Aalborg Universitet
Institut for Læring og Filosofi

Tiende semesters projekt - Speciale

Vejen til differentiabilitet

Analyse af elevers begrebsdannelse i funktionsteori gennem skriftlige elevproduktioner på gymnasialt mellemniveau

Kenneth Madsen
studienummer: 20092760

vejledning af
Ole Ravn

Antal anslag: 179.394
Tilladt antal anslag: 180.000

2. juni 2020

Abstract

Even more students fail their written exam and the demands for strengthen research in mathematics education in Denmark are increasing. Especially the written dimension of mathematics has been neglected and escaped the researchers' field of attention. Even on the remark that the core activity is writing and problem solving. Throughout an analysis of the development in the hierarchical structured concepts: equations/algebra - functions - differentiability, this master's thesis scrutinizes the conceptual understanding in students' written assignments in the Danish secondary school.

The theoretical framework in the thesis is a combination of Anna Sfard's theory of *reification* and Heinz Steinbring's *epistemological triangle* as following: The theoretical framework of Sfard elaborates on the dual nature of mathematics. According to her there are two different ways of conceiving a concept: *structurally* - as objects, and *operationally* - as processes. They are ontological different, yet they are mutually dependent. Based on the history of mathematics Sfard argues that operational understanding precedes the structural. On that background she introduces that the formation of a concept goes from processes to abstract objects in three steps: *interiorization, condensation* and *reification.* Through a reification we get a deeper understanding, in which we get the opportunity to speak of concepts, not just as calculations and processes, but as if they were a part of the world with a set of properties - as real as You and I.

The *epistemological triangle* by Heinz Steinbring illustrates the relations between: *object - symbol - concept*, and serves to model mathematical knowledge. Mathematics requires certain signs or symbols to represent knowledge defined by historically determined conventions between humans. To start with, these signs do not immediately have a meaning of their own. The meaning must be produced by establishing a relation between the *signs/symbols* and *contexts/objects*, which both are in relation to the overall *concept* in question.

Mathematics proves to be hard to learn for many students. A common explanation is that mathematics' effective communication with symbolical and logical structures is too abstract - a language out of the students' grasp. Mathematical representations are mainly seen as tools for communicating and operating with mathematical knowledge. In this sense, mathematical representations are cultural tools, which are used in communication with other persons to develop mathematical knowledge. *"Mathematics is a social product"*, as Wittgenstein writes. (something I think both Steinbring and Sfard would agree with).

The theory of reification does not necessarily encapsulate the role of multiple representations in the construction of concepts. To take that shortcoming into account I shall argue for a combination of Sfard's theory of reification with Steinbring's epistemological triangle. With my modified version representations are considered in the process of objectifying.

The empirical part of the study is based on my mathematics course from the C to B level in the Danish secondary school and contains 13 assignments distributed during the course and reach a total of 232 task. Eleven of my students have agreed to contribute with their assignments, which in total provide 2552 answers. The amount of data make some demands to the methodological framework, where Syddansk Universitet introduces a useful frame and sets some standards for evaluating the assignments. Furthermore, a linguistic work by Sfard has inspired me to make my own communicative parameters to assess the students' answers. Combined the methodological framework guarantees a consistent scheme for the analysis. The approach makes it possible to compare the qualitative analysis with quantitative representations as an intern source for triangulation.

The main result from the thesis is that communication is the key ingredient to encourage a reification. It is only through communication that students get the opportunity to address processes and mathematical entities as objects. Furthermore, it seems as if the *functions* are relatively easy to objectify, but mostly when a specific function is presented. Tasks involving other representations contradict a reification of functions. When other (or more) representations are used, such as translate text into mathematical signs or graphical representation it is harder to detect the structural understanding in the answers. This might explain the result that differentiability never is fully objectified.

Indholdsfortegnelse

Forord

Man har som regel forholdsvis let ved at vurdere i hvilken grad man har forstået noget. Men det er straks en anden sag at opstille kriterier for, hvordan man har foretaget vurderingen. I matematik erfares ofte at elever mener de har forstået noget, når de kan regne sig frem til et rigtigt facit, men det er straks en anden sag at sætte ord på forståelsen (Sfard, 2008, s. 29).

I empiri haves et slående eksempel på en elev, der løser en opgave korrekt, men tilføjer teksten *"jeg kan ikke forklare det" (elevbesvarelse af aflevering 6, opgave 5)*. Selv husker jeg, at jeg troede, at jeg forstod differentialregning. Jeg kunne løse alle opgaverne på gymnasiet. Senere en dag på matematisk institut faldt tiøren pludselig og differentialregning blev sat i et helt nyt lys for mig. Processen kommer før strukturen, og forståelsen er svær at indfange med ord. Men som mit eksempel viser kan forståelsen og dannelsen af matematiske begreber være under opbygning, og derfor vanskelig at dokumentere og observere.

Netop denne problematik sætter dette speciale fokus på. Med *reifikationsteori* af Anna Sfard (1991, 2008) og den *epistemologiske trekant* af Heinz Steinbring (1989, 2005) bliver det muligt at opstille kriterier, der muliggør en synliggørelse af elevers begrebsdannelse. Uden teori vil forsøget på at beskrive forståelsen være lige så diffus som hvis man beder eleverne om selv at forklare.

Afleveringer er, for den opmærksomme betragter, en kilde til indsigt, hvorfor specialets empiri består af skriftlige elevproduktioner fra mit eget matematik C-B hold på gymnasiet. Med metodisk inspiration fra Syddansk Universitets rapport (Markvorsen et al., 2019) om fagligheden i gymnasiet og et lingvistisk arbjede af Candia Morgan & Sfard (2016) opstilles i specialet en metodisk ramme for vurdering af opgaver og elevernes besvarelser i forhold til kvalitativt og kvantitativt at analysere elevernes begrebsdannelse indenfor funktionsteori.

I lyset af de usædvanlige omstændigheder, COVID-19 har bragt med sig, hvor semesteret har fundet sted virtuelt i hjemmet, gøres opmærksom på:

> *"Individual learning, even if it takes place in the learner's home and away from other people, is, necessarily, an interpersonal affair" (Sfard, 2016, s. 335)*,

som er meget beskrivende for hele situationen og også dette speciale. Jeg håber De vil nyde at læse specialet i samme grad, som jeg har haft med at skrive det. Jeg gør endvidere opmærksom på, at udvalgte eksempler er forholdsvis elementære og let tilgængelige for enhver med basal matematikforståelse.

Specialet dedikeres Kristence Marie Nielsen - kaldes bare Stence - født 1928 og bor i dag på plejehjem. Hver gang jeg har været irriteret over COVID-19 pandemien, så tænker jeg på Stence og hvordan hun mon har det og indser, at jeg har intet at være utilfreds over. Tak til min familie, Valborg, Jimmi og Tina.

Derudover skal der lyde en tak til de elever, der har indvilliget i at deltage i specialet. Tak til min arbejdsplads og kollegaer, der over flere omgange har været hjælpsomme i mit uddannelsesforløb. Der skal selvfølgelig også lyde en stor tak til Ole Ravn for sparring, konstruktive forslag og vejledning.

Kapitel 1

Matematikfagets placering i gymnasieskolen

> *"How does it happen that there are people who do not understand mathematics? [...] If its evidence is founded on principles that are common to all men, [...], how does it happen that there are so many people who are entirely imprevious to it?" (Poincaré, 1914, s. 12).*

Det over hundrede år gamle citat beskriver meget præcist nogle af de til stadighed opståede frustrationer og hovedbrud for selv den mest rutinerede matematiklærer. Selvom der er sket meget i løbet af de sidste hundrede år, samfundsmæssigt såvel som undervisningssektoren, bliver disse spørgsmål stadig stillet. Dette speciale vil ikke kunne svare fyldestgørende på Poincarés spørgsmål, men undersøger den for matematiklæreren stadig tilbagevendende problematik belyst ud fra skriftlige elevproduktioner.

Matematikdidaktikere påpeger, at kerneaktiviteten i matematik er opgaveløsning, som middel til at opnå forståelse for matematiske begreber og teori, men samtidig er den forskningsmæssige viden om elevers skriftlige arbejde begrænset (Hansen, 2019, s. 212; Bremholm et al, 2016, s. 3; Hansen et al, 2016, s. 39; Slot et al, 2016, s. 40). Dette er dog ud fra en folkeskolekontekst men det har ikke været muligt at finde litteratur der antyder det modsatte for gymnasieskolen. Det har været muligt at finde en analyse af eksamensopgavesættene fra tidsskriftet MONA (Jensen, 2011), ligesom de nyligt offentliggjorte analyser om fagligheden i gymnasiet fra Syddansk Universitet (Markvorsen et al., 2019) og Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) kun i overfladisk form behandler elevernes skriftlige produktioner gennem den summativ evaluering af elevernes besvarelser af eksamensopgaver. Deres fokus ligger på ministerielle tekster og eksamensopgavesættene for at undersøge den intenderede og implementerede faglighed (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 7). Forskning og undersøgelser af elevernes læring gennem skriftlighed er dermed yderst begrænset, hvilket vækker undren når undervisningsvejledningen om de tre områder *"funktionsteori, geometri og statistik & sandsynlighedsregning"* i den gymnasiale matematik konstaterer:

> *"Matematik er i sit grundlag skriftligt. Enhver form for mundtlig matematik har altid et parallelt skriftligt sidespor – enten i form af symbolsk notation eller illustrationer. Dele af matematikken læres med papir og blyant som eneste redskaber, mens andre dele læres med brug af de utallige muligheder for at skrive, illustrere og eksperimentere med matematik, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder" (Undervisningsministeriet, 2020a, s. 2).*

Den manglende viden om elevers progression i skriftligt arbejde i matematik understøttes af diverse ekspertgrupper, bl.a. af den af undervisningsministeriet oprettede "følgeforskning til gymnasiereformen", som udarbejdes af Rambøll og Danmarks Evalueringsinstitut i perioden 2017-2021, hvor rapporten for 2021 vil omhandle *"fokus på styrket faglighed" (Undervisningsministeriet, 2017c, s. 4).* Herudover supplerer Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) med yderligere 11 indsatsområder, hvoraf to af disse er *"en særlig indsats i matematik"* og *"en særlig indsats med fokus på skriftlige kompetencer" (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 135).* Et område og et videnshul, som nærværende speciale kommer på forkant med at bidrage til. Ved at analysere skriftlige elevproduktioner over tid fremhæver Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) at det giver mulighed for at belyse *"hvordan eleverne har omsat fagligheden i deres skrevne tekster, og undersøge, hvordan og i hvilket omfang de har nået de faglige mål" (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 141).* Yderligere består afleveringer og eksamensopgaver i matematik af to delprøver, hvor den første delprøve er uden hjælpemidler, hvilket giver mulighed for *"at følge elevernes grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer" (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 142).* Formuleringer, der kan bruges til at beskrive formålet med dette speciale. Metodisk kan fagligheden håndteres ud fra en af Syddansk Universitet opstillet metoderamme på baggrund af den nu gældende undervisningsvejledning (Markvorsen et al., 2019, s. 24ff.).

Matematik B-niveauet er udfordret ved en øget tilgang til de gymnasiale uddannelser, idet *"gymnasieskolen er gået fra at være en eliteuddannelse til at være en masseuddannelse" (Ulriksen et al., 2009, s. 12)*, hvor reformen af 2017 kræver at alle som udgangspunkt skal have matematik B (Undervisningsministeriet, 2016a, § 15), hvormed der er kommet en større spredning i elevforudsætningerne. Mange består ikke den skriftlige eksamen, og mange elever har svært ved at anvende deres matematikfærdigheder i praksis (Undervisningsministeriet, 2016b, 2019a). Samtidig har reformen lavet et paradigmeskift fra reproducerende skabelonsopgaver til problemorienterede opgaveformuleringer (Undervisningsministeriet, 2019a, s. 5), hvilket stiller yderligere, højere krav til elevernes kompetencer, der er med til at opfylde de faglige mål og derigennem almendanne og studieforberede (Niss & Højgaard, 2002).

Specialets undersøgelsesområde er elevernes tilegnede faglighed i funktionsteori gennem skriftlige elevproduktioner i løbet af deres undervisningsforløb. Den analytiske begrebsramme udgøres af teorier af Sfard (1991, 2008,

2016) og Steinbring (1989, 2005), der hhv. omhandler elevernes begrebsdannelse og repræsentationernes betydning for begrebsforståelsen. Tilsammen tegner de et billede af elevernes brug og udvikling af matematiske begreber, som er en central del i opbygning af matematisk viden og færdigheder, som kan sættes i spil for at tilegne sig de intenderede kompetencer (Markvorsen et al., 2019, s. 18).

Disse indledende bemærkninger viser Dem efterspørgslen og vidensmanglen på området, hvorudfra specialet er bygget op om. De efterfølgende afsnit fokuserer på matematikfagets nuværende rolle og faglighed i gymnasieskolen. Eftersom den historiske udvikling er essentiel hos Sfard kan De i bilag A s. 80 finde en kort beskrivelse af gymnasieskolens forvandling gennem tiden.

1.1 Reformen af 2017

Med reformen af 2017 slår § 1 fast, at gymnasieskolens formål stadig er dobbelt med et studieforberedende- og et almendannende element. Det er cementeret i udtalelsen: *"Almendannelsen har i mere end 150 år været omdrejningspunkt for gymnasiet. [...] Sådan skal det fortsat være" (Forligskredsen, 2016, s. 5f.)*. For at indkredse reformens forståelse af almendannelse har Jens Dolin (2017) samlet dokumenter for gymnasiereformen og fremhæver tre vigtige aspekter: Viden i relation til fagligt indhold, kritiske refleksioner over viden (perspektivering) og personlig forholden til viden. En opdeling og opfattelse, svarende til Harry Haues forståelse (se Haue, 2003, s. 18f.; 2017, s. 58). Man kan ikke være dannet uden viden, men viden er ingen garant for at man er dannet, hvis ikke man ikke man er i stand til at perspektivere og anvende sin viden (Dolin, 2017, s. 30; Niss & Højgaard, 2019, s. 11). Den dynamiske forståelse om dannelse genfindes i relationen mellem matematisk viden, færdigheder og kompetencer i Markvorsen et al. (2019), Sfard (1991) samt i undervisningsministeriets egen udfoldelse af gymnasieskolens formål (Undervisningsministeriet, 2016a, §1, stk. 3).

I forlængelse af almendannelse bør kompetencebegrebet bemærkes, som uløseligt er forbundet med viden og færdigheder. I gymnasiereformen af 2017 bliver kompetencer hovedsageligt anvendt i forbindelse med studiekompetencer, skriftlige kompetencer og digitale kompetencer (Undervisningsministeriet, 2016a). Der er dermed sket en nedtoning af kompetencernes betydning i den nye bekendtgørelse. *Kompetencer og matematiklæring* (kaldes KOM-rapporten) (Niss & Højgaard, 2002) anvendes stadig som didaktisk værktøj, hvor de otte i rapporten opstillede matematiske kompetencer kan understøtte planlægning af et læringsforløb. Man kan formulere det som, at almendannelse er lovgivningens intention, hvor kompetencer kan bistå som en form for praktisering af det intenderede, hvorigennem eleverne tilegner en almen dannelse[1]. Kompetencer erstatter ikke dannelsen, men supplerer ved at lægge op til at undervisningen skal bestå af faglige, virkelighedsnære situationer, som både kan fremme elever-

[1](Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 7) indfører distinktion mellem intenderet-, implementeret- og tilegnet faglighed ud fra hhv. et politisk-, lærer- og elevperspektiv. En terminologi jeg benytter i dette speciale.

nes faglige kunnen og deres dannelsesmæssige udvikling (Dolin, 2017, s. 47)[2]. Hvis formålet er uforandret hvilke ændringer har reformen så medført matematikfaget? Matematik har med reformen fået et grundigt eftersyn og de faglige mål på STX omfatter nu 16 mål, hvis formål beskrives som:

> *"Eleverne skal opnå alment dannende, anvendelsesbetonet og studieforberedende matematisk indsigt, der bidrager til en forståelse af matematikkens afgørende betydning for at kunne beskrive, forstå og kommunikere om naturvidenskabelige og teknologiske samt samfundsvidenskabelige og kulturelle spørgsmål" (Undervisningsministeriet, 2017a).*

Der er sket en tydelig ændring i fagligt omfang sammenlignet med de tidligere 10 faglige mål på STX, og en formålsbeskrivelse om at opnå kendskab til vigtige sider af matematikken og opnå kompetencer til at kunne gennemføre en uddannelse, hvor matematik indgår (Undervisningsministeriet, 2013a, Bilag 36). Samme tendens afspejles i hf bekendtgørelsen, hvor formålsbeskrivelsen næsten er sammenfaldende med STX (Undervisningsministeriet, 2017b). Her er antallet af faglige mål nu 12 overfor tidligere 7 faglige mål (Undervisningsministeriet, 2013b, Bilag 15). Der er dermed kommet væsentlig mere kernestof til faget og viser en udvidelse af bredden, samtidig med de faglige mål kan ses som en tydeligere udspecificering af matematikfaget (Dolin, 2017, s. 48). Jeg tolker det snarere som et udtryk for den politiske intention, at reformen forhåbentlig kan styrke faget og de skriftlige kompetencer (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018b, s. 86, 2018a, s. 135). Intentionen med reformen var bl.a. at ændre 'typeopgaver' til 'tænkeopgaver', hvor elevernes kompetencer og det matematiske ræsonnement spiller en større rolle (Undervisningsministeriet, 2019a, s. 5).

Den politiske årvågenhed med reformen af 2017 har sat endnu et præg på matematikfaget. Med reformen er det nu stadfæstet ved lov, at matematik på det gymnasiale B-niveau er blevet obligatorisk for de fleste. Kun meget sproglige studieretninger, bestående af tre fremmedsprog, hvoraf to er på A-niveau og et på B-niveau, er undtaget kravet om matematik B (Undervisningsministeriet, 2016a, § 25). At alle elever skal "tvinges" ud i et fag, endda på B-niveau, kan kun trække en række udfordringer med sig i kølvandet.

1.1.1 Nationalt niveauløft

For at se nærmere på problemerne ved et nationalt løft fra matematik C til B-niveau bør forskellene på niveauerne iagttages. For alle niveauer er dannelsesaspektet i matematik væsentligt. Et synspunkt, som bekræftes blandt en repræsentativ undersøgelse blandt naturfagsundervisere, hvor over 80 % oplever, at almendannelse er en af de vigtigste grunde til at eleverne har fagene (Dolin et al, 2014, s. 5).

Kort kan C-niveauet karakteriseres som 'borgermatematik', B-niveauet som 'det anvendelsesorienterede', mens A-niveauet er det 'teoretiske'. Den karakteristik af C-niveauet blev især sat på dagsordenen med 2005-reformen, hvor

[2] Den dynamiske relation mellem viden, færdigheder og kompetencer beskrives i afsnit 3.2.1.

alle elever i STX og HHX fik matematik på mindst C-niveau. C-niveauet er primært almendannende. Det skal give alle elever bedre muligheder for at forstå og forholde sig til problemstillinger fra omverdenen og fra samfundsdebatten (Matematikkommissionen, 2017, s. 11).

B-niveauet har hovedvægt på modellering og anvendelser af matematik, både i tværfagligt samspil og på at opnå kompetencer til at kunne gennemføre videregående uddannelser, hvori matematik indgår (Matematikkommissionen, 2017, s. 11; Hansen, 2019, s. 43). Matematik på B-niveau har således den særlige udfordring, at det skal opfylde flere mål. For det første skal det været et fag, der har en afrundende karakter, som giver adgang til en række videregående uddannelser. For det andet skal det være et fag, der kan bruges som grundlag for en opgradering til A-niveau i 3.g (Undervisningsministeriet, 2016b, s. 3).

Matematik A er en teoretisk overbygning, hvor A-niveauet giver eleverne muligheder for at opnå kompetencer til at kunne gennemføre længerevarende matematikbastante uddannelser via den måde, hvorpå der arbejdes med modellering og problembehandling samt med matematisk teori og metode (Matematikkommissionen, 2017, s. 11).

Ud fra denne karakteristik fremgår det, at omfang og kompleksiteten er størst i B-niveauet, hvor også udfordringerne er størst. Derudover er B-niveauets problematikker tilknyttet den øgede tilgang til de gymnasiale uddannelser. En større andel af elever på matematik på B-niveau giver selvsagt en større spredning i elevforudsætninger. At elevforudsætningerne sammen med et nationalt niveauløft udgør et problem, kommer i høj grad til udtryk i det faglige niveau, som eleverne opnår. Eksamensresultaterne fra sommerens eksamener viser, at mange elever ikke består matematik B. Ved sidste sommers eksamener dumpede hele 31,2% og typetallet var 00. Evalueringen af sommerens eksamener viser, at 'for' mange er dumpet, hvor ekstraordinært mange har opnået karakteren -3, især på STX (Undervisningsministeriet, 2019a, s. 20). Andelen er ikke nær så slem på hf, hvilket forklares ud fra opgaveformuleringerne, som på hf B typisk er kortere og tydeligere i forventningerne til opgaveløsningen. Det er problematisk, når man tænker på at *"det er ikke blevet lettere at få topkarakter, men det er blevet lettere at bestå" (Markvorsen et al., 2019, s. 56)*. Det erkendes dermed, at matematikfaget står med udfordringer og problemstillinger, men hvordan står det egentlig til med det faglige niveau?

1.2 Fagligheden i matematikfaget

Matematik og de naturvidenskabelige fag har gennem en årrække fra politisk side fået øget fokus og ønskes styrket (Danmarks Evalueringsinstitut, 2017, s. 46; Matematikkommissionen, 2017, s. 4). Senest er oprettet et "Nationalt center for udvikling af matematikundervisning", hvor der i perioden 2019-2023 er afsat 25 mio. kroner til driften af centret, hvis formål er:

> *"At styrke kvaliteten af matematikundervisning på tværs af uddannelsesområder samt styrke børn og unges færdigheder, viden og kompetencer i matematik. [...] og at understøtte en grundlæggende naturvidenskabelig dannelse, undervisningspraksis og matematikdidaktisk forskning" (Undervisningsministeriet, 2019b, s. 1).*

Det af Undervisningsministeriet og Uddannelses- og Forskningsministeriet finansierede center står dermed til at overtage undersøgelsen af de problematikker, som Matematikkommissionen (2017) fremhæver.

Men for at kunne styrke kvaliteten og elevers viden og færdigheder, må man forholde sig til elefanten i rummet og afklare hvordan man italesætter faglighed og hvilke kriterier der bør indgå, for at kunne sammenligne og følge fagligheden (Markvorsen et al., 2019, s. 99). De for nylig udkomne rapporter om fagligheden i gymnasiet gennem de sidste 50 år fra Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) og Markvorsen et al. (2019) forholder sig til netop dette, hvor de viser den transformation, som matematikfaget har undergået og fremhæver nogle nutidige, faglig relevante problemstillinger. Løbende i specialet vil der refereres til disse rapporter, hvorfor dette afsnit kun fremhæver deres hovedresultater.

Matematikfaget har i høj grad ændret karakter gennem tiderne. Med computerunderstøttende regneprogrammer (forkortet CAS-værktøjer, står for: Computer Algebra System) er de regnetekniske færdigheder blevet nedprioriteret til fordel for kompetencefremmende, problemorienterede opgaver med avancerede computerberegninger ud fra virkelighedsnære kontekster, som ses i udviklingen af eksamenssættene. I og med eleverne har computeren til rådighed kan man udføre avancerede udregninger, som eleverne derefter skal kunne forholde sig til på et højere abstraktionsniveau end det var muligt i tiden før CAS-værktøjernes udbredelse. I 2000 indførtes en delprøve uden hjælpemidler til den skriftlige eksamen for at fastholde test af elevernes basale regnefærdigheder, som fremhæves som værende manglende. Der er på den måde sket en bevægelse fra dybde mod bredde i eksamensopgaverne over de sidste 50 år. Selvom matematikfaget har ændret karakter, fastholdes et højt taksonomisk niveau, idet de nyere eksamensopgaver indeholder flere opgaver end tidligere, hvor en del godt nok er på et lavt taksonomisk niveau, men hvor en anden del er med et højt abstraktionsniveau, hvor modellering, ræsonnement og abstrakt tænkning er forudsætninger for at løse opgaverne (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 16, s. 106 og s. 110f.).

Syddansk Universitet konkluderer også at fagligheden er stabil (Qvortrup & Ljungdahl, 2019b, s. 43f). Deres metode- og analyseramme i matematikfaget er en udfoldelse af undervisningsvejledningen, hvorudfra de kortlægger samme fordeling af opgaver gennem tiderne, fordelt på områderne: grundlæggende færdighedsregning, problemløsnings- og tværfaglige opgaver. De konkluderer, at fagligheden ikke var højere tidligere end i dag, men spørgsmålenes karakter har ændret sig. De bemærker, at mange eksamensopgaver har en stigende sværhedsgrad gennem delspørgsmålene, hvor de første kan klares med en grundlæggende viden (Markvorsen et al., 2019, s. 16). En udvikling som beskrives som en øget 'stilladsering', der vejleder eleverne gennem opgaven, som kan gøre det lettere at bestå, men omvendt er det ikke blevet lettere at få 12 (Markvorsen et al., 2019, s. 47 og s. 56). Derudover kommenteres, at tilgangen af elevtyper er blevet bredere, hvilket også har påvirket matematikken, da den bredde elevgruppe også *"skal opleve matematikfaget og være glade og trygge ved at beskæftige sig med det" (Markvorsen et al., 2019, s. 47)*.

Essens af deres arbejde trækkes kortfattet frem i resumeet, hvor konklusionerne er: Eleverne er blevet bedre til at modellere problemer med brug af CAS-værktøjer og til at arbejde eksperimenterende og undersøgende, men deres niveau indenfor grundlæggende færdigheder, dybdeforståelse og evne til abstrakt tænkning er ringere end tidligere. Det bemærkes samtidig, at bredden i matematikfaget over tid vurderes til at være blevet udvidet. Samlet set er fagligheden på samme niveau, men fokus er rykket mere over mod problemmodellering, arbejde med CAS-værktøjer og eksperimenterende arbejde (Markvorsen et al., 2019, resumeet s. 8). Deres arbejde påpeger dermed, at faget har ændret karaktertræk overmod en mere pragmatisk orienteret faglighed. Den politisk intention (se evt. Undervisningsministeriet, 2016a, 2017a,b, 2019a), er matematikdidaktisk implementeret (se evt. Blomhøj, 2016; Hansen, 2019) og har tilsvarende vundet forskningsmæssigt indpas (se evt. Lesh et al., 2007; Skovsmose, 2003, 2011; Dewey, 2008, 2009). Kognitiv teori er dog dominerende i beskrivelsen af den tilegnede faglighed (se evt. Scheiner, 2016; Arnon et. al, 2014). For en introduktion kan De i bilag B s. 84 læse om populære læringsteorier mht. matematik.

Konstateringen af en større faglig bredde er problematisk, hvis man ønsker en dybereliggende forståelse. De tidligere nævnte 16 faglige mål i reformen, overfor de tidligere 10 på STX (hvor forholdet er 12 overfor 7 på hf), medfører en overfladisk behandling og overfladisk indsigt, og gør det vanskeligt for elever at få sig et overblik (Matematikkommissionen, 2017, s. 18). En yderligere besværliggørelse ligger i den systematiske reduktion i timetallet over de sidste halvtreds år. Kompleksiteten i faget udvides i takt med at timetallet indsnævres. Eleverne skal groft sagt nå mere på kortere tid (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 13; Markvorsen et al., 2019, s. 14).

1.3 Problemformulering

Sammenfattende af det indtil videre skrevne iagttages: Der er et politisk ønske om fokus på styrket faglighed, og en anbefaling om en særlig indsats indenfor den begrænset udforskede skriftlige dimension. Samtidig skal man have den øgede elevtilgang in mente, som følge af det nationale niveauløft til matematik B, hvor lave beståelsesprocenter i de skriftlige eksamener sætter fagligheden yderligere under pres - trods en øget stilladsering gør det lettere at bestå. Dertil at tilføje reformens paradigmeskift fra 'typeopgaver' til 'tænkeopgaver', som stiller yderligere, højere krav til elevernes kompetencer. Ud fra alle de betragtninger og problematikker er der umiddelbart nok at tage fat på, og på det grundlag udmøntes følgende problemformulering og delspørgsmål med fokus på funktionsteorien:

Problemformulering:

> Hvordan dannes matematiske begreber i progressionen af de funktionsteoretiske begreber: ligning - funktion - differentiabilitet i skriftlige elevproduktioner over et to måneders matematik C til B kursus?

Delspørgsmål:

1. Hvordan kan man begrebsliggøre matematisk begrebsdannelse?
2. Hvordan kan man vurdere matematisk begrebsdannelse i skriftlige elevproduktioner?
3. Hvordan udvælges og organiseres passende empiri?
4. Hvilken begrebsforståelse kommer til udtryk i overgangen mellem begreberne: ligning - funktion - differentiabilitet?

Delspørgsmålene er retningsanvisende for specialet, idet hvert spørgsmål er omdrejningspunktet for hvert af de følgende kapitler. Her får De som læser med andre ord en forsmag på, hvad de efterfølgende kapitler udfolder.

Det første spørgsmål omhandler den teoretiske forankring, hvis formål er at udvælge en passende læringsteori til at kunne svare på problemformuleringen. Reifikationsteori af Sfard (1991, 2008), om begrebsdannelsen som et progressivt forløb i et komplementerende samspil mellem en proces- og objektanskuelse af begreber, udgør nedslagsstedet for dette speciale. For at tage højde for repræsentationsformernes betydning inddrages Steinbring (1989, 2005) og hans epistemologiske trekant. Disse teorier samler jeg i en *udvidet reifikationsteori* ved at fusionere Sfard og Steinbring. Alt dette udfoldes udførligt i kapitel 2.

Det andet spørgsmål er metodisk funderet. Efter at have opstillet en teoretisk model, der kan begrebsliggøre begrebsdannelsen i matematik, skal der efterfølgende opstilles en metodik til vurdering af opgaverne og elevernes besvarelser. Rapporten fra Syddansk Universitet indfører et begrebsapparat, som kan udgøre et grundlag for diskussioner af det aktuelle faglige niveau (Markvorsen et al., 2019, s. 91). På den opfordring vil jeg arbejde videre med deres metodik til beskrivelse af opgavetyperne, tilpasset begrebsdannelsen. Derudover indføres her parametre til at indfange begrebsforståelsen i elevernes formidling i deres skriftlige produktioner, som er inspireret af et lingvistisk arbejde af Morgan & Sfard (2016). På den måde opstilles en metode til håndtering af opgavetype og elevernes besvarelser ift. matematisk begrebsdannelse. Dette beskrives nærmere i kapitel 3.

Tredje spørgsmål omhandler den i specialet anvendte empiri og hvordan den i kapitel 3 introducerede metodik helt konkret sættes i spil. Til dette er jeg inspireret af et arbejde af Steinar Kvale (1980), hvor et stort kvalitativt datasæt kategoriseres, hvilket muliggør en kvantitativ analyse til at fremhæve tendenser. Her introduceres ligeledes empirien og dens ophav: Såsom undervisningens forløbet, indsamling af samtykkeerklæring, osv. I den forbindelse behandles de etiske forholdsregler. Kapitlet vil med andre ord forholde sig til forskningskriterierne: ærlighed, gennemsigtighed og ansvarlighed. Dette sker i kapitel 4.

Det sidste delspørgsmål bliver besvaret ud fra resultaterne af analyserne af de indsamlede elevopgaver, som opstilles kvalitativt tillige med en kvantitativ analyse. Ønsket og formålet med specialet bliver dermed at bidrage med viden om hvordan elever danner matematiske begreber i funktionsteori. Disse fremlægges og diskuteres nærmere i kapitel 5. Til sidst i kapitel 6 samles arbejdets resultater og der perspektiveres til andre matematiske begrebsdannelsesteorier.

1.3.1 Videnskabsteoretisk positionering

Paul Ernest (1991, 1994, 1998, 1999) har indenfor matematik introduceret *epistemologisk socialkonstruktivismen* (erkendelsesteoretisk: 'viden' om samfund og virkelighed er en konstruktion, i Collin, 2014, s. 422). Det er denne jeg fører videre i specialet. Matematik beskriver Ernest med metaforen *"virtual reality" (Ernest, 1998, s. xi)* og understreger, at matematisk viden er en menneskelig konstruktion til at beskrive virkeligheden, hvor viden består af historiske, intersubjektive konventioner og sprogbrug, som anerkendes af det sociale samfund og altid kan ændres. 'Objektiv' viden afvises i traditionel forstand, idet matematisk viden er et resultat af socialt godkendte regler, definitioner, antagelser osv. som altid kan ændres. Objektive viden (intersubjektiv) kan kun tilnærmes i form af et fælles sprog, dets brug og dets regler (Ernest, 1998, s. 142ff.; Telese, 1999, s. 4f.).

For at blive anerkendt som viden skal matematikken følge de nutidige accepterede matematiske konventioner og (symbol)sprog i overensstemmelse med 'god matematisk skik'. Derfor skal elever tilegnelse sig den kultur, som er anerkendt blandt andre matematikere for at rekonstruere viden (Ernest, 1999, s. 73ff.; Telese, 1999, s. 3). Derfor udgør sprog en essentiel rolle i tilegnelse, kommunikation og formulering af matematisk viden, hvor matematisk sprog primært bruger symbolik til at skabe viden: *"Mathematics could not be expressed without knowledge of its language" (Ernest, 1999, s. 70)*, og som ethvert andet sprog kræves kendskab til hvordan man bruger sproget i dets 'sprogspil' efter Wittgenstein (Ernest, 1994; Collin, 2014; Telese, 1999).

Det epistemologiske socialkonstruktivistiske ståsted finder jeg passende både til at dække Steinbring og Sfard[3]. Metodisk ser jeg det også passende, da sprog og kommunikation også medregner det skriftlige som et stærkt kommunikativt værktøj (Ernest, 1994, s. 36), som også bekræftes af, at *"[...] næsten enhver mundtlig aktivitet vil være suppleret af noget skriftligt" (Undervisningsministeriet, 2020a, s. 22)*. Analytisk er jeg heller ikke ude på at finde universal viden, men opbygger et sæt begreber til at kunne konstruere elevernes viden (Esmark et al., 2005, s. 11). Dette var blot en ultrakort matematisk introduktion. Der kan skrives flere tykke bøger om matematisk socialkonstruktivisme, som Ernest (1994) påpeger. Jeg vil, som vi kommer frem i specialet, løbende foretage referencer til det videnskabsteoretiske ståsted. For yderligere læsning henvises til de i starten oplyste kilder fra Paul Ernest.

[3]Se evt. afsnit 2.2.3.3 for beskrivelse af Sfards positionering.

Kapitel 2

Matematiske læringsteorier

> *"Mathematics deals exclusively with the relations of concepts to each other without consideration of their relation to experience. Physics too deals with mathematical concepts; however, these concepts attain physical content only by the clear determination of their relation to the objects of experience" (Einstein, 2016, s. 103).*

Distinktionen mellem fysik og matematik, som her kommer til udtryk, er, at fysik beror på empiriske målinger og observationer, hvorimod matematikken udelukkende beror på sammenhænge, uafhængige af den eksisterende omverden (Bernhard, 1972, s. 498). Denne sammenligning leder os hen imod den abstrakte forståelse, der findes indenfor matematikkens væsen. Eksempelvis fortæller udtrykket $y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ den tilbagelagt distance $y(t)$ af et frit faldende objekt til tidspunktet t, hvor g er tyngdeaccelerationen. Altså et udtryk for hvordan et objekt falder uden stillingtagen til masse eller tyngdekraft - eller nogen eksistens af et objekt (Rogers, 1960, s. 468). Matematikken siger meget kortfattet og præcist hvad den mener, hvorigennem enhver tvivl og usikkerhed kommer til livs, hvilket må siges er en styrke ved matematikken, men samtidig en udfordring for elever (Eisenberg, 2002, s. 152). Men for overhovedet at kunne tale om styrker og udfordringer i matematisk læring, skal der først præciseres, hvordan matematisk læringsteori opfattes.

Det er ikke materiale der mangler. Forskningen er et overflødighedshorn, hvor kunsten består i at udvælge det bedste stykke (teori) i forhold til ens præferencer (undersøgelsesområde). Udfordringen er dermed ikke at finde relevant teori, men derimod at udvælge de(n), der på bedst mulig vis kan bidrage til et fyldestgørende svar på problemformuleringen. De to hovedgenrer indenfor matematisk læring er: kognitivt efter Piaget og læring gennem deltagelse og social interaktion efter Vygotsky og Lave & Wenger (Ernest, 1991; Sfard, 1998, s. 4; Tall, 2002, s. 20f.; Zazkis, 2011, s. 9; Scheiner, 2016, s. 168; Illeris, 2017, s. 55). Derfor vil jeg i næste afsnit indkredse den i specialet anvendte tilgang til læring. Afsnit 2.2 præsenterer Sfards teori og afsnit 2.3 præsenterer Steinbrings. Til sidst vil jeg i afsnit 2.4 argumentere for en sammentænkning af de to teorier.

2.1 Præcisering af matematisk læring

Først er det hensigtsmæssigt at præcisere hvad der egentlig forstås ved læring i en matematisk kontekst, hvor vi først tager udgangspunkt i en læringsbeskrivelse af Knud Illeris (2017):

1. *"For det første kan læring henvise til resultaterne af de læreprocesser, der finder sted hos den enkelte. Læring er dermed det, der er lært, eller den ændring, der har fundet sted.*

2. *Læring kan henvise til de processer, der finder sted i det enkelte individ og kan føre frem til de føromtalte resultater.*

3. *For det tredje kan læring referere til de samspilsprocesser mellem individet og dets sociale omgivelser, der direkte eller indirekte er forudsætning for de indre læreprocesser, som angår de forrige beskrevne processer, som videre kan medføre et læringsresultat" (Illeris, 2017, s. 19).*

I punkt et og to er der tale om *læring som tilegnelse*, hvor det er kognition der er i højsædet, som det ses hos eksempelvis Richard Skemp (2006), Ed Dubinsky (2002) og Eddie Gray & David Tall (1994; 2007)[1]. De kognitive teorier møder dog kritik af Sfard for at reducere læring til en diskurs, hvor man taler om at besidde og eje læring. Enten har man lært det, eller også har man ikke (Sfard, 2008, s. 49, 1998, s. 5f., 2001, s. 21).

Det tredje punkt omhandler det sociale aspekt i læringen, *læring gennem deltagelse*, som ses hos Sfard (2008) og Steinbring (2005). Beskrivelsen af læring fremhæver dermed to metaforer: *læring som tilegnelse* og *læring gennem deltagelse*[2], hvor den ene bør komplementere den anden (Ernest, 1998; Sfard, 1998, s. 10). De er indbyrdes relateret, som også læringsbeskrivelsen antyder. Ved kun at betragte læring fra et af perspektiv vil være nytteløst som:

> *"[...] the attempts to define lungs or muscles without a reference to the living body within which they both exist and function" (Sfard, 1998, s. 6).*

I stedet for at se de to perspektiver som en dikotomi, skal de ses i et dynamisk forhold. De er ikke nødvendigvis forskellige i deres opfattelse af læring, men deres tilgang er forskelligt (Sfard, 1998, s. 7). Eksempelvis slås Sfards socialkonstruktivistiske *reifikation* ofte sammen med lignende teorier under fællesbetegnelsen *proces-objekt-indkapsling*. Derudover slås de også sammen under et afsæt, det konstruktivistiske, hvor Ed Dubinsky (2002) tager sit afsæt i Piagets refleksive abstraktion og relaterer til en matematikfaglig kontekst, og udvikler modellen

[1]Se evt. bilag B for introduktion i pragmatisk og kognitiv matematisk læringsteori.

[2]Sfard kalder (1) *læring gennem tilegnelse* (acquisition metaphor) og Scheiner betegner det som *abstraktion over objekter* (abstraction-from-objects), og Sfard betegner (2) som *læring gennem deltagelse* (participation metaphor), hvor Scheiner betegner det som *abstraktion over aktiviteter* (abstraction-from-actions), hvor Sfard er fortaler for sidstnævnte (Sfard, 2008, s. 75).

APOS: Action, Process, Object/Schema (Dubinsky, 2002, s. 95ff.; Arnon et. al, 2014). Tilsvarende gælder for *'progreb'*-teorien[3] af Eddie Gray og David Tall (Gray & Tall, 1994, 2007; Tall, 2002, s. 6f.; Scheiner, 2016, s. 166ff.). Både Sfard, Dubinsky og Gray & Tall arbejder med begrebsdannelsen, men deres tilgange er forskellige (Zazkis, 2011, s. 11). Selvom de ikke hører under et, så er der en gråzone, et fælles overlap, idet *"other aspects of Piaget's theory do offer a parallel to social constructivism" (Ernest, 1991, s. 102)*. Omvendt har Sfard også konstruktivistiske referencer til mentale skemaer og deres konstruktion (Sfard, 1991, s. 23ff.).

Ved at lade metaforerne komplementere hinanden kan de opveje nogle udfordringer, hvor den kognitive tilgang har udfordringen, at man ikke direkte kan observere bevægelsen fra et stadie til et andet (Eisenberg, 2002, s. 144; Sfard, 1991, s. 10). For Sfard er det hensigtsmæssigt at lade dem supplere hinanden (Sfard, 1998, 2016), på samme måde som Ernest påpeger at assimilation, akkommodation og refleksiv abstraktion er begreber, der gør det muligt for enkeltpersoner at drage fordel af social interaktion (Ernest, 1998).

Pointen er, at jeg finder Sfards dynamiske forståelse af læring interessant og er i tråd med Knud Illeris (2017) beskrivelse og den intenderede forståelse af fagligheden (Markvorsen et al., 2019, s. 23), hvor hun ligesom og Paul Ernest ikke afviser kognition til at bidrage med yderligere indsigt (Sfard, 1998, s. 10; Zazkis, 2011, s. 11). Igennem begrebet *'commognition'*, som er en sammentrækning af de engelske ord *communication* og *cognition*, pointerer Sfard at de to metaforer om læring er i indbyrdes relation, forstået som *"the communicational approach to cognition" (Sfard, 2001, s. 13)*, hvor det er sproget og kommunikation, som er en forløber for kognition. For Sfard viser læringen sig ved en ændring af ens kommunikative kompetencer. Når man lærer matematik, udvides ens evner for matematisk kommunikation og derigennem tilegner man sig redskaber, der kan løse problemer (Sfard, 2016, 2008; Zazkis, 2011, s. 12).

Sfard kan dog ikke stå alene, da hendes teori fra 1991 ikke i tilstrækkeligt omfang indkapsler repræsentationsformernes indflydelse på begrebsdannelsen. Derfor supplerer jeg i afsnit 2.3 med Steinbring (1989, 2005), som over de sidste 30 år har beskæftiget sig med netop dette område.

2.2 Matematisk reifikationsteori

Mange matematiske begreber volder vanskeligheder, idet deres tilegnelse besidder en dynamik mellem en proces og et selvstændigt matematisk objekt (Blomhøj, 2016, s. 78). Denne vanskelighed behandles i Sfard (1991) hvor hun påpeger, at matematiske begreber i langt de fleste tilfælde kan betragtes ud fra to forskellige tilgange: *strukturelt*, som *objekter*, og *operationelt*, som *processer*. Hendes konklusioner er:

[3] Gray & Tall bruger ordet *'procept'*, som en en sammentrækning af ***pro**ces* og *con**cept***. En dansk oversættelse er *'progreb'* ud fra samme sammentrækning af ***pro**ces* og *be**greb*** på dansk.

> *"Reification increases problem-solving and learning abilities, so the more structural our approach, the deeper our confidence in what we are doing" (Sfard, 1991, s. 29).*

Tilgangene - operationelt og strukturelt - komplementerer hinanden, selvom de angiveligt kan opfattes som inkompatible. På baggrund af den historiske udvikling, fremhæver Sfard, at den operationelle tankegang, for de fleste, er det indledende skridt i tilegnelsen af matematiske begreber (Sfard, 1991, s. 1).

Termen *begreb* betegner en teoretisk, formel konstruktion. Det værende en interpersonel samlet konstruktion, der rummer alle af begrebet fremkaldte former for repræsentationer og associationer. Bare denne formulering er abstrakt i sig selv, og de efterfølgende afsnit, vil som en paraply udfolde detaljerne ved matematiske *begreber*. Einsteins citat (indledningen til kapitel 2) kan her yde et yderligere bidrag. Sammenlignes matematik med eksempelvis fysik, biologi eller andre videnskabelige discipliner, så arbejder man med et univers, som indeholder nogle objekter. Disse objekter har en række egenskaber og kan undergå visse processer underlagt veldefinerede love. Eksempelvis kan objektet vand udsættes for en nedfrysnings-proces og ændre form til is. Forskellen er, at matematikeren ikke arbejder med konkrete fysiske objekter, men mentale objekter, som i princippet kan opfattes på samme måde som fysiske objekter. At opfatte et *begreb* ud fra denne tilgang betegner Sfard som *strukturel* (Sfard, 1991, s. 4).

Ud over at matematiske begreber kan være givet ud fra dets struktur, kan et begreb udtrykkes ud fra en *proces* (en algoritme), hvilken opfattelse betegnes som *operationel*. De operationelle begreber udtrykker en eller anden form for bevægelse, aktivitet, proces (Sfard, 1991, s. 4).

2.2.1 Strukturel og operationel tilgang

For at give et eksempel, så betragt følgende definitioner af begrebet funktion:

Strukturel: *"En størrelse y kaldes en funktion af størrelsen x, hvis der til hver værdi af x svarer præcis én værdi af y, som kaldes funktionsværdien af x. Man skriver $y = f(x)$ (Carstensen et al., 2015, s. 113)".*

Operationel: *"En funktion er en sammenhæng mellem to variable størrelser: en uafhængig, som vi kalder x, og en, der afhænger af x, som vi kalder $f(x)$ eller y. Sammenhængen beskrives ved en regneforskrift, tabel, graf eller tekst. Til ét x kan der kun være ét $f(x)$ (Gregersen & Nørregaard, 2018, s. 24)".*

Selvom de to definitioner er enslydende, er der en forskel. Den operationelle definition med formuleringen *"sammenhæng mellem to variable størrelser"* refererer til en proces, en udregning, som skal foretages. Den strukturelle derimod definerer funktionen mere abstrakt ud fra strukturen, at der for hvert x eksisterer et entydigt y.

Morten Blomhøj giver et eksempel med elever fra starten af gymnasiet, hvor man kan spørge, "hvorvidt prisen på en vare i Brugsen kan beskrives som funktion af stregkoden?" Svaret lyder typisk *nej*, da elevernes forståelse af funktionsbegrebet er knyttet sammen med en tilhørende udregning ud fra funktionsforskriften - en proces (Blomhøj, 2016, s. 76). Ud fra den strukturelle definition svares tydeligt *ja*, da der til hver stregkode x er en entydig pris y.

Strukturel forståelse indebærer, at man er i stand til at referere til begrebet som var det en statisk enhed. Omvendt indebærer den operationelle opfattelse en række handlinger, hvorigennem man får et resultat. Den førstnævnte er mere abstrakt end den sidstnævnte, men den afgørende forskel i de to tilgange ligger i ens anskuelse af matematikkens væsen, fordi *"there is a deep ontological gap between operational and structural conceptions" (Sfard, 1991, s. 4)*. For at vise forskellen i de to opfattelser er nogle eksempler opstillet i tabel 1:

Begreb	Strukturelt	Operationelt
Symmetri	Geometrisk egenskab	Transformation af en geometrisk form
Rationelle tal	Forholdet mellem to heltal	Resultatet af division af to heltal
Cirkel	Samtlige mulige punkter, der kan afsættes med samme afstand fra et fast punkt.	Kurve, der dannes ved at rotere en passer omkring et fast punkt.

Tabel 1: Strukturel- og operationel begrebsforståelse efter Sfard (1991).

Ifølge Sfard er egenskaben at kunne se et begreb strukturelt og operationelt en absolut nødvendighed for at tilegne sig en dybere matematisk forståelse (Sfard, 1991, s. 5). Betragter man en funktionsforskrift $f(x) = 3x^4$, kan funktionsforskriften anskues både strukturelt og operationelt ud fra lighedstegnet, fordi $=$ er et strukturelt symbol på ækvivalente størrelser. Operationelt, fordi højre side af lighedstegnet er en udregning, en proces. Som illustreret er der tale om en *"ontological duality" (Sfard, 2008, s. 54)*, hvor de to tilgange er en ontologisk forskellig anskuelse af matematisk viden, færdigheder og kompetencer:

> *"The terms 'operational' and 'structural' refer inseparable, though dramatically different, facets of the same thing. Thus, we are dealing here with duality rather than dichotomy" (Sfard, 1991, s. 9).*

Det 'evigt uadskillelige'[4] dualistiske forhold beskriver, at man kan veksle mellem tilgang alt efter behov (såfremt man kan bruge begge). En skelnen mellem behovet for at foretage en udregning, eller behovet for at se et objekt som et produkt af nogle processer (Sfard, 2008, s. 54). Måden hvorpå det dualistiske forhold kommer til udtryk er gennem ens evne til at tale om og med matematik (tankegangskompetencen i Niss & Højgaard, 2002, s. 47). Operationel fokuserer på verber, hvor man bruger handling og aktivitet. Strukturel består af, at handlinger substitueres med objekter, hvor verberne erstattes med substantiver om objektet (Sfard, 2008, s. 44, 2016, s. 326). Den kommunikative forskel er, at operationel begrebsforståelse består af lange beskrivelser af handlinger overfor strukturel begrebsforståelse med korte, effektive og matematikbastante formuleringer (Sfard, 2008, s. 53). Strukturel forståelse er besværlig at opnå, men

[4]Udtrykket stammer fra Riberecessens Privilegier af 1460 *up ewich ungedeelt*, hvor Christian I lover at Schlesvig-Holsten skulle forblive samlet, hvilket Preussen brugte til at intervenere i de slesvigske krige i 1864 (Rode, 1967, s. 4846).

samtidig nødvendig for at få adgang til endnu mere abstrakte begreber. Og for at opnå en strukturel opfattelse af et begreb, må der samtidig være en beherskelse af de bagvedliggende processer, som udgør grundlaget for forståelsen[5] (Sfard, 1991, s. 10). Herudfra følger den didaktiske antagelse, at procesforståelsen kommer før objektforståelsen (Sfard, 1991, s. 16). Det er derfor hensigtsmæssigt ved introduktion af nye begreber, at der i første omgang er fokus på at støtte eleverne i at tilegne sig det nye begreb som proces (Sfard, 1992, s. 69f.; Blomhøj, 2016, s. 78). Med Sfards egne ord:

> *"In other words, we have good reasons to expect that in the process of concept formation, operational conceptions would precede the structual" (Sfard, 1991, s. 10).*

Antagelsen bygger på den som regel naturligste måde at lære matematik, hvor dannelsen af matematiske begreber som oftest tager udgangspunkt i beherskelsen af en matematisk proces, der udføres på velkendte objekter. (Sfard, 1991, s. 10f.). Samme antagelse ses også, men kommer ikke så direkte til udtryk, hos andre læringsteorier som i Skemp (2006), Bergqvist (2007) og Gray & Tall (2007, 1994), se evt bilag B.

2.2.2 Fra historie til læringsproces

Udviklingen fra operationel til strukturel begrebsdannelse og forståelse kan som læreproces beskrives som en cyklisk, iterativ proces. I den kulturhistoriske skoles tradition illustrerer Sfard (1991) med gennemgang af den historiske udvikling af begrebet 'talforståelse', hvorudfra der opstilles en model over læringsforløbet. Formålet med illustrationen er at understøtte antagelsen om, at procesforståelsen opnås før den strukturelle. Den historiske illustration er med til lettere at begrebsliggøre og illustrerer efterfølgende argumenter, hvor jeg her kort vil fremhæve talforståelsens første udvidelse fra naturlige tal til rationelle tal. Scenariet er illustreret i figur 1.

Med afsæt i de naturlige tal (1, 2, 3, 4 osv.) starter et barns læring med at tælle et antal af objekter. Når barnet stilles spørgsmålet: "Hvor mange objekter er der i alt?", starter barnet processen forfra og begynder at tælle (Piaget, 1952, s. 62, 1953, s. 74). Det viser, at barnet er trygt ved den operationelle proces 'at tælle', men ikke den strukturelle betydning i det abstrakte produkt 'naturlige tal' (Sfard, 1991, s. 11).

Først når de naturlige tal opfattes som et objekt i sig selv kan en udvidelsen af talforståelsen finde sted, som fører til objektforståelsen af de rationelle tal. Et rationelt tal - som oprindeligt blev brugt til målingsprocesser - skrives på formen $\frac{a}{b}$, hvor a og b er hele tal, og $b \neq 0$. Den opstillede brøk er en strukturel opfattelse. En operationel opfattelse vil være, at et rationelt tal er resultatet af en division mellem hele tal. Elever, der har vanskeligheder med brøker, ser division mellem tal som en udregning frem for et produkt af udregningen (Sfard,

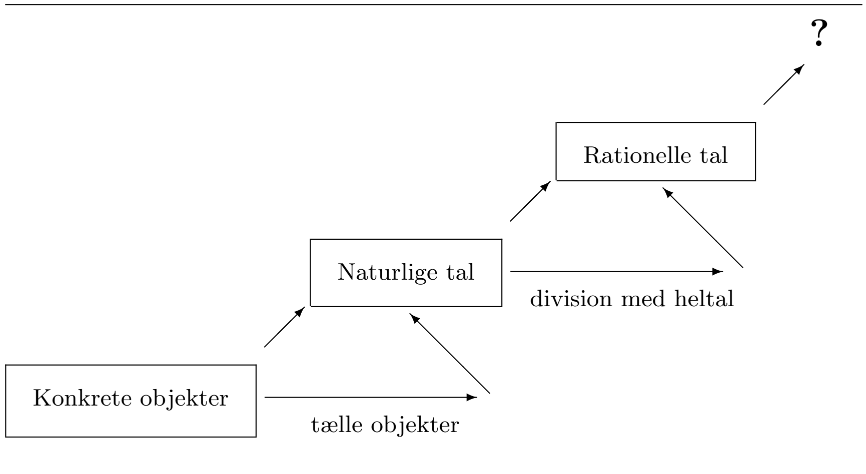
[5] På samme måde som almendannelse beskrives som dynamikken og den indbyrdes relation mellem viden og færdigheder, hvorudfra kompetencer udvikles, som beskrevet i afsnit 1.1.

1991, s. 11; Hansen, 2019, s. 99). Den tidligere fremsatte antagelse, at *procesforståelse går forud for objektforståelse*, bekræftes dermed. Det gælder både for begrebernes udviklingshistorie, som illustreret ovenfor, og i læreprocessen hos den enkelte elev (Sfard, 1991, s. 16; Blomhøj, 2016, s. 78). Den cyklus, eksemplet her viser, er, at man starter med en velkendt proces, som efter nok anvendelse kan hæves til et højere abstraktionsniveau - udvikling af objektforståelse. Når dette højere abstraktionsniveau er opnået gentages cyklussen, hvor man kan bruge det nyerhvervede objekt i andre, nye processer (Sfard, 1991, s. 13 og s. 20). Det cykliske forløb opstilles i tre faser:

1. Man gør sig kendskab med visse operationer på allerede velkendte objekter (eksempelvis at tælle antallet af konkrete genstande). De matematiske rutiner er her processer og intet andet. Der er ikke behov for andre objekter, i og med processen er begrænset til kun at indeholde det velkendte.

2. En lang periode, hvor nye ukendte objekter opstår ud fra velkendte processer. I denne fase bliver det ukendte produkt koblet sammen med de kendte processer, uden en anerkendelse af de nye ukendte produkter som værende et egentligt objekt/begreb (man bliver ved med at betragte en brøk som en proces, frem for at betragte resultatet som et egentligt tal).

3. Afsluttende kommer den strukturelle fase, hvor de tidligere ukendte produkter af velkendte processer bliver anerkendt og accepteret som et nyt objekt, som gør det muligt at anvende nye processer på det nyacceptede objekt, hvorudfra begrebet dannes og for yderligere avancement. Fx anvende roduddragning af rationelle tal for at komme videre til irrationelle tal, og videre roduddragning af negative tal til en opdagelse af de imaginære tal. Forløbet er illustreret i figur 1 (Sfard, 1991, s. 13f).



Figur 1: Den første udvikling af begrebet tal (Sfard, 1991, s. 13).

For at opsummere: Tal har undergået en serie af transformationer fra operationelle til strukturelle begreber. Gang på gang er processer anvendt på de kendte objekter, som har konverteret resultaterne til nye selvstændige enheder og udvidet vores talforståelse. Processen er blevet *'reificeret'* fra det latinske ord *res* (en ting), blevet *'tingsliggjort'* (Sfard, 1991, s. 13).

Udvider man sin horisont til at omfavne al matematik, indser man, at hvad der betragtes strukturelt på et abstraktionsniveau, er operationelt på et højere, mere avanceret abstraktionsniveau. Et hierarki, der er opstået gennem en lang række af *reifikationer*, hvor hvert niveau starter, hvor det tidligere sluttede. Men opnåelsen af den strukturelle fase, *reifikationen*, er en lang og besværlig erkendelsesproces (Sfard, 1991, s. 16, 1994, s. 53).

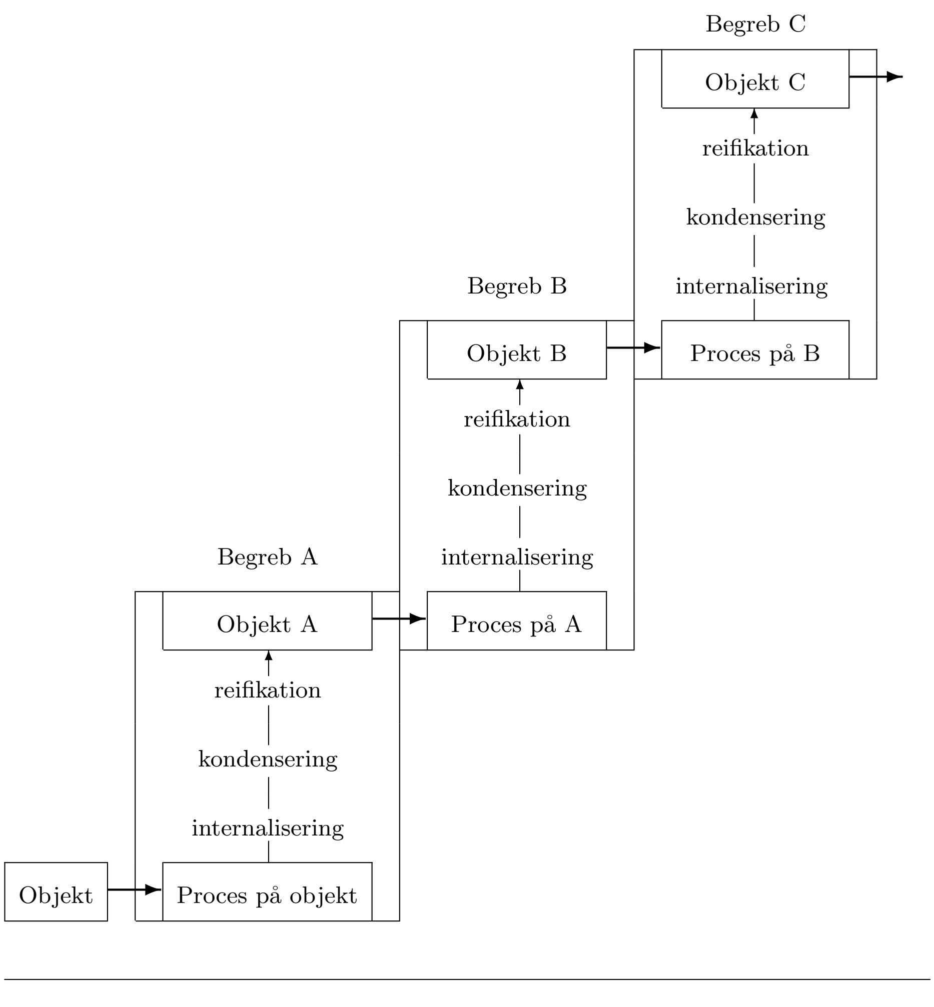
2.2.3 Introduktion af læringsmodel

Ud fra det tidligere afsnit er det nu muligt at opstille en model for begrebsdannelsens tre faser. Ganske kort udgøres modellen af de tidligere beskrevet tre faser: Som udgangspunkt har man nogle velkendte objekter, på hvilke man foretager nogle processer. Herefter opstår ideen om, at resultatet af disse processer kan dannes til et autonomt objekt. Afslutningsvis opnås evnen til endelig at kunne se objektet i et helt nyt lys som et begreb. Disse tre faser i begrebsdannelsen betegnes hhv. *internalisering, kondensering* og *reifikation/tingsliggørelse*, og illustreres i figur 2 (Sfard, 1991, s. 18).

Internalisering: (at tage processen til sig) i internaliseringen gør eleven sig bekendt med processer på matematiske objekter, hvorved eleven internaliserer processen. Her opbygges en mental afbildning af en "skridt-for-skridt"-handlingsorienteret beherskelse af en proces (Sfard, 1991, s. 18; Blomhøj, 2016, s. 79; Hansen, 2019, s. 99). Eksempelvis processen at bestemme funktionsværdier: når man kender x kan denne indsættes for at udregne $f(x)$, som med tiden bliver til 'funktionsbegrebet'. Eller ligesom det at tælle leder til naturlige tal, subtraktion medfører negative tal osv.

Kondensering: (at kunne sammenholde processen) kendetegnes ved, at eleven bliver i stand til at tænke på processen som et hele, uden nødvendighed for at gå nøgternt i detaljer. I denne fase kan processer forsøges kombineret og sammenlignet, hvorudfra generaliseringer bliver enklere. Et fuldt udviklet begreb har endnu ikke manifesteret sig, men ved undersøgelser kan man nærme sig en indsnævring af et nyt begreb (Sfard, 1991, s. 19; Blomhøj, 2016, s. 79; Hansen, 2019, s. 99). Eksempelvis med funktioner, hvor eleven i internaliseringen vil være optaget af beregning af konkrete funktionsværdier, vil eleven i kondenseringen derimod kunne bestemme værdien af x, når funktionsværdien $f(x)$ kendes. Eller forståelse for funktionens grafiske afbildning, sammenligne med andre funktionsforskrifter osv.

Reifikation: (at gøre objektet til et begreb) kondenseringen varer lige så længe som det tager et nyt begreb at manifesterer sig, idet objektet først skal frigøres fra de processer, hvortil det før var tilknyttet. Ved frigørelsen sker der et *'ontological shift'* (et ontologisk skift) og eleven bliver i stand til at beskrive objektet ved sine forskellige egenskaber og lade det indgå i højere liggende processer. Det indgår så at sige i samme ontologiske kategori som en "ting i verden" med sin egen eksistens og karaktertræk. Forløbet er illustreret i figur 2 (Sfard, 1994, s. 53; Sfard, 2008, s. 57, 2016, s. 326; Blomhøj, 2016, s. 79; Hansen, 2019, s. 99).



Figur 2: Generel model for begrebsdannelse (Sfard, 1991, s. 22).

Modellen viser, hvordan den operationelle forståelse af et matematisk begreb gennem en reifikation udvikler den strukturelle forståelse af begrebet, idet *"the stage of reification is the point where an interiorization of higherlevel concepts begins" (Sfard, 1991, s. 20)*. Men overgangen fra den operationelle til den strukturelle forståelse er en tidskrævende proces (Hansen, 2019, s.99; Sfard, 1991). De tre faser udgør et hierarki, hvilket indebærer, at for at fungerer som en cyklisk proces, så kan man ikke nå et trin, før alle de forrige trin allerede er taget, som tidligere illustreret i figur 1 og 2 (Sfard, 1991, s. 21). Det betyder, at Sfards tilgang er "ensrettet", hvor en proces med tiden bliver til et begreb, og så bygges der videre opad (Scheiner, 2016, s. 170)[6]. Ud fra et læringsperspektiv følger herudfra den vigtige pointe, at de basale færdigheder udgør fundamentet og forudsætningen for videre læring. Derudover viser modellen (og praksis), at selvom begreber introduceres strukturelt, så vil en elev i begyndelsen fortolke det på en operationel måde (Sfard, 1992, 1991, s. 23). Det er faktisk et didaktisk princip jf. reifikationsteorien, at når procesforståelsen kommer før objektforståelsen, så skal nye begreber ikke introduceres strukturelt, og strukturel opfattelse bør ikke kræves så længe eleverne kan klare sig uden (Sfard, 1992, s. 69).

2.2.3.1 Fordele ved reifikation

Med indførslen af læringsmodellen følger spørgsmålet om hvad man kan opnå med egenskaben at kunne se begreber både operationelt og strukturelt? Det åbenlyse svar er, at vores forestillingsevne er skabt ud fra vores sanser. Det er formentlig årsagen til, at vi har behov for et objekt at kunne udføre processer med. Forestil Dem eksempelvis ordet "bevægelse". De ser eksempelvis for Dem en bold, der triller, eller en mand, der løber. Det er med andre ord umuligt at forestille sig en bevægelse uden et fysisk objekt (Sfard, 1991, s. 24, 2008, s. 45).

Rent teoretisk er det muligt at betragte al matematik operationelt: Det er muligt at begynde med en enkelt proces, hvorefter man kan igangsætte en mere kompliceret proces, til en endnu mere abstrakt proces, helt uden noget behov for begreber. Men udelukkende operationel tænkning kan kun kognitivt opbevares ustruktureret og gør det tidskrævende at udføre, idet ustrukturerede sekvenser indebærer en skridt-for-skridt fremgang, hvor de kun kan kædes sammen ved, at når den ene sekvens er slut kan den næste begynde (Sfard, 1991, s. 23ff.; Baker, 2016, s. 283; Dias et al., 2016, s. 294). Gennem kondenseringen sammenpresses alle de operationelle processer og reifikationen omdanner dette til et kompakt hele, et selvstændigt objekt med en mere effektiv struktur. Reifikationen medfører, at matematik effektiviseres ved at erstatte lange procesbeskrivelser (operationelt) med det nydannede objekt, og gør eleven i stand til at betragte genstanden som en "egentlig ting" frem for en regneproces (Sfard, 1991, s. 26, 2008, s. 52ff.). Fordelen ved reifikation er, at *"the structural approach generates insight; the operationel approach generates result" (Sfard, 1991,*

[6]Heroverfor står Gray & Tall og deres opfattelse, at mentale konstruktioner dannes via procedure, proces og 'progreb'. Der ses en tydelig ensartethed i de to teoriers opsætning, men hvor Sfard er ensrettet, tillader Gray & Tall (1994, 2007) en at bevæge sig frem og tilbage mellem proces og objekt (Scheiner, 2016, s. 170).

s. 28). Ved at opnå en strukturel forståelse bliver læringen mere effektiv, mere meningsfuld (Sfard, 1991, s. 28).

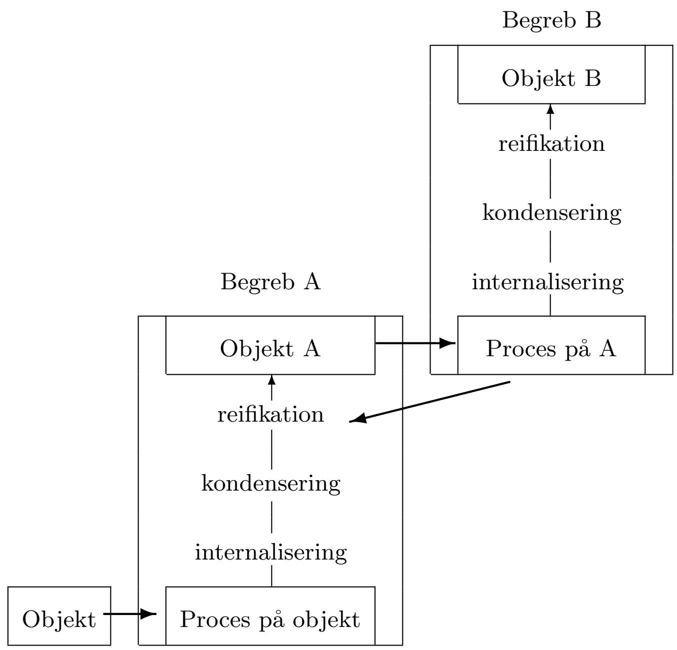
Med disse bemærkninger er vi nu i stand til at svare på det i starten stillede spørgsmål: Uden strukturelle begreber vil den mentale aktivitet være besværlig og møjsommelig. Vi er nødt til at dele matematikken op i mindre objekter, hvor hvert enkelt objekt afspejler en kondenseret mængde processer, som effektiviserer både vores matematiske kommunikation og kognition. Begreber bliver så at sige en mellemstation på vores rejse mod en højere matematisk indsigt, som figur 2 illustrerer (Sfard, 2008, 1991, s. 29).

2.2.3.2 Udfordringer forbundet til reifikation

Efter at have fremlagt styrker og fordele ved reifikation, skal der naturligvis også ses på de læringsmæssige udfordringer. Fra forrige afsnit træder en problematik hurtigt frem: Når strukturelle begreber er en effektiv kommunikationsform af en samling af kondenserede processer, betyder det, at hvis man ikke kan aflæse de matematiske repræsentationer i strukturen, så kan man ikke afkode dertilhørende processer. Den effektive formidlingsform som en strukturel forståelse bibringer, kan så at sige være uden for rækkevidde. Sagt med andre ord: En elev skal kunne oversætte strukturerne til passende processer. Oversætte fra matematisk sprog til sit eget (Sfard, 2008, s. 57).

Uden en strukturel forståelse er man konstant afhængig af at kunne bruge en række processer efter hinanden, som beskrevet i sidste afsnit. Sfard bruger eksempelvis en halv side på at beskrive et elementært udsagn $3 + 4 = 7$ operationelt (Sfard, 2008, s. 53f.). Reifikation af et begreb er derfor nødvendig. Men i reifikationen ligger en tydelig udfordring i det *ontologiske skift*, evnen til at se noget velkendt i et helt nyt lys, som aldrig er en nem opgave. Som modellen i figur 2 viser, dannes et begreb samtidig med internaliseringen af en højere liggende proces. Det er nemlig først og fremmest ved at indgå i nye processer, at en kondenseret proces kan få objektkarakter for eleven, men det kræver jo netop, at eleven er i stand til at opfatte en velkendt proces som et objekt. Denne erkendelse er måske en selvfølge, da der ikke er grund til at gøre en velkendt proces til et objekt, medmindre vi har nogle mere avancerede processer, der skal anvendes på de simplere processer, altså *"the lower-level reification and the higher-level interiorization are prerequisite for each other!" (Sfard, 1991, s. 31).* Men her kan et fænomen som Sfard omtaler som *'the vicious circle'* (den onde cirkel) indtræde i begrebsdannelsen. *Den onde cirkel* kan tilføjes modellen ved at der føres en pil tilbage fra proces til reifikationsprocessen og betyder, at begrebsdannelse forudsætter at kondenserede processer kan opfattes som et objekt for at indgå i nye processer, se figur 3 (Sfard, 1991; Blomhøj, 2016, s. 79f.).

Tesen om *den onde cirkel* er en understegning af, at dynamikken mellem proces- og objektforståelsen er essentiel for dannelsen af begrebet. Det er essentielt for beherskelsen af begrebet, at man kan skifte mellem proces- og objekttilgangen på begrebet. Når det ikke er tilfældet, indtræder *den onde cirkel*. Eksempelvis kan elever være nok så dygtige til at udregne brøker, uden at have en forståelse for brøker som tal (Sfard, 1991, s. 32; Blomhøj, 2016, s. 80).



Figur 3: Den tilbagevendende pil illustrerer *den onde cirkel* (Sfard, 1991, s. 31).

I læringssituationer kommer den strukturelle forståelse som regel efter en teknisk beherskelse af processerne. Den tidsmæssige forsinkelse i reifikationen medfører usikkerhed og frustrationer hos eleverne. De, der ikke er villige til aktivt at kæmpe for at skabe mening (reifikation) vil hurtigt opgive og trække sig tilbage til indstillingen "jeg lærer aldrig matematik". Det er Sfards anke, ud fra tesen om *den onde cirkel*, at undervisere fokuserer på at skabe en gnidningsfri overgang mellem lavere liggende reifikation med højere liggende internalisering (Sfard, 1991, s. 33f., 1992, s. 68f.). Sammenfattende kan vi på ny opstille en mere udførlig skelnen mellem *operationel* og *strukturel* begrebsforståelse, som ses i tabel 2.

	Operationel	Strukturel
Generel karakteristik	en enhed, tænkt som en proces eller identifikation med processen selv	en enhed, tænkt som en statisk struktur, som var det et virkeligt objekt
Placering i begrebsdannelsen	udvikles i starten af dannelsen af et begreb	udvikles ud fra den operationelle forståelse
Placering for læring	nødvendig, men ikke tilstrækkelig for effektiv læring	optimerer og effektiviserer læring

Tabel 2: Strukturel- og operationel forståelse opsummeret (Sfard, 1991, s. 33).

2.2.3.3 Sfards positionering

Sfard foretager ingen direkte henvisninger til at hendes teori er baseret på refleksiv abstraktion efter Piaget (Scheiner, 2016, s. 170), hvilket nok skyldes at hun har en socialkonstruktivistiske opfattelse af matematik lignende med (Ernest, 1999, 1994, s. 36f.). Sfard (2008) skriver, at hun står på skuldrene af Vygotsky og Wittgenstein. Med *"tænkning kan ikke adskilles fra sproget"* fra Vygotsky og Wittgensteins forståelse af mening som *"brugen af ord i sproget"* slår hun rod (hhv. fra Sfard, 2008, s. 100 og s. 75). Sfards idealistiske inspiration fra Wittgenstein skriver hun som:

> *"That defining relates the ways we talk about the world, not the world as such, and its up to us, not to nature, to decide how to match our words with phenomena" (Sfard, 2008, s. xvi).*

Måden vi bruger ordene på - uanset om det er i relation til den fysiske verden, social omverden eller indre, mentale verden - er en 'virksomhed' (målrettet handling), præget af den omgivende kultur og dens historie efter Vygotsky (Sfard, 2008, s. xvi; Stensmo, 2012, s. 184; Illeris, 2017, s. 55). Med andre ord anser Sfard kommunikation som en kollektiv 'virksomhed' som er historisk og kulturelt betinget af interpersonel aktivitet og for at operationalisere kommunikation skal man undersøge hvordan folk bruger sproget og afdække, hvorfor de bruger det, som de gør (efter Wittgensteins sprogspil) (Sfard, 2008, s. 75ff.).

Sfards læringsopfattelse fremlægger hun som en komplementerende relation mellen metaforerne: 'læring gennem deltagelse' og 'læring gennem tilegnelse', hvor hun selv foretrækker sidstnævnte (Sfard, 1998, 2008). For Sfard skal der ikke opstå en dikotomi mellem de to metaforer, som understreges af introduktionen af begrebet *'commognition'*. Ordet er en samlet betegnelse for fænomener, der traditionel hører til både kognition og kommunikation, og at kommunikation er nødvendig for kognition (Sfard, 2008, s. 83). Selvom Sfard åbenlyst har sin hovedvægt på kommunikation, er hun som *'commognitive'* antyder ikke afvisende overfor kognitive relationer, ligesom læringsbeskrivelsen fra afsnit 2.1 omfavner begge metaforer, som også ses i Ernest (1998).

2.3 Repræsentationer af matematik, Steinbring

Forskellige repræsentationsformer har altid haft betydning for forståelsen, men som Sfard skriver, så indgår de kun perifert i reifikationsteorien (Sfard, 1991, s. 21). Hertil bidrager Steinbring (1989, 1993, 1999, 2005, 2006), hvor dette afsnit præsenterer hans teori. Selvom hans teori om den *epistemologiske trekant* er ældre end Sfards model, så har han over de sidste 30 år foretaget et utal af empiriske undersøgelser med sin teori, og hans vægtning af sociale kontekster og 'det at tale matematik' gør den passende at sammenholde med Sfards arbejde.

Hvis De tænker tilbage på citatet fra Einstein i indledningen til kapitel 2, her frit oversat: *"matematikken handler udelukkende om begrebernes forhold til hinanden uden hensyn til deres forhold til virkeligheden"* ses vigtigheden af, at begrebernes indbyrdes forhold udtrykkes via forskellige repræsentationer. Den franske matematikdidaktiker Raymond Duval (2006) beskriver, at det, der adskiller matematik fra andre fag, er, at alle matematiske begreber er abstrakte. Matematiske objekter kan ikke sanses direkte, som omverdensfænomener kan, men afspejles gennem semiotiske repræsentationer. Det er karakteristisk for matematiske begreber, at de kan repræsenteres på mange forskellige måder via især symbolske, grafiske og sproglige repræsentationer. Det er så aktuelt, at det er blevet et fagligt mål i sig selv at kunne oversætte og bevæge sig mellem de forskellige repræsentationer på matematik B-niveau (Undervisningsministeriet, 2017b, s. 1). Det er netop gennem arbejdet med konkrete repræsentationer, at eleven kan udvikle sin begrebsforståelse (Blomhøj, 2016, s. 68; Steinbring, 2006, s. 135).

I Duval (2006) beskrives, at matematikken kobler abstrakte begreber til noget konkret i verden omkring os via tegn og symboler (Duval, 2006, s. 106). Han fremhæver tre karakteristika for matematik:

1. Stor betydning af semiotiske repræsentationer.

2. Et 'kognitivt paradoks', der er tilknyttet adgangen af matematiske objekter.

3. Stor variation i brug af semiotiske repræsentationer.

Det, Duval betegner som et kognitivt paradoks, består i, at semiotiske repræsentationer (tegn og symboler) er nødvendige for al matematisk aktivitet, og man har et valg med hensyn til hvilke semiotiske repræsentationer, man vil benytte (Duval, 2006, s. 107; som også fremhæves i Ernest, 1999, s. 76). Matematiske objekter må aldrig forveksles med de semiotiske repræsentationer, der anvendes. Veksling mellem forskellige repræsentationsformer (*'registre'*) for samme matematiske objekt er ifølge Duval essentielt:

> *"Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum" (Duval, 2006, s. 128).*

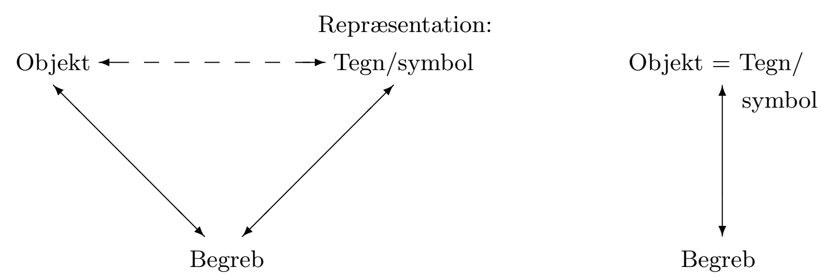
Denne vigtighed opstiller Steinbring en model over, som indeholder samspillet mellem *tegn-symboler-begreber* (Steinbring, 2005, s. 19). Matematiske begreber forstår han som:

> *"Die Bedeutung des mathematischen Begriffes konstituiert sich als eine Beziehungsform zwischen Zeichen (oder Symbol) und Gegenstand (oder Objekt)[7]"(Steinbring, 1993, s. 117).*

Samtidig anser han ligeledes matematiske begreber som en autonom enhed: *"Mathematical concepts represent a relatively autonomous epistemological entity" (Steinbring, 2005, s. 19).* Matematiske begreber udgøres ikke af empiriske

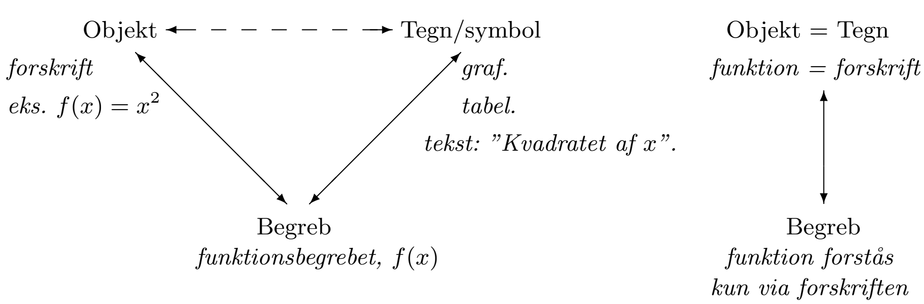
[7] Oversættelse: "De matematiske begrebers betydning udgøres af forholdet mellem tegn (eller symbol) og genstand (eller objekt)".

størrelser eller fysiske genstande, men relationer. Relationer mellem *tegn/symbol* og *objekt/kontekst*. Al matematik behøver et *tegn/symbol* (en repræsentation). Disse *tegn* har i sig selv ingen betydning. Betydningen af matematiske *tegn* skal konstrueres af eleven ud fra et *objekt/kontekst* - historisk set beror al matematik på mellemmenneskelige konventioner (Steinbring, 2005, 2006), præcis som Sfard (2008) og Ernest (1999) også påpeger. *Symbol/tegn* betegner en specifik repræsentation, eksempelvis en graf. *Objekt/kontekst* kan være en konkret funktionsforskrift og *begrebet* er et dertilhørende overordnet matematisk begreb, eksempelvis funktionsbegrebet. Den epistemologiske ramme omhandler dermed videns beskaffenhed udtrykket ved en trekant med vinklerne placeret ved: *objekt - symbol - begreb*, se figur 4 (a) og figur 5 (a) (Steinbring, 1989, s. 28f.; Stensmo, 2012, s. 32). Sfard beskriver lignende ift. tænkningen og abstraktion, hvor udtrykket (repræsentationen) x^2 sammenlignet med ordet 'parabel' (objekt) står for det samme, men er blot repræsentationer for begrebet 'funktion' (Sfard, 2008, s. 122f.).



(a) Epistemologisk trekant **(b)** Kollaps

Figur 4: Epistemologisk trekant (Steinbring, 1989, s. 29).



(a) Epistemologisk trekant **(b)** Kollaps

Figur 5: Epistemologisk trekant med eksempel (se også Blomhøj, 2016, s. 70).

Eksempelvis har symbolet a i sig selv ingen betydning. Betydningen dannes i forhold til bestemte objekter, som når tegnet a indgår i objektet $y = a{\cdot}x{+}b$ og får betydning som 'hældningskoefficienten'. Relationen mellem tegnet og objektet hører under et overordnet begreb. I eksemplet refererer tegnet a og objektet $y = a \cdot x + b$ tilbage til begrebet 'linjens ligning' eller 'lineær funktion' (Schou, 2018, s. 8f.).

I den *epistemologiske trekant* fortolkes læringsprocesserne som en udvidelse af relationer mellem *symbol/tegn* (fremover betegnet *repræsentation*) og *objekt/kontekst*. I takt med at repræsentationer og operationelle processer bliver mere omfattende og varierede, vil objekter og kontekster tilsvarende forøges og tilpasses (Steinbring, 1989, s. 30), parallelt til Sfards avancement i begrebsdannelsen, fra figur 2. Et karaktertræk ved den epistemologiske trekant er, at bestanddelene ikke er givne 'a priori'. Tolkningen af disse er "flydende" og konstrueres som mentale ideer af eleven, hvor trekanten kan synliggøre om elevernes konstruktion stemmer overens med en matematisk accepteret konstruktion (Steinbring, 2005, s. 30 og s. 22).

Læringsvanskeligheder forklares ud fra af den epistemologiske trekant som følgende: Når *konteksten* identificeres med en bestemt *repræsentation*, skabes et lineært en-en-forhold (Steinbring, 1989, 2005, 2006) og på den måde kan man sige at den epistemologiske trekant *'kollapser'*, se figur 4 (b) og figur 5 (b). I så fald kan matematisk indsigt og forståelse kun udvikles sig på et enfoldigt, ensporet grundlag. Ved at identificere et begreb med en bestemt repræsentation gør, at man mister adgang til at skabe dybere mening (Steinbring, 1989, s. 26, 2005, s. 2f.; Blomhøj, 2016, s. 69). Et godt eksempel på dette ses i et arbejde af Eric Knuth, der analysere elevbesvarelser på præfabrikerede opgaver, omhandlende opgaver med både en visuel og en verbal beskrivelse af samme scenarie. Det viser sig, at eleverne kobler algebra og funktioner sammen med en konkret ligning, som skal løses, selvom svaret hurtigt kan aflæses på den medfølgende graf (Knuth, 2000, s. 50).

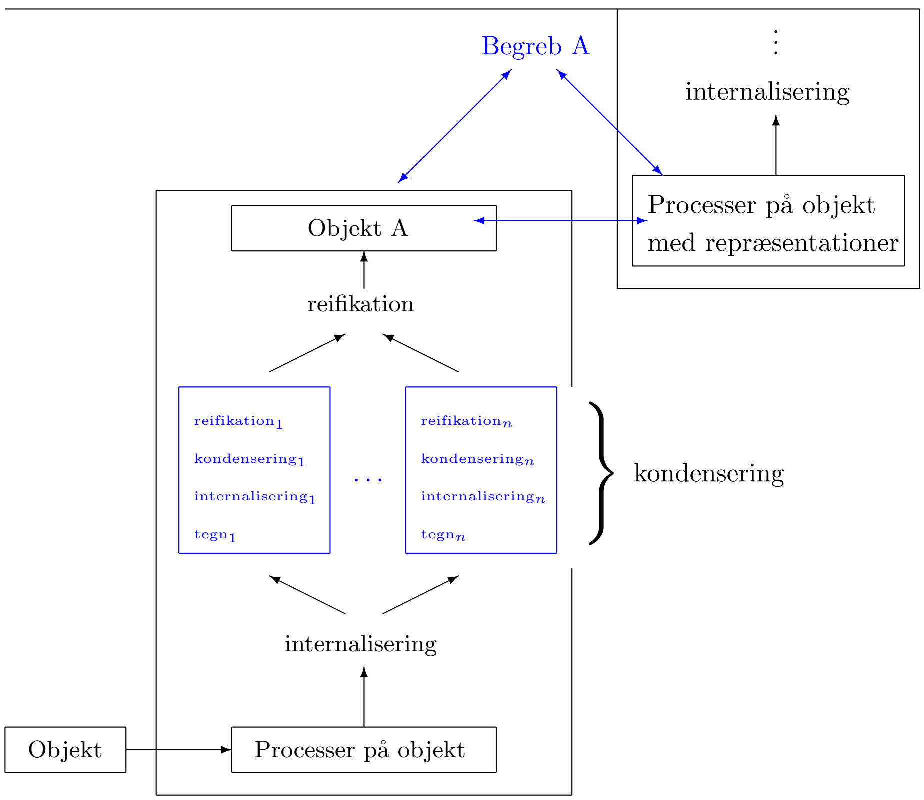
Opsummerende kan det siges, at begrebsdannelsen sker gennem en udvidelse og vækst af eleven konstruerede relationer mellem *objekter* og *repræsentationer* som gør det muligt for eleven at bruge flere og flere procedurer og løsningsmetoder, som det ses i reifikationsteorien. Matematisk viden kan ikke præsenteres, men skal rekonstrueres, og dens betydning er i et relationelt samspil mellem symbolske repræsentationer i objekter/kontekster Et ensidigt fokus på en form for procedurer alene, er utilstrækkeligt (Steinbring, 1989, s. 30f., 2006, s. 135; Schou, 2018; Matematikkommissionen, 2017, s.4). Hele denne beskrivelse har fællestræk med Sfard (1991), hvor årsagen til *den onde cirkel* i Sfards teori kan sammenlignes med et *kollaps* i den epistemologiske trekant.

Men matematikkens helt specielle beskrivelseskraft som beskrevet af Duval (2006), at matematiske begreber kan anvendes i et utal af forskellige semiotiske sammenhænge, beror på abstraktion - altså en frigørelse - fra deres kontekst. Det er ikke muligt at kortlægge en kognitiv læringsændring hos en elev (Eisenberg, 2002, s. 144), men den epistemologiske trekant er en model til at gøre noget af den 'tavse' matematiske viden tilgængelig med hensyn til at beskrive og analysere processerne, der ligger til grund for konstruktion af matematisk viden (Steinbring, 2005, s.30f.).

2.4 Reifikation og repræsentation

Som allerede annonceret har Sfard og Steinbring flere fællestræk. De bygger begge på metaforen 'læring gennem deltagelse' i sociale (historisk betingede) kontekster. Derfor ser jeg det anvendeligt at samle de to modeller til en samlet model, hvormed man får *den udvidede reifikationsteori* (figur 6), der dækker over både begrebsdannelse og repræsentationsformerne. Ved at flette de to teorier sammen dannes en endnu mere nuanceret indsigt i den matematiske begrebsdannelse, hvor en konsekvens af at placere Steinbrings epistemologiske trekant som mellemled i reifikationsprocessen må være, at en reifikation af hver repræsentationsform skal finde sted før et nyt begreb fuldbyrdes i sin helhed.

Modellen i figur 6 illustrere, at hvis et nyt objekt som et hele skal kunne sættes i spil i nye processer for at danne og beherske et begreb, jf. reifikationsteorien, så er det nødvendigt, at de forskellige repræsentationsformer har undergået en reifikation, jf. den epistemologiske trekant. Kollapset i den epistemologiske trekant (hvor et objekt identificeres med en bestemt repræsentation) medfører den onde cirkel (at man er ude af stand til at bruge objekter i nye processer), hvorfor man sendes tilbage for at redefinere sin objektforståelse gennem en udvidelse med endnu en repræsentationsform.



Figur 6: *Den udvidede reifikationsteori*, hvor Steinbring er markeret med blåt.

Man kan med andre ord sige, at en reifikation af de enkelte repræsentationer er en forudsætning for det ontologiske skift, hvorigennem et nyt begreb opstår. Denne tænkning understøttes bl.a. af Knuth (2000) og Steinbring (1989), som - oversat med den her indførte terminologi - fremhæver en udfordring ved at elever kan være på et stadie i reifikationsprocessen angående en repræsentation, og samtidig være et helt andet, lavere sted vedrørende en anden repræsentation.

Derfor har jeg *udvidet reifikationsteorien* til at indeholde den epistemologiske trekant, forstået således at den epistemologiske trekant placeres i samspillet mellem objektet og anvendelse af nye processer. Hvis dette ikke udvikler begrebet og trekanten kollapser, sendes man tilbage til kondenseringen, hvor den kondenserede helhed skal justeres. Opsummerende vil det sige, at for at opnå en vellykket begrebsdannelse, så vil kondenseringen bestå af nogle mindre reifikationsprocesser for de enkelte repræsentationsformer. Disse tilsammen udgør grundlaget for, at et samlet og abstrakt begreb kan begynde at manifestere sig. Hvis et objekt derimod identificeres som en bestemt repræsentation, kan man ikke danne sig et nyt begreb i sin helhed, hvorfor man må vende tilbage og få de andre repræsentationsformer reificeret så det ontologiske skift indtræder og danner et begreb, som så kan sættes i spil i nye højere liggende processer.

At arbejde med repræsentationer er med reformen af 2017 blevet et fagligt mål i sig selv. Undervisningsbekendtgørelsen fremhæver fire repræsentationsformer *"tekst, forskrift, tabel og graf" (Undervisningsministeriet, 2017b, s. 1)*. Hvor de to førstnævnte er tilknyttet en *verbal* repræsentationsform, er den sidstnævnte en *visuel* repræsentationer og den tredje er en "både og", en mellemting mellem verbal og visuel. Derfor arbejder jeg i dette speciale med den operationelle- og strukturelle begrebsforståelse, belyst ud fra den *visuelle* og *verbale* repræsentationsform.

Sammenfattende kan det i forhold til første delspørgsmål (fra afsnit 1.3) formuleres som: Med *den udvidede reifikationsteori* har jeg opstillet en model, der kan bruges til at begrebsliggøre strukturen over begrebsdannelsen som adresseret i første delspørgsmål. For at den onde cirkel ikke indtræder, skal repræsentationsformerne nødvendigvis inddrages i analysen af begrebsdannelsen. I næste kapitel introduceres De for de overordnede metodiske overvejelser og heriblandt undervisningsvejledningen, der opstiller tre søjler (domæner) som gymnasiematematikken bygger på. Disse tre er *"funktionsteori, geometri og statistik & sandsynlighedsregning" (Undervisningsministeriet, 2020a, s. 1)*. Den vigtigste af disse er funktionsteorien, og ud fra den her fremstillede teori kan den hierarkiske struktur over begrebsdannelsen i funktionsteori skitseres som: *Talforståelse →ligninger →funktioner →avancerede funktioner →differentiabilitet*[8].

Ud fra beskrivelsen af de tre faser i begrebsdannelsen og repræsentationernes betydning opstiller jeg til sidst i tabel 3 (Kunne også indsættes i figur 2 og 6) en teoretisk funderet progression over funktionsteoriens begrebsdannelse. Spørgsmålet til analysen bliver dermed, hvorvidt eleverne formår at danne og formidle begreberne i funktionsteori. Til næste kapitel bliver spørgsmålet derimod, hvordan teorien om begrebsdannelsen metodisk kan vurderes.

[8] Differentialregning er et af de største og mest abstrakte emner på B-niveauet.

	Verbalt	Visuelt
A. Ligninger		
Internalisering:	Man er i stand til at undersøge om et tal er en løsning til en ligning. Man kan løse en ligning og et ligningssystem.	Man er i stand til at aflæse grafiske løsninger til ligninger. At visualisere ligningssystemer grafisk. Afsætte punkter i et koordinatsystem.
Kondensering:	Man begynder at kunne arbejde med udtryk med bogstaver og flere ubekendte, reducere udtryk med brøkregneregler, kvadratsætning, osv.	Sammenligne tabellers værdier. Visualisere sammenhænge, når de ubekendte antages at have en given størrelse.
Reifikation:	Man kan arbejde med notationen $y = f(x)$, hvor en sammenhæng med to variable udtrykkes frem for en konkret ligning.	At forstå en ligning som en grafisk sammenhæng mellem to størrelser. At forstå en funktions graf som en samlet enhed, frem for en konkret ligning. Grafisk at aflæse vilkårlige værdier ud fra første- og andenaksen.
B. Funktioner		
Internalisering:	Man er i stand til operationelt at udregne funktionsværdier.	Man er i stand til at opstille tabel over funktionsværdier og afsætte punkter, (x_1, y_1), i et koordinatsystem.
Kondensering:	Man betragter funktionsforskriften som et hele. Man kan arbejde med $y = f(x)$ og isolere en x-værdi i forhold til en kendt y-værdi. Man kan sammenligne flere funktionsforskrifter.	Man kan sammenligne flere forskellige funktionsforskrifter med tilhørende grafer. Forståelse for grafisk aflæsning af monotoniforhold, definitions- og værdimængde.
Reifikation:	Man kan bruge funktioner i nye processer. Eksempelvis regne med $f(x + k)$ og regne med flere funktionsforskrifter, eksempelvis $h(x) = f(x) + g(x)$	Man kan bruge graferne i nye processer. Eksempelvis arbejde med parallelforskydning af grafer.
C. Differentiabilitet		
Internalisering:	Man er i stand til at bestemme differentialkvotienter efter et skema. Man kan udregne konkrete differentialkvotienter. Man kan udregne ligningen for en tangent.	Man kan illustrere differentialkvotient ved at aflæse en tangenthældning. Her forholder man sig til specifikke talværdier.
Kondensering:	Bruge $f'(x)$ til at beskrive monotoniforhold for grafen for $f(x)$. Bruge differentialkvotienter i argumentation omkring funktioners væksthastighed. Her antydes konturerne for at samtlige tangenthældninger kan udtrykkes ved en funktionsforskrift. Man kan bestemme en x ud fra en differentialkvotient.	At kunne sammenkoble fortegn for $f'(x)$ med grafen for $f(x)$. Man har forståelse for grafen for den differentierede funktion $f'(x)$. Man kan grafisk arbejde med flere forskellige funktioners afledede funktioner.
Reifikation:	Her kan man bruge den differentierede funktion $f'(x)$ i nye processer. Her kan man eksempelvis bruge regnereglerne og differentiere et produkt af to funktioner eller sammensatte funktioner. Man kan beskrive den hurtigste væksthastighed for en funktion, hvor man skal differentiere den differentierede funktion, altså udregne $f''(x)$.	Illustrere funktionerne $f(x), f'(x)$ og $f''(x)$ grafisk og beskrive deres indbyrdes forhold. Grafisk illustrere regnereglerne og betragte den afledede funktion grafisk som enhver anden funktion.

Tabel 3: Kendetegn ved reifikationerne: ligning, funktion og differentiabilitet.

A. Ligninger bygger på Sfard & Linchevski (1994), hvor de beskæftiger sig med overgangen fra operationel algebra til det strukturelle, og videre til dannelsen af funktionsbegrebet, og delvist på Knuth (2000).
B. Funktioner bygger på Sfard (1991, 1992) og Knuth (2000, s.50f.), hvor Knuth arbejder med grafisk og algebraisk forståelse af funktionsbegrebet, som her kan sættes i relation til reifikationsteorien og den epistemologiske trekant.
C. Differentiabilitet er inspireret af Blomhøj (2016, s. 83f.), der tager afsæt i den teoretiske dimension af faget, hvor jeg har tilrettet til den skriftlige dimension.

Kapitel 3

Metodikker til undersøgelse af faglighed

I lyset af de nylige rapporter om fagligheden i gymnasieskolen af Syddansk Universitet (Markvorsen et al., 2019) og Danmarks Evalueringsinstitut (2018a), tillige med en i England udarbejdet lingvistisk undersøgelse af eksamensopgavesættene af Candia Morgan og Anna Sfard (2016) finder dette speciale sit metodiske fodfæste. De førnævnte kildehenvisninger har dog forskellige intentioner og undersøgelsesområder, hvorfor disse først kommenteres. Fællesnævneren for de tre er udviklingen af fagligheden i matematikfaget, men primært ud fra den intenderede faglighed gennem ministerielle kilder. Syddansk universitet inddrager dog nogle elevbesvarelser for at se på elevernes opfyldelse af de faglige mål for de udvalgte år, men med det mål for øje at kunne konkludere på udviklingen af fagligheden.

Et ønske og en pointe fra forskningslitteraturen om faglighed omhandler forslag og metoder til en grundlæggende fælles forståelse til at kunne italesætte og undersøge fagligheden. Der ønskes et sammenligningsgrundlag for at kunne følge fagligheden fremadrettet, men samtidig også en afklaring af, hvad faglighed indebærer, da faglighed er et bredt begreb, der dækker både almendannelse, studieparathed, fagfaglighed (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 134). Denne metodiske problemstilling ses nærmere på i dette kapitel, da jeg skal have opstillet en metodisk ramme med fokus på begrebsforståelsen, jf. andet delspørgsmål i afsnit 1.3.

3.1 Danmarks Evalueringsinstituts metodik

Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) skelner mellem tre forskellige typer af faglighed: *intenderet faglighed* (undervisningsbekendtgørelsen), *implementeret faglighed* (det, lærerne underviser i, og hvorledes dette gøres) og *tilegnet faglighed* (det, eleverne lærer i arbejdet med faget) (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 7). Deres arbejde består af en dokumentanalyse af undervisningsbekendtgørelser, undervisningsbeskrivelser og eksamenssæt og analyserer dermed den politisk intenderede faglighed i matematikfaget. Jeg er optaget af den *tilegnede faglighed*, hvorfor deres metodisk ramme ikke er overførbar til dette speciale. Deres arbejde kan dog vejlede, idet deres afsluttende kapitel omhandler fremadrettede muligheder for at følge det faglige niveau (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 133ff.).

Til at undersøge den tilegnede færdighed foreslår Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) flere forskellige metodiske greb, bl.a. karakterer, analyse af skriftlige opgavebesvarelser og censorinterviews (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 140). Jeg vil i dette speciale anvende opgavebesvarelser. Et valg, der bygger på flere argumenter. Til den første bemærkning angående karakterer så har karakteren en række begrænsninger. En karakter fortæller ikke noget om, hvilken begrebsforståelse eleverne besidder, eller hvor eleverne har deres kommunikative styrker eller svagheder - kun implicit. Karakteren, uanset om det er med et formativt eller summativt sigte, kan ikke "stå alene" i en vurdering af elevers faglighed og kompetencer (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 141, 2016, s. 29 og s. 113; Katznelson & Louw, 2018, s. 65). Derfor kan karakteren ikke give detaljerede informationer om elevernes tilegnede faglighed, men kan bruges deskriptivt til komparationer, som det kommer til udtryk i eksempelvis de årlige evalueringer af skriftlige prøver (se Undervisningsministeriet, 2019a). Karakteren for de deltagende elever kommenteres nærmere i afsnit 4.1.2.

I forhold til interviews, anbefaler Danmarks Evalueringsinstitut (2018a) interviews med censorer som supplement til karaktererne. Censorernes udsagn kan uddybe og understøtte en analyse af karaktererne. I dette speciale er jeg ikke optaget af det summative sigte ved fagets afslutningen, men derimod den læringsproces eleverne gennemgår. Dertil kommer COVID-19, der har besværliggjort gennemførelsen af interviews. Jeg kan godt se fordelen ved at bruge elevinterviews til at be-/afkræfte specialets resultater og triangulere specialets fund (Schoenfeld, 2002, s. 464). Men grundet usikkerheden forbundet med COVID-19 situationen er det fravalgt.

Med analyse af skriftlige opgaver fremhæver de, at en systematisk indsamling af opgavebesvarelser over tid giver mulighed for at belyse: *"hvordan eleverne har omsat fagligheden i deres skrevne tekster, og undersøge, hvordan og i hvilket omfang de har nået de faglige mål" (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 141)*, og på den opfordring har jeg fundet de skriftlige elevproduktioner som et interessant nedslagssted. Også fordi det fremhæves af Ernest (1994), at overgangen fra tale til skrift er af yderste vigtighed til at skabe et andet forhold mellem forfatteren og sine udsagn, hvor udsagn bliver objektificeret og lagret ud over det talte øjeblik (Ernest, 1994, s. 36). Til at håndtere sådan skriftligt materiale introducerer Syddansk Universitet en anvendelig metoderamme, hvorfor vi vender blikket over til deres rapport.

3.2 Syddansk Universitets metodik

Som allerede beskrevet efterspørger Syddansk universitet ligeledes et fælles sprog til beskrivelse af faglighed. For Syddansk Universitet er det afgørende at der arbejdes med en dokumentationsmetode, som tager højde for og afspejler dynamikken i elevernes læringsprocesser. De udarbejder en metode, med hvilken det er muligt at indfange elevernes tilegnede grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer. Tilsammen udgør deres metode en fælles ramme, der kan bruges på tværs af uddannelsessystemet til at italesætte og vurdere det faglige niveau (Markvorsen et al., 2019, s. 99). Deres indførte metodik har en lang række fællestræk med specialets teoretiske positionering, dog med enkelte undtagelser, hvorfor jeg i dette afsnit vil redegøre for deres metode og analysemodel samt kommentere på ligheder og forskelle. På den baggrund præsenteres i næste kapitel den konkrete metodiske procedure, som har fundet sted i dette speciale.

3.2.1 Dynamisk forståelse af faglighed

I Syddansk Universitets rapport forstås matematisk faglighed som en dynamisk kombination af viden, færdigheder og kompetencer. Opfattelsen er baseret på det intenderede, som kommer til udtryk i undervisningsvejledningen i matematik Undervisningsministeriet (2020a), tillige med KOM-rapporten (Niss & Højgaard, 2002). Selvom viden, færdigheder og kompetencer er tre forskellige dele, så udgør de tilsammen en helhed. Man kan således ikke være i besiddelse af kompetencer uden viden og færdigheder, og omvendt er viden og færdigheder nytteløse, hvis ikke man kan sætte dem i spil (Markvorsen et al., 2019, s. 17; Dolin, 2017, s. 30).

I Niss & Højgaard (2019) evalueres kompetencebegrebet efter snart to årtiers anvendelse, hvor de konkluderer, at de grundlæggende ideer bag kompetencebegrebet er bevaret. Kompetencer er det at *gøre* og *vide* matematik (Niss & Højgaard, 2019, s. 25). Viden, færdigheder og kompetencer er sammenhængen og dynamikken mellem:

> *"The important thing is not just what you know but how you know it, and what you can do with what you know" (Niss & Højgaard, 2019, s. 11).*

I KOM-rapporten defineres matematisk kompetence til at bestå af konkret viden og konkrete færdigheder, som kan anvendes i situationer, som rummer matematiske udfordringer (Niss & Højgaard, 2002, s. 43). Fordelen ved at forstå faglighed gennem tredelingen er, at viden og færdigheder udgør grundlaget, på hvilket kompetencerne bygger på. Tredelingen skal forstås dynamisk, frem for statisk reducerbar, hvilket vil være uhensigtsmæssigt for at undersøge elevernes progression (Markvorsen et al., 2019, s. 18). Hvis de ikke anses som en dynamisk, varierende størrelser, reduceres kompetencer til endemål og ikke som delmål (Markvorsen et al., 2019, s. 19). Noget, som Mogens Niss & Thomas Højgaard selv var opmærksomme på ved indførslen af kompetencer (Dolin, 2017, s. 48), men denne fare kommenteres ikke i Niss & Højgaard (2019).

Eksempelvis kan dynamikken illustreres ved at en elev på grundlag af sin viden arbejder med færdigheder indenfor parentesregning med kvadratsætningen: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Når denne mestres indgår kvadratsætning i det grundlæggende arsenal af viden, som sætter eleven i stand til at arbejde med mere avanceret matematik, eksempelvis at bruge kvadratsætningen omvendt og omskrive ligningen $y^2 + x^2 + 1 - 2x = 4 \Leftrightarrow (y-0)^2 + (x-1)^2 = 4$ til cirklens ligning med centrum i $(0,1)$ og radius $r = 2$. En dynamisk proces-objekt-tanke, som kræver at en reifikation har fundet sted over den matematiske proces 'kvadratsætningerne'. Forståelsen af en dynamiske tankegang mellem viden, færdigheder og kompetencer er med andre ord sammenfaldende med Sfard (1991, 2008) og hendes beskrivelse af begrebsdannelsen (fra afsnit 2.2.3). Parallelt med tænkningen hos Steinbring (1989, 2005), at jo flere repræsentationer man behersker, desto mere avanceret matematik kan man udføre.

Metaforisk udtrykkes tankegangen i undervisningsvejledningen i form af en læringsspiral, og Syddansk Universitet skriver, *"at dynamikken kan beskrives og analyseres rimelig fagnært i dette projekt, fordi det aktuelle domæne er robust veldefineret" (Markvorsen et al., 2019, s. 19)*, hvor domænet referere til undervisningsvejledningens beskrivelse af matematikfaget.

3.2.2 Introduktion af GVH-rammen

Med undervisningsvejledningen (Undervisningsministeriet, 2020a) i ryggen er Syddansk Universitets tankegang om en dynamisk relation mellem viden, færdigheder og kompetencer udmøntet, som genkendes hos Sfard og Steinbring, og videreføres i specialet. Undervisningsvejledningen er en mere omfattende beskrivelse end bekendtgørelsen, hvorfor undervisningsvejledningen er en god repræsentant for den intenderede faglighed i gymnasieskolens matematik. Derfor opfatter jeg Syddansk Universitets tilgang til deres undersøgelse som en genistreg. De tager afsæt i en af matematiklærerne allerede kendt tekst, hvormed der som udgangspunkt allerede er etableret en fælles forståelse.

I undervisningsvejledningen beskrives matematikfaget i gymnasiet til at bestå af tre søjler: *Funktioner, geometri og statistik & sandsynlighedsregning.* Syddansk Universitet foreslår en såkaldt 'GVH-ramme' til beskrivelse af fagligheden i søjlerne som går ud på, at matematikfaglighed beskrives via tre aspekter af fagligheden, hhv. (G) *Grundlæggende*, (V) *Vertikal* og (H) *Horisontal*. (G) er grundlaget, dvs. basal og grundlæggende viden og færdigheder, inden for en given søjle. (V) betegner kompetencen til at kunne anvende grundlaget til løsning af opgaver inden for den pågældende søjle på et højere niveau. (H) er kompetencen til at kunne tænke og agere på tværs af forskellige matematikinterne områder samt evnen til at kunne anvende matematikken i relation til andre fag (Markvorsen et al., 2019, resumeet, s. 6).

3.3 Definition af GVH-rammen til specialet

Den tidligere introducerede terminologi kan for nærværende speciale defineres som:

G: Står for den grundlæggende viden og færdigheder i at arbejde med matematiske processer. Karakteristisk er, at forventningerne til det basale og grundlæggende vil være stigende med fagets niveau. Yderligere er G betegnet ved reproduktion og typeopgaver, hvortil imitativ tænkning er tilstrækkelig. I forhold til Sfard er dette første fase, internaliseringen. I forhold til Steinbring vil her være tale om det epistemologiske kollaps, hvor et objekt identificeres som en enkelt repræsentation.

V: Den vertikale kompetence består af evnen til at kunne videreudvikle noget, der allerede er matematisk kendt. Den er karakteriseret ved, at eleven kan se de trin for sig, der skal til for at løse et matematisk problem, og eleven kan formulere en fremgangsmåde. I forhold til Sfard svarer dette til anden fase, kondenseringen. I forhold til Steinbring vil det svare til arbejdet med forskellige repræsentationer, der kan sættes i spil.

H: Den horisontale kompetence defineres til at man kan tænke på tværs af matematiske fagområder. Eleven formår at bruge matematik på tværs af fagområderne til at beskrive og løse et problem. I reifikationsteorien kommer den til udtryk ved opgaver, hvor en proces er blevet reificeret, hvor man skal gå strukturelt til værks.

Definitionen bygger på grundlag af Syddansk Universitets arbejde (Markvorsen et al., 2019, s. 26; Qvortrup & Ljungdahl, 2019b, s. 11; 2019, s. 43). Det bør bemærkes, at denne karakteristik er hensigtsmæssig til at beskrive opgavetyper. Jeg har desuden interesse i elevernes progression og ser GVH-rammen som en terminologi til at strukturere og inddele opgaverne efter hvilken begrebsforståelse opgaven efterspørger. Dette har jeg illustreret ved at tilføje Sfards reifikationsteori i definitionen af GVH-rammen. Der mangler dog stadig et metodisk greb til beskrivelse af elevernes besvarelser.

3.4 Kriterier for vurdering af formidling

Med GVH-rammen til at beskrive faserne i reifikationsteorien mangler således kun en holdbar metode til vurdering af begrebsformidlingen i de enkelte elevbesvarelser, således at empirien bliver identisk behandlet. Der bør være nogle konkrete referencepunkter, der kan være med til en vurdering af elevernes besvarelser. I et arbejde af Morgan & Sfard (2016) analyseres ligesom Syddansk Universitet og Danmarks Evalueringsinstitut eksamensopgavesættene. Morgan & Sfard (2016) afviger fra de andre, da de fremlægger en lingvistisk, metoderamme som netop opstiller konkrete punkter og spørgsmål, der lægger op til en vurdering af den skriftlige formidling. En ramme, som i høj grad kan overføres til elevernes besvarelser, hvis de tilpasses hertil. De opstiller fire parametre, hvoraf jeg anvender tre af disse: *matematisk ordforråd, visualisering, matematiske rutiner*, se tabel 4. Parametre, der i den givne situation er aktuelle, idet paramterne dækker begrebsdannelsen og de i bekendtgørelsen beskrevne repræsentationsformer: *"tekst, regneforskrift, graf og tabel"*.

Ved matematisk *ordforråd* forstås ens anvendelse af de matematiske termer. Selvom man bruger det samme matematiske ordforråd, kan det formidles på vidt forskellige måder. Ved *visualisering* forstås de af grafer afhængige opgaver, men også de muligheder, som eleverne kan gøre brug af for at understrege en pointe, eller understøtte deres påstand og gøre det tydeligt, at de ved hvad de laver. Eller mangel på samme, som konstateret af (Knuth, 2000). Forskellige visualiseringer er et vurderingskriterium, der primært har sin relevans i forhold til de forskellige repræsentationer, men selvfølgelig også i min *udvidede reifikationsteori* i figur 6. Matematiske *rutiner* henviser til eksekveringen af matematiske opgaver, eksempelvis gennem en algoritmisk tænkning (Morgan & Sfard, 2016, s. 101) Ud fra de tre parametre opstilles tabel 4 til vurdering af elevernes besvarelser. Denne tabel er indført og taget i brug som en foranstaltning for en konsekvent vurdering af elevernes besvarelser. Kriterierne for elevbesvarelserne og GVH-rammen er med til at sikre en ensartethed i de enkelte vurderinger og tillader et solidt sammenligningsgrundlag (Qvortrup & Ljungdahl, 2019, s. 33). På den baggrund kan en kvantificering af vurderingerne give et billede af tendenser og kvantificeringen kan trianguleres med de kvalitative analyser (Kvale, 1980, s. 44f.; Schoenfeld, 2002, s. 463f.). Samtidig kan kriterierne være med til at italesætte og fremhæve nogle træk i begrebsdannelsen, som en umiddelbar klassifikation af GVH-rammen vil overse.

Både Syddansk Universitet og Morgan & Sfard (2016) undersøger intenderet og implementeret faglighed. Med udgangspunkt i deres foreliggende metoder har jeg foretaget nogle justeringer, så de kan bruges som metoderamme til at beskrive den tilegnede faglighed og vurdering af elevernes begrebsdannelse og forståelse, jf. andet delspørgsmål fra afsnit 1.3. På den måde figurerer den dynamiske forståelse fra teorien også i den metodiske tilgang til empirien, når de skriftlige elevproduktioner vurderes.

I. Parameter	II. Fokuspunkt	III. Indikatorer i teksten
Ordforråd		
A. Specialisering	I hvilket omfang anvendes fagtermer?	*bruges de i rigtig sammenhæng? *beskrives de korrekt? *udtrykkes de med tekst eller symbolsprog
B. Objektificering	I hvilket omfang beskrives relationer mellem objekter overfor processer?	*beskrives objekter? *beskrives processer?
Visualisering		
C. Flere repræsentationer	I hvilket omfang anvendes flere repræsentationer?	*brug af tabel, diagram, graf, ligning, funktionsforskrifter osv.
D. Overgang mellem repræsentationer	Hvordan er samspillet mellem repræsentationer?	*kan eleverne arbejde med flere repræsentationer? fx opstille en ligning ud fra tekst, en graf og dens funktionsforskrift, osv.
Rutiner		
E. Typer af rutiner	Hvad karakteriseres elevernes brug af processer?	*algoritmisk tænkning? *starte de ud korrekt og fejler undervejs? *kompleksiteten af processer

Tabel 4: Vurderingskriterier for elevbesvarelserne inspireret af (Morgan & Sfard, 2016, s. 106).

Kapitel 4

Fra data til empiri

I forrige kapitel blev grundtrækkene i den metodiske tilgang i specialet præsenteret. Dette kapitel vil redegøre for hvordan behandlingen har foregået, som adresseret i tredje delspørgsmål (afsnit 1.3). Med overskriften *fra data til empiri* refereres til samme forståelse som fremgår i bogen "Humanistisk videnskabsteori", at data beskriver et holistisk omfang af et fænomen, hvor empirien fremkommer gennem en fravælgelse af data, hvorigennem man får isoleret den mest relevante del af sine data (Køppe & Helles, 2014, s. 502). I et socialkonstruktivistisk perspektiv er der ingen præferencer for metodevalg, men indsamlingen og efterbehandlingen giver muligheder/begrænsninger for hvordan det videnskabelige blik på 'begrebsdannelsen' kan iagttages (Esmark et al., 2005). I den forbindelse er det væsentligt at angive og begrunde, hvad der er empirisk relevant. Samtidig i den proces bør kriterierne for god forskning - gennemsigtighed, ærlighed og ansvarlighed - behandles. Dette kapitel har dermed til formål at præsentere de metodiske- og etiske overvejelser, således førnævnte bliver behandlet.

4.1 Elever og undervisning

Det, der ender med at udgøre den indsamlede empiri, stammer fra mit eget hold. Eleverne er fra et såkaldt GSK-turbohold. GSK står for Gymnasie-Supplerende-Kursus, og turbo skyldes at holdet har undervisning i to måneder og eksamen i den tredje. Holdet har modtaget undervisning fra 08.00-12.00 i marts og april. Skolen følger hf-bekendtgørelsen for sine matematik GSK-fag, og eleverne skal ifølge bekendtgørelsen have samme vilkår og undervisning som alle andre elever, hvilket betyder at de modtager mindst 160 lektioners undervisning og har 50 timers skriftligt arbejde (Undervisningsministeriet, 2016a, Bilag 1). Det skal her nævnes at undervisningen tydeligt har været præget af omstændighederne, COVID-19 pandemien har medført, hvor Danmarks statsminister lukkede uddannelsesinstitutionerne for fysisk tilstedeværelse i uge 11, den 11. marts 2020. Eleverne nåede at modtage ni dages almindelig undervisning, efterfulgt af virtuel undervisning. Det har for alle været en udfordring at vænne sig til så markant ændrede arbejdsforhold, hvor al kontakt og kommunikation foregår virtuelt. Grundet den usikkerhed og ustabilitet ungdomsuddannelserne befandt sig i, traf jeg den beslutning at gøre mit speciale lidt mere stabilt med hensyn til data, hvor jeg anså skriftlige elevproduktioner som mere eller mindre upåvirkede af nedlukningen. Den afholdte undervisnings temaer og indhold for kurset er opgivet i tabel 5.

Uge	Program	Aflevering nummer
10	**Intro:** Regning, parenteser, brøker, reducering, ligninger	Afl 1, fredag 06.03.2020
	Funktioner, C: Ligefrem og omvendt proportionalitet. *Lineære funktioner, potensfunktion, tilvækst medregnet. *Skæring mellem funktioner	Afl 2, fredag 06.03.2020
	Funktioner, C: Procenter og indekstal, eksponentielle funktioner. *Fordobling- og halveringskonstant.	
11	**Andengradspolynomiet, C-B:** *Anvendelse: Rødder/nulpunkter/skæring med x-aksen/løs andengradsligning. *Bevis for rødder, toppunkt og faktorisering.	Afl 3 tirsdag 10.03.2020 Afl 4 fredag 13.03.2020
	Funktioner fortsat, C-B: Regression og import af data og residualer for lineær-, eksponentiel- og potensfunktion. *Monotoni, forskydning og regning med funktioner. *Funktioners skæringer. Inverse- og sammensatte funktioner og logaritmefunktioner.	Overgang til virtuel pga. COVID-19
12	**Statistik og sandsynlighedsregning, C:** *Sandsynlighedsregning og kombinatorik	Afl 5 tirsdag 17.03.2020 Afl 6 fredag 20.03.2020
	Trigonometri, C: *Enhedscirklen. Sætninger til bestemmelse af vinkler og sider. *Konstruktion af målfaste skitser (CAS-værktøj)	
	Trigonometriske funktioner, B: At regne i radianer (Maple: cos, sin). *Harmoniske svingninger. (Supplerende: invers trigonometrisk)	
13	**Statistik, B:** Binomialfordeling. *Normalfordelingsapproksimation og konfidensintervaller.	Afl 7 tirsdag 24.03.2020 Afl 8 fredag 27.03.2020
14	**Analytisk geometri, B:** *Afstande. Distance mellem punkt og linje. *Ortogonale linjer. *Cirklens ligning, tangent til cirklen. (CAS-værktøj)	Afl 9 tirsdag 31.03.2020 Afl 10 fredag 03.04.2020 Første prøve 02.04.2020
15	PÅSKEFERIE	FERIE
16	**Differentialregning, B:** *Bestemmelse af differentialkvotient *Ligning for tangent	Afl 11 til fredag 17.04
17	**Differentialregning fortsat, B:** *Monotoniforhold, optimering og regnereglerne	Afl 12 til tirsdag 22.04
18	Tillægsmateriale og hængepartier	Afl 13 mandag 27.04
19	AFSLUTNING	Anden prøve 06.05.2020

Tabel 5: Ugeoversigt over undervisningens forløb.

Tabel 5 viser en meget god skematisk oversigt over kernestoffet i matematik B, som beskrevet ud fra læreplanen (Undervisningsministeriet, 2017b, s. 1). Den første aflevering er tildelt 2 timers arbejde, hvor de resterende afleveringer er 4 timers afleveringer, som tilsammen giver de obligatoriske 50 timer. Alle afleveringerne består af opgaver, som på et eller andet tidspunkt indenfor de sidste 10 år har figureret i et eksamenssæt. Derudover har klassen haft to prøver af 4 timers varighed. Alle disse elevproduktioner udgør den indsamlede data.

4.1.1 Tilsagn og samtykke

På holdet gennemførte 23 elever, hvoraf 11 af disse har givet samtykke til at jeg må bruge deres afleveringsbesvarelser i dette speciale. Grundet den virtuelle undervisning, forårsaget af COVID-19, har undervisningen foregået over Microsoft Teams, og herigennem er samtykkeerklæringen sendt ud til eleverne gennem et spørgeskema med svarmulighederne *ja* eller *nej*, hvor spørgeskemaet har været åben for svarændringer. I samtykkeerklæringen er eleverne blevet gjort opmærksomme på at al databehandling foregår anonymt, og eleverne kan til enhver tid trække deres samtykke tilbage. Derudover har det været vigtigt for mig at understrege at deltagelse er på frivillig basis og vil på ingen måde have indflydelse på en eventuel bedømmelse. I slutning af undervisningsforløbet kom ministeriets udmelding om at eksamen aflyses og erstattes med en årskarakter (Undervisningsministeriet, 2020b, s. 4). I den forbindelse blev der meldt skriftligt ud til eleverne, hvor der blev understreget, at deres årskarakteren afgives efter ministeriets retningslinjer og deltagelse i mit speciale ikke vil have nogen betydning for den afgivne karakter. Eleverne blev også informeret om, at analysearbejdet har foregået sideløbende med undervisningen - i takt med at afleveringerne blev rettet - og den dybdegående analyse først ville foregå efter afgivelsen af karakter.

4.1.2 De deltagende elever

Hver af de deltagende elever er blevet anonymiseret således at hver elev har fået tildelt et vilkårligt bogstav fra A-K. På den måde er det muligt at følge den enkelte elevs besvarelser i analysearbejdet. I forlængelse heraf bør nævnes at blandt de deltagende elever har en enkelt elev fået karakteren 12, to elever har fået 10, fire elever har fået karakteren 7, tre elever har fået 4 og en enkelt har fået karakteren 02. Det giver et karaktergennemsnit på 7,1 og det er 2 højere end klassens gennemsnit og også væsentlig højere end landsgennemsnittet på 4,5 (Undervisningsministeriet, 2019a, s. 27). Det kommer ikke helt som en overraskelse at eleverne, der føler sig nogenlunde trygge i faget, ønsker at deltage. Det besværliggør selvfølgelig repræsentativiteten, men det ændrer ikke på det faktum, at mine data omfavner det brede spektrum fra mindstekravet for at bestå til toppræstationen og med en god blanding af skriftlige formidlinger fra elever omkring karaktererne 4-7. Især er jeg meget glad for, at blandt de deltagende befinder sig nogle af de elever, der har udvist den største progressionen - baseret på min vurdering af dem gennem kurset. Derfor vurderer jeg, at den indsamlede data samlet set udgør et godt grundlag til at undersøge matematikfaget i sin bredde af faglige niveauer, men er ikke blandt det bedst repræsentative udsnit til at kunne foretage en statistisk generalisering. Om det er en svaghed, kan diskuteres. Ud fra et nomotetisk synspunkt, hvor man leder efter generelle principper, ville man nok brokke sig, mens idiografiske tilgang ikke har generalisering i højsædet, men derimod at skabe indsigt (Collin & Køppe, 2014, s. 35f.). Når man laver et lingvistisk arbejde, som dette til en vis grad kan relateres til, så er et repræsentativt udsnit for et levende og altid udviklende sprog utrolig vanskelig - om end ikke umulig - at opstille. Et repræsentativt forhold mellem stikprøve og population er kun muligt for et uddødt sprog som eksempelvis latin (Lemnitzer & Zinsmeister, 2015, s. 48). Mit formål er ikke at fremstille en skabelon over den kognitive udvikling af matematisk læring som skal kunne generaliseres til landsplan, men derimod at udforske og forstå hvordan begrebsdannelsen kommer til udtryk gennem skriftlige formidlinger. Mange matematikdidaktiske studier kræver ikke generalisering, men bidrager med perspektiver, fænomener, fortolkninger osv. og kan fungere som en katalysator for nærmere undersøgelse (Esmark et al., 2005; Schoenfeld, 2002, s. 470). Det, som er mit formål ved at bruge en kvantificeringen af mange kvalitative data, er at kunne fremhæve mønstre og afvigelser, der kan bruges som supplement til de kvalitative analyser. På den måde kan man sige, at jeg bruger statistik til at kunne generalisere internt i specialet (trække klassens fælles konstruktion af begrebsforståelse frem), og fungerer som metodetriangulering (Kvale, 1980, s. 45; Schoenfeld, 2002, s. 472).

4.2 Empiribehandling

Opgaverne er markeret over flere omgange. Først efter reifikationerne (1) ligning, (2) funktion, (3) avanceret funktion og (4) differentialregning. Derefter er alle opgaver inddelt efter GVH-rammen (se evt. tabel C7 i bilag C).

Derfor er der nogle opgaver og afleveringer, der rammer udenfor målskiven og udelades i den samlede analyse. Selvom statistik, sandsynlighedsregning, analytisk geometri og geometri lejlighedsvist inddrager H-opgaver, som kan relateres til funktionsteorien, indgår disse ikke i empirien. I empirien indgår afleveringerne fordelt efter emnerne ligning og reducering (aflevering 2 og i andre afleveringer), funktioner (aflevering 3, 4, 5 og 6), avancerede funktioner (fordelt ud på funktionsafleveringerne), repetition (aflevering 1, 8 og 11) og selvfølgelig differentialregning (aflevering 12 og 13). Hertil kommer de mest nok rammende og afslørende opgaver om deres begrebsdannelse: de to i undervisningen afholdte terminsprøver. En prøve blev afholdt midtvejs efter funktionsteorien, men før differentialregning, som en opsamling på første halvdel af undervisningens områder, se evt. tabel 5. Den anden prøve indeholder alle typer opgaver, heriblandt differentialregning.

Til at illustrere GVH-rammen som beskrevet i afsnit 3.3 og mere håndgribeligt i tabel 3, gives her et eksempel med en funktions- og differentialregningsopgave med hjælpemidler:

4.2.1 Eksempel på GVH: Aflevering 13, opgave 16

> I en model kan tømning af en vandbeholder med en langsomt åbnende hane beskrives ved
>
> $$V(t) = (10 - 0,1 \cdot t^2)^3, \quad 0 \leq t \leq 10,$$
>
> hvor $V(t)$ er mængden af vand (målt i L) til tidspunktet t (målt i minutter efter starttidspunktet).
>
> a) Bestem mængden af vand i beholderen efter 5 minutter. (G)
>
> b) Bestem det tidspunkt, hvor der er 4 L tilbage i beholderen. (V)
>
> c) Bestem $V'(t)$, og bestem det tidspunkt, hvor der løber mest vand ud af beholderen pr. minut[1]. (H)

Opgaven er med hjælpemidler og hører til opgaverne indenfor avancerede funktioner, idet funktionstypen her er en sammensat funktion, hvor andengradspolynomiet $f(t) = 10 - 0,1 \cdot t^2$ er sat ind i tredjegradspolynomiet $g(t) = t^3$. Det er en avanceret funktionsforskrift i og med sammensatte funktioner først er kernestof på A-niveau. På B-niveau skal elever kunne arbejde med sammensatte funktioner med et lineært indre[2]. Her ses med andre ord et eksempel på at man i delprøven med hjælpemidler kan skrue op for abstraktionsniveauet i takt med at CAS-værktøjer anvendes til at løse opgaven (se evt. bilag B, afsnit B.2, om *instumentel genese*[3]).

Om det var en opgave med hjælpemidler eller ej, så ændrer det ikke på klassifikationen efter GVH-rammen. Delopgave a) er en G-opgave, fordi der her efterspørges grundlæggende viden og færdigheder, og opgaven er en traditionel typeopgave. Det er en opgave der kan løses ved at være i internaliseringen, hvor processen for at udregne funktionsværdien $V(5)$ beherskes. Delopgave b) er en V-opgave, hvor eleven skal kunne arbejde videre med den funktionsforskrift, som opgaven præsenterer. Opgaven efterspørger viden, som kræver at eleven har kendskab til funktionsteori fra kondenseringen, hvor man skal være i stand til at udregne en t værdi ud fra en oplyst $V(t)$ værdi, nemlig at opstille og løse ligningen $V(t) = 4$, som beskrevet i tabel 3 punkt B og afsnit 3.3.

Den sidste delopgave c) er en H-opgave, hvor man skal tænke på tværs af interne matematiske fagområder, hvor eleven skal arbejde på tværs af funktionsteori. I tabel 3 er denne form for opgave beskrevet under reifikationsfasen tilhørende punkt C, hvor en objektforståelse skal være udviklet. Eleven skal have været igennem en reifikation for at kunne se den afledede funktion som et objekt, som kan anvendes i nye processer. Opgaven efterspørger nemlig, at eleven kan lave monotoniforhold for den afledede funktion $V'(t)$, som kræver at

[1] Opgaven stammer fra eksamenssættet *Stx-matematik B agust 2016*.

[2] Igen et eksempel på at nye reifikationer skabes ud fra en tidligere, lavere begrebsforståelse.

[3] Instrumentel genese minder til dels om reifikation, men ud fra en helt anden kontekst: En *instrumentel genese* beskriver overgangen fra *instrumentaliseringen*, at man først lærer et værktøjsprogram at kende, til *instrumentering*, som omhandler matematiske aktiviteter (Trouche, 2005, s. 148f.).

eleverne skal differentiere den differentierede funktion og dermed arbejde med den anden afledede, betegnet $V''(t)$. Ingen elever formåede at løse opgaven

Elevernes besvarelser er vurderet over to omgange. Sat på spidsen er de næsten vurderet efter alle otte kompetencer, men især: tankegangs-, modellerings-, problemløs-nings-, repræsentations- og kommunikationskompetencen fra (Niss & Højgaard, 2002). Først er opgavebesvarelserne inddelt efter *rigtig, delvist, fejl* og *ubesvaret* (uddybes i næste kapitel). Herigennem muliggøres et kvantitativt sammenligningsgrundlag til at strukturere den omfattende empiri (Kvale, 1980, s. 45). Besvarelserne er ikke kun vurderet efter facit og matematikken, men også deres formidling. Vurderingen er foretaget efter tabel 4, som er opstillet efter inspiration af det lingvistiske arbejde af Morgan & Sfard (2016). Tilsammen er elevbesvarelserne blevet reduceret til et 126 siders dokument, indeholdende opgaveformuleringen og mine analysenotater (næsten ligeligt fordelt), hvor jeg kan følge klassens, såvel som den enkelte elevs udvikling over tid. Derudover kan jeg krydsreferere mellem opgaverne. Både fra GVH-rammen og reifikationerne. Efter det indledende arbejde er det endelig blevet tid til at kunne udfolde det analytiske arbejde.

Kapitel 5

Analyse

Med den mængde af empiri er det hensigtsmæssigt at bruge flere metodiske greb for at kunne besvare det fjerde delspørgsmål fra afsnit 1.3. Gennem en kvantitativ og statisk behandling kan man med fordel identificere afvigelser og interessante nedslagssted i empirien (Lemnitzer & Zinsmeister, 2015, s. 112; Køppe & Helles, 2014, s. 511f.). Derfor er der forud for den kvalitative analyse foretaget en kvantitativ opsætning (afsnit 5.1) og strukturering af empirien. Efterfølgende vil afsnit 5.2 først kommentere generelt, efterfulgt af underafsnit tilhørende hvert begreb: (ligning, funktioner, differentialregning). Afsnit 5.3 behandler repræsentationsformerne og begrebsdannelsen og til sidst i afsnit 5.4 ses nærmere på elevernes formidling.

5.1 Statistisk oversigt

For at danne et overblik over den samlede empiri er besvarelserne blevet markeret efter: *rigtig* dækker over både rigtig tekst (efter tabel 4) og rigtig matematik. Markeringen *delvist* dækker over flere parametre. Langt størstedelen af disse udgøres af besvarelser med rigtig matematik, men mangler tekst eller har forkert notation. Markeringen *fejl* betyder fejl i matematik eller helt uforståelig tekst, og til sidst en markering til *ubesvarede* opgaver. Tallene i tabel 6 står for antal forekomster, så første kolonne viser antallet af opgaver i afleveringen. Sammenlagt består de analyserede opgavesæt af 232 opgaver. Som nævnt er der 11 elevbesvarelse til hver opgave, som i alt giver 2552 analyserede besvarelser. I kolonnerne *rigtig*, *delvist*, *fejl* og *ubesvaret* ses antallet af forekomster. I bilag C, tabel C7, findes alle opgaver inddelt efter reifikation, GVH-rammen og markering.

Da opgavesættene er delt over to prøver, en delprøve uden hjælpemidler og en delprøve med hjælpemidler, er der på tilsvarende vis lavet en tabel over de to delprøvers fordeling. Disse er ikke medbragt her, idet fordelingen tilnærmelsesvist følger fordelingen for alle opgaverne, men kan findes under bilag C i tabel C2 og tabel C3. I stedet for viser tabel 7 den samlede fordeling.

Aflevering	Opgaver	Total	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Aflevering 1	11 stk.	121	63	22	19	17
Aflevering 2	17 stk.	187	51	87	38	11
Aflevering 3	24 stk.	264	89	88	71	16
Aflevering 4	24 stk.	264	129	55	37	43
Aflevering 5	24 stk.	264	89	76	41	58
Aflevering 6	24 stk.	264	83	86	45	50
Aflevering 8	19 stk.	209	90	47	34	38
Første prøve	17 stk.	187	59	44	55	29
Aflevering 11	12 stk.	132	64	25	24	19
Aflevering 12	21 stk.	231	88	58	37	48
Aflevering 13	25 stk.	275	104	43	40	88
Anden prøve	14 stk.	154	89	16	34	15
Total	232 stk.	2552	998	647	475	432
Procent		100%	39%	25%	19%	17%

Tabel 6: Oversigt over fordelingen af opgaver og elevbesvarelser.

Aflevering (antal)	Total	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Uden hjælpemidler	1232	463	328	286	155
Med hjælpemidler	1320	535	319	189	277
Total:	2552	998	647	475	432

Tabel 7: Oversigt over fordelingen af opgaver og elevbesvarelser.

Ud fra totalen i tabel 6 haves en middelværdi/gennemsnit på 213 opgavebesvarelser pr. aflevering, men som det ses varierer antallet af elevbesvarelser væsentligt. Spredningen (gennemsnitlig afstand fra middelværdien) er ret høj på 55 opgaver, hvorfor et procentuelt overblik kan give et bedre overblik. Overraskende nok afsløres ingen bemærkelsesværdig udvikling i fordelingen af markeringerne for de enkelte afleveringssæt, se evt. bilag C, tabel C4. Dette skyldes formentlig at jo længere eleverne kommer i forløbet, desto sværere bliver opgaverne og desto sværere bliver det at lave en perfekt besvarelse (som også bekræftes senere af tabel 9).

I stedet for at vise tal- og procentfordelingen for hver eneste opgave viser tabel 8 derimod (1) et samlet deskriptivt billede af den samlede procentuelle fordeling efterfulgt af (2) et konfidensinterval, der udtrykker et interval, i hvilket der er 95% sandsynlighed for at sammenlignelige forsøg vil have sin procentandel. Med andre ord, så ligger statistisk signifikante afvigelser udenfor konfidensintervallet. Til sidst ses (3) gennemsnittet udregnet ud fra procentfordelingen for de 12 afleveringer. Ønsker De at se den procentvise fordeling for hver enkelt aflevering henvises til C4, C5 og C6.

Der ses en vis sammenhæng i procentfordelingen for hver enkelt aflevering, idet den sidste halvdel af opgaverne hovedsageligt har en korrekthedsprocent over gennemsnittet, hvor den delvise procentsats ligger under gennemsnittet. Det omvendte er så tilfældet for de første seks afleveringer. Det kan tyde på at eleverne bliver bedre til at formulere sig til perfektion, men den procentuelle fremstilling kan ikke stå alene, da der er en del usikkerhed forbundet hertil: Antallet af opgaver er ret svingende pr. aflevering og det samme er frekvenserne, så det statistiske overblik kan derfor ikke alene begrunde en udvikling i elevernes forståelse, men giver et billede af forskellige tendenser i besvarelserne (Kvale, 1980, s. 45). Tendenser, som den kvalitative analyse vil udfolde i dybden.

Alle aflevering	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Uden hjælpemidler	38%	27%	23%	13%
Med hjælpemidler	41%	24%	14%	21%
Begge delprøver:	39%	25%	19%	17%

(1) Procentfordelingen.

Alle aflevering	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Uden hjælpemidler	35% – 40%	24% – 29%	21% – 26%	11% – 14%
Med hjælpemidler	38% – 43%	22% – 27%	12% – 16%	19% – 23%
Begge delprøver:	37% – 41%	24% – 27%	17% – 20%	16% – 18%

(2) Konfidensintervallerne for procentfordelingerne i (1).

Gennemsnit	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Uden hjælpemidler	41%	23%	24%	12%
Med hjælpemidler	37%	22%	13%	19%
Begge delprøver:	40%	25%	19%	16%

(3) Gennemsnitsprocenten udregnet ud fra alle afleveringerne.

Tabel 8: Oversigt over (1) den procentuelle fordeling af elevbesvarelser, (2) konfidensintervallerne og (3) gennemsnittet af de enkelte opgaver målt i procent.

5.1.1 Opgaver fordelt efter GVH-rammen

Vender vi derimod blikket fra udviklingen gennem empirien over mod fordelingen af opgavetyperne efter GVH-rammen bekræftes det tidligere udsagn om at sværhedsgraden af opgavetyperne bliver højere, jo længere man kommer. Den skarpe iagttager ser, at tabel 9 indeholder mere end de tidligere nævnte 232 opgaver. Dette skyldes at nogle få opgaver indeholder både en del fra (G) og (V) eller fra (V) og (H) og fremgår derfor i begge.

Opgavetype	Andel i %	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
G: 117 opgaver	46%	45%	27%	18%	11%
V: 80 opgaver	32%	36%	27%	18%	19%
H: 55 opgaver	22%	31%	20%	23%	26%

Tabel 9: Antal opgaver fordelt efter GVH-rammen.

Ligesom Syddansk Universitet fremhæver, er størstedelen af opgaverne (G) og (V), mens færre forekommer i (H) (Markvorsen et al., 2019, s. 43). Det interessante ved denne tabel er, at antallet af rigtige opgaver indenfor GVH-rammen alle ligger udenfor konfidensintervallet for begge delprøver i tabel 8 (2), der dermed giver et statistisk belæg for at fordelingen efter GVH-rammen afviger fra den samlede fordeling, hvilket understøtter påstanden om at jo sværere opgaven er, desto sværere bliver det at lave en perfekt besvarelse. Det ses at G-opgavernes rigtige frekvens på 45% ligger væsentlig højere end øvre grænse for konfidensintervallet, hvor V-opgaverne kun lige ligger udenfor, og H-opgaverne ligger væsentligt under konfidensintervallet. På det grundlag kan man umiddelbart antage, at de matematiske begreber er bedre internaliseret end reificeret og taler for en mulig overvægt af operationelle tilgang frem for en strukturel besvarelse, som pointeret i Sfard (1992).

5.1.2 Opgaver fordelt efter reifikationer

Hernæst er hver opgave ligeledes inddelt efter hvilken reifikation, opgaven tilhører. I tabel 10 ses et par interessante udfald.

Reifikationer (målt i antal)	Opgaver	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Ligning	42 stk.	161	138	94	69
Funktioner	119 stk.	512	340	258	199
Funktioner avanceret	27 stk.	131	76	30	60
Differentialregning	44 stk.	194	93	93	104
Reifikationer (målt i %)	**Andel**	**Rigtig**	**Delvist**	**Fejl**	**Ubesvaret**
Ligning	18%	**35%**	30%	20%	15%
Funktioner	51%	39%	26%	20%	15%
Funktioner avanceret	11%	**44%**	26%	10%	20%
Differentialregning	20%	40%	19%	19%	22%

Tabel 10: Opgaverne fordelt efter reifikation.

Overraskende er det letteste område, ligninger, en statistik afvigelse i antal rigtige opgaver i den lave ende, fordi 35% ligger udenfor begge delprøvers konfidensinterval fra tabel 8. Dette bekræfter umiddelbart bekymringerne om elevernes mangel på basale færdigheder (Matematikkommissionen, 2017, s. 13; Markvorsen et al., 2019, s. 93). Omvendt er avancerede funktioner også en statistik afvigelse med mange rigtige, hvilket kan forklares ud fra den *instrumentelle genese*, at eleverne kan bruge deres CAS-værktøj (se evt. afsnit B.2). Avancerede funktioner forekommer hovedsageligt til delprøven med hjælpemidler. Disse opgaver består som regel af samme opgaveformuleringer som almindelige funktionsopgaver, men i en mere abstrakt omverdenskontekst. Det kan understøtte pointen om, at elever er blevet bedre til analyserende og problemløsende opgaver med hjælpemidler på bekostning af opgaver med regnetekniske og basale færdigheder (Danmarks Evalueringsinstitut, 2018a, s. 16).

De statistiske afvigelser kan dog forklares nærmere, hvor ligningsopgaverne med hjælpemidler på 27% rigtige kan forklare en del af årsagen til det samlede dårlige resultat for ligningerne. Ligninger med hjælpemidler er primært i opgaver om optimering, hvor eleverne selv skal opstille ligninger og isolere variable, hvor der er behov for strukturel tilgang, som i den grad volder vanskeligheder. Ligningsopgaver uden hjælpemidler passer statistisk set fint, se tabel 11, sammenlignet med konfidensintervallet i tabel 8 (2).

Reifikation (Uden hjælp)	Opgaver	Rigtig	Delvist	Forkert	Fejl	Ubesvaret
Ligning	37 stk.	36%	32%	42%	23%	9%
Funktioner	46 stk.	36%	25%	39%	25%	14%
Funktioner avanceret	6 stk.	42%	26%	32%	17%	15%
Differentialregning	23 stk.	42%	20%	38%	23%	15%
Reifikation (Med hjælp)	Opgaver	Rigtig	Delvist	Forkert	Fejl	Ubesvaret
Ligning	5 stk.	**27%**	13%	60%	4%	56%
Funktioner	73 stk.	41%	26%	33%	17%	16%
Funktioner avanceret	21 stk.	**45%**	26%	30%	8%	22%
Differentialregning	21 stk.	38%	18%	44%	15%	29%

Tabel 11: Opgaverne fordelt efter reifikation og delprøve

Ud over de tidligere nævnte afvigelser, er jeg ret overrasket over hvor stabilt et mønster der tegner sig over elevernes besvarelser. Jeg har opstillet mange forskellige krydsreferencer mellem GVH-rammen, opgaver uden hjælpemidler, opgaver med hjælpemidler og de forskellige emner. Overraskende udvises et meget stabilt mønster, der med god tilnærmelse følger den statistiske fordeling eller ligger indenfor konfidensintervallerne fra tabel 8 (2). Ud over de her omtalte afvigelser har jeg indtil videre kun fundet et interessant statistisk afvigende udfald om repræsentationsformerne, som kræver en nærmere analyse, hvilket vi vender tilbage til senere. Alligevel har den kvantitative opsætning bidraget med et godt overblik over empirien og den stabile udvikling af elevernes begrebsdannelse og kompetencer, ligesom empiriens opbygning og indhold af opgavetyper og sværhedsgrad er blevet struktureret.

5.2 Begrebsdannelsen i elevbesvarelserne

I alle afleveringerne er der et utal af interessante nedslagssteder og det har været vanskeligt at vælge. Mange opgaver har interessante informationer, der afslører den enkelte elevs begrebsforståelse, hvad enten det er “foran” eller “bagefter” i forhold til de andre. Der er dog ikke plads til at inddrage disse exceptionelle udfald - det vil være et projekt i sig selv. Et projekt, hvor man kunne fokusere på hvordan man kan understøtte reifikation hos disse, som Sfard (1991, 1992) pointerer. Jeg har i stedet valgt at fokusere på de for klassen mest sigende eksempler, som giver en indsigt og forståelse for elevers generelle udvikling i begrebsdannelsen og deres anskuelse af begreber. Disse eksempler udgør et udgangspunkt, hvortil der suppleres med resultater, der ikke direkte fremgår af eksemplerne. Derudover har jeg forsøgt at udvælge de eksempler, som samtidig kræver mindst kendskab til matematikkens væsen. Afsnit 5.2.1 vil omhandle de gennemgående træk, hvorefter der “zoomes” ind på de tre reifikationer: 'ligninger' i afsnit 5.2.2, 'funktioner' i afsnit 5.2.3 og 'differentiabilitet' i afsnit 5.2.4.

5.2.1 Generelt om begrebsforståelsen

I de første par aflevering ses to elever, der kan behandle og arbejde med de matematiske strukturer. Enkelte viser træk fra kondenseringen, men alt dette afhænger af opgavetypen. Aflevering 1 er et tidligere eksamenssæt fra C-niveau og efterlader et indtryk af den faglige bredde, og elevernes udgangspunkt. Elevernes tilgang fra første aflevering, som er ret procesorienteret, er meget stabil hen over afleveringerne, hvor nogle udviser større objektforståelse end andre, hvilket de næste afsnit dykker nærmere ned i. Generelt er mange af besvarelserne præget af rutiner og udviser en forkærlighed for en procesorienteret tilgang til matematiske problemstillinger, som også fremhæves i undersøgelsen af Sfard (1992). For at illustrere hvor stærk den operationelle tilgang er, tages udgangspunkt i følgende:

> **Eks 1: Aflevering 1, opgave 5, uden hjælpemidler: (G/V)**
>
> En isvaffel består af en vaffel og et antal kugler. Der er kun én størrelse vaffel, og alle typer kugler koster det samme. En isvaffel med 2 kugler koster 36 kr., og en isvaffel med 6 kugler koster 68 kr.
> a) Hvad koster en vaffel alene? (G/V)

Opgaven er et godt eksempel til også at fremhæve en vigtig pointe, at der ikke nødvendigvis er en fremgangsmåde og metode til at løse en opgave (Sfard & Linchevski, 1994). Opgaven viser også, at alt efter tilgang til opgaven, kan den løses operationelt ved "intuitiv" tænkning, understøttet af procesorienterede udregninger. Selve opgaven kan også opstilles strukturelt som et ligningssystem eller ved brug af funktionsforskrift(er). Alt efter "øjet, der ser", eller rettere "hovedet, der tænker" kan opgaveløsningen håndteres på forskellige måder:

(1) En funktionsforskrift. Her er tale om talvækst, altså en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$, hvor opgaven oplyser to punkter $(2, 36)$ og $(6, 68)$, hvor x angiver antal kugler og $f(x)$ betegner den samlede pris. Ud fra de oplyste punkter kan tallene a og b udregnes, hvor b er prisen for vaffellen.

(2) Et ligningssystem bestående af ligningerne $36 = s + 2r$ og $68 = s + 6r$, hvor løsningerne vil være r er kuglernes pris og s er vaffellens pris. Hvilket ydermere kunne illustreres grafisk som to rette linjer, der skærer hinanden i punktet $(8, 20)$.

Pointen er, at selvom man løser en opgave korrekt og får fuldt point, så er det i besvarelsen man finder elevernes arbejde med repræsentationer og placering i begrebsdannelsen, hvorfor en statistisk analyse ikke alene er fyldestgørende. Løses opgaven med (2) ligningssystemer, så er det en indikation på at eleven er i en kondensering af ligninger, hvor en løsning med (1) funktionsforskriften kræver strukturel forståelse for 'linearitet' (Sfard & Linchevski, 1994). En alternativ metode kunne baseres udelukkende på processer:

> **Besvarelse 1: Elev A: Aflevering 1, opgave 5 (operationelt):**
>
> Først findes differencen mellem vaffellen med 2 kugler og vaffellen med 6 kugler $68 - 36 = 32$ Derfor er der 32 kr. forskel på de to is. $\frac{32}{4} = 8$. Her divideres 32 med 4 da der er 4 kugler i alt. Derfor svarer 8 kr. til 1 kugles pris. $8 \cdot 2 = 16$, så ganges 8 med 2 og det ses derfor at 2 kuglers pris er 16 kr. $36 - 16 = 20$, de 16 kr. som er prisen på de to kugler trækkes nu fra den samlede pris på en is med 2 kugler Dermed er prisen på en vaffel 20 kr.

De seks løsninger, der har givet fuldt point, er beskrevet på tilsvarende måde som elev A. Fire elever har brugt samme intuitive metode, hvor efter hinanden følgende processer på scenariet igangsættes. Det er med andre ord et godt eksempel på at man kan klare sig med processer, men det kræver proces efter proces osv. (Sfard, 1991, s. 23, 2008, s. 53f.). Derudover er enkelte besvarelser uden forklaring og med fejl i formulering eller i brugen af tallene. En enkelt elev, elev D, viser at være et sted mellem internalisering og kondensering, idet han opstiller en tabel over udviklingen af prisen afhængig af antal kugler. Det er dog svært entydigt at konkludere, da D ikke har nogen tekst eller forklaring på sin tabels ophav. Derudover er der én elev har brugt hjælpemidler og er noteret som *fejl*, da det ikke er tilladt.

Det bemærkes straks, at den procestænkning, som eleverne her udtrykker, kun kan anses som laveste trin i vores interessefelt - internalisering af ligninger eller endnu lavere af talforståelse. Ingen nævner ordet ligning, funktion eller andre fagtermer, men klarer sig med almindelig basal hovedregning (se evt. tabel 3 og 4). Dette er en gennemgående tendens og karaktertræk for elevernes formuleringer i især de første par afleveringer. Herudfra kan det udledes, at elever bruger processer som foretrukken metode, idet processen først internaliseres og er lettest at anvende, hvorimod reifikation er både langsommelig og tidskrævende (Sfard, 1991, s. 16, 1992, s. 70, 1994, s. 53). Eleverne bruger altså det, som de finder lettest og kræver mindst abstraktion og refleksion, hvilket medfører et ensidigt fokus, hvilket er problematisk for begrebsdannelsen (Steinbring, 1989, s. 30f.; 2006, s. 135). Det ses også senere i afleveringen:

> **Eks 2: Aflevering 1, opgave 8, med hjælpemidler: (G)**
>
> [...] Udviklingen kan med god tilnærmelse beskrives ved modellen
>
> $$f(x) = -239 \cdot x + 6641,$$
>
> hvor $f(x)$ er antal rådyr, der blev nedlagt x år efter 2006.
>
> a) Hvad fortæller tallene -239 og 6641 om udviklingen ifølge modellen? (G)

Hertil undlader elev G at svare, og resten svarer korrekt, men hvor seks af dem igen formulerer sig med ikke specialiserede forklaringer. To svarer med en blanding af operationel og strukturel tilgang, og to elever løser denne delopgave ved at skrive strukturelt om den lineære funktion:

Besvarelse 2: Elev B: Aflevering 1, opgave 8 (strukturelt):

Da det er en lineær funktion, ser forskriften således ud: $f(x) = ax+b$, hvor b er det punkt hvorpå den lineære funktion skærer med y-aksen. Dvs at 6641 er b for denne funktion. a er hældningskoefficienten, som fortæller hvor meget grafen stiger eller aftager med x antal år after. Dvs $a = -239$. Grafen aftager derfor med -239 om året, fra da de begyndte og måle i 2006.

Det skal dog bemærkes, at eleven mangler at præcisere, hvad tallene a og b betyder i udviklingen af rådyrbestanden. Eleven viser dog en forståelse for objektificeringen og specialisering efter tabel 4, side 35.

I delprøven med hjælpemidler er elevernes formidling og notation ligeledes præget af en operationel tilgang. Dette illustreres i opgaven:

Eks 3: Aflevering 1, opgave 6, med hjælpemidler: (G og V)

I en bank indsatte Dorthe 24000 kr. til en fast årlig rente på 1,8%.

a) Hvor stort et beløb står der på kontoen efter 10 år? (G)

Morten og John har hver sin bankkonto. Morten indsætter 11370 kr. på sin konto til en fast årlig rente på 2%. John indsætter samtidig 12800 kr. til en fast årlig rente på 1%.

b) Løs ligningen $11370 \cdot 1,02^x = 12800 \cdot 1,01^x$. (V)

c) Forklar, hvad ligningen og dens løsning fortæller. (V)

Til delopgave a) regner elev G forkert, hvor der bruges en lineær model, hvorimod de 10 andre elever finder frem til rigtigt facit. Men måden det udtrykkes tegner ikke på en strukturel forståelse, men en optagethed af processerne. Ni af eleverne skriver

$$24000 \cdot (1 + 0.018)^{10} = 28687.$$

De fokuserer på udregningen og det output, de får ud af det (det samlede beløb efter 10 år). Rutinerne har overtaget og processerne beskrives frem for objektet, der udregnes. Kun en enkelt elev skriver den samlede notation, og ser udregningen som en del i et hele, altså et kendetegn ved kondenseringen. Elev E skriver som den eneste venstre side i udregningen:

$$K_{10} = 24000 \cdot (1 + 0.018)^{10} = 28687.$$

Det er et gennemgående træk igennem alle afleveringer, at når man befinder sig i internaliseringen er resultatet vigtigere for eleven end helheden (Sfard, 1991). Venstre side i et udtryk opfattes som irrelevant, for den er jo ukendt, eller i hvert fald først efter en udregning er den bestemt. Ud over eksemplet her, ses det primært i opgaver med nyt materiale, hvor eleverne stadig er ved at tilvænne sig notationen i internaliseringen. Især fremtrædende i aflevering 3 som er den første om funktioner, aflevering 5 som er den første med andengradsligninger og i aflevering 12 som er den første om differentialregning[1]. Først i kondenseringen

[1] Især elev D, H og B gør dette, men også H, I og K har en tendens til at udelade venstre side i et udtryk.

begynder den samlede notation at indgå, og det viser sig at notationen med venstre og højre side i en ligning/udtryk er essentiel for en reifikation. For det er gennem den samlede notation, at man begynder at kunne italesætte produkterne af de igangsatte processer som et objekt. Eleverne skal etablere relationen mellem noget konkret i verden gennem brugen af semiotiske repræsentationer (Duval, 2006, s. 106f.; Blomhøj, 2006, s. 85; se også Dewey, 1938, s. 394ff.). I relation til elevernes besvarelse betyder dette, at man skal vænne sig til at bruge og især kommentere på de semiotiske repræsentationer for at få adgang til de abstrakte matematiske begreber. Formidlingen af matematik bliver dermed døråbneren til matematikkens begreber gennem reifikation (Sfard, 1991, 2008).

Til delopgave b) og c) kommer fodnoten om instrumentel genese til sin ret, som kan forklare og beskrive en del om opgaverne med hjælpemidler (se evt. bilag B.2). I delopgave b) har alle elever det rigtige facit, hvor CAS-værktøjer er anvendt. Ligningen er løst, som opgaven beder om, men problemet ligger i, at ingen elever formulerer en fremgangsmåde eller konklusion. Især delopgave c), hvis svar er resultatet i b), er ingen elever i stand til at formulere et klart og tydeligt svar på. Et svar, der var oplagt at repræsentere visuelt, men ingen tænker over en grafisk illustration, hvilket indikerer en ensporet håndtering af opgaver, som kommenteret af (Knuth, 2000, s. 50; Steinbring, 1989, s. 30, 2006, s. 135). Elev B nærmer sig og viser sin kondensering med formuleringen *"isolere x"*, men CAS-værktøjets svar, $x = 12$ som løsning til ligningen, bliver ikke sat i relation til den ligning som er opstillet.

Opsummerende, så er elevernes skriftlige formidling meget procesafhængig, uden nogen særlig hensyntagen til matematisk notation og sprogbrug i deres forklaringer, måske fordi de er vant til relativ få af den slags opgaver fra folkeskolen (Slot et al, 2016, s. 40). Eleverne er ikke meget for at behandle opgaverne og deres bestanddele som indbyrdes afhængige objekter, men derimod som størrelser, der skal indgå i en proces. Rutinerne kommer tydeligt til udtryk gennem deres opgavebesvarelser, hvor eleverne formulerer en fremgangsmåde, der er meget præget af operationel tænkning, som er et karakteristika for internaliseringen.

Efter disse generelle iagttagelser og resultater fra den kvalitative analyse vil de efterfølgende tre afsnit undersøge begrebsdannelsen indenfor reifikationerne: 'ligning', 'funktion' og 'differentiabilitet', som tilsammen viser udviklingen og hvorvidt begreberne er internaliseret, kondenseret eller reificeret.

5.2.2 Begrebet ligninger

Betragt først følgende ligningsopgave:

Eks 4: Aflevering 2, opgave 2, uden hjælpemidler: (V)

Isoler R i ligningen

$$\frac{U}{R} = I$$

To gør det forkert, de ganger med tælleren, og viser igen en rutinepræget procestænkning, at man i en omgang kan isolere det ønskede (som er tilfældet ved de fleste opgaver). De ni andre kommer frem til rigtigt facit, men seks af besvarelserne har ingen tekst, og det viser igen en internalisering, hvor de er ved at tage ligningsløsningen til sig før man kan begynde at sætte ord på. Dog er der en besvarelse, der især falder ud:

Besvarelse 4: Elev F: Aflevering 2, opgave 2:

Jeg isolerer R i ligningen ved at bytte rundt på R og I

$$\frac{U}{I} = R$$

Jeg vil sætte 5 ind i stedet for U og 10 ind på R plads:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Jeg har derved bevist min påstand om at R isoleres som følgende

$$\frac{U}{I} = R$$

Elev F kan løse opgaven gennem en "kringlet" substitution med tal. Han opstiller en hypotese og tester den med tal, men kan ikke arbejde med variablerne U, R og I. Han er dermed ikke i en kondenseringen, hvor man er i stand til at arbejde med ligninger med bogstaver, se tabel 3. Dette er det eneste eksempel i hele empirien, hvor talværdier bruges til at eksemplificere og begrunde ligningsløsningen. Da dette er et engangstilfælde kan det konkluderes at alle eleverne befinder sig mindst i internaliseringen i dannelsen af begrebet ligning. For at fortsætte i denne genre, som placerer flere elevers placering, så ses i opgaven:

Eks 5: Aflevering 2, opgave 9, uden hjælpemidler: (G/V)

I cykelsport benyttes følgende formel til at angive en stræknings gennemsnitlige stigning s:

$$s = \frac{h \cdot 100}{L},$$

hvor h er strækningens højdeforskel (i km), og L er strækningens længde (i km).

a) Bestem højdeforskellen h, når den gennemsnitlige stigning s er 5, og længden L er 8 km. (G/V)

Til denne opgave er der en bred variation i besvarelserne. Elev B og C befinder sig i kondensering/reifikation og løser ligningen med variablerne repræsenteret. Først herefter indsætter de tallene og udregner $h = 0,4$. De andre elever indsætter tallene og løser derefter ligningen som en almindelig ligning, altså de opstiller og løser ligningen:

$$5 = \frac{h \cdot 100}{8}.$$

Forskellen ligger i anskuelsen af selve opgaven. De to første behandler ligningen med variablerne og viser en strukturel forståelse for, at hver variabel principielt kan isoleres i ligningen.

> **Eks 6: Aflevering 2, opgave 10, uden hjælpemidler: (V)**
>
> Isoler r i formlen $l \cdot r^2 + p = q$. (V)

Denne del er yderst interessant. Fem af eleverne laver fejl og regner forkert, modstridende regneartternes hierarki. De fem andre regner rigtigt:

$$\begin{aligned} l \cdot r^2 + p = q &\Leftrightarrow \\ l \cdot r^2 = q - p &\Leftrightarrow \\ r^2 = \frac{q-p}{l} &\Leftrightarrow \\ r = \pm\sqrt{\frac{q-p}{l}}&, \end{aligned}$$

men de kan ikke forklare og begrunde det satte plus minus tegn. Opgaven her viser (ligesom eksempel 1: aflevering 1, opgave 5) den vigtige pointe, at matematik er en overbyggende læringsproces (Sfard, 1991, s. 16). Denne opgave har to løsninger til ligningen, som er en vigtig illustration af, at der ikke nødvendigvis er ét svar. Denne erkendelse er vigtig for især at kunne danne sig en forståelse af andengradsligninger, som kan have op til to løsninger, og senere for opgaver med monotoniforhold. Altså dannelsen af mere avancerede begreber afhænger af den grundlæggende forståelse for basale regnefærdigheder og bygger ovenpå eksisterende viden (Sfard, 1991).

Samme pointe kan fremhæves ved opgaver om ligningssystemer (aflevering 2, opgave 14 og opgave 15), som er identisk med bestemmelse af skæringspunkt mellem funktioner, altså opgavetyper der kan sættes i relation til en internalisering af højere liggende processer (Sfard & Linchevski, 1994). Opgave 14 er traditionel procedureanvendelse og denne løser 5 elever rigtigt, hvorimod opgave 15 afviger fra det traditionelle og består "blot" af ligningerne $y = 2x - 5$ og $y = -x + 7$ (altså to grundlæggende og basale lineære funktioner), men denne løser kun to elever korrekt. To elever bestemmer kun ligningssystemet mht. x. Hele fire elever laver opgaven forkert, men ingen af besvarelserne ser nogen parallel til lineære funktioner. Opgavetyperne ses som en isoleret enhed og proces, uden relation til en dybere strukturel forståelse. Samlet set, så er det tvivlsomt om ligninger bliver et selvstændigt objekt, da ligninger kan antage alverdens skikkelser i forskellige opgaver. Alligevel er det vigtigt at være opmærksomme på elevers forståelse af ligninger, idet funktionsforståelsen bygger på det grundlag ved indførelsen af notationen $y = f(x)$.

5.2.3 Begrebet funktion

Lad os endnu en gang begynde med et eksempel på en traditionel opgave om funktioner:

> **Eks 7: Aflevering 3, opgave 2, uden hjælpemidler: (H)**
>
> For en bestemt type gas er trykket af gassen omvendt proportional med volumen af gassen. Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 7923.
>
> a) Indfør passende variable, og opstil et udtryk for trykket af gassen som funktion af volumen af gassen. (H)

Tre elever B, E og G er i stand til at løse opgaven korrekt. To andre elever bytter om på variablerne så det i stedet bliver et udtryk for volumen af gassen som funktion af trykket af gassen. De andre elever indfører slet ikke variable. Den ideelle besvarelse ville kunne se ud som:

> **Besvarelse 7: Elev E: Aflevering 3, opgave 2:**
>
> Ved omvendt proportionalitet gælder det at $y = \frac{k}{x}$. Udtrykket for trykket som funktion af volumen vil altså se således ud:
>
> $$y = \frac{7923}{x},$$
>
> Hvor y som er trykket af gassen, er omvendt proportional med x som er volumen af gassen, med en proportionalitetskonstant på 7923

Besvarelserne afslører meget om elevernes placering i begrebsdannelsen. Her skal man være i stand til at oversætte den tekstrige opgaveformulering til passende matematisk symbolrepræsentation (Steinbring, 1989, s. 28f.; 2005, s. 19f.; Blomhøj, 2006, s. 85). Den oversættelse kræver at man ud fra 'omvendt proportional' har en strukturel forståelse for funktioner. Det viser derfor, at de tre elever, som har indført passende variable antyder, at de har gennemgået en reifikation over funktionsbegrebet. De andre befinder sig i kondenseringen, hvor de er i stand til at se funktionen som et hele, men mangler forståelsen for repræsentationen: uafhængig- og afhængig variabel. Det kan formuleres som, at eleverne er vant til at variablerne x og y er oplyst på forhånd, og derfor kollapser den epistemologiske trekant og den onde cirkel indtræder, da de her selv skal sætte ord på, hvad variablerne beskriver og det har de svært ved (Sfard, 2008, s. 29). Selvom det faktisk står direkte i opgaveformuleringen 'trykket afhænger af volumen'.

Ud fra besvarelserne af funktionsopgaver kan elevernes placering i begrebsdannelsen for funktioner illustreres i en eksemplarisk opgave med både GVH-delopgaver og viser meget rammende elevernes forståelse af funktionsbegrebet:

> **Eks 8: Aflevering 3, opgave 19, delprøve med hjælpemidler:**
>
> [...] Sammenhængen
>
> $$y = 0,635 \cdot x^{0,822},$$
>
> hvor x er vægten af dyret, og y er vægten af dets hjerne. Vægtene er målt i gram.
>
> a) Hvad vejer hjernen hos et dyr på 100 gram ifølge modellen? (G)

> b) Hvor meget skal et dyr veje, for at vægten af dets hjerne kommer over 75 gram? (V)
>
> Man undersøger to dyr. Det største af de to dyr vejer 25% mere end det andet.
>
> c) Hvor mange procent vejer det største dyrs hjerne mere end det andet dyrs hjerne? (H)

Alle laver delopgave a) korrekt. Funktionsbegrebet er internaliseret, de kan beregne en y-værdi, når en x-værdi oplyses. To af eleverne har slet ingen tekst, fire af dem har delvist tekst, hvoraf tre af dem udelader venstre side af udregningen, og viser derfor et større fokus på processen og det operationelle frem for strukturerne. En rigtig besvarelse kan illustreres ved:

> **Besvarelse 8: Elev C: Aflevering 3, opgave 19a:**
>
> 100 gram indsættes på x plads, for at ud af, hvad hjernen hos et dyr på 100 gram vejer
>
> $$y = 0,635 \cdot 100^{0,822} = 27,975$$
>
> Hjernen på et dyr på 100 gram vejer 27.98 gram

Til delopgave b) hvor man omvendt skal udregne en x værdi når en y-værdi oplyses, ses blandede resultater. Fire elever forbliver i internaliseringen, da de med jævne mellemrum anvender samme proces, som de anvendte til delopgave a) og indsatte den oplyste værdi på x's plads. Det er en tilbagevendende udfordring for eleverne A, H, I og K. Men halvdelen af eleverne har i den tredje aflevering ingen problemer med at isolere x i forhold til en kendt y-værdi, når det er med brug af CAS-værktøj, og viser, at de er i kondenseringen.

I delopgave c) skal man enten anvende en formel, men eleverne bruger ikke formlen til disse tilvækstopgaver, men opstiller derimod nogle processer, hvor funktionen indgår. Netop dette er ifølge Sfard (1991) nødvendigt for begrebsdannelsen, at objektet 'funktion' kan indgå i nye, mere avancerede udregninger.

> **Besvarelse 8: Elev F: Aflevering 3, opgave 19c:**
>
> Jeg ved allerede at et dyr som vejer 100g har en hjerne som vejer 27.97523g. Jeg vil nu udregne hjernens vægt hos et dyr som vejer 125g, 25% mere end førnævnte dyr
>
> $$y = 0,635 \cdot 125^{0,822} = 33,607$$
>
> Så vil jeg udregne den relative forskel mellem de to tal, ved at bruge $r = \frac{S}{B} - 1$
>
> $$\frac{33,607}{27,975} = 1,201$$
>
> Det vil sige at et dyr som vejer 25% mere har en hjernemasse som er 20.1% større.

I de forskellige tilvækstopgaver går antallet af tilfredsstillende besvarelser fra fire til otte elever. Ligeledes ses en tydelig fremgang og progression i eleverne sikkerhed og selvstændighed i opgaver fra kondenseringen V-opgaver, hvor kun to elever, I og K, har en gennemgående tendens til at løse disse opgaver ud fra processer de har taget til sig fra internaliseringen.

5.2.3.1 Opsamling på funktionsbegrebet

Sammenlagt ses en tydelig progression og fremgang i begrebsdannelsen for funktioner. Om funktioner bliver reificeret så eleverne til fulde kan anskue funktionsbegrebet strukturelt, er derimod besværligt at give et entydigt svar på. På den ene side er eleverne fra aflevering 6 i stand til at regne med funktioner som $f(x) + g(x)$ og $k \cdot f(x)$, og i aflevering 12 og 13 til differentialregning, hvor funktionernes forskrift bruges i nye processer, men på den anden side, som er illustreret med Eks 7, så er opgavetyper med formuleringen *"indfør passende variable og opstil en model"* langt vanskeligere for eleverne at svare på. Udfordringen består i at oversætte repræsentationsformene tekst til matematiske symboler (Steinbring, 1989, s. 28f.; Blomhøj, 2006, s. 85; Sfard, 2008, s. 122f.). Det begrunder jeg ikke kun ud fra den tidligere præsenterede opgave men også fra elevernes første prøve:

> **Eks 9: Første prøve, opgave 7, uden hjælpemidler: (G)**
>
> I 2016 var der 42167 personer, der var ledige i Danmark. I perioden efter 2016 er antallet af ledige faldet med 2,6% om året.
>
> a) Indfør passende variable og opstil en model, der beskriver udviklingen i antallet af ledige i Danmark. (G)

Når man ser på besvarelserne til denne opgave, er der kun én elev, E, der kommer helt i mål. Tre af eleverne begrunder fint valg af model, som elev F skriver: *"Da vi her snakker om en procentvis ændring skal jeg her bruge en eksponentiel funktion. Den ser ud som følgende: $f(x) = b \cdot a^x$."*

Fem elever viser ingen strukturel forståelse for eksponentielle funktioner, idet tre elever bruger en forkert funktion, og to elever opstiller en negativ fremskrivningsfaktor, hvilket slet ikke er muligt. Fem elever beskriver den uafhængige variable, som elev G: *"x = antallet af år efter 2016"*, men den afhængige variable som introduceres med notation $f(x)$ bliver slet ikke beskrevet. Det røber en delvis strukturel forståelse af funktionsbegrebet, men reifikation af repræsentationerne x og $f(x)$ ud fra en kontekst er ikke gennemgået. Der er stor forskel på tidligere formulering af elev G og elev E som skriver: *"Hvor $f(x)$ er antal ledige personer i Danmark efter x antal år efter 2016"*. Den eneste forskel er, at E beskriver hvad $f(x)$ betegner. Men i forhold til reifikationsteorien så er det afslørende, for eleven går strukturelt til opgaven, hvor de enkelte bestanddele introduceres af eleven selv (Sfard, 1991, s. 4f.). Elev E viser dermed et helt andet strukturelt abstraktionsniveau end de andre og ser funktionen som et hele.

Netop ved de her modstridende signaler om begrebsdannelsen giver min udvidelse af reifikationsteorien og sammentænkning af Sfard (1991) og Steinbring (1989) i figur 6 en forklaring. En reifikation af en repræsentationsform, her funktionsbegrebet, er ikke ensbetydende med at objektet funktion fungerer som et begreb i andre repræsentationsformer. Hver repræsentationsform skal igennem en reifikation for at undgå den onde cirkel efter Sfard (Sfard, 1991, s. 30) eller et kollaps i den epistemologiske trekant (Steinbring, 1989, s. 30), se også figur 5 over den epistemologiske trekant, opstillet ud fra funktionsbegrebet.

Konklusionen er: Funktionsbegrebet ud fra konkrete funktionsforskrifter kan, som det tyder på i elevbesvarelserne, være vel reificeret. Når koefficienterne og variablerne er introduceret i opgaven, går der relativ kort tid før eleverne kan igangsætte højere liggende processer. En helt anden indsigt får man, hvis der er byttet rundt på repræsentationsformerne, forstået således, at eleverne selv ud fra en tekstbeskrivelse skal vælge og begrunde en passende funktionsforskrift (som regel lineær eller eksponentiel). Selv angive koefficienterne i funktionsforskriften og selv beskrive variablerne, som kræver et helt andet abstraktionsniveau[2] (Steinbring, 1989, s. 28f.; Blomhøj, 2006, s. 85; Sfard, 2008, s. 122f.). Ved disse opgaver er det tydeligt, at reifikationsprocessen over funktionsbegrebet ikke er tilendebragt. Det samme er gældende ved visuelle præsentationer. Den epistemologiske trekant i min *udvidede reifikationsteori* viser her, et man kan gøre synliggøre forståelsen for de forskellige repræsentationsformer (Steinbring, 2005, s. 30f.). Sammenfattende kan det siges, at selv om funktionsforskriften virker til at være mere eller mindre succesfuldt reificeret til videre brug i differentialregningen, så er det tvivlsomt om en reifikation af funktionsbegrebet i sin helhed er fuldendt, som afsløres i form af de udfordringer, kombinationen af verbale og visuelle repræsentationsformer bringer med sig. Senere i afsnit 5.3 vil jeg gå grundigere ind i udfordringerne ved forskellige repræsentationsformere, men inden da fremstilles elevernes differentiabilitetsforståelse.

5.2.4 Begrebet differentiabilitet

Som overgang til begrebet differentiabilitet (funktioners væksthastighed) tager vi afsæt i en opgavetype, som på en måde har et ben i hver lejr, forstået således at den både kan bruges til at beskrive elevernes funktionsforståelse og samtidig være et afsæt til differentialregningsopgaver:

> **Eks 10: Aflevering 6, opgave 5, uden hjælpemidler: (H)**
>
> En sammensat funktion $h(x) = f(g(x))$ er givet ved
>
> $$h(x) = \ln(2x + 4), \quad x > -2.$$
>
> a) Bestem forskriften for hver af de to funktioner f og g, som h kan være sammensat af. (H)

[2] Jeg har altid anset opgaveformuleringerne "indfør passende variable og opstil en model" som noget af det letteste. Opgaveteksten afslører direkte om det er lineært (talvækst) eller eksponentielt (procentvækst). Derudover giver opgaveteksten næsten ordret variablerne og koefficienterne. Det bliver ikke lettere! Men som reifikationsteorien viser, så kræver denne type opgave en strukturel forståelse at funktionsbegrebet. Opgaveteksten skal med andre ord kunne abstraheres til kortfattet og kontant matematisk symbolsprog, som fremhævet af (Duval, 2006, s. 106; Rogers, 1960, s. 468; Blomhøj, 2006, s. 85).

Det er kun elev A, der kan formulere et korrekt svar:

> **Besvarelse 10: Elev A: Aflevering 6, opgave 5:**
>
> Det betyder af funktionen g indsættes på x's plads i funktionen f og derfor er forskrifterne for de to funktioner givet ved:
>
> $$f(x) = \ln(x)$$
> $$g(x) = 2x + 4$$

Fire andre elever har rigtig nok facit, men skriver ingen tekst. Elev E lægger kortene på bordet og skriver: *"Jeg kan ikke forklare det her!?"*. Et fænomen, som Sfard også har været udsat for, hvor eleven løser en opgave korrekt med rigtig proces, men uden forståelse for hvorfor man kan udføre processen (Sfard, 2008, s.29). Her haves en opgave, hvor eleverne tydeligt har svært ved at sætte ord på objektet. I opgaven skal de gå baglæns og ud fra et objekt - produktet af en proces - formulere den proces, som giver produktet. Interessant er dog, at aflevering 6 viser, at eleverne sagtens operationelt kan regne med sammensatte funktioner.

Samtidig er opgaven et godt eksempel på pointen fra Sfard & Linchevski (1994), at en opgavetype kan udgøre et grundlag for videre avancement og begrebsdannelse. Som beskrevet kan fem elever delvist svare på ovenstående opgave og i senere aflevering om differentiabilitet skal eleverne være i stand til at differentiere en sammensat funktion, hvor det er de samme fem elever, der kan løse dette. Det er måske ikke overraskende, men tydeliggør argumentet for reifikationsteoriens beskrivelseskraft til elevers progression (Markvorsen et al., 2019, s. 19) og bekræfter igen at matematikken er en viderebygning på eksisterende objekter (Sfard, 1991, s. 16). Det kan formodes, at det er tvivlsomt om differentiabilitet kan nå at blive reificeret, idet sammensatte funktioner og regnereglerne for differentiable funktioner kræver et højt abstraktionsniveau og evne til at arbejde med begreberne strukturelt. I aflevering 13 viser otte elever, at de kan differentiere en sammensat funktion efter regnereglerne i deres formelsamling, men i deres sidste prøve er der kun tre elever, der kan bruge den strukturelle produktregneregel til at differentiere funktionen, hvilket igen viser, at en reifikation af differentiabilitet ikke overbevisende er tilendebragt endnu.

Så hvordan foretager eleverne skridtet fra funktioner til differentiation af funktioner? Spørgsmålet stilles ofte i frokostpausen hen over leverpostejen og kaffen, og jeg vil i dette afsnit søge efter svar. Ud fra elevbesvarelserne kan det udledes, at begrebet differentialregning er internaliseret i forhold til den verbale repræsentationsform. Der er eksempelvis ingen problemer i at bestemme konkrete differentialkvotienter som $f'(1)$ for funktionen $f(x) = 2x^3 + 4x + 7$ (aflevering 12, opgave 1). Eleverne kan differentiere og bestemme 'væksthastighedsfunktionen' $f'(x) = 6x^2 + 4$ og efterfølgende udregne differentialkvotienten $f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 10$, som betyder, at tangentens hældning for grafen i punktet $(1, f(1))$ er 10. At tage processen 'at differentiere' til sig går helt smertefrit.

Og dog! I aflevering 13, opgave 2 ses en graf, til hvilken $f'(10)$ skal bestemmes. Der er ingen konkret funktionsforskrift at forholde sig til. Kun grafen.

Det er en G-opgave, grundlæggende viden, hvor man skal bestemme tangentens hældningen for $x = 10$. Altså bare tegne tangenten og aflæse hældningen. Kun elev I formår dette og A, B og E kommer delvist i mål. Fem elever C, D, F, H og J aflæser at grafen går gennem et punkt og ænser slet ikke at opgaven omhandler differentialregning.

Det er med andre ord problematisk at overføre den internaliserede differentieringsproces til de visuelle repræsentationsformer. Eleverne viser ud fra besvarelserne af G- og V-opgaver at differentiabilitet tilnærmelsesvist er kondenseret, men ingen elever opnår efter min vurdering noget der i tilstrækkelig form minder om en reifikation. H-opgaverne løses ikke tilfredsstillende, hvor det næsten er umuligt for eleverne at igangsætte nye processer med den differentierede funktion. Den differentierede funktion står ikke som et selvstændigt objekt for eleverne, men differentiabilitet forstås i høj grad ud fra de tilknyttede processer. Dette kan med god tilnærmelse eksemplificeres med en enkel opgavetype, 'monotoniforhold'.

Til dette illustreres med et eksempel, som eleverne laver flere gange: i aflevering 12, opgave 5 og aflevering 13, opgave 4. Samtidig med at aflevering 13, opgave 11 a) har en lidt anden kontekst, men samme funktion, der skal laves monotoniforhold for. Altså er der en enkelt funktion, som eleverne flere gange laver monotoniforhold for, hvilket kan give en god indsigt i elevernes begrebsforståelse og progression over differentiabilitet. Indholdet af opgaven kan kort formuleres som:

> En funktion f er givet ved
>
> $$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$$
>
> a) Bestem monotoniforholdene for f.

I monotoniforholdsopgaver har eleverne alle muligheder for at udfolde deres matematiske viden, færdigheder og kompetencer, samtidig med at disse opgaver hovedsageligt følger en klar og tydelig procedure. Opgavetypen sætter tankegangskompetencen på prøve, hvor elevernes besvarelser afslører en del om deres placering i begrebsdannelsen og hvorvidt de kan arbejde med differentiabilitet operationelt eller strukturelt. I monotoniforhold er proceduren for at besvare opgaven følgende:

1. Bestem den differentierede funktion, $f'(x)$, der angiver funktionens væksthastighed (tangenthældning) for en værdi af x. Dette trin er en G-opgave efter GVH-rammen.

2. Opstil og løs ligningen $f'(x) = 0$. Her sætter man væksthastigheden lig nul for at bestemme de steder, hvor funktionen har vandret(te) tangent(er). Dette er en almindelig grundlæggende ligning (ofte en andengradsligning), men i en højere liggende funktionskontekst, hvorfor det anses som en V-opgave.

3. Efter at have bestemt vandrette tangenter udføres en fortegnsundersøgelse for den differentierede funktion $f'(x)$ før og efter de vandrette tangenter.

> Dette er ligeledes en V-opgave, idet funktionsværdierne fra den differentierede funktion skal forstås i sin helhed og kunne relateres til funktionen $f(x)$. Der gælder nemlig, at for $f'(x) > 0$, når væksthastigheden er positiv, så er grafen for $f(x)$ voksende. Omvendt gælder, at for $f'(x) < 0$, når væksten er negativ, så er grafen for $f(x)$ aftagende. Hvis den differentierede funktion er reificeret, vil det blot være en G-opgave, da man egentlig "bare" i dette trin skal bestemme funktionsværdier for den differentierede funktion.

Første gang opgaven med monotoniforhold for $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ forekommer ses fire rigtige besvarelser, hvoraf tre ikke er i stand til helt at forklare deres forståelse (nok fordi den ikke er der endnu). Kun en enkelt, elev E, bruger fagtermer og forklaringer. En elev svarer ikke på opgaven og fire elever kommer ikke længere end første trin. Det antyder at differentialkvotient er internaliseret, og kondenseringen af begrebet er i gang (for mindst halvdelen af eleverne).

Ved det andet trin i processen ses to elever, F og H, som kun opstiller $f'(x) = 0$ uden begrundelse og ligningen løses ikke. To elever, A og D kalder $f'(x) = 0$ for funktionens ekstrema (hvilket først kan konkluderes til sidst). En enkelt elev, J, kalder ligningen for funktionens nulpunkter, hvilket er helt forkert formuleret! De forskellige variationer i formuleringer viser, at eleverne er ved at tage processen til sig, og i den forbindelse igangsætter de de rigtige processer, men forståelsen og begrundelsen for *hvorfor* de gør som de gør, kan de ikke formå at formulere i tilstrækkelig grad (Sfard, 1991, s. 29f.; Skemp, 2002, s. 104f.).

Nøjagtig det samme mønster viser sig næste gang eleverne møder opgaven, aflevering 13 opgave 4. Her forsøger elev G at løse $f'(x) = 0$, men regner flere gange forkert og skriver mange ting, der modsiger hinanden. Han viser en stærk procesorientering og placering i internaliseringen. Han kender processen, men teksten modstrider tallene. Ud over elev G befinder elev K og F sig ligeledes i internaliseringen. De kan bestemme $f'(x)$, men kommer ikke videre herfra.

Også her ses en meget stor variation i mulige formuleringer i processen for at løse $f'(x) = 0$. Selvom fire regner rigtige, så bruges samme forkerte formuleringer, som sidst, de løste opgaven. Den manglende - eller forkerte - tekst understreger de store udfordringer der er forbundet med at sætte ord på og forklare de matematiske processer (Sfard, 2008, s. 29).

Elev A løser opgaven korrekt, og formulerer sig ud fra en algoritmisk, operationel tænkning. Eksempelvis kan han ikke forklare hvorfor $f'(x)$ sættes lig nul, men viser at internaliseringen af differentialkvotienter er der styr på. De grundlæggende færdigheder er på plads, og kondenseringen med at samle den differentierede funktion som et hele er i gang (Sfard, 1991, s. 19).

I den sidste opgave ses endnu engang samme mønster. Her skal nævnes at tre af eleverne svarer og formulerer sig perfekt. Så sammenlignet med tidligere er der sket fremskridt. Ellers er der ikke nogen ændringer sammenlignet med de tidligere opgaver. Objektforståelse til at forklare sammenhængen mellem f og f' viser sig at være yderst vanskelig for eleverne, men samtidig vigtig for at kunne gøre differentialregning til et selvstændigt begreb.

Besvarelserne af monotoniforhold, som indeholder spændet fra ligninger-funktion-differentialregning, er så procesorienteret, at elever ligefrem manipulerer tal til at “passe” ind i deres proces. Procesorienterings overtag står tydeligt frem i ’anden prøve’, opgave 12, hvor eleverne skal gøre rede for at funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 9$ er voksende. Tre elever laver opgaven korrekt, dog ud fra argumenter leveret af CAS-værktøjet. De andre laver monotoniforhold, hvilket er korrekt nok. Men når funktionen er monoton voksende, vil ligningen $f'(x) = 0$ ikke have nogle reelle løsninger. Alligevel formår elev I og G at finde løsninger til ligningen så de kan fortsætte processen som de plejer. De resterende elever tegner enten grafen med CAS-værktøj eller udregner flere forskellige differentialkvotienter, men evner ikke at få sat ord på. Processen skal beherskes før det er muligt at sætte ord på Sfard (2008).

5.3 Repræsentationernes indbyrdes relation

Efter at have undersøgt elevernes udvikling i begrebsforståelsen mangler endnu et bidrag, som overskriften antyder. I starten af analysen blev der i tabel 8 opstillet den generelle procentvise fordeling over alle opgaver. En krydsreference, som har fanget min interesse, er opgaverne, hvor der er flere repræsentationsformer præsenteret. Det kan være verbale repræsentationsformer internt, men også visuelle og verbale repræsentationsformer. I tabel 8 blev konfidensintervallet udregnet til $37\% - 41\%$, og angiver det interval, hvor der er 95% sandsynlighed for at rigtigt vurderede opgaveudfald befinder sig. I nedenstående tabel 12 ses en markant statistisk afvigelse, når man kun ser på opgavetyper, hvor flere repræsentationsformer er involveret.

Opgavetype	Antal	Total	Rigtig	Delvist	Fejl	Ubesvaret
Forskelligerepræsentationer	71 stk.	781	231	235	184	131
Andel i procent			**30%**	30%	23%	17%
Repræsentationer	28 stk.	308	71	94	93	50
Andel i procent			**23%**	31%	30%	16%
Visuel	43 stk.	473	160	141	91	81
Andel i procent			**34%**	30%	19%	17%

Tabel 12: Oversigt over opgaver med forskellige repræsentationsformer involveret.

Håndteringen af matematisk notation er problematisk for eleverne, som består af en reduktion af tekstrige formuleringer til semiotiske repræsentationer (Rogers, 1960, s. 468; Eisenberg, 2002, s. 152; Duval, 2006, s. 106). Samspillet mellem eksempelvis variablerne x og $f(x)$ og beskrivelsen af hvad variablerne betegner volder gennem hele forløbet problemer. I elevernes besvarelser fremgår, at begrebet funktion identificeres med funktionens regneforskrift, og når opgaven sættes i en anden kontekst kollapser trekanten, idet variablerne ikke anskues strukturelt (Steinbring, 1989, s. 30). Den onde cirkel i reifikationen indtræder, idet variabler som verbale formuleringer endnu ikke er blevet til et selvstændigt objekt (Sfard, 1991, s. 31), hvilket forklares ud fra den udvidede reifikationsteori i figur 6 som at en repræsentationsform endnu ikke beherskes strukturelt og dermed kan et begreb til fulde ikke manifestere sig for eleven. Den stærke procesorienterede tilgang kan påvirke elevernes syn af de strukturelle konturer i en opgave, men problematikken kan også skyldes den abstraktion, der er nødvendig, tids- og energikrævende (Sfard, 1991, s. 16, 1994, s. 53). Hvorom alting er, så viser denne indsigt, at man i undervisningen i langt højere grad skal bringe de forskellige repræsentationsformer i spil, hvor man bistår eleverne i at relatere deres processer til en strukturel forståelse, som fremhæves direkte og implicit i (Sfard, 1991; Knuth, 2000; Eisenberg, 2002; Steinbring, 2005).

Fagtermer som *kvadratet*, *hældningskoefficient* eller *fremskrivningsfaktor*[3], men også hvis et punkt er beskrevet med notationen $f(x) = y$ i stedet for den traditionelle (x, y) notation, volder problemer[4]. Alle understreger den tidligere pointe, at elever har en stærk tendens til at identificere begreber til en enkelt repræsentationsform og processer, uden at reflektere og inddrage andre repræsentationsformer.

Konklusionen er: Der ses stor forskel i elevernes tilgang til begreberne alt efter repræsentationsform, selvom processen er den samme. Det betyder i høj grad en ond cirkel og et kollaps i den epistemologiske trekant og understreger teorien om at udvide reifikationsteorien til at medregne de enkelte repræsentationsformer før et holistisk begreb kan opstå, som illustreret i figur 6. Selvom eleverne udviser en progression og får gjort 'funktion' til et begreb (og får delvist reificeret 'differentiabilitet'), så er det ikke et fuldstændigt begreb, men et begreb med én velfungerende repræsentation, hvilket forhindrer videre læring, når der skal igangsættes nye processer, hvor man som regel også skal bruge andre repræsentationer.

Opgaver, der afhænger af visuel repræsentation, udgør en form for oversættelsesproblematik fx mellem ligninger og grafisk illustration. Eller når graferne for f og f' indgår i opgaven, eller en hvilken som helst anden opgave, hvor en funktions skal behandles grafisk. Elever udviser en ritualistisk procestænkning, hvor visuel repræsentation ikke kommer i spil til sit fulde potentiale. Dette til trods for, at meget af den abstrakte notation ofte kan visualiseres og derigennem bidrage til forståelsen (som bl.a. fremhæves af Eisenberg, 2002, s. 148 og Knuth, 2000, s. 52f.). Selvom et utal af opgaverne i empirien lægger op til en visuel tolkning og løsning, foretages oversættelsen verbal-visuel kun overfladisk.

I min *udvidede reifikationsteori* figur 6 og i forhold til elevernes begrebsforståelse kan det konkluderes at en bred skare af repræsentationer og veksling mellem disse understøtter og fremmer den strukturelle og dybereliggende forståelse. Den læringsmæssige udfordring, som empirien viser, er, at så snart eleverne har reificeret en proces og repræsentationsform forbliver eleverne tro overfor denne, frem for at udfordre sig selv og indgå i undersøgende arbejde med vekslende repræsentationsformer.

[3] Aflevering 3, opgave 3, opgave 8 og aflevering 4, opgave 5 mfl. Eleverne er væsentlig bedre til at anvende fagtermerne, hvis funktions forskrift fremgår af opgaven.

[4] Aflevering 8, opgave 1 og aflevering 3, opgave 11 og 12 mfl. Eleverne klarer væsentlig bedre opgaver med notationen (x, y) frem for $f(x) = y$.

5.4 Elevernes skriftlige formidling

Efter den kvantitative og den kvalitative analyse over elevernes begrebsdannelse fra ligninger til funktioner til differentialregning mangler til sidst det sidste spadestik om elevernes formidlingskompetence, hvortil nogle ret vigtige pointer er tilknyttet. En vigtig pointe fra Sfard er nemlig, at kommunikation ikke er begrænset til kun at omhandle tale, men dækker over alle former for social kommunikation (Sfard, 2008, s. xvii). Skelnen mellem operationel og strukturel forståelse kommer til udtryk gennem ens måde at tale om og med matematik. Det ontologiske skift i reifikationsteorien indebærer en mulig ændring fra at tale om aktiviteter og processer til at omhandle udtryk om ting. Den førstnævnte udtrykkes gennem verber, hvor den sidstnævnte udtrykkes med substantiver. Gennem en reifikation sker en *'alienation'* (fremmedgørelse), hvor det personlige pronomen erstattes til fordel for de reificerede substantiver som sætningens subjekt (Sfard, 2016, s. 326). Reifikationer viser sig dermed sprogligt ved at erstatte udsagn om processer med udsagn om objekter, hvor objekterne er selvstændige sætningsled, uafhængige af menneskelig indflydelse, som var de synlige for os på samme måde som vi tidligere brugte eksemplet "bevægelse" (Sfard, 1991, s. 21; 2008, s. 44). Eksempelvis elev As besvarelse 1: Aflevering 1, opgave 5 og Fs besvarelse 8: Aflevering 3, opgave 19c viser udsagn om processer, hvorimod elev As besvarelse 10: Aflevering 6, opgave 5 og Cs besvarelser 8: Aflevering 3, opgave 19a viser, at processerne er gjort til objekter.

Jeg har i mit analysearbejde arbejdet under den antagelse, at en 'fremmedgørelse' ikke er en forudsætning for at tale om objekter. En sætning kan efter min opfattelse godt indeholde et personligt pronomen som subjekt i sætningen og matematiske objekter som det grammatiske akkusativobjekt (genstandsled). Semantikken i sætningerne *"Da $d > 0$ er der 2 løsninger til andengradsligningen" (Elev B: Besvarelse af aflevering 5, opgave 4)* og *"Som vi kan se, er d større end 0, så derfor har vores ligning to løsninger" (Elev H: Besvarelse af aflevering 5, opgave 4)* er den samme, hvor begge omtaler den strukturelle forståelse og egenskab ved objektet 'diskriminanten' i en andengradsligning. Distinktionen ligger for mig ikke i den grammatiske sætningsanalyse, men derimod om eleverne beskriver en proces eller forholder sig objektivt til en udregning og taler om denne som et objekt (Sfard, 2016, 2008, 1991, s. 5).

På det grundlag er pointen, at eleven gennem de skriftlige arbejder dokumenterer sin begrebsforståelse sort på hvidt, og ved at være opmærksom på hvordan eleven bruger sproget kan man få indikationer på elevens placering i begrebsdannelsesforløbet og dermed få indsigt i, hvordan eleven bedst kan understøttes i den videre læring (Sfard, 2008). Det er ikke kun facit, der tæller. Ud fra de skriftlige formuleringer træder et tydeligt mønster frem. Den første pointe er, at de elever, der skriver mest, flytter sig mest og vice versa. Samtidig ses, at de elever der skriver mest tekst, også får et langt bredere repertoire og bliver i stand til lettere at veksle mellem strukturelle og operationelle beskrivelser[5], hvorimod elever, som skriver fin tekst, men overvejende procesorienteret har langt sværere

[5]Elev A, C, E, I udviser størst progression og er også dem, der skriver mest.

ved at løse især H-, men også V-opgaver[6]. Dette bygger på distinktionen om eleverne beskriver løsningsprocessen eller en beskrivelse af produktet af processen i relation til opgaven, og ikke på brugen af pronomener og 'fremmedgørelse'. Det ses også, at elever kan veksle mellem formidlinger, hvor de kan beskrive og løse en G-opgave strukturelt, for bagefter at formulere sig operationelt til en V- eller H-opgave. Dette stemmer i god relation til reifikationsteorien at elever, der bruger begreber i nye processer formentlig også vil beskrive disse nye proceser operationelt, selvom de brugte begreber kan formuleres og anskues strukturelt.

Opsummerende og ud fra den systematik elevernes formuleringer udgør kan kommunikationen og formidlingen være nøglen til den dybereliggende forståelse. På det grundlag vil det være min didaktiske påstand, at man ved at beskrive en proces og ved efterfølgende at reflektere og tale om produktet af processen, som var det et virkeligt objekt, kan man være med til at fremme forståelsen og understøtte den strukturelle forståelse og en reifikation.

Løbende i kapitlet er opsummeret og konkluderet, således at fjerde delspørgsmål (afsnit 1.3) løbende i kapitlet er blevet besvaret. I stedet for at lave en separat opsamling her, vil jeg i stedet konkludere samlet for analysen i det afsluttende kapitel.

[6] Som ses hos elev D, F, G, K.

Kapitel 6

Konklusion og perspektivering

6.1 Konklusion

Afsluttende kan der efter det omfattende arbejde konkluderes på problemformuleringen fra afsnit 1.3:

> Hvordan dannes matematiske begreber i progressionen af de funktionsteoretiske begreber: ligning - funktion - differentiabilitet i skriftlige elevproduktioner over et to måneders matematik C til B kursus?

Konklusionen indeholder fire dele. Første del er en anbefaling til fremadrettet matematikdidaktisk arbejde. Anden del fremlægger de overordnede konklusioner fra analysen. Tredje del er konklusion mht. til sprogbrug og formidlingskompetencen og til sidst gives en oversigt over elevernes udvikling af begrebsforståelse. De to midterste dele udgør et overordnet svar på problemformuleringen, hvorudfra den første del er udledt. Den sidste del er en konklusion over elevernes udvikling i begrebsforståelse, som er utrolig kontekstafhængig, da undervisningen både har været præget af COVID-19, men også fordi min rækkefølge af kernestoffet ikke er den eneste mulige opbygning af kurset.

6.1.1 Matematikdidaktisk anbefaling

Først og fremmest kan specialets arbejde give en matematikdidaktiske anbefaling: Matematikfaget, hvis kernestof er ekspanderet, må ikke reduceres til statiske, separate bestanddele. For en succesfuld udvikling i begrebsdannelsen skal fleksibiliteten i repræsentationsformer og formuleringer understøttes (Sfard, 1991, 2008; Steinbring, 1989, 2005). Eksempelvis bør ligningssystemer ikke udelukkende behandles som en selvstændig opgave og metode, men relateres til to funktioners skæringspunkt, og yderligere som beregningen bag den grafiske metode til bestemmelse af skæringspunkter. Ligesom regning med funktioner senere har indflydelse på forståelse af avancerede funktionsforskrifter og ikke mindst de abstrakte regneregler for differentiation og deres notation. Matematik er en fortløbende viderebygning på grundlag af eksisterende viden (Sfard, 1991, s. 23), men hvis den gamle viden og færdigheder ikke tydeliggøres og relateres til andre repræsentationsformer og de nye, overbyggende kompetencer, vil det være som en 'kirurger uden skalpel'. Et nytteløst forsøg, selvom kirurgen er klar til at udføre sit arbejde.

Den anbefaling er draget ud fra analysearbejdet, lavet ud fra den *udvidede reifikationsteori* i figur 6, hvor Sfard (1991) og Steinbring (2005) kombineres. For at fuldende en samlet reifikation af et begreb skal både verbal og visuel (og andre) repræsentationsformer igennem en reifikation, som argumenteret for i den udvidede reifikationsmodel i figur 6, hvortil formidlingen bliver det samlende og forbindende element i overgangen fra proces til objekt.

6.1.2 Opmærksomhedspunkter fra reifikationerne

Ud fra resultaterne i analysen fremgår det, at eleverne har stor udfordring i veksling af interne tekst repræsentationer, hvis fx en model skal opstilles ud fra en opgaveformulering. Dybdeforståelsen ved modellering og oversættelsen fra tekst til matematiske symboler er med andre ord problematisk at skabe relationer mellem, som også pointeres af Blomhøj (2006).

Det samme viser sig ved visuelle repræsentationer, hvor eleverne har vanskeligt ved at omsætte de lærte processer til grafiske objekter. Elever skal i højere grad udfordres gennem alternativer og vekslende skikkelser af repræsentationsformerne for at fremme en reifikation, som også argumenteres for i Steinbring (1989, 2005), Sfard (2008) og Knuth (2000)

Når fx venstre side ikke er med i en ligning/udtryk, afsløres internalisering. Man er her meget procesorienteret og laver matematikken uden af forholde sig til det objekt, der udregnes. Det afslører en operationel tilgang til lighedstegnet frem for at se relationen mellem ækvivalente størrelser (Sfard, 1991, s. 5f.). Det er et gennemgående karaktertræk for især elever, som behersker G-opgaver og har vanskeligheder ved V-opgaver. Det kan derfor anbefales, at man er ekstra opmærksom på at hjælpe elever med at tilegnelse sig den matematiske kultur (Ernest, 1999, s. 73ff.; Telese, 1999, s. 3).

Først tilegnes processen matematisk, hvor metoden er i fokus, som fremhæves af Sfard (1991, 1992, 2008). Men derefter bemærkes meget interessant, at med teksten og formuleringerne kommer begrebsliggørelsen og forståelsen langsomt. Gennem det skrevne, gennem kommunikation og formidling, begynder man at tale om resultater som objekter og den strukturelle forståelse træder tydeligere frem.

6.1.3 Formidlingskompetencen

Iagttages elevernes sprogbrug og skriftlige formidling ses en sammenhæng mellem antal anslag og progression. Det siger måske sig selv, en åbenlys logisk deduktion - en tautologi - vil nogle nok påstå. Men man skal ikke misforstå min hensigt. Ud fra analysen, kan det fremhæves som en tendens i elevernes konstruktion af begreber. De elever, der foretager mindst progression, skriver mindst. De, der skriver mest, flytter sig mest. Også selvom begge grupper regner rigtigt og får samme facit.

Hvordan kan denne sammenhæng så argumenteres for? Det kan skyldes at forklaringerne, formidlingen, kommunikationen er nødvendig for at skabe vækst for den strukturelle forståelse. Beskrivende og forklarende tekst er af yderste vigtighed. Gennem formidling tvinges man til at forholde sig til de iværksatte processer og operationer. Man begynder at omtale processen og ikke mindst resultatet af processen som et objekt. Betragt blot forskellen på besvarelserne: $d = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-50) = 225$ og besvarelsen *"først bestemmer jeg diskriminanten* $d = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-50) = 25 + 200 = 225$ *altså er* $d = 225$ *og derfor vil der være to løsninger til andengradsligningen".* Udregningerne og processerne er identiske, men den sidste italesætter sine udregninger og bliver gennem kommunikation til grammatiske såvel som matematiske objekter. Skriftligheden kan med andre ord være mellemstationen, det evigt uadskillelige forbindelsesled mellem operationel og strukturel begrebsforståelse. Det er med andre ord gennem ens sprogbrug man kan muliggøre en strukturel forståelse.

6.1.4 Udvikling i begrebsdannelse

Først og fremmest bør det bemærkes at følgende opsætning over elevernes begrebsdannelse er ret kontekstafhængig, idet gennemgangen af kernestoffet, som holdet har været igennem, ikke er den eneste mulige planlægning. Ud fra den foreliggende empiri, tegnes et forløb som:

Afl 2: Ligninger er internaliseret og med begyndende kondensering.

Afl 3: Funktioner er internaliseret. Ingen problemer med at udføre trinvise udregninger og basale processer (G-opgaver).

Afl 4: Funktioner er i høj grad internaliseret og også kondenseret. De fleste V-opgaver kan løses i tilstrækkelig grad, og viser, at kondenseringen er godt i gang. Dette er dog kun for den verbale repræsentationsform.

Afl 5: Ligninger kondenseres, hvor andengradsligninger udvider ligninger til at ligninger kan have mere end en løsning. Det skal bemærkes: Om ligninger opnår en reifikation, tvivler jeg på. Problemet består i, at ligninger i optimeringsopgaver kun viser internaliserede træk. Ligninger med en anden repræsentation end en oplyst ligning, som skal løses, er problematisk.

Afl 6: H-opgaver for funktioner (regning med funktioner) viser, at funktioner er reificeret med funktionsforskrift som repræsentationsform. Funktionerne indgår i højere liggende processer, og er derfor nødvendigt at bruge dem ud fra en strukturel forståelse. Reifikationen er dog begrænset til den verbale repræsentationsform. (Regning med funktioner er eksempelvis endnu ikke blevet et visuelt begreb).

Prøve 1: Ligninger er kondenseret og funktioner godt reificeret. Danner et godt udgangspunkt for at kunne begynde på og forstå differentialregning, hvor regning med funktioner ud fra en strukturel tilgang eksempelvis spiller en afgørende rolle.

Afl 12: Lettere internalisering af differentiabilitet, men ud fra funktionsforskriften. Opgaver med grafisk repræsentation af differentialkvotient løses ikke tilfredsstillende.

Afl 13: Kondenseringen af differentiabilitet er godt på vej. Ingen elever formår at behandle differentierede funktioner som et begreb (H-opgaverne i differentialregning besvares næsten ikke af eleverne).

Nok viser matematik B 'vejen' til differentiabilitet, men på ruten foretages en række omveje, så eleverne ikke 'når frem til destinationen til den forventede ankomst'. Mere kontekstnært formuleret, så gennemgår differentialregning ikke en fuldendt reifikation og når ikke at blive et strukturelt begreb. Eleverne er afhængige af processer når differentialregningen skal foretages. Med den bemærkning er det svært at tænke tilbage til før reformen 2017, hvor integralregning (som er en tilbygning på differentialregning) var en fast del at matematik B kernestoffet.

6.2 Perspektivering

Den matematikdidaktiske bog (Hansen, 2019) samler 'proces-objekt-indkapslingsteori-erne' fra (Sfard, 1991; Gray & Tall, 1994, 2007; Dubinsky, 2002) under et. Ikke kun danske i danske sammenhænge, men også internationalt nævnes proces-objekt-indkapsling i flæng under et, ud fra en konstruktivistisk, kognitiv positionering (Scheiner, 2016). Dette ensidige fokus er dog uhensigtsmæssigt, for som Morten Blomhøj skriver: *"Læring som den lærendes konstruktion af viden. Læring ses som en aktiv proces, der er stærkt præget af sociale samspil [...]"(Blomhøj, 2016, s. 64).* Selvom Sfard (1991); Gray & Tall (1994, 2007); Dubinsky (2002) beskæftiger sig med det samme genstandsområde er der forskelle. Dubinsky tilskriver sit arbejde Piaget, hvor Sfard står på skuldrene af Vygotsky og lingvisten Wittgenstein (Sfard, 2016, 2008). Sproget og sprogbrugen bliver dermed et kerneelement i konstruktionen af viden for Sfard.

Dubinskys teori betegnes APOS teorien (forkortelse af Actions-Proces-Object-Schema) og er et arbejde, der bygger videre på Piagets arbejde om matematisk begrebsforståelse. (Sfard & Linchevski, 1994, s. 89; Scheiner, 2016, s. 170; Arnon et. al, 2014). Med undervisningsmetoder, der afviger fra den traditionelle forelæsning i matematik, men derimod er pragmatisk orienteret med deltagerbaseret, undersøgende arbejde for at fremme elevers refleksion, udvikler og bekræfter han sin teori. Den kognitive teori om skemakonstruktion og strukturer forudsætter ifølge Dubinsky en pragmatisk undervisningsmetode (Baker, 2016, s. 278) (se også Arnon et. al, 2014; Dubinsky, 2002). Udfordringen herved beror dog på, at selvom viden kan observeres, så kan man ikke observere bevægelsen fra et stadie til et andet. Det er ikke muligt at decideret kortlægge en elevs læring, andet end beskrive generelle karakteristika (Eisenberg, 2002, s. 144).

Som mange didaktikere og læringsteorier påpeger, så er de kognitive teori dominerende indenfor matematikfaget, hvor Sfard (1998) erindrer os om, at man frem for et ensidigt teoretisk fokus bør være åben og kunne betragte og inddrage flere perspektiver. Et ensporet fokus medfører, at man ikke ser mulighederne, som andre kan bidrage med.

På den baggrund kunne det være interessant at fortsætte arbejdet med elevernes skriftlighed ud fra et kognitivt afsæt, når både Ernest (1998) og Sfard (1991) opfatter de to videnskabelige afsæt som komplementerende. Med specialet er der etableret indsigt i at kunne italesætte elevernes begrebsforståelse, hvilket giver faglæreren et indblik i elevernes placering i begrebsdannelsesfasen og hvilke udfordringer den enkelte elev har. Det videre arbejde, jeg finder interessant at foretage vil være at anvende den udvidede reifikationsteori sideløbende med en pragmatisk orienteret undervisning. Desuden kunne det være interessant at 'gentage' specialet, men ud fra Dubinskys APOS-teori og relatere til dette arbejde.

Skrevet af
Kenneth Madsen

$\measuredangle\top$

Litteraturliste

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer.

Baker, W. (2016). Koestler's Theory as a Foundation for Problem-Solving. I Czarnochs, B., Baker, W., Dias, O. & Prabhu, V. (red.) *The Creative Enterprise of Mathematics Teaching Research Elements of Methodology and Practice – From Teachers to Teachers, s. 267-286.* Tryk: Rotterdam: Sense Publishers.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. I *Journal of Mathematical Behavior, Vol.26, No. 4, s. 348-370*

Bernhard, R. (1972). Mathematics, models, and language in the social sciences. I Uphoff, N. T. & Ilchman, W. F. (red.) *The Political Economy of Development: Theoretical and Empirical Contributions, s. 497-507.* University of California.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.) *Kunne det tænkes?, s. 80-109.* Forlag Malling Beck.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik.* Frederiksberg C: Frydenlund.

Bremholm, J., Hansen, R. & Slot, M. F. (2016). *Elevopgaver og elevproduktion i det 21. århundrede: Præsentation af projektet – forskningsspørgsmål, metode og hovedresultater.* Lærermiddel.dk

Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard, J. (2015). *MAT B1.* Aarhus: Systime.

Collin, F (2014). Socialkonstruktivisme i humaniora. I Collin, F. & Køppe, S. (red.) *Humanistisk videnskabsteori, s. 417-458.* København: Lindhardt og Ringhof Forlag

Collin, F & Køppe, S. (2014). Indledning. I Collin, F. & Køppe, S. (red.) *Humanistisk videnskabsteori, s. 105-152.* København: Lindhardt og Ringhof Forlag

Danmarks Evalueringsinstitut (2016). *Karaktergivning i gymnasiet -En undersøgelse af, hvordan lærere giver karakterer, og hvordan karakterer påvirker elevers tilgang til læring.* Rosendahls.

Danmarks Evalueringsinstitut (2017). *Gymnasiereformen følgeforskningsprogram 2. delrapport.* Hentet fra: https://www.eva.dk/sites/eva/files/2018-08/2.%20udkast%20kvalitativ%20delrapport_endelig%2006.03.2018.pdf

Danmarks Evalueringsinstitut (2018a). *Den faglige udvikling i gymnasiet En undersøgelse af udviklingen i dansk, engelsk, matematik og fysik i perioden 1967-2017 – belyst gennem læreplaner og eksamenssæt.* Hentet fra: https://www.eva.dk/sites/eva/files/2020-01/Rapport%20-%20Den%20faglige%20udvikling%20i%20gymnasiet%20-%20layoutet%20-%20rev160120.pdf

Danmarks Evalueringsinstitut (2018b). *Gymnasiereformen følgeforskningsprogram 3. delrapport.* Hentet fra: https://www.eva.dk/sites/eva/files/2018-11/F%C3%B8lgeforskning_gymnasiereform_3.%20delrapport.pdf

Dewey, J. (1938). *Logic: The Theory of Inquiry* New York: Henry Holt and Company.

Dewey, J. (2008). *Erfaring og opdragelse.* (Fink, H. ovs.). København: Hans Reitzels Forlag.

Dewey, J. (2009). *Hvordan vi tænker.* (Wrang, J. ovs.) Århus: Forlaget Klim.

Dias, O., Baker, W. & Czarnochs, B. (2016). Comparative Study of Three Approaches to Teaching Rates. I Czarnochs, B., Baker, W., Dias, O. & Prabhu, V. (red.) *The Creative Enterprise of Mathematics Teaching Research Elements of Methodology and Practice – From Teachers to Teachers, s. 287-298.* USA: University of New York. Tryk: Rotterdam: Sense Publishers.

Dolin, J. (2017). Dannelse, kompetence og faglighed. I J. Dolin, G.H. Ingerslev & H.S. Jørgensen (red.) *Gymnasiepædagogik -En grundbog. s. 29-54.* København: Hans Reitzels Forlag.

Dolin, J., Jacobsen L.B., Jensen S.B. & Johannsen B.F. (2014). *Evaluering af naturvidenskabelig almendannelse i stx- og hfuddannelserne.* Københavns Universitet: Institut for naturfagenes didaktik. Hentet fra: https://www.ind.ku.dk/projekter/naturvidenskabeligdannelse/140909_Almendannelsesrapport.pdf

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. I Tall, D. O. (red.) *Advanced mathematical thinking, s. 95–123).* Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. I *Educational Studies in Mathematics, 2006, Vol.61, No. 1, s. 103-131.*

Einstein, A. (2016). The Theory of Relativity and Other Essays. I *The Albert Einstein collection : essays in humanism, the theory of relativity, and the world as I see it, s. 103-107.* (Original trykt 1949).

Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. I Tall, D. O. (red.) *Advanced mathematical thinking, s. 140-152.* Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Routledge.

Ernest, P. (1994). The Dialogical Nature of Mathematics. I Ernest, P. (red.) *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective, s. 33-48.* United States of America: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics.* United States of America: State University of New York Press

Ernest, P. (1999). Forms of Knowledge in Mathematics and Mathematics Education: Philosophical and Rhetorical Perspectives. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 38, N0. 1, s. 67-83.* Springer

Esmark, A., Lausten, C. B. & Andersen, N. Å. Socialkonstruktivistiske analysestrategier: en introduktion. *Socialkonstruktivistiske analysestrategier, s. 7-30.* Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Forligskredsen (2016). *Aftale mellem regeringen, Socialdemokraterne, Dansk Folkeparti, Liberal Alliance, Det Radikale Venstre, Socialistisk Folkeparti og Det Konservative Folkeparti om styrkede gymnasiale uddannelser.* Hentet fra: https://dpt.dk/wp-content/uploads/2020/01/160603-Styrkede-gymnasiale-uddannelser.pdf

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual"View of Simple Arithmetic. I *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, No. 2, s. 116-140.*

Gray, E. & Tall, D. (2007). Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. I *Mathematics Education Research Journal 2007, Vol. 19, No. 2, s. 23-40.*

Gregersen, P. & Nørregaard, H. B. (2018). *Kernestof Mat 2 hf.* København: Lindhardt og Ringhof.

Hansen, R. (2019). *Matematikdidaktik -Mellem fag og didaktik.* København: Hans Reitzels Forlag.

Hansen, R., Slot, M. F. & Bremholm, J. (2016). *Elevopgaver og elevproduktion i det 21. århundrede: Kvalitativ analyse af elevproduktion i matematik, dansk og naturfag.* Lærermiddel.dk

Haue, H. (2003). *Almendannelse som ledestjerne -En undersøgelse af almendannelsens funktion i dansk gymnasieundervisning 1775-2000.* Odense: Syddansk Universitetsforlag.

Haue, H. (2017). Gymnasiets transformation. I J. Dolin, G.H. Ingerslev & H.S. Jørgensen (red.) *Gymnasiepædagogik -En grundbog, s. 55-65.* København: Hans Reitzels Forlag.

Illeris, K. (2017) *Læring.* Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Jensen, K. B. S. (2011). Status på anvendt matematik i det almene gymnasium. I *MONA: Matematik og Naturfagsdidaktik, No. 4, s. 57-73.* Hentet fra: https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36088

Katznelson, N. & Louw, A. (2018). *Karakterbogen -Om karakterer, læring og elevstrategier i en præstationskultur.* Aalborg: Aalborg Universitetsforlag.

Kvale, S. (1980). *Spillet om karakterer i gymnasiet.* Aalborg Stiftsbogtrykkeri

Knuth, E. (2000). Understanding Connections between Equations and Graphs. I *The Mathematics Teacher, Vol. 93, No. 1 (January 2000), s. 48-53.*

Køppe, S. & Helles, R. (2014). Empiri og metode. I Collin, F. & Køppe, S. (red.) *Humanistisk videnskabsteori, s. 497-534.* København: Lindhardt og Ringhof Forlag

Lemnitzer, L. & Zinsmeister, H. (2015) *Korpuslinguistik -Eine Einführung.* Tübingen: Narr Francke Attempto Verlag.

Lesh, R., Yoon, C., & Zawojewski, J. (2007). John Dewey Revisited - Making Mathematics Practical versus Making Practice Mathematical. I Lesh, R. A., Hamilton, E. & Kaput, J. J. (red.) *Foundations for the Future in Mathematics Education, s. 315-348.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Markvorsen, S., Christensen, S. T., Petersen, C. K., Højte, S., Lyndrup, O., Olesen, M. N. & Rønning, F. (2019). *Faglighed i gymnasiet: Matematik - Delrapport 2.* Odense: Institut for Kulturvidenskaber, Syddansk Universitet. Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/publikationer/2020/jan/200109-delrapport-2-matematik.pdf

Matematikkommissionen (2017). *Matematikkommissionen Afrapportering.* København: Undervisningsministeriet. Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/gym/pdf17/jan/170116-matematikkommissionen-afrapportering.pdf?la=da

Morgan, C. & Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: a discursive approach. I *Research in Mathematics Education, Vol. 18, No. 2, s. 92-119.* Hentet fra: http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2016.1176596

Niss, M. & Højgaard, T. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* København: Undervisningsministeriet. Hentet fra: http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 102, No. 1, s. 9–28.*

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number.* London: Routledge

Piaget, J. (1953). How Children Form Mathematical Concepts. I *Scientific American, Vol. 189, No. 5, s. 74-79.*

Poincaré, H. (1914). Mathematics as Aesthetic Creation. I Brown, S., Fauvel, J. & Finnegan, R. (red.) *Conceptions of Inquiry, 2005, s. 10-18.* England.

Qvortrup, A. & Ljungdahl, A. (2019). *Faglighed i gymnasiet: Projektets rammer og design - Delrapport 2.* Odense: Institut for Kulturvidenskaber, Syddansk Universitet. Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/publikationer/2020/jan/200109-delrapport-1-rammer-og-design-sammenflettet--2-.pdf

Qvortrup, A. & Ljungdahl, A. (2019b). *Udviklingen af fagligheden i gymnasiet: Tværgående opsamling og resultater - Delrapport 6.* Odense: Institut for Kulturvidenskaber, Syddansk Universitet. Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/publikationer/2020/jan/200109-delrapport-6-opsamling-og-udvikling.pdf

Rogers, E. M. (1960). *Physics for the inquiring mind: the methods, nature, and philosophy of physical science.* Princeton University Press.

Rode, M. (1967). *Hirschsprungs konversations leksikon: S-Å-udstillingen.* Forlaget Skrifola.

Scheiner, T. (2016). New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 91, No. 2, s. 165-183.*

Schoenfeld, A. (2002). Research Methods in (Mathematics) Education. I Lyn, E. (red.) *Handbook of International Research in Mathematics Education s. 435-459.* United States of America: Lawrence Erlbaum Associates

Schou, M. (2018). Hvad sker der i matematikundervisningen? Om overgangen fra grundskole til gymnasium. I *MONA: Matematik og Naturfagsdidaktik, No. 2, s. 7-23.* Hentet fra: https://tidsskrift.dk/mona/article/download/106220/155214/

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, No. 1, s. 1-36*

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. I Dubinsky, E. & Harel, G. (red.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy s. 59-84.*

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. I *For the Learning of Mathematics, Vol. 14, No. 1, s. 44-55.*

Sfard, A. (1998). On Two Metaphors for Learning and the Danger of Choosing Just One. I *Educational Researchers, Vol. 27, No. 2, s. 4-13.*

Sfard, A. (2001). There Is More to Discourse Than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More about Mathematical Learning. I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 46, No. 1, s. 13-57*. Springer.

Sfard, A. (2008). I *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing (Learning in Doing: Social, Cognitive and Computational Perspectives)*. Cambridge University Press

Sfard, A. (2016). An interview with Anna Sfard (A. Qvortrup & M. Wiberg, interviewer). I Qvortrup, A., Wiberg, M., Christensen, G. & Hansbøl, M. (red.) *On the Definition of Learning, s. 323-336.* Odense: University Press of Southern Denmark

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification: The Case of Algebra. I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, No. 2/3, s. 191-228.* Odense: University Press of Southern Denmark

Skemp, R. R. (2002). *Mathematics in the Primary School.* London: Routledge

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. I *Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 12, No. 2, s. 88-95.*

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.) *Kan det virkelig passe?, s. 143-159.* København: L& R Uddannelse

Skovsmose, O. (2011). *An Invitation to Critical Mathematics Education.* Rotterdam: Sense Publishers

Slot, M. F., Hansen, R. & Bremholm, J. (2016). *Elevopgaver og elevproduktion i det 21. århundrede: En kvantitativ og kvalitativ analyse af elevproduktion i matematik, dansk og naturfag.* Lærermiddel.dk

Steinbring, H. (1989). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. I *For the Learning of Mathematics, Vol. 9, No. 1, s. 24-33.*

Steinbring, H. (1993). Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. I *Journal für Mathematik-Didaktik, Vol. 14, No. 2, s. 113-145.*

Steinbring, H. (1999). *How do Mathematical Symbols Acquire Their Meaning? -The Methodology of the Epistemologybased Interaction Research.* Fra: Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern. Hentet fra: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1999/steinbring_99.pdf

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction: An Epistemological Perspective, Vol. 38*. Springer Science+Business Media

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 61, No. 1/2, Semiotic Perspectives in Mathematics Education: A PME Special Issue, s. 133-162*. Springer

Stensmo, C. (2012). *Indføring i pædagogisk filosofi.* Aarhus: Forlaget Klim.

Tall, D. (2002). The Psychology og Advanced Mathematical Thinking. I Tall, D. O. (red.) *Advanced mathematical thinking, s. 3-21)*. Dordrecht: Kluwer.

Telese, J. A. (1991). *The Role of Social Constructivist Philosophy in the Teaching of School Algebra and in the Preparation of Mathematics Teachers.* Paper presented at the Annual Meeting of the Association of Teacher Educators (79th, Chicago, IL, February 13-17, 1999). Hentet fra: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED432469.pdf

Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. I Trouche, L., Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (red) *Mathematics Education Library, The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument, s. 137-162.*

Ulriksen, L., Murning, S. & Ebbensgaard, A.B. (2009). *Når gymnasiet er en fremmed verden. Eleverfaringer - social baggrund - fagligt udbytte.* Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Undervisningsministeriet (2013a). *Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen*. BEK nr. 776 af 26/06/2013 Historisk.
Hentet fra: https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152507#Bil36

Undervisningsministeriet (2013b). *Bekendtgørelse om uddannelsen til toårigt hf*. BEK nr 779 af 26/06/2013 Historisk.
Hentet fra: https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152579#Bil15

Undervisningsministeriet (2016a). *Bekendtgørelse af lov om de gymnasiale uddannelser*. Lov nr. 1716 af 27/12/2016.
Hentet fra: https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=209370

Undervisningsministeriet (2016b). *Kommissorium for matematikkommission for de gymnasiale uddannelser.*
Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/gym/pdf16/sep/160913-kommissorium-for-matematikkommissionen.pdf?la=da

Undervisningsministeriet (2017a). *Matematik B – stx, august 2017* . Læreplaner 2017. Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-laereplaner-2017/stx/matematik-b-stx-august-2017.pdf?la=da

Undervisningsministeriet (2017b). *Matematik B – toårigt hf, august 2017*. Læreplaner 2017. Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-laereplaner-2017/hf/matematik-b-toaarigt-hf-august-2017.pdf?la=da

Undervisningsministeriet (2017c). *Notat om følgeforskning til gymnasiereformen.* Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/gym/pdf17/jun/170601-notat-om-foelgeforskning-til-gymnasiereformen.pdf?la=da

Undervisningsministeriet (2019a). *Evaluering af de skriftlige prøver i matematik på stx og hf ved sommereksamen 2019 Delrapport 1 – ny ordning.* Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/gym/pdf19/nov/191119-evaluering-matematik-stx-og-hf-rapport-2019-ny-ordning.pdf

Undervisningsministeriet (2019b). *Beskrivelse af opgave og organisering for Nationalt center for udvikling af matematikundervisning.* Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/aktuelt/pdf-19/190221-beskrivelse-af-opgave-og-organisering-for-nationalt-center-for-udvikling.pdf?la=da

Undervisningsministeriet (2020a). *Matematik B/C, hf Vejledning.* Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-vejledninger-til-laereplaner/hf/200211-undervisningsvejledning-matematik-b-c-hf.pdf?la=da

Undervisningsministeriet (2020b). *Vejledning til gymnasiale uddannelsesinstitutioner om aflysning og afholdelse af prøver, afgivelse af årskarakterer m.v. i sommerterminen 2020. Retningslinjer om prøvetræning i nødundervisningen.* Hentet fra: https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/aktuelt/pdf20/apr/200422-vejledning-til-gym-uddannelsesinstitutioner-om-aflysning-og-afholdelse-af-proever-mv.pdf?la=da

Zazkis, R. (2011). *Relearning Mathematics: A Challenge for Prospective Elementary School Teachers.* United States of America: Information Age Publishing.

Tabeller

Figurer

Stikords- og navneregister