Empirisk analyse af en nk DSGE-model bestående af 16 ligninger ved brug af CVAR-metoden.

Thor Laugesen
Studie nr: 20112936

Vejleder: Hamid Raza

Antal normal sider: 30,2

Abstract

Criticism has been raised against dynamic stochastic equilibrium models (DSGE). One critique of the DSGE-models is that they fail to present an adequate representation of the financial sectors interaction with the rest of the economy. Furthermore, critics state that the DSGE-models are built on implicit and explicit assumptions that are not supported in by the data. In a paper by Katarina Juselius and Franchi Massimo, a DSGE model is investigated using the cointegrated vector autoregressive method (CVAR) and they find that the DSGE model is highly criticisable when it is taken to the data. Furthermore, Juselius and Massimo criticize the typical econometrical approaches in DSGE modelling regime. However, the model that Juselius and Massimo investigates is a simple DSGE consisting of a small number of equations. Therefore, it is relevant to examine if the conclusion stands when the critique is applied to a larger DSGE model, that includes more details in its structural assumptions. In this paper a new Keynesian DSGE model is examined. The nk DSGE model that is examined in this paper consists of 16 equations and it includes price rigidities and a financial sector with a financial accelerator model. The structural assumptions in the DSGE-model is investigated using the CVAR method in a data rich environment consisting of eleven variables. The CVAR approach felicitates that some of the structural assumptions in the DSGE model can be formulated as hypotheses and hence, be tested. Most of the hypothesis formulated in the case of the nk DSGE model differ from the hypothesis that Juselius and Massimo formulates in their examination of the smaller DSGE model. However, the results presented in this paper also suggest that the nk DSGE model is highly critical. The structural assumptions in the nk DSGE model is formulated as cointegration restrictions in the CVAR model.Furthermore, the tests results suggest that a number of the structural assumptions in the nk DSGE model fail to be a correct representation of data. The use of calculating and investigating the DSGE-models through the CVAR method is not typical. It is concluded that the CVAR approach is a powerful and more empirically founded tool that enables taking the economic models to the data that includes calculations and hypothesis testing but does not include fixed prior distributions. and to a greater extent is more empirically founded.

Indhold

1 Indledning

Katarine Juselius samt Massimo Franchi har i 2007 udgivet en artikel med titlen ”Taking a DSGE Model to the Data Meaningfully”[1]. Deres artikel er skrevet som en respons til at Peter Irelands artikel ”A method for taking models to the data”[2]. I denne artikel demonstrerer Peter Ireland, hvordan en dynamisk stokastisk generel ligevægts model (DSGE-model) bestående af seks ligninger, kan tages til dataene og dermed estimeres og evalueres. Gennem denne proces omskriver Ireland modellen så den bliver lineær, hvorefter han formulerer modellen på baggrund af én ikke-observerbar drivende variabel, teknologiske shock, og herefter estimerer Ireland modellen ved brug af en vektor autoregressiv model (VAR-model). Ireland finder gennem hans beregninger, at den simple model i høj grad er relevant i forbindelse med at beskrive sammenhæng med variablene. Derefter udregner Ireland parametrene i modellen, og simulerer derefter forskellige økonomiske scenarier ved brug af den udregnede model. (Ireland, 2004) Juselius og Franchi udregner i deres artikel samme DSGE-model ved brug af samme variabler som Ireland, men hvor de bruger en kointegreret vektor autoregressiv model (CVAR-model). Ved brug af CVAR-modellen oversætter Juselius og Franchi implicitte og eksplicitte antagelser i DSGE-modellen til hypoteser, som kan testes. Juselius og Franchis konklusion adskiller sig markant fra Irelands, da Juselius og Franchi afviser næsten alle de eksplicitte og implicitte antagelser i modellen, og dermed må beskrive modellen som i ringe grad at være en korrekt repræsentation af sammenhængene mellem variablene. (Juselius & Franchi , 2007) Juselius og Franchis kritik består i en tovejs kritik, der både kritiserer DSGE-modellerne som hyppigt anvendes, men også kritiserer de økonometrisk metoder, der ofte anvendes i arbejde økonometriske modeller. Juselius og Franchis artikel kan ses som et fremgangsmåde eller en metodologi til at tage DSGE-modeller til dataene på den måde, som Juselius og Franchi mener er korrekt. Juselius og Franchi kritiserer hele det videnskabsteoretiske afsæt der er i forbindelse med udarbejdelsen af DSGE-modeller, og viser med deres artikel, at den videnm, der bliver produceret med denne metode, ikke nødvendigvis er i overensstemmelse med virkeligheden, og at den måde som teorierne hyppigt bliver evalueret på er mangelfulde. Juselius beskriver i hendes bog ”Økonomien og virkeligheden”, hvordan DSGE-modeller er yderst kritisable, da de antager stationeret blandt variable som ikke er i overensstemmelse med empirien. Derudover kritiserer hun også modeller for ikke at have en fyldestgørende inkludering af den finansielle sektor. (Juselius, 2019) En del af det Juselius kritiserer DSGE-modellen for i hendes artikel er, at modellen kun har teknologi som drivende trend, samt at

[1] (Juselius & Franchi , 2007)
[2] (Ireland, 2004)

modellen teoretisk forslår stationaritet mellem variable, der ikke er stationære. På baggrund af dette kritiseres modellen yderligere for ikke at indeholde nok variable. Men kan disse resultater og kritikpunkter umiddelbart overføres til en kritik af større DSGE-modeller, der indeholder flere shock variabler, flere variabler generelt og andre eller mere detaljerede specifikationer mellem variablene i modellen? Derudover er CVAR proceduren lavet på en forholdsvis lille DSGE-model. Kan denne metode benyttes på en større DSGE-model, der indeholder flere ikke-observerede variable, og som indeholder komplekse relationer mellem variablene, som er udtrykt ved mere komplekse differentialligninger, der indeholder sammenhænge mellem forskellige lags af variablene? For at kritikken kan videreføres til at omhandle flere DSGE-modeller samt at kritikken af udregningsmetoderne kan videreføres til større DSGE-modeller, er dette et relevant spørgsmål undersøge. Juselius kritiserer DSGE-modellerne for at favorisere bestemte økonomiske politikker og så kritiserer hun dem for at negligere den finansielle sektor, og derfor er det relevant at undersøge denne kritik.

Hvis ikke de større DSGE-modeller kan kritiseres, og antagelserne i større DSGE-modeller er korrekte, når de bliver empirisk undersøgt, så kan analysen bruges til at udbygge arbejdet med DSGE-modeller, og understøtte udbredelsen af DSGE-modeller.

2 Problemformulering

Følgende problem vil danne udgangspunkt for opgavens struktur:

Problemformulering:

Hvordan kan en mellemstor nk DSGE-model blive taget til empirien ved brug af CVAR-metoden?

Underspørgsmål:

Er antagelserne og strukturen i en mellemstor nk DSGE-model i overensstemmelse med empirien?

DSGE-modellen, der bliver arbejdet med, er en ny-keynesiansk DSGE-model, der består af 16 ligninger, og indeholder en finansiel sektor i form af finansiel accelerator model. Modellen er fra Christensens og Dibs artikel " The financial accelerator in an estimated New Keynesian model" (Christensen & Dib, 2008).

3 Opbygning af opgaven

Denne opgave vil bære bygget op omkring en empirisk undersøgelse af DSGE-modellen fra (Christensen & Dib, 2008). Der er vil først komme en beskrivelse af selve modellen, hvorefter modellen vil blive formuleret så det kan bruges i økonometrisk sammenhæng. Herefter vil der komme et afsnit omkring CVAR-metoden, som vil blive brugt til at analysere modellen. Efter dette afsnit, vil der komme en beskrivelse af det data, der bliver brugt i udregningerne af CVAR-modellen. Derefter vil der komme en videnskabsteoretisk diskussion, da afsættet i videnskabsteorien ved brug af CVAR-metoden i forbindelse med metodologien benyttet i (Juselius & Franchi , 2007) adskiller sig fra afsættet i videnskabsteorien, der bliver benyttet i (Christensen & Dib, 2008). Efter dette vil analysen komme, hvori resultaterne af de økonometriske test vil fremgå. I det næste afsnit vil disse resultater bliver diskuteret og til sidst vil der være en konklusion på opgaven.

4 Teori

I dette afsnit vil den ny-keynesianske DSGE-model blive beskrevet. Herefter vil det blive beskrevet, hvordan modellen kan løses, derefter, hvordan modellen kan log-lineariseres og hvordan den dernæst kan sættes i en state space løsningsform, så den kan bruges i den kvantitative analyse. Til sidst vil der være en opsummering af modellen.

DSGE-modellen som vil blive analyseret i denne opgave, er fra (Christensen & Dib, 2008). I Christensen og Dib modellen er der blevet modelleret en finansiel accelerator model ind i en standard ny-keynesiansk DSGE-model. Modellen består af tre overordnede sektorer. Hver sektorer bygges op af dynamiske ligninger, hvori der indgår stokastiske elementer. Disse ligninger kan løses for at finde en generel ligevægt. Sektorerne er husholdningerne, produktionssektoren og en monetær autoritet. Indenunder produktionssektoren er der entreprenørerne, kapitalproducenterne og forhandlerne. Når variablene bliver beskrevet med små bogstaver, beskrives der reelle variable, hvorimod store bogstaver beskriver nominelle værdier. Hvis der ikke er nogen tidsidentifikation på variablen, angiver variablen den konstante steady-state værdi i ligevægt. Hvis der er $\sim$ over en variabel, henviser det til, at der er taget logaritmen af variablen i forhold til variablens steady-state værdi f.eks. $\tilde{y}_t = \log\left(\frac{y_t}{y}\right)$. For at differentiere mellem hvilke ligninger, der udgør modellen i ikke-lineær, steady-state og lineær form, så nummereres ligninger ved brug af henholdsvis A, B og C.

4.1 Husholdningerne

Husholdningernes præference over arbejde og fritid er givet ved en nyttefunktion. I nyttefunktionen indgår der variablerne, forbruget c_t, den reelle pengebalance $\frac{M_t}{p_t}$ og husholdningernes fritid, som er givet ved $1 - h_t$, hvor h_t er andelen af tid i arbejde. Derudover indgår der nogle shock-variable, som er et shock til husholdningernes præference af forbrug e_t og et shock til pengeefterspørgslen b_t. Shock-variablene i modellen er eksogene ikke-observerbare variable.

Nytten ved tiden nul er givet ved følgende formel:

$$U_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, \frac{M_t}{p_t}, h_t\right) \qquad \beta \in (0,1)$$

I nyttefunktionen er β en discountfaktor. Både shocket til forbruget og shocket til pengeefterspørgslen følger første orden autoregressive processor:

$$\log(e_t) = \rho_e \log(e_{t-1}) + \varepsilon_{et},$$
$$\rho_e \in (0,1)\varepsilon \qquad \varepsilon_{et} \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$$

$$\log(b_t) = (1 - \rho_b)\log(b) + \rho_b \log(b_{t-1}) + \varepsilon_{et},$$
$$\rho_b \in (0,1)\varepsilon \qquad \varepsilon_{et} \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$$

Nyttefunktionen kan skrives op i enkeltperiodeform på følgende måde:

$$u(\,) = \frac{\gamma e_t}{\gamma - 1}\log\left[c_t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-}}\right] + \eta\log(1 - h_t)$$

I enkeltperiode formen indgår der dermed parametrene γ og η. γ er den konstante elasticitet af substitution mellem forbrug og den reelle pengemængde, og η er vægten af fritid i funktionen.
Som ved DSGE modeller generelt modelleres husholdningssektoren ud fra en nyttefunktion, der optimeres i forhold til en budgetbegrænsning. Den repræsentative husholdnings budgetbegrænsning er givet ved:

$$P_t c_t + M_t + D_t \leq W_t h_t + R_{t-1}D_{t-1} + M_{t-1} + T_t + \Omega_t$$

På venstre side er der givet nominelt forbrug $P_t c_t$, pengemængden M_t samt nominelle indskud i finansielle mellemled D, som ikke kan overstige lønningerne gange arbejdstimerne $W_t h_t$ samt nominelle indskud i finansielle mellemled gange den nominelle rente i den foregående periode $R_{t-1}D_{t-1}$ plus pengemængden i den forrige periode M_{t-1} plus indtjeningen fra en overførsel af et engangsbeløb fra den monetære autoritet T_t plus udbytteudbetalinger fra detailhandel virksomheder Ω_t.
Budgetbegrænsningen og nyttefunktionen indeholder nogle af de samme variable, og husholdningerne vil vælge disse variable, så de maksimerer deres nytte. Optimeringsproblemet kan løses ved at opsætte en ligning med en lagrangian-multiplikator, som er defineret som funktionen, som der optimeres, minus en lagrangian -multiplikator variabel ganget med budgetrestriktionen:

$$\mathcal{L}_t = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, \frac{M_t}{p_t}, h_t) - \lambda_t[P_t c_t + M_t + D_t - W_t h_t - R_{t-1}D_{t-1} - M_{t-1} - T_t - \Omega_t]$$

Ved at indsætte nyttefunktionen bliver dette:

$$\mathcal{L}_t = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big(\frac{\gamma e_t}{\gamma - 1} \log\left[c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] + \eta \log(1 - h_t) - \lambda_t[P_t c_t + M_t + D_t - W_t h_t - R_{t-1}D_{t-1} - M_{t-1} - T_t - \Omega_t]\Big)$$

Første odens betingelserne i forhold til c_t udeledes ved partiel differentiering. Dette udeledes ved brug af kædereglen:

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dc_t} = \beta^t \frac{\gamma e_t}{\gamma - 1} \frac{1}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} - \beta^t \lambda_t$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dc_t} = \frac{e_t c_t^{\frac{-1}{\gamma}}}{c_t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}} m_t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \lambda_t$$

$$\frac{e_t c_t^{-\frac{1}{\gamma}}}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \lambda_t$$

$$\frac{e_t c_t^{-\frac{1}{\gamma}}}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \lambda_t \qquad \text{A1}$$

Ligning A1 er den første ligning, der er med at udgøre selv DSGE-modellen.

I forbindelse med differentiering med M_t udvides lagrangian-funktionen med en ekstra tidsperiode.

$$\mathcal{L}_t = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big(\frac{\gamma e_t}{\gamma - 1} \log\left[c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] + \eta \log(1 - h_t)$$
$$-\lambda_t[P_t c_t + M_t + D_t - W_t h_t - R_{t-1}D_{t-1} - M_{t-1} - T_t - \Omega_t]\Big)$$
$$+E_0\Big(\beta^{t+1}\Big(\frac{\gamma e_{t+1}}{\gamma - 1} \log\left[c_{t+1}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_{t+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{M_{t+1}}{p_{t+1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] + \eta \log(1 - h_{t+1})$$
$$-\lambda_{t+1}[P_{t+1} c_{t+1} + M_{t+1} + D_{t+1} - W_{t+1} h_{t+1} - R_t D_t - M_t - T_{t+1} - \Omega_{t+1}]\Big)$$

Første ordens betingelsen udeledes ved at partielt differentiere for M_t og der gøres undervejs brug af kædereglen to gange.

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dM_t} = \beta^t \frac{\gamma e_t}{\gamma - 1} \frac{1}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} b_t^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{1}{p_t} M_t\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} \frac{1}{p_t} - \lambda_t \beta^t + E_t \beta^{t+1} \lambda_{t+1}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dM_t} = \frac{e_t b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{p_t}M_t\right)^{\frac{-1}{\gamma}}}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\frac{1}{p_t} = \lambda_t - E_t\beta\lambda_{t+1}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dM_t} = \frac{e_t b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{p_t}M_t\right)^{\frac{-1}{\gamma}}}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \lambda_t - \beta E_t\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}}$$

$$\frac{e_t b_t^{\frac{1}{\gamma}} m_t^{-\frac{1}{\gamma}}}{c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \lambda_t - \beta E_t\left(\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}}\right) \qquad \text{A2}$$

Ligning A2 udgør den næste ligning i DSGE-modellen.

Første ordens betingelserne for h_t bliver udeledt ved brug af kædereglen fra versionen af lagrangian-funktionen med et enkelt tidsled:

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dM_t} = \frac{\eta}{1-h_t} - \lambda_t w_t = 0$$

$$\frac{\eta}{1-h_t} = \lambda_t w_t \qquad \text{A3}$$

I forbindelse med D_t bliver første ordens betingelsen fundet ved brug af lagrangian-funktionen med to tidsled:

$$\mathcal{L}_t = E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\frac{\gamma e_t}{\gamma-1}\log\left[c_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b_t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{M_t}{p_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] + \eta\log(1-h_t)$$
$$-\lambda_t[P_t c_t + M_t + D_t - W_t h_t - R_{t-1}D_{t-1} - M_{t-1} - T_t - \Omega_t])$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dD_t} = \beta^t - \lambda_t D_t + \beta^{t+1}E_t\lambda_{t+1}R_t D_t = 0$$

$$\frac{\lambda_t}{R_t} = \beta E_t\left(\frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}}\right) \qquad \text{A4}$$

4.2 Produktionssektoren

Produktionssektoren består af entreprenørerne, kapitalproducenterne og forhandlerne.

4.2.1 Entreprenørerne

Det antages, at entreprenørerne er risiko neutrale. Entreprenørerne producerer goderne, som bliver solgt til videres produktsering. Det er ikke alle entreprenører, der som overlever til næste periode. Sandsynligheden for, et entreprenørerne overelver til næste periode, er angivet ved *v*, og dermed bliver deres forventede overlevelses tid 1/(1-v). For at finansiere kapitalen, som de skal bruge i denne proces, låner entreprenørerne, hvilket de gør ved at udstede gældkontrakter, som er betinget af hvor stor egenværdi n_t, entreprenørerne har. Disse antagelser gør, at entreprenørernes lån kan beskrives ud fra n_t og derved undgås det, er der i modellen indgår en række finansielle variable. I modellen formuleres samspillet mellem den finansielle side af økonomien og resten af økonomien ved samspillet mellem n_t og resten af variablene. Ved brug af egenværdien og lånet køber entreprenørerne kapitalen k_{t+1}, som de skal bruge i næste periode til den reelle pris q_t. Dette er finansieret af egenværdien i perioden efter n_{t+1}, samt fra lånet som må have størrelsen $k_{t+1}q_t - n_{t+1}$.

Entreprenørernes efterspørgsel efter kapital afhænger af det forventede marginal afkastet $E_t f_{t+1}$ og forventede finansieringsomkostnigner. Derefter gælder der følgende relation:

$$E_t f_{t+1} = E_t\left(\frac{z_{t+1} + (1-\delta)q_{t+1}}{q_1}\right) \tag{A5}$$

Her er δ kapital deprecieringsraten, z_{t+1} er marginalproduktiviteten af kapitalen og $(1-\delta)q_{t+1}$ er værdien af en enhed kapital, som bruges i tiden $t+1$.

Den eksterne marginale finansierings omkostning er lig med netto præmien fra eksterne fonde plus de reelle netto offer-omkostninger, som antages at være lig med den risikofrie rente. Efterspørgslen på kapital skal opholde følgende betingelse:

$$E_t f_{t+1} = E_t\left(S\left(\frac{n_{t+1}}{q_t k_{t+1}}\right)\frac{R_t}{\pi_t}\right) \tag{A6}$$

Her er $E_t\left(\frac{R_t}{\pi_t}\right)$ den forventede reelle rente, og S er den eksterne finansieringpræmie.

Den eksterne finansieringpræmie $S(\,)$ afhænger af størrelsen af egenværdien n_t. Når entreprenørernes egenværdi i forhold til prisen på den kapital, de køber $\frac{k_{t+1}q_t}{\tilde{n}_{t+1}}$, falder, afhænger entreprenørerne mere af usikker låntagning. Dette giver et incitament til at misinformere om størrelsen på $\frac{n_t}{k_{t+1}q_t}$, og derfor bliver lånet mere usikkert og dermed også mere dyrt. Hermed er der modellet friktioner entreprenørernes låntagning.

Entreprenørernes egenværdi udvikler sig givet ved følgende relation:

$$n_{t-1} = v v_t + (1-v) g_t$$

Her benævner v_t egenværdien af de entreprenører, der har overlevet fra sidste periode, hvor lånomkostninger er medregnet. g_t er de penge, som de nye entreprenører kan modtage. som tilsvarer det fra entreprenørerne fra sidste periode som ikke overlevede. v_t er givet ved følgende ligning:

$$v_t = (f_t q_{t-1} k_t - E_{t-1} f_t (q_{t-1} k_t - n_t))$$

Denne ligning kan substitueres ind i den ovenstående:

$$n_{t-1} = v(f_t q_{t-1} k_t - E_{t-1} f_t (q_{t-1} k_t - n_t)) + (1-v) g_t \qquad \text{A7}$$

$E_{t-1} f_t$ er låneomkostninger. De der tjenes i perioden *t* bliver en del af egenværdien i den næste periode *t-1*. Det antages, at entreprenørerne underskriver en gældskontrakt der specificerer en nominel rente. Tilbagebetalingen på lånet vil så afhænge af ex-post reel renten. Hvis inflationen uventet stiger vil det reducere reel omkostningerne af gældstilbagebetalingen som så vil øge entreprenørernes egenværdi.

I modellen er der en produktionsfunktion, med konstant skalaafkast. Produktionsfunktionen beskriver, hvordan entreprenørerne bruger kapital og arbejdskraft til at producere output.

$$y_t \leq k_t^{\alpha} (A_t h_t)^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1)$$

Her er A_t er en shock-variabel, der beskriver teknologien. A_t følger en stationær første ordens autoregressiv proces:

$$\log A_t = (1-\rho_A)\log(A) + \rho_A \log(A_{t-1}) + \varepsilon_t$$
$$\rho_A \in (-1,1), \quad A > 0, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$$

Hver entreprenør sælger personens output i et marked med perfekt konkurrence for en pris, der er lig med dets nominelle marginalomkostninger. Entreprenøren vælger derefter kapitalen og arbejdsudbuddet, således at entreprenørens profit bliver maksimeret. Dette kan formuleres som et maksimeringsproblem ved hjælp af en lagrangian-funktion:

$$\mathcal{L}_t = W_t h + Z_t k - \xi_t(P_t(k_t^{\alpha}(A_t h_t)^{1-\alpha}))$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dk_t} = \alpha k_t^{\alpha-1}(A_t h_t)^{1-\alpha}\xi_t P_t + Z_t = 0$$

$$\alpha k_t^{\alpha-1}(A_t h_t)^{1-\alpha}\xi_t = \frac{Z_t}{P_t} = MPK$$

$$\alpha \xi_t \frac{y_t}{k_t} = z_t \qquad \text{A8}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dh_t} = k_t^{\alpha}(1-\alpha)(A_t h_t)^{-\alpha} A_t \xi_t P_t - W_t = 0$$

$$(1-a)k_t^{\alpha}(A_t h_t)^{-\alpha} A_t \xi_t = \frac{W_t}{P_t} = MPH$$

$$(1-\alpha)\xi_t \frac{y_t}{h_t} = w_t \qquad \text{A9}$$

Ved at sammensætte de to ovenstående første ordens betingelser fås der:

$$z_t = \alpha \xi_t \frac{y_t}{k_t}$$

$$w_t = (1-\alpha)\xi_t \frac{y_t}{h_t}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_t}{dk_t} = \alpha k_t^{\alpha-1}(A_t h_t)^{1-\alpha} - y_t = 0$$

$$y_t = \alpha k_t^{\alpha-1}(A_t h_t)^{1-\alpha} \qquad \text{A10}$$

Her er ξ_t langarian multiplikatoren i forbindelse med produktionsfunktionen, og den angiver dermed den reelle marginale omkostning. z_t er marginal-produktiviteten af kapitalen.

Da økonomien er lukket samt ikke indeholder en offentlig sektor gælder følgende identitet:

$$y_t = i_t + c_t \qquad \text{A11}$$

4.3 Kapitalproducenterne

Kapitalproducenterne bruger teknologi til at producere kapital, og teknologien bliver udsat for investerings-shocks, som er et shock til marginaleffektiviteten af investeringen, og som er givet ved variablen x_t. De bruger en del af goderne, som købes fra forhandlerne, som investerings goder i_t til at producere nye investeringsgoder $x_t i_t$, der bliver kombineret med den eksisterende kapital for dermed at producere ny kapital k_{t+1}. Kapitalproducenterne er udsat for en justering af kapitalen, som afhænger af deprecieringsraten:

$$\frac{\mathcal{X}}{2}\left(\frac{i_t}{k_t}-\delta\right)^2 k_t$$

Kapitalejerne kan derfor vælge investeringen, så det optimerer deres profit. Dette kan beskrives ved:

$$\max E_t\left(q_t x_t i_t - i_t + \frac{\mathcal{X}}{2}\left(\frac{i_t}{k_t}-\delta\right)^2 k_t\right)$$

Dette optimeringsproblem løses som:

$$E_t\left(q_t x_t - 1 + \mathcal{X}\left(\frac{i_t}{k_t}-\delta\right)\right) = 0 \qquad \text{A12}$$

Den aggregerede kapital udvikler sig ved:

$$k_{t+1} = x_t i_t + (1-\delta)k_t \qquad \text{A13}$$

Hvor shock-variablen x_t følger en første ordens autoregressiv proces:

$$\log(x_t) = \rho_x \log(x_{t-1}) + \varepsilon_{xt},$$

$$\rho_x \in (-1,1) \qquad \varepsilon_{xt} \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$$

4.4 Forhandlerne

Ved at introducere denne sektor kan der introduceres nominel stivheder, hvilket er centralt i en ny keynesiansk model. Forhandlerne køber goder fra entreprenørerne til en pris, der er lig med entreprenørernes marginale omkostninger. De sælger derefter goder videre i et monopolistisk marked, hvori der kan opstå stivheder i priserne. Forhandlerne står overfor følgende optimeringsproblem:

$$\max_{\{\widetilde{p_t}(j)\}} E_0\left[\sum_{l=0}^{\infty}(\beta\phi)^l\lambda_{t+1}\Omega_{t+1}(j)/p_{t+1}\right]$$

Dette giver sammen med produktionsfunktionen:

$$y_{t+1}(j)=\left(\frac{\widetilde{p_t}(j)}{p_t}\right)^{-\theta}y_{t+l}$$

Forhandlernes nominelle produktionsfunktion er givet ved:

$$\Omega_{t+1}(j)=(\pi^l\tilde{p}_t(j)-p_{t+1}\xi_{t+l})y_{t+l}(j)$$

Dette optimeringsproblem kan skrives som:

$$max\ E_0\left[\sum_{l=0}^{\infty}(\beta\phi)^l\lambda_{t+1}\left((\pi^l\tilde{p}_t(j)-p_{t+1}\xi_{t+l})\left(\left(\frac{\widetilde{p_t}(j)}{p_t}\right)^{-\theta}y_{t+l}\right)\right)/p_{t+1}\right]$$

Her er produktionsfunktionen og forhandlernes nominelle produktionsfunktion substitueret ind i maksimeringsproblemet. Omskrivning af ovenstående ligning giver:

$$max\ E_0\sum(\beta\phi)^l\lambda_{t+1}y_{t+l}\pi^l\tilde{p}_t(j)\left(\frac{\widetilde{p_t}(j)}{p_t}\right)^{-\theta}/p_{t+1}-p_{t+1}\xi_{t+l}(\beta\phi)^l\lambda_{t+1}\left(\frac{\widetilde{p_t}(j)}{p_t}\right)^{-\theta}y_{t+l}/p_{t+1}$$

$$\max E_0\sum(\beta\phi)^l\lambda_{t+1}y_{t+l}\pi^l\tilde{p}_t(j)\left(\frac{\widetilde{p_t}(j)}{p_t}\right)^{-\theta}/p_{t+1}-p_{t+1}\xi_{t+l}(\beta\phi)^l\lambda_{t+1}\left(\frac{p_t}{\widetilde{p_t}(j)}\right)^{\theta}y_{t+l}$$

Derefter findes første ordens betingelsen i forhold til $\tilde{p}_t(j)$ ved brug af kædereglen:

$$\tilde{p}_t(j)=\frac{\theta}{\theta-1}\frac{E_t\sum_{l=0}^{\infty}(\beta\phi)^l\lambda_{t+l}y_{t+l}(j)\xi_{t+1}}{E_t\sum_{l=0}^{\infty}(\beta\phi)^l\lambda_{t+l}y_{t+l}(j)\pi^l{}_{t+1}/p_{t+1}} \quad \text{A14}$$

Den aggregerede pris bliver:

$$p_t^{1-\theta} = \phi(\pi p_{t-1})^{1-\theta} + (1+\phi)\tilde{p}_t^{1-\theta} \qquad \text{A15}$$

Ved log-linearisering af denne funktion, kan den ny-keynesianske philips-kurve udeledes, hvilket vil blive gjort i afsnittet omkring log-linearisering af modellen. Den sidste sektor i modellen er den monetære autoritet.

4.5 Den monetære autoritet

Centralbanken justerer den nominelle rente R i forhold til afvigelser i inflationen, output og pengevækst-raten og deres steady-state værdier. Pengevækst-raten er givet ved:

$$\mu_t = \frac{M_t}{M_{t-1}} \qquad \text{A16}$$

Den monetære politik bliver modelleret som en modificeret Tayler-regel:

$$\frac{R_t}{R} = \left(\frac{\pi_t}{\pi}\right)^{\varrho_\pi} \left(\frac{y_t}{y}\right)^{\varrho_y} \left(\frac{\mu_t}{\mu}\right)^{\varrho_\mu} \exp(\varepsilon_{Rt}), \qquad \varepsilon_{Rt} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_R}) \qquad \text{A17}$$

Her er π, y og μ steady-state værdier.

4.6 Steady-state i økonomien

Ligevægten i økonomien findes ved at allokere alle variablene, der ikke er shock-variable, sådan at de kan udtrykkes ud fra parametre. Steady-state værdierne bruges igen, når modellen laves lineær. For at kunne løse systemet sættes q=1, hvilket giver den første steady-state relation. Taktikken er at udtrykke de første variable ud fra parametre og så genbruge variablene ned gennem systemet af ligninger, og dermed opnås det at alle relationerne er i steady-state.

$$q = 1 \tag{B1}$$

Til den næste steady-state relation bruges ligning A14, hvor det udnyttes, at forventningen til en variabel i steady-state er steady-state værdien, samt at variablen er konstant over tid, hvilket gør, at variabler med forskelligt tidsindeks er lig med hinanden.

$$\xi = \frac{\theta - 1}{\theta} \tag{B2}$$

I den næste steady-state relation bruges der ligning A4

$$\frac{\lambda}{R} = \beta \frac{\lambda}{\pi}$$

$$\frac{1}{R} = \beta \frac{1}{\pi}$$

$$R = \frac{\pi}{\beta} \tag{B3}$$

Til den fjerde relation bruges der ligning A6 hvor steady state direkte følger:

$$f = \frac{S\,R}{\pi} \tag{B4}$$

I forbindelse med den femte relation bruges der ligning A5, hvor der bruges at q=1:

$$f = z + 1 - \delta \tag{B5}$$

I den sjette relation bruges der ligning A1

$$\lambda = \frac{1}{c^{\frac{1}{\gamma}}}\left(c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left((bc)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\frac{\pi}{\pi-\beta}\right)^{\gamma-1}\right)\right)^{-1} = \left(c + cb_t\left(\frac{\pi}{\pi-\beta}\right)^{\gamma-1}\right)^{-1}$$

$$= c^{-1}\left(1 + b_t\left(\frac{\pi}{\pi-\beta}\right)^{\gamma-1}\right)^{-1} = \left(1 + b_t\left(\frac{\pi}{\pi-\beta}\right)^{\gamma-1}\right)^{-1}$$

$$\lambda c = \left[1 + b\left(\frac{\pi}{\pi - \beta}\right)^{\gamma - 1}\right]^{-1} \qquad \text{B5}$$

Med hensyn til den næste relation bruges ligning A2 og A4 og B3.

$$\left(\frac{bc}{m}\right)^{1/\gamma} = \frac{R-1}{R} = \frac{\frac{\pi - \beta}{\beta}}{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{(\pi - \beta)}{\pi}$$

$$\left(\frac{bc}{m}\right)^{1/\gamma} = \frac{\pi - \beta}{\pi}$$

$$\left(\frac{m}{bc}\right)^{1/\gamma} = \frac{\pi}{\pi - \beta}$$

$$\frac{m}{bc} = \left(\frac{\pi}{\pi - \beta}\right)^{\gamma}$$

$$m = bc\left(\frac{\pi}{\pi - \beta}\right)^{\gamma}$$

$$m\lambda = \lambda bc\left(\frac{\pi}{\pi - \beta}\right)^{\gamma}$$

$$m\lambda = \lambda bc\left(\frac{\pi}{\pi - \beta}\right)^{\gamma} \qquad \text{B6}$$

Til at udelede den syvende steady-state ligning bruges der ligning A8, hvorfra det følger direkte at:

$$\frac{k}{y} = \alpha\frac{\xi}{z} \qquad \text{B7}$$

Steady-state relation otte udeledes ved brug af ligning A11, A12 og A13:

$$0 = y_t - c_t + \delta k_t$$

$$c_t = y_t + \delta k_t$$

$$\frac{c}{y} = 1 - \delta\frac{k}{y} \qquad \text{B8}$$

I den næste bruges der ligning A9 der ganges igennem med λ:

$$w\lambda = \frac{(1-\alpha)\lambda\xi y}{h}$$

$$w\lambda h = \frac{(1-\alpha)\lambda\xi yc}{c}$$

$$wh\lambda = \frac{(1-\alpha)\lambda c\xi}{c/y} \tag{B9}$$

Der bruges ligning A3 ved ligning flippes rundt:

$$h = \frac{\eta}{\lambda w}$$

$$h = \frac{-\lambda w + \eta}{-\lambda w}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{-\lambda w}{-\lambda w + \eta}$$

$$h = \frac{-h\lambda w}{\left(\frac{-\lambda w + \eta}{h}\right)}$$

$$h = \frac{wh\lambda}{\eta + wh\lambda} \tag{B10}$$

Ved denne udledning bruge produktionsfunktionen:

$$y = k^{\alpha}(Ah)^{-\alpha}(Ah)^{1} = k^{\alpha}((Ah)^{-1})^{\alpha}Ah = \left(\frac{k}{Ah}\right)^{\alpha}Ah$$

$$\left(\frac{k^{\alpha}}{y}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}} = Ah$$

Dette substitueres ind:

$$y_t = \left(k_t(y_t k_t^{-\alpha})^{\frac{-1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} A_t h_t = \frac{{k_t}^{\alpha}}{\left(\left(\frac{k_t^{\alpha}}{y_t}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}} A_t = \frac{{k_t}^{\alpha}}{\left(\frac{k_t^{\alpha}}{y_t}\right)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}} A_t h_t = {k_t}^{\alpha}\left(\frac{k_t^{\alpha}}{y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t h_t$$

$$= {k_t}^{\alpha}\left(\frac{k_t^{\alpha}}{y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t h_t = {k_t}^{\alpha} k_t^{-\alpha} y_t \left(\frac{k_t^{\alpha}}{y_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t h_t = \frac{1}{{y_t}^{-1}}\left(\frac{k_t^{\alpha}}{y_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t h_t = \frac{1}{{y_t}^{-1}} \frac{k_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{y_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} A_t h_t$$

$$= \frac{k_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{y_t^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}} A_t h_t = \frac{k_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{y_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} A_t h_t$$

$$y = Ah\left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \qquad \text{B11}$$

Den sidste steady-state relation udledes ved brug af ligning A11:

$$i = \delta k \qquad \text{B12}$$

4.7 Log-linearisering af modellen

Før at modellen kan estimeres både ved metoden som bruges i (Christensen & Dib, 2008) og ved CVAR-metoden, skal modellen være lineær. Modellen der er beskrevet ved ligning A1-A17 indeholder flere elementer, der ikke er lineære. Derfor bruges der en standard metode, når der arbejdes med DSGE modeller, hvor modellerne log-lineariseres. Dermed laves ligningerne A1-A17 om til lineære ligninger, hvor der tages log af variablene i forhold til deres steady-state. En del af ligninger kræver at der bruges første ordens taylor-approksimation i metoden. Da taylor-approksimation benyttes til at linearisere ligningerne, bliver ligningerne en approksimation. Det vil sige, at ligningerne har mere bias jo længere væk fra ligevægten variablene bevæger sig. Udledningerne af ligninger tager udgangspunkt i metoderne opsummeret i (Zietz, 2006). Rækkefølgen ligningerne er sat op i er den samme som i (Christensen & Dib, 2008) så resultaterne er overskuelige ved sammenligning.

Den første ligning, der bliver log-lineariseret er ligning A1. Der bruges ved denne ligning en taylor approksimation, der fører til følgende regneregel med funktioner til at lavet af sammensatte variable, $x\widetilde{x_t} \approx g_x'(x,y,z)y\widetilde{y_t} + g_y'(x,y,z)y\widetilde{y_t} + g_z'(x,y,z)y\widetilde{y_t}$, hvor g er en den sammensatte funktion. Derudover bruges det, er en shock-variabel, som i denne ligning er b_t i steady-state kan sættes til 1. Dette anvendes på ligning A1:

$$\lambda\tilde{\lambda}_t = \left(\frac{c^{-\frac{1}{\gamma}}}{c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right) e\tilde{e}_t + \left(-\frac{1}{\left(c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^2} \frac{\gamma-1}{\gamma} c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} c^{-\frac{1}{\gamma}} e \frac{1}{c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - \frac{1}{\gamma} c^{-\frac{1}{\gamma}-1} e\right) c\tilde{c}_t + \left(c^{-\frac{1}{\gamma}} e \frac{1}{\left(c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + b^{\frac{1}{\gamma}} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^2} b^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma-1}{\gamma} m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1}\right) b\tilde{b}_t$$

$$\lambda\tilde{\lambda}_t = \left(\frac{c^{-\frac{1}{\gamma}}}{c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)(e\tilde{e}_t + \left(-\frac{\left(c^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^2}{\left(c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^2} \frac{\gamma-1}{\gamma} e \frac{-1}{\gamma} ec^{-1}\right) c\tilde{c}_t + \left(e \frac{1}{c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{\gamma-1}{\gamma} m^{\frac{-1}{\gamma}}\right) \tilde{b}_t)$$

Herefter indsættes ligning B6, B7 og B3:

$$\big((1-\gamma)\lambda c - 1\big)\tilde{c}_t = \gamma\tilde{\lambda}_t - \frac{\lambda m(R-1)}{R}\big(\tilde{b}_t + (\gamma-1)\widetilde{m}_t\big) - \gamma\tilde{e}_t \qquad \text{C1}$$

Ved ligning A2 bruges der samme regel som ved ligning A1, hvorefter der bruges reglen om shock variable:

$$\frac{\gamma \tilde{R}_t}{R-1} = \tilde{b}_t + \tilde{c}_t - \tilde{m}_t \qquad \text{C2}$$

Samme fremgangsmåde bruges i forbindelse med ligning A3, hvilket leder til:

$$h\tilde{h}_t = (1-h)(\tilde{w}_t + \tilde{\lambda}_t) \qquad \text{C3}$$

Produktionsfunktionen giver:

$$\tilde{y}_t = \alpha \tilde{k}_t + (1-\alpha)\tilde{h}_t + (1-\alpha)\tilde{A}_t \qquad \text{C4}$$

Ved log-linarisering af ligning A11 bruges der følgende resultat $x_t \approx x(1+\tilde{x}_t)$, hvilket kommer fra en første ordens taylor- approksimation. Når dette anvendes, giver ligning A8:

$$y + y\tilde{y}_t = c + c\tilde{c}_t + i + i\tilde{\imath}_t$$

$$y\tilde{y}_t = c\tilde{c}_t + i\tilde{\imath}_t \qquad \text{C5}$$

Ligning A9 giver:

$$\tilde{w}_t = \tilde{y}_t + \tilde{\xi}_t - \tilde{h}_t \qquad \text{C6}$$

Samme fremgangsmåde anvendes på ligning ligning A8:

$$\tilde{z}_t = \tilde{y}_t + \tilde{\xi}_t - \tilde{k}_t \qquad \text{C7}$$

Ligning A16 og A17 giver:

$$\tilde{\mu}_t = \tilde{m}_t - \tilde{m}_{t-1} + \tilde{\pi}_t \qquad \text{C8}$$

Ligning A16 medfører:

$$\tilde{R}_t = \varrho_\pi \tilde{\pi}_t - \varrho_\mu \tilde{\mu}_t - \widetilde{\varrho_y} y_t + \varepsilon_{Rt} \qquad \text{C9}$$

Ved brug af ligning A5 kan det viser at:

$$\tilde{f}_t = \frac{z}{f}\tilde{z}_t - \frac{1-\delta}{f}\tilde{q}_t - \tilde{q}_{t-1} \qquad \text{C10}$$

Ligning A12 giver

$$\tilde{q}_t = \mathcal{X}\left(\tilde{\imath}_t + \tilde{k}_t\right) - \tilde{x}_t \qquad \text{C11}$$

Den næste ligning er den ny-keynesianske philips-kurve, her er ξ_t reelle marginale omkostning:

$$\tilde{\pi}_t = \beta E_t \tilde{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\beta\phi)(1-\phi)}{\phi}\tilde{\xi}_t \qquad \text{C12}$$

Udeledes fra ligning A3:

$$\tilde{\lambda}_{t+1} = \tilde{\lambda}_t - \tilde{R}_t + \tilde{\pi}_{t+1} \qquad \text{C13}$$

A13 fører til:

$$\tilde{k}_{t+1} = \delta\tilde{\imath}_t - \delta\tilde{x}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t \qquad \text{C14}$$

Ligning A7 kan bruges til at udelede:

$$\tilde{f}_{t+1} = \tilde{R}_t - \tilde{\pi}_{t+1} + \psi\left(\tilde{q}_t + \tilde{k}_{t+1} - \tilde{n}_{t+1}\right) \qquad \text{C15}$$

Ligning A7:

$$\frac{\tilde{n}_{t+1}}{vf} = \frac{k}{n}\tilde{f}_t - \left(\frac{k}{n} - 1\right)\left(\tilde{R}_{t-1} - \tilde{\pi}_t\right) - \psi\left(\frac{k}{n} - 1\right)\left(\tilde{k}_t - \tilde{q}_{t-1}\right) + \left(\psi\left(\frac{k}{n} - 1\right) + 1\right)\tilde{n}_t \qquad \text{C16}$$

5 State-space form

Efter at DSGE-modellen er blevet lavet linær er modellen sat i state-space form. Modellen er udregnet i state space form, for at modellen kan bruges i forbindelse med en VA- model. Da modellen er kompleks kan state-space formen af denne model ikke kan udregnes hverken ved brug af Blanchard-khan (OLIVIER & CHARLES, 1980) metoden eller QZ-metoden (Roger & Vadim, 2012) direkte, da der opstår singulære matrixer. Derfor er modellen løst i matlab. I matlab er der brugt programmet dynare, som bruger en løsningsalgoritme som bruger numeriske metoder til at løse ligningssystemet. Matlab datafilen med løsningen er tillagt som bilag. For at modellen kan løses kræver det bestemte restriktioner på værdierne i parametrene. Der er derfor blevet brugt de samme værdier af parametrene, som der er blevet brugt i (Christensen & Dib, 2008). Da modellen har en state-space løsning, er den anvendelig i forbindelse med udregning i en VAR eller CVAR model.

State-space løsningen ser ud på følgende måde:

$$\tilde{S}_t = \phi_1 \tilde{S}_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t+1}$$
$$\tilde{d}_t = \phi_3 \tilde{S}_t$$

$\tilde{S}_t = \{\tilde{b}_t, \tilde{A}_t, \tilde{x}_t, \tilde{e}_t, \tilde{\epsilon}_t\}$ er en vektor, som indeholder alle de eksogene stød til modellen. $\tilde{d}_t$ indeholder resten af variablene. ϕ_1, ϕ_2 og ϕ_3 er parametre matrixer og ε_{t+1} er et fejlled med konstant varians og en middel der er lig med nul. Modellen er nu klar til at blive taget til empirien.

6 Data

Modellen bliver udregnet ud fra et stort dataset. Der er 11 observerbare variable, der indgår i den empiriske analyse. Variablene er alle fra USA, så resultaterne af analysen kan sammenlignes med dem, der findes i (Christensen & Dib, 2008). Variablene der bruges er y output, i investering, c forbrug, k kapital, n egenværdi af entreprenører, π inflationsraten, R korte nominelle rente, w lønninger, f kapitalafkast, m pengebalance, og h arbejdstimer. y måles som BNP minus offentlig forbrug i 2012 priser pr. capita , investering måles som total privat investering i 2012 priser pr. capita, kapital måles som brutto fikseret kapital formation i 2012 priser pr. capita, egenværdi måles som egenværdi af ikke-finansielle virksomheder pr. capita i 2012 priser, som bliver divideret med inflationsraten, inflationsraten måles som ændringer i GDP pris deflatoren, den korte nomielle rente måles som renten på tre måneders trasury bills, lønninger måles som kompensation til ansatte, kapitalafkastet måles som brutto afkast på kapital i 2012 priser pr. capita, pengebalancen måles ved at dividere M0 med BNP pris deflatoren. Arbejdstimer måles som arbejdstimer på private ikke-landbrugs lønningslister. Som beskrevet i (Ireland, 2004) så findes der ikke noget helt perfekt mål, men dette anses som brugbart, og det bruges også af Ireland, når DSGE-model estimeres. Da kapitalafkast kun eksisterer som årlige målinger, bruges der årlige målinger af alle dataene. y, i, m, π, R bruges som variable i (Christensen & Dib, 2008) og derfor bruges der præcis de samme målinger af disse variable fra USA, således at resultaterne i sammenlignelige. Da (Christensen & Dib, 2008) bruger målingerne af den private sektor fordi den offentligege sektor ikke indgår i modellen, så er de andre variable også valgt, så der kun indgår den private sektor. Dette gælder dog ikke for variablen w lønninger, som indeholder alle lønninger i hele økonomien.

7 Videnskabsteoretisk afsæt

Der vil i denne opgave indgå et afsnit om forskellige videnskabsteoretiske afsæt, da traditionen for at lave DSGE-modeller har et andet videnskabsteoretisk afsæt sammenlignet med den metode, som bruges i (Juselius & Franchi , 2007) hvilket er den fremgangsmåde, der arbejdes efter i denne opgave. DSGE-modeller kan betegnes som værende bygget ud fra enten den ny-keynesiask eller den ny-klassisk tradition. I disse teoretiske retninger er teorierne omkring de økonomiske agenter helt centrale. Teorierne er udarbejdet op omkring aksiomer, der svarer til økonomiske antagelser omkring de agenters adfærd og strukturelle sammenhænge i økonomien. Disse aksiomer bruges som byggesten, som den økonomiske teori deduceres ud fra. Typisk udføres dette ved at beskrive agenters adfærd i et mirkofundament, hvorudfra der udeledes sammenhænge omkring makroøkonomien. (Jespersen, 2011). Denne tilgang kan også beskrives som en Walsarian-tilgang. I Walsarian tilgangen kommer teorien før empirien. Walsarian-tilgangen kritiseres af Juselius i (Juselius & Franchi , 2007) da et problem består i, at hvis teorien kommer før empirien, når viden produceres, på hvilken baggrund er de første teoretiske antagelser baseret. Dermed kritiseres Walsarian-tilgangen for at være totaliserende.

Alternativet til Walsarian-tilgangen er Marshillian-tilgangen. I denne tilgang er empirien helt central. Der tages udgangspunkt i empirien, hvor der søges at undersøge strukturen bag den komplekse økonomiske virkelighed. Processon med at producere viden består i at undersøge for struktur, for at bekræfte eller adoptere den teoretiske forståelse, og på den måde modificere teorien undervejs i forbindelse med at dykke ned i empirien. (Juselius, 2018)

Juselius beskriver, hvordan arbejdet med CVAR-modellen bruges som et økonometrisk værktøj til at undersøge empirien, og danne nye teorier undervejs, som kan sammensættes med andre teorier og udvides undervejs, for at undersøge flere og mere detaljerede sammenhænge. På baggrund af inspektionen af empirien, kan nye teorier inkorporeres direkte i CVAR-modellen, der dermed bliver en økonomisk model, der direkte er baseret på empirien, og dermed er direkte forenelig med empirien. Dette er imodsætning til DSGE-modellerne som er lavet ud fra et teoretisk grundlag, og som kræver omformuleringer og restriktioner af modellerne, før de kan tages til dataene. I arbejdet med CVAR-modellen og i processen med at finde økonomiske sammenhænge, beskriver Juselius, at det ikke er væsentligt fra hvilken økonomisk grundskole eller tradition teorierne kommer fra. Det væsentlige er, at sammenhængene som teorierne beskriver, passer med empirien, hvor forskellige sammenhænge fra forskellige økonomiske skoler i teorien kan blive brugt til at udarbejde sammenhænge, der udgør en velspecificeret CVAR-model. Det væsentligt er derimod, at alle de økonomiske sammenhænge bliver formueleret som hypoteser og bliver testet i empirien, hvorefter de løbne kan adopteres som gældende sammenhænge i CVAR-modellen. I denne forbindelse er CVAR-modellen ligeså meget en model, som det er en metode til at undersøge økonomiske sammenhænge.

8 Metode

I dette afsnit vil der være en beskrivelse af CVAR-metoden generelt, hvorefter der vil være en beskrivelse af restriktioner mod α-matrixen i CVAR-modellen, som kan bruges til at teste svag eksogenitet. Herefter vil der være en beskrivelse af restriktioner med β-matrixen i CVAR-modellen, som muliggør det at undersøge strukturelle antagelser.

Der er forskellige økonometriske metoder til at udregne DSGE-modellerne. En DSGE kan omskrives til at kunne passe ind i en VAR model som i (Ireland, 2004). En anden metode er at bruge maximum likelihood i sammenhæng med kalman filteret som der bruges i (Christensen & Dib, 2008). Derudover er en gængs metode at bruge bayesian statistik til at vurdere modeller i forhold til hinanden, som det gøres i (Adolfson, et al., 2005) (Michał & Marcin, 2012) (Stefania, et al., 2012). Derudover er der metoden, der bliver brugt i (Juselius & Franchi , 2007), hvilket også er metoden, der bliver brugt i denne opgave. Juselius og Franchi argumenterer for, at denne metode, imodsætning til metoden i (Ireland, 2004) muliggør det at teste en række eksplicitte og implicitte antagelser omkring de økonomiske modeller. Derved bliver metoden en mere kritisk tilgang til undersøgelsen af modeller. Der kan argumenteres for, at CVAR-metoden sammenlignet med metoden der bruges af bayesian statistik tillader mere fleksibilitet i dataene ved ikke at inkludere en prior fordeling. Derved kan der yderligere argumenteres for, at CVAR-metoden giver et større indblik i relationerne mellem variablene, der indgår i datasættet. Da en diskussion af CVAR-metoden, i forhold til andre økonometriske metoder til at udregne modeller, er helt centralt i denne opgave, vil CVAR-modellen blive beskrevet.

I de følgende afsnit vil CVAR-metoden blive beskrevet. CVAR-modellen bygges ud fra en stationær VAR-model, og derfor vil den første blive beskrevet. Herefter vil en ECM-model blive forklaret. Derefter vil CVAR-modellen blive gennemgået, hvori der kommer til at være forklaring af de forskellige komponenter i CVAR-modellen.

8.1.1 VAR-modellen

Den stationære VAR-model ser ud på følgende måde:

$$x_t = \mu_0 + \Pi_1 x_{t-1} + \cdots \Pi_k x_{t-k} + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t \sim IN_k(0, \epsilon)$$

I modellen er x_t er vektor, der indeholder alle variablene, der medtages i modellen. Π_p en matrix der indeholder parametre, og π er en vektor, der indeholder et konstantled, og ϵ_t er en vektor, der indeholder fejlled.

Hvis det antages, at de observerede data $X = [x_1, \dots x_t]'$ beskriver en stokastiske proces, så kan den samlede sandsynlighed for de observerede data beskrives ud fra startværdi X_0 samt parameterværdien θ. Det er en regneregel at en samlet sandsynlighedsfordeling kan skrives som en betinget sandsynlighedsfordeling ganget med en marginal sandsynlighedsfordeling. Denne regneregel benyttes:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_T | X_0, \theta) = P(x_T | x_{T-1}, x_{T-2}, \dots, x_1, X_0, \theta\,) P(x_{T-1}, x_{T-2}, \dots, x_1 |, X_0, \theta\,)$$
$$= \prod_{t=1}^{T} P(x_t | X_{t-1}^0; \theta), \quad X_{t-1}^0 = [x_{t-1}, x_{t-2} \ldotp\ldotp x_1, X_0]$$

Herefter bliver dataet X dekomponeret i to komponenter x_t og $X = \begin{bmatrix} x_t \\ X_{t-1}^0 \end{bmatrix}$. $X = \begin{bmatrix} x_t \\ X_{t-1}^0 \end{bmatrix}$ kan beskrives som to normalfordelte tilfældige variable med forventningerne $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$. Hvis X har kovariansen Σ, kan samlede fordeling skrives som $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Den marginale og betingede fordeling kan derefter deles op på følgende måde: (Juselius, 2006)

$$x_t, \qquad \mu_1 = E[x_t]$$

$$X_{t-1}^0 = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{bmatrix} E[x_{t-1}] \\ E[x_{t-2}] \\ \vdots \\ E[x_1] \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & \Sigma_1 & \cdots & \Sigma_{T-1} \\ \Sigma_1 & \Sigma_0 & \Sigma_0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Sigma \\ \Sigma_{T-1} & \cdots & \Sigma_1 & \Sigma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Den betingede fordeling er nu:

$$(x_t | X_{t-1}^0) \sim N(\mu_{1.2}, \Sigma_{11.2}) = N(\mu_t, \Sigma_{11.2})$$

μ_t er givet ved:

$$\mu_t = \mu_1 + \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}(X_{t-1}^0 - \mu_2)$$

Og $\Sigma_{11.2}$ er givet ved

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}\Sigma_{21}$$

Forskellen mellem de observerede værdier x_t og den betingede middelværdi μ_t betegnes ε_t, $x_t - \mu_t = \varepsilon_t$. Hvis den betingede middelværdi substitueres ind i denne ligning giver det:

$$x_t - (\mu_1 + \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}(X_{t-1}^0 - \mu_2)) = \varepsilon_t$$

$$x_t = \mu_1 + \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}X_{t-1}^0 - \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}\mu_2 + \varepsilon_t$$

Herefter kan de konstante led samles under $\mu_0 = \mu_1 - \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}\mu_2$, parametrene kan samles som følgende sæt $[\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{T-1}\ ] = \Sigma_{12}{\Sigma_{22}}^{-1}$. Hvis det derefter antages, at $\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_{T-1} = 0$, kan modellen skrives som: (Juselius, 2006)

$$x_t = \mu_0 + \Pi_1 x_{t-1} + \cdots \Pi_k x_{t-k} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim IN_k(0, \epsilon)$$

Hermed ses det, at VAR-modellen er en reformulering af kovariancen i dataet, hvilket benyttes når CVAR-modellen udeledes. En vigtig antagelse i modellen er antagelsen $X \sim N(\mu, \Sigma)$, og dermed antages X at være stationær. Hvis ikke de observerede variable, der indgår i modellen, er stationære, kan modellen ikke udeledes. En model udregnet på ikke-stationære variable vil ikke give korrekte parametreværdier. Derudover vil inferencen der bliver udregnet på baggrund af modellen heller ikke være korrekt. (Enders, 2015)

8.1.2 ECM-modellen

ECM-modellen (error correction model) kan udeledes ved at omskrive VAR-modellen. En VAR(2)-model[3] kan omskrives til en ECM-model på følgende måde.

$$x_t = \mu_0 + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \epsilon_t$$

$$x_t - x_{t-1} = \mu_0 + \epsilon_t + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} - x_{t-1}$$

$$x_t - x_{t-1} = \mu_0 + \epsilon_t + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} - x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-1} - \Pi_2 x_{t-1}$$

$$x_t - x_{t-1} = \mu_0 + \Pi_2 x_{t-2} - \Pi_2 x_{t-1} + (-1 + \Pi_1 + \Pi_2) x_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Delta x_t = \mu_0 - \Pi_2 \Delta x_{t-1} + (-1 + \Pi_1 + \Pi_2) x_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Gamma = -\Pi_2, \quad \Pi = 1 - \Pi_1 - \Pi_2$$

Dermed kommer ECM-modellen til at se ud på følgende måde:

$$\Delta x_t = \mu_0 + \Gamma \Delta x_{t-1} + \Pi x_{t-1} + \epsilon_t$$

E fordel med ECM-modellen er at parametrene er egnet til tolkning i en økonomisk kontekst, hvor Γ beskriver effekterne på kort sigt og Π beskriver langtidseffekterne. (Juselius, 2006)

8.2 CVAR-modellen

CVAR-modellen kan karakteriseres som en ikke-stationær VAR-model. Variable der ikke er stationære kan karakteriseres som at være integreret af en orden d, hvilket skrives som I(d) integreret af orden d, hvor en stationær variabel er integreret af ordenen nul f.eks. skrives som I(0). Definitionen af integreret er:

"x_t er integreret af orden d, hvis x_t følgende repræsentaion: $(1 - L)^d x_t = C(L)\varepsilon_t$, hvor $C(1) \neq 0$ og $\varepsilon_t \sim IN(0, \Omega)$" (Juselius, 2006, p. 79)

I denne definition er L lag-operatoren og definitionen kommer fra den karakteriske ligning, da hvis den karakteriske ligning har en rod så er variablen I(1). F.eks. hvis d er lig med 1 så er $C(L)\varepsilon_t = (1 - L)^1 x_t = (1 - L) x_t = x_t - x_{t-1} = \Delta x_t$, hvilket vil sige, at pr. definition, så er Δx_t stationær.

[3] Det er primært VAR(2) modellen, der vil blive gennemgået, det testene i analysen, viser at det er modellen med to lags, der er relevant at bruge. Derfor beskrives VAR(2) modellen i metoden afsnittene, så udregningerne er konsistente med analysen.

Det viser sig, at variablene kan medtages i en VAR på ECM form, hvis variablene er kointegrerede. Definitionen er kointegrerede er:
"En I(d) proces x_t kaldes kointegreret CI(d,b) med kointegrationsvektoren $\beta \neq 0$ hvis $\beta' x_t$ er I(d-b), b=1,…, d, d=1…" (Juselius, 2006, p. 79)
Dette vil sige, at hvis to variable der begge er I(1) er kointegrerede, så skal der findes en vektor $\beta \neq 0$, som gør, at $\beta' x_t$er mindre integreret af en mindre orden, altså i dette tilfælde I(0).

Lineær afhængighed beskriver, hvor en vektor er linært afhænig af andre vektorer. (Geil, 2015) Der er en tæt sammenhæng mellem kointegration og lineær afhængighed . En intuitiv forståelse af dette begreb kan formuelres som, at en vektor kan konstrueres ud fra en lineær sammensætning af de andre vektorer, hvilket også er en meningsfuld intuitiv forståelse i økonomisk sammenhæng, da en variabel kan se som være bestående en lineær kombination af de andre variable. Dette vil sige, at de kointegrerede variable drives af de samme bagvedliggende trends, og derfor vil de have en tendens til at bevæge sig sammen på lang sigt, hvilket kan tolkes som ligevægten i et økonomisk system.

Kointegrations restriktionerne kan tilføjes en VAR(2)-model på ECM form ved at formulere en reduceret rank restriktion på Π-matrixen. Givet følgende model:

$$\Delta x_t = \mu_0 + \Gamma \Delta x_{t-1} + \Pi x_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvis $x_t \sim I(1)$ [4] , så vil $\Delta x_t \sim I(0)$ hvilket har den konsekvens, at Π ikke kan have en fuld rank. Fuld rank vil sige, at matrixens kolonner eller rækker er lineært uafhængige. Hvis ikke der er denne restriktion, kan der opstå den inkonsistens i ligningen, at et stationært element skal være lig med et stationært element plus et ikke-stationært element. Da Π må have en reduceret rank jævnfør overstående argumentation, så kan Π dekomponeres til: (Juselius, 2006)

$$\Pi = \alpha\beta'$$

Hvis p er antallet af variable og Π dermed er en $p \times p$ matrix, så vil α og β være $p \times r$ matrixer. Dekomponeringen af Π er helt centralt i CVAR-modellen. Modellen kan nu skrives som:

[4] Da I(2) sjældent ses i økonomi, og at dette ikke forekom i dette projekt, så vil metode-teorien blive beskrevet ud fra variabler der er I(1):

$$\Delta x_t = \mu_0 + \Gamma\Delta x_{t-1} + \alpha\beta' x_{t-1} + \epsilon_t$$

Hvis variablene x_t antages at være kointegrerede, findes der en kointegrations matrix og omvendt jævnfør definitionen af kointegration. Derfor kan kointegrationen sikres ved at gøre β' til kointegrationsmatrixen. Hvis det antages, at $x_t \sim I(1)$ og at β' er kointegrationsmatrixen, så vil $\beta' x_{t-1}$ være stationær, og alle komponenter i modellen er stationære. Med andre ord, hvis Πx_{t-1} er stationær, og der kan findes en stationær kombination af variablene x_t givet ved $\beta' x_{t-1}$, så kan der findes a matrix α, sådan at $\Pi = \alpha\beta'$. Altså hvis der eksisterer en stationær kombination af variablene, kan der laves en konsistent model på ovenstående form, hvilket er en CVAR-model.

Det følgende afsnit vil omhandle en beskrivelse af α-matrixen og β-matrixen. Anvendelse af α-matrixen og β-matrixen blive demonstreret med en VAR(1)-model.
Ved at udelede modellen på movering average form (MA) kan der undersøges resultater omkring de bagvedliggende trends, der driver variablene. Dette vil blive demonstreret med en VAR(1) model.
En VAR(1) på VECM form er givet ved:

$$\Delta x_t = \alpha\beta' x_{t-1} + \mu + \varepsilon_t$$

Det er muligt at finde de ortogonale komplementære matrixer til α og β som har fuld rank med dimensionerne $p \times (p - r)$. Dette gør, at $\beta'\beta_\perp = 0$, og derover bliver ranken af $(\beta, \beta_\perp)$ og $(\alpha, \alpha_\perp)$ begge p. Ovenstående ligning kan derefter ganges igennem med β', hvilket giver:

$$\beta' x_t = (I + \beta'\alpha)\beta' x_{t-1} + \beta'\mu + \beta'\varepsilon_t$$

Da modellen er en VAR(1)-model er $(I + \beta'\alpha)$ stationær, hvilket vil sige, at $(I + \beta'\alpha)$ skal være inde i enhedscirklen, hvilket giver:

$$\beta' x_t = \sum_{i=0}^{\infty} (I + \beta'\alpha)^i \beta'(\varepsilon_{t+i} + \mu)$$

Ligeledes er det interessant at finde en funktion af α udtryk ved fejledene, hvilket findes på samme måde, hvor det nu bare en den ortogonale matrix af α der ganges igennem med, hvilket giver:

..

$$\Delta x_t \alpha_\perp{}' = \alpha_\perp{}'\mu + \alpha_\perp{}'\varepsilon_t$$

Løsningen til denne differentialligning er:

$$\alpha_\perp{}' x_t = \alpha_\perp{}' x_0 + \sum_{i=1}^{t} \alpha_\perp{}'(\varepsilon_i + \mu)$$

Der benyttes nu en regneregel om transponerede matrixer, hvilket er følgende udtryk:

$$\beta_\perp(\alpha'_\perp \beta_\perp)^{-1}\alpha'_\perp + \alpha(\beta\alpha)^{-1}\beta' = I$$

Overstående regneregel anvendes nu på x_t

$$\begin{aligned} x_t &= \beta_\perp(\alpha'_\perp \beta_\perp)^{-1}\alpha'_\perp + \alpha(\beta\alpha)^{-1}\beta' x_t \\ &= w_1 \alpha'_\perp x_t + w_2 \beta'_\perp x_t \end{aligned}$$

Hvis de to ligninger sættes sammen giver det følgende:

$$x_t = \beta_\perp(\alpha'_\perp \beta_\perp)^{-1}\alpha_\perp{}' x_0 + \sum_{i=1}^{t} \alpha_\perp{}'(\varepsilon_i + \mu) + \alpha(\beta\alpha)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (I + \beta'\alpha)^i \beta'(\varepsilon_{t+i} + \mu)$$

Hvis C defineres som $C = \beta_\perp(\alpha'_\perp \beta_\perp)^{-1}\alpha_\perp{}'$ og τ_1 og τ_0 defineres som $\tau_1 = C\mu$ og $\tau_0 = Cx_0$, og Y_t beskriver en stationær proces, så kan ovenstående ligning omskrives til:

$$x_t = C \sum_{I=1}^{t} \varepsilon_i + Cx_0 + C\mu\,\mathrm{t} + Cx_0 + \alpha(\beta\alpha)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (I + \beta'\alpha)^i \beta'(\varepsilon_{t+i} + \mu)$$

$$x_t = C \sum_{I=1}^{t} \varepsilon_i + \tau_1 t + \tau_0 + Cx_0 + Y_t$$

Hvis samme procedure laves for en VAR(2) proces, medtages relationen på kort sigt og Γ medtages i defintionen på C, som kommer til at se ud på følgende måde:

$$C = \beta_\perp(\alpha'_\perp\, \Gamma_{ma}\, \beta_\perp)^{-1}\alpha_\perp{}'$$

Her er Γ givet ved $\Gamma_{ma} = -(\mathrm{I} - \Gamma_1)$, hvor Γ_1 CVAR-modellen. C kan dekomponeres på lignende måde som Π i AR repræsentationen, hvor dekomponeringen af C ser ud på følgende måde:

$$C = \tilde{\beta}_{\perp}\alpha'_{\perp}$$

Hvor $\tilde{\beta}_{\perp} = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp}\Gamma\beta_{\perp})^{-1}$. Efter samme argumentation som med AR modellen, så er det nu $\alpha'_{\perp}$, der determinerer de fælles stokastiske trends og $\tilde{\beta}_{\perp}$ er de tilhørende loadings. Derfor defineres de fælles trends der styrer dataene som $\alpha' \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$. (Juselius, 2006)

Juselius beskriver hvordan modellens AR repræsentation samt MA-repræsentation kan tolkes som træk- og skub-kræfterne i dataene. Både træk- og skub-kræfterne er beskrivelser af langtidsrelationerne i data. AR-repræsentationen angiver langtidsligevægten $\beta' x_{t-1}$ den ligevægt, som økonomien bliver trukket imod, når den bliver udsat for stokastiske stød. MA-repræsentationen angiver $\alpha' \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$, hvilke er de fælles trends, der styrer og derved skubber dataene. AR-tilfældet, kan illustreres ved VAR(1)-modellen, som ser ud på følgende måde:

$$\Delta x_t = \alpha\beta' x_{t-1} + \mu + \varepsilon_t$$

I denne proces er steady-state defineret som $\beta' x_{t-1} - \beta_0 = 0$, hvor $\beta_0 = E(\beta' x_t)$. Så snart at systemet kommer ud af ligevægten $\beta' x_{t-1} - \beta_0 \neq 0$, så vil α trække processen tilbage til ligevægten. Dette beretter imidlertid ikke om, hvordan de ikke stationære variable udvikler sig over tid, samt hvilken proces der styrer eller skubber dem. Dertil bruges MA-repræsentationen, hvor det viser sig, at $\alpha' \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ kan tolkes som de fælles drivende trends, der styrer modellen. (Juselius, 2006)

Når flere variable deler den samme stokastiske og deterministiske trend, det muligt at finde en lineær kombination af variablene, der annullere disse trends. I andre situationer kan en trend blive annulleret uden at en anden trend bliver annulleret. Begge disse situationer kan bliver taget højde for, ved at inkludere en lineær trend i kointegrations relationen. Ligeledes kan der ved samme argumentation inkluderes et led med en dummy-variabel, der kan beskrive flere tidsperioder. (Hendry & Juselius, 2000).

Dermed kommer den endelige CVAR-model, der bliver benyttet i denne rapport, til at se ud på følgende måde:

$$\Delta x_t = \mu_0 + \Gamma\Delta x_{t-1} + \alpha\beta' x_{t-1} + \Phi D_t + \mu_t t + \epsilon_t$$

Her er ΦD_t en dummy variabel, der inkluderer flere tidsperioder og ΦD_t er en lineær trend. CVAR-modellen bliver udregnet på baggrund af 11 variable, som er ouput $\tilde{y}_t$, inverstering $\tilde{\imath}_t$, forbrug $\tilde{c}_t$, kapital $\tilde{k}_t$, firmaers egenværdi $\tilde{n}_t$, inflation $\tilde{\pi}_t$, den nomielle rente $\tilde{R}_t$, gennesnitslønnen $\widetilde{w}_t$, kapitalafkast $\tilde{f}_t$, pengemængden $\widetilde{m}_t$ og arbejdstimer $\tilde{h}_t$. Derudover indeholder modellen to dummy-variable, som er før og efter år 1980 og før og efter år 2008. Udvalget af disse dummy-variable er beskrevet i analyseafsnittet. Dermed kommer modellen til at se ud på følgende måde:

$$
\begin{bmatrix} \Delta\tilde{y}_t \\ \Delta\tilde{\imath}_t \\ \Delta\tilde{c}_t \\ \Delta\tilde{k}_t \\ \Delta\tilde{n}_t \\ \Delta\tilde{\pi}_t \\ \Delta\tilde{R}_t \\ \Delta\widetilde{w}_t \\ \Delta\tilde{f}_t \\ \Delta\widetilde{m}_t \\ \Delta\tilde{h}_t \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \mu_{03} \\ \mu_{04} \\ \mu_{05} \\ \mu_{06} \\ \mu_{07} \\ \mu_{08} \\ \mu_{09} \\ \mu_{010} \\ \mu_{011} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & \Gamma_{18} & \Gamma_{19} & \Gamma_{110} & \Gamma_{111} \\
\Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & \Gamma_{25} & \Gamma_{26} & \Gamma_{27} & \Gamma_{28} & \Gamma_{29} & \Gamma_{210} & \Gamma_{211} \\
\Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & \Gamma_{35} & \Gamma_{36} & \Gamma_{37} & \Gamma_{38} & \Gamma_{39} & \Gamma_{310} & \Gamma_{311} \\
\Gamma_{41} & \Gamma_{42} & \Gamma_{43} & \Gamma_{44} & \Gamma_{45} & \Gamma_{46} & \Gamma_{47} & \Gamma_{48} & \Gamma_{49} & \Gamma_{410} & \Gamma_{411} \\
\Gamma_{51} & \Gamma_{52} & \Gamma_{53} & \Gamma_{54} & \Gamma_{55} & \Gamma_{56} & \Gamma_{57} & \Gamma_{58} & \Gamma_{59} & \Gamma_{510} & \Gamma_{511} \\
\Gamma_{61} & \Gamma_{62} & \Gamma_{63} & \Gamma_{64} & \Gamma_{65} & \Gamma_{66} & \Gamma_{67} & \Gamma_{68} & \Gamma_{69} & \Gamma_{610} & \Gamma_{611} \\
\Gamma_{71} & \Gamma_{72} & \Gamma_{73} & \Gamma_{74} & \Gamma_{75} & \Gamma_{76} & \Gamma_{77} & \Gamma_{78} & \Gamma_{79} & \Gamma_{710} & \Gamma_{711} \\
\Gamma_{81} & \Gamma_{82} & \Gamma_{83} & \Gamma_{84} & \Gamma_{85} & \Gamma_{86} & \Gamma_{87} & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} & \Gamma_{810} & \Gamma_{811} \\
\Gamma_{91} & \Gamma_{92} & \Gamma_{93} & \Gamma_{94} & \Gamma_{95} & \Gamma_{96} & \Gamma_{97} & \Gamma_{98} & \Gamma_{99} & \Gamma_{910} & \Gamma_{911} \\
\Gamma_{101} & \Gamma_{102} & \Gamma_{103} & \Gamma_{104} & \Gamma_{105} & \Gamma_{106} & \Gamma_{107} & \Gamma_{108} & \Gamma_{109} & \Gamma_{1010} & \Gamma_{1011} \\
\Gamma_{111} & \Gamma_{112} & \Gamma_{113} & \Gamma_{114} & \Gamma_{115} & \Gamma_{116} & \Gamma_{117} & \Gamma_{118} & \Gamma_{119} & \Gamma_{1110} & \Gamma_{1111}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Delta\tilde{y}_{t-1} \\ \Delta\tilde{\imath}_{t-1} \\ \Delta\tilde{c}_{t-1} \\ \Delta\tilde{k}_{t-1} \\ \Delta\tilde{n}_{t-1} \\ \Delta\tilde{\pi}_{t-1} \\ \Delta\tilde{R}_{t-1} \\ \Delta\widetilde{w}_{t-1} \\ \Delta\tilde{f}_{t-1} \\ \Delta\widetilde{m}_{t-1} \\ \Delta\tilde{h}_{t-1} \end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & \Pi_{17} & \Pi_{18} & \Pi_{19} & \Pi_{110} & \Pi_{111} \\
\Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} & \Pi_{27} & \Pi_{28} & \Pi_{29} & \Pi_{210} & \Pi_{211} \\
\Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} & \Pi_{37} & \Pi_{38} & \Pi_{39} & \Pi_{310} & \Pi_{311} \\
\Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{43} & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} & \Pi_{47} & \Pi_{48} & \Pi_{49} & \Pi_{410} & \Pi_{411} \\
\Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{53} & \Pi_{54} & \Pi_{55} & \Pi_{56} & \Pi_{57} & \Pi_{58} & \Pi_{59} & \Pi_{510} & \Pi_{511} \\
\Pi_{61} & \Pi_{62} & \Pi_{63} & \Pi_{64} & \Pi_{65} & \Pi_{66} & \Pi_{67} & \Pi_{68} & \Pi_{69} & \Pi_{610} & \Pi_{611} \\
\Pi_{71} & \Pi_{72} & \Pi_{73} & \Pi_{74} & \Pi_{75} & \Pi_{76} & \Pi_{77} & \Pi_{78} & \Pi_{79} & \Pi_{710} & \Pi_{711} \\
\Pi_{81} & \Pi_{82} & \Pi_{83} & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi \\
\Pi_{91} & \Pi_{92} & \Pi_{93} & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi \\
\Pi_{101} & \Pi_{102} & \Pi_{103} & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi \\
\Pi_{111} & \Pi_{112} & \Pi_{1113} & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi & \Pi
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \tilde{y}_{t-1} \\ \tilde{\imath}_{t-1} \\ \tilde{c}_{t-1} \\ \tilde{k}_{t-1} \\ \tilde{n}_{t-1} \\ \tilde{\pi}_{t-1} \\ \tilde{R}_{t-1} \\ \widetilde{w}_{t-1} \\ \tilde{f}_{t-1} \\ \widetilde{m}_{t-1} \\ \tilde{h}_{t-1} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\Phi_{11} & \Phi_{12} \\
\Phi_{21} & \Phi_{22} \\
\Phi_{31} & \Phi_{32} \\
\Phi_{41} & \Phi_{42} \\
\Phi_{51} & \Phi_{52} \\
\Phi_{61} & \Phi_{62} \\
\Phi_{71} & \Phi_{72} \\
\Phi_{81} & \Phi_{82} \\
\Phi_{91} & \Phi_{92} \\
\Phi_{101} & \Phi_{102} \\
\Phi_{111} & \Phi_{112}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} D_{1980} \\ D_{2008} \end{bmatrix}
$$

$$
+ \mu_t
\begin{bmatrix} t_{01} \\ t_{02} \\ t_{03} \\ \mu_{04} \\ \mu_{05} \\ \mu_{06} \\ \mu_{07} \\ \mu_{08} \\ \mu_{09} \\ \mu_{010} \\ \mu_{011} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \mu_{03} \\ \mu_{04} \\ \mu_{05} \\ \mu_{06} \\ \mu_{07} \\ \mu_{08} \\ \mu_{09} \\ \mu_{010} \\ \mu_{011} \end{bmatrix}
$$

Hvor

$$\Pi = \alpha\beta'$$

Denne CVAR-model er egent til at undersøge DSGE-modellen, da CVAR-modellen er i stand til at indeholde sammenhængene mellem variablene som DSGE-modellen foreskriver, samt at modellen er i stand til at opfange eventuelt andre sammenhænge mellem variablene i data. Dette gør CVAR-modellen egnet som ramme til at empirisk udregne og evaluere DSGE-modellen. Hvor mange trends der kommer til at være i trend vektoren $\mu_t t$ kommer ligeledes til at blive undersøgt i analysen. Som nævnt er α-matrixen og β-matrixen helt centrale i arbejdet med DSGE-modellen. I de næste afsnit vil der komme en beskrivelse af, hvordan der kan formuleres hypoteser ved at angive restriktioner af α- og β-matrixen.

8.3 *Restriktioner af* $\boldsymbol{\alpha}$

α-matrixen er tæt relateret til de kræfter, der driver systemet. Ved at teste hypoteser omkring α-matrixen, kan der undersøges relevant information omkring de eksogene variable, der driver DSGE-modellen. DSGE-modellen er som beskrevet i teoriafsnittet drevet af fire eksogene variable, som er et penge efterspørgsels shock, et teknologi shock, et investerings shock og shock til forbruget. Shoks'ne er samlet i vektoren $S' = (b_t \;\; A_t \;\; x_t \;\; e_t)$.[5]

Ved at lave restriktioner af α-matrixen kan det testes, hvorvidt en variabel, der indgår i CVAR-modellen kan betragtes som værende svag eksogen på langsigt. Svag eksogen på langsigt defineres en egenskab ved en variabel, som består i, at variablen har indflydelse på de andre variables stokastiske opførsel, men uden at variablen selv bliver påvirket. (Juselius, 2006)

Dette er et brugbart værktøj i forbindelse med at evaluere DSGE modeller, hvilket illustreres i (Juselius & Franchi , 2007), hvor er testes svag eksogenitet på lang sigt af variablen kapital k_t, da k_t ifølge DSGE-modellen er drevet af teknologiske shocks, som er modelleret som den eksogene ikke observerbare variabel A_t.

Da de ikke obserbare eksogene variable driver bestemte endogene variable, kan disse variable testes for svag eksogenitet på lang sigt, og derved kan det undersøges, hvilke bagvedliggende eksogene variable, der driver systemet. Da DSGE-modellerne indeholder ikke observerbare eksogene variable, der påvirker de endogene variable på en specificeret form, er det relevant at undersøge bestemte observerbare variable i modellen for svag eksogenitet på lang sigt.

I denne opgave bruges restriktioner af α-matrixen til at teste, om bestemte variable i datasættet er svagt eksogene på lang sigt.

For at teste restriktioner omkring α-matrixen, kan hypoteser formuleres på følgende måde: (Juselius, 2006)

$$\mathcal{H}_{\alpha}^{c}(r): \; \alpha = H\alpha_1$$

$$\mathcal{H}_{\alpha}^{c}(r) = R'\alpha$$

Her er α en $p \times r$ matrix, H er en $p \times s$ matrix, $\alpha_1$er en $s \times r$ matrix og $R = H_{\perp}$. I α-matrixen er der en restriktion, hvor s skal være mindre eller lig med r $s \geq r$. Dermed skal antallet af ikke-nul rækker i matrixen være større lig med r, og på den måde er der en række i matrixen, der kun indeholder nuller. Hvis der er en række i matrixen der kun indeholder nuller, så vil variablen ud fra denne række

[5] Det sidste shock, der beskrives i DSGE-modellen, er et monetært shock. Dennee beskrives dog ikke som en drivende variabel, da dennee shock-variabel har en middelværdi på nul og en konstant varians.

på venstre side af CVAR-modellen ikke justeres ind til langtidsligevægten og dermed kan variablen blive betegnet som fælles drivende trend i modellen, der determinerer trenden blandt variablene i modellen.

Hypotesen kan omformuleres til

$$H_0: \ \alpha = H\alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette substitueres ind i CVAR-modellen:

$$\Delta x_t = \mu_0 + \Gamma \Delta x_{t-1} + H\alpha_1 \beta' x_{t-1} + \Phi D_t + \epsilon_t$$

H matrixen vil se ud som enhedsmatrixen, hvor den variabel der testes, har en nulrække. F.eks. hvis en tredje variabel testes for svag eksogenitet på lang sigt, i et system med tre varaible, så vil H matrixen se ud på følgende måde:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovenstående restriktioner til modellen kan derefter formuleres som et egenværdiproblem, og testes med en LR test. Der vil denne opgave blive brugt en Johansen procedure, som er kodet ind i r pakken urca.

8.4 Restriktioner af $\boldsymbol{\beta}$

Som beskrevet tidligere, så kan kointegrationsmatrixen Π i CVAR-modellen opdeles i en α og en β komponent.

$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Pi x_{t-1} + y + \varepsilon_t$$

$$\Pi = \alpha\beta'$$

Kointegrationsmatrixen Π beskriver langtidsrelationerne og β komponenten kan tolkes som ligevægten i systemet $\beta' x_t - \beta_0 = 0$, hvor $\beta_0 = E(\beta' x_t)$, og α kan tolkes som de kræfter, der trækker processen mod ligevægten igen, når processen er ude af ligevægt, hvilket defineres som $\beta' x_t - \beta_0 \neq 0$. Ved at formulere hypoteser omkring β-matrixen, så kan der testes forskellige typer at ligevægtsrelationer. β kan testes ved at formulere s_i frie parametre eller m_i restriktioner på hver β_i^c, som repræsenterer en eller flere hypoteser, der bliver testet. β defineres som:

$$\beta^c = (\beta_1^c, \dots, \beta_i^c) = (H_1\varphi_1, \dots, H_r\varphi_r)$$

Her er φ_i en $(s_1 \times 1)$ matrix, som indeholder koefficienter for hvert parameter, der er repræsenteret i den ligevægt, der undersøges. H_i er en $(p1 \times s_i)$ design matrix, hvor p1 er dimensionen af $\tilde{x}_{t-1}$. Hypoteserne kan yderligere formuleres som restriktioner R_i $(p1 \times m_i)$ mod β_i, som er er givet ved:

$$R_1'\beta_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$R_r'\beta_r = 0$$

(Juselius, 2006)

Som et eksempel, vil der i analysen blive testet relationen, som er givet ved ligning C9:

$$\tilde{R}_t = \varrho_\pi \tilde{\pi}_t + \varrho_\mu \tilde{\mu}_t - \varrho_y \tilde{y}_t + \varepsilon_{Rt}$$

$$\varrho_\pi \tilde{\pi}_t + \varrho_\mu \tilde{\mu}_t - \varrho_y \tilde{y}_t - \tilde{R}_t = \varepsilon_{Rt} \sim I(0)$$

Relationen i ligning C9 kan udtrykkes som en vektor $H_9\varphi_9$, der har restriktioner, som er givet ud fra de frie parametre, der er indeholdt i ligning C9:

$$\beta_9 = H_9\varphi_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{91} \\ \varphi_{92} \\ \varphi_{93} \\ \varphi_{94} \end{bmatrix}$$

Hvor variablene i modellen er givet ved:

$$x_t{}' = \left[\tilde{y}_t \;\; \tilde{\imath}_t \; \tilde{c}_t \; \tilde{k}_t \;\; \tilde{n}_t \;\; \tilde{\pi}_t \;\; \tilde{R}_t \;\; \tilde{w}_t \;\; \tilde{p}_t \;\; \tilde{f}_t \;\; \tilde{m}_t \; \tilde{\mu}_t \;\; \tilde{h}_t \right]$$

Denne restriktion kan ligeledes skrives som:

$$R'_9\beta_9 \begin{bmatrix} 1000000000000 \\ 0000010000000 \\ 0000001000000 \\ 0000000000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{91} \\ \beta_{92} \\ \beta_{93} \\ \beta_{94} \\ \beta_{95} \\ \beta_{96} \\ \beta_{97} \\ \beta_{98} \\ \beta_{99} \\ \beta_{910} \\ \beta_{911} \\ \beta_{912} \\ \beta_{913} \end{bmatrix} = 0$$

Nul-hypotesen er derefter, at den lineære kombination med β_i^c er stationær.

Der vil i denne opgave blive gjort brug af to forskellige test omkring restriktioner af β-matrixen. Den første test vil blive brugt, når ligningen i DSGE-modellen antyder, at der skal være et stationaritets forhold mellem nogle variable uden, at der indgår nogle parametre i relationen og uden at relationen er restrikteret til at indgå i alle korrelationrelationerne. Dette vil sige, at der kun testes denne ene relation. Dette gør, at hypoteserne kan formuleres som vektorer i stedet for matrixer. Hypoteserne kan omskrives til et egenværdi problem og teststatistikken kan udregnes med en LR test. Dette vil i denne opgave blive gjort i programmet r ved brug af pakken URCA. De specifikke vektorer, der bruges til at teste ligninger i DSGE-modellen vil blive gennemgået i analysen.

Den anden test med restriktioner af β-matrixen, der vil blive benyttet er ligeledes en test, hvor der testes en enkelt stationaritets antagelse, og ikke tester at relationen indgår i alle kointegrationsrelationer. Imodsætning til den første test, bruges denne test til at bestemme stationaritet i forbindelse med en ligning i DSGE-modellen, når der indgår parametre i ligningen. Parametrene bliver derefter udregnet som dem, der har den største sandsynlighed for, at relationen er stationær, hvilket gør denne test mindre restriktiv. Restriktionerne formuleres som matrixer i denne test. De specifikke matrixer, der bruges til at teste ligninger i DSGE-modellen vil blive gennemgået i afsnit analysen. Disse hypoteser bliver testet med en algoritme, der estimerer løsninger til et ikke-lineært ligningssystem, hvorefter problemet kan formuleres som et eigen-værdi problem, der kan udregnes med LR statistik. I denne opgave vil testene blive udført i r ved hjælp af pakken URCA.

9 Analyse

9.1 Strukturelle antagelser

I denne del af analyse vil en række antagelser omhandlende de konkrete ligninger i DSGE-modellen blive omsat til hypoteser, som vil blive testet, hvilket er samme fremgangsmåde, som der er blevet brugt i (Juselius & Franchi , 2007). Dette afsnit omkring de strukturelle antagelser er alle omsat til hypoteser omkring β-matrixen, og derfor er dette analyseafsnit lavet på baggrund af teorien beskrevet i forrige afsnit.

Det er vurderet hvilke ligninger fra den log-lineariserede DSGE-model, det er muligt at empirisk vurdere ud fra de variable, der er medtaget i analysen, hvilket er beskrevet i afsnit data afsnittet. De variable der er i den log-lineariserede DSGE-model men ikke er observerbare variable og derfor ikke medgår i analysen, er så vidt muligt blevet substitueret ud, hvis variablene har indgået i flere ligninger. De ligninger som det er muligt at undersøge for stationæritet er ligning C6, C8, C9, C10 sat sammen med C11 og C12, C11 sat sammen med C14 C11 sat sammen med C14 og C15 og C11 sat sammen med C14 og C16.

I overensstemmelse med de teoretiske overvejelser i DSGE-modellen er der medtaget en trend i CVAR-modellen, da DSGE-modellen er drevet af de eksogene variable, som er beskrevet ved AR processor. Derudover er der inkluderet en dummy-variabel som repræsenterer et strukturelt brud i 1980 samt 2008. I (Juselius & Franchi , 2007) findes der ligeledes et brud i 1980. Dette gør, at der er 14 rækker H-matrixerne, hvori de 11 første svarer til variablene, nummer 12 og 13 svarer til dummy-variablerne og den sidste række svarer til den trend, der er inkluderet i modellen. Det vil sige, at x_t vektoren kommer til at se ud på følgende måde:

$$x_t{}' = \left[\tilde{y}_t \;\; \tilde{\imath}_t \; \tilde{c}_t \; \tilde{k}_t \;\; \tilde{n}_t \;\; \tilde{\pi}_t \;\; \tilde{R}_t \;\; \tilde{w}_t \; \tilde{f}_t \;\; \tilde{m}_t \; \tilde{h}_t \;\; d\_1980 \; d\_2008 \; t\right]$$

Da der er inkluderet en tids-trend i modellen, så kan det også undersøges, om ligningerne i DSGE-modellen er trend stationære, hvilket vil sige, at de er stationære omkring en lineær trend. Dette er relevant, da flere at ligningerne i modellen indeholder variable der repræsenterer de eksogene stød til modellen, og disse følger ifølge DSGE-modellen AR processor som beskrevet i teoriafsnittet.

Ranken af modellerne udregnes både ud fra en eigen-værdi test og ud fra en trace-test. Resultaterne viser, at modellen har en rank på 9. Dette vil sige, at dataene viser, at der er 9 kointegrations sammenhænge. Det vil sige, at Π-matrixen fra CVAR-modellen kan splittes op i en 11 gange 9 matrix og en 9*1 matrix.

Det første der undersøges, er omkring dummy-variablerne med et strukturelt brud i 1980 og 2008 kan ekskluderes. Derved bruges der er test på en restriktion af α-matrixen. Testene viser, at dummy-variablerne ikke kan ekskluderes med en markant lav p-værdi. Resultaterne af testene ses nedenstående tabel 9.1

Tabel 9.1 *I tabellen ses resultaterne af testene for at ekskludere en dummy-variablen med et strukturelt brud i henholdsvis 1980 og 2008. Der er lavet en test for hver dummy-variabel og en samlet test, og alle test viser, at dummy-variablerne ikke kan eksluderes.*

	X^2(d)	p-værdi
Dummy1980	103.2(10)	0.00
Dummy2008	76.94(10)	0.00
Dummy1980 og dummy2008	225.17(20)	0,00

At dummy-variablen med 1980 ikke kan eksluderes er i overensstemmelse med de resultater, som der findes i (Juselius & Franchi , 2007). Dummy-variablene bliver derfor medtaget som variable gennem alle de test på der udføres på CVAR-modellen.

Den første ligning fra den log-lineariserede DSGE-model, der undersøges er ligning C1. Ligning C1 indeholder den ikke-observerede variabel λ samt to eksogene variable. Derfor er λ substitueret ind fra ligning C3 og den eksogene variabel $\tilde{b}_t$ er substitueret ind fra ligning C2. Derfor kan den sidste eksogene variabel i ligning C1 isoleres, hvilket giver følgende ligning.

$$\frac{\left((1-\gamma)\lambda c-1\right)\tilde{c}_t-\frac{h\tilde{h}_t}{1-h}+\widetilde{w}_t-\frac{\lambda m(R-1)}{R}\left(\left(\frac{\gamma\tilde{R}_t}{R-1}-\tilde{c}_t+\widetilde{m}_t\right)+(\gamma-1)\widetilde{m}_t\right)}{-\gamma}=\tilde{e}_t$$

$$\varphi_{11}\tilde{c}_t+\varphi_{12}\tilde{h}-\varphi_{13}\widetilde{w}_t+\varphi_{14}\tilde{R}_t-\varphi_{15}\widetilde{m}_t=\tilde{e}_t$$

Der vil blive undersøgt, at relationen $\varphi_{11}\tilde{c}_t + \varphi_{12}\tilde{h} - \varphi_{13}\widetilde{w}_t + \varphi_{14}\tilde{b}_t - \varphi_{15}\widetilde{m}_t$ er trend-stationær.

Den næste ligning er ligning C2:

$$\frac{\gamma\tilde{R}_t}{R-1} - \tilde{c}_t + \widetilde{m}_t = \tilde{b}_t$$

$$\varphi_{21}\tilde{R}_t - \varphi_{22}\tilde{c}_t + \varphi_{22}\widetilde{m}_t = \tilde{b}_t$$

Ligeledes undersøges det, om relationen $\varphi_{21}\tilde{R}_t - \varphi_{22}\tilde{c}_t + \varphi_{22}\widetilde{m}_t$ er trend-stationær.
Ligning C3 indeholder den ikke-observerede variabel λ og er derfor sammensat med ligning C1.
I ligning C4, som er produktionsfunktionen, isoleres det teknologiske shock.

$$\frac{\tilde{y}_t - \alpha\tilde{k}_t}{1-\alpha} - \tilde{h}_t = \tilde{A}_t$$

$$\varphi_{41}\tilde{y}_t - \varphi_{42}\tilde{k}_t - \varphi_{43}\tilde{h}_t = \tilde{A}_t$$

Det undersøges om $\varphi_{41}\tilde{y}_t - \varphi_{42}\tilde{y}_t + \varphi_{43}\tilde{h}_t$ er trendstationær.

C5 undersøges for stationaritet.

$$y\tilde{y}_t - c\tilde{c}_t - i\tilde{\imath}_t \sim I(0)$$

$$\varphi_{51}\tilde{y}_t - \varphi_{52}\tilde{c}_t - \varphi_{53}\tilde{\imath}_t \sim I(0)$$

Ligning C6 og C7 indeholder ikke observerbare variable, som ikke kan isoleres.
Ved ligning C88 udnyttes det, at $\Delta m_t \sim I(0)$, hvilket er samme fremgangsmåde som i (Juselius & Franchi , 2007). Derudover er $\mu_t = \frac{m_t}{m_{t-1}}$ i DSGE-modellen, og da det er den log linarisrede DSGE-model som bliver udregnet ud fra CVAR metoden, så er det variabelen $\log\mu_t$ der bruges. $\log\mu_t = \log\mu_t = \log\left(\frac{m_t}{m_{t-1}}\right) = \log m_t - \log m_{t-1} = \Delta\, m_t$

$$\Delta\widetilde{m}_t = \frac{\tilde{\pi}_t}{2} \sim I(0)$$

$$\varphi_{81}\tilde{\pi}_t \sim I(0)$$

Den næste ligning, der bliver omsat til en hypotese omkring β-matrixen er ligning C9

$$\varrho_{\pi}\tilde{\pi}_t - \varrho_y\tilde{y}_t - \tilde{R}_t = \varepsilon_{Rt} - \varrho_{\mu}\Delta\tilde{m}_t \sim I(0)$$
$$\varphi_{91}\tilde{\pi}_t - \varphi_{93}\tilde{y}_t - \varphi_{94}\tilde{R}_t \sim I(0)$$

Den sidste ligning, der bruges til at undersøge, stationaritet blandt variablene er ligning C15:

$$\tilde{f}_{t+1} = \tilde{R}_t - \tilde{\pi}_t + \psi\left(\tilde{q}_t + \tilde{k}_{t+1} + \tilde{n}_{t+1}\right)$$

Fra ligning C13 kommer det, at $\Delta\tilde{\lambda}_t = -\left(\tilde{R}_t - \tilde{\pi}_t\right) \sim I(0)$, hvis $\Delta\tilde{\lambda}_t \sim I(0)$. Det vil sige, at

$$\tilde{f}_{t+1} - \psi\left(\tilde{q}_t + \tilde{k}_{t+1} + \tilde{n}_{t+1}\right) \sim I(0)$$

Da det er taget log af variablene er $\tilde{q}_t + \tilde{k}_{t+1} = \log(q_t\, k_{t+1})$. $q_t k_{t+1}$ er prisen på kapital, og dermed den variabel, som der medtages i dataanalysen. $q_t k_{t+1}$ bliver i dataanalysen derfor bare benævnt k_{t+1}.

$$\tilde{f}_{t+1} - \psi\left(\tilde{k}_{t+1} + \tilde{n}_{t+1}\right) \sim I(0)$$

$$\varphi_{151}\tilde{f}_{t+1} - \varphi_{152}\tilde{k}_{t+1} - \varphi_{153}\tilde{n}_{t+1} \sim I(0)$$

Resten af ligningerne fra DSGE-modellen er ikke medtaget, da de enten indeholder variable, der ikke er observerbare og ikke kan substitueres væk eller de indeholder variable af forskellige lag, som heller ikke kan substitueres væk.

I (Juselius & Franchi , 2007) er der lavet en anylyse af dataene, hvor de er splittet op i perioden før og efter 1980. Dette er der ikke blevet gjort i denne opgave, grundet de mange variable og årligt data i stedet for kvartalvis data som Juselius og Franchi har brugt, samt at data i denne opgave går tilbage til 1972, hvor det går tilbage til 1960 i Juselis og Franchi's undersøgelse. I stedet er der som beskrevet medtaget dummy variable der indeholder et opbrud i henholdsvis 1980 og 2008.

9.2 Resultater af analysen af de strukturelle antagelser

Resultaterne fra analysen af beta-matrixen i modellen beretter om ligningerne fra DSGE-modellen er stationære eller trendstationære og dermed konsistente med modellen.
Resultaterne fra analysen er opsummeret i tabel 10.1

Tabel 10.1. Tabellen viser X^2 samt p værdierne for testene af de strukturelle antagelser.

Ligning	X^2(d) dummy1980	p-værdi dummy1980	X^2(d) dummy1980og dummy2008	p-værdi dummy1980 dummy2008
C1+C2+C3	57.59(5)	0.00⋆	13.43(0)	0.00⋆
C2	60.43(8)	0.00⋆	5.52(3)	0.14
C4	3.27(1)	0.07	10.98(2)	0.00⋆
C5	1.93(1)	0.17	16.54(2)	0.00⋆
C8	2.67(3)	0.44	15.16(4)	0.00⋆
C9	2.34 (1)	0.13	14.74(2)	0.00⋆
C15	7.8 (1)	0.01⋆	10.82(2)	0.00⋆

Resultaterne viser, at ligning C2 er den eneste ligning, der er stationær eller trendstationær i modellen, hvor der er medtaget dummy-variabler for 1980 og 2008, hvis der bruges en rank på 10, hvilket er det rank testen peger på. Hvis der derimod bruges en rank på 4, som teorien forslår, så er der ikke nogen af ligningerne, der er stationære.
Katarina Juselius finder i hendes evaluering af en DSGE-model, at produktions funktion er (trend)stationær, hvilket der ikke findes i denne undersøgelse. Produktionsfunktionen er på en anden form i denne DSGE-model.

9.3 *Svag eksogenitet*

Som beskrevet tidligere er de ikke-observerbare eksogene variable shock til pengeefterspørgslen, shock til teknologien, shock til investeringen og shock til forbruget: $S' = (b_t \;\; A_t \;\; x_t \;\; e_t)$. Da der er et shock til pengeefterspørgslen undersøges det, om pengemængden er svag eksogen. Da investeringerne er modelleret, så de er drevet af inverterings shocks samt at kapitalen er modelleret ud fra investeringerne og investerings-shocks, så undersøges det, om investeringerne og kapitalen er svage eksogene på lang sigt. Derudover undersøges det, om shock til forbruget er svagt eksogent. Det undersøges om alle de nævnte variable samlet set er svagt eksogene samtidig med at variblene undersøge hver for sig omkring svag eksogenitet. De det i analysen ovenfor er fundet, at dummy variablenerne D_{1980} og D_{2008} er relevante er medtage, er de også medtaget i denne analyse. Dette gør, H matrixen i tilfældet, hvor alle variablene samlet set testes for svag eksogenitet på lang sigt kommer til at se ud på følgende måde:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.4 *Resultater omhandlende svag eksogenitet*

Resultaterne der omhandler svag eksogenitet ses i tabel 10.2

Tabel 10.2. Tabellen viser X^2 samt p værdierne for testene af de svagt eksogene variable på lang sigt.

	X^2(d)	p-værdi
Samlet svag eksogenitet på lang sigt	333,25(50)	0,00
investeringer	37,06(10)	0.00
forbrug	25,55(10)	0,00
kapital	29,46(10)	0,00
pengemængde	44,86(10)	0,00

Resultaterne viser, at DSGE-modellen i høj grad har medtaget korrekte shock-variable, der driver modellen. Dog tyder rank testen på, at der skal flere shock-variable til at forklare sammenhængende i data fyldestgørende.

10 Diskussion

Der vil i dette afsnit først blive diskuteret resultaterne der omhandler de strukturelle antagelser og derefter vil der blive diskuteret resultaterne omhandlende eksogene variable. Dernæst vil diskussionen gå fra at omhandle den specifikke DSGE-model, der undersøges i denne opgave til at omhandle DSGE-modeller generelt.

10.1 Strukturelle antagelser

Der er undersøgt syv strukturelle ligninger i modellen ud af de 16 ligninger modellen består af. Af disse ligninger var der kun en af ligningerne, hvor (trend)stationeret var opfyldt, hvis ikke dummy-variablen med et split i 2007 var medtaget, og altså kan det konkluderes, at seks af ligningerne ikke korrekt specificerer langtidsrelationerne mellem data. Ligning C5 beskriver hvordan output er opgjort at inverstering og forbrug i en lukket økonomi uden en offentlig sektor. Variablene som beskrevet i afsnit 6 *data*, er så vidt muligt uden medregning af den offentlige sektor. Men eksport og import er ikke fraregnet variablene, hvilket de heller ikke er i (Christensen & Dib, 2008), og derfor er det forventeligt, at ligning C5 ikke er overholdt, og derfor kan evalueringen af denne ikke direkte rettes som en kritik af DSGE-modellerne. Ligning C4 er det produktionsfunktionen som er blev log-lineariseret. Denne produktionsfunktion med konstant skalaafkast er anvendt i flere DSGE-modeller som f.eks. (Gertler & Kiyotaki, 2010). Produktionsfunktionen har en række matematiske fordele når der modelleres økonomiske modeller, hvor det er let at bestemme om funktionen skal have konstant, aftageende eller stigende skalaafkast. Derudover kan den ny-keynesianske philips-kurve også kritiseres, hvilket også er strukturel ligning, der bruges i flere modeller (Romer & David, 2012).
DSGE-modeller har i forbindelse med finanskrisen i år 2007 fået stor kritik for at negligere den finansielle sektors betydning for økonomien som helheld, og manglende inddragelse af den finansielle sektor (Juselius, 2019). I DSGE-modellen fra Christensen og Dib er der medtaget en finansiel sektor i form af en accelerator model, og de har modelleret den, således at den ikke indeholder mange finansielle variable, men de udeleder i stedet forholdene ved brug en entreprenørernes egenværdi udtryk ved variablen n_t. Ligning C15 og C16 i modellen er de primære ligninger, der linker den finansielle side af økonomien sammen med økonomien som helhed. Da analysen i denne opgave finder at ligning C15 ikke er (trend)stationær når CVAR-modellen bruges til at analysere ligningerne fra Christensen og Dib modellen, kan der rejses kritik imod Christensens og Dibs modellering af den finansielle sektors indflydelse på økonomien som helhed. Ligning C15

er en væsentlig ligning i modellen da entreprenørernes egenværdi i denne ligning bliver linket sammen med kapitalen og afkastet på kapitalen, hvilket er en vigtig del af den finansielle accelerator model, da egenværdien har en to vejs indflydelse på omkostningerne ved at låne, og omkostningerne ved at låne er relateret til afkastet på kapitalen, der falder når låneomkostningerne stiger. Her har entreprenørernes egenværdi en direkte påvirkning på låntagningen og lånomkostningernes uden at flere variable inddrages. Der kan argumenteres for, at modellen inkluderer for få finansielle variable til at fremskaffe et tilfredsstillende billede af den finansielle sektors indflydelse, men der kan også argumenteres for en kritik af selve DSGE-modellerne som helhed, da flere af de strukturelle ligninger kan kritiseres jævnfør analysen i denne opgave. Baseret analysen af de strukturelle ligninger i denne opgave er konklusionen at DSGE-modellen fra Christensen og Dib har markante udfordringer, når modellen tages til dataene ved brug af CVAR-metoden, der tillader mere kritiske undersøgelser af hypoteser.

Der er i denne opgave blevet fuldt en fremgangmåde efter (Juselius & Franchi , 2007) som evaluerer en mindre DSGE-model. Juselius og Franchi formulerer ligeledes strukturelle hypoteser ud fra en DSGE som er forsøgt kvantificeret i (Ireland, 2004). En ud af flere ting Juselius og Franchi undersøger omkring DSGE modellen, er at de omsætter nogle strukturelle antagelser i modellen til følgende hypoteser:

1. $y_t - c_t$ er (trend)stationær
2. $y_t - c_t - h_t$ er (trend)stationær
3. $y_t - k_t$ er (trend)stationær
4. $c_t - bH_t$

y_t er output, c_t er forbrug, h_t er arbejdstimer, k_t er kapital som der er taget log af og H_t er arbejdstimer uden at der bliver taget log af variablen. Hypoteserne bliver undersøgt i forbindelse med en CVAR-model, der indeholder y_t, c_t, h_t
og k_t. Da de strukturelle antagelser ikke er de samme som ved denne model, kan kritikken ikke direkte videreføres til DSGE modellen fra Christensen og Dib som der undersøges i denne opgave. Det kan derfor diskuteres, hvorvidt kritikken som Juselius og Franchi fremfører kan generaliseres til større modeller. Det kan i videreførelse af det også diskuteres hvorvidt kritikken af DSGE-modellen i denne opgave kan videreføres til større mere komplekse DSGE-modeller, der indeholder flere variable. Der er i denne opgave blevet fremført væsentligt kritik mod Christensens og Dibs DSGE-

model, der indeholder en finansiel sektor. Men da denne model bl.a. ikke indeholder en offentlig sektor og ikke indeholder en åben økonomi, så kan der argumenteres for, at kritikken af denne model ikke umiddelbart kan udvides til en kritik af DSGE-modeller generelt. Derimod kan der fremføres den argumentation, at de mindre DSGE-modeller bør fremføre de mest væsentlige økonomiske processor i økonomien, som så videreudvikles og beskrives mere i detalje i de større DSGE-modeller, og hvis de mindre DSGE-modeller ikke har en fremføring af de mest væsentlige processor i økonomien som stemmer overens med empirien, så er hele fundamentet for de større DSGE-modeller kritisabel. Der kan dog ikke argumenteres for at hvis de store modeller frembringer korrekte strukturelle formuleringer af empirien, at de så vil være forkert formuleret på baggrund af kritikken af de små modeller. Selvom kritikken af de strukturelle forhold ikke direkte kan videreføres til større modeller, så har Juselius og Franchi fremført et stærkt værktøj til at tage DSGE-modeller til dataene, hvori der kan formuleres mange hypoteser, der kan testes. Juselius og Franchis fremgangsmåde giver mulighed for en dybdegående undersøgelse af diverse økonomiske modeller for at undersøge, om empirien understøtter antagelserne i modellerne.

Som alternativ til DSGE-modeller argumenterer Juselius for at CVAR-modellen er en model, der direkte beskriver sammenhængene, der er mellem dataene (Juselius, 2018). Som det fremgår af metodologien som er beskrevet i afsnit 7 samt hvordan Juselius beskriver fremgangmåden omkring CVAR-modellen i hendes bog (Juselius, 2006), så er CVAR-metoden ligeså meget en metode til at evaluere teorier og modeller som en økonomisk model i sig selv. Juselius beskriver at efter hendes arbejde med CVAR-metoden samt søgen efter en teori der matcher empirien, så er hendes bedste bud på en korrekt specificeret økonomisk model en keynesiansk model med en fuldt ud inkorporeret finansiel sektor og med forventninger baseret på usikkerhed og imperfekt kendskab til fremtiden. Som beskrevet tidligere kan det efter analysen i denne opgave drages væsentlige kritikpunkter af Christensens og Dibs DSGE-model, men kritikken kan ikke direkte videreføres til større DSGE modeller, der indeholder flere variable og flere eventuelt væsentlige detaljer. Derfor vil det være væsentligt for fremtidige undersøgelser at inkorporere CVAR-metoden til at evaluere økonomiske modeller, så metoden kan blive udnyttet ved flere og større modeller, så der derved vil være en kritisk tilgang i forbindelse med at estimere modellerne og tage modellerne til dataene.

I flere artikler bruges der bayesian statistik til at udregne modeller (Adolfson, et al., 2005) (Michał & Marcin, 2012) (Stefania, et al., 2012). Ved denne metode kan en model kun sammenlignes med en anden model (DeJong & Dave, 2012). Derfor er det blevet en norm at sammenligne DSGE modeller med andre DSGE-modeller. Derudover bruges der, når modellen skal udregnes med bayesian statistik, en prior statistik fordeling, som typisk er baseret på resultaterne baseret på økonometri anvendt på mikrodata. Juselius kritiserer den gennerelle tilgang til udregning af modeller i forbindelse med udregning af DSGE modeller, og hun anvender vedingen ”dataene får ikke lov at tale frit”. Ved at bruge statistik hvor der fastsættes en prior fordeling, så låses der en del af relationerne fast, og der kan argumenteres for, at alle informationerne i dataene ikke er tilgængelige i den statistiske test.

CVAR modellen kan udregne parametrene baseret på kointegrations restriktionerne der er lavet i modellen, hvilket kan sammenlignes med estimationerne af parametre i (Christensen & Dib, 2008). Da ingen af de testede strukturelle ligninger er fundet signifikante er denne analyse dog ikke foretaget.

11 Konklusion

CVAR-metoden har vist sig at være et stærkt værktøj til at analysere en større DSGE-model i et rigt datasat. Flere af DSGE-modellens strukturelle antagelser, har vist sig, at kunne blive omformuleret til hypoteser, der kan testes gennem CVAR-modellen. Sammenlignet med undersøgelsen i (Juselius & Franchi , 2007) hvor en mindre DSGE-model bliver undersøgt kan kritikken omkring strukturelle forhold ikke direkte videreføres til en større DSGE-model, som den der bliver undersøgt i denne opgave. Alle resultaterne i (Juselius & Franchi , 2007) kan derfor ikke direkte videreføres til alle større DSGE-modeller, ligesom alle resultaterne i denne opgave ikke direkte kan videreføres til større DSGE-modeller. Denne opgave har dog biddraget til en væsentlig kritik af denne specifikke DSGE-model, hvor de DSGE-modeller, der indeholder nogle en del af de samme strukturelle antagelser givet ud fra ens differentialligniner, sandsynligvis vil have samme kritikpunkter. DSGE-modellen, der er blevet undersøgt, er fra (Christensen & Dib, 2008). Modellen er en ny-keynesiansk DSGE-model bestående af 16 ligninger, hvori der indgår en finansiel sektor bestående af en accelerator-model. Kritikken af modellen går ud på, at modellen ikke tilfredsstillende har specificeret de drivende shock variabler i forhold til at kunne forklare trends i datasættet. Derudover er kritikken, at modellen teoretisk beskriver stationeret mellem bestemte variable, hvilket afvises at være tilfældet i datasættet. Dette gælder blandt andet sammenhængen mellem den finansielle sektor og økonomien som helhed, produktionsfunktionen samt den ny-keynesianske phillips-kurve.

12 Litteratur

Adolfson, M., Laséen, S., Lindé, J. & Villani, M., 2005. Bayesian Estimation of an Open Economy DSGE Model with Incomplete Pass-Through. *econstor, Sveriges Riksbank Working Paper Series, No. 179.*

Christensen, I. & Dib, A., 2008. The financial accelerator in an estimated New Keynesian model. *Review of Economic Dynamics 11 ,* pp. 155-178.

DeJong & Dave, 2012. *Structural Macroeconometrics.* s.l.:princeton.

Enders, W., 2015. *Applied econometrics Time Series.* s.l.:wiley.

Gechert, S., Havranek, T., Irsova, Z. & Kolcunova, D., 2019. Death to the Cobb-Douglas Production Function? A Quantitative Survey of the Capital-Labor Substitution Elasticity. *EconStor Preprints 203136.*

Geil, O., 2015. *Elemtary linear algebra.* s.l.:aalborg university .

Gertler, M. & Kiyotaki, N., 2010. *handbook of monetary economics,* september, Årgang 3, pp. 547-599.

Hendry, D. & Juselius, K., 2000. *Explaining Cointegration Analysis: Part II.* s.l.:Department of Economics University of Copenhagen.

Ireland, P. N., 2004. A method for taking models to the data. *Journal of Economic Dynamics & Control,* pp. 1205-1206.

Jespersen, J., 2011. *Macroeconomic methodology: a post-keynesian perspectiv.* s.l.:Edward Elgar.

Juselius, K., 2006. *The Cointegrated VAR Model - methodology and application advanced tests in economics.* s.l.:Oxford University Press.

Juselius, K., 2018. Searching for a theory that ts the data: A personal research odyssey. *Economics Deppartment, University of Copenhagen.*

Juselius, K., 2019. *Økonomien og virkeligheden.* s.l.:Informations forlag.

Juselius, K. & Franchi , M., 2007. Taking a DSGE Model to the Data Meaningfully. *The Open-Access, Open-Assessment E-Journal,* pp. 1-38.

Michał, B.-B. & Marcin, K., 2012. Bayesian evaluation of DSGE models with financial frictions. *NATIONAL BANK OF POLAND WORKING PAPER No. 109.*

OLIVIER, J. & CHARLES, M. K., 1980. THE SOLUTION OF LINEAR DIFFERENCE MODELS UNDER RATIONAL EXPECTATIONS. *Econometrica,* 48(5).

Roger, F. & Vadim, K., 2012. Solving and Estimating Indeterminate DSGE Models. *international monatary fond.*

Romer & David, 2012. *Advanced Macroeconomics.* s.l.:Mcgrawhill.

Stefania, V., Jing & Yang, 2012. Financial intermediaries in an estimated DSGE model for the UK. *Bank of England.*

Zietz, J., 2006. Log-Linearizing Around the Steady State: A Guide with Examples. *SSRN Electronic Journal.*