse. Hvis denne størrelse er 10000, så betyder det, at den reelle akse gennemløbes med 10000 værdier multipliceret med hastigheden. Det betyder, at hvis  $\psi_{s,a}$  er illustreret ved en Gauss klokke, så når s er lille, så svarer det til at funktionen  $\psi$  sammenpresses. Samtidig med at sammenpresningen indtræder, så gøres den også højere. Faktoren  $\frac{1}{s}$  er valgt, således at alle wavelets har den samme  $L_1$ -norm. Det vil sige, at

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{s,a}(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| \, \mathrm{d}t$$

Den klassiske wavelet transformation defineres ved følgende.

#### **Definition 5.1: Wavelet Transformation**

Lad  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , hvor  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Så er wavelet transformationen givet ved

$$W_f(s,a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \psi^*\left(\frac{t-a}{s}\right) f(t) \,\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

hvor  $W_f(s, a)$  er wavelet transformationen af funktionen f(x), s > 0 er en skalering,  $a \in \mathbb{R}$  er en translation og  $\psi$  er moder wavelet funktionen. Om  $\psi$  antages det, at den har middelværdi 0, hvorfor

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

**Bemærkning.** Udtrykket i ligning (5.2), hvor  $\psi^*$  er den konjugerede af  $\psi$ , kan sammen med ligning (5.1) omskrives til

$$\begin{split} W_f(s,a) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{t-a}{s} \right) f(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{s,a}(t)} f(t) \, \mathrm{d}t = \langle f, \psi_{s,a} \rangle \end{split}$$

hvor det ses, at wavelet koefficienterne er givet som et indre produkt af wavelets  $\psi_{s,a}$  og signalet f.

For wavelet transformationer, som vil blive arbejdet med i dette speciale, gælder desuden, at de har kompakt støtte. Dette gør, at disse wavelets vil være endelige i tid. Analysen af wavelets foregår som udgangspunkt ved at det ønskes at bestemme familiefunktionerne,  $\psi_{s,a}$ , hvor det at tage et indre produkt mellem signalet og familiefunktionerne er nok til at hente al information om signalet. Wavelet transformationen har den egenskab, at den kan anvendes som et filter. Dette betyder, at wavelet transformationen kan benyttes til støjreducering, hvilket vil blive undersøgt nærmere i kapitel 6. Wavelet transformationen kan også inverteres. Det vil sige, at det er muligt at rekonstruere signalet, f, ved at kende til wavelet koefficienterne. Dette gøres klart i følgende definition.

#### **Definition 5.2: Invers Wavelet Transformation**

Lad  $W_f(s, a)$  være givne wavelet koefficienter og lad  $\psi_{s,a}(t)$  være en familie af funktioner. Den inverse wavelet transformation er givet ved

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} W_f(s, a) \psi_{s,a}(t) \frac{1}{s} \, \mathrm{d}a \mathrm{d}s \tag{5.3}$$

hvor  $\psi$  antages at opfylde

$$C_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} \, \mathrm{d}\omega < \infty \tag{5.4}$$

hvor  $\hat{\psi}$  er Fouriertransformationen af moder wavelet funktionen  $\psi(t)$ .

Det ønskes, at reducere wavelets, som skal anvendes. Når der translateres og skaleres, så opnås en familie af funktioner  $\psi_{s,a}(t)$ . Antallet af funktioner i familiefunktioner er uendelige, og derfor ønskes det at gøre dem endelige. Da translationen af familiefunktionerne er opadtil begrænset af længden af

signalet, da skal der bestemmes en grænse for antallet af skaleringer. Ligning (5.4) giver en indikation af, at wavelet transformationen minder om et båndpasfilter. For at gøre antallet af familiefunktioner endelige, så kan wavelet transformationen betragtes som en samling af båndpasfiltre, også kaldet en filterbank. Dette betyder, at wavelet transformationen af et signal svarer til at transmittere signalet gennem filterbanken. Outputtet af de forskellige båndpasfiltre svarer til de wavelet og skaleringskoefficienter, som ville være blevet opnået ved wavelet transformationen.



Figur 5.1: En samling af båndpasfiltre. [12]

En filterbank kan konstrueres ved først at opdele frekvensdomænet i frekvensbånd i to lige store dele. Den ene del svarer til et lavpasfilter og den anden del til et højpasfilter. Højpasfiltret indeholder nu vigtige informationer af et signal. Det er nu muligt at stoppe her. Men der kan forekomme vigtig information i delen med lavpasfiltret, og derfor deles dette filter i endnu et lav- og højpasfilter. Dette gøres indtil antallet af filtre er tilfredsstillende, jævnfør figur 5.1. Denne konstruktion af filterbanke resulterer i, at hele frekvensdomænet ikke vil blive beskrevet, da frekvensdomænet halveres for hver iteration. En løsning til dette er at tilføje en skaleringsfunktion, som dækker et lavfrekvent område. Dermed er der blevet konstrueret et endeligt antal af familiefunktioner samt en skaleringsfunktion. Dette er illustreret på figur 5.2.



Figur 5.2: En samling af båndpasfiltre inklusiv en skaleringsfunktion. [12]

En wavelet transformation er en transformation af et signal fra ét domæne til et andet ved hjælp af skalerings- og translationsfaktorer. En behandling af signalet i det nye domæne giver mulighed for

at frembringe vigtige informationer om signalet. Overførslen fra konstruktionen af wavelet transformationen, jævnfør ligning (5.1), til vægtede grafer, G = (V, W), kan være problematisk, da det er uklart, hvordan implementeringen af skaleringer og translationer på en arbitrær vægtet graf skal forstås. Derfor vil der i det følgende blive beskrevet, hvordan det kan blive defineret i frekvensdomænet for den klassiske wavelet transformation. Dette vil til sidst resultere i et udtryk, som kan udvides til vægtede grafer, G = (V, W). Dette kaldes også for den spektrale graf wavelet transformation, som beskrives i afsnit 5.2.

For en fast skaleringsparameter, s, kan wavelet transformationen fortolkes som en operator,

$$T^s: f(t) \to W_f(s,a)$$

ved at tage en funktion, f, og derefter returnere funktionen  $(T^s f)(a) = W_f(s, a)$ . Her betragtes translationsparameteren, a, som en uafhængig variabel af den funktion, som returneres ved operatoren  $T^s$ . Defineres  $\overline{\psi}_s$  som

$$\overline{\psi}_s(t) = \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{-t}{s}\right) \tag{5.5}$$

bemærkes det, at operatoren,  $T^s$ , er givet som foldningen mellem en funktion, f, og tilhørende familiefunktioner,  $\overline{\psi}_s(t)$ , da

$$(T^{s}f)(a) = W_{f}(s, a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \psi^{*} \left(\frac{t-a}{s}\right) f(t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{s}(a-t) f(t) dt$$

$$= (\overline{\psi}_{s} \star f)(a)$$
(5.6)

Siden at  $\overline{\psi_s}$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , så vil en Fouriertransformation af foldningen i ligning (5.6) resulterer i

$$\widehat{T^s f}(\omega) = \widehat{\overline{\psi}}_s(\omega)\widehat{f}(\omega)$$

hvilket gøres klart i følgende lemma.

#### Lemma 5.3

Lad  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  være en funktion og  $\overline{\psi}_s$  være tilhørende familiefunktioner. Hvis  $\overline{\psi}_s, f \in L^2(\mathbb{R})$ , så gælder at

$$(\widehat{T^s f})(\omega) = (\widehat{\overline{\psi}_s \star f})(\omega) = \widehat{\overline{\psi}_s}(\omega)\widehat{f}(\omega)$$
(5.7)

#### Bevis

Lad  $\overline{\psi}_s, f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dermed gælder det, at

$$\widehat{(\overline{\psi}_s \star f)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (\overline{\psi}_s \star f) e^{-ix\omega} \, \mathrm{d}x$$

Side 44 af 87

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{s}(x-y)f(y) \right) e^{-ix\omega} dx$$
  

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{s}(x-y)e^{-i\omega(x-y)}f(y)e^{-i\omega y} dxdy$$
  

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{s}(z)e^{-i\omega z}f(y)e^{-i\omega y} dzdy$$
  

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{s}(z)e^{-i\omega z} dz \right) f(y)e^{-i\omega y} dy$$
  

$$= \widehat{\psi}_{s}(\omega)\widehat{f}(\omega)$$
  
(5.8)

hvor i ligning (5.8) er substitutionen z = x - y anvendt.

Anvendes translationsegenskaben for Fouriertransformationen i ligning (5.5) opnås

$$\widehat{\overline{\psi}}_s(\omega) = \widehat{\psi^*}(s\omega)$$

som også kaldes for en båndpasfilter funktion. Dette gøres klart i følgende lemma.

Lemma 5.4: Translationsegenskab

Lad  $\overline{\psi}_s \in L^2(\mathbb{R})$  være tilhørende familiefunktioner for s > 0. For  $\overline{\psi}_s = \frac{1}{s}\psi^*(\frac{-x}{s})$  gælder det, at  $\widehat{\overline{\psi}}_s(\omega) = \widehat{\psi^*}(s\omega)$  (5.9)

#### Bevis

Lad s>0 og  $\overline{\psi}_s=\frac{1}{s}\psi^*(\frac{-x}{s}).$ Siden  $\overline{\psi}_s\in L^2(\mathbb{R}),$  så gælder det, at

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{\psi}}_{s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{s}\psi^{*}\left(\frac{-x}{s}\right)\right) e^{-ix\omega} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{s}\psi^{*}(u)\right) e^{-iu(s\omega)}s \, \mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(u) e^{-iu(s\omega)} \, \mathrm{d}u \\ &= \widehat{\psi^{*}}(s\omega) \end{aligned}$$
(5.10)

hvor ligning (5.10) kommer af integration ved substitution med  $u = \frac{-x}{s}$ .

Indsættes ligning (5.7) i ligning (5.9) og inverteres Fouriertransformationen opnås

$$(T^{s}f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \widehat{\overline{\psi}}_{s}(\omega) \widehat{f}(\omega) \, \mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \widehat{\psi}^{*}(s\omega) \widehat{f}(\omega) \, \mathrm{d}\omega$$
(5.11)

Side 45 af 87

I ligning (5.11) vil skaleringsparameteren, *s*, kun vises i argumentet af  $\hat{\psi}^*(s\omega)$ , som er defineret i frekvensdomænet i stedet for tidsdomænet. Det ses, at operatoren,  $T^s$ , som afbilder f(t) over i mængden af wavelet koefficienter til skaleringen *s*, virker på f(t) ved at multiplicere Fouriertransformationen af *f* med funktionen  $\hat{\psi}^*(s\omega)$ , som er skaleret af *s* i frekvensdomænet. Udtrykket i ligning (5.11) giver et udgangspunkt, som senere skal anvendes til at definere den spektrale graf wavelet transformation, hvor Fouriertransformationen erstattes med graf Fouriertransformationen. Inden denne transformation introduceres beskrives først den diskrete wavelet transformation.

# 5.2 Diskret Wavelet Transformation

I dette afsnit anvendes en diskretiseret udgave af wavelet transformationen, da denne skal anvendes i forbindelse med wavelet transformationen på grafer. Når wavelet transformationer anvendes til behandling af et digitalt billede, da anvendes computerbaserede metoder, og der kan derfor ikke arbejdes med klassiske wavelet transformationer. Ligesom den diskrete Fouriertransformation, så er den diskrete wavelet transformation en invertibel og lineær transformation, og kan repræsenteres ved en matrix. Denne matrix kan bestemmes ved en sampling af familien af wavelet funktioner. Der eksisterer forskellige wavelet transformationer, og i dette speciale vil der blive fokuseret på den spektrale graf wavelet transformation, som beskrives i det næste afsnit.

## 5.2.1 Spektral Graf Wavelet Transformation

I dette afsnit beskrives den spektrale graf wavelet transformation, også forkortet SGWT. Denne type transformation adskiller sig fra graf Fouriertransformationen, idet den spektrale graf wavelet transformation vil blive udregnet ved hjælp af en kernefunktion  $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ , som er analog til frekvensdomænets wavelet funktion,  $\hat{\psi}^*$ , jævnfør ligning (5.11). Her er kernefunktionen, g, en generel kontinuert funktion. Kernefunktionen, g, opfører sig som et båndpasfilter, hvilket betyder, at den opfylder betingelserne

$$g(0) = 0, \qquad \qquad \lim_{\mu \to \infty} g(\mu) = 0$$

Det eneste, som kræves af kernefunktionen, g, er, at den skal være defineret i spektrummet til grafen. Siden at Laplace matricen, L, er en positiv definit matrix, så er egenværdierne defineret på den positive del af aksen. Betingelsen g(0) = 0 er derfor givet for, at kunne invertere. Wavelet operatorerne, som giver de spektrale graf wavelet koefficienter i hver skalering, opnås ved at reskalere kernefunktionerne af Laplace matricen. For en graf, G = (V, A), så er det opnået ved egenværdierne og den tilhørende egenvektor af Laplace matricen, L. Wavelet operatoren sættes til at være

$$T_g = g(L)$$

hvor  $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ , og  $T_g f$  angiver wavelet koefficienterne for signalet, f, med skaleringen s = 1. Dette er en anvendelse af spektralsætningen. Kernefunktionen, g, kan betragtes som en eksponentialfunktion, da eksponentialfunktionen kan anvendes på en matrix. Dette foregår på den måde, at hvis matricen kan diagonaliseres, så ses der på diagonalen, hvor egenværdierne er placeret og derefter anvendes eksponentialfunktionen på hver diagonalindgang. Hvis tilfældet er, at matricen kan

$$T_g \boldsymbol{\chi}_{\ell} = g(\mu_{\ell}) \boldsymbol{\chi}_{\ell}, \quad l = 0, \dots, n-1$$

Dette medfører, at for ethvert grafsignal  $f \in \mathbb{C}^n$ , da virker operatoren  $T_g$  på f ved at modellere hver af dets graf Fourierkoefficienter, hvorfor

$$(\widehat{T_q \boldsymbol{f}})_{\ell} = g(\mu_{\ell})\widehat{f}_{\ell}$$

Anvendes den inverse Fouriertransformation opnås spektral graf wavelet koefficienter givet ved

$$(T_g \boldsymbol{f})_m = \sum_{\ell=0}^{n-1} g(\mu_\ell) \widehat{f}_\ell \chi_{\ell,m}$$
(5.12)

Ligning (5.12) svarer til ligning (5.11), som beskriver afbildningen fra et signal til wavelet koefficienter for den kontinuerte wavelet transformation. Den spektrale graf wavelet transformation defineres derfor ved følgende.

#### **Definition 5.5: Spekral Graf Wavelet Transformation**

Lad  $f \in \mathbb{C}^n$  være et signal. Den spektrale graf wavelet transformation er givet ved

$$W_{f}(s,i) = (T_{g}^{t}f)_{i} = \sum_{\ell=0}^{n-1} g(s\mu_{\ell}) \hat{f}_{\ell} \chi_{\ell,i}$$
(5.13)

hvor g er en kernefunktion og  $\chi_{\ell}$  er egenvektoren tilhørende egenværdien  $\mu_{\ell}$ .

Defineres  $T_g^s$ , som er wavelet operatoren til skaleringen s, ved

$$T_g^s = g(sL)$$

bemærkes det, at *s* en translation af Laplace matricen, *L*. Da  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , er der ingen problemer i, at skalere Laplace matricen. Fortolkningen er her, at problemet løses ved at skalere spektret. Når g(sL) anvendes, da vil skaleringen af Laplace spektret, *sL*, befinde sig på den positive del af aksen, og hvis *g* er på den positive del af aksen, så er hele operationen veldefineret. Det afgørende er, at med denne definition af skalering, og mens det oprindelige domæne (mængden af punkter) er diskret, så er domænet for kernefunktionen,  $g(\mu)$ , kontinuert, hvilket gør definitionen af  $T_g^s$  mulig for ethvert s > 0.

De individuelle wavelets opnås ved at lokalisere wavelet operatorerne ved at anvende dem til  $\delta_i$ , hvor  $\delta_i \in \mathbb{R}^n$  er signalet med værdi 1 ved punkt  $v_i$  og nul ellers. Dette giver, at

$$\psi_{s,i} = T_g^s \boldsymbol{\delta}_i$$

således at  $\psi_{s,i}$  er den spektrale graf wavelet til skaleringen *s* centreret omkring et punkt  $v_i$ . Det gælder, at

$$\widehat{\delta}_{i,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \chi_{\ell,m}^* \delta_{i,m} = \chi_{\ell,i}^*$$
(5.14)

Indsættes signalet,  $\hat{\delta}_{i,\ell}$ , fra ligning (5.14) i ligning (5.12), så medfører dette, at

$$\psi_{s,i}(m) = \sum_{\ell=0}^{n-1} g(s\mu_{\ell}) \chi_{\ell,i}^* \chi_{\ell,m}$$
(5.15)

Disse koefficienter kan anvendes til at opnå wavelet koefficienterne,  $W_f(s, i)$ , givet ved

$$W_{\mathbf{f}}(s,i) = \langle \psi_{s,i}, \mathbf{f} \rangle$$

På den anden side, så kan wavelet koefficienterne blive genereret fra wavelet operatorer, jævnfør ligning (5.12), ved anvende ortonormaliteten af egenvektoren  $\chi_{\ell}$  tilhørende egenværdien  $\mu_{\ell}$ 

Som nævnt i afsnit 5.1, da anvendes en skaleringsfunktion til at afdække de lavefrekvenser af et signal, **s**. Det samme gælder for den spektrale graf wavelet transformation.

#### 5.2.2 Skaleringsfunktion

Da wavelet kernefunktionen, g, opfylder at g(0) = 0, indikerer det, at wavelets,  $\psi_{s,i}$ , er ortogonale til egenvektoren  $\chi_0$  tilhørende egenværdi  $\mu_0 = 0$  og er næsten ortogonale til egenvektoren  $\chi_\ell$ , hvis egenværdien  $\mu_\ell$  er tæt på 0. For at kunne repræsentere de lave frekvenser af grafsignalet, f, kan det være en fordel at introducere en mængde af spektrale graf skaleringsfunktioner. Disse skaleringsfunktioner er defineret analogt til skaleringsfunktionerne til klassiske wavelet transformationer, som benyttes til, at repræsentere lave frekvenser af et signal, når skaleringsparameteren ikke kan blive vilkårligt stort. Spektral graf skaleringsfunktionerne defineres ved en ikke-negativ skaleringskerne,  $h(\mu)$ , hvor  $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ , som kan betragtes som et lavpas filter. Skaleringskernen, h, opfylder at

$$h(0) > 0, \qquad \qquad \lim_{\mu \to \infty} h(\mu) = 0$$

Ud fra dette er skaleringsoperatoren,  $T_h = h(\mu)$ , defineret. Skaleringsfunktionerne centreret ved et punkt  $v_i \in V$  er givet ved

$$\phi_i = T_h \delta_i = h(L) \delta_i$$

og skaleringskoefficienterne er givet ved

$$S_{\boldsymbol{f}}(i) = \langle \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{f} \rangle$$

En skaleringsfunktion sikrer en stabil rekonstruktion af grafsignalet, f, fra wavelet koefficienterne, når skaleringsparameteren, s, samples ved et givent antal værdier,  $s_j$  for j = 1, ..., J. Dette gør, at

mindre forstyrrelser i wavelet koefficienterne ikke resulterer i store ændringer af grafsignalet, f.

Denne skaleringsfunktion er defineret til at repræsentere lave frekvenser af grafsignalet, f. Det skal dog bemærkes, at kernerne h og g ikke opfylder to-skala relationen som ved klassiske ortogonale wavelets [13]. To-skala relationen betyder, at en skaleringsfunktion, ved en given skalering, kan ud-trykkes i termer af den nærmeste mindre skaleringsfunktion. Dette betyder, at h kan konstrueres frit, så længe det ikke resulterer i, at summen af kvadrater af grafen, G, er tæt på nul i Laplace spektrummet.

# 5.3 Egenskaber for Spektral Graf Wavelet Transformation

I det følgende beskrives egenskaber ved den spektrale graf wavelet transformation, som inkluderer den inverse transformation og polynomiel approksimation.

## 5.3.1 Invers Kontinuert Spektral Graf Wavelet Transformation

For at transformationen af et grafsignal kan anvendes til andet end signal analyse for enhver type af signaler, da skal det være muligt at invertere transformationen. Det vil sige, at signalet rekonstrueres ud fra en given mængde af koefficienter. Den kontinuerte spektrale graf wavelet transformation tillader en invers transformation, som er sammenlignelig med den inverse wavelet transformation, jævnfør ligning (5.3).

Hver mængde af wavelet koefficienter,  $W_f(s,i)$ , siges at måle mængden af wavelets,  $\psi_{s,i}$ , i signalet, f. Den inverse kontinuerte spektrale graf wavelet transformation anvender disse målinger til at rekonstruere det originale signal med et  $\frac{1}{s}$  ds mål. Alle wavelets er ortogonale til egenvektoren  $\chi_0$  og underrummet udspændt af  $\chi_0$  skal derfor behandles separat.

### Sætning 5.6: Invers Kontinuert Spektral Graf Wavelet Transformation

Lad  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^n$  være et grafsignal og lad  $\mathbf{f}^{\#}$  være projektionen af  $\mathbf{f}$  ned på det ortogonale komplement af spændet af  $\mathbf{X}_0$ , altså  $\mathbf{f}^{\#} = \mathbf{f} - \langle \mathbf{X}_0, \mathbf{f} \rangle \mathbf{X}_0$ . Lad g være en kernefunktion, som opfylder g(0) = 0 og betingelsen givet ved

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{g^2(x)}{x} \mathrm{d}x = C_g < \infty$$

Så er rekonstruktionen af grafsignalet, f, givet ved

$$f_m^{\#} = \frac{1}{C_g} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^+} W_f(s,i) \psi_{s,i}(m) \frac{1}{s} \mathrm{d}s$$
(5.16)

Den fuldstændige rekonstruktion af grafsignalet, f, er givet ved

 $oldsymbol{f} = oldsymbol{f}^\# + \widehat{f}_0 oldsymbol{\chi}_0$ 

#### Bevis

Først substitueres ligning (5.15) og (5.13) i højre side af ligning (5.16) for at beskrive  $\psi_{s,i}$  og  $W_f(s,i)$  i termer af egenvektoren,  $\chi_{\ell}$ , tilhørende egenværdien  $\mu_{\ell}$  til Laplace matricen. Dette giver følgende,

$$\begin{split} \frac{1}{C_g} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{s} \sum_i \left( \sum_{\ell} g(s\mu_{\ell}) \chi_{\ell,i} \widehat{f_{\ell}} \sum_{\ell'} g(s\mu_{\ell'}) \chi_{\ell',i}^* \chi_{\ell',m} \right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{C_g} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{s} \left( \sum_{\ell,\ell'} g(s\mu_{\ell'}) g(s\mu_{\ell}) \widehat{f_{\ell}} \chi_{\ell',m} \sum_i \chi_{\ell',i}^* \chi_{\ell,i} \right) \mathrm{d}s \end{split}$$

hvor det gælder, at  $\sum_i \chi^*_{\ell',i} \chi_{\ell,i} = \delta_{\ell,\ell'}$ . Anvendes denne egenskab samtidig med at der summeres over  $\ell'$  opnås

$$\frac{1}{C_g} \sum_{\ell} \left( \int_0^\infty \frac{g^2(s\mu_\ell)}{s} \mathrm{d}s \right) \hat{f}_\ell \chi_{\ell,m}$$
(5.17)

Anvendes integration ved substitution med  $u = s\mu_{\ell}$  i ligning (5.17), hvor  $\mu_{\ell} \neq 0$ , opnås

$$\int \frac{g^2(u)}{u} \mathrm{d}u = C_q < \infty$$

som svarer til betingelsen, der blev stillet for g. Hvis  $\mu_{\ell} = 0$ , hvilket kun gælder for  $\ell = 0$ , så er integralet lig 0 og g(0) = 0. Dette betyder, at ligning (5.17) er den inverse Fouriertransformation evalueret i punktet  $v_m \mod \ell = 0$  fjernet fra summen. Siden at der, for  $\ell = 0$ , gælder, at

$$\widehat{f}_0 \boldsymbol{\chi}_0 = \langle \boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{f} \rangle \boldsymbol{\chi}_0$$

er sætningen bevist.

Den inverse kontinuerte spektrale graf wavelet transformation er af teoretisk interesse, og ved implementering kan det være nødvendigt at anvende et endeligt antal wavelet skaleringer.

## 5.4 Grænser for Spektral Wavelet Transformation

Implementeringen af den spektrale graf wavelet transformation vil kræve en diskretisering af skaleringsparamereten, s, til en endelig mængde af værdier. Lad J være antallet af skaleringer, og lad  $\{s_1, s_2, \ldots, s_J\}$  være de valgte værdier for skaleringsparameteren. For hver skalar,  $s_j$ , producerer den spektrale graf wavelet transformation n wavelet koefficienter,  $W_{s_j,i}$  for  $0 \le i \le n - 1$ . Sammen med de n skaleringskoefficienter kan den fulde spektrale graf wavelet transformation med J skalarer betragtes som en afbildning fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^{n(J+1)}$ , som producerer n(J+1) koefficienter.

For at få en idé om, hvor stabile koefficienterne for hele mængden af n(J + 1) koefficienter er til at repræsentere grafsignalet, så skal grænsen til hele mængden af wavelets og skaleringsfunktioner

betragtes. Et Hilbertrum,  $\mathcal{H}$ , med en mængde af vektorer  $\Gamma_i \in \mathcal{H}$ , kaldes en frame med grænserne X og Y, hvis der for alle  $f \in \mathcal{H}$  gælder, at

$$X||oldsymbol{f}||^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \Gamma_i, oldsymbol{f} 
angle|^2 \leq Y||oldsymbol{f}||^2$$

Konstanterne *X* og *Y* beskriver den numeriske stabilitet af rekonstruktionen af det originale grafsignal, *f*, fra koefficienterne  $\langle \Gamma_i, f \rangle$ . Hvis *X* = *Y* kan grafsignalet, *f*, rekonstrueres ved

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{X} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \Gamma_i, \boldsymbol{f} \rangle \Gamma_i$$
(5.18)

Generelt, så er  $X \neq Y$ . For den skalardiskretiserede spektrale graf wavelet transformation er grænserne givet ved følgende.

#### Sætning 5.7

Lad  $\{s_1, s_2, \ldots, s_J\}$  være en fastsat mængde af skalarer. Lad  $G(\mu) = h^2(\mu) + \sum_{j=0}^{J-1} g(s_j \mu)^2$ , hvor h og g er wavelet og skaleringskerner. Så er

$$\Gamma = \{\phi_i\}_{i=0}^{n-1} \cup \{\psi_{t_j,i}\}_{j,i=0}^{J-1,n-1}$$

en frame for  $\mathbb{C}^n$  med grænserne A og B givet ved

$$X = \min_{\mu \in [0, \mu_{n-1}]} G(\mu), \qquad \qquad Y = \max_{\mu \in [0, mu_{n-1}]} G(\mu)$$
(5.19)

#### Bevis

Ved et fastsat grafsignal,  $f \in \mathbb{C}^n$ , og anvendelse af ligning (5.13) opnås

$$\sum_{i=0}^{n-1} |W_{f}(s,i)|^{2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\ell} g(t\mu_{\ell}) \chi_{\ell,i} \widehat{f_{\ell}} \sum_{\ell'} (g(s\mu_{\ell'})\chi_{\ell',i} \widehat{f_{\ell'}})^{*}$$

$$= \sum_{\ell} |g(t\mu_{\ell})|^{2} |\widehat{f_{\ell}}|^{2}$$
(5.20)

hvor ortonormaliteten af  $\chi_{\ell}$  er anvendt. Ligeledes gælder for skaleringskoefficienterne, at

$$\sum_{i=0}^{n-1} |S_{\mathbf{f}}(i)|^2 = \sum_{\ell} |h(\mu_{\ell})|^2 |\widehat{f}_{\ell}|^2$$
(5.21)

Lad  $\gamma_k \in \Gamma$  være den *k*'te vektor i  $\Gamma$  for k = 0, ..., J. Enten er  $\gamma_k$  skaleringskoefficienter eller wavelet koefficienter alt efter valget af *k*. Sammen med ligning (5.20) og (5.21) opnås nu, at

$$\sum_{k=0}^{J} |\langle \boldsymbol{\gamma}_{k}, \boldsymbol{f} \rangle|^{2} = \sum_{\ell} \left( |h(\mu_{\ell})|^{2} + \sum_{j=0}^{J-1} |g(s_{j}\mu_{\ell})|^{2} \right) |\widehat{f}_{\ell}|^{2} = \sum_{\ell} G(\mu_{\ell}) |\widehat{f}_{\ell}|^{2}$$

Side 51 af 87

Jævnfør ligning (5.19) opnås

$$X\sum_{\ell=0}^{n-1} |\hat{f}_{\ell}|^2 \le \sum_{k=0}^{J} |\langle \gamma_k, \boldsymbol{f} \rangle|^2 \le Y\sum_{\ell=0}^{n-1} |\hat{f}_{\ell}|^2$$
(5.22)

Parsevals ligning,  $||f||^2 = \sum_{\ell} |\hat{f}_{\ell}|^2$ , gør, at X og Y er frame grænser for  $\Gamma$ .

Spektral graf wavelet transformationen er defineret til at anvende alle egenværdier,  $\mu_{\ell}$ , og den tilhørende egenvektor,  $\chi_{\ell}$ , til Laplace matricen,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Et problem med den spektrale graf wavelet transformation er, at ligning (5.13) kræver en diagonalisering af Laplace matricen, L, hvilket betyder, at alle egenværdier og tilhørende egenvektor skal bestemmes. Dette er beregningsmæssigt tungt for en computer, da det kræver  $\mathcal{O}(n^3)$  operationer at udføre en diagonalisering. Denne kompleksitet gør, at dette ikke anbefales for grafer med mere end et par tusinde punkter. I billedebehandling arbejdes ofte med billeder med flere tusinde punkter, hvis ikke millioner af punkter, så derfor er den spektrale graf wavelet transformation ikke et godt redskab til dette. Derfor ønskes at bestemme en løsning, således at det ikke er nødvendigt at diagonalisere Laplace matricen, L.

## 5.5 Polynomiel Approksimation

I dette afsnit beskrives en udgave af den spektrale graf wavelet transformation, som ikke diagonaliserer Laplace matricen, *L*. Dette foregår ved at approksimere de skalerede wavelet kernefunktioner,  $g(s\mu_j)$ , ved polynomier. En polynomiumsfunktion af Laplace matricen, *L*, vil blive anvendt sammen med grafsignalet, *f*, således at der kun benyttes matrix-vektor produkter, hvilket kun kræver |E|operationer. For sparse grafer, det vil sige grafer med få kanter, er dette en effektiv metode.

## 5.5.1 Approksimation ved Chebyshev Polynomium

Som nævnt tidligere, så afhænger wavelet operatoren,  $T_g^s$ , af værdierne givet ved  $g(s\mu)$ , men kun for egenværdi  $\mu$  i Laplace spektrummet. Dette betyder, at polynomiumsapproksimationen kun skal arbejde inden for et interval, som indeholder Laplace spektrummet.

#### Lemma 5.8

Lad  $\mu_{\max}$  være en øvre grænse af Laplace spektrummet, således at  $\mu_{\max} \ge \mu_{n-1}$ . Lad  $p(\mu)$  være et polynomium. For en fastsat skalering, *s*, skal der gælde, at

$$Z = \sup_{\mu \in [0,\mu_{\max}]} |g(s\mu) - p(\mu)|$$

Så er approksimationsfejlen til de approksimerede wavelet koefficienter,  $\widetilde{W}_{f}(s, i) = (p(L)f)_{i}$ , opadtil begrænset ved

 $|W_{\boldsymbol{f}}(s,i) - \widetilde{W}_{\boldsymbol{f}}(s,i)| \le Z ||\boldsymbol{f}||$ 

#### Bevis

Jævnføres ligning (5.13), så er

$$|W_{\boldsymbol{f}}(s,i) - \widetilde{W}_{\boldsymbol{f}}(s,i)| = \left| \sum_{\ell=0}^{n-1} g(s\mu_{\ell}) \widehat{f}_{\ell} \chi_{\ell,i} - \sum_{\ell=0}^{n-1} p(\mu_{\ell}) \widehat{f}_{\ell} \chi_{\ell,i} \right|$$
  
$$\leq \sum_{\ell=0}^{n-1} |g(s\mu_{\ell}) - p(\mu_{\ell})| \left| \widehat{f}_{\ell} \chi_{\ell,i} \right|$$
  
$$\leq Z \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| \widehat{f}_{\ell} \chi_{\ell,i} \right|$$
(5.23)

Anvendes Cauchy-Schwartz ulighed på summen i ligning (5.23) opnås

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \left| \widehat{f}_{\ell} \chi_{\ell,i} \right| \le \sum_{\ell=0}^{n-1} (\widehat{f}_{\ell})^2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (\chi_{\ell,i})^2 = ||\boldsymbol{f}||$$
(5.24)

hvor sidste lighedstegn i ligning (5.24) kommer af, at anvende Parsevals ligning og ortonormaliteten af  $\chi_{\ell}$  for  $\ell = 0, ..., n - 1$ . Substitueres ligning (5.24) ind i (5.23) opnås

$$|W_{\boldsymbol{f}}(s,i) - \widetilde{W}_{\boldsymbol{f}}(s,i)| = Z||\boldsymbol{f}||$$

Den øvre grænse,  $\mu_{\text{max}}$ , som blev anvendt i lemma 5.8, kan bestemmes ved at finde den største egenværdi af Laplace matricen, *L*. Det kun at skulle kende til  $\mu_{\text{max}}$  reducerer mængden af udregninger i forhold til at skulle bestemme hele Laplace spektrummet. For at kunne bestemme  $\mu_{\text{max}}$  behøves kun et groft estimat af  $\mu_{n-1}$ . Der eksisterer allerede gode algoritmer, som kan bestemme  $\mu_{\text{max}}$  ved kun at anvende matrix-vektor produkter og dermed mindskes kompleksiteten.

I dette speciale vil polynomiumsapproksimationer blive bestemt ud fra den trunkerede Chebyshev polynomiumsudvidelse af skalerede wavelet kerner,  $g(s\mu)$ , over et interval givet ved  $[0, \mu_{max}]$ . Lemma 5.8 giver en formodning om, at polynomiumsapproksimationer,  $p(\mu)$ , skal vælges, således at de minimerer supremumsnormen givet ved

$$Z = \sup_{\mu \in [0,\mu_{\max}]} |p(\mu) - g(s\mu)|$$

De trunkerede Chebyshev polynomiumsudvidelser resulterer i polynomier, som er gode approksimationer til minimax polynomier, som netop minimerer supremumsnormen. Minimax polynomiet, p(x), af orden M, som approksimerer g(sx), har den egenskab, at fejlen |p(x) - g(sx)| opnår den samme maksimum værdi ved M + 2 punkter over domænet. Dette illustrerer det faktum, at minimax polynomiet fordeler approksimationsfejlen ligeligt henover hele intervallet. Det gælder yderligere, at de trunkerede Chebyshev polynomier opnår en maksimum fejl, som er lidt større end det minimax polynomium, som approksimeres. Dog er fejlen en smule bedre i de regioner, hvor  $g(s\mu)$  er glat. Hvis grafen er lille nok til at kunne benytte ligning (5.13) direkte, så er Chebyshevs fejl bedre end minimax polynomiets [11].

Chebyshev approksimationer er også at foretrække, da signalet kan evalueres med Chebyshev polynomierne ved at anvende matrix-vektor produkter. Dette skyldes Chebyshev polynomiers gentagelsesegenskaber. For fuldstændighedens skyld så beskrives nogle af egenskaberne ved Chebyshev polynomierne. De ikke-skalerede Chebyshev polynomier er en mængde af polynomier, som repræsenterer funktioner på intervallet [-1, 1]. På dette interval opfylder de, at

$$T_k(y) = \cos(k \arccos(y))$$

hvilket også viser, at polynomierne oscillerer mellem [-1, 1]. Det k'te ordens polynomium  $T_k(y)$  har nulpunkter givet ved

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right), \ n = 0, 1, \dots, k-1$$

Chebyshev polynomierne har også en to-terms gentagelsesegenskab givet ved

$$T_k(y) = 2yT_{k-1}(y) - T_{k-2}(y)$$
(5.25)

som sammen med startbetingelserne

$$T_0(y) = 1, \quad T_1(y) = y$$

kan de anvendes til at generere hele følgen af polynomier.

Mange af approksimationsegenskaberne, som eksisterer for Chebyshev polynomierne følger af, at de er ortogonale i forhold til det indre produkt associeret med målet  $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$ . Specielt gælder det, at

$$\langle T_l, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_\ell(y) T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m \neq \ell \\ \frac{\pi}{2} & \text{hvis } m = \ell \neq 0 \\ \pi & \text{hvis } m = \ell = 0 \end{cases}$$

Enhver  $L_2$ -integrabel funktion, h, på intervallet [-1,1] med hensyn til målet  $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$  har en konvergent Chebyshev følge givet ved

$$h(y) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(y)$$

hvor Chebyshev koefficienterne,  $c_k$ , er givet ved

$$c_{k} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_{k}(y)h(y)}{\sqrt{1-y^{2}}} \, \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(k\theta)h(\cos(\theta)) \, \mathrm{d}\theta$$

Side 54 af 87

De approksimationspolynomier, som skal anvendes til at gøre den spektrale graf wavelet transformation bedre, vil nu blive beskrevet. For at kunne anvende approksimationspolynomierne, da skal argumentet til Chebyshev polynomierne ændres. Dette gøres ved at ændre variablene til

$$x = \frac{\mu_{\max}(y+1)}{2},$$
  $y = \frac{2x}{\mu_{\max}} - 1$ 

Dette ændre også intervallet [-1,1] til [0,  $\mu_{max}$ ]. De forskudte Chebyshev polynomier noteres  $\overline{T}_k(x)$  og opfylder

$$\overline{T}_{k}(x) = T_{k}(y)$$

$$\overline{T}_{k}\left(\frac{\mu_{\max}(y+1)}{2}\right) = T_{k}\left(\frac{2x}{\mu_{\max}} - 1\right)$$
(5.26)

Lad M være ordenen af approksimationspolynomierne til hver af de skalerede wavelet kerner, og antag at  $s_j$  er en fikseret skalar. Dette betyder, at ved store værdier af M, så opnås en mere nøjagtig approksimation. Dog er der den konsekvens, at jo større M, des tungere er det beregningsmæssigt. For hver skalar,  $s_j$ , er det trunkerede Chebyshev polynomium,  $p_j(x)$ , som approksimerer den skalerede wavelet kerne  $g(s_jx)$  givet ved

$$p_j(x) = \frac{1}{2}c_{j,0} + \sum_{k=1}^M c_{j,k}\overline{T}_k(x)$$

hvor Chebyshev koefficienterne er givet ved

$$c_{j,k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(k\theta) g\left(\frac{s_j \mu_{\max}(\cos(\theta) + 1)}{2}\right) d\theta$$

Præcis samme udregninger er anvendt til at konstruere det M'te ordens polynomium  $p_0(x)$ , som approksimerer skaleringskernen h.

Chebyshev koefficienterne bestemmes uafhængigt af enhver kendskab til grafsignalet, *f*. Det eneste, som kræves her, er grænsen  $\mu_{max}$ . Når først Chebyshev koefficienterne er opnået, så er skaleringskoefficienterne og wavelet koefficienterne til den fast spektrale graf wavelet transformation givet ved

$$\widetilde{W}_{\boldsymbol{f}}(s_{j},i) = \left(\frac{1}{2}c_{j,0}\boldsymbol{f} + \sum_{k=1}^{M}c_{j,k}\overline{T}_{k}(L)\boldsymbol{f}\right)_{i}$$

$$\widetilde{S}_{\boldsymbol{f}}(i) = \left(\frac{1}{2}c_{0,0}\boldsymbol{f} + \sum_{k=1}^{M}c_{0,k}\overline{T}_{k}(L)\boldsymbol{f}\right)_{i}$$
(5.27)

Den fast spektrale graf wavelet transformation kan bestemmes ved termvise udregninger af  $\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$  ved at anvende gentagelsesegenskaben for de forskudte Chebyshev polynomier. Substitueres variabelændringen givet ved

$$y = \frac{2x}{\mu_{\max}} - 1$$

#### Side 55 af 87

Speciale

ind i ligning (5.25) og anvendes ligning (5.26) bemærkes det, at

$$\overline{T}_k(x) = \frac{2}{\mu_{\max}} (2x - \mu_{\max}) \overline{T}_{k-1}(x) - \overline{T}_{k-2}(x)$$

Dette medfører, at

$$\overline{T}_{k}(L)\boldsymbol{f} = \frac{2}{\mu_{\max}}(2L - \mu_{\max}I)\overline{T}_{k-1}(L)\boldsymbol{f} - \overline{T}_{k-2}(L)\boldsymbol{f}$$
(5.28)

Gentagelsesegenskaben gør, at ligning (5.28) kan bestemmes udelukkende ved at anvende matrixvektor produkter, hvor det kun er vektoren  $\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$  for hver  $k \leq M$ , som gemmes. Dette betyder, at matricen  $\overline{T}_k(L)$  aldrig udregnes præcist. Dette skyldes, at gentagelsesegenskaben gør, at vektoren  $\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$  kan bestemmes ud fra vektorene  $\overline{T}_{k-1}(L)\mathbf{f}$  og  $\overline{T}_{k-2}(L)\mathbf{f}$ . Derfor afhænger udregningsomkostningerne kun af matrix-vektor produktet med  $(2L - \mu_{\max}I)$ .

Den estimerede kompleksitet af udregningerne af den fast spektrale graf wavelet transformation af en graf med |E| vægtede kanter bestemmes ud fra ovenstående. Hvis Laplacematricen, L, antages sparse, så vil kompleksiteten af matrix-vektor produktet Lv, for  $v \in \mathbb{R}^n$ , være  $\mathcal{O}(|E|)$  imod de  $\mathcal{O}(n^2)$ , hvis Laplacematricen, L, ikke var sparse. Udregningerne af termerne  $\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$ , for  $k \leq M$ , kræver  $\mathcal{O}(M|E|)$  operationer. Bestemmes skaleringskoefficienterne og wavelet koefficienterne, som ved ligning (5.27), svarer dette til, at addere  $c_{j,k}\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$ , for  $j = 0, \ldots, J$ , på vektoren bestående af den j'te mængde af koefficienter, når termet  $\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$  udregnes. Det, at udregne skalar-vektor produktet  $c_{j,k}\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$  og addere det med alle vektorer kræver  $\mathcal{O}(n)$  operationer. Dette kræves dog M(J+1)gange for, at bestemme alle J + 1 skaleringsfunktionsbåndene og wavelet båndene til en polynomiel orden M. Alt i alt betyder dette, at det kræver  $\mathcal{O}(M|E|+Mn(J+1))$  operationer at udregne den spektrale graf wavelet transformation ved polynomiel approksimation. Dog gør gentagelsesegenskaben fra ligning (5.28), at det, at bestemme alle  $\overline{T}_k(L)\mathbf{f}$  kun kræver en hukommelse på 3n. Dette gælder kun hvis lavere termer overskrives, når de ikke benyttes mere. En direkte implementering af den fast spektrale graf wavelet transformation vil også kræve plads til alle J + 1 skaleringsfunktionsbåndene og wavelet båndene, hvilket kræver, at der skal være en hukommelse på n(J+1)+3n = n(J+4).

Mange wavelet baserede signalbehandlingsalgoritmer virker ved at beregne wavelet koefficienterne af det originale signal, manipulere signalet i frekvensdomænet for til slut, at invertere wavelet koefficienterne. For at den spektrale graf wavelet transformation kan anvendes til signalbehandling, så er det vigtigt, at den er invertibel. Det vil sige, at det skal være muligt, at rekonstruere grafsignalet fra spektral graf wavelet koefficienterne.

# 5.6 Invers Spektral Graf Wavelet Transformation

Spektral graf wavelet transformationen er en konsistent transformation, idet der er flere wavelets,  $\psi_{s_j,i}$ , end der er punkter i grafen. Inkluderes skaleringsfunktionen,  $\phi_i$ , i disse wavelets, da transformerer den spektrale graf wavelet transformation et grafsignal,  $f \in \mathbb{C}^n$ , til n(J + 1) koefficienter,

c = W f. Dette betyder, at W har uendeligt mange venstre inverse matricer, M, hvor MW f = f. Et naturligt valg af en invers matrix til W er den pseudoinverse matrix, M, givet ved

$$M = (\mathcal{W}^* \mathcal{W})^{-1} \mathcal{W}^*$$

En egenskab ved den pseudoinverse matrix er, at den opfylder minimumsnormsegenskaben givet ved

$$M\boldsymbol{c} = \arg\min_{\boldsymbol{f}\in\mathbb{C}^n} ||\boldsymbol{c} - \mathcal{W}\boldsymbol{f}||_2$$
(5.29)

I praksis, hvor manipulation af koefficienter ofte foretages, da kan det ske, at den inverse matrix skal anvendes på en mængde af koefficienter, som ikke længere er i billedemængden af W. Ligning (5.29) indikerer, at i de tilfælde, hvor koefficienter ikke længere er i billedemængden af W, da svarer den pseudoinverse matrix, M, til den ortogonale projektion af koefficienterne ned på billedemængden af W efterfulgt af en invertering af billedemængden til W.

Givet en mængde af koefficienter, c, da vil den pseudoinverse matrix, M, af W være løsningen til følgende ligningssystem

#### $(\mathcal{W}^*\mathcal{W})\boldsymbol{f}=\mathcal{W}^*\boldsymbol{c}$

Dette system er oftest for stort til at blive løst direkte, eksempelvis ved LU-faktorisering. Derfor kan det være en fordel, at anvende iterative algoritmer såsom den konjugerede gradient algoritme [8]. Den konjugerede gradient algoritme er en algoritme, som finder en numerisk løsning af et givet lineært ligningssystem. Dette er en iterativ algoritme, hvor prisen for hver udregning er domineret af produktet mellem  $W^*W$  og en vektor. Chebyshev polynomierne anvendes til at beregne  $\widetilde{W}^*\widetilde{W}$  i hvert skridt af den konjugerede gradient algoritme. Grænserne fra sætning 5.7 kan anvendes til at estimere konvergeringshastigheden for den konjugerede gradient algoritme. Fejlen efter den *i*'te iteration er begrænset af normen af det første residual multipliceret med

$$2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^i\tag{5.30}$$

hvor  $\kappa$  er det såkaldte konditioneringstal, som beskriver forholdet mellem den største og mindste egenværdi til matricen  $\mathcal{W}^*\mathcal{W}$ . Grænserne X og Y er grænser for spektrummet af  $\mathcal{W}^*\mathcal{W}$  og  $\kappa < \frac{Y}{X}$ , jævnfør sætning 1.1.12 i [9]. Dette viser eksplicit, at konvergensegenskaberne for rekonstruktionen ved anvendelse af den konjugerede gradient algoritme afhænger af grænserne. Hvis  $\frac{Y}{X} \approx 1$ , så vil konvergensen gå hurtigere, da  $\sqrt{\kappa} - 1 \approx 0$ .
# 6 | Billedbehandling

Formålet med dette kapitel er at diskutere de forskellige resultater, der opstår i forbindelse med at anvende den foregående beskrevne teori i praksis. Ligningerne i det følgende kapitel er baseret på [14] med mindre andet er angivet.

Hele dette kapitel er skrevet med udgangspunkt i de resultater, der er opnået gennem de skrevne koder i MATLAB. Den generelle implementering af billeder og grafer kan findes i *Billedeimplementering.m.* Graf Fouriertransformationen kan findes i *Billede.m* samt i bilag A og den spektrale graf wavelet transformation i *stojreducering.m.* Resultaterne kan findes i bilag B og C.

## 6.1 Billedrekonstruktion

Formålet med dette afsnit er at se, hvordan graf Fouriertransformationen fra kapitel 4 anvendes i praksis. I dette speciale vil der blive arbejdet med billeder. Det betyder, at der ved hjælp af spektral grafteori vil blive konstrueret en graf med vægtede kanter, som på bedst mulig vis skal repræsentere det udvalgte billede. Derudover ønskes det ved hjælp af graf Fouriertransformationen, at rekonstruere billedet ved et reduceret antal Fourierkoefficienter.

Der arbejdes med to forskellige billeder i dette speciale. Det ene repræsenterer et billede af en lastbil, som er forholdsvist detaljeret. Dette billede kan ses på figur 6.1. Det andet billede repræsenterer et fly, som er mindre detaljeret. Dette billede kan ses på figur 6.2. Billederne var originalt repræsenteret ved henholdvis  $512 \times 512$  og  $256 \times 256$  pixels.



**Figur 6.1:** Billede af lastbil på  $512 \times 512$  pixels. [15]



Figur 6.2: Billede af fly på $256\times256$  pixels. [15]

Det var dog nødvendigt at nedskalere billederne, således at de begge var repræsenteret ved  $64 \times 64$  pixels, samtidig med nedskaleringen, da blev pixelværdierne ændret til at være mellem 0 og 1. Dette skyldes, at computeren, der blev arbejdet på, havde 8 gigabyte ram, og sammen med MATLAB, var

Speciale

det ikke muligt at arbejde med større billeder. De nedskalerede billeder kan ses på figur 6.3 og 6.4.



**Figur 6.3:** Billede af lastbil med  $64 \times 64$  pixels.



**Figur 6.4:** Billede af fly med  $64 \times 64$  pixels.

Specialets fokus er, at udføre signalbehandling på grafer. Derfor blev en vægtet graf konstrueret, hvor hvert pixel repræsenteres ved det af grafens punkter, som har samme placering på grafen, som det valgte pixel havde på billedet. En sådan graf kaldes en gittergraf og er illustreret på figur 6.5. Dette betyder, at grafen kan noteres G = (V, W), hvor V er mængden af punkter, som repræsenterede alle pixels. Kanterne i grafen er givet ved en vægtet nabomatrix, W, som repræsenterer kanterne mellem punkterne  $v_i$  og  $v_j$  med vægten  $w_{ij}$ . Der eksisterer forskellige modeller for valget af vægte til kanterne. Vægtene, i dette tilfælde, er valgt til at beskrive korrelationen mellem to distinkte pixels, og er givet ved

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{||\mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j||_2^2}{\sigma^2}\right) \tag{6.1}$$

Her beskriver  $\mathbf{1}_i$  placeringen af punktet  $v_i$  på grafen og  $\sigma$  er en parameter. Dette betyder, at hvis den euklidiske afstand mellem punkterne  $v_i$  og  $v_j$  er lille, da vil  $w_{ij}$  være stor, og dermed opnås en stor korrelation mellem de to punkter. Dette gør, at vægtene har begrænsningen  $0 < w_{ij} \leq 1$ .

For at opnå den bedste rekonstruktion af et billede, da skal det antages, hvor mange pixel en vilkårlig pixel skal korrelere med, og derved angive antallet af naboer til hvert punkt i grafen. Der eksisterer ikke et universelt rigtigt antal af naboer til en pixel. En simpel model er at vælge de fire nærmeste naboer, som er illustreret på figur 6.5. Vælges dette udgangspunkt kan det antages, at de resterende pixels ikke korrelerer med det valgte pixel. Dette kan dog have den konsekvens, at vigtige informationer fra de omkringliggende pixels, eksempelvis de diagonale naboer udebliver og rekonstruktionen af billedet risikerer at være uacceptabel. Dette kan skyldes, at der er for få korrelerende pixels til at beskrive et andet pixel, og dermed udebliver vigtig information.

Et eventuelt bedre valg er at vælge de otte nærmeste naboer, som er illustreret på figur 6.6. Her antages det, at alle omkringliggende pixels korrelerer med det valgte pixel. Dette svarer til et 1-

nabolag til hvert punkt i grafen. Dette valg kan være bedre end den med de fire naboer, da der kan være stor sandsynlighed for, at alle de omkringliggende pixels indeholder informationer omkring den valgte pixel. For at gøre antallet af naboer mere flydende, da kan punkter, indenfor en given euklidisk afstand, i stedet vælges at korrelere. Dette er illustreret på figur 6.7.



**Figur 6.5:** En graf, G = (V, W), hvor punktet  $v_i$  er nabo til de fire nærmeste punkter.



**Figur 6.6:** En graf, G = (V, W), hvor punktet  $v_i$  er nabo til de otte nærmeste punkter.



**Figur 6.7:** En graf, G = (V, W), hvor punktet  $v_i$  er nabo til punkter indenfor en euklidisk afstand.

Det skal derfor besluttes, hvilke pixels der forventes at korrelere. For en vilkårlig pixel kan der være forskellige antagelser for, hvor mange pixels, der forventes at korrelere. Jo flere pixels, som antages at korrelere, des flere udregninger kræves der af algoritmerne. Derfor skulle der bestemmes et antal, som beskrev det pågældende billede på bedst mulig vis. Det kan antages, som på figur 6.5, hvor de

fire nærmeste naboer til et punkt er valgt til at korrelere. Det kan også være som på figur 6.6, hvor de otte nærmeste naboer til et punkt korrelerer. Disse to antagelser vælges oftest som standard, da det tydeligt kan argumenteres for, at disse fire eller otte pixels kan have en eller anden form for korrelation. Derimod, hvis alle pixels vælges til at korrelere, da kan det være svært at argumentere for, hvorfor to pixels, som er langt fra hinanden, korrelerer. Et godt alternativ til disse antagelser er ved metoden på figur 6.7, hvor alle pixels, indenfor for en given euklidisk afstand, antages at korrelere.

Der kan være ulemper ved at arbejde med pixels inden for en given radius. Vælges radius eksempelvis for lille, så kan dette eventuelt resultere i en dårlig rekonstruktion af billedet. På figur 6.8 og 6.9 ses resultater af en rekonstruktion med radius valgt til r = 0.0156, hvilket svarer til afstanden mellem to punkter i grafen. Det ses tydeligt, at kvaliteten af billederne er forringet. Det skal dog bemærkes, at der er flere faktorer, som er afgørende for, hvordan kvaliteten på billedet bliver. På figur 6.8 og 6.9 er  $\sigma = 1$  og 20% af de mindste Fourierkoefficienter er fjernet.



And T

**Figur 6.8:** Rekonstrueret billede af lastbil med  $\sigma = 1$ , r = 0.0156 og 20% af mindste Fourierkoefficienter er fjernet.

**Figur 6.9:** Rekonstrueret billede af fly med  $\sigma = 1$ , r = 0.0156 og 20% af mindste Fourierkoefficienter er fjernet.

Rekonstruktionen afhænger i dette speciale af tre forskellige variable. Den første er parameteren  $\sigma$ , som er med til at fastsætte korrelationen mellem to pixels. Den anden er radius, r, som fastsætter antallet af naboer til hver pixel. Den sidste er antallet af fjernede Fourierkoefficienter. For en given ortogonal Fourierbasis komprimeres et grafsignal,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n$ , ved kun at beholde de C < n største Fourierkoefficienter. Uden tab af generalitet antages, for Fourierkoefficienterne  $\hat{t}$ , at

$$|\hat{t}_0| \ge |\hat{t}_1| \ge \dots \ge |\hat{t}_{n-1}|$$

Jævnføres definition 4.5, så er rekonstruktionen af signalet,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{n}$ , givet ved

$$\widetilde{\mathbf{s}} = F^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{t}_0 & \widehat{t}_1 & \dots & \widehat{t}_{C-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top$$

hvor kvaliteten af rekonstruktionen beskrives ved den relative fejl

$$\operatorname{err}(C) = \frac{||\widetilde{\mathbf{s}} - \mathbf{s}||_2}{||\mathbf{s}||_2}$$
(6.2)

Derfor blev den relative fejl, err(C), ved forskellige valg af  $\sigma$ , radius, r, og antal fjernede Fourierkoefficienter undersøgt for begge billeder. Det skal bemærkes, at den relative fejl ikke alene er grundlag for en konklusion om, hvorvidt de valgte parametre er gode eller ej. Dette skyldes, at der kan være visuelle fejl, som ikke fanges af den relative fejl, da den relative fejl midles over hele billedet. Derfor er det vigtigt, at sætte det visuelle resultat op mod den relative fejl. I bilag B ses tabel B.1 og B.2, som henholdsvis beskriver den relative fejl ved rekonstruktionen af billedet af lastbilen og af flyet. Der er blevet arbejdet med seks forskellige værdier for  $\sigma$ , som er givet ved

$$\sigma \in \{0.05, 0.5, 1, 5, 15, 50\}$$

Med disse valgte værdier blev det undersøgt, om  $\sigma$  kunne vælges for højt eller for lavt. Derudover blev det også undersøgt, om der skulle anvendes forskellige værdier for  $\sigma$  alt efter, hvor detaljeret billedet var. Det blev også testet, hvorvidt valget af radius påvirkede kvaliteten af rekonstruktionen. Her blev der set på værdierne givet ved

$$r \in \{0.1, 0.3, 0.8\}$$

Dette svarede cirka til en radius på henholdsvis 7, 20 og 52 punkter, hvor tilfældet med de syv punkter er illustreret på figur 6.10.



**Figur 6.10:** En graf, G = (V, W), med radius r = 0.1, som svarede til en radius på syv punkter.

Grunden til at der blev arbejdet med forskellige størrelser på radius var for, at se, om radius kunne vælges for stor eller for lille. Da det som beskrevet med r = 0.8, svarede til, at et punkt ville være nabo til næsten alle punkter. Dette betyder, at alle pixels ville indeholde information om alle andre

pixels. Det blev også testet for, hvor mange Fourierkoefficienter, der kunne fjernes før kvaliteten af rekonstruktionen blev uacceptabel. Der blev fjernet henholdsvis 10%, 20%, 50% og 90% af Fourierkoefficienterne. Dette svarede til at der blev fjernet henholdsvis 410, 819, 2048 og 3986 ud af 4096 Fourierkoefficienter. Dette blev gjort med henblik på, at se, hvordan kvaliteten af billederne var, hvis der blev fjernet for få eller for mange Fourierkoefficienter.

På tabel B.1 ses de relative fejl ved de forskellige værdier for  $\sigma$ , når billedet med lastbilen blev betragtet. Generelt bemærkes det, at uanset valg af  $\sigma$ , så voksede den relative fejl, når radius blev større. Det vil sige, at jo flere punkter, der blev antaget at korrelere, des større var chancen for, at der blev introduceret fejl. Det kunne eksempelvis være, hvis punkt  $v_1$  og punkt  $v_{52}$  blev betragtet, så var farven i punkt  $v_1$  ikke nødvendigvis afhængig af farven i punkt  $v_{52}$ . Dette medførte muligvis en forstyrrelse i rekonstruktionen af billedet med lastbilen.

Det ønskes at bestemme det mest optimale  $\sigma$  for billedet af lastbilen. Dette blev gjort ved at teste forskellige valg af  $\sigma$  sammen med forskellige størrelser på radius, r. Først blev betydningen af radiusens størrelse undersøgt. Derfor blev  $\sigma = 1$  valgt, således at vægtene i ligning (6.1) var så simple som mulig. Resultaterne kan findes i tabel B.1, hvor det deraf kan konkluderes, at jo større en radius der vælges, des større bliver fejlene. Dette kan skyldes, som nævnt ovenfor, at jo flere punkter der vælges at korrelere, jo mere information skal et punkt forholde sig til. Det ses yderligere, at jo flere Fourierkoefficienter, der fravælges, des værre bliver den relative fejl, hvilket er som forventet. Der blev set nærmere på fjernelsen af 10% af Fourierkoefficienterne. Her blev det bemærket, jævnfør i tabel B.1, at differensen af de relative fejl er 0.0006, når en radius på r = 0.1 og r = 0.3 anvendes, hvilket er en relativ lille forskel. Derimod er differensen større, når resultaterne fra en radius på r = 0.8 sammenlignes med de to andre, da for r = 0.1 er forskellen primært under 0.0021, og for r = 0.3 er forskellen primært under 0.0015. Dette betyder, at det, i dette tilfælde, er underordnet, om en radius på r = 0.1 eller r = 0.3 anvendes, da differensen af de relative fejl er minimale. Generelt bemærkes en vis struktur i tabel B.1. Fjernes mere end 10% af de mindste Fourierkoefficienter, så har valget af radius en større betydning.

Det ønskes nu at undersøge, om  $\sigma$  kunne vælges for stort eller for småt. Betragtes  $\sigma = 0.05$  opnås den største af alle relative fejl givet ved 0.5878. Den opstår ved en radius på r = 0.8 og ved fjernelsen af 90% af Fourierkoefficienterne. Dette skyldes sandsynligvis, at det er de værste antagelser, som samles her. Rekonstruktionen af billedet med disse antagelser kan ses på figur 6.11. Generelt bemærkes det, at for r = 0.1 og r = 0.8 opnås de største relative fejl ved  $\sigma = 0.05$ . Dette betyder, at valget af radius har en betydning for valget af  $\sigma$  eller omvendt. Dog bemærkes det, at for r = 0.3, så er valget af  $\sigma = 0.05$  fornuftigt, da uanset antallet af fjernede Fourierkoefficienter, opnås generelt den mindste relative fejl. Dette må betyde, at værdien af  $\sigma$  eller størrelsen af radius, r, skal antages før den anden kan vælges optimalt.



**Figur 6.11:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen, hvor  $\sigma = 0.05$ , r = 0.8, 90% mindste Fourierkoefficienter fjernet og med en relativ fejl på err = 0.5878. Vi antager, at billedets kvalitet er uacceptabelt.



**Figur 6.12:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen, hvor  $\sigma = 5$ , r = 0.1, 90% mindste Fourierkoefficienter fjernet og med en relativ fejl på err = 0.0872. Det ses, at billedets kvalitet fremstår uskarpt. Vi antager, at billedet er uacceptabelt.

For  $\sigma = 50$  er der generelt ikke stor forskel på størrelsen af de relative fejl end for  $\sigma = 1$ , hvorfor det ikke kan konkluderes, at  $\sigma$  kan vælges for stort. Det kan dog være nødvendigt at teste for  $1 < \sigma < 50$ , da der muligvis kan forekomme betydelige ændringer i de relative fejl herimellem. De relative fejl blev derfor undersøgt for  $\sigma = 5$  og  $\sigma = 15$ . Det viste sig, at de fleste relative fejl, uanset valg af radius og antal fjernede Fourierkoefficienter, blev forværret en smule i forhold til  $\sigma = 1$  og  $\sigma = 50$ . På tabel B.1 kan det dog bemærkes, at for r = 0.1 og r = 0.8 opnås de fleste mindste relative fejl ved  $\sigma = 0.5$ . Dette må betyde, at billedet af lastbilen helst skal benytte små værdier for  $\sigma$ . Dog vil størrelsen på radius stadig have en betydelig effekt på resultatet. Under testningen af valg af  $\sigma$  og radius, synes vi, at hvis de relative fejl var større end 0.0800, så var rekonstruktionen uacceptabel. Dette betyder i dette tilfælde, at størrelsen af de relative fejl har en stor betydning i forhold til rekonstruktionen. På figur 6.12 ses en rekonstruktion af billedet af lastbilen med en relativ fejl på err = 0.0872,  $\sigma = 5$ , r = 0.1 og 90% fjernede Fourierkoefficienter.

På tabel B.2 ses resultaterne for forskellige valg af  $\sigma$  for billedet af flyet. Igen ønskes det at bestemme det mest optimale  $\sigma$  for billedet af flyet. Dette gøres, som ved billedet af lastbilen ved at teste forskellige valg af  $\sigma$  sammen med forskellige størrelser på radius. Først vælges  $\sigma = 1$  for, at bestemme det bedste valg af radius. Ved at vælge  $\sigma = 1$  gøres vægtningen i ligning (6.1) mere simpel. Jævnfør tabel B.2, da kan det igen konkluderes, at jo større en radius, der vælges, des større bliver de relative fejl. Efter at have undersøgt det bedste valg af radius, da undersøges det bedste valg af  $\sigma$ . Hvis 10% af Fourierkoefficienterne fjernes, bemærkes det, at for  $\sigma \neq 0.05$  er differensen på de relative fejl 0.0001 ved en radius på r = 0.1 og r = 0.3. Det vil sige, at der ingen forskel er på, hvilken radius, som anvendes ved disse valg af  $\sigma$ . I dette tilfælde vil radius r = 0.3 være at foretrække, da den giver mulighed for mere information omkring det pågældende punkt. Generelt bemærkes en vis struktur i tabel B.2. Hvis der fjernes mere end 20% af Fourierkoefficienterne, så har valget af radius en større

### betydning.

Ligesom i tilfældet med billedet af lastbilen, hvor det blev undersøgt, om  $\sigma$  kan vælges for stort eller for lille, så vil dette også blive gjort for billedet af flyet. Betragtes  $\sigma = 0.05$  opnås den største af alle relative fejl, som nu er givet ved 0.6191. Den opstår, ligesom ved lastbilen, ved en radius på r = 0.8og hvor der er fjernet 90% af Fourierkoefficienterne. Igen skyldes dette sandsynligvis, at det er de værste antagelser, der samles her. Rekonstruktionen af billedet med disse antagelser kan ses på figur 6.13. Generelt, så for r = 0.1 og r = 0.8, opnås de største relative fejl ved  $\sigma = 0.05$ , hvorfor radius igen har en betydning for valget af  $\sigma$  eller omvendt. Det bemærkes desuden også, at for r = 0.3, så er valget af  $\sigma = 0.05$  igen fornuftigt, og det betyder derfor, at værdien af  $\sigma$  eller størrelsen af radius skal antages før den anden kan vælges optimalt.



**Figur 6.13:** Rekonstruktion af billedet af flyet, hvor  $\sigma = 0.05$ , r = 0.8, 90% mindste Fourierkoefficienter fjernet og med en relativ fejl på err = 0.6191. Vi antager, at billedets kvalitet er uacceptabel.



**Figur 6.14:** Rekonstruktion af billedet af flyet, hvor  $\sigma$  = 50, r = 0.3, 90% mindste Fourierkoefficienter fjernet og med en relativ fejl på over err = 0.0600. Det ses, at billedets kvalitet fremstår uskarpt og derfor antager vi at billedet er uacceptabel.

For  $\sigma = 50$  opstår det samme tilfælde, som der gjorde for billedet af lastbilen. De relative fejl ved  $\sigma = 50$  minder meget om de relative fejl ved  $\sigma = 1$ . Det betyder, at  $1 < \sigma < 50$  skal undersøges. Derfor blev  $\sigma = 15$  og  $\sigma = 5$  undersøgt. For  $\sigma = 5$  er der generelt ikke ændringer at se, og har derfor ikke nogen betydning. Derimod, hvis  $\sigma = 15$  betragtes, så bemærkes det på tabel B.2, at de relative fejl, for r = 0.1 og r = 0.3, forbliver det samme, som ved  $\sigma = 5$ , og for r = 0.8 bliver de relative fejl generelt minimeret. Dette gør, at  $\sigma = 15$  vil være, at foretrække for billedet af flyet. Under testningen af værdier for  $\sigma$  og radius, r, for billedet af flyet, synes vi, at hvis de relative fejl var større end err = 0.0600, så var rekonstruktionen uacceptabel. På figur 6.14 ses rekonstruktionen af billedet med flyet, hvor  $\sigma = 50$ , r = 0.3 og hvor 90% af Fourierkoefficienterne er fjernet.

Ud fra tabel B.1 og B.2 i bilag B kan vi konkludere, at der skal forskellige valg af  $\sigma$  og radius, r, til, alt efter typen af billede. Tabel 6.1 viser de mest optimale parameterværdier for de to billeder.

	Lastbil	Fly
$\sigma$	$1, \ 0.5$	15
Radius, r	0.1	0.3
Fjernede Fk	10%	10%

Tabel 6.1: Tabel over de mest optimale parameter værdier for de to billeder.

### 6.2 Støjreducering

Formålet med dette afsnit er at støjreducere billeder ved hjælp af henholdsvis graf Fouriertransformationen og den spektrale graf wavelet transformation. De to metoder opnår forskellige resultater, og derfor sammelignes resultaterne. I det følgende bearbejdes de samme to billeder som i afsnit 6.1. Derfor betragtes overordnede set kun de parametre, som gav et tilfredsstillende resultat, jævnfør tabel B.1 og B.2.

### 6.2.1 Støjreducering af Lastbil

På figur 6.15 ses billedet af lastbilen. Det bemærkes, at der udover lastbilen på billedet er meget andet information i form af buske. Figur 6.16 viser et støjfyldt billede af lastbilen. Støjen på billedet er Gaussisk fordelt med en middelværdi 0 og varians 0.00079982.



Figur 6.15: Original billede af lastbil.



Figur 6.16: Støjfyldt billede af lastbil.

Et støjfyldt billede kan støjreduceres ved at anvende graf Fouriertransformationen, da det påtænkes, at støjen ligger blandt de mindste Fourierkoefficienter. Figur 6.17 er resultatet efter støjbehandling med graf Fouriertransformationen, hvor der er fjernet 10% af de mindste Fourierkoefficienter. Derudover er parameterværdierne  $\sigma = 0.5$  og r = 0.3 anvendt til at rekonstruere billedet.

Sammenlignes figur 6.15 og 6.17 bemærkes det, at graf Fouriertransformationen betragtes som en utilfredsstillende rekonstruktion. Jævnføres ligning (6.2) opnås en relativ fejl ved err = 0.9941. Dette bekræfter, matematisk set, at rekonstruktionen er utilfredsstillende. Dette betyder, at støjen på figur

6.17 ikke er, at finde blandt de 10% mindste Fourierkoefficienter. Som udgangspunkt haves en formodning om, at støjen er i de små Fourierkoefficienter. Derfor fjernes flere Fourierkoefficienter for eventuelt at kunne opnå et bedre resultat. Hvis 50% af de mindste Fourierkoefficienter fjernes, så opnås figur 6.18. Det bemærkes, at der ikke er en relativ stor forskel på figur 6.17 og 6.18. Dette må igen betyde, at støjen ikke kun er at finde i de lave Fourierkoefficienter. Derfor fjernes endnu flere Fourierkoefficienter i håb om, at støjen også reduceres. På figur 6.19 er 75% af de mindste Fourierkoefficienter fjernet, det bemærkes nu, at støjen ikke påvirkes betydeligt. Derimod påvirkes billedets kvalitet. Dette må betyde, at noget af støjen er en del af de store Fourierkoefficienter, som indeholder vigtig information omkring billedet. Derfor er det ikke muligt med dette billede, at støjreducere effektivt ved hjælp af graf Fouriertransformationen.



**Figur 6.17:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor  $\sigma =$ 0.5, r = 0.3 og der er fjernet 10% af de mindste Fourierkoefficienter.



**Figur 6.18:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3 og der er fjernet 50% af de mindste Fourierkoefficienter.



**Figur 6.19:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3 og der er fjernet 75% af de mindste Fourierkoefficienter.

Matematisk set er der ikke forskel på figurene 6.17, 6.18 og 6.19, da den relative fejl for alle tre billeder, jævnfør ligning (6.2), er bestemt til err = 0.9941. Dette betyder, at det, matematisk set, er underordnet om der fjernes 10% eller 75% af de mindste Fourierkoefficienter. Visuelt er det ikke tilfældet, da hvis der skulle vælges mellem disse tre billeder, så er det kun figur 6.17 og 6.18, som vi bedst kan acceptere, men vi synes alle tre billeder er uacceptable. Det, som størrelsen på den relative fejl er med til at bekræfte, er, at alle tre billeder er uacceptable i forhold til støjreducering.

Det, at graf Fouriertransformationen ikke er effektiv nok til at støjreducere figur 6.16, gør, at den spektrale graf wavelet transformation anvendes på det støjfyldte billede. For at kunne sammenligne graf Fouriertransformationen og den spektrale graf wavelet transformation, da vælges  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3 samtidig med at der fjernes 10% af de mindste wavelet koefficienter. Disse værdier er valgt ud fra tabel 6.1. Derudover arbejdes der, hvis ikke andet er nævnt, med fem skaleringer og et Chebyshev polynomium af orden 25.

Speciale



**Figur 6.20:** Rekonstruktion af skaleringskoefficienterne til billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3.



**Figur 6.23:** Rekonstruktion af tredje skalering,  $s_3$ , af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3 og de 10% mindste wavelet koefficienter er fjernet.



**Figur 6.21:** Rekonstruktion af første skalering,  $s_1$ , af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3.



**Figur 6.24:** Rekonstruktion af fjerde skalering,  $s_4$ , af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3 og de 10% mindste wavelet koefficienter er fjernet.



**Figur 6.22:** Rekonstruktion af anden skalering,  $s_2$ , af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3.



**Figur 6.25:** Rekonstruktion af femte skalering,  $s_5$ , af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.5$ , r = 0.3 og de 10% mindste wavelet koefficienter er fjernet.

På figur 6.20 til 6.25 ses de visuelle resultater af den spektrale graf wavelet transformation. Figur 6.20 viser skaleringskoefficienterne tilhørende denne spektrale graf wavelet transformation. Det ses, at billedet er gråskaleret, og der ses en kasse i midten af billedet, hvor lastbilen burde være. Udover kassen består billedet af gråskalerede cirkler. figur 6.21 og 6.22 er de visuelle resultater af første og anden skalering,  $s_1$  og  $s_2$ , af den spektrale graf wavelet transformation. Disse billeder indeholder primært lavfrekvent homogen information. figur 6.21 og 6.22 er derfor uacceptable. Figur 6.23 viser den tredje skalering,  $s_3$ , af den spektrale graf wavelet transformation. I dette tilfælde er der mere information at hente på billedet. Billedet er stadig repræsenteret på gråskalaen, og indeholder nu både lastbil og natur. Det bemærkes dog, at der er lagt en form for mørk skygge henover billedet. Derfor ønskes det at undersøge de sidste to skaleringer. Figur 6.24 viser den fjerde skalering,  $s_4$ , af den spektrale graf wavelet transformation, og der ses nu et billede af både

lastbil og natur. Sammenlignes dette billede med figur 6.16, så er der en vis overensstemmelse. Dette betyder, at støjreduceringen ikke er som ønsket. Figur 6.25 er resultatet efter den femte skalering, *s*<sub>5</sub>. Billedet er gråskaleret og viser en lastbil. Rundt om lastbilen er en lys skygge repræsenteret, som kan være resultatet af støjreduceringen. Derfor kan dette billede accepteres.

Sammenlignes figur 6.15 og 6.25 bemærkes det, at den spektrale graf wavelet transformation giver en bedre rekonstruktion end på figur 6.17, som var graf Fouriertransformationen. Det vil sige, at når rekonstruktionen laves, så er repræsentationen af billedet af lastbilen mere acceptabel. Om noget er godt eller dårligt afhænger selvfølgelig af, hvad målet er. Hvis målet er, at der skal stå en lastbil tilbage på vejen, så er rekonstruktionen god. Der er ikke noget universelt kriterium for, hvornår noget er godt. Sammenlignes figur 6.24 og figur 6.25, vil det mest naturlige valg falde på figur 6.25. Figur 6.24 kan virke mere forstyrrende i forhold til figur 6.25, fordi det virker til, at der er mere støj. Ses der på figur 6.25, så virker det reduceret og er dermed en forbedring af figur 6.24. Jævnføres ligning (6.2) opnår rekonstruktionen på figur 6.25 en relativ fejl på err = 0.5906. Dette bekræfter, matematisk set, at rekonstruktionen, ved brug af den spektrale graf wavelet transformation, er mere tilstrækkelig for de valgte parametre, end ved rekonstruktionen ved hjælp af graf Fouriertransformationen. Dette betyder dog ikke, at rekonstruktionen ikke kan gøres bedre. Derfor undersøges konsekvensen for forskellige valg af de forskellige parametre, når spektral graf wavelet transformationen anvendes.

Fejlværdien for forskellige valg af  $\sigma$ , radius r og antal fjernede wavelet koefficienter er beskrevet i tabel C.1 i bilag C. Ved udarbejdelsen af denne tabel er der blevet arbejdet med Chebyshev polynomier af orden 25, og der er anvendt fem skaleringer. I tabel C.1 ses, at for  $\sigma = 15$ , r = 0.1 opnås den bedste rekonstruktion, hvis der udelukkende ses på den relative fejl, ved at fjerne 90% af de mindste wavelet koefficienter. Den relative fejl er bestemt ved at anvende ligning (6.2), og i dette tilfælde opnås en relativ fejl ved err = 0.2537. Denne lille relative fejl kan indikere, at støjreduktionen er lykkedes og det derfor er disse parameterværdier, som skal anvendes fremadrettet. Ved at se på resultatet visuelt, jævnfør figur 6.26, da er støjreduktionen ikke acceptabel, da billedets kvalitet er meget forringet. Derfor er det vigtigt, i denne sammenhæng, ikke udelukkende at konkludere ud fra den relative fejl, men derimod sætte den op imod det visuelle resultat. Da det hurtigt blev konkluderet, at disse parameterværdier ikke var gode, da blev der set på det visuelle resultat af, at fjerne flere wavelet koefficienter. Ved kun at fjerne 50% af de mindste wavelet koefficienter, da opnås figur 6.27, som har en relativ fejl på err = 0.2760. Den relative fejl er stadigvæk lille og støjreduktionen er bedre end figur 6.26. Derfor er det vigtigt at have både den relative fejl og et visuelt resultat at kunne sammenligne med for, at kunne konkludere, hvilke parameterværdier, der er de bedste for et givent billede. Ud fra figur 6.26 og 6.27 bemærkes det, at informationen af lastbilen ligger i de 10% - 50%største wavelet koefficienter. Det vil sige, at der højst sandsynligt kan blive fjernet mere end de 50%mindste koefficienter, men under 90% uden at skulle gå på kompromis med billedets kvalitet.



**Figur 6.26:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformationen, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 15$ , r = 0.1, de 10% mindste wavelet koefficienter er fjernet og en relativ fejl givet ved err = 0.2537.



**Figur 6.27:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformationen, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 15$ , r = 0.1, de 50% mindste wavelet koefficienter er fjernet og en relativ fejl givet ved err = 0.2760.



**Figur 6.28:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformationen, hvor polynomiumsordenen er 25, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 0.005$ , r = 0.8, de 10% mindste wavelet koefficienter er fjernet og en relativ fejl givet ved err = 1,3655.

I tabel C.1 er den højeste værdi for den relative fejl givet ved err = 1.3655. Denne værdi blev opnået fire gange. De blev opnået ved parameterværdierne  $\sigma = 0.05$  og r = 0.8, og ved at fjerne henholdsvis 10%, 20%, 50% og 90% af de mindste wavelet koefficienter. På figur 6.28 ses et visuelt eksempel på én af de fire dårligste støjreduceringer. Det skal bemærkes, at alle fire billeder mindede om figur 6.28. Det ses tydeligt, at billedet er uacceptabelt, da der ikke er nogen form for lastbil eller natur på billedet. Af denne grund kan det konkluderes, at parameterværdierne også her kan vælges forkert i forhold til billedet. For billedet med lastbilen er det  $\sigma = 0.05$  og r = 0.8, som er en dårlig kombination uanset antal af fjernede koefficienter. Dog bemærkes det, at for den spektrale graf wavelet transformation opnås de dårligste resultater ikke udelukkende ved  $\sigma = 0.05$ , som det var ved graf Fouriertransformationen. Derimod ses det på tabel C.1, at hvis radius vælges for stort, det vil sige r = 0.8, da opnås oftest de største relative fejl inden for det valgte  $\sigma$ .

Ud fra resultaterne i tabel C.1 antages derfor, at de bedste parameterværdier for billedet af lastbilen er  $\sigma = 15$ , r = 0.1 og med 50% fjernede wavelet koefficienter. Fastholdes disse værdier, da kan det undersøges, hvilke konsekvenser det medfører, at ændre antallet af skaleringer og størrelsen på Chebyshev polynomiet. Resultaterne i tabel C.1 blev opnået ved fem skaleringer og Chebyshev polynomier med orden 25. Derfor arbejdes nu med henholdsvis 2, 5, 25 og 100 skaleringer samt Chebyshev polynomier af orden 2, 5, 25 og 100. På tabel 6.2 ses størrelsen af de relative fejl ved kombinationen af forskellige antal skaleringer og Chebyshev polynomier. Jævnføres tabel 6.2 bemærkes det, at den mindste relative fejl, err = 0.2760, blev opnået ved 5 skaleringer og et Chebyshev polynomium af orden 25. Det er derfor oplagt, at undersøge, hvor stor en betydning, ændringen af skaleringer har i forhold til den relative fejl. På tabel 6.2 bemærkes det, at fastholdes polynomiumsordenen til 25, da forværres den relative fejl betydeligt ved at gå ned i antallet af skaleringer. Der sker også i lille ændring ved at gå op i antallet af skaleringer.

Lastbil									
Skalering Orden	2 5		25	100					
2	0.3449	0.3326	0.3318	0.3318					
5	0.3870	0.3301	0.3301	0.3299					
25	0.4148	0.2760	0.3305	0.3303					
100	0.4189	0.3268	0.3305	0.3303					

**Tabel 6.2:** Den relative fejl for billedet af lastbilen med  $\sigma = 15$ , r = 0.1 og med 50% af mindste wavelet koefficienter fjernet, hvor der ændres på antallet af skaleringer og ordenen af Chebyshev polynomiet.



**Figur 6.29:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 100, antallet af skaleringer er 2,  $\sigma = 15$ , r = 0.1, der er fjernet 50% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.4189.



**Figur 6.30:** Rekonstruktion af billedet af lastbilen ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 100, antallet af skaleringer er 5,  $\sigma = 15$ , r = 0.1, der er fjernet 50% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.3268.

Teoretisk set tænkes det, at des flere antal skaleringer og højere polynomiumsorden, der betragtes, jo bedre en approksimation til det pågældende resultat vil opnås. En konsekvens ved store polynomiumsordner er, at det beregningsmæssigt bliver tungere. Derfor er det vigtigt at vurdere kvaliteten af resultatet i forhold til den beregningsmæssige tyngde, som algoritmen skal igennem. Derfor fastholdes antallet af skaleringer. Det bemærkes i tabel 6.2, at den relative fejl ændrer sig ved både lavere og højere ordner af Chebyshev polynomiet. Det skal dog bemærkes, at ændringen af den relative fejl er forholdsvis ens uanset valg af orden. Derfor kan det i dette tilfælde konkluderes, at ændringen af antal skaleringer og orden af Chebyshev polynomiet er underordnet. Selvfølgelig vil der være enkelte kombinationer, som vil påvirke den relative fejl mere end andre. Figur 6.29 viser det visuelle resultat ved 5 skaleringer og en polynomiumsorden på 100. Her blev en relativ fejl på err = 0.4189 opnået. Sammenlignes dette billede med figur 6.30, som er det visuelle resultat ved 5 skaleringer, en polynomiumsorden på 100 og en relativ fejl på err = 0.3268, bemærkes det, at der ikke er en væsentlig forskel visuelt. Differensen på de relative fejl er givet ved 0.0921, som matematisk set, indikerer, at der er forskel på de to resultater, men visuelt er det ikke til at se.

### 6.2.2 Støjreducering af Fly

På figur 6.31 ses billedet af et fly på en landingsbane. Det bemærkes, at der, udover flyet på billedet, er meget lidt information på billedet. Figur 6.32 viser et støjfyldt billede af flyet, hvor støjen er Gaussisk fordelt med middelværdi 0 og varians 0.0013. På figur 6.31 bemærkes det, at efter billedet er blevet nedskaleret, så er det dannet af rette linjer, som er sat sammen. Det vil sige, at det består af en relativ homogen struktur. Betragtes figur 6.31, så vil et godt bud være, at den lavfrekvente del vil tage sig rigtig godt af det homogene billede. Sammenlignes billedet af lastbilen, jævnfør figur 6.15, med billedet af flyet, jævnfør figur 6.31, så er der mere information repræsenteret på billedet af lastbilen. Dette skyldes, at der er mange buske i baggrunden, som går ind og forstyrrer homogeniteten. Det er altså naturligt, at figur 6.15 er mere udfordrende at støjreducere på, end figur 6.31 muligvis vil være. Det tænkes derfor, at det er en fordel, at figur 6.31 er et relativt rent billede.



**Figur 6.31:** Original billede af flyet.



Figur 6.32: Støjfyldt billede af flyet.

Som ved støjreduceringen af billedet ved lastbilen anvendes først graf Fouriertransformationen på det støjfyldte billede, jævnfør figur 6.32. Sammenlignes figur 6.31 og 6.33 bemærkes det, at graf Fouriertransformationen resulterer i en utilfredsstillende rekonstruktion. Jævnføres ligning (6.2) opnås en relativ fejl ved err = 0.9961. Dette bekræfter, matematisk set, at rekonstruktionen er utilfredsstillende. Dette viser, at støjen på figur 6.33 ikke er blandt de 10% mindste Fourierkoefficienter. Derfor fjernes flere Fourierkoefficienter med det håb om at opnå et bedre resultat. Hvis der fjernes 70% af de mindste Fourierkoefficienter, så opnås figur 6.34. Det bemærkes, at der ikke er stor forskel på figur 6.33 og 6.34. Dette må igen betyde, at støjen ikke kun er at finde i de 70% mindste Fourierkoefficienter. Fjernes i stedet 90%, jævnfør figur 6.35, bemærkes det, at kvaliteten af billedet bliver uacceptabelt.

Det vil sige, at støjen på billedet må være at finde i de store Fourierkoefficienter, som også indeholder vigtig information omkring billedet.



Figur 6.33: Rekonstruktion at billedet med flyet ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor  $\sigma = 15$ , r = 0.3, err = 0.9961 og der er fjernet 10% af de mindste Fourierkoefficienter.



**Figur 6.34:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor  $\sigma = 15$ , r = 0.3, err = 0.9961 og der er fjernet 70% af de mindste Fourierkoefficienter.



**Figur 6.35:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor  $\sigma = 15$ , r = 0.3, err = 0.9961 og der er fjernet 90% af de mindste Fourierkoefficienter.

Matematisk set er der ikke forskel på figur 6.33, 6.34 og 6.35, idet den relative fejl for alle tre billeder er udregnet til err = 0.9961. Det betyder, at der, matematisk set, ikke er forskel på, hvorvidt der fjernes 10% eller 90% af de mindste Fourierkoefficienter. Rent visuelt, så er der en mere betydelig forskel på figurerne, idet figur 6.35 er mere grumset end figur 6.33. De tre billeder har samme relative fejl. Dette kan skyldes, at den relative fejl ikke virker lokaliseret, og derfor kan detaljer gå tabt.

Selv i dette tilfælde, hvor der arbejdes med et relativt simpelt billede, så viser det sig, at graf Fouriertransformationen stadig ikke er tilstrækkelig til at støjreducere et støjfyldt billede. Derfor anvendes igen den spektrale graf wavelet transformation på billedet. For at kunne sammenligne graf Fouriertransformationen og den spektrale graf wavelet transformation, da vælges  $\sigma = 15$ , r = 0.3 samtidig med, at der kun fjernes 10% af de mindste wavelet koefficienter. Derudover arbejdes der i dette tilfælde med fem skaleringer og et Chebyshev polynomium af orden 25.

På figur 6.36 til 6.41 ses det visuelle resultat af den spektrale graf wavelet transformation af billedet af flyet, jævnfør figur 6.32. Figur 6.36 viser skaleringskoefficienterne tilhørende denne spektrale graf wavelet transformation. Det ses, at billedet er gråskaleret, og at det optegner flyet og de sorte streger fra landingsbanen. Derudover har den forskellige cirkler rundt om centeret af billedet. Figurene 6.37 og 6.38 er de visuelle resultater af første og anden skalering,  $s_1$  og  $s_2$ , hvor farven på disse to billeder er gråskaleret. Det vil sige, at der ikke er ret meget information på billederne. Der kan dog fornemmes en vis optegning af landingsbanen på begge billeder, men flyet er ikke repræsenteret. En mulig årsag til at flyet er væk, kan skyldes, at information om flyet ikke er i de lavfrekvente dele, som skaleringerne,  $s_1$  og  $s_2$ , illustrerer. figur 6.37 og 6.38 er derfor uacceptable resultater. Figur 6.39 viser den tredje skalering,  $s_3$ , af den spektrale graf wavelet transformation. I dette tilfælde er der meget mere information at hente på billedet. Billedet er stadig repræsenteret i gråskalaen, men nu

er både landingsbanen og et utydelig fly repræsenteret. Dette billede er meget lyst i midten, hvilket medfører, at flyets detaljer også lysnes. Dette billede indeholder stadigvæk støj, og derfor undersøges de resterende to skaleringer,  $s_4$  og  $s_5$ , også. Figur 6.40 har en udmærket repræsentation af flyet, og billedet er også i gråskalaen. Dog er der næsten ikke blevet støjreduceret. Sammenlignes figur 6.32 med figur 6.40, så minder de en del om hinanden. Figur 6.41 repræsenterer flyet flot, og det bemærkes, at landingsbanen er blevet udglattet i en lys grålig farve. Dette betyder, at der er sket en lille støjreducering her, hvorfor dette billede vil være acceptabelt.



**Figur 6.36:** Rekonstruktion af skaleringskoefficienterne af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 15$ , r = 0.3.



**Figur 6.39:** Rekonstruktion af tredje skalering,  $s_3$ , af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 15$ , r = 0.3 og der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter.



**Figur 6.37:** Rekonstruktion af første skalering,  $s_1$ , af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 15$ , r = 0.3.



**Figur 6.40:** Rekonstruktion af fjerde skalering,  $s_4$ , af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 15$ , r = 0.3 og der er fjernet 10% af mindste wavelet koefficienter.



**Figur 6.38:** Rekonstruktion af anden skalering,  $s_2$ , af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 15$ , r = 0.3.



**Figur 6.41:** Rekonstruktion af femte skalering,  $s_5$ , af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 15$ , r = 0.3 og der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter.

Jævnføres ligning (6.2) opnår figur 6.41, en relativ fejl ved err = 0.1514. Dette bekræfter, matematisk set, at rekonstruktionen, ved den spektrale wavelet transformation, er mere acceptabel end ved rekonstruktionen ved hjælp af graf Fouriertransformationen, hvor den relative fejl var err = 0.9961. Sammenlignes figur 6.33 med figur 6.41 bekræftes yderligere, at wavelet transformationen er, at foretrække til støjreducering af billedet af flyet. Figur 6.41 er som beskrevet tidligere opnået ved paramerterværdierne  $\sigma = 15$ , r = 0.3, hvor der samtidig blev fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter. Det er også blevet testet, hvor stor en betydning de forskellige valg af  $\sigma$ , radius r og antal fjernede koefficienter havde for det endelige resultat. I tabel C.2 ses de forskellige resultater for rekonstruktionen af billedet af flyet ved femte skalering. Disse rekonstruktioner er alle opnået ved Chebyshev polynomier af orden 25 og fem skaleringer. Jævnføres tabel C.2 bemærkes det, at for  $\sigma = 5$ , r = 0.8 og 10% af de mindste fjernede wavelet koefficienter opnås den mindste relative fejl. Den relative fejl err = 0.1149 er lille i forhold til resultatet ved graf Fouriertransformationen, som opnåede en relativ fejl på err = 0.9961. På figur 6.42 ses det visuelle resultat ved disse parameterværdier. Her bemærkes det, at støjreduktionen ikke har været effektiv. Dette kan betyde, at støjen ikke er, at finde i 10% mindste wavelet koefficienter, der er blevet fjernet. Derfor undersøges det, om det vil blive bedre, hvis der fjernes flere wavelet koefficienter.



**Figur 6.42:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformationen, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 5$ , r = 0.8, der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1149.



**Figur 6.43:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 5$ , r = 0.8, der er fjernet 50% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1247.



**Figur 6.44:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 5, r = 0.8$ , der er fjernet 90% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1466.

På figur 6.43 ses det visuelle resultat ved fjernelse af de 50% mindste wavelet koefficienter for  $\sigma = 5$  og r = 0.8. Det konkluderes her, at den spektrale graf wavelet transformation nu begynder at støjreducere. Det ses også at den relative fejl givet ved err = 0.1247 stadig er forholdsvis lille, men støjreduceringen er ikke tilstrækkelig. Figur 6.44 er resultatet efter fjernelsen af de 90% mindste wavelet koefficienter. Her er den relative fejl, err = 0.1466, stadigvæk lille, men denne relative fejl skal vurderes op imod det visuelle resultat. Billedet er uacceptabelt, da flyet nu er forsvundet. Dette må betyde, at al information omkring flyet ligger i de 10 - 50% største wavelet koefficienter. Ud fra disse tre billeder kan det derfor konkluderes, at selv om den relative fejl er forholdsvis lille for specifikke parametre, så betyder det ikke nødvendigvis, at resultatet bliver som ønsket. Derfor er der blevet set på nogle andre valg af  $\sigma$ , radius samt antal fjernede koefficienter.



**Figur 6.45:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 5$ , r = 0.3, der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1420.



**Figur 6.46:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 25,  $\sigma = 5$ , r = 0.3, der er fjernet 90% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1471.

Figur 6.45 viser et acceptabelt resultat. Billedet har en tydelig aftegning af flyet samtidig med at landingsbanen er forholdsvis glat. Dette billede er rekonstrueret ved  $\sigma = 5$ , r = 0.3, hvor der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter. Denne rekonstruktion har en relativ fejl på err = 0.1420, som er en forholdsvis lav relativ fejl, men ikke den mindste relative fejl, jævnfør tabel C.2. Men det visuelle resultat på figur 6.45 er bedre end på figur 6.42. Den eneste forskel på rekonstruktionen af de to billeder er valget radius, som nu er valgt til r = 0.3, hvor den før var valgt til r = 0.8. Det konkluderes derfor, at en stor radius vil resultere i en lille relativ fejl, mens en mindre radius derimod giver et bedre visuelt resultat. Det blev også undersøgt, om det var muligt at gøre støjreduceringen endnu bedre. Hvis der blev fjernet 20% og 50% af de mindste wavelet koefficienter var der ikke en betydelig forskel rent visuelt. Derimod, hvis 90% af de mindste wavelet koefficienter blev fjernet, så blev kvaliteten af billedet påvirket. Dette ses på figur 6.46. På figur 6.46 er landingsbanen forholdsvist glat og ensfarvet, men har den konsekvens, at den midterste del af flyet forsvinder.

Ud fra tabel C.2 samt de visuelle resultater antages derfor nu, at de bedste parameterværdier for rekonstruktionen af billedet af flyet er  $\sigma = 5$ , r = 0.3, hvor der samtidig fjernes 10% af de mindste wavelet koefficienter. Fastholdes disse parametre, undersøges det nu, hvilken påvirkning, som ændringen af antallet af skaleringer og størrelsen på ordenen af Chebyshev polynomiet har. I tabel 6.3 ses de forskellige relative fejl for de forskellige valg af orden og antal skaleringer. Overordnet set, så er størrelsen af de relative fejl ens. Det bemærkes, at der er to relative fejl, som afviger mere end de resterende. Den mindste relative fejl blev opnået ved to skaleringer og et Chebyshev polynomium af orden 2. Her blev en relativ fejl på err = 0.1336 opnået. Figur 6.47 er det visuelle resultat. Det bemærkes, at denne rekonstruktion ligner figur 6.45. Ved rekonstruktionen af billedet med fem skaleringer og et Chebyshev polynomium af orden 2 blev den største relative fejl, err = 0.1433, opnået.

Rekonstruktionen med disse egenskaber ses på figur 6.48. Det bemærkes, at figur 6.48 minder en del om figur 6.45. Dette betyder, at valget af orden og antal skaleringer ikke ændrer resultat betydeligt. Alle relative fejl i tabel 6.3 ligger også inden for den mindste og største relative fejl, som blev fundet i tabel C.2 i bilag C.

Fly								
Skalering Orden	2	5	25	100				
2	0.1336	0.1433	0.1417	0.1418				
5	0.1417	0.1420	0.1417	0.1420				
25	0.1419	0.1420	0.1419	0.1419				
100	0.1419	0.1420	0.1419	0.1419				

**Tabel 6.3:** Størrelsen af relative fejl for billedet af flyet med  $\sigma = 5$ , r = 0.3 og med de 10% mindste wavelet koefficienter fjernet, hvor der ændres på antallet af skaleringer og ordenen af Chebyshev polynomiet.



**Figur 6.47:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 2, antal skaleringer er 2,  $\sigma = 5$ , r = 0.3, der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1336.



**Figur 6.48:** Rekonstruktion af billedet af flyet ved hjælp af den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsordenen er 2, antal skaleringer er 5,  $\sigma = 5$ , r = 0.3, der er fjernet 10% af de mindste wavelet koefficienter og en relativ fejl givet ved err = 0.1433.

# 7 | Konklusion

Specialets overordnede problemformulering var

Hvad er det bagvedliggende teori for signalbehandling på arbitrære grafer, og eksisterer der andre signalbehandlingsmetoder, som fungerer på arbitrære grafer?

Formålet med specialet var at undersøge visse resultater indenfor signalbehandling på grafer. For at kunne udføre signalbehandling på grafer var det nødvendigt at tilegne en viden inden for grafteori og spektral grafteori. Derudover skulle der tages forbehold for, at nogle matricer ikke var diagonaliserbare. Efterfølgende blev to klassiske signalbehandlingsmetoder omformuleret til at virke på grafsignaler for til slut at teste den beskrevne viden på to forskellige typer af billeder.

En arbitrær graf er givet ved G = (V, E), hvor V er punktmængden, som består af |V| = n punkter,  $v_i$ , og E er kantmængden, som består af |E| = m kanter,  $e = v_i v_j$ . Denne graf beskrives spektralt ved hjælp af en nabomatrix,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , og en valensmatrix,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Nabomatricen, A, er en matrix, som beskriver kanterne til en graf. Hvis en kant mellem punkterne  $v_i$  og  $v_j$  er repræsenteret, så er  $a_{ij} = 1$ , og er ingen kant mellem to punkter i grafen repræsenteret, så vil  $a_{ij} = 0$ . Valensmatricen, D, er en diagonal matrix, som beskriver valensen af hvert punkt i grafen. Bestemmes differensen mellem disse to matricer, så vil Laplace matricen, L = D - A, opnås. Laplace matricen, L, består af informationer fra både nabomatricen og valensmatricen. I stedet for at arbejde med nabomatricen, så arbejdes der ofte med en vægtet matrix, W, som har samme struktur som nabomatricen. Dog, hvis en kant mellem to punkter i grafen.

For at kunne signalbehandle grafer skulle der arbejdes med grafer fra et spektralt perspektiv. Ulempen ved at arbejde med matricer er, at det beregningsmæssigt kan være tungt. Derfor er det en fordel at kunne dekomponere matricerne. Men hvis den algebraiske og geometriske multiplicitet ikke er ens, så vil en matrix ikke kunne diagonaliseres. Dette blev løst ved at anvende Jordan dekompositionen. Efter tilegnelsen af relevant grafteori blev grafsignaler beskrevet. Her blev det først forklaret, hvad der menes med et grafsignal, **s**. Et grafsignal minder om et klassisk signal. Forskellen er, at et grafsignal har en signalværdi,  $s_i$ , repræsenteret ved punktet  $v_i$ . Som ved almindelig signalbehandling kan et grafsignal filtreres og forskydes. En forskydning sker ved at multiplicere nabomatricen på grafsignalet.

I dette speciale blev der arbejdet med to forskellige transformationer. Der blev arbejdet med graf Fouriertransformationen og spektral graf wavelet transformationen. De minder begge meget om de klassiske udgaver. Forskellen på den diskrete Fouriertransformation og graf Fouriertransformationen er, at den den diskrete Fouriertransformation multiplicerer en trigonometrisk matrix med signalet, hvorimod ved graf Fouriertransformationen multipliceres signalet med en matrix bestående af grafens egenvektoerer. Det er her, at Jordan kæderne indtræder, hvis den algebraiske og geometriske multiplicitet ikke er ens. I sådan et tilfælde vil Jordan kæden så benyttes til grafen i stedet for de originale egenvektorer. Forskellen på den klassiske og den spektrale graf wavelet transformation er, at den klassiske wavelet transformation multiplicerer et signals Fouriertransformation med et båndpasfilter, hvorimod den spektrale graf wavelet transformation multiplicerer med graf Fouriertransformationen.

Hele formålet med dette speciale var at undersøge, om det var muligt at komprimere gråskala billeder der ved hjælp af graf Fouriertransformationen. Dette blev gjort ved at beskrive to gråskala billeder ved hjælp af en gittergraf. De to billeder, der blev anvendt, var et forholdsvist detaljeret billede af en lastbil med en masse buske i baggrunden og et relativt simpelt billede af et fly på en landingsbane. Måden, hvorpå Fouriertransformationens evne til at komprimere gråskala billeder, blev testet af flere omgange. Dette skyldes, at der var tre parametre, som kunne påvirke resultatet, herunder korrelationen mellem to punkter, antal naboer til et punkt i grafen og antal fjernede Fourierkoefficienter. Det viste sig, at for billedet af lastbilen, var billedekomprimeringen bedst, når parametreværdierne  $\sigma \in \{0.5, 1, 5, 15, 50\}$  med en radius r = 0.1 anvendes, og der kun blev fjernet 10% af Fourierkoefficienterne. For billedet af flyet var de bedste parametreværdier givet ved  $\sigma \in \{0.05, 0.5, 1, 5, 15, 50\}$  med en radius på  $r \in \{0.1, 0.3\}$ , og der kun blev fjernet 10% af Fourierkoefficienterne.

Derudover blev det undersøgt, hvilken en af de to metoder, som var bedst til at støjreducere de to billeder, hvis der blev tilføjet støj. Det viste sig, at uanset valg af parametre og billede, så var graf Fouriertransformationen uacceptabel, da den resulterede i det støjfyldte billede. Derefter blev spektral graf wavelet transformationen testet. Der kom to vidt forskellige resultater ud alt efter hvilket billede, der blev anvendt. For billedet med lastbilen var resultatet ved spektral graf wavelet transformationen også uacceptabelt, mens for billedet af flyet blev der støjreduceret, således at den resulterede i et billede med et fly og en glat baggrund.

Dette betyder, at der i dette speciale kan konkluderes, at den spektrale graf wavelet transformation er, at foretrække fremfor graf Fouriertransformationen, hvis der, vel at mærke, skal støjreduceres på de to billeder, der blev arbejdet med. Dette resultat kan ikke generaliseres, da der eventuelt vil eksistere andre gråskala billeder, hvor graf Fouriertransformationen resulterer i en acceptabel støjreduktion. En anden mulighed kan være, at hvis et andet valg af parameterværdier blev anvendt, end hvad der blev arbejdet med i dette speciale, så vil dette kunne resultere i et bedre eller værre resultat, og derfor kan der være mange forskellige resultater ved at anvende de to metoder.

## Litteratur

### **Bøger:**

- [1] G. Chartrand, L. Lesniak & P. Zhang: *Graphs & Digraphs*. CRC Press, 6. edition, 2016.
- [2] A. E. Brouwer & W. P. Haemers: *Spectra of Graphs*. Springer, 1. edition, 2010.
- [3] L. E. Spence, A.J. Insel & S.H. Friedberg: *Elementary Linear Algebra* 2015. Pearson Education, 2. edition, 2008.
- [4] L. Stanković & E. Sejdić: *Vertex-Frequency Analysis of Graph Signals*. Springer, 1. edition, 2019.
- [5] P. Lancaster & M.Tismenetsky *The Theory of Matrices*. USA: Academic, 2. edition New York, 1985.
- [6] M. Vetterli, J. Kovačević & V. K. Goyal: *Foundations of Signal Processing*. Cambridge University Press, 1 edition, 20. Oktober, 2014.
- [7] I. Gohberg, P. Lancaster & L. Rodman: *Invariant subspaces of matrices with applications*. SIAM, 2006
- [8] J. R. Shewchuk: *An introduction to the conjugate gradient method without agonizing pain.* tech. rep., Pittsburg, PA, USA, 1994.
- [9] O. Christensen: *Frames and Bases*. Birkhäuser, Boston, 2008.

#### Artikler:

- [10] A. Sandryhaila & J. M. F. Moura: Discrete Signal Processing on Graphs. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 61, No. 7, April 1 2013. https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=6409473
- [11] D. K. Hammond, P. Vandergheynst & R. Gribonval: Wavelets on graphs via spectral graph theory, Elsevier, 2010. https://elsevier.com/locate/acha
- [12] C. Valens: A Really Friendly Guide To Wavelets, 1999. https://www.cs.unm.edu/~williams/cs530/?fbclid=IwAR1vI0z58n\_ FwcvnbbVy-4UZ6dxE5R2PMEQvfb\_tfUN91UqfpkcGwtS9gZA

- [13] S. G. Mallat: A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation.IEEE Transactions on Pattern Analysis and machine Intelligence, vol. 11, s. 674-693, juli 1989.
- [14] A. Sandryhaila, & J. M. F. Moura: Discrete Signal Processing on Graphs: Graph Fourier Transform. Electrical and Computer Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213 https://users.ece.cmu.edu/~asandryh/papers/icassp13a.pdf

### Hjemmesider:

[15] The USC-SIPI Image Database. Sidst besøgt: 7. april 2020. http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc

# A | Illustration af Kode

I dette bilag illustreres MATLAB filen *Billede.m.* For at kunne køre denne fil i MATLAB skal GSP og SGWT toolbox' installeres, jævnfør https://epfl-lts2.github.io/gspbox-html/.

Denne fil bruger også elementer fra MATLAB filen *Billedeimplementering.m*, da det er i denne fil, hvor billederne implementeres og den tilhørende graf konstrueres ud fra de valgte parametre. Ønskes det at anvende den spektrale graf wavelet transformation på billederne, da skal MATLAB filen *stojreducering.m* anvendes.

```
%% Før start installeres GSP og SGWT toolbox', som kan findes her: https
1
     ://epfl-lts2.github.io/gspbox-html/
  % gsp_start
2
  % gsp_install
3
  % gsp_make
4
  % istaller en unlocbox, som virker
5
  % init unlocbox
6
  %% Fourier basis og Fouriertransformation
7
  fprintf('Udregner Fourier koefficienter. \n');
8
  G = gsp_compute_fourier_basis(G); %Producerer fourierbasis
9
  shat = gsp_gft(G,s1); %Fourierkoefficienter af signal
10
11
  %% Norm af Fourierkoefficienter
12
  fprintf('Tjekker om Fourier transformationen er energibevarende. \n');
13
  norm(s1,2)
14
  norm(shat,2)
15
16
  %% Sortering af koefficienter
17
  fprintf('Sorterer Fourier koefficienterne efter størrelse. \n');
18
  [~, idx_sort] = sort(abs(shat), 'descend'); %indeks til at sortere
19
      koefficienter, aftagende
  shat_sort = shat(idx_sort); %Sorterer koefficienter
20
21
  %
22
  fprintf('Stemplot af Fourier koefficienter. \n');
23
  x = 1:n;
24
  figure()
25
  stem(x,abs(shat_sort))
26
27
  title('Plot af Fourier koefficienterne')
28
  xlabel('Tid')
29
  ylabel('Signalværdi')
30
```

```
legend({ 'Fourier koefficienter '}, 'Location', 'northwest')
31
32
33
  %% Treshold
34
  fprintf('Fjerner koefficienter. \n');
35
  shat_sort((round(n*(1-percent))):end) = 0; %fjerner koefficienter
36
37
  %%
38
  fprintf('Genskaber rækkefølge på Fourier koefficienter. \n');
39
  [~, idx_rev] = sort(idx_sort); %indeks for at sortere koefficienter
40
     tilbage
  shat1 = shat_sort(idx_rev); %Original rækkefølge på koefficienter
41
42
  %% Rekonstruktion af signalet
43
  fprintf('Invers transformerer Fourier koefficienterne. \n');
44
  stilde = gsp_igft(G, shat1); %Invers fouriertransform
45
46
  norm1 = norm(double(s4)-stilde)/norm(double(s4)) %Tjekker størrelsen på
47
      fejlen
48
  %%
49
  stildematrix = reshape(stilde,n1,m1); % Endre signalet til matrix
50
51
  figure
52
  subplot(1, 2, 1), imshow(s), title('Originalt billede')
53
```

# **B** | Tabeller til Afsnit 6.1

I dette bilag forefindes tabeller over den relative fejl ved billedekomprimering ved graf Fouriertransformationen fra kapitel 6.

Lastbil								
Koefficienter	Radius	$\sigma = 50$	$\sigma = 15$	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	
	0.8	0.0039	0.0042	0.0040	0.0039	0.0037	0.0052	
-10%	0.3	0.0024	0.0025	0.0025	0.0024	0.0025	0.0019	
	0.1	0.0019	0.0019	0.0018	0.0018	0.0018	0.0023	
	0.8	0.0110	0.0115	0.00110	0.0109	0.0106	0.0163	
-20%	0.3	0.0070	0.0072	0.0071	0.0071	0.0073	0.0053	
	0.1	0.0053	0.0053	0.0052	0.0052	0.0053	0.0067	
	0.8	0.0457	0.0466	0.0461	0.0457	0.0445	0.0199	
-50%	0.3	0.317	0.0320	0.0322	0.0320	0.0313	0.0242	
	0.1	0.0238	0.0239	0.0237	0.0239	0.0237	0.0303	
-90%	0.8	0.1409	0.1405	0.1418	0.1379	0.1343	0.5878	
	0.3	0.1100	0.1102	0.1104	0.1086	0.1079	0.1041	
	0.1	0.0872	0.0873	0.0872	0.0880	0.0876	0.1116	

**Tabel B.1:** Størrelsen af den relative fejl for billedekomprimering af billedet med lastbilen ved graf Fouriertransformationen. Den største og de mindste fejl er markeret med grå.

Fly								
Koefficienter	Radius	$\sigma = 50$	$\sigma = 15$	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma=0.05$	
	0.8	0.0017	0.0015	0.0017	0.0017	0.0020	0.0037	
-10%	0.3	0.0014	0.0013	0.0013	0.0014	0.0013	0.0014	
	0.1	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0018	
-20%	0.8	0.0052	0.0046	0.0052	0.0052	0.0059	0.0141	
	0.3	0.0039	0.0039	0.0039	0.0041	0.0040	0.0041	
	0.1	0.0039	0.0040	0.0040	0.0039	0.0041	0.0051	
	0.8	0.0264	0.0241	0.0278	0.0275	0.299	0.1274	
-50%	0.3	0.0185	0.0187	0.0184	0.0192	0.0190	0.0204	
	0.1	0.0180	0.0181	0.0179	0.0178	0.0178	0.0227	
-90%	0.8	0.1083	0.1059	0.1129	0.1061	0.1184	0.6191	
	0.3	0.0755	0.0766	0.765	0.0765	0.0758	0.0950	
	0.1	0.0652	0.0652	0.0650	0.0647	0.0647	0.0795	

**Tabel B.2:** Størrelsen af fejl for billedekomprimeringen af billedet med flyet ved graf Fouriertransformationen. Den største og de mindste fejl er markeret med grå.

## C | Tabeller til Afsnit 6.2

I dette bilag forefindes tabeller over den relative fejl ved stojreducering ved den spektrale graf wavelet transformation fra kapitel 6.

Lastbil								
Koefficienter	Radius	$\sigma = 50$	$\sigma = 15$	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.05$	
	0.8	0.6517	0.6248	0.5700	0.3925	0.3601	1.3655	
-10%	0.3	0.5370	0.5930	0.5722	0.6472	0.6251	0.3745	
	0.1	0.3685	0.2758	0.4121	0.4252	0.3290	0.3450	
	0.8	0.6511	0.6240	0.5690	0.3929	0.3599	1.3655	
-20%	0.3	0.5368	0.5929	0.5724	0.6471	0.6254	0.3745	
	0.1	0.3686	0.2759	0.4122	0.4244	0.3291	0.3444	
	0.8	0.6381	0.6150	0.5591	0.3870	0.3609	1.3655	
-50%	0.3	0.5317	0.5892	0.5704	0.6453	0.6236	0.3741	
	0.1	0.3675	0.2760	0.4116	0.4231	0.3281	0.3430	
-90%	0.8	0.6056	0.5792	0.5278	0.3482	0.3188	1.3655	
	0.3	0.4934	0.5434	0.5388	0.5886	0.5700	0.3881	
	0.1	0.3442	0.2537	0.3856	0.3831	0.2988	0.3329	

**Tabel C.1:** Størrelsen af den relative fejl for støjreducering af billedet med lastbilen ved den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsorden er 25 og 5 skaleringer er anvendt. De største og den mindste fejl er markeret med grå.

Fly								
Koefficienter	Radius	$\sigma = 50$	$\sigma = 15$	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma=0.05$	
	0.8	0.1252	0.1217	0.1149	0.1991	0.4306	0.3477	
-10%	0.3	0.1446	0.1543	0.1420	0.1547	0.1422	0.3322	
	0.1	0.2109	0.2184	0.2164	0.2170	0.2118	0.3439	
-20%	0.8	0.1255	0.1222	0.1154	0.1998	0.4307	0.3477	
	0.3	0.1447	0.1544	0.1589	0.1547	0.1422	0.3323	
	0.1	0.2108	0.2185	0.2164	0.2169	0.2117	0.3439	
-50%	0.8	0.1348	0.1314	0.1247	0.2121	0.4322	0.3477	
	0.3	0.1453	0.1554	0.1584	0.1550	0.1429	0.3322	
	0.1	0.2114	0.2183	0.2158	0.2168	0.2122	0.3430	
-90%	0.8	0.1566	0.1520	0.1466	0.2376	0.4660	0.3477	
	0.3	0.1448	0.1484	0.1471	0.1484	0.1438	0.3226	
	0.1	0.2152	0.2225	0.2202	0.2247	0.2155	0.3547	

**Tabel C.2:** Størrelsen af fejl ved støjreducering af billedet med flyet ved den spektrale graf wavelet transformation, hvor polynomiumsorden er 25 og der er anvendt 5 skaleringer. De største og den mindste fejl er markeret med grå.

