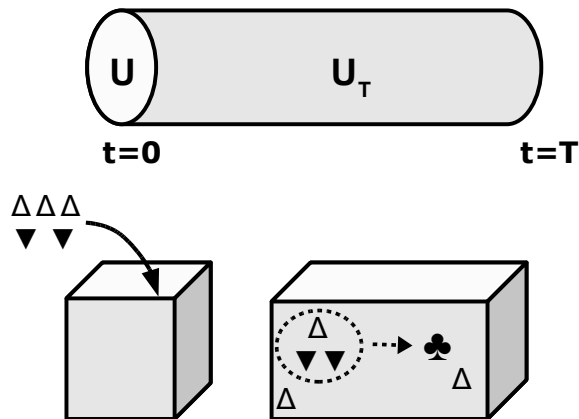


SABRINA MUNCH HANSEN

DIFFUSIONS- OG REAKTIONS- LIGNINGER

VEJLEDER: JON JOHNSEN



SPECIALEAFHANDLING I MATEMATIK

INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

AALBORG UNIVERSITET

JUNI 2010

Synopsis:

Titel: Diffusions- og reaktionsligninger
Tema: Parabolske partielle differentialoperatorer
Projektperiode: MAT6, forårssemestret 2010
Projektgruppe: G2-106B

Skrevet af:

Sabrina Munch Hansen

Vejleder: Jon Johnsen

Oplagstal: 6

Sidetal: 94

Afsluttet: 10. juni 2010

Dette speciale behandler diffusions- og reaktionsligninger, der er 2. ordens parabolske partielle differentialligninger. Eksistensen og entydigheden af en svag løsning til et begyndelsesværdiproblem indeholdende én lineær differentialligning af denne type bevises. Hertil kræves grundlæggende teori om vektorfunktioner og -distributioner.

Derudover bevises et analogt resultat for et system af ikke-lineære diffusions- og reaktionsligninger, hvor Laplaceoperatoren beskriver diffusionen.

Til sidst behandles mere konkrete systemer for at belyse forskellige problemstillinger inden for området. Hertil benyttes både det svage og stærke maksimumsprincip samt Harnacks ulighed.

Et af systemerne stammer fra artiklen „On the Global Existence of Solutions of a Reaction-Diffusion Equation with Exponential Nonlinearity“ af A. Barabanova. I specialet argumenteres for, at der på trods af, at det ikke-lineære led kan vokse eksponentielt, eksisterer globalt definerede løsninger, som yderligere er kontinuerte til ethvert positivt tidspunkt.

Specialets indhold er frit tilgængeligt – offentliggørelse er tilladt med kildeangivelse.

Summary

Differential equations are a widely used mathematical tool in many different areas ranging from economics to biology. They make it possible to express complicated relationships of dependence between a number of variables in a very compact and precise manner.

In this thesis a specific class of differential equations is examined, namely second-order parabolic partial differential equations, which is a generalization of the heat equation. These are for instance used to model the concentration of different chemical substances in a solution over time, where the concentration of a substance is influenced by the natural diffusion of molecules and the chemical reactions taking place. Such a model is called a diffusion-reaction system – often equipped with appropriate initial and boundary conditions.

The first chapter of the thesis introduces fundamental concepts and contains proofs of important results used in the following analysis. Essential topics are vector distributions and spaces of Banach-valued functions, in particular Lebesgue and Sobolev spaces.

Chapter two is devoted to linear, second-order parabolic partial differential equations. The meaning of a weak solution is introduced and it is shown, that there exists a unique weak solution to an initial/boundary-value problem meeting certain requirements. This is done using Galerkin's method, which reduces the problem to a family of finite-dimensional subspaces. There is also a proof of the existence of a weak solution fulfilling energy estimates, which gives an upper bound on the norm of the solution and its derivative with respect to time.

Chapter three contains important results regarding the behaviour of sub- and supersolutions to parabolic differential equations fulfilling certain conditions. For example there is given sufficient conditions for the sub- or supersolution to attain its maximum respectively minimum on the parabolic boundary.

Chapter four concerns a non-linear diffusion-reaction system of several equations with initial and boundary conditions. The term describing the diffusion contains only the Laplacian and the reaction term is assumed to be globally Lipschitz. It is proved that also in this case there exists a unique weak solution defined on the interval $[0, T]$, where $T > 0$. The strategy in the proof is to reduce the system to one that is linear, so the theory in Chapter two can be applied. Afterwards an operator is constructed, for which Banach's fixed point theorem can be used. The fixed point then becomes a solution to the original system.

The chapter also contains a section analysing a diffusion-reaction system where the reaction term is simply u^2 . The point is that if T and the function describing the initial condition are large in a specific sense, then a smooth solution does not exist on the whole interval.

In Chapter five the article „On the Global Existence of Solutions of a Reaction-Diffusion Equation with Exponential Nonlinearity“ by A. Barabanova is treated. It concerns a system of two diffusion-reaction equations where the initial conditions are non-negative and the non-linear term is allowed to grow exponentially. One of the main conclusions in the article is that under certain circumstances there exists a global solution, which is continuous with respect to the space variable.

Forord

Dette speciale er udarbejdet inden for anvendt matematisk analyse ved Institut for Matematiske Fag på Aalborg Universitet i perioden 1. februar til 10. juni 2010.

Kildehenvisninger står i firkantede parenteser i starten af et kapitel eller et afsnit samt i direkte tilknytning til de sætninger og lemmaer, hvor det er fundet relevant. Litteraturlisten forefindes bagerst i specialet.

Derudover benyttes to forskellige slags henvisninger. Når der henvises til et matematisk udtryk, står nummeret på dette i en parentes, hvorimod dette ikke er tilfældet ved henvisning til kapitler, sætninger, figurer mv. Beviser og eksempler afsluttes med $\square$, mens definitioner, sætninger og lign. er indrammede.

Det forudsættes, at læseren er bekendt med grundlæggende distributionsteori samt generelle resultater vedrørende Banach- og Hilbertrum.

Jeg vil gerne benytte lejligheden til at takke min vejleder, Jon Johnsen, for altid at være engageret og tålmodig – samt ikke mindst gavmild med sin tid.

Notation og begreber

Følgende notation og begreber bliver benyttet i specialet:

- Symbolet $:=$ bruges ved definition af nye størrelser, såfremt det ikke fremgår af konteksten, at der er tale om en definition.
- En indlejring angives med $\hookrightarrow$.
- Den imaginære enhed betegnes i .
- Indikatorfunktionen for en given mængde M noteres $\mathbf{1}_M$.
- Definitionsmængden for en operator A forkortes $D(A)$ og billedet $R(A)$.
- Randen af en mængde U noteres ∂U og det indre U° .
- Vektorfunktioner noteres med fed, og den k 'te komponent af $\mathbf{u}$ skrives u_k .
- Differentiation af u i den i 'te retning betegnes $\partial_{x_i} u$ eller $\partial_i u$.

Et multiindex α er en k -tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$, der har længde $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. I forbindelse hermed benyttes notationen $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

- For en funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, hvis 2. ordens partielle afledte eksisterer, noteres Hesse-matricen

$$Hu := \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 u & \partial_{21}^2 u & \dots & \partial_{n1}^2 u \\ \partial_{12}^2 u & \partial_{22}^2 u & \dots & \partial_{n2}^2 u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{1n}^2 u & \partial_{2n}^2 u & \dots & \partial_{nn}^2 u \end{bmatrix}.$$

- Laplace-operatoren noteres Δ og er givet ved $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 u$.
- Mængden af begrænsede operatorer mellem normerede rum V og W skrives $\mathbb{B}(V, W)$.
- Notationen n.a. og n.o. benyttes som forkortelse for hhv. „næsten alle“ og „næsten overalt“, hvilket betyder, at de elementer i en given mængde, som udsagnet ikke gælder for, udgør en nulmængde.

Indhold

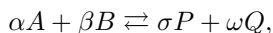
Indledning	1
1 Vektorfunktioner og -distributioner	5
1.1 Funktionsrum	6
1.2 Bochners identitet	8
1.3 Differentiabilitet	10
1.4 Foldning	11
1.5 Distributionsafledte i Lebesguesrum	13
2 Lineære, parabolske begyndelses- og randværdiproblemer	21
2.1 Svage løsninger	22
2.1.1 Galerkin approksimationer	29
2.1.2 Energiulighederne	34
2.1.3 Eksistens og entydighed	37
2.2 Den svage løsning og energiulighederne	42
3 Maksimumsprincipper for parabolske operatorer	45
3.1 Det svage maksimumsprincip	45
3.2 Harnacks ulighed	48
3.3 Det stærke maksimumsprincip	59
4 Diffusions- og reaktionsligninger	63
4.1 Eksistens og entydighed af svag løsning	65
4.2 Ikke-lineært eksempel	68
4.3 Stationært eksempel	71
5 Globale løsninger under eksponentiel vækst	75
5.1 Systemet	75
5.2 Egenskaber ved løsninger	76
5.3 Ens diffusionskonstanter	77
5.4 Forskellige diffusionskonstanter	78
5.5 Eksistens af globale løsninger	81
A Funktionalanalyse	83
B Gronwalls uligheder	87
C Erratum	89

Indledning

Matematiske modeller kan være yderst effektive, når det gælder om at analysere fysiske fænomener, eftersom de muliggør analyse heraf ved brug af matematiske værktøjer.

Et eksempel på et fysisk fænomen er en væske med kemiske stoffer. Disse behøves ikke have samme koncentration, og det er også muligt, at koncentrationen af et stof afhænger af, hvor i væsken den måles. Derudover kan stofferne omdannes til hinanden, hvilket kaldes en reaktion, og de kan bevæge sig tilfældigt rundt i væsken, hvilket kaldes en diffusion. Med tilfældigt menes, at bevægelsen på et givent tidspunkt ikke afhænger af tidligere bevægelser. Typisk vil stofferne bevæge sig fra områder med høj koncentration til områder med lavere.

I det følgende betragtes et eksempel, hvor væsken indeholder stofferne A, B, P og Q , hvis samspil kan beskrives ved reaktionsligningen



hvor α, β, σ og ω er de støkiometriske koefficienter. De to modsatrettede processer vil have hver deres reaktionshastighed, der angiver ændringen i koncentrationen pr. tidsenhed. Hastigheden af reaktionen mod højre er

$$K_h[A]^\alpha[B]^\beta,$$

hvor K_h kaldes en hastighedskonstant, og de firkantede parenteser angiver koncentrationen af det pågældende stof. Tilsvarende er $K_v[P]^\sigma[Q]^\omega$ hastigheden af reaktionen mod venstre. På et tidspunkt vil de to reaktioner muligvis foregå med samme hastighed, dvs.

$$K_h[A]^\alpha[B]^\beta = K_v[P]^\sigma[Q]^\omega,$$

hvormed systemet har nået en dynamisk ligevægt. I så fald indføres ligevægtskonstanten

$$K = \frac{K_h}{K_v} = \frac{[P]^\sigma[Q]^\omega}{[A]^\alpha[B]^\beta}.$$

Ændringen af A 's koncentration over tid afhænger af diffusionen af stoffet, hvilken kan beskrives ved hjælp af Laplace-operatoren. Derudover afhænger den af reaktionshastigheden både mod højre og venstre, og eftersom der bruges α molekyler af A for

hver gang reaktionen løber mod højre, og der dannes α molekyler ved den modsatte reaktion, fås

$$\partial_t[A] = K_A\Delta[A] - \alpha K_h[A]^\alpha[B]^\beta + \alpha K_v[P]^\sigma[Q]^\omega,$$

hvor K_A kaldes diffusionskonstanten. Derimod gælder for $[P]$, at

$$\partial_t[P] = K_P\Delta[P] - \sigma K_v[P]^\sigma[Q]^\omega + \sigma K_h[A]^\alpha[B]^\beta,$$

hvor K_P ligeledes er en konstant. Analoge ligninger fås for $[B]$ og $[Q]$.

Tilsammen danner de fire ligninger et system af diffusions- og reaktionsligninger, hvor en mulig randbetingelse vil være, at koncentrationerne er lig med nul på randen, mens begyndelsesbetingelsen kan være de koncentrationer af stofferne, som hældes i væsken til at begynde med.

Systemet ovenfor består af 2. ordens paraboliske partielle differentiaalligninger, der er ikke-lineære. Den sidste egenskab gør systemet væsentligt vanskeligere at analysere i forhold til det lineære tilfælde. Et eksempel er følgende system med varmeledningsligningen, hvor $U = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$ og u samt g er reelle funktioner:

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= u^2 \text{ i } U \times]0, T] \\ u &= 0 \text{ på } \partial U \times]0, T[\\ u &= g \text{ på } U \times \{t = 0\}.\end{aligned}$$

I specialet vises, at selv et så simpelt ikke-lineært led som u^2 giver den matematiske vanskelighed, at en løsning ikke kan vedblive at være C^∞ , såfremt $T > 0$ og $g \geq 0$ er tilpas store i en bestemt forstand. I bedste fald vil en løsning tilhøre $C^\infty(U \times]0, t[)$ for t tæt på nul.

I kapitel 1 præsenteres mange af de redskaber, som skal bruges til at analysere diffusions- og reaktionsligninger. Herefter vil lineære, paraboliske partielle differentiaalligninger af 2. orden blive behandlet i kapitel 2.

Formålet med kapitel 3 er at bevise vigtige resultater vedrørende opførslen af under- og overløsninger til paraboliske differentiaalligninger. Disse benyttes i kapitel 4, hvor nogle konkrete ikke-lineære diffusions- og reaktionsligninger betragtes – deriblandt systemet ovenfor med det ikke-lineære led u^2 .

I kapitel 5 behandles artiklen „On the Global Existence of Solutions of a Reaction-Diffusion Equation with Exponential Nonlinearity“ af A. Barabanova. Heri betragtes et system af to diffusions- og reaktionsligninger med homogen Dirichlet randbetingelse, og hvor det ikke-lineære led kan vokse eksponentielt. Det vises, at trods den eksponentielle vækst eksisterer globalt definerede løsninger, som tilmed er kontinuerede til ethvert positivt tidspunkt.

Dette er et interessant resultat i lyset af, at potenserne α, β, σ og ω ovenfor kan være af endnu højere orden end to – og som eksemplet med u^2 illustrerer, giver denne potens allerede problemer i forhold til regulariteten af løsningerne.

Kapitel 1

Vektorfunktioner og -distributioner

Dette kapitel indeholder generel teori vedrørende vektorfunktioner og -distributioner, som tager værdier i Banachrum. Til at starte med opsummeres nogle grundlæggende funktionsrum.

Definition 1.0.1 (Glat funktion)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben. Mængden $C^m(U)$ for $m \in \mathbb{N}$ består af de funktioner, hvis partielle afledte op til og med orden m eksisterer og er kontinuerte på U . Derudover er

$$C^\infty(U) := \bigcap_{m=1}^{\infty} C^m(U),$$

og elementerne heri kaldes glatte.

Lad $k \in \mathbb{N}_0$ og $1 \leq p \leq \infty$, da er

$$C_{L_p}^k(U) := \{u \in C^k(U) \mid \partial^\alpha u \in L_p(U) \text{ for } |\alpha| \leq k\},$$

$$C_{L_p}^\infty(U) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{L_p}^k(U).$$

Gennem hele specialet vil mængden U som oftest antages at være glat:

Definition 1.0.2 (Glat mængde)

En åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er C^m for et ikke-negativt heltal $m \leq \infty$, hvis der for alle $x \in \partial U$ eksisterer en åben omegn V med en tilhørende C^m -diffeomorfi κ , så $\kappa : V \rightarrow B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ surjektivt, og

$$\begin{aligned}\kappa(x) &= 0, \\ \kappa(V \cap U) &= B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n, \\ \kappa(V \cap \partial U) &= B(0, 1) \cap \mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned}$$

Såfremt $m = \infty$, siges U at være glat.

1.1 FUNKTIONSRUM

I specialet betegner X' rummet af kontinuerte, lineære funktionaler på et topologisk vektorrum X , mens X^* er rummet af de kompleks konjugerede af slagsen. Det bemærkes, at der ved kompleks konjugering er en bijektiv korrespondance mellem de to rum.

Udover Borel målelighed findes også andre typer målelighed, og mange af de funktioner, som vil optræde i specialet, er stærkt målelige:

Definition 1.1.1 (Stærkt og svagt målelig)

Lad X være et Banachrum og $I \subseteq \mathbb{R}$ et interval. En funktion $\mathbf{s} : I \rightarrow X$ kaldes simpel, såfremt

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{E_i}(t) u_i \text{ for } t \in I,$$

hvor E_i er en målelig delmængde af I og $u_i \in X$ for $i = 1, \dots, m$.

En funktion $\mathbf{f} : I \rightarrow X$ er stærkt målelig, hvis der eksisterer en følge $\{\mathbf{s}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ af simple funktioner $\mathbf{s}_k : I \rightarrow X$, så

$$\mathbf{s}_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{f}(t) \text{ for n.a. } t \in I.$$

Funktionen $\mathbf{f}$ er svagt målelig, såfremt $t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), x^* \rangle := x^*(\mathbf{f}(t))$ er Borel målelig for ethvert $x^* \in X'$.

I henhold til [RS72, Proposition s. 116] er en stærkt målelig funktion også Borel målelig, og en Borel målelig funktion er svagt målelig. Såfremt X er et separabelt Banachrum, gælder yderligere, at svag målelighed medfører stærk målelighed jf. Pettis' sætning [RS72, Theorem IV.22 og note].

En række velkendte funktionsrum kan generaliseres til at inkludere vektorfunktioner:

Definition 1.1.2 (Specifikke funktionsrum og rum af distributioner)

Lad X være et Banachrum og $I \subseteq \mathbb{R}$ et interval.

1. Lebesguerummet $L^p(I; X)$ består af de stærkt målelige funktioner $\mathbf{u} : I \rightarrow X$, som opfylder, at

$$\|\mathbf{u}\|_{L_p(I; X)} := \left(\int_I \|\mathbf{u}(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

når $1 \leq p < \infty$, og for $p = \infty$, at

$$\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(I; X)} := \operatorname{ess.\sup}_{t \in I} \|\mathbf{u}(t)\|_X < \infty.$$

2. Sobolevrummet $W^{1,p}(I; X)$ består af de funktioner $\mathbf{u} \in L_p(I; X)$, for hvilke $\mathbf{u}' \in L_p(I; X)$. Normen herpå er

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(I; X)} := \begin{cases} \left(\int_I (\|\mathbf{u}(t)\|_X^p + \|\mathbf{u}'(t)\|_X^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{for } 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess.\sup}_{t \in I} (\|\mathbf{u}(t)\|_X + \|\mathbf{u}'(t)\|_X) & \text{for } p = \infty. \end{cases}$$

3. Rummet $C(I; X)$ indeholder de kontinuerte funktioner $\mathbf{u} : I \rightarrow X$, for hvilke

$$\|\mathbf{u}\|_{C(I; X)} := \max_{t \in I} \|\mathbf{u}(t)\|_X < \infty.$$

4. Rummet $\mathcal{D}'(I^\circ; X)$ består af de lineære afbildninger $C_0^\infty(I^\circ) \rightarrow X$, som er kontinuerte mht. limes Fréchet topologien på $C_0^\infty(I^\circ)$.

Definitionerne bygger på [Eva98] – den præcise betydning af $\mathbf{u}'$ vil blive belyst nedenfor. En anden notation for $W^{1,2}(I; X)$ er $H^1(I; X)$, eftersom rummet for $p = 2$ er et Hilbertrum. Når parametrene til $L_p(I; X)$ er velkendte ud fra konteksten, skrives $\|\mathbf{u}\|_{L_p(I; X)}$ af og til blot $\|\mathbf{u}\|_p$ for $1 \leq p \leq \infty$, og undertiden noteres eksempelvis $L_p([0, T]; X)$ som $L_p(0, T; X)$.

For et åbent interval $I \subseteq \mathbb{R}$ vælges som topologi på $\mathcal{D}'(I; X)$ den, der for $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(I; X)$, $\varphi \in C_0^\infty(I)$ og $x^* \in X'$ induceres af

$$p(\mathbf{u}) := |\langle \mathbf{u}(\varphi), x^* \rangle|. \quad (1.1)$$

Grundet lineariteten af x^* er dette en familie af seminormer. Den er separerende, idet der for $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ i $\mathcal{D}'(I; X)$ eksisterer en seminorm $\tilde{p}$, så $\tilde{p}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \neq 0$. Ellers haves for alle seminormer, at

$$0 = p(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = |\langle (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(\varphi), x^* \rangle|,$$

hvormed $\langle (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(\varphi), x^* \rangle = 0$ for $x^* \in X'$, så ifølge [Ped95, Corollary 2.3.4], der er et korollar til Hahn-Banachs udvidelsessætning, er $\mathbf{u}_1(\varphi) = \mathbf{u}_2(\varphi)$ for $\varphi \in C_0^\infty(I)$, hvorefter det sluttet, at $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Derved er $D'(I; X)$ i henhold til [Ped95, afs. 2.4.2] et topologisk vektorrum, og topologien bestemt ved seminormerne i (1.1) er en Hausdorff-topologi.

Den distributionsafledte af $\mathbf{u}$ er for $\varphi \in C_0^\infty(I)$ defineret ved

$$(\partial_t \mathbf{u})(\varphi) := -\mathbf{u} \left(\frac{d}{dt} \varphi \right). \quad (1.2)$$

Valget af topologi på $D'(I; X)$ er hensigtsmæssig, eftersom det derved let vises, at $\partial_t : D'(I; X) \rightarrow D'(I; X)$ er kontinuert. For et konvergent net $\mathbf{u}_\lambda \rightarrow \mathbf{u}$ i $D'(I; X)$ er $p(\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}) \rightarrow 0$ for alle seminormer, så

$$p(\partial_t \mathbf{u}_\lambda - \partial_t \mathbf{u}) = |\langle (\partial_t (\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}))(\varphi), x^* \rangle| = |\langle (\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u})(-\varphi'), x^* \rangle| \rightarrow 0,$$

hvilket giver, at $\partial_t \mathbf{u}_\lambda \rightarrow \partial_t \mathbf{u}$. Derudover gælder, at såfremt X er kontinuert indlejret i et større Banachrum Y , er $D'(I; X) \subseteq D'(I; Y)$, eftersom $\mathbf{u} \in D'(I; X)$ i så fald også vil være kontinuert mht. normen på Y .

For et Hilbertrum H kan der bekvemt indføres et indre produkt på $L_2(I; H')$ ved at føre det tilbage til det indre produkt på H . Riesz's repræsentationssætning [Joh09, Theorem 4.4.4], der er baseret på Projektionssætningen [Ped00, Theorem 4.13], garanterer eksistensen af en konjugeret lineær, bijektiv isometri $\Phi : H \rightarrow H'$, så for $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in L_2(I; H')$ defineres

$$(\mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_2)_{L_2(I; H')} := \int_I (\mathbf{g}_1(t) | \mathbf{g}_2(t))_{H'} dt := \int_I (\Phi^{-1} \mathbf{g}_1(t) | \Phi^{-1} \mathbf{g}_2(t))_H dt. \quad (1.3)$$

1.2 BOCHNERS IDENTITET

I dette afsnit vises, hvorledes integralet af en funktion $\mathbf{f} \in L_1(I; X)$ nemt kan defineres, når X er et refleksivt Banachrum, dvs. $X = X''$. For $x^* \in X'$ er afbildningen

$$x^* \mapsto \int_I \langle \mathbf{f}(t), x^* \rangle dt \quad (1.4)$$

lineær og kontinuert på X' , idet integralet først og fremmest er veldefineret. Det skyldes, at afbildningen $t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), x^* \rangle$ for $t \in I$ er Borel målelig, eftersom $\mathbf{f}$ er svagt målelig, og tilhørsforholdet $\mathbf{f} \in L_1(I; X)$ giver, at

$$\int_I |\langle \mathbf{f}(t), x^* \rangle| dt \leq \int_I \|x^*\|_{X'} \|\mathbf{f}(t)\|_X dt = \|x^*\|_{X'} \int_I \|\mathbf{f}(t)\|_X dt < \infty. \quad (1.5)$$

Lineariteten mht. x^* er en konsekvens af, at integration er en lineær operation, mens begrænsetheden – og dermed kontinuiteten – fås af (1.5).

Af ovenstående sluttet, at (1.4) tilhører X'' , hvorved der eksisterer $x \in X'' = X$, så

$$\langle x, x^* \rangle = \int_I \langle \mathbf{f}(t), x^* \rangle dt \text{ for } x^* \in X'. \quad (1.6)$$

Elementet x er entydigt bestemt ud fra $\mathbf{f}$, hvilket følger ved at antage, at x og $\tilde{x}$ begge opfylder (1.6). Således er $\langle x - \tilde{x}, x^* \rangle = 0$ for $x^* \in X'$, hvormed $x - \tilde{x} = 0$.

Definition 1.2.1 (Integral af funktion med værdier i Banachrum)

Lad X være et refleksivt Banachrum og $I \subseteq \mathbb{R}$ et interval. Integralet af en funktion $\mathbf{f} \in L_1(I; X)$ defineres ved

$$\int_I \mathbf{f}(t) dt = x,$$

hvor $x \in X$ er det entydigt bestemte element, som opfylder (1.6).

Substitution af x i (1.6) med integralet af $\mathbf{f}$ resulterer i Bochners identitet:

$$\left\langle \int_I \mathbf{f}(t) dt, x^* \right\rangle = \int_I \langle \mathbf{f}(t), x^* \rangle dt \text{ for } x^* \in X'.$$

Ved at kompleks konjugere begge sider af Bochners identitet og føre konjugeringen helt ind på funktionalet, fremgår det, at identiteten også gælder for kontinuerte, konjugerede lineære funktionaler. Derudover kan den trivielt udvides til at gælde for åbne mængder $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$, hvor $k \in \mathbb{N}$, frem for intervallet I .

Det bemærkes, at fra (1.6) fås straks uligheden

$$\left\| \int_I \mathbf{f}(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|\mathbf{f}(t)\|_X dt \quad (1.7)$$

ved at vælge $x^* \in X'$, så $\langle x, x^* \rangle = \|x\|_X$, hvilket er muligt jf. [Ped95, Corollary 2.3.4], såfremt $x \neq 0$.

Beviset for det næste resultat illustrerer, hvorledes Bochners identitet ofte anvendes.

Lemma 1.2.2

Lad X være et Banachrum og $T > 0$. Lebesguerummet $L_2(0, T; X)$ udstyret med den svage topologi er kontinuert indlejret i $D'(0, T; X)$ udstyret med topologien induceret af seminormerne i (1.1).

Bevis:

Indlejringen $L_2(0, T; X) \hookrightarrow D'(0, T; X)$ er givet ved, at $\mathbf{f} \in L_2(0, T; X)$ føres over i $\langle \mathbf{f}, \varphi \rangle := \int_0^T \varphi(t) \mathbf{f}(t) dt$ for $\varphi \in C_0^\infty([0, T[)$. Såfremt der for alle $\varphi \in C_0^\infty([0, T[)$ gælder, at $\langle \mathbf{f}, \varphi \rangle = 0$, kan ved hjælp af variationsregningens grundlemma [Gru08, Lemma 3.2] – som overføres til vektorfunktioner via Bochners identitet – vises, at $\mathbf{f}(t) = 0$ for n.a. $t \in]0, T[$. Dermed er afbildningen $\mathbf{f} \mapsto \langle \mathbf{f}, \cdot \rangle$ injektiv.

For $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ og $x^* \in X'$ er afbildningen $\mathbf{f} \mapsto \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \varphi(t)x^* \rangle dt$ et kontinuert, lineært funktional på $L_2(0, T; X)$, da

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \varphi(t)x^* \rangle dt \right| &\leq \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_X \|\varphi(t)x^*\|_{X'} dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\varphi(t)x^*\|_{X'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nu betragtes en svagt konvergent følge $\mathbf{u}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}$ i $L_2(0, T; X)$. For en vilkårlig seminorm på $D'(0, T; X)$ findes i henhold til definitionen af svag konvergens i et Banachrum, at

$$\begin{aligned} p(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}) &= |\langle (\mathbf{u}_m - \mathbf{u})(\varphi), x^* \rangle| = \left| \left\langle \int_0^T \varphi(t) (\mathbf{u}_m(t) - \mathbf{u}(t)) dt, x^* \right\rangle \right| \\ &= \left| \int_0^T \langle \mathbf{u}_m(t) - \mathbf{u}(t), \varphi(t)x^* \rangle dt \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

hvormed indlejringen er kontinuert. $\square$

1.3 DIFFERENTIABILITET

Nedenfor gengives definitionen i [Eva98] af den svage afledte af en vektorfunktion.

Definition 1.3.1 (Svag afledt)

Lad X være et Banachrum og $I \subseteq \mathbb{R}$ et åbent interval, samt lad $\mathbf{u} \in L_1(I; X)$. En funktion $\mathbf{v} \in L_1(I; X)$ kaldes den svage afledte af $\mathbf{u}$, hvilket noteres $\mathbf{u}' = \mathbf{v}$, såfremt

$$\int_I \varphi'(t) \mathbf{u}(t) dt = - \int_I \varphi(t) \mathbf{v}(t) dt \text{ for } \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Den svage afledte er i lyset af vektordistributioner et overflødigt begreb, eftersom den svage afledte $\mathbf{v}$ af $\mathbf{u} \in L_1(I; X)$ faktisk blot er den distributionsafledte heraf. Først og fremmest er den distributionsafledte i dette tilfælde veldefineret, idet $L_1(I; X) \subseteq \mathcal{D}'(I; X)$. Af (1.2) findes for $\varphi \in C_0^\infty(I)$, at

$$-\langle \mathbf{v}, \varphi \rangle = - \int_I \mathbf{v}(t) \varphi(t) dt = \int_I \mathbf{u}(t) \varphi'(t) dt = \langle \mathbf{u}, \varphi' \rangle = -\langle \mathbf{u}', \varphi \rangle,$$

så $\mathbf{v}$ er lig $\mathbf{u}'$ i $D'(I; X)$.

Vektorfunktioner kan naturligvis også være klassisk differentiable:

Definition 1.3.2 (Differentiabilitet)

Lad X være et normeret rum og $I \subseteq \mathbb{R}$ være åben. Funktionen $\mathbf{f} : I \rightarrow X$ er differentiable i $t \in I$, såfremt der eksisterer $a \in X$, så

$$\mathbf{f}(t-s) - \mathbf{f}(t) = s \cdot a + o(s),$$

hvor $\left\| \frac{1}{s}o(s) \right\|_X \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$. I så fald er $\mathbf{f}'(t) := a$.

Eksempelvis er det indre produkt af differentiable vektorfunktioner differentiable:

Lemma 1.3.3

Lad H være et Hilbertrum og $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow H$ være differentiable funktioner. Da er $t \mapsto (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t))_H$ differentiable for $t \in \mathbb{R}$ med

$$(\mathbf{f}|\mathbf{g})'_H = (\mathbf{f}'|\mathbf{g})_H + (\mathbf{f}|\mathbf{g}')_H. \quad (1.8)$$

Bevis:

Differentiabiliteten af $\mathbf{f}$ og $\mathbf{g}$ giver, at

$$\begin{aligned} & (\mathbf{f}(t-s)|\mathbf{g}(t-s))_H - (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t))_H \\ &= (\mathbf{f}(t) + s\mathbf{f}'(t) + o(s)|\mathbf{g}(t) + s\mathbf{g}'(t) + o(s))_H - (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t))_H \\ &= s((\mathbf{f}'(t)|\mathbf{g}(t))_H + (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}'(t))_H) + (\mathbf{f}(t)|o(s))_H + s^2(\mathbf{f}'(t)|\mathbf{g}'(t))_H + \\ & \quad s(\mathbf{f}'(t)|o(s))_H + (o(s)|\mathbf{g}(t))_H + s(o(s)|\mathbf{g}'(t))_H + (o(s)|o(s))_H \\ &= s((\mathbf{f}'(t)|\mathbf{g}(t))_H + (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}'(t))_H) + o(s). \end{aligned}$$

Det bemærkes, at $o(s)$ benyttes om forskellige størrelser, blot de besidder den egenskab, at $\left\| \frac{1}{s}o(s) \right\|_H \rightarrow 0$ for $s \rightarrow 0$. Den sidste lighed skyldes kontinuiteten af det indre produkt, samt at leddet $s^2(\mathbf{f}'(t)|\mathbf{g}'(t))_H$ indeholder faktoren s opløftet i en højere potens end en. Ved at sammenholde med definition 1.3.2 fås (1.8). $\square$

1.4 FOLDNING

Først genopfriskes to uligheder, som vil blive benyttet ofte. For $a, b \in \mathbb{R}$ er

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad (1.9)$$

og ved kvadrering ses, at

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|. \quad (1.10)$$

Det næste resultat behandler vigtige egenskaber ved en bestemt type foldninger:

Lemma 1.4.1

Lad X være et refleksivt og separabelt Banachrum. For $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ og $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}; X)$ med kompakt støtte, er $h * \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}; X)$ med

$$\|h * \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}; X)} \leq \|h\|_{L_1(\mathbb{R})} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}; X)} \quad (1.11)$$

samt i $C^\infty(\mathbb{R}; X)$. Yderligere er $(h * \mathbf{u})' = h * (\mathbf{u}')$ i distributionsforstand, når $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}; X)$.

Bevis:

Idet støtten af $\mathbf{u}$ pr. antagelse er kompakt, eksisterer $a, b \in \mathbb{R}$, så $\text{supp}(\mathbf{u}) \subseteq [a, b]$. Eftersom $]t - b, t - a[$ har endeligt mål, er $L_2(t - b, t - a; X) \subseteq L_1(t - b, t - a; X)$. Dermed haves, at

$$\int_{t-b}^{t-a} \|h(s)\mathbf{u}(t-s)\|_X \, ds = \int_{t-b}^{t-a} |h(s)| \|\mathbf{u}(t-s)\|_X \, ds < \infty,$$

og integranden er stærkt målelig, idet h er kontinuert, mens $\mathbf{u}$ pr. antagelse er stærkt målelig. Således er foldningen

$$\mathbf{f}(t) := h * \mathbf{u}(t) = \int_{t-b}^{t-a} h(s)\mathbf{u}(t-s) \, ds \quad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

i henhold til definition 1.2.1 veldefineret.

Foldningens tilhørsforhold til $L_2(\mathbb{R}; X)$ beror på Fubinis sætning, der giver, at $\mathbf{f}$ er svagt målelig, hvormed Pettis' sætning giver den stærke målelighed. Derudover gælder ifølge [Fol84, (8.7)] for $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ og $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, at $f * g \in L_2(\mathbb{R})$ med $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$, så af (1.7) fås, at

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{\mathbb{R}} h(s)\mathbf{u}(t-s) \, ds \right\|_X^2 \, dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(s)| \|\mathbf{u}(t-s)\|_X \, ds \right)^2 \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (|h| * \|\mathbf{u}\|_X(t))^2 \, dt \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |h(t)| \, dt \right)^2 \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{u}(t)\|_X^2 \, dt < \infty, \end{aligned}$$

hvoraf (1.11) slutes direkte.

For at bevise den næste del af lemmaet skiftes variable vha. Bochners identitet, hvorved

$$\mathbf{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)\mathbf{u}(s) \, ds.$$

Den afledte af integranden har en integrabel majorant, idet

$$\|h'(t-s)\mathbf{u}(s)\|_X \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |h'(t)| \|\mathbf{u}(s)\|_X \mathbf{1}_{[a,b]}(s).$$

Ved hjælp af Pettis' sætning kan Lebesgues Majorantsætning generaliseres til at omhandle vektorfunktioner, hvilket giver, at $\mathbf{f}$ er differentiabel i henhold til definition 1.3.2 med

$$\mathbf{f}'(t) = \int_{\mathbb{R}} h'(t-s)\mathbf{u}(s) \, ds = h' * \mathbf{u}(t).$$

Idet h' er en ny testfunktion fås af ovenstående, at $\mathbf{f}'$ er differentiabel, hvorved $\mathbf{f}$ er i $C^1(\mathbb{R}; X)$; endda i $C^\infty(\mathbb{R}; X)$.

Den sidste del af lemmaet omhandler den distributionsafledte af $\mathbf{f}$, der eksisterer, eftersom $\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}; X) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$. Undervejs i de følgende udregninger ombyttes integrationsordnen to gange, hvilket er muligt, idet udnyttelse af Bochners identitet fører integranden over i det skalære tilfælde, hvor Fubinis sætning kan anvendes. Yderligere benyttes (1.2) med både $\mathbf{f}$ og $\mathbf{u}$, samt at $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}; X)$. Således gælder for $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}', \psi \rangle &= \langle \mathbf{f}, -\psi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(s)\mathbf{u}(t-s)\psi'(t) \, ds \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(s)\mathbf{u}'(t-s)\psi(t) \, dt \, ds = \int_{\mathbb{R}} h * (\mathbf{u}')(t)\psi(t) \, dt = \langle h * (\mathbf{u}'), \psi \rangle, \end{aligned}$$

hvorved $\mathbf{f}' = h * (\mathbf{u}')$ i distributionsforstand. $\square$

I lemma 1.4.1 indsættes nu en approksimativ enhed:

Lemma 1.4.2

Der eksisterer en funktion $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, som opfylder, at

$$h \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \, dx = 1 \quad \text{og} \quad \text{supp}(h) \subseteq \overline{B}(0, 1).$$

For $k \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}^n$ indføres $h_k(x) = k^n h(kx)$. Lad H være et separabelt hilbert-rum. For $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}; H)$ med kompakt støtte gælder, at

$$\|h_k * \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Bevis:

Eksistensen af funktionen h følger af [Gru08, Lemma 2.1]. Af lemma 1.4.1 fås, at $h_k * \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}; H)$, og konvergens er en konsekvens af en velkendt generalisering til funktioner, der tager værdier i Hilbertrum. $\square$

1.5 DISTRIBUTIONSADFLEDTE I LEBESGUERUM

Dette afsnit indledes med en sætning, der behandler integrable funktioner, som tager værdier i et Banachrum; mere præcist karakteriseres $W^{1,1}(0, T; X)$. Sætningen er baseret på [Tem84, Lemma 1.1], men i kilden bevises kun, at (ii) $\Rightarrow$ (i).

Sætning 1.5.1

Lad X være et refleksivt Banachrum og $\mathbf{u}, \mathbf{g} \in L_1(0, T; X)$, hvor $T > 0$. Da er følgende udsagn ækvivalente:

(i) Der eksisterer $\xi \in X$, så der for n.a. $t \in]0, T[$ haves, at

$$\mathbf{u}(t) = \xi + \int_0^t \mathbf{g}(s) \, ds.$$

(ii) For $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ gælder, at

$$-\int_0^T \mathbf{u}(t) \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \mathbf{g}(t) \varphi(t) \, dt. \quad (1.12)$$

(iii) For $x^* \in X'$ er

$$\partial_t \langle \mathbf{u}, x^* \rangle = \langle \mathbf{g}, x^* \rangle \text{ i } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

I så fald eksisterer en kontinuert funktion $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow X$, så $\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$ n.o.

Det bemærkes, at punkt (ii) i henhold til (1.2) giver, at den distributionsafledte af $\mathbf{u}$ er $\mathbf{g}$.

Bevis:

Ved punkt (i) og (ii) er integralerne veldefinerede, idet $\mathbf{u}, \mathbf{g} \in L_1(0, T; X)$. I forbindelse med punkt (iii) eksisterer den distributionsafledte af $t \mapsto \langle \mathbf{u}(t), x^* \rangle$ på $]0, T[$ for $x^* \in X'$, eftersom $\mathbf{u}$ pr. antagelse er stærkt målelig og dermed svagt målelig, så $t \mapsto \langle \mathbf{u}(t), x^* \rangle$ er Borel målelig. Derudover er

$$\int_0^T |\langle \mathbf{u}(t), x^* \rangle| \, dt \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X \|x^*\|_{X'} \, dt = \|x^*\|_{X'} \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X \, dt < \infty,$$

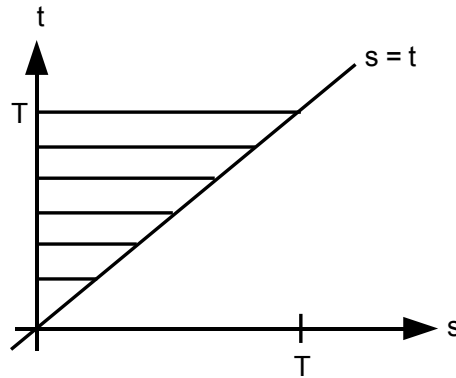
så $\langle \mathbf{u}, x^* \rangle \in L_1(0, T) \subseteq \mathcal{D}'(]0, T[)$. Analogt fås, at $\langle \mathbf{g}, x^* \rangle \in L_1(0, T)$.

Først bevises, at (i) $\Rightarrow$ (ii). Idet $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ har kompakt støtte på $]0, T[$, haves for $x^* \in X'$, at

$$\left\langle \int_0^T \varphi'(t) \xi \, dt, x^* \right\rangle = \int_0^T \varphi'(t) \langle \xi, x^* \rangle \, dt = 0,$$

hvormed $\int_0^T \varphi'(t) \xi \, dt = 0$. Indikatorfunktionen for den skraverede trekant i figur 1.1 betegnes $\mathbf{1}_\Delta$, hvorved (1.12) fås således:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{u}(t) \varphi'(t) \, dt &= \int_0^T \int_0^t \mathbf{g}(s) \varphi'(t) \, ds \, dt = \int_0^T \int_0^T \mathbf{1}_\Delta(s, t) \mathbf{g}(s) \varphi'(t) \, dt \, ds \\ &= \int_0^T \int_s^T \mathbf{g}(s) \varphi'(t) \, dt \, ds = - \int_0^T \mathbf{g}(s) \varphi(s) \, ds. \end{aligned}$$



Figur 1.1 Trekanten, som $\mathbf{1}_{\Delta}$ angiver indikatorfunktionen for.

Beviset for (i) $\Rightarrow$ (iii) følger ved at tage $x^* \in X'$ og benytte Bochners identitet, samt udregninger analoge til dem ovenfor med $\mathbf{1}_{\Delta}$, så

$$\partial_t \langle \mathbf{u}, x^* \rangle = \partial_t \langle \xi, x^* \rangle + \partial_t \int_0^t \langle \mathbf{g}(s), x^* \rangle ds = \langle \mathbf{g}, x^* \rangle.$$

For at bevise (iii) $\Rightarrow$ (ii) udnyttes, at $\langle \mathbf{u}, x^* \rangle, \langle \mathbf{g}, x^* \rangle \in L_1(0, T)$ jf. starten af beviset, så for $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ er

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}(t), x^* \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \partial_t \langle \mathbf{u}(t), x^* \rangle \varphi(t) dt = - \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), x^* \rangle \varphi'(t) dt,$$

hvormed Bochners identitet giver punkt (ii).

Tilbage er at argumentere for, at (ii) $\Rightarrow$ (i). Idet $\mathbf{g} \in L_1(0, T; X)$, er det for $t \in]0, T[$ meningsfyldt at indføre

$$\mathbf{u}_0(t) = \int_0^T \mathbf{1}_{[0, t[}(s) \mathbf{g}(s) ds,$$

der i henhold til generaliseringen af Lebesgues Majorantsætning tilhører $C([0, T]; X) \subseteq L_1(0, T; X)$. Således opfylder $\mathbf{u}_0$ sætningens antagelser samt punkt (i) for $\xi = 0$, og eftersom det allerede er bevist, at (i) $\Rightarrow$ (ii) fås for $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$, at

$$- \int_0^T \mathbf{u}_0(t) \varphi'(t) dt = \int_0^T \mathbf{g}(t) \varphi(t) dt.$$

Ved brug af punkt (ii) med $\mathbf{u}$ fås derved for $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, at

$$\int_0^T \mathbf{v}(t) \varphi'(t) dt = 0. \quad (1.13)$$

Herunder vises, at $\mathbf{v}$ er konstant n.o., hvormed $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}_0$ opfylder punkt (i).

Først vælges $\varphi_0 \in C_0^\infty(]0, T[)$, så $\int_0^T \varphi_0(t) dt = 1$. Enhver funktion $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ kan skrives

$$\varphi = \lambda \varphi_0 + \psi', \text{ hvor } \lambda \in \mathbb{C} \text{ og } \psi \in C_0^\infty(]0, T[), \quad (1.14)$$

idet integration viser, at eneste mulighed for λ og ψ er

$$\lambda = \int_0^T \varphi(t) dt \quad \text{og} \quad \psi(t) = \int_0^t (\varphi(s) - \lambda \varphi_0(s)) ds.$$

Omvendt fås, at $\psi \in C^\infty([0, T])$, eftersom dette er tilfældet for integranden, og $\text{supp}(\psi) \cap \{0\} = \emptyset$, da φ og φ_0 er nul på en tilpas lille omegn af origo. For $t > \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\varphi_0)$ giver valget af φ_0 , at

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds - \lambda \int_0^t \varphi_0(s) ds = \lambda - \lambda \cdot 1 = 0,$$

så samlet set er $\psi \in C_0^\infty([0, T])$.

Herefter sættes $\xi = \int_0^T \mathbf{v}(s) \varphi_0(s) ds$, der er veldefineret, idet $\mathbf{v} \in L_1(0, T; X)$. Af (1.14) og (1.13), der gælder for alle testfunktioner på $]0, T[$, kan sluttes, at

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbf{v}(t) - \xi) \varphi(t) dt &= \int_0^T \mathbf{v}(t) (\lambda \varphi_0(t) + \psi'(t)) dt - \lambda \int_0^T \mathbf{v}(s) \varphi_0(s) ds \\ &= \int_0^T \mathbf{v}(t) \psi'(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Ved at anvende variationsregningens grundlemma overført til vektorfunktioner følger, at $\mathbf{v}(t) = \xi$ for n.a. $t \in]0, T[$.

I forbindelse med den afsluttende bemærkning i sætningen haves, at $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}_0$, hvor $\mathbf{v}$ n.o. er konstant, og $\mathbf{u}_0$ er kontinuert, så $\mathbf{u}$ er n.o. lig en kontinuert funktion. $\square$

Hilbertrum og deres dualrum spiller sammen på følgende måde:

Lemma 1.5.2 [Gru08, Lemma 12.16]

Lad V og H være Hilbertrum, hvor $V \subseteq H$ algebraisk, topologisk og tæt. Da er $H \subseteq V'$ algebraisk og topologisk.

Idéen i beviset er at identificere et element $h \in H$ med det funktional $\Lambda_h \in V'$, der er givet ved $\langle \Lambda_h, v \rangle = (v|h)_H$ for $v \in V$.

For et positivt T og et Hilbertrum H , hvis elementer kan kompleks konjugeres, og hvor et element har samme norm som dets kompleks konjugerede, er $\int_0^T \langle \mathbf{v}^*(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle dt$ en sesquilinear form på $L_2(0, T; H') \times L_2(0, T; H)$. Den er begrænset, idet

$$\left| \int_0^T \langle \mathbf{v}^*(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle dt \right| \leq \int_0^T \|\mathbf{v}^*(t)\|_{H'} \|\mathbf{v}(t)\|_H dt \leq \|\mathbf{v}^*\|_{L_2(0, T; H')} \|\mathbf{v}\|_{L_2(0, T; H)},$$

og kontinuert, hvilket vises på samme måde som kontinuiteten af skalarproduktet.

Nu generaliseres [Eva98, Theorem 3, s. 287], som kun behandler tilfældet $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$, og hvor funktionerne afbilder over i mindre generelle rum.

Sætning 1.5.3

Lad V og H være separable Hilbertrum, hvor $V \subseteq H$ algebraisk, topologisk og tæt. Derudover antages elementerne i V, V' og H at kunne kompleks konjugeres, og at et element har samme norm som dets kompleks konjugerede.

Lad $T > 0$ og $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L_2(0, T; V)$ med $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in L_2(0, T; V')$.

- (i) Da er $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C([0, T]; H)$ og $(\mathbf{u}|\mathbf{v})_H \in C([0, T])$ – muligvis efter en omdefinering af funktionerne på en nulmængde.
- (ii) Om den distributionsafledte af det indre produkt gælder, at

$$\partial_t (\mathbf{u}|\mathbf{v})_H = \langle \mathbf{u}', \overline{\mathbf{v}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{v}'}, \mathbf{u} \rangle \text{ i } \mathcal{D}'([0, T]).$$

- (iii) For en konstant K , der kun afhænger af T , er

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}(t)\|_H \leq K \left(\|\mathbf{u}'\|_{L_2(0, T; V')} + \|\mathbf{u}\|_{L_2(0, T; V)} \right).$$

Bevis:

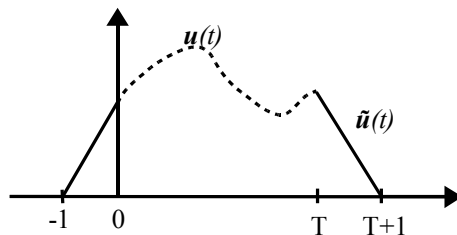
Først bevises punkt (i). Pr. antagelse er $V \subseteq H$ topologisk, så af lemma 1.5.2 have

$$L_2(0, T; V) \subseteq L_2(0, T; V') \subseteq L_1(0, T; V').$$

Da $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in L_2(0, T; V')$ pr. antagelse, fås heraf, at punkt (ii) i sætning 1.5.1 er opfyldt, hvormed der er repræsentanter $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C([0, T]; V')$.

Nu forlænges funktionen $\mathbf{u}$ på kontinuert måde til hele den reelle akse jf. figur 1.2:

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) := \begin{cases} 0 & \text{for } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T+1] \\ \mathbf{u}(0)t + \mathbf{u}(0) & \text{for } t \in [-1, 0] \\ \mathbf{u}(t) & \text{for } t \in [0, T] \\ -\mathbf{u}(T)t + \mathbf{u}(T)(T+1) & \text{for } t \in [T, T+1]. \end{cases}$$



Figur 1.2 Forlængelse af $\mathbf{u}$ til $\tilde{\mathbf{u}}$.

Denne forlængelse er veldefineret, eftersom $\mathbf{u}$ er kontinuert, således $\mathbf{u}(0)$ og $\mathbf{u}(T)$ er veldefinerede. Desuden er $\tilde{\mathbf{u}} \in L_2(\mathbb{R}; V')$, eftersom $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ på $[0, T]$, og uden for dette interval aftager den lineært for til sidst at blive nul. Funktionen tager værdier i V' , idet der eksempelvis gælder, at $\tilde{\mathbf{u}}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}(0)$, og $\mathbf{u}(0) \in V'$.

Yderligere er $\tilde{\mathbf{u}}' \in L_2(\mathbb{R}; V')$, da $\tilde{\mathbf{u}}' = \mathbf{u}'$ på $]0, T[$, og $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V')$ – og for den øvrige del af den reelle akse indses det ved at opdele den i passende intervaller, f.eks.:

$$\int_{-\infty}^0 \|\tilde{\mathbf{u}}'(t)\|_{V'}^2 dt = \|\mathbf{u}(0)\|_{V'}^2 < \infty.$$

I alt fås, at $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\mathbb{R}; V')$. På tilsvarende vis defineres funktionen $\tilde{\mathbf{v}}$ ud fra $\mathbf{v}$.

Nu vælges $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, og for $t \in \mathbb{R}$ indføres foldningen

$$\mathbf{f}(t) = h * \tilde{\mathbf{u}}(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s) \tilde{\mathbf{u}}(t-s) ds = \int_{\mathbb{R}} h(t-s) \tilde{\mathbf{u}}(s) ds,$$

der i henhold til lemma 1.4.1 er veldefineret og tilhører $L_2(\mathbb{R}; V')$. Funktionen $\mathbf{g}$ indføres analogt med $\tilde{\mathbf{v}}$ frem for $\tilde{\mathbf{u}}$.

Eftersom $L_2(\mathbb{R}; V) \subseteq L_2(\mathbb{R}; H)$, er $t \mapsto (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t))_H$ for $t \in \mathbb{R}$ meningsfyldt.¹ Lemma 1.4.1 giver, at $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(\mathbb{R}; V')$, hvormed funktionen ifølge (1.8) tilhører $C^1(\mathbb{R})$. Da $\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \in V$ og $\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}'(t) \in H \subseteq V'$ jf. lemma 1.5.2, fås af lemma 1.4.1, at

$$(\mathbf{f}|\mathbf{g})'_H = (\mathbf{f}'|\mathbf{g})_H + (\mathbf{f}|\mathbf{g}')_H = \langle \mathbf{f}', \overline{\mathbf{g}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{g}'}, \mathbf{f} \rangle = \langle h * (\tilde{\mathbf{u}}'), \overline{\mathbf{g}} \rangle + \langle \overline{h * (\tilde{\mathbf{v}}')}, \mathbf{f} \rangle, \quad (1.15)$$

samt kontinuiteten af højresiden, idet $\tilde{\mathbf{u}}' \in L_2(\mathbb{R}; V')$. Ved integration over det kompakte interval $[s, t]$ for $0 < s \leq t < T$ giver Analysens Hovedsætning dermed, at

$$\begin{aligned} & (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t))_H - (\mathbf{f}(s)|\mathbf{g}(s))_H \\ &= \int_s^t \left(\langle h * (\tilde{\mathbf{u}}')(\tau), \overline{\mathbf{g}(\tau)} \rangle + \langle \overline{h * (\tilde{\mathbf{v}}')(\tau)}, \mathbf{f}(\tau) \rangle \right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nu indføres $\mathbf{f}_{h_k} = h_k * \tilde{\mathbf{u}}$ for funktionsfølgen $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ fra lemma 1.4.2, hvormed

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{f}_{h_k}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_V^2 dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{f}_{h_k}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_V^2 dt \\ &= \|\mathbf{f}_{h_k} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(\mathbb{R}; V)}^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

så $\mathbf{f}_{h_k}$ konvergerer mod $\tilde{\mathbf{u}}$ i $L_2(0, T; V)$. Ved at generalisere [BM01, Korollar 7.20] til funktioner, der tager værdier i Hilbertrum, følger, at der findes en delfølge $\{\mathbf{f}_{h_{k_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$, som konvergerer punktvis n.o. mod $\tilde{\mathbf{u}}$. Dermed eksisterer $s \in]0, T[$, for hvilket

$$\|\mathbf{f}_{h_{k_m}}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)\|_V \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

For simpelhedens skyld antages i det følgende, at

$$\|\mathbf{f}_{h_k}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)\|_V \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad (1.18)$$

og endda at der er punktvis konvergens n.o. af $\mathbf{f}_{h_k}$ mod $\tilde{\mathbf{u}}$.

¹Under udarbejdelsen af den endelige udgave af specialet opdagede jeg en fejl i beviset. Jeg havde argumenteret for, at $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L_2(\mathbb{R}; V)$, hvilket ikke er tilfældet. Indtil dette sted er fejlen til dels blevet rettet, men for at gøre beviset korrekt, skal $\mathbf{u}$ forlænges på en mere sofistikeret måde – nemlig ved spejling og multiplikation med en testfunktion, der opfylder visse krav. Eftersom fejlen blev opdaget så sent i forløbet, har jeg desværre ikke haft tid til at realisere dette.

Resultatet i (1.16) gælder også, såfremt $\mathbf{f}$ og $\mathbf{g}$ erstattes af hhv. $\mathbf{f}_{h_k} - \mathbf{f}_{h_l}$ og $\mathbf{g}_{h_k} - \mathbf{g}_{h_l}$ for $k, l \in \mathbb{N}$, idet $h_k - h_l$ er en testfunktion, og

$$\mathbf{f}_{h_k} - \mathbf{f}_{h_l} = h_k * \tilde{\mathbf{u}}(t) - h_l * \tilde{\mathbf{u}}(t) = (h_k - h_l) * \tilde{\mathbf{u}}(t).$$

Så ved at vælge $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$ fås, at

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{h_k}(t) - \mathbf{f}_{h_l}(t)\|_H^2 &= \|\mathbf{f}_{h_k}(s) - \mathbf{f}_{h_l}(s)\|_H^2 + \int_s^t \left(\langle \mathbf{f}_{h_k}'(\tau) - \mathbf{f}_{h_l}'(\tau), \overline{\mathbf{f}_{h_k}(\tau) - \mathbf{f}_{h_l}(\tau)} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \overline{\mathbf{f}_{h_k}'(\tau) - \mathbf{f}_{h_l}'(\tau)}, \mathbf{f}_{h_k}(\tau) - \mathbf{f}_{h_l}(\tau) \rangle \right) d\tau. \end{aligned}$$

Ved at tage numerisk værdi og bruge (1.9) følger heraf, at

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{f}_{h_k}(t) - \mathbf{f}_{h_l}(t)\|_H^2 \\ &\leq \|\mathbf{f}_{h_k}(s) - \mathbf{f}_{h_l}(s)\|_H^2 + \int_0^T \|\mathbf{f}_{h_k}'(\tau) - \mathbf{f}_{h_l}'(\tau)\|_{V'}^2 d\tau \\ &\quad + \int_0^T \|\mathbf{f}_{h_k}(\tau) - \mathbf{f}_{h_l}(\tau)\|_V^2 d\tau. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Heraf sluttes, at $\{\mathbf{f}_{h_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $C([0, T]; H)$, idet (1.18) og antagelsen om, at $V \subseteq H$ topologisk, giver, at $\{\mathbf{f}_{h_k}(s)\}_{k \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i H . Derudover følger af (1.17), at $\{\mathbf{f}_{h_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $L_2(0, T; V)$. Benyttes (1.17) på $\mathbf{f}_{h_k}' = h_k * (\tilde{\mathbf{u}}')$ følger ligeledes, at $\{\mathbf{f}_{h_k}'\}_{k \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $L_2(0, T; V')$. Således konkluderes, at højresiden af (1.19) kan gøres vilkårlig lille.

Rummet $C([0, T]; H)$ er fuldstændigt, idet H er fuldstændigt, så $\{\mathbf{f}_{h_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konverger heri – og grundet supremumsnormen medfører det punktvis konvergens. På grund af (1.18) følger dermed, at $\mathbf{u}$ har en kontinuert repræsentant, idet $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ på $]0, T[$ og $V \subseteq H$ topologisk. Efter muligvis at omdefinere $\mathbf{u}$ på en nulmængde haves dermed, at $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$. Analogt fås, at $\mathbf{v} \in C([0, T]; H)$, og da det indre produkt er kontinuert, er punkt (i) godtgjort.

Herunder bevises punkt (ii). Af (1.16) følger, at

$$\begin{aligned} &(\mathbf{f}_{h_k}(t) | \mathbf{g}_{h_k}(t))_H \\ &= (\mathbf{f}_{h_k}(s) | \mathbf{g}_{h_k}(s))_H + \int_s^t \left(\langle \mathbf{f}_{h_k}'(\tau), \overline{\mathbf{g}_{h_k}(\tau)} \rangle + \langle \overline{\mathbf{g}_{h_k}'(\tau)}, \mathbf{f}_{h_k}(\tau) \rangle \right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Af beviset for punkt (i) fås, at

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{h_k} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{u} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}_{h_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{v} \quad \text{i } H \text{ for n.a. } t \in [0, T], \\ \mathbf{f}_{h_k} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{u} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}_{h_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{v} \quad \text{i } L_2(0, T; V), \\ \mathbf{f}_{h_k}' &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{u}' \quad \text{og} \quad \mathbf{g}_{h_k}' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{v}' \quad \text{i } L_2(0, T; V'). \end{aligned}$$

Ved at udnytte konvergenserne, kontinuiteten i begge indgange af det indre produkt samt bemærkningen før sætningen følger af (1.20), at

$$(\mathbf{u}(t)|\mathbf{v}(t))_H \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{u}(s)|\mathbf{v}(s))_H + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_s^t \langle \mathbf{f}_{h_k}'(\tau), \overline{\mathbf{g}_{h_k}(\tau)} \rangle d\tau + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_s^t \langle \overline{\mathbf{g}_{h_k}'(\tau)}, \mathbf{f}_{h_k}(\tau) \rangle d\tau \\ &= (\mathbf{u}(s)|\mathbf{v}(s))_H + \int_s^t \langle \mathbf{u}'(\tau), \overline{\mathbf{v}(\tau)} \rangle d\tau + \int_s^t \langle \overline{\mathbf{v}'(\tau)}, \mathbf{u}(\tau) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Eftersom $t \mapsto (\mathbf{u}(t)|\mathbf{v}(t))_H$ er integrabel, følger dermed af sætning 1.5.1, at

$$\partial_t (\mathbf{u}|\mathbf{v})_H = \langle \mathbf{u}', \overline{\mathbf{v}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{v}'}, \mathbf{u} \rangle \text{ i } \mathcal{D}'([0, T]).$$

For at bevise punkt (iii) sættes $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$ i (1.21)-(1.22), så

$$\|\mathbf{u}(t)\|_H^2 - \|\mathbf{u}(s)\|_H^2 = \int_s^t \left(\langle \mathbf{u}'(\tau), \overline{\mathbf{u}(\tau)} \rangle + \langle \overline{\mathbf{u}'(\tau)}, \mathbf{u}(\tau) \rangle \right) d\tau. \quad (1.23)$$

Det andet led på venstresiden vurderes ved at udnytte, at $V \subseteq H$ topologisk, hvormed der eksisterer en konstant $K_t > 0$, så $\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;H)} \leq \sqrt{K_t} \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(s)\|_H^2 &= T^{-1} \int_0^T \|\mathbf{u}(s)\|_H^2 dt \\ &= T^{-1} \int_0^T \left(\|\mathbf{u}(t)\|_H^2 - \int_s^t \left(\langle \mathbf{u}'(\tau), \overline{\mathbf{u}(\tau)} \rangle + \langle \overline{\mathbf{u}'(\tau)}, \mathbf{u}(\tau) \rangle \right) d\tau \right) dt \\ &\leq T^{-1} \left(\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;H)}^2 + \int_0^T 2 \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V')} \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} dt \right) \\ &\leq T^{-1} \left(K_t \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)}^2 + T \left(\|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V')}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)}^2 \right) \right) \\ &= (T^{-1}K_t + 1) \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V')}^2. \end{aligned}$$

Ved at indsætte denne vurdering i (1.23), tage supremum og bruge (1.10) fås, at

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}(t)\|_H &\leq \left((T^{-1}K_t + 2) \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)}^2 + 2 \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{T^{-1}K_t + 2} \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} + \sqrt{2} \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V')} \\ &\leq \sqrt{T^{-1}K_t + 2} \left(\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V')} \right). \end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Lineære, parabolske begyndelses- og randværdiproblemer

Dette kapitel er baseret på [Eva98, afs. 7.1], men nedenstående adskiller sig imidlertid fra kilden ved at være mere generelt – eksempelvis behandles det komplekse tilfælde og ikke kun det reelle. Samtidig er der også den forskel, at alle konstanter bliver specificeret, hvor det er muligt.

Kapitlet omhandler lineære, parabolske partielle differentialligninger af 2. orden. Denne type ligninger er en generalisering af varmeledningsligningen, som i $n + 1$ dimensioner antager formen

$$\partial_t u - K (\partial_{11}^2 u + \cdots + \partial_{nn}^2 u) = 0,$$

hvor $K > 0$. Funktionsværdien $u(x_1, \dots, x_n, t)$ angiver et legemes temperatur i punktet $(x_1, \dots, x_n)$ til tiden t .

I hele kapitlet betegner $U \subset \mathbb{R}^n$ en åben og begrænset mængde, og mængden $U_T := U \times]0, T]$ indføres for fast $T > 0$. Udgangspunktet for behandlingen af emnet er begyndelses- og randværdiproblemet

$$\partial_t u + Au = f \text{ i } U_T \tag{2.1}$$

$$u = 0 \text{ på } \partial U \times [0, T] \tag{2.2}$$

$$u = g \text{ på } U \times \{t = 0\}, \tag{2.3}$$

hvor funktionerne $f : U_T \rightarrow \mathbb{C}$ og $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ er givet, mens $u : \overline{U_T} \rightarrow \mathbb{C}$ er den ukendte. For hvert t betegner A en 2. ordens partiel differentialoperator, der enten er på divergensform eller ikke-divergensform. Det første betyder, at for variable koefficienter a^{ij}, b^i og c , hvor $i, j = 1, \dots, n$, er

$$Au := - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij}(x, t) \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \partial_i u + c(x, t)u, \tag{2.4}$$

mens sidstnævnte betyder, at

$$Au := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \partial_i u + c(x,t)u. \quad (2.5)$$

Selve differentiaalligningen er angivet i (2.1), mens (2.2) og (2.3) beskriver hhv. den homogene Dirichlet randbetingelse og begyndelsesbetingelsen.

Definition 2.0.4 (Parabolisk partiel differentialoperator af 2. orden)

Den partielle differentialoperator $\partial_t + A$ er uniformt parabolisk, såfremt der eksisterer en konstant $\theta > 0$, så

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (2.6)$$

for alle $(x,t) \in U_T$ og $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Når $a^{ij}(\cdot, t) \in C^\infty(\overline{U}) \cap L_\infty(U)$ for $i, j = 1, \dots, n$, indebærer definitionen, at A 's principalsymbol er stærkt elliptisk på en uniforme måde.

Eksempel 2.0.5 Sættes $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$ og $b_i \equiv c \equiv f \equiv 0$ for $i, j = 1, \dots, n$, reduceres A til $-\Delta$ og (2.1) til varmeledningsligningen. Eftersom

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j = \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \xi_i \xi_j = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = |\xi|^2,$$

er uligheden i (2.6) opfyldt for $\theta \in]0, 1]$, så varmeledningsligningen er parabolisk. $\square$

Strategien i det følgende afsnit er først at definere, hvad der forstås ved en svag løsning, hvorefter en sådan konstrueres.

2.1 SVAGE LØSNINGER

Afsnittet tager udgangspunkt i et konkret eksempel, hvorfor der indføres forkortet notation for tre Hilbertrum samt deres normer:

$$\begin{aligned} H &:= L_2(U) & \text{med} & \quad \|f\|_H := |f|, \\ V &:= H_0^1(U) & \text{med} & \quad \|f\|_V := \|f\|, \\ V^* &:= H^{-1}(U) := (H_0^1(U))^*. \end{aligned}$$

Det bemærkes, at $|\cdot|$ også anvendes til den Euklidiske norm og $\|\cdot\|$ til operatornormen, men det vil af konteksten fremgå, hvilken norm der er tale om. Sammenhængen mellem disse Hilbertrum er, at

$$V \subseteq H \subseteq V^*,$$

og for $w \in V$ gælder, at

$$\|w\|_{V^*} \leq |w| \leq \|w\|.$$

Den første inklusion og den anden ulighed er velkendte. For $w \in H$ giver Cauchy-Schwarzs ulighed for et vilkårligt $v \in V$, at

$$|(w|v)_H| = \left| \int_U w(x) \overline{v(x)} dx \right| \leq |w| |v| \leq |w| \|v\|,$$

hvormed funktioalet $v \mapsto (w|v)_H$ er et element af V^* , og $\|w\|_{V^*} \leq |w|$.

Antag, at A har divergensformen angivet i (2.4). Desuden antages for $i, j = 1, \dots, n$, at

$$\operatorname{Im} a_{ij} = \operatorname{Im} a_{ji}, \quad (2.7)$$

$$a_{ij}, b_i, c \in L_\infty(U_T), \quad (2.8)$$

og for $u, v \in V$ og n.a. $t \in [0, T]$ indføres sesquilinear formen

$$a(u, v; t) = \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\cdot, t) \partial_i u \partial_j \bar{v} + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, t) \partial_i u \bar{v} + c(\cdot, t) u \bar{v} \right) dx. \quad (2.9)$$

Denne er veldefineret, idet hver faktor er Borel målelig og ved at udnytte antagelsen i (2.8), f.eks. med

$$K_a := \max \left\{ \operatorname{ess. sup}_{(x,t) \in U_T} |a_{ij}(x, t)| \mid i, j = 1, \dots, n \right\},$$

fås, at

$$|a(u, v; t)| \leq K_a \sum_{i,j=1}^n \int |\partial_i u \partial_j \bar{v}| dx + K_b \sum_{i=1}^n \int |\partial_i u \bar{v}| dx + K_c \int |u \bar{v}| dx < \infty.$$

Sesquilinear formen a er desuden begrænset på V for n.a. $t \in [0, T]$, eftersom

$$|a(u, v; t)| \leq K_c |u| |v| + K_b \sum_{i=1}^n |\partial_i u| |v| + K_a \sum_{i,j=1}^n |\partial_i u| |\partial_j v|,$$

og indføres $K = \max \{K_a, K_b, K_c\}$ fås ved brug af Cauchy-Schwarzs ulighed, at

$$|a(u, v; t)| \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &\leq K (|u| |v| + |\partial_1 u| |v| + \dots + |\partial_n u| |v|) + K \sum_{i=1}^n |\partial_i u| \sum_{j=1}^n |\partial_j v| \\ &\leq K \sqrt{|u|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2} \sqrt{(n+1) |v|^2} + K (1 \cdot |\partial_1 u| + \dots + 1 \cdot |\partial_n u|) \sum_{j=1}^n |\partial_j v| \\ &\leq K \sqrt{n+1} \|u\| |v| + K \sqrt{n^2} \sqrt{|u|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2} \sqrt{|v|^2 + \sum_{j=1}^n |\partial_j v|^2} \\ &\leq K (\sqrt{n+1} + n) \|u\| \|v\|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Den sidste vigtige egenskab ved a kræver en længere argumentation:

Lemma 2.1.1 Sesquilinear formen a er $H_0^1(U)$ -coerciv

Hvis koefficienterne i sesquilinear formen a , der er defineret i (2.9), opfylder (2.6), så er a $H_0^1(U)$ -coerciv for n.a. $t \in [0, T]$, dvs. der eksisterer $K_1 > 0$ og $K_2 \in \mathbb{R}$, så

$$\operatorname{Re} a(u, u; t) + K_2 \|u\|_{L_2(U)}^2 \geq K_1 \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \quad \text{for } u \in H_0^1(U).$$

Bevis:

Først indføres sesquilinear formen $s(u, v) = \sum_{j,k=1}^n (s_{jk} \partial_k u | \partial_j v)_{L_2(U)}$, hvor $u, v \in H_0^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er åben, og $s_{jk}(x) \in \mathbb{R}$ er begrænset på U for $j, k = 1, \dots, n$ samt opfylder (2.6) for $x \in U$.

(i) Hvis $u \in H_0^1(U)$ er reel, giver anvendelse af (2.6), at

$$s(u, u) = \sum_{j,k=1}^n \int_U s_{jk} \partial_k u \partial_j u \, dx \geq \theta \int_U \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \, dx$$

(ii) Hvis $u \in H_0^1(U)$ er kompleks, er $u = v + iw$, hvor $v, w \in H_0^1(U)$ er reelle. Eftersom

$$s(u, u) = s(v + iw, v + iw) = s(v, v) - i s(v, w) + i s(w, v) + s(w, w),$$

fås ved brug af punkt (i) på v og w , at

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s(u, u) &\geq \theta \sum_{i=1}^n \int_U ((\partial_i v)^2 + (\partial_i w)^2) \, dx \\ &= \theta \sum_{i=1}^n \int_U |\partial_i v + i \partial_i w|^2 \, dx = \theta \left(\|u\|_{H^1(U)}^2 - \|u\|_{L_2(U)}^2 \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

(iii) Nu indføres $s_1(u, v) = s(u, v) + \sum_{j=1}^n (b_j \partial_j u | v)_{L_2(U)} + (b_0 u | v)_{L_2(U)}$, hvor b_j er en begrænset, kompleks funktion på U for $j = 0, \dots, n$. Om realdelen af s_1 gælder ifølge (2.12), at

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s_1(u, u) &\geq \theta \left(\|u\|_{H^1(U)}^2 - \|u\|_{L_2(U)}^2 \right) - \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n (b_j \partial_j u | u)_{L_2(U)} \right| - \left| \operatorname{Re} (b_0 u | u)_{L_2(U)} \right| \\ &\geq \theta \left(\|u\|_{H^1(U)}^2 - \|u\|_{L_2(U)}^2 \right) - \sum_{j=1}^n |(b_j \partial_j u | u)_{L_2(U)}| - |(b_0 u | u)_{L_2(U)}|, \end{aligned}$$

hvor

$$|(b_0 u)_{L_2(U)}| \leq \int_U |b_0(x)| |u(x)|^2 dx \leq \|b_0\|_\infty \|u\|_{L_2(U)}^2.$$

For $\varepsilon > 0$ giver (1.9), at

$$\begin{aligned} |(b_j \partial_j u)_{L_2(U)}| &\leq \|b_j\|_\infty \|\partial_j u\|_{L_2(U)} \|u\|_{L_2(U)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|b_j\|_\infty \left(\varepsilon^2 \|u\|_{H^1(U)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u\|_{L_2(U)}^2 \right). \end{aligned}$$

I alt fås

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s_1(u, u) &\geq \theta \left(\|u\|_{H^1(U)}^2 - \|u\|_{L_2(U)}^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty \right) \left(\varepsilon^2 \|u\|_{H^1(U)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u\|_{L_2(U)}^2 \right) - \|b_0\|_\infty \|u\|_{L_2(U)}^2. \end{aligned}$$

Nu vælges $\varepsilon > 0$, så $\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty \right) \varepsilon^2 \leq \frac{\theta}{2}$, hvormed

$$\operatorname{Re} s_1(u, u) \geq \frac{\theta}{2} \|u\|_{H^1(U)}^2 - \left(\theta + \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty + \|b_0\|_\infty \right) \|u\|_{L_2(U)}^2.$$

Ved at sammenligne s_1 med a samt udnytte antagelsen om koefficienterne i (2.8) fås, at $H_0^1(U)$ -coerciviteten af a er bevist for n.a. $t \in [0, T]$ i det tilfælde, at a_{ij} er reel for $i, j = 1, \dots, n$. Såfremt koefficienterne er komplekse, betragtes leddene i a 's første sum parvist, hvorved (2.7) for $i \neq j$ giver, at

$$\begin{aligned} a_{ij} \partial_i u \partial_j \bar{u} + a_{ji} \partial_j u \partial_i \bar{u} &= (\operatorname{Re} a_{ij} + i \operatorname{Im} a_{ij}) \partial_i u \partial_j \bar{u} + (\operatorname{Re} a_{ji} + i \operatorname{Im} a_{ji}) \partial_j u \partial_i \bar{u} \\ &= \partial_i u \partial_j \bar{u} \operatorname{Re} a_{ij} + \partial_j u \partial_i \bar{u} \operatorname{Re} a_{ji} + 2i \operatorname{Re} (\partial_i u \partial_j \bar{u}) \operatorname{Im} a_{ij}, \end{aligned}$$

og for $i = j$, at $a_{ii} \partial_i u \partial_i \bar{u} = (\operatorname{Re} a_{ii} + i \operatorname{Im} a_{ii}) |\partial_i u|^2$. Dermed får $\operatorname{Re} a(u, u; t)$ intet bidrag fra den komplekse del af koefficienterne, så $H_0^1(U)$ -coerciviteten er opretholdt. $\square$

Det bemærkes, at for fast t n.o. i $[0, T]$ og $v \in V$ er $a(v, \cdot; t) \in V^*$ jf. (2.10)-(2.11). Dvs. a inducerer en lineær operator $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$, der for $\varphi \in V$ er givet ved

$$\langle \mathcal{A}v, \varphi \rangle = a(v, \bar{\varphi}; t), \quad (2.13)$$

og da a er begrænset, er $\mathcal{A} \in \mathbb{B}(V, V^*)$. Af definitionen på a fås for $\varphi \in C_0^\infty(U)$, at

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}v, \bar{\varphi} \rangle &= \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\cdot, t) \partial_i v \partial_j \bar{\varphi} + \sum_{i=1}^n b_i(\cdot, t) \partial_i v \bar{\varphi} + c(\cdot, t) v \bar{\varphi} \right) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle -\partial_j (a_{ij}(\cdot, t) \partial_i v), \bar{\varphi} \rangle + \sum_{i=1}^n \langle b_i(\cdot, t) \partial_i v, \bar{\varphi} \rangle + \langle c(\cdot, t) v, \bar{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{A}v, \bar{\varphi} \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

så $\mathcal{A}v$ virker som Av i distributionsforstand, hvor A er operatoren fra (2.4).

Herunder analyseres en vilkårlig funktion

$$u \in C_{L_\infty}^\infty(U \times]0, T[) \cap C(\overline{U_T}),$$

som løser (2.1)-(2.3), hvilket leder frem til, hvorledes en svag løsning til dette problem skal forstås. Det antages, at U foruden at være åben og begrænset også er glat. Til løsningen associeres afbildningen $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ givet ved

$$[\mathbf{u}(t)](x) = u(x, t) \text{ for } x \in U, t \in [0, T].$$

Funktionen afbilder over i V , idet u løser (2.2), og det er velkendt, at

$$H_0^1(U) = \{u \in H^1(U) \mid u = 0 \text{ på } \partial U\}.$$

Om problemets data antages, at $f \in L_2(U_T)$ samt $g \in L_2(U)$. Dernæst indføres $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow H$ på tilsvarende vis ved $[\mathbf{f}(t)](x) = f(x, t)$ for $x \in U$ og $t \in [0, T]$.

Herunder argumenteres for, at $\mathbf{u}' \in V^*$. Størstedelen af argumenterne er supplerende detaljer i forhold til [Eva98, s. 352]. Ved at multiplicere differentialligningen i (2.1) med $\bar{v} \in C_0^\infty(U)$ fås for $t \in]0, T[$, at

$$\partial_t \mathbf{u} \bar{v} + A \mathbf{u} \bar{v} = f \bar{v},$$

hvormed integration over U ifølge (2.13) og (2.14) giver, at

$$(\mathbf{u}'(t)|v)_H = (\mathbf{f}(t)|v)_H - a(\mathbf{u}(t), v; t),$$

så ved brug af (2.10)-(2.11) fås

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}'(t)|v)_H| &\leq |(\mathbf{f}(t)|v)_H| + |a(\mathbf{u}(t), v; t)| \\ &\leq |\mathbf{f}(t)| |v| + K(\sqrt{n+1} + n) \|\mathbf{u}(t)\| \|v\| \\ &\leq (|\mathbf{f}(t)| + K(\sqrt{n+1} + n) \|\mathbf{u}(t)\|) \|v\| = K' \|v\|, \end{aligned}$$

hvor $K' := |\mathbf{f}(t)| + K(\sqrt{n+1} + n) \|\mathbf{u}(t)\|$. Nu betragtes $v \in V$, hvormed der eksisterer $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ i $C_0^\infty(U)$, så $v_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v$ i V . Af kontinuiteten af det indre produkt fås, at

$$|(\mathbf{u}'(t)|v)_H| = \limsup_{m \rightarrow \infty} |(\mathbf{u}'(t)|v_m)_H| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} K' \|v_m\| = K' \|v\|.$$

Dermed er $v \mapsto (\mathbf{u}'(t)|v)_H$ et kontinuert, konjugeret lineært funktional på V , så $\mathbf{u}'(t) \in V^*$, og

$$\|\mathbf{u}'(t)\|_{V^*} = \sup \{ |(\mathbf{u}'(t)|v)_H| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} \leq K'.$$

Ved kvadrering af uligheden, definitionen af K' samt (1.9) fås

$$\|\mathbf{u}'(t)\|_{V^*}^2 \leq 2|\mathbf{f}(t)|^2 + 2K^2(\sqrt{n+1} + n)^2 \|\mathbf{u}(t)\|^2,$$

hvorefter integration over $]0, T[$ resulterer i, at

$$\|\mathbf{u}'\|_{L_2(0, T; V^*)}^2 \leq 2\|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; H)}^2 + 2K^2(\sqrt{n+1} + n)^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(0, T; V)}^2.$$

Højresiden af uligheden er endelig, såfremt $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$, hvormed $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V^*)$.

Ovenstående viser, at enhver løsning $u \in C_{L^\infty}^\infty(U \times]0, T]) \cap C(\overline{U_T})$ til (2.1)-(2.3) nødvendigvis er en svag løsning:

Definition 2.1.2 (Svag løsning)

En funktion $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$ med $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V^*)$ er en svag løsning til (2.1)-(2.3), hvis

$$\langle \mathbf{u}'(t), \bar{v} \rangle + a(\mathbf{u}(t), v; t) = (\mathbf{f}(t)|v)_H \quad (2.15)$$

for hvert $v \in V$ og n.a. $t \in [0, T]$, samt

$$\mathbf{u}(0) = g. \quad (2.16)$$

Af sætning 1.5.3 fås, at der om en funktion $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$ med $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V^*)$ gælder, at $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$, så kravet i (2.16) er meningsfyldt.

I [Eva98] betragtes kun $H_0^1(U)$ og $L_2(U)$ i behandlingen af problemstillingen, men definition 2.1.2 kan generaliseres til vilkårlige Hilbertrum V og H , hvor $V \subseteq H$ algebraisk, topologisk og tæt. Dermed eksisterer $K_t > 0$, så der for alle $v \in V$ gælder, at

$$\|v\| \geq K_t |v|. \quad (2.17)$$

Elementerne i V, H og V^* skal kunne kompleks konjugeres, et element skal have samme norm som dets kompleks konjugerede, og for $v \in V$ og $v^* \in V^*$ kræves, at

$$\overline{\langle v^*, v \rangle} = \langle v^*, \bar{v} \rangle. \quad (2.18)$$

Fremover vil V, H og V^* angive sådanne generelle Hilbertrum, hvis ikke andet nævnes. Normerne herpå forkortes som i eksemplet ovenfor. Det bemærkes, at (2.18) er opfyldt for $H_0^1(U)$ og $H^{-1}(U)$, hvilket fremgår ved at tage $v^* \in L_2(U) \subseteq H^{-1}(U)$ og $v \in C_0^\infty(U) \subseteq H_0^1(U)$, hvor delmængderne er tætte i de større mængder. Da er

$$\overline{\langle v^*, v \rangle} = \overline{\int_U v^*(x) \bar{v}(x) dx} = \int_U \overline{v^*(x)} v(x) dx = \langle v^*, \bar{v} \rangle,$$

og af kontinuitetsgrunde fås det ønskede.

I forbindelse med generaliseringen bliver a en vilkårlig sesquilinear form på V og for n.a. $t \in [0, T]$. Denne skal for n.a. $t \in [0, T]$ være begrænset på V , dvs. der findes en konstant $K_b > 0$, så der for alle $v, w \in V$ gælder, at

$$|a(v, w; t)| \leq K_b \|v\| \|w\|. \quad (2.19)$$

Derudover skal a være V -coerciv for n.a. $t \in [0, T]$, dvs. der eksisterer $K_1 > 0$ og $K_2 \in \mathbb{R}$, så der for alle $v \in V$ gælder, at

$$\operatorname{Re} a(v, v; t) \geq K_1 \|v\|^2 - K_2 |v|^2. \quad (2.20)$$

Det bemærkes, at K_b, K_1 og K_2 er uafhængige af t . I henhold til (2.13) inducerer a en operator $A : V \rightarrow V^*$, og begrænsetheden af a medfører for $v \in V$, at

$$\begin{aligned} \|Av\|_{V^*} &= \sup_{\varphi \in V, \|\varphi\| < 1} |\langle Av, \varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in V, \|\varphi\| < 1} |a(v, \bar{\varphi}; t)| \\ &\leq \sup_{\varphi \in V, \|\varphi\| < 1} K_b \|v\| \|\varphi\| = K_b \|v\|, \end{aligned}$$

så $A : V \rightarrow V^*$ er begrænset. Yderligere fås heraf, at $\|A(t)\|_{\mathbb{B}(V, V^*)} \leq K_b$, hvormed $\text{ess. sup} \|A(t)\|_{\mathbb{B}(V, V^*)} < \infty$.

Herunder bevises for et alment tripel (H, V, a) , der opfylder ovenstående krav, at en funktion $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$ med $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V^*)$ er en svag løsning jf. definition 2.1.2, hvor (2.1)-(2.3) er erstattet med systemet

$$\mathbf{u}' + A\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{u}(0) = g, \quad (2.22)$$

for givne $\mathbf{f} \in L_2(0, T; H)$ og $g \in H$, hvis og kun hvis den løser systemet i distributionsforstand, dvs.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' + A\mathbf{u} &= \mathbf{f} \text{ i } \mathcal{D}'([0, T[; V^*) \\ \mathbf{u}(0) &= g. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ifølge lemma 1.5.2 have, at

$$\mathbf{f} \in L_2(0, T; H) \subseteq L_1(0, T; H) \subseteq L_1(0, T; V^*) \subseteq \mathcal{D}'([0, T[; V^*).$$

Derudover er

$$\int_0^T \|A\mathbf{u}(t)\|_{V^*}^2 dt \leq \int_0^T K_b^2 \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt < \infty,$$

så $A\mathbf{u} \in L_2(0, T; V^*)$. For $\psi \in C_0^\infty([0, T[)$ er følgende integraler således veldefinerede:

$$w := \int_0^T \mathbf{f}(t)\psi(t) dt \in H \subseteq V^* \quad \text{og} \quad v := \int_0^T (\mathbf{u}'(t) + A\mathbf{u}(t))\psi(t) dt \in V^*.$$

For et vilkårligt $\varphi \in V$ undersøges vha. Bochners identitet, hvornår $v = w$ i V^* :

$$\langle w - v, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \psi(t) \langle \mathbf{f}(t) - (\mathbf{u}'(t) + A\mathbf{u}(t)), \varphi \rangle dt = 0 \Leftrightarrow \\ &\int_0^T \psi(t) \langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle dt - \int_0^T \psi(t) \langle \mathbf{u}'(t) + A\mathbf{u}(t), \varphi \rangle dt = 0 \Leftrightarrow \\ &\int_0^T \psi(t) ((\mathbf{f}(t)|\bar{\varphi})_H - \langle \mathbf{u}'(t), \varphi \rangle - a(\mathbf{u}(t), \bar{\varphi}; t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Såfremt $\mathbf{u}$ er en svag løsning til (2.21), er (2.25) opfyldt for ethvert $\varphi \in V$. Dermed giver implikationerne, at $v = w$ på V . Således følger, at når højre- og venstresiden i (2.23) betragtes som kontinuerte, lineære afbildninger $C_0^\infty([0, T[) \rightarrow V^*$, er deres

funktionsværdier i et vilkårligt element af definitionsområdet ens – dvs. de to sider er ens som elementer i $\mathcal{D}'([0, T]; V^*)$.

For at bevise den modsatte implikation antages, at $\mathbf{u}$ løser (2.23), hvormed $v = w$ i V^* for et vilkårligt $\psi \in C_0^\infty([0, T])$. Hermed gælder (2.24), så af implikationerne og variationsregningens grundlemma, der kan benyttes, idet

$$(\mathbf{f}(t)|\bar{\varphi})_H - \langle \mathbf{u}'(t), \varphi \rangle - a(\mathbf{u}(t), \bar{\varphi}; t) \in L_1([0, T]),$$

følger, at $\mathbf{u}$ er en svag løsning til (2.21), da der for $\varphi \in V$ gælder, at

$$(\mathbf{f}(t)|\bar{\varphi})_H - \langle \mathbf{u}'(t), \varphi \rangle - a(\mathbf{u}(t), \bar{\varphi}; t) = 0.$$

De følgende afsnit har til formål at bevise, at der eksisterer en svag løsning til (2.21)-(2.22), samt at denne er entydig.

2.1.1 Galerkin approksimationer

Galerkins metode går ud på at konstruere en svag løsning til begyndelsesværdiproblemet angivet i (2.21)-(2.22) ved at finde løsninger til endeligt-dimensionale problemer, der approksimerer det oprindelige problem. For at bruge denne metode er det nødvendigt, at der eksisterer en ortonormal basis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for H , som samtidig er en ortogonal basis for V .

Eksistens af basis i det konkrete tilfælde

I dette afsnit uddybes [Eva98, s. 353], idet der argumenteres for eksistensen af en basis, der opfylder ovenstående kriterier for $V := H_0^1(U)$ og $H := L_2(U)$. Hertil er det nødvendigt med et par lemmaer.

Lemma 2.1.3 [Joh09, Theorem 9.1.2]

For en begrænset, åben mængde $U \subset \mathbb{R}^n$ er $H^1(U) \hookrightarrow L_2(U)$ kompakt.

Et bevis herfor findes i [Joh09, s. 66] og bygger på Fourier-teori. Et mere alment resultat er Rellich-Kondrachovs kompakthedssætning [Eva98, Theorem 1, s. 272], der giver kompaktheden af $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L_q(U)$ for $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

Lemma 2.1.4 [Alm07, Theorem 21]

Lad X, Y og Z være normerede rum, og lad $T : X \rightarrow Y$ samt $S : Y \rightarrow Z$ være lineære operatorer. Såfremt den ene af operatorerne er begrænset og den anden kompakt, er sammensætningen ST kompakt.

Det bemærkes, at lemmaet trivielt kan udvides til flere operatorer. I så fald er sammensætningen kompakt, når én af dem er kompakt og resten begrænsede.

Nu antages, at der findes en ortonormal basis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for H , så w_k er den k 'te egenfunktion for Dirichlet-realisationen af $-\Delta$, hvilken noteres $-\Delta_D$. Dermed eksisterer $\lambda_k \in \mathbb{R}$, så $-\Delta_D w_k = \lambda_k w_k$.

Dirichlet-realisationen af $-\Delta$ fås ved at anvende Lax-Milgrams lemma [Gru08, Theorem 12.18] på (H, V, a_D) , hvor a_D er sesquilinear formen defineret ved

$$a_D(v_1, v_2) = \sum_{j=1}^n (\partial_j v_1 | \partial_j v_2)_H \text{ for } v_1, v_2 \in V. \quad (2.26)$$

Ifølge Lax-Milgrams lemma er $-\Delta_D w_k \in H$ med $(-\Delta_D w_k | v)_H = a_D(w_k, v)$ for alle $v \in V$, så antagelsen giver for $k \neq l$, at

$$(w_k | w_l)_V = (w_k | w_l)_H + \sum_{j=1}^n (\partial_j w_k | \partial_j w_l)_H = (-\Delta_D w_k | w_l)_H = \lambda_k (w_k | w_l)_H = 0.$$

Dermed udgør $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en ortogonal følge i V , og den er ydermere en basis herfor, eftersom det er en basis for det større rum H .

Herunder følger på punktform en godtgørelse af ovenstående antagelse. De første tre punkter begrundes, at det er muligt at anvende spektralsætningen på $(-\Delta_D)^{-1}$.

- (i) Operatoren $-\Delta_D$ har en begrænset invers på H , dvs. $(-\Delta_D)^{-1}$ er veldefineret og tilhører $\mathbb{B}(H)$. Det skyldes, at $-\Delta_D$ ifølge Lax-Milgrams lemma er selvadjungeret, eftersom der om den adjungerede sesquilinear form til a_D for $v_1, v_2 \in V$ gælder, at

$$a_D^*(v_1, v_2) := \overline{a_D(v_2, v_1)} = \overline{\sum_{j=1}^n \int_U \partial_j v_2(x) \overline{\partial_j v_1(x)} dx} = a_D(v_1, v_2),$$

hvormed a_D er symmetrisk. Af [Gru08, Corollary 4.30] havs således, at $m(-\Delta_D) = m((-\Delta_D)^*) > 0$.

Yderligere er a_D V -elliptisk, da Poincarés ulighed [Gru08, Theorem 4.29] for $v \in C_0^\infty(U)$ og et $b > 0$ giver, at

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_D(v, v) &= \sum_{j=1}^n |\partial_j v|^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\partial_j v|^2 + \frac{1}{2} |\partial_1 v|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\partial_j v|^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{b^2} |v|^2 \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{b^2} \right\} \|v\|^2, \end{aligned}$$

og pga. tætheden af $C_0^\infty(U)$ i V udstrækkes uligheden til alle $v \in V$. Ifølge Lax-Milgrams lemma er $-\Delta_D$ dermed lukket og tæt defineret i H . Således giver [Gru08, Theorem 12.9], at $(-\Delta_D)^{-1}$ eksisterer og er begrænset, samt at $0 \in \rho(-\Delta_D)$, hvormed $(-\Delta_D)^{-1}$ ifølge [Joh09, Lemma 7.1.3] tilhører $\mathbb{B}(H)$.

- (ii) Af punkt (i) havs, at $0 \in \rho(-\Delta_D)$, så $-\Delta_D$ er tæt defineret, hvormed [Gru08, Theorem 12.7] giver, at $((-\Delta_D)^*)^{-1} = ((-\Delta_D)^{-1})^*$. Derved overføres selvadjungeretheden af $-\Delta_D$ til dens inverse.

- (iii) Den inverse operator $(-\Delta_D)^{-1}$ er kompakt i H . Det beror på, at den kan opfattes som en sammensætning af følgende operatorer

$$H \xrightarrow{(-\Delta_D)^{-1}} D(-\Delta_D) \hookrightarrow V \hookrightarrow H.$$

Operatoren $(-\Delta_D)^{-1}$ er veldefineret på H jf. punkt (i), og den første indlejring er meningsfyldt, idet $D(-\Delta_D) \subseteq V$.

Ifølge lemma 2.1.3 er den sidste indlejring kompakt, idet U er en begrænset, åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, og $V \subseteq H^1(U)$. I henhold til lemma 2.1.4 samt den efterfølgende bemærkning mangler der at blive argumenteret for, at de to første operatorer i sammensætningen er begrænsede.

Afbildningen $(-\Delta_D)^{-1} : H \rightarrow D(-\Delta_D)$ er begrænset, idet $D(-\Delta_D)$ er udstyret med grafnormen og $(-\Delta_D)^{-1} \in \mathbb{B}(H)$ jf. punkt (i), så for $f \in H$ er

$$\begin{aligned} \|(-\Delta_D)^{-1}f\|_{D(-\Delta_D)}^2 &= |(-\Delta_D)^{-1}f|^2 + |-\Delta_D(-\Delta_D)^{-1}f|^2 \\ &\leq (\|(-\Delta_D)^{-1}\| |f|)^2 + |f|^2 = (1 + \|(-\Delta_D)^{-1}\|^2) |f|^2. \end{aligned}$$

Begrænsetheden af $D(-\Delta_D) \hookrightarrow V$ fås, da der for $v \in D(-\Delta_D) \subseteq V$ haves, at

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v|v)_H + \sum_{j=1}^n (\partial_j v | \partial_j v)_H = (v|v)_H + (-\Delta_D v | v)_H \\ &\leq |v|^2 + |-\Delta_D v| |v| = |v| (1 \cdot |v| + 1 \cdot |-\Delta_D v|) \\ &\leq |v| \sqrt{2} \sqrt{|v|^2 + |-\Delta_D v|^2} \leq \sqrt{2} \|v\|_{D(-\Delta_D)}^2. \end{aligned}$$

- (iv) Af punkt (i)-(iii) fås, at $(-\Delta_D)^{-1} \in \mathbb{B}(H)$ er en kompakt, selvadjungeret operator. Af spektralsætningen for denne type operatorer [Joh09, Theorem 7.2.3] følger, at H har en ortonormal basis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, der opfylder, at

$$(-\Delta_D)^{-1}w_k(x) = \mu_k w_k(x) \text{ for } k \in \mathbb{N} \text{ og } x \in U, \quad (2.27)$$

hvor $\mu_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, eftersom $(-\Delta_D)^{-1}$ er injektiv.

- (v) For $k \in \mathbb{N}$ er w_k en egenfunktion for $-\Delta_D$ med egenværdi $\lambda_k := \frac{1}{\mu_k}$, idet (2.27) og lineariteten af $-\Delta_D$ giver, at $w_k = \mu_k(-\Delta_D)w_k$, så $-\Delta_D w_k = \lambda_k w_k$.

Eksistensen af følgen $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ er hermed godtgjort. I henhold til tidligere er $w_k \in V$ samt $\lambda_k w_k = -\Delta_D w_k \in H$, så idet $-\Delta_D$ er en elliptisk operator, giver [Eva98, Theorem 5, s. 323], der behandler regulariteten af løsninger til elliptiske randværdiproblemer, at $w_k \in H^2(U)$ og dermed $\lambda_k w_k \in H^2(U)$.

Sætningen anvendes derfor igen, hvormed $w_k \in H^4(U)$. Fortsættelse af iterationen giver, at $w_k \in H^l(U)$ for $l \in \mathbb{N}$, idet $H^m(U) \subseteq H^{m'}(U)$ for $m' \leq m$. Et korollar til Sobolevs sætning [Gru08, Corollary 6.14] tillader således at slutte, at $w_k \in C_{\infty}^{\infty}(U)$.

Eksistens af basis i det generelle tilfælde

Nu rettes fokus atter mod det generelle tilfælde, hvor V til at starte med omnormeres ved at indføre et nyt skalarprodukt herpå. I den forbindelse vælges $t_0 \in [0, T]$, så $a(\cdot, \cdot; t_0)$ er begrænset på V og V -coerciv. For $v, w \in V$ indføres sesquilinear formen

$$a_{\text{Re}}(v, w) = \frac{1}{2} \left(a(v, w; t_0) + \overline{a(w, v; t_0)} \right),$$

der er symmetrisk, idet $a_{\text{Re}}^*(v, w) = a_{\text{Re}}(v, w)$. I henhold til (2.20) er den også V -coerciv, da

$$\text{Re } a_{\text{Re}}(v, v) = \text{Re } \frac{1}{2} \left(a(v, v; t_0) + \overline{a(v, v; t_0)} \right) = \text{Re } a(v, v; t_0) \geq K_1 \|v\|^2 - K_2 |v|^2.$$

Herudfra indføres sesquilinear formen $a_0(v, w) = K_2(v|w)_H + a_{\text{Re}}(v, w)$ for $v, w \in V$. Den er positiv definit, da a_{Re} er reel på diagonalen, så $a_0(v, v) = 0$ medfører, at $v = 0$, eftersom

$$0 = K_2(v|v)_H + a_{\text{Re}}(v, v) \geq K_2 |v|^2 + \left(K_1 \|v\|^2 - K_2 |v|^2 \right) = K_1 \|v\|^2. \quad (2.28)$$

Derudover giver symmetrien af a_{Re} , at $\overline{a_0(v, w)} = a_0(w, v)$, så i alt fås, at $a_0(\cdot, \cdot)$ er et skalarprodukt på V , hvilket noteres $((\cdot|\cdot))$.

Normerne $\|v\|$ og $|||v||| := \sqrt{((v|v))}$ er ækvivalente på V , idet (2.17) og (2.19) giver, at

$$\begin{aligned} 0 \leq |||v|||^2 = a_0(v, v) &\leq K_2 |v|^2 + |a_{\text{Re}}(v, v)| \\ &\leq \frac{K_2}{K_t^2} \|v\|^2 + |\text{Re } a(v, v; t_0)| \leq \left(\frac{K_2}{K_t^2} + K_b \right) \|v\|^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

hvormed den identiske afbildning: $(V; \|\cdot\|) \rightarrow (V; |||\cdot|||)$ er kontinuert. Som konsekvens af (2.28) have ligeledes en omvendte ulighed mellem normerne, så Banachrummene $(V; \|\cdot\|)$ og $(V; |||\cdot|||)$ er isomorfe. Nu omnormeres V , således normen herpå er induceret af $((\cdot|\cdot))$.

Herunder bevises, at der eksisterer en ortonormal basis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for H , så $w_k \in V$ for alle $k \in \mathbb{N}$ og $((w_k|w_l)) = 0$ for $k \neq l$. Først og fremmest er det nødvendigt at antage, at $V \hookrightarrow H$ er kompakt, eftersom lemma 2.1.3 kun have i det konkrete tilfælde. Derudover antages, at $\dim(H) = \infty$.

Lax-Milgrams lemma anvendes på triplet (H, V, a_0) , og Lax-Milgram operatoren bestemt ved a_0 betegnes A_0 . Af (2.28) følger, at a_0 er V -elliptisk, og ved udregninger analoge til (2.29) fås, at sesquilinear formen også er begrænset på V .

Ligesom i det konkrete tilfælde antages først, at der eksisterer en ortonormal basis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for H , så w_k er den k 'te egenvektor for A_0 med egenværdi λ_k . Dermed er $w_k \in D(A_0) \subseteq V$ for $k \in \mathbb{N}$, og for $k \neq l$ er

$$((w_k|w_l)) = a_0(w_k, w_l) = (A_0 w_k|w_l)_H = \lambda_k(w_k|w_l)_H = 0.$$

Antagelsen godtgøres ved at tage udgangspunkt i det konkrete tilfælde ovenfor og blot påpege de påkrævede ændringer. I forbindelse med punkt (i) bemærkes, at det

ikke nødvendigt at bevise V -ellipticiteten af a_0 , da den allerede er vist ovenfor. Ved punkt (iii) gælder kompakheden af $V \hookrightarrow H$ nu pr. antagelse. Begrænsenheden af $D(A_0) \hookrightarrow V$ fås ved at tage $v \in D(A_0)$, hvormed

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = a_0(v, v) &= (A_0 v | v)_H \leq |(A_0 v | v)_H| + |v|^2 \leq |A_0 v| |v| + |v|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} |A_0 v|^2 + \frac{3}{2} |v|^2 \leq \frac{3}{2} \|v\|_{D(A_0)}^2.\end{aligned}$$

Ligesom i punkt (iv)-(v) kan spektralsætningen herefter anvendes, hvilket giver en ortonormal basis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for H , som opfylder, at $A_0 w_k = \lambda_k w_k$. Dermed er eksistensen af en basis opfyldende det ønskede bevist. Det noteres, at V og H således er separable Hilbertrum.

Reducering til endeligt-dimensionale problemer

I dette afsnit er det for $m \in \mathbb{N}$ ønsket at finde en funktion $\mathbf{u}_m : [0, T] \rightarrow V$ på formen

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad (2.30)$$

hvor koefficienterne d_m^k for $k = 1, \dots, m$ opfylder

$$d_m^k(0) = (g | w_k)_H, \quad (2.31)$$

$$(\mathbf{u}'_m(t) | w_k)_H + a(\mathbf{u}_m(t), w_k; t) = (\mathbf{f}(t) | w_k)_H \text{ for n.a. } t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

Disse krav minder meget om (2.15)-(2.16) indskrænket til det endeligt-dimensionale underrum udspændt af $w_1, \dots, w_m$; ligheden i (2.15) er opfyldt for ethvert element i underrummet, såfremt (2.32) er opfyldt for $w_1, \dots, w_m$. Tilsvarende er (2.16) opfyldt for g liggende i underrummet, hvis (2.31) gælder. Dermed er problemet med at finde en svag løsning til (2.21)-(2.22) for en stund reduceret til det endeligt-dimensionale problem beskrevet ovenfor.

Sætning 2.1.5

Lad antagelserne under definition 2.1.2 gælde med den tilføjelse, at $\dim(H) = \infty$ og $V \hookrightarrow H$ er kompakt. Lad derudover $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow H$ og $g \in V$. For hvert $m \in \mathbb{N}$ eksisterer en funktion $\mathbf{u}_m$ på formen angivet i (2.30), som opfylder (2.31)-(2.32) – og denne er entydigt bestemt.

Bevis:

Antag, at $\mathbf{u}_m$ har formen i (2.30). Eftersom $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ er en ortonormal basis for H fås for $t \in [0, T]$, at

$$(\mathbf{u}'_m(t) | w_k)_H = \left(\sum_{j=1}^m d_m^j{}'(t) w_j \middle| w_k \right)_H = d_m^k{}'(t).$$

Ved at indføre $e^{jk}(t) = a(w_j, w_k; t)$ for $j, k = 1, \dots, m$ følger, at

$$a(\mathbf{u}_m(t), w_k; t) = \sum_{j=1}^m d_m^j(t) a(w_j, w_k; t) = \sum_{j=1}^m d_m^j(t) e^{jk}(t),$$

og med $f^k(t) := (\mathbf{f}(t)|w_k)_H$ kan (2.32) for $k = 1, \dots, m$ således skrives

$$d_m^k{}'(t) + \sum_{j=1}^m e^{jk}(t) d_m^j(t) = f^k(t), \quad (2.33)$$

hvilket er et lineært ligningssystem af sædvanlige differentiaalligninger med begyndelsesbetingelsen angivet i (2.31). Teorien om lineære, sædvanlige differentiaalligninger for kontinuerte, reelle koefficienter [AB92, s. 46-49] kan generaliseres til dette tilfælde, hvor $f^k \in L_1(\cdot|0, T)$ og $e^{jk} \in L_\infty(\cdot|0, T) \subseteq L_1(\cdot|0, T)$ for $j, k = 1, \dots, m$ jf. (2.19), idet K_b er uafhængig af t .

Generaliseringen følger ved at benytte essentielt supremum frem for supremum og splitte funktionerne op i deres real- og imaginærdel (af tidsmæssige årsager er dette ikke behandlet nærmere). Oprindeligt kræves, at koefficienterne er kontinuerte for at sikre, at de kan integreres, men denne egenskab besidder L_1 -koefficienter også.

Dermed eksisterer en entydig, absolut kontinuert funktion $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$, som opfylder (2.31) og (2.33) for n.a. $t \in [0, T]$. Således er $\mathbf{u}_m$ entydigt bestemt og opfylder (2.32) for n.a. $t \in [0, T]$. $\square$

2.1.2 Energiulighederne

Formålet med dette afsnit er at bevise en sætning, der giver en vurdering af forskellige normer. Dette viser sig at være et vigtigt redskab i beviset for, at der eksisterer en svag løsning til (2.21)-(2.22).

Sætning 2.1.6 Energiulighederne

Lad antagelserne være de samme som i sætning 2.1.5. Da eksisterer en konstant K , som kun afhænger af T og sesquilinear formen a , så

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}_m(t)| + \|\mathbf{u}_m\|_{L_2(0, T; V)} + \|\mathbf{u}_m'\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq K \left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; H)} + |g| \right) \quad (2.34)$$

for $m = 1, 2, \dots$

Bevis:

Ved at multiplicere (2.32) med $\overline{d_m^k(t)}$ og summere over k fås for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$(\mathbf{u}_m'(t)|\mathbf{u}_m(t))_H + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t) = (\mathbf{f}(t)|\mathbf{u}_m(t))_H.$$

For $m = 1, 2, \dots$ giver V -coerciviteten af a jf. (2.20), at

$$K_1 \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \leq \operatorname{Re} a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t) + K_2 |\mathbf{u}_m(t)|^2.$$

Desuden er

$$2\operatorname{Re} (\mathbf{f}(t)|\mathbf{u}_m(t))_H \leq 2|(\mathbf{f}(t)|\mathbf{u}_m(t))_H| \leq 2|\mathbf{f}(t)| |\mathbf{u}_m(t)| \leq |\mathbf{f}(t)|^2 + |\mathbf{u}_m(t)|^2,$$

og ifølge sætning 1.5.3 samt (2.18) er

$$\partial_t (\mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m)_H = \langle \mathbf{u}'_m, \overline{\mathbf{u}_m} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}'_m, \overline{\mathbf{u}_m} \rangle} = 2\operatorname{Re} \langle \mathbf{u}'_m, \overline{\mathbf{u}_m} \rangle = 2\operatorname{Re} (\mathbf{u}'_m | \mathbf{u}_m)_H.$$

I alt fås for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$\partial_t \left(|\mathbf{u}_m(t)|^2 \right) + 2K_1 \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\operatorname{Re} (\mathbf{u}'_m(t) | \mathbf{u}_m(t))_H + 2\operatorname{Re} a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t) + 2K_2 |\mathbf{u}_m(t)|^2 \\ &= 2\operatorname{Re} ((\mathbf{f}(t) | \mathbf{u}_m(t))_H - a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t)) + 2\operatorname{Re} a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t) + 2K_2 |\mathbf{u}_m(t)|^2 \\ &= 2\operatorname{Re} (\mathbf{f}(t) | \mathbf{u}_m(t))_H + 2K_2 |\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq |\mathbf{f}(t)|^2 + (1 + 2K_2) |\mathbf{u}_m(t)|^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Beviset opdeles herefter i punkter, der hver behandler et led på venstresiden af (2.34).

(i) For $\eta(t) := |\mathbf{u}_m(t)|^2$ og $\xi(t) := |\mathbf{f}(t)|^2$ giver (2.35)-(2.36) for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$\eta'(t) \leq (1 + 2K_2)\eta(t) + \xi(t).$$

Eftersom $\mathbf{f} \in L_2(0, T; H)$, er

$$\int_0^T |\xi(t)| \, dt = \int_0^T |\mathbf{f}(t)|^2 \, dt < \infty,$$

så $\xi(t)$ er integrabel på $[0, T]$. Idet η er absolut kontinuert, kan Gronwalls ulighed på differentiell form fra lemma B.0.1 således benyttes, hvilket for $t \in [0, T]$ resulterer i, at

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t (1+2K_2) \, ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \xi(s) \, ds \right). \quad (2.37)$$

Af (2.30) og (2.31) fås

$$\eta(0) = \left| \sum_{k=1}^m (g | w_k)_H w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^m |(g | w_k)_H| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(g | w_k)_H| \right)^2 = |g|^2,$$

hvorved (2.37) giver, at

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}_m(t)|^2 &\leq \max_{0 \leq t \leq T} e^{(1+2K_2)t} \left(\eta(0) + \int_0^t \xi(s) \, ds \right) \\ &\leq e^{(1+2K_2)T} \left(|g|^2 + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; H)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Til at runde beviset for punktet af benyttes (1.10):

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}_m(t)| \leq e^{\frac{(1+2K_2)T}{2}} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; H)} \right).$$

(ii) Ved integration af (2.35)-(2.36) over intervallet $[0, T]$ fås

$$\begin{aligned} &|\mathbf{u}_m(T)|^2 - |\mathbf{u}_m(0)|^2 + 2K_1 \|\mathbf{u}_m\|_{L_2(0, T; V)}^2 \\ &\leq (1 + 2K_2) \int_0^T |\mathbf{u}_m(t)|^2 \, dt + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; H)}^2, \end{aligned}$$

så ved at ignorere det første led på venstresiden og benytte (2.38) følger, at

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{u}_m\|_{L_2(0,T;V)}^2 \tag{2.39} \\
 & \leq \frac{1}{2K_1} \left(|\mathbf{u}_m(0)|^2 + (1 + 2K_2) \int_0^T \max_{0 \leq s \leq T} |\mathbf{u}_m(s)|^2 dt + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 \right) \\
 & \leq \frac{1}{2K_1} \left((1 + (1 + 2K_2)T) \max_{0 \leq s \leq T} |\mathbf{u}_m(s)|^2 + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 \right) \\
 & \leq \frac{1}{2K_1} \left((1 + (1 + 2K_2)T) e^{(1+2K_2)T} (|g|^2 + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2) + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 \right) \\
 & \leq K_3 \left(|g|^2 + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 \right), \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

hvor $K_3 := \frac{1+(1+(1+2K_2)T)e^{(1+2K_2)T}}{2K_1}$. Punktet afrundes ligesom punkt (i).

- (iii) Eftersom V er et Hilbertrum, og $\text{span}\{w_k\}_{k=1}^m$ i henhold til [Joh09, Lemma 6.2.1] er lukket, kan Projektionssætningen [Ped00, Theorem 4.13] benyttes:

$$V = \text{span}\{w_k\}_{k=1}^m \oplus (\text{span}\{w_k\}_{k=1}^m)^\perp.$$

For $v \in V$ med $\|v\| \leq 1$ haves således, at $v = v_1 + v_2$, hvor $v_1 \in \text{span}\{w_k\}_{k=1}^m$ og $v_2 \in (\text{span}\{w_k\}_{k=1}^m)^\perp$. Idet $(v_1|v_2)_V = 0$, giver Pythagoras' sætning, at

$$\|v_1\|^2 \leq \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|v_1 + v_2\|^2 \leq 1. \tag{2.41}$$

Da der findes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, så $v_1 = \sum_{k=1}^m \alpha_k w_k$, fås for n.a. $t \in [0, T]$ ved brug af (2.32), at

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}'_m(t)|v_1)_H + a(\mathbf{u}_m(t), v_1; t) &= \sum_{k=1}^m \overline{\alpha_k} ((\mathbf{u}'_m(t)|w_k)_H + a(\mathbf{u}_m(t), w_k; t)) \\
 &= \sum_{k=1}^m \overline{\alpha_k} (\mathbf{f}(t)|w_k)_H = (\mathbf{f}(t)|v_1)_H.
 \end{aligned}$$

Sammen med (2.30) resulterer det i

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u}'_m(t), \bar{v} \rangle &= (\mathbf{u}'_m(t)|v)_H = \left(\sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k \middle| v_1 + v_2 \right)_H \\
 &= (\mathbf{u}'_m(t)|v_1)_H = (\mathbf{f}(t)|v_1)_H - a(\mathbf{u}_m(t), v_1; t).
 \end{aligned}$$

Hermed fås ved brug af uligheden i (2.41) og begrænsetheden af a jf. (2.19), at

$$|\langle \mathbf{u}'_m(t), \bar{v} \rangle| \leq |\mathbf{f}(t)| \|v_1\| + K_b \|\mathbf{u}_m(t)\| \|v_1\| \leq K_4 (|\mathbf{f}(t)| + \|\mathbf{u}_m(t)\|),$$

hvor $K_4 := \max\{1, K_b\}$. Dermed er

$$\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{V^*} = \sup \{ |\langle \mathbf{u}'_m(t), w \rangle| \mid w \in V, \|w\| \leq 1 \} \leq K_4 (|\mathbf{f}(t)| + \|\mathbf{u}_m(t)\|).$$

Ved at kvadrere begge sider af uligheden og udnytte (1.9) fås

$$\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{V^*}^2 \leq 2K_4^2 (|\mathbf{f}(t)|^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|^2).$$

Integration over $[0, T]$ resulterer ved hjælp af (2.39)-(2.40) i uligheden

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 \leq 2K_4^2 \left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L_2(0,T;V)}^2 \right) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} &\leq 2K_4^2 \left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 + K_3 \left(|g|^2 + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 \right) \right) \\ &\leq 2K_4^2 (1 + K_3) \left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)}^2 + |g|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

og (1.10) runder punktet af.

I alt resulterer punkt (i)-(iii) i, at

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}_m(t)| + \|\mathbf{u}_m\|_{L_2(0,T;V)} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L_2(0,T;V^*)} \\ &\leq \left(\sqrt{e^{T(1+2K_2)}} + \sqrt{K_3} + K_4 \sqrt{2(1+K_3)} \right) \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right), \end{aligned}$$

hvormed sætningen er bevist. $\square$

2.1.3 Eksistens og entydighed

I dette afsnit opnås en svag løsning til (2.21)-(2.22) ud fra funktionsfølgen $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ved groft sagt at lade m gå mod uendelig. Afsnittet indeholder to sætninger, der tilsammen giver eksistensen af en entydigt bestemt svag løsning til begyndelsesvær-diproblemet. Først følger imidlertid et tæthedsresultat:

Lemma 2.1.7

Lad H være et Hilbertrum med en ortonormal basis $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Ved at multiplicere basisvektorerne med C^∞ -elementer og danne linearkombinationer heraf opnås en tæt delmængde af $L_2(0, T; H)$, hvor $T > 0$.

Bevis:

Det skal bevises, at for $N \in \mathbb{N}$ og glatte funktioner $d_k :]0, T[\rightarrow \mathbb{C}$, hvor $k = 1, \dots, N$, ligger funktioner på formen

$$\sum_{k=1}^N d_k(t) w_k \quad (2.44)$$

tæt i $L_2(0, T; H)$. For vilkårligt $\mathbf{f} \in L_2(0, T; H)$ er $\mathbf{f}(t) \in H$ for fast $t \in]0, T[$, så

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{f}(t)|w_k)_H w_k, \quad (2.45)$$

og $(\mathbf{f}(t)|w_k)_H \in L_2(]0, T[)$, eftersom $\mathbf{f} :]0, T[\rightarrow V$ er stærkt målelig og det indre produkt kontinuert, så afbildningen $t \mapsto (\mathbf{f}(t)|w_k)_H$ er Borel målelig. For ethvert $\varepsilon > 0$ giver (2.45), at der eksisterer $N \in \mathbb{N}$, så

$$\left\| \mathbf{f} - \sum_{k=1}^N (\mathbf{f}|w_k)_H w_k \right\|_{L_2(0,T;H)} = \left(\int_0^T \left\| \mathbf{f}(t) - \sum_{k=1}^N (\mathbf{f}(t)|w_k)_H w_k \right\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Idet $C^\infty([0, T])$ er tæt i $L_2([0, T])$, eksisterer funktioner $d_k \in C^\infty([0, T])$ for $k \in \mathbb{N}$ tilstrækkeligt tæt på $(\mathbf{f}(t)|w_k)_H$ til, at

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{f} - \sum_{k=1}^N d_k w_k \right\|_{L_2(0, T; H)} \\ & \leq \left\| \mathbf{f} - \sum_{k=1}^N (\mathbf{f}|w_k)_H w_k \right\|_{L_2(0, T; H)} + \left\| \sum_{k=1}^N (\mathbf{f}|w_k)_H w_k - \sum_{k=1}^N d_k w_k \right\|_{L_2(0, T; H)} \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_0^T \left(\sum_{k=1}^N |(\mathbf{f}(t)|w_k)_H - d_k(t)| \|w_k\|_H \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dermed kan $\mathbf{f} \in L_2(0, T; H)$ approksimeres af funktioner på formen (2.44). $\square$

Sætning 2.1.8 Eksistens af svag løsning

Lad antagelserne være de samme som i sætning 2.1.5. Da eksisterer en svag løsning til begyndelsesværdiproblemet i (2.21)-(2.22).

Bevis:

Ud fra sætning 2.1.6 kan slutes, at $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ er begrænset i $L_2(0, T; V)$ og $\{\mathbf{u}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ i $L_2(0, T; V^*)$, eftersom højresiden af (2.34) er uafhængig af m . Dermed eksisterer i henhold til Banach-Alaoglus sætning [Ped95, 2.5.2] omhandlende svag kompakthed en delfølge $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ og et element $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$, så

$$\mathbf{u}_{m_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \mathbf{u} \text{ i } L_2(0, T; V). \quad (2.46)$$

Idet $\{\mathbf{u}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ er begrænset, gælder dette ligeledes om $\{\mathbf{u}'_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, hvormed der eksisterer en delfølge $\{\mathbf{u}'_{m_{l_p}}\}_{p \in \mathbb{N}}$ og $\mathbf{w} \in L_2(0, T; V^*)$, så

$$\mathbf{u}'_{m_{l_p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{w} \text{ i } L_2(0, T; V^*). \quad (2.47)$$

Desuden gælder, at

$$\mathbf{u}_{m_{l_p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{u} \text{ i } L_2(0, T; V), \quad (2.48)$$

hvormed lemma 1.2.2 giver, at $\mathbf{u}_{m_{l_p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{u}$ i $D'([0, T]; V)$. Af (2.47) slutes analogt, at $\mathbf{u}'_{m_{l_p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{w}$ i $D'([0, T]; V^*)$. I henhold til bemærkningen under definition 1.1.2 er $\partial_t : D'([0, T]; V^*) \rightarrow D'([0, T]; V^*)$ kontinuert, og $D'([0, T]; V) \subseteq D'([0, T]; V^*)$, hvor $V \subseteq V^*$ topologisk, så konvergensen af $\mathbf{u}_{m_{l_p}}$ gælder også heri. Derved slutes, at $\mathbf{u}' = \mathbf{w}$, idet grænseværdier er entydigt bestemt i Hausdorff-topologien på $D'([0, T]; V^*)$.

Herefter argumenteres for, at $\mathbf{u}$ opfylder (2.15). Først vælges $N \in \mathbb{N}$ og en funktion $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; V)$ på formen $\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N d_k(t) w_k$, hvor $d_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ er glat for $k = 1, \dots, N$. Dernæst vælges $m \geq N$, og (2.32) multipliceres med $\overline{d_k(t)}$, hvorefter

der summeres over k og integreres over $]0, T[$:

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}'_m(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t) | \mathbf{v}(t))_H dt. \quad (2.49)$$

Herunder undersøges i væsentligt flere detaljer end i [Eva98, s. 357], hvad der sker med (2.49) for $m = m_{l_p}$, når p går mod uendelig. Grænsefunktionen for $\{\mathbf{u}'_{m_{l_p}}\}_{p \in \mathbb{N}}$ er i henhold til ovenstående $\mathbf{u}'$, så pr. definition af svag konvergens fås for ethvert $\mathbf{g} \in L_2(0, T; V^*)$ ved brug af (1.3) og en lineær, bijektiv isometri $\Phi : V \rightarrow V^*$, at

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_{m_{l_p}} \middle| \mathbf{g} \right)_{L_2(0, T; V^*)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\Phi^{-1}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_{m_{l_p}})(t) \middle| \Phi^{-1}\mathbf{g}(t) \right)_V dt \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T \left\langle (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_{m_{l_p}})(t), \Phi^{-1}\mathbf{g}(t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Da $\Phi^{-1}\mathbf{g}$ er en vilkårlig funktion i $L_2(0, T; V)$, sættes $\Phi^{-1}\mathbf{g} = \bar{\mathbf{v}}$, så

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'_{m_{l_p}}(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle dt \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle dt.$$

Grænsen af det andet led på venstresiden i (2.49) betragtes ved at indsætte $\mathbf{v}$ og en vilkårlig funktion $\tilde{\mathbf{u}} \in L_2(0, T; V)$ i a og benytte begrænsenheden heraf:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T a(\tilde{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}(t); t) dt \right| &\leq K_b \int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\| \|\mathbf{v}(t)\| dt \\ &\leq K_b \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(0, T; V)} \|\mathbf{v}\|_{L_2(0, T; V)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dermed er afbildningen $\tilde{\mathbf{u}} \mapsto \int_0^T a(\tilde{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}(t); t) dt$ indeholdt i $(L_2(0, T; V))'$. Grundet den svage konvergens i (2.48) følger, at

$$\int_0^T a(\mathbf{u}_{m_{l_p}}(t), \mathbf{v}(t); t) dt \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) dt.$$

Idet højresiden af (2.49) er uafhængig af p , giver ovenstående, at

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t) | \mathbf{v}(t))_H dt. \quad (2.51)$$

Denne lighed gælder for ethvert element i $L_2(0, T; V)$, hvilket bevises ved at udnytte, at funktioner på formen

$$\sum_{k=1}^N \frac{d_k(t)}{\|w_k\|_V} w_k$$

ifølge lemma 2.1.7 ligger tæt i $L_2(0, T; V)$, eftersom $\left\{ \frac{w_k}{\|w_k\|_V} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ udgør en ortonormal basis for V . Dermed eksisterer for et vilkårligt $\mathbf{v} \in L_2(0, T; V)$ en følge $\{\mathbf{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ af funktioner på denne form, så

$$\mathbf{v}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{v} \text{ i } L_2(0, T; V), \quad (2.52)$$

hvilket medfører, at $\mathbf{v}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{v}$ i $L_2(0, T; H)$, hvormed

$$\int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}_m(t))_H dt = (\mathbf{f}|\mathbf{v}_m)_{L_2(0,T;H)} \rightarrow (\mathbf{f}|\mathbf{v})_{L_2(0,T;H)} = \int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}(t))_H dt.$$

Samtidig gælder ifølge (2.51), at

$$\int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}_m(t))_H dt = \int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}_m(t)} \rangle dt + \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_m(t); t) dt. \quad (2.53)$$

Konvergens af hvert led på højresiden i (2.53) behandles separat. Som konsekvens af (2.52) haves

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \overline{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_m)(t)} \rangle dt \right| \leq \int_0^T \|\mathbf{u}'(t)\|_{V^*} \|(\mathbf{v} - \mathbf{v}_m)(t)\| dt \\ & \leq \left(\int_0^T \|\mathbf{u}'(t)\|_{V^*}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|(\mathbf{v} - \mathbf{v}_m)(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

hvormed

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}_m(t)} \rangle dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle dt.$$

Tilsvarende fås for det andet led, at

$$\int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_m(t); t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) dt,$$

idet udregninger analoge til (2.50) giver

$$\left| \int_0^T a(\mathbf{u}(t), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_m)(t); t) dt \right| \leq K_b \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_m\|_{L_2(0,T;V)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Af (2.53) fås dermed, at

$$\int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}_m(t))_H dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle dt + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt,$$

hvorved (2.51) gælder for samtlige $\mathbf{v} \in L_2(0, T; V)$. Heri indsættes derfor $\overline{\varphi(t)}\mathbf{v}(x)$, hvor $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ og $\mathbf{v} \in L_2(0, T; V)$:

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) \right) \varphi(t) dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}(t))_H \varphi(t) dt.$$

Eftersom φ er en vilkårlig testfunktion, følger af variationsregningens grundlemma, at for n.a. $t \in [0, T]$ er

$$\langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) = (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}(t))_H.$$

For at kunne udnytte variationsregningens grundlemma kræves, at leddene i ligheden er lokalt integrable, men dette kan vises ved brug af Cauchy-Schwarzs ulighed og begrænsetheden af a . Dermed opfylder $\mathbf{u}$ ligheden i (2.15).

Den resterende del af beviset har til formål at bevise, at $\mathbf{u}$ opfylder (2.16). Først vælges $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; V)$ med $\mathbf{v}(T) \equiv 0$ og sætning 1.5.3 samt (2.51) benyttes herpå:

$$\int_0^T \left(-\langle \overline{\mathbf{v}'(t)}, \mathbf{u}(t) \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T \left(-\partial_t (\mathbf{u}(t)|\mathbf{v}(t))_H + \langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}(t)} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt \\ &= (\mathbf{u}(0)|\mathbf{v}(0))_H + \int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}(t))_H dt. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Sætning 1.5.3 giver, at $(\mathbf{u}|\mathbf{v})_H \in C([0, T])$, hvilket er relevant, eftersom $t = 0$ undervejs indsættes heri. Ligheden fås også for $\mathbf{u}_m$ ved at benytte (2.49), så

$$\int_0^T \left(-\langle \overline{\mathbf{v}'(t)}, \mathbf{u}_m(t) \rangle + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}(t))_H dt + (\mathbf{u}_m(0)|\mathbf{v}(0))_H.$$

Herefter sættes $m = m_{l_p}$ og da (2.30) samt (2.31) giver, at

$$\mathbf{u}_{m_{l_p}}(0) = \sum_{k=1}^{m_{l_p}} d_{m_{l_p}}^k(0) w_k = \sum_{k=1}^{m_{l_p}} (g|w_k)_H w_k \xrightarrow{p \rightarrow \infty} g,$$

konkluderes ud fra argumenter analoge til tidligere, at

$$\int_0^T \left(-\langle \overline{\mathbf{v}'(t)}, \mathbf{u}(t) \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t); t) \right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t)|\mathbf{v}(t))_H dt + (g|\mathbf{v}(0))_H. \quad (2.56)$$

Idet $\mathbf{v}(0) \in V$ er vilkårlig, V er tæt i H , og der ved sammenligning af (2.54)-(2.55) og (2.56) fås

$$(\mathbf{u}(0)|\mathbf{v}(0))_H = (g|\mathbf{v}(0))_H,$$

så $(\mathbf{u}(0) - g|\mathbf{v}(0))_H = 0$, er $\mathbf{u}(0) = g$. Dermed er $\mathbf{u}$ en svag løsning til (2.21)-(2.22). $\square$

Sætning 2.1.9 Entydighed af svag løsning

Lad antagelserne være de samme som i sætning 2.1.5. Dermed er en svag løsning til problemet i (2.21)-(2.22) entydigt bestemt.

Bevis:

Antag, at $\mathbf{u}$ er en svag løsning til (2.21)-(2.22) med $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ og $g \equiv 0$. Ved at benytte sætning 1.5.3 og (2.15) med $v = \mathbf{u}(t)$ samt $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$, fås for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}(t)|^2 \right) + \operatorname{Re} a(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t); t) = \operatorname{Re} \left(\langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{u}(t)} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t); t) \right) = 0.$$

Af V -coerciviteten af a jf. (2.20) fås, idet $K_1 > 0$, at

$$\operatorname{Re} a(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t); t) \geq K_1 \|\mathbf{u}(t)\|^2 - K_2 |\mathbf{u}(t)|^2 \geq -K_2 |\mathbf{u}(t)|^2.$$

Tilsammen viser dette, at

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}(t)|^2 \right) = -\operatorname{Re} a(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t); t) \leq K_2 |\mathbf{u}(t)|^2,$$

og eftersom $|\mathbf{u}(0)|^2 = 0$ jf. antagelsen om g og (2.16), giver Gronwalls ulighed på differentiell form fra lemma B.0.1, at $\mathbf{u}(t) = 0$ for $t \in [0, T]$.

For svage løsninger $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ til begyndelsesværdiproblemet med almene $\mathbf{f}$ og g have i henhold til definitionen af en svag løsning, at $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(0) = 0$, og for $v \in V$ og n.a. $t \in [0, T]$ er

$$\langle \mathbf{u}'_1(t) - \mathbf{u}'_2(t), \bar{v} \rangle + a(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t), v; t) = 0.$$

Dermed er $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ en svag løsning til (2.21)-(2.22) med data $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ og $g \equiv 0$, så af ovenstående følger, at $\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{0}$ på $[0, T]$. $\square$

2.2 DEN SVAGE LØSNING OG ENERGIULIGHEDERNE

I forrige afsnit blev eksistensen og entydigheden af en svag løsning $\mathbf{u}$ til (2.21)-(2.22) godtgjort. Behandlingen af problemstillingen tages i dette afsnit et skridt videre end [Eva98] ved at undersøge, hvorvidt sætning 2.1.6 om energiulighederne også gælder for $\mathbf{u}$, når de gælder for funktionerne $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, der fremkom ved Galerkin approksimationerne. Derudover betragtes, hvilken konsekvens det i så fald har for løsningsoperatoren

$$T : L_2(0, T; H) \oplus H \rightarrow C([0, T]; H) \cap L_2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V^*)$$

givet ved $T(\mathbf{f}, g) = \mathbf{u}$. Det bemærkes, at i henhold til definition 2.1.2 er $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$ og $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V^*)$, hvormed $\mathbf{u}' \in H^1(0, T; V^*)$. Yderligere fås af sætning 1.5.3, at $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$, så T afbilder over i den angivne værdimængde.

Sætning 2.2.1 Den svage løsning og energiulighederne

Lad antagelserne være de samme som i sætning 2.1.5. Den svage løsning $\mathbf{u}$ til (2.21)-(2.22) opfylder for en konstant $\tilde{K}$, der kun afhænger af T og sesquilinear formen a , at

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}(t)| + \|\mathbf{u}\|_{L_2(0, T; V)} + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq \tilde{K} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; H)} \right). \quad (2.57)$$

Bevis:

Først bevises en ulighed mellem normen af en svagt konvergent følge og dens grænsefunktion. For et Hilbertrum X og en følge $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$ i X er

$$\|x\|_X^2 = (x|x)_X = \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m|x)_X,$$

og ved at tage absolut værdi på begge sider fås

$$\|x\|_X^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} |(x_m|x)_X| = \liminf_{m \rightarrow \infty} |(x_m|x)_X| \leq \|x\|_X \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|_X.$$

Nu giver division med $\|x\|_X$, at

$$\|x\|_X \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|_X \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|_X,$$

hvilket er trivielt for $x = 0$.

Af den svage konvergens i (2.46) og (2.39)-(2.40) følger hermed, at

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_{m_l}\|_{L_2(0,T;V)} \leq \sqrt{K_3} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right).$$

Tilsvarende fås ved brug af den svage konvergens i (2.47) og (2.42)-(2.43), at

$$\|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_{m_{lp}}\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq K_4 \sqrt{2(1+K_3)} \left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} + |g| \right).$$

Ved at anvende sætning 1.5.3 samt de to foregående vurderinger fås

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}(t)| &\leq K \left(\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V^*)} \right) \\ &\leq K \left(\sqrt{K_3} + K_4 \sqrt{2(1+K_3)} \right) \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right), \end{aligned}$$

hvorved (2.57) er bevist. $\square$

Dette resultat bruges til at begrunde kontinuiteten af løsningsoperatoren T . Først og fremmest er T lineær på ethvert par i $L_2(0,T;H) \oplus H$, hvilket fås ved at udnytte lineariteten af begyndelsesværdiproblemet, som T er løsningsoperator for – samt entydigheden af en løsning hertil. For $(\mathbf{f}, g), (\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{g}) \in L_2(0,T;H) \oplus H$ og $\alpha \in \mathbb{C}$ gælder således, at

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{f}, \alpha g) &= \alpha T(\mathbf{f}, g), \\ T(\mathbf{f} + \tilde{\mathbf{f}}, g + \tilde{g}) &= T(\mathbf{f}, g) + T(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{g}). \end{aligned}$$

Fra lemma A.0.1 vides, at en norm på definitionsområdet for T er $\|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} + |g|$, mens lemma A.0.2 giver, at en norm på fællesområdet, som T afbilder over i, er

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}(t)| + \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} + \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V^*)}^2}.$$

Dette udtryk minder om energiulighederne for $\mathbf{u}$ angivet i (2.57), hvilke derfor kan bidrage med en øvre vurdering af udtrykket. Da $V \subseteq V^*$ topologisk, findes $K_t > 0$, så $\|\mathbf{u}(t)\|_{V^*} \leq K_t \|\mathbf{u}(t)\|$, og dermed $\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq K_t \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)}$. I alt haves, at

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}(t)| + \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} + \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V^*)}^2} \\ &\leq \tilde{K} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right) + K_t \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;V)} + \|\mathbf{u}'\|_{L_2(0,T;V^*)} \\ &\leq \tilde{K} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right) + (1 + K_t) \tilde{K} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right) \\ &= (2 + K_t) \tilde{K} \left(|g| + \|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;H)} \right), \end{aligned}$$

hvilket viser begrænsetheden og dermed kontinuiteten af løsningsoperatoren.

Begyndelsesværdiproblemet i (2.21)-(2.22) med data $\mathbf{f}$ og g siges dermed at være velstillet, eftersom den svage løsning eksisterer, er entydigt bestemt og afhænger kontinuert af problemets data. Det sidste er en eftertrægtet egenskab for problemer, der beskriver fysiske fænomener, da det her er ønskeligt, at løsningen ikke bliver påvirket „for meget“, hvis de givne data „ændres lidt“ – eksempelvis pga. måleusikkerhed.

Kapitel 3

Maksimumsprincipper for parabolske operatorer

Formålet med kapitlet er at bevise vigtige maksimumsprincipper. Inden for emnet er værket [PW67] af M. Protter og H. Weinberger fra 1967 en klassisk reference, der både behandler maksimumsprincipper for elliptiske, parabolske og hyperbolske partielle differentialligninger.

Resultaterne er nyttige i forbindelse med en senere analyse af en konkret diffusions- og reaktionsligning. Antagelserne undervejs er derfor i nogen udstrækning tilpasset eksemplet, men der gøres dog opmærksom på, hvorledes de, såfremt det er muligt, kan svækkes for at opnå mere generelle resultater. Det bemærkes, at der regnes reelt, og $U \subset \mathbb{R}^n$ er en åben og begrænset mængde, hvis parabolske rand angives ved

$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T = (\overline{U} \times [0, T]) \setminus (U \times]0, T]) = (\overline{U} \times \{0\}) \cup (\partial U \times]0, T]).$$

3.1 DET SVAGE MAKSIMUMSPRINCIP

Det svage maksimumsprincip giver tilstrækkelige betingelser for, hvornår minimum og maksimum over $\overline{U_T}$ af en bestemt funktion antages på den parabolske rand.

Sætning 3.1.1 Det svage maksimumsprincip [Eva98, Theorem 8, s. 368]

Lad $u : \overline{U_T} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion med $\partial_i u, \partial_{ij}^2 u, \partial_t u \in C(U_T)$ for $i, j = 1, \dots, n$, samt $u \in C(\overline{U_T})$. Lad A betegne en uniformt parabolsk differentialoperator på ikke-divergensformen i (2.5), hvor $a_{ij} = a_{ji}$ for $i, j = 1, \dots, n$ og $c \equiv 0$ i U_T .

- (i) Hvis $\partial_t u + Au < 0$ i U_T , så antages maksimum af u over $\overline{U_T}$ ikke på U_T .
- (ii) Hvis $\partial_t u + Au \leq 0$ i U_T , så er $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.
- (iii) Hvis $\partial_t u + Au > 0$ i U_T , så antages minimum af u over $\overline{U_T}$ ikke på U_T .
- (iv) Hvis $\partial_t u + Au \geq 0$ i U_T , så er $\min_{\overline{U_T}} u = \min_{\Gamma_T} u$.

Det bemærkes, at punkt (i) og (iii) er en tilføjelse i forhold til udgaven hos [Eva98].

En funktion u , som opfylder $\partial_t u + Au \leq 0$ i U_T kaldes en underløsning, mens den betegnes en overløsning, såfremt $\partial_t u + Au \geq 0$ i U_T .

Bevis:

For at bevise punkt (i) og (ii) antages, at

$$\partial_t u + Au < 0 \text{ i } U_T, \quad (3.1)$$

samt at der eksisterer $(x_0, t_0) \in U_T$, så $\max_{\overline{U_T}} u = u(x_0, t_0)$. Hvis $t_0 \in]0, T[$, er $\nabla u(x_0, t_0) = 0$, og Hesse-matricen $Hu(x_0, t_0)$ er negativ semidefinit, hvorved der for alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gælder, at

$$\xi \cdot Hu(x_0, t_0)\xi \leq 0,$$

så ved at vælge $\xi = e_k$ fås, at $\partial_{kk}^2 u(x_0, t_0) \leq 0$ for $k = 1, \dots, n$.

Ifølge antagelserne er matricen $M := (a_{ij}(x_0, t_0))_{n \times n}$ symmetrisk og positiv definit, hvor sidstnævnte er en konsekvens af, at den uniforme parabolicitet af A giver eksistensen af $\theta > 0$, så der for alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gælder, at

$$x^T M x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq \theta |x|^2 > 0.$$

Dermed slutes, at matricens egenverdier er positive, og den er ortogonalt diagonaliserbar med en diagonalmatrix bestående af egenverdierne. Dvs. der eksisterer en ortogonal matrix $O = (o_{ij})_{n \times n}$, så

$$OMO^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (3.2)$$

med $\lambda_i > 0$ for $i = 1, \dots, n$. Nu laves en substitution ved at indføre $y = x_0 + O(x - x_0) := \Psi(x)$ for $x \in \Psi^{-1}(U)$, der er åben, eftersom U er åben, og Ψ er kontinuert. Derved sikres, at $y \in U$, hvormed $x \mapsto y(x) \mapsto u(y(x))$ er veldefineret. Skrives $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$, er $y_k = x_{0,k} + \sum_{l=1}^n o_{kl}(x_l - x_{0,l})$ for $k = 1, \dots, n$, hvorved den afledte heraf mht. x_i kun får bidrag fra leddet med $l = i$. Ved at anvende kædereglene følger således for $i, j = 1, \dots, n$, at

$$\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n o_{ki} \partial_{y_k} u,$$

og dermed

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= \sum_{k=1}^n o_{ki} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial y_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n o_{ki} (\partial_{y_k y_1}^2 u \partial_{x_j} y_1 + \dots + \partial_{y_k y_n}^2 u \partial_{x_j} y_n) = \sum_{k,l=1}^n o_{ki} o_{lj} \partial_{y_k y_l}^2 u. \end{aligned}$$

Ved at udnytte dette, (3.2), $\lambda_k > 0$ samt $\partial_{y_k y_k}^2 u(x_0, t_0) \leq 0$ for $k = 1, \dots, n$, fås i punktet (x_0, t_0) , at

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u &= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} o_{ki} o_{lj} \right) \partial_{y_k y_l}^2 u = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n o_{ki} (MO^T)_{il} \right) \partial_{y_k y_l}^2 u \\ &= \sum_{k,l=1}^n (O(MO^T))_{kl} \partial_{y_k y_l}^2 u = \sum_{k=1}^n \lambda_k \partial_{y_k y_k}^2 u \leq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Eftersom $c \equiv 0$ og $\nabla u(x_0, t_0) = 0$, er

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u \geq 0 \text{ i } (x_0, t_0), \quad (3.4)$$

men det betyder, at $\partial_t u + Au \geq 0$ i (x_0, t_0) , hvilket strider mod antagelsen i (3.1), så u antager ikke maksimum over $\overline{U_T}$ i et indre punkt.

Nu betragtes tilfældet $t_0 = T$. Dermed er $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$, og ved at gentage ovenstående argumentation følger, at vurderingen i (3.4) stadig holder. Atter opnås modstridende, at $\partial_t u + Au \geq 0$ i (x_0, t_0) , hvilket beviser punkt (i).

For at færdiggøre beviset for punkt (ii) antages, at $\partial_t u + Au \leq 0$ i U_T . For $\varepsilon > 0$ indføres $u^\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$, så

$$\partial_t u^\varepsilon + Au^\varepsilon = \partial_t u - \varepsilon + Au < 0 \text{ i } U_T.$$

Ved at anvende den forrige del af beviset på u^ε , der er lige så regulær som u , slutes, at $\max_{\overline{U_T}} u^\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u^\varepsilon$. Det er klart, at $\max_{\overline{U_T}} u \geq \max_{\Gamma_T} u$, og antages, at der gælder skarp ulighed, fås

$$\max_{\overline{U_T}} u > \max_{\Gamma_T} u \geq \max_{\Gamma_T} u^\varepsilon = \max_{\overline{U_T}} u^\varepsilon. \quad (3.5)$$

Herefter tages $\alpha > 0$, og ε vælges, så $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{T}$, hvormed

$$u^\varepsilon = u - \varepsilon t \geq u - \frac{\alpha}{T} t \geq u - \alpha$$

for alle $(x, t) \in \overline{U_T}$, så $\max_{\overline{U_T}} u^\varepsilon + \alpha \geq \max_{\overline{U_T}} u$. Vælges $\alpha < \max_{\overline{U_T}} u - \max_{\Gamma_T} u$, der pr. antagelse er positiv, opnås, at

$$\max_{\overline{U_T}} u^\varepsilon + \max_{\overline{U_T}} u - \max_{\Gamma_T} u > \max_{\overline{U_T}} u,$$

så $\max_{\overline{U_T}} u^\varepsilon > \max_{\Gamma_T} u$, hvilket strider mod (3.5), hvormed $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.

Punkt (iv) bevises ved at udnytte, at $-u$ opfylder antagelserne i punktet, når u opfylder dem i punkt (ii), og denne funktion antager ifølge ovenstående sit minimum på den paraboliske rand. Beviset for punkt (iii) følger analogt. $\square$

3.2 HARNACKS ULIGHED

Afsnittet indledes med et lemma, som giver en vurdering af en specifik sum indeholdende elementerne fra to symmetriske matricer. Lemmaet gør brug af sporet af en matrix $M = (m_{ij})_{n \times n}$, hvilket er defineret ved $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$.

For $\tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})_{n \times n}$ er $\text{tr}(M\tilde{M}) = \text{tr}(\tilde{M}M)$, idet begge udtryk er lig $\sum_{i,j=1}^n m_{ij}\tilde{m}_{ji}$. Heraf følger, at similære matricer har samme spor, for hvis O er en invertibel $n \times n$ matrix, er $\text{tr}(O^{-1}MO) = \text{tr}(MOO^{-1}) = \text{tr}(M)$.

Til sidst indføres matrixnormen

$$|M| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2}.$$

Lemma 3.2.1

Lad P og Q være symmetriske $n \times n$ matricer, hvis indgange er reelle. Såfremt egenværdierne for P er nedadtil begrænsede af $\theta > 0$, er

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n p_{ij}p_{kl}q_{ki}q_{lj} \geq \theta^2|Q|^2.$$

Bevis:

Til at starte med foretages en række direkte omskrivninger af summen ved at udnytte, at P og Q er symmetriske:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^n p_{ij}p_{kl}q_{ki}q_{lj} &= \sum_{i,k,l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij}q_{lj} \right) p_{kl}q_{ki} = \sum_{i,l=1}^n (PQ)_{il} \sum_{k=1}^n p_{kl}q_{ki} \\ &= \sum_{i,l=1}^n (PQ)_{il} (QP)_{il} = \text{tr} \left(PQ(QP)^T \right) = \text{tr} \left((PQ)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Symmetrien af P giver eksistensen af en ortogonal matrix $O = (o_{ij})_{n \times n}$, så

$$OPO^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \Lambda,$$

hvor diagonalelementerne er egenværdierne for P . For matricen $B := OQO^T$ ses af (3.6), idet similære matricer har samme spor, at

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^n p_{ij}p_{kl}q_{ki}q_{lj} &= \text{tr} \left(O(PQ)^2 O^T \right) = \text{tr} \left(OPO^T OQO^T OPO^T OQO^T \right) \\ &= \text{tr}(\Lambda B \Lambda B) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix}^2 \right). \end{aligned}$$

Eftersom Q er symmetrisk, er B også symmetrisk, så når det sidste udtryk udregnes, vil der i hvert led kun optræde én indgang af B , men til gengæld i 2. potens. Derudover vil hvert led indeholde to af P 's egenverdier, der alle kan vurderes ned ved θ , hvormed

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n p_{ij}p_{kl}q_{ki}q_{lj} \geq \theta^2 \operatorname{tr}(B^2) = \theta^2 \operatorname{tr}(Q^2) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^n q_{ij}^2 = \theta^2 |Q|^2.$$

□

Som yderligere forberedelse til Harnacks ulighed betragtes en funktion $v \in C^2(U_T)$ samt en uniformt parabolisk differentialoperator A på ikke-divergensformen i (2.5), hvor $a_{ij} = a_{ji}$ for $i, j = 1, \dots, n$. For fast (x, t) indføres matricen $M = (a_{ij})_{n \times n}$, der – ligesom Hesse-matricen for v – er symmetrisk, og egenverdierne for M betegnes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Idet A er uniformt parabolisk, fås for $\xi \in \mathbb{R}^n$ af (2.6), at

$$\xi^T M \xi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2,$$

så ved at lade ξ være egenvektoren x_{λ_j} hørende til λ_j for $j = 1, \dots, n$ og udnytte, at

$$x_{\lambda_j}^T M x_{\lambda_j} = x_{\lambda_j}^T \lambda_j x_{\lambda_j} = \lambda_j |x_{\lambda_j}|^2,$$

kan λ_j vurderes nedadtil ved θ . Således kan lemma 3.2.1 benyttes på M og Hv :

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v \geq \theta^2 |Hv|^2.$$

Harnacks ulighed giver, at supremum over et indre område i U af en passende funktion u , der opfylder $\partial_t u + Au = 0$ i U_T , til et positivt tidspunkt kan vurderes opadtil ved infimum over det samme område til et vilkårligt senere tidspunkt. Resultatet kræver ikke, at U er begrænset, så derfor ses der bort fra denne antagelse.

Sætning 3.2.2 Parabolisk Harnack-ulighed [Eva98, Theorem 10, s. 370]

Lad A være en uniformt parabolisk differentialoperator på ikke-divergensformen i (2.5), hvor $a_{ij} \in C^\infty(U_T) \cap C(\overline{U_T})$, $a_{ij} = a_{ji}$ og $b_i \equiv c \equiv 0$ i U_T for $i, j = 1, \dots, n$. Antag, at $u : \overline{U_T} \rightarrow \mathbb{R}$ er en funktion, for hvilken $u, \partial_i u, \partial_{ij}^2 u, \partial_t u \in C(U_T)$ for $i, j = 1, \dots, n$, samt $\partial_t u + Au = 0$ og $u \geq 0$ i U_T .

Lad V være en åben, sammenhængende mængde med kompakt $\overline{V} \subset U$. Dermed eksisterer for hvert $0 < t_1 < t_2 \leq T$ en konstant K_H , så

$$\sup_V u(\cdot, t_1) \leq K_H \inf_V u(\cdot, t_2). \quad (3.7)$$

Konstanten K_H afhænger kun af V, t_1, t_2 og A 's koefficienter.

I [Eva98] henvises til [Lie96] for en mere generel udgave af Harnacks ulighed, hvor det eneste krav til de variable koefficienter er, at de skal være Borel målelige og

begrænsede. Beviset nedenfor er fra [Eva98], men dog er der her brugt væsentlig mere plads på det, idet kildens bevis primært skitserer strategien, hvorimod nedenstående afdækker detaljerne. Beviset er pga. dets længde delt op i en række mindre afsnit.

For at opnå udsagnet i sætningen er det vigtigt, at alle de konstanter, som optræder, er uafhængige af u . Derfor skrives al afhængighed af u eksplicit.

Reduktion til positivitet

Det er nok at vise Harnacks ulighed, når $u > 0$ i U_T , idet resultatet ellers kan bruges på $u + \varepsilon$ for $\varepsilon > 0$, da $u + \varepsilon > 0$ og $\partial_t(u + \varepsilon) + A(u + \varepsilon) = 0$ i U_T . Derved er

$$\sup_V u(\cdot, t_1) \leq \sup_V (u + \varepsilon)(\cdot, t_1) \leq K_H \inf_V (u + \varepsilon)(\cdot, t_2).$$

Heraf fås for alle $x \in V$ og $\varepsilon > 0$, at $\frac{1}{K_H} \sup_V u(\cdot, t_1) \leq u(x, t_2) + \varepsilon$. Eftersom konstanten K_H er uafhængig af $u + \varepsilon$ og dermed af ε , følger for alle $x \in V$, at

$$\frac{1}{K_H} \sup_V u(\cdot, t_1) \leq u(x, t_2),$$

hvorved $\sup_V u(\cdot, t_1) \leq K_H \inf_V u(\cdot, t_2)$.

Hjælpefunktioner

Til at starte med betragtes en vilkårlig mængde W med kompakt $\overline{W} \subset U$ samt $0 < s_1 < s_2 \leq T$. I de følgende afsnit foretages vurderinger af forskellige restled, og det bemærkes, at disse vurderinger gælder for $(x, t) \in \overline{W} \times [s_1, s_2]$.

Indføres $v = \ln u$ i U_T , fås for $i, j = 1, \dots, n$, at

$$\partial_i v = \frac{\partial_i u}{u} \quad \text{og} \quad \partial_{ij}^2 v = \frac{u \partial_{ij}^2 u - \partial_i u \partial_j u}{u^2},$$

så idet $\partial_t u - Au = 0$ i U_T , er

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \frac{\partial_t u}{u} = -\frac{1}{u} Au = \frac{1}{u} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{a_{ij} u \partial_{ij}^2 u - a_{ij} \partial_i u \partial_j u}{u^2} + a_{ij} \frac{\partial_i u}{u} \frac{\partial_j u}{u} \right) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \partial_{ij}^2 v + a_{ij} \partial_i v \partial_j v). \end{aligned}$$

For $w := \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 v$ og $\tilde{w} := \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_k v \partial_l v$ fås hermed, at

$$\partial_t v = w + \tilde{w}. \quad (3.8)$$

Differentialulighed for w

Ved brug af ovenstående følger for $k, l = 1, \dots, n$, at

$$\partial_{klt}^3 v = \partial_{kl}^2 w + 2 \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \partial_{ikl}^3 v \partial_j v + a_{ij} \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v) + R_1, \quad (3.9)$$

hvor

$$R_1 := \sum_{i,j=1}^n (\partial_{kl}^2 a_{ij} \partial_i v \partial_j v + \partial_k a_{ij} (\partial_{il}^2 v \partial_j v + \partial_i v \partial_{jl}^2 v) + \partial_l a_{ij} (\partial_{ik}^2 v \partial_j v + \partial_i v \partial_{jk}^2 v))$$

angiver restleddet. Ved at anvende (1.9), $Dv := (\partial_1 v, \dots, \partial_n v)$ samt

$$K_a := \sup_{i,j=1,\dots,n} \{ |\partial^\alpha a_{ij}(x, t)| \mid (x, t) \in \overline{W} \times [s_1, s_2] \text{ og } |\alpha| \leq 2 \}$$

kan R_1 for $\varepsilon > 0$ vurderes vha. Hesse-matricen Hv :

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{2} (\partial_j v)^2 + \frac{K_a^2}{2\varepsilon} (\partial_i v)^2 + \varepsilon (\partial_{il}^2 v)^2 + \frac{K_a^2}{\varepsilon} (\partial_j v)^2 + \varepsilon (\partial_{ik}^2 v)^2 + \frac{K_a^2}{\varepsilon} (\partial_j v)^2 \right) \\ &\leq \frac{n\varepsilon}{2} |Dv|^2 + \frac{nK_a^2}{2\varepsilon} |Dv|^2 + 2\varepsilon |Hv|^2 + \frac{2nK_a^2}{\varepsilon} |Dv|^2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{n\varepsilon}{2} + \frac{5nK_a^2}{2\varepsilon} \right)}_{K_1(\varepsilon)} |Dv|^2 + 2\varepsilon |Hv|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Af (3.9) følger, at

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \sum_{k,l=1}^n (a_{kl} \partial_{klt}^3 v + \partial_t a_{kl} \partial_{kl}^2 v) \\ &= \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 w + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{kl} a_{ij} (\partial_{ikl}^3 v \partial_j v + \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v) + \sum_{k,l=1}^n (a_{kl} R_1 + \partial_t a_{kl} \partial_{kl}^2 v). \end{aligned}$$

Idet $\partial_i w = \sum_{k,l=1}^n (\partial_i a_{kl} \partial_{kl}^2 v + a_{kl} \partial_{kli}^3 v)$, er

$$\partial_t w = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 w + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j v \partial_i w + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v + R_2, \quad (3.11)$$

hvor

$$R_2 := \sum_{k,l=1}^n (a_{kl} R_1 + \partial_t a_{kl} \partial_{kl}^2 v) - 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} \partial_j v \partial_i a_{kl} \partial_{kl}^2 v.$$

Af (3.10) fås

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq K_a \sum_{k,l=1}^n (|R_1| + |\partial_{kl}^2 v|) + 2K_a^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n |\partial_j v| |\partial_{kl}^2 v| \\ &\leq 2\varepsilon n^2 K_a |Hv|^2 + n^2 K_a K_1(\varepsilon) |Dv|^2 \\ &\quad + \frac{K_a}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\varepsilon |\partial_{kl}^2 v|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \right) + \varepsilon n^2 K_a^2 |Hv|^2 + \frac{n^3 K_a^2}{\varepsilon} |Dv|^2 \quad (3.12) \\ &= \varepsilon K_a \left(2n^2 + n^2 K_a + \frac{1}{2} \right) |Hv|^2 + \underbrace{n^2 K_a \left(K_1(\varepsilon) + \frac{nK_a}{\varepsilon} \right)}_{K_2(\varepsilon)} |Dv|^2 + \underbrace{\frac{n^2 K_a}{2\varepsilon}}_{K_3(\varepsilon)} |Dv|^2 \end{aligned}$$

Ved at benytte bemærkningen under lemma 3.2.1 fås af (3.11) og (3.12), at

$$\begin{aligned} \partial_t w - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 w - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j v \partial_i w &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v + R_2 \\ &\geq 2\theta^2 |Hv|^2 - \varepsilon K_a \left(2n^2 + n^2 K_a + \frac{1}{2} \right) |Hv|^2 - K_2(\varepsilon) |Dv|^2 - K_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

Det er muligt at vælge ε så lille, at $\varepsilon K_a (2n^2 + n^2 K_a + \frac{1}{2}) \leq \theta^2$, hvorved

$$\partial_t w - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 w - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j v \partial_i w \geq \theta^2 |Hv|^2 - K_2(\varepsilon) |Dv|^2 - K_3(\varepsilon). \quad (3.13)$$

Differentialulighed for $\tilde{w}$

Det er herefter ønsket at etablere en tilsvarende ulighed for $\tilde{w}$. Idet $a_{ij} = a_{ji}$ for $i, j = 1, \dots, n$, er

$$\partial_t \tilde{w} = \sum_{i,j=1}^n (\partial_t a_{ij} \partial_i v \partial_j v + 2a_{ij} \partial_i v \partial_{jt}^2 v),$$

og tilsvarende

$$\partial_k \tilde{w} = \sum_{i,j=1}^n (\partial_k a_{ij} \partial_i v \partial_j v + 2a_{ij} \partial_i v \partial_{jk}^2 v), \quad (3.14)$$

så

$$\begin{aligned} \partial_{kl}^2 \tilde{w} &= \sum_{i,j=1}^n (\partial_{kl}^2 a_{ij} \partial_i v \partial_j v + 2\partial_k a_{ij} \partial_{il}^2 v \partial_j v \\ &\quad + 2\partial_l a_{ij} \partial_{jk}^2 v \partial_i v + 2a_{ij} (\partial_{jkl}^3 v \partial_i v + \partial_{jk}^2 v \partial_{il}^2 v)). \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \tilde{w} \\ = 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i v \left(\partial_{tj}^2 v - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{klj}^3 v \right) - 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v + R_3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

for

$$R_3 := \sum_{i,j=1}^n \partial_t a_{ij} \partial_i v \partial_j v - \sum_{i,j,k,l=1}^n (a_{kl} \partial_{kl}^2 a_{ij} \partial_i v \partial_j v + 2\partial_k a_{ij} \partial_{il}^2 v \partial_j v + 2a_{kl} \partial_l a_{ij} \partial_{jk}^2 v \partial_i v),$$

som kan vurderes ved

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq \frac{nK_a}{2} \left(\varepsilon |Dv|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |Dv|^2 \right) + \frac{n^3 K_a^2}{2} \left(\varepsilon |Dv|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |Dv|^2 \right) \\ &\quad + n^2 K_a \left(\varepsilon |Hv|^2 + \frac{n}{\varepsilon} |Dv|^2 \right) + n^2 K_a^2 \left(\varepsilon |Hv|^2 + \frac{n}{\varepsilon} |Dv|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da

$$\partial_{t_j}^2 v = \sum_{k,l=1}^n (\partial_j a_{kl} \partial_{kl}^2 v + a_{kl} \partial_{klj}^3 v + \partial_j a_{kl} \partial_k v \partial_l v + 2a_{kl} \partial_{kj}^2 v \partial_l v),$$

fås ved brug af (3.14) og (3.15), at

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \tilde{w} - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \tilde{w} \\ &= \partial_t \tilde{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \tilde{w} - 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v (\partial_k a_{ij} \partial_i v \partial_j v + 2a_{ij} \partial_i v \partial_{jk}^2 v) \\ &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} (\partial_i v \partial_j a_{kl} \partial_{kl}^2 v - a_{kl} \partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v) + R_3 \\ &\geq -2K_a^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n (|\partial_i v \partial_{kl}^2 v| + |\partial_{ik}^2 v \partial_{jl}^2 v|) - |R_3|. \end{aligned}$$

Nu anvendes (1.9) for $\varepsilon > 0$, hvormed

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \tilde{w} - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \tilde{w} \\ &\geq -2K_a^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n \left(\varepsilon (\partial_{kl}^2 v)^2 + \frac{(\partial_i v)^2}{2\varepsilon} + \frac{(\partial_{ik}^2 v)^2}{2\varepsilon} \right) - |R_3| \\ &\geq -2K_a^2 \left(\left(n^2 \varepsilon + \frac{n^2}{2\varepsilon} \right) |Hv|^2 + \frac{n^3}{2\varepsilon} |Dv|^2 \right) - |R_3|. \end{aligned}$$

Ved at bruge vurderingen i (3.16), gruppere leddene og dernæst kalde den af koefficienterne foran $|Hv|^2$ og $|Dv|^2$, som numerisk er størst, for $K_4(\varepsilon)$ fås

$$\partial_t \tilde{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \tilde{w} - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \tilde{w} \geq -K_4(\varepsilon) |Hv|^2 - K_4(\varepsilon) |Dv|^2. \quad (3.17)$$

Differentialulighed for $\hat{w}$

Dernæst fryses ε , så vurderingerne i (3.13) og (3.17) gælder. Herefter indføres $\hat{w} = w + \kappa\tilde{w}$ for en konstant κ , der vælges så lille, at $\kappa K_4(\varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{2}$, hvormed

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \hat{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \hat{w} - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \hat{w} \\
 &= \partial_t w - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 w - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k w \\
 & \quad + \kappa \left(\partial_t \tilde{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \tilde{w} - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \tilde{w} \right) \tag{3.18} \\
 &\geq \theta^2 |Hv|^2 - K_2(\varepsilon) |Dv|^2 - K_3(\varepsilon) + \kappa \left(-K_4(\varepsilon) |Hv|^2 - K_4(\varepsilon) |Dv|^2 \right) \\
 &\geq \frac{\theta^2}{2} |Hv|^2 - (K_2(\varepsilon) + \kappa K_4(\varepsilon)) |Dv|^2 - K_3(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Positivitet af hjælpefunktion

Nu vælges en åben kugle V med kompakt $\bar{V} \subset U$ og $0 < t_1 < t_2 \leq T$. Derudover indføres en funktion $\zeta \in C^\infty(U_T)$ ved

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \zeta \leq 1 && \text{i } U_T \\
 \zeta &\equiv 0 && \text{på } \Gamma_T \\
 \zeta &\equiv 1 && \text{på } V \times [t_1, t_2].
 \end{aligned}$$

Hensigten i afsnittet er at vise positiviteten af hjælpefunktionen $(\zeta^4 \hat{w})(x, t) + \mu t$ for tilpas store parametre $\mu > 0$. Grundet kontinuiteten af $\hat{w}$ antager hjælpefunktionen minimum i et punkt $(x_0, t_0) \in \bar{U}_T$. Mængden W fra bevisets start vælges, så $V \subseteq W$ og $x_0 \in W$. Derudover vælges s_1 og s_2 , således $[t_1, t_2] \subseteq [s_1, s_2]$ samt $t_0 \in [s_1, s_2]$.

Antages, at minimum af $\zeta^4 \hat{w} + \mu t$ er negativt, er $(x_0, t_0) \in U_T$, eftersom $\zeta = 0$ på den paraboliske rand. Idet U er åben, og $x_0 \in U$, fås for $k = 1, \dots, n$, at

$$\partial_k (\zeta^4 \hat{w} + \mu t) = 4\zeta^3 \partial_k \zeta \hat{w} + \zeta^4 \partial_k \hat{w} = 0 \text{ i } (x_0, t_0).$$

Det er ikke muligt, at $\zeta(x_0, t_0) = 0$, da antagelsen derved giver, at μt_0 er negativ. Således kan divideres igennem med $\zeta^3(x_0, t_0)$, hvorved

$$4\partial_k \zeta \hat{w} + \zeta \partial_k \hat{w} = 0 \text{ i } (x_0, t_0). \tag{3.19}$$

Idet $t_0 \in]0, T]$, er $\partial_t (\zeta^4 \hat{w} + \mu t) \leq 0$, og af udregninger analoge til (3.3) for $\zeta^4 \hat{w} + \mu t$ frem for u og med minimum i stedet for maksimum fås dermed i (x_0, t_0) , at

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \partial_t (\zeta^4 \hat{w} + \mu t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 (\zeta^4 \hat{w} + \mu t) \\
 &= \mu + \hat{w} \partial_t \zeta^4 + \zeta^4 \partial_t \hat{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l (\hat{w} \partial_k \zeta^4 + \zeta^4 \partial_k \hat{w}) \\
 &= \mu + \hat{w} \partial_t \zeta^4 + \zeta^4 \partial_t \hat{w} \\
 &\quad - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} (\hat{w} \partial_{kl}^2 \zeta^4 + \partial_k \zeta^4 \partial_l \hat{w} + \partial_l \zeta^4 \partial_k \hat{w} + \zeta^4 \partial_{kl}^2 \hat{w}) \\
 &= \mu + \zeta^4 \left(\partial_t \hat{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \hat{w} \right) - 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l \zeta^4 \partial_k \hat{w} + \hat{R}_1,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

hvor $\hat{R}_1 := \partial_t \zeta^4 \hat{w} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \zeta^4 \hat{w}$. For en passende konstant $\hat{K}_1$ kan dette restled vurderes ved

$$\begin{aligned}
 |\hat{R}_1| &\leq |\hat{w}| \left(\partial_t \zeta^4 - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 \zeta^4 \right) = |\hat{w}| \left(4\zeta^3 \partial_t \zeta - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l (4\zeta^3 \partial_k \zeta) \right) \\
 &= |\hat{w}| \zeta^2 \left(4\zeta \partial_t \zeta - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} (12\partial_l \zeta \partial_k \zeta + 4\zeta \partial_{kl}^2 \zeta) \right) \leq \hat{K}_1 \zeta^2 |\hat{w}|.
 \end{aligned}$$

Af (3.20) fås i (x_0, t_0) ved brug af (3.18), at

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \left(\frac{\theta^2}{2} |Hv|^2 - (K_2(\varepsilon) + \kappa K_4(\varepsilon)) |Dv|^2 - K_3(\varepsilon) + 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \hat{w} \right) + \hat{R}_2,$$

hvor $\hat{R}_2 := -2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l \zeta^4 \partial_k \hat{w} + \hat{R}_1$ ved hjælp af (3.19) for en passende konstant $\hat{K}_2$ kan vurderes ved

$$|\hat{R}_2| \leq 8K_a \sum_{k,l=1}^n \zeta^3 |\partial_l \zeta| |\partial_k \hat{w}| + |\hat{R}_1| \leq \zeta^2 |\hat{w}| \left(32K_a \sum_{k,l=1}^n |\partial_l \zeta| |\partial_k \zeta| + \hat{K}_1 \right) \leq \hat{K}_2 \zeta^2 |\hat{w}|.$$

Herefter fås i (x_0, t_0) , at

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \left(\frac{\theta^2}{2} |Hv|^2 - (K_2(\varepsilon) + \kappa K_3(\varepsilon)) |Dv|^2 - K_2 \right) + \tilde{R}, \tag{3.21}$$

hvor $\tilde{R} := 2\zeta^4 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_l v \partial_k \hat{w} + \hat{R}_2$, hvilket ved brug af (3.19) og

$$K_s := \sup_{k=1,\dots,n} \{ |\partial_k \zeta| \mid (x, t) \in \overline{W} \times [s_1, s_2] \}$$

kan vurderes ved

$$\begin{aligned} |\tilde{R}| &\leq 2K_a \sum_{k,l=1}^n |\partial_l v| |4\zeta^3 \partial_k \zeta \hat{w}| + \hat{K}_2 \zeta^2 |\hat{w}| \\ &\leq 8K_a K_s \zeta^3 |\hat{w}| \sum_{k,l=1}^n |\partial_l v| + \hat{K}_2 \zeta^2 |\hat{w}| \leq 8n^2 K_a K_s \zeta^3 |\hat{w}| |Dv| + \hat{K}_2 \zeta^2 |\hat{w}|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da $(\zeta^4 \hat{w})(x, t) + \mu t$ antager negativt minimum i (x_0, t_0) , og $\mu, t_0, \zeta^4 \geq 0$, så er $\hat{w}(x_0, t_0) < 0$, hvormed $\tilde{w} < \frac{1}{\kappa} |w|$. Ved brug af (2.6) samt definitionen på w og $\tilde{w}$ giver dette, at der eksisterer $\theta > 0$, for hvilket

$$\theta (|\partial_1 v|^2 + \dots + |\partial_n v|^2) \leq \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_k v \partial_l v < \frac{1}{\kappa} \left| \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 v \right| \leq \frac{n^2 K_a}{\kappa} |Hv|.$$

Heraf slutes, at

$$|Dv|^2 \leq \frac{n^2 K_a}{\kappa \theta} |Hv|, \quad (3.23)$$

således der i (x_0, t_0) fås

$$\begin{aligned} |\hat{w}| &\leq |w| + \kappa |\tilde{w}| \leq K_a \sum_{i,j=1}^n (|\partial_{ij}^2 v| + \kappa |\partial_i v \partial_j v|) \\ &\leq K_a \left(n^2 |Hv| + \kappa \sum_{i=1}^n |\partial_i v| \sum_{j=1}^n |\partial_j v| \right) \leq n^2 K_a (|Hv| + \kappa |Dv|^2) \\ &\leq n^2 K_a \left(|Hv| + \kappa \frac{n^2 K_a}{\kappa \theta} |Hv| \right) = n^2 K_a \left(1 + \frac{n^2 K_a}{\theta} \right) |Hv|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ved hjælp af Youngs ulighed fås følgende, hvor $p, q \in]1, \infty[$ er duale eksponenter og $a, b \in \mathbb{R}$:

$$ab \leq \frac{\theta^2}{6} a^p + \frac{\left(\frac{\theta^2}{6} np \right)^{-\frac{q}{p}}}{q} b^q. \quad (3.25)$$

Ved at sætte

$$K_{\max} = \max \left\{ 8n^2 K_a K_s, \hat{K}_2, \sqrt{\frac{n^2 K_a}{\kappa \theta}}, n^2 K_a \left(1 + \frac{n^2 K_a}{\theta} \right) \right\}$$

fås af vurderingen i (3.22) ved brug af (3.23), (3.24) samt (3.25) med duale eksponenter værende $(2, 2)$ og $(\frac{4}{3}, 4)$, hvor hhv. K_Y^1 og K_Y^2 betegner de tilhørende koefficienter foran b^q , at

$$\begin{aligned} |\tilde{R}| &\leq K_{\max} \zeta^3 |Dv| |\hat{w}| + K_{\max} \zeta^2 |\hat{w}| \\ &\leq \zeta^3 K_{\max}^3 |Hv|^{\frac{3}{2}} + K_{\max}^2 \zeta^2 |Hv| \leq \frac{\theta^2}{3} \zeta^4 |Hv|^2 + \underbrace{K_Y^2 K_{\max}^{12} + K_Y^1 K_{\max}^4}_{K_s}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ved brug af (3.23) og (1.9) for parameteren $\frac{\theta^2}{3}$ fås

$$\begin{aligned} \zeta^4 (K_2(\varepsilon) + \kappa K_4(\varepsilon)) |Dv|^2 &\leq \underbrace{\zeta^4 (K_2(\varepsilon) + \kappa K_4(\varepsilon)) \frac{n^2 K_a}{\kappa \theta}}_{\dot{K}(\varepsilon)} |Hv| \\ &\leq \zeta^4 \frac{\theta^2}{6} |Hv|^2 + \frac{3\dot{K}(\varepsilon)^2}{2\theta^2}. \end{aligned}$$

Ud fra vurderingen i (3.26) fås hermed af (3.21), at

$$0 \geq \mu - \left(K_3(\varepsilon) - K_s - \frac{3\dot{K}(\varepsilon)^2}{2\theta^2} \right).$$

Ved at vælge $\mu = 1 + K_3(\varepsilon) - K_s - \frac{3\dot{K}(\varepsilon)^2}{2\theta^2}$, opnås dermed en modstrid med antagelsen om, at $\zeta \hat{w} + \mu t$ antager negativt minimum i (x_0, t_0) . Heraf slttes, at funktionen er ikke-negativ i U_T . Af definitionen på ζ følger således, at $\hat{w} + \mu t \geq 0$ i $V \times [t_1, t_2]$.

Ved brug af (3.8) og et resultat analogt til lemma 3.2.1 for $w = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_{kl}^2 v$ samt (3.23) noteres, at i $V \times [t_1, t_2]$ er

$$\begin{aligned} \partial_t v &= w + \frac{1}{\kappa} (\hat{w} - w) \geq \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) w - \frac{1}{\kappa} \mu t_2 \\ &\geq \theta \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) |Hv| - \frac{1}{\kappa} \mu t_2 \geq \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\kappa \theta^2}{n^2 K_a}}_{K_5} |Dv|^2 - \frac{1}{\kappa} \mu t_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Harnacks ulighed for en kugle

Herefter vælges $x_1, x_2 \in V$, og det udnyttes, at V er en kugle, så $\tilde{x}(s) := sx_2 + (1-s)x_1 \in V$ og $\tilde{t}(s) := st_2 + (1-s)t_1 \in [t_1, t_2]$ for $s \in [0, 1]$. Af (3.27) og (1.9) for $\tilde{\varepsilon} > 0$ følger via kædereolen, at

$$\begin{aligned} &v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \\ &= \int_0^1 ((Dv(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s))) \cdot (x_2 - x_1) + \partial_t v(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) (t_2 - t_1)) \, ds \\ &\geq \int_0^1 \left(-|Dv(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s))| |x_2 - x_1| + (t_2 - t_1) \left(K_5 |Dv(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s))|^2 - \frac{1}{\kappa} \mu t_2 \right) \right) \, ds \\ &\geq \int_0^1 \left(\left(K_5(t_2 - t_1) - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right) |Dv(\tilde{x}(s), \tilde{t}(s))|^2 - \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} |x_2 - x_1|^2 - (t_2 - t_1) \frac{1}{\kappa} \mu t_2 \right) \, ds. \end{aligned}$$

Ved at vælge $\tilde{\varepsilon}$, så $K_5(t_2 - t_1) - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = 0$, opnås

$$\begin{aligned} v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) &\geq \int_0^1 \left(-\frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} |x_2 - x_1|^2 - (t_2 - t_1) \frac{1}{\kappa} \mu t_2 \right) \, ds \\ &\geq -\frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} \text{diam}(V)^2 - (t_2 - t_1) \frac{1}{\kappa} \mu t_2 =: \gamma, \end{aligned} \quad (3.28)$$

hvorved γ kun afhænger af $\mu, t_2, \text{diam}(V), |t_1 - t_2|$ og A 's koefficienter. Dermed er

$$\ln u(x_2, t_2) \geq \ln u(x_1, t_1) + \gamma,$$

så for $\tilde{K}_H := e^\gamma$ haves

$$u(x_2, t_2) \geq \tilde{K}_H u(x_1, t_1).$$

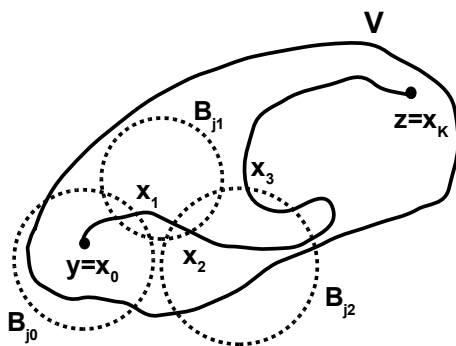
Denne ulighed gælder for alle $x_1, x_2 \in V$, hvormed (3.7) er bevist, når V er en kugle.

Harnacks ulighed for en mere generel mængde

Nu betragtes det tilfælde, at V ikke nødvendigvis er en kugle – en situation, som kun nævnes med én linje i [Eva98]. Kravet, at $\bar{V} \subset U$ er kompakt, bibeholdes. Dermed kan V overdækkes af kugler, og denne overdækning kan udtyndes til en samling kugler $\mathcal{K} = \{B_1, \dots, B_K\}$, hvor $\bar{B}_i$ er kompakt og indeholdt i U for $i = 1, \dots, K$.

Dernæst vælges $y, z \in V$, og eftersom en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ er sammenhængende, hvis og kun hvis den er kurvesammenhængende, eksisterer en kurve $\mathcal{C}$ mellem y og z . Herefter indføres en række punkter ved først at sætte $y = x_0$, der tilhører en kugle $B_{j_0} \in \mathcal{K}$. Såfremt $z \in B_{j_0}$, følger resultatet af forrige afsnit. Derfor antages, at $z \notin B_{j_0}$.

Kurven snitter ∂B_{j_0} i mindst et punkt x_1 . Eftersom $x_1 \in V \setminus B_{j_0}$, er punktet med i mindst én af de andre kugler. En af disse udvælges og kaldes $B_{j_1} \in \mathcal{K}$. Den snitter $\mathcal{C}$ to eller flere steder. Skæringspunktet med den største parameterværdi på kurven kaldes x_2 . På den måde sikres, at punkterne vælges tættere og tættere på z . Idet $\mathcal{K}$ kun består af K kugler, vil algoritmen i højst K skridt nå z , som derfor betegnes x_K . Algoritmen er illustreret i figur 3.1.



Figur 3.1 Illustration af, hvorledes punkter og kugler udvælges af algoritmen.

Forøges radius tilpas lidt for hver kugle B_{j_i} , fås en ny kugle B'_{j_i} , der indeholder x_i, x_{i+1} , og som stadig opfylder, at $\bar{B'_{j_i}} \subset U$ er kompakt,. Dernæst opsplittes intervallet $[t_1, t_2]$ i K delintervaller, så $[t_1, t_2] = \bigcup_{j=1}^K [\tilde{t}_{j-1}, \tilde{t}_j]$, hvor $\tilde{t}_0 := t_1, \tilde{t}_K := t_2$ og

$\tilde{t}_{j-1} < \tilde{t}_j$ for $j = 1, \dots, K$. Dermed kan (3.28) benyttes på hvert B'_{j_i} , hvorved

$$v(z, t_2) - v(y, t_1) = \sum_{j=1}^K (v(x_j, \tilde{t}_j) - v(x_{j-1}, \tilde{t}_{j-1})) \geq \sum_{j=1}^K \gamma = K\gamma.$$

Heraf slttes for $K_H := e^{K\gamma}$, at $u(z, t_2) \geq K_H u(y, t_1)$, hvilket beviser Harnacks ulighed i det almene tilfælde.

3.3 DET STÆRKE MAKSIMUMSPRINCIP

Udsagnet i det stærke maksimumsprincip er, at en underløsning ikke kan antage sit maksimum i et indre punkt $(x_0, t_0) \in U_T$, medmindre den er konstant på U_{t_0} . Det tilsvarende gælder for en overløsning blot med minimum i stedet.

Sætning 3.3.1 Det stærke maksimumsprincip [Eva98, Theorem 11, s. 375]
 Lad $u : \overline{U_T} \rightarrow \mathbb{R}$ tilhøre $C^\infty(U_T) \cap C(\overline{U_T})$. Antag, at U er sammenhængende, og lad A være en uniformt parabolisk differentialoperator på ikke-divergensformen i (2.5), hvor $a_{ij}, b_i \in C^\infty(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ og $a_{ij} = a_{ji}$ for $i, j = 1, \dots, n$ samt $c \equiv 0$ i U_T .

- (i) Hvis $\partial_t u + Au \leq 0$ på U_T , og $\max_{\overline{U_T}} u$ antages i et indre punkt $(x_0, t_0) \in U_T$, så er u konstant på U_{t_0} .
- (ii) Hvis $\partial_t u + Au \geq 0$ på U_T , og $\min_{\overline{U_T}} u$ antages i et indre punkt $(x_0, t_0) \in U_T$, så er u konstant på U_{t_0} .

Ifølge [Eva98] kan antagelserne slækkes, således A 's koefficienter kun er kontinuerte, og $u \in C(\overline{U_T})$ opfylder, at $\partial_i u, \partial_{ij}^2 u, \partial_t u \in C(U_T)$ for $i, j = 1, \dots, n$.

Bevis:

Først bevises punkt (i). Antag, at $\partial_t u + Au \leq 0$ på U_T , og $\max_{\overline{U_T}} u$ antages i $(x_0, t_0) \in U_T$. Dernæst vælges en åben, glat og sammenhængende mængde W , som indeholder x_0 samt opfylder, at $\overline{W} \subset U$. Dette kan eksempelvis være en kugle om x_0 . Den paraboliske rand af W_T betegnes Δ_T . Det er et velkendt resultat for paraboliske differentiaalligninger, at randværdiproblemet

$$\begin{aligned} \partial_t v + Av &= 0 \quad \text{i } W_T \\ v &= u \quad \text{på } \Delta_T \end{aligned} \tag{3.29}$$

har en løsning v , samt at denne tilhører $C^\infty(W_T) \cap C(\overline{W_T})$, idet u ligger heri. Eftersom

$$(\partial_t + A)(u - v) \leq 0,$$

følger af det svage maksimumsprincip i sætning 3.1.1 og (3.29), at

$$\max_{\overline{W_T}}(u - v) = \max_{\Delta_T}(u - v) = 0,$$

hvormed $u \leq v$ på $\overline{W_T}$. Det svage maksimumsprincip giver også, at

$$\max_{\overline{W_T}} v = \max_{\Delta_T} v = \max_{\Delta_T} u \leq u(x_0, t_0) =: M,$$

så $u \leq v \leq M$ i W_T . Dermed sluttet, at $v(x_0, t_0) = M$. Idet $c \equiv 0$ og $v \leq M$, haves for $\tilde{v} := M - v$, at

$$\partial_t \tilde{v} + A\tilde{v} = 0 \quad \text{og} \quad \tilde{v} \geq 0 \text{ i } W_T. \quad (3.30)$$

Nu vælges en åben, sammenhængende mængde V , der indeholder x_0 , og hvor $\overline{V} \subset W$. Idet $\tilde{v}$ er lige så regulær som v , følger af den paraboliske udgave af Harnacks ulighed i sætning 3.2.2, at der for et fast $t \in]0, t_0[$, hvor $t_0 \leq T$ pr. antagelse, gælder, at

$$\sup_V \tilde{v}(\cdot, t) \leq K_H \inf_V \tilde{v}(\cdot, t_0) \quad (3.31)$$

for en konstant K_H . Eftersom $x_0 \in V$ og $v(x_0, t_0) = M$, er

$$\inf_V \tilde{v}(\cdot, t_0) \leq \tilde{v}(x_0, t_0) = 0,$$

og da $\tilde{v} \geq 0$ jf. (3.30), medfører (3.31), at $\tilde{v} \equiv 0$ på $V \times \{t\}$ for hvert $t \in]0, t_0[$. Af kontinuitetsgrunde haves således, at $\tilde{v} \equiv 0$ på $\overline{V_{t_0}}$.

For et vilkårligt element $y \in W$ eksisterer en kurve i W mellem x_0 og y . Eftersom W er åben, haves i hvert punkt på kurven en kugle med centrum i punktet, og hvis aflukning er indeholdt i W . Foreningen af disse kugler er en åben omegn af både x_0 og y . Den er kurvesammenhængende, idet to vilkårlige punkter kan forbindes ved at lave en kurve fra punkterne hen til deres respektive kuglers centrum og derfra følge den oprindelige kurve. Således er mængden sammenhængende og kan derfor benyttes som V .

Idet y er valgt vilkårligt, er $\tilde{v} \equiv 0$ i W_{t_0} , hvormed $v \equiv M$ i W_{t_0} . Grundet kontinuiteten af v følger, at $v \equiv M$ i $\overline{W_{t_0}}$. Da $v = u$ på Δ_T , ses at $u \equiv M$ på $\partial W \times [0, t_0]$. Tilbage er at godtgøre, at $u \equiv M$ på U_{t_0} – dette er uddybet væsentligt i forhold til [Eva98].

Først vælges $y \in U$ vilkårligt, hvorefter x_0 og y forbindes med en kurve, dvs. der eksisterer en kontinuert funktion $\kappa : [0, 1] \rightarrow U$, så $\kappa(0) = x_0$ og $\kappa(1) = y$. Dernæst vælges $\delta_0 > 0$, så $\overline{B}(x_0, \delta_0) \subset U$, hvormed denne kugle kan benyttes som W i ovenstående. Eftersom

$$B(x_0, \delta_0) = \bigcup_{0 \leq \delta < \delta_0} \partial B(x_0, \delta),$$

og enhver af kuglerne $B(x_0, \delta)$ kan bruges som W , er $u \equiv M$ på $B(x_0, \delta_0) \times [0, t_0]$.

Nu indføres

$$S = \{\tau \in [0, 1] \mid \forall t \in [0, t_0] : u(\kappa(\tau), t) = M\},$$

og af ovenstående vides, at $\kappa^{-1}(B(x_0, \delta_0)) \in S$. Eftersom $0 \in \kappa^{-1}(B(x_0, \delta_0))$, er $S \neq \emptyset$.

For en konvergent følge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i S med grænsepunkt τ haves grundet kontinuiteten af κ og u , at $u(\kappa(\tau_n), t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(\kappa(\tau), t)$ for alle $t \in [0, t_0]$, så $\tau \in S$. Idet supremum af en mængde er et grænsepunkt herfor, er $\sigma := \sup S \in S$.

Herefter antages, at $\sigma < 1$. Eftersom $\sigma \in S$, haves for $z := \kappa(\sigma) \in U$, at $u(z, t) = M$ for $t \in [0, t_0]$, hvormed u antager maksimum i (z, t_0) . Af den foregående analyse med (x_0, t_0) erstattet af dette punkt vides, at der eksisterer en kugle $B(z, r) \subset U$ med radius $r > 0$, hvorpå $u(\cdot, t) \equiv M$ for $t \in [0, t_0]$.

Kontinuiteten af κ giver, at $\kappa^{-1}(B(z, r))$ er åben i $[0, 1]$, og da σ tilhører Urbilledet, findes $\tau > \sigma$, så $u(\kappa(\tau), t) = M$ for $t \in [0, t_0]$. Dermed er $\tau \in S$, hvilket er i modstrid med definitionen af σ , hvorefter det sluttet, at $\sigma = 1$.

Af ovenstående fås, at $1 \in S$, så $u(y, t) = u(\kappa(1), t) = M$ for $t \in [0, t_0]$, hvormed $u \equiv M$ på U_{t_0} .

For at bevise punkt (ii) udnyttes, at $-u$ opfylder antagelserne i punktet, og af ovenstående følger, at funktionen er konstant på U_{t_0} . $\square$

Kapitel 4

Diffusions- og reaktionsligninger

Dette kapitel er hovedsageligt baseret på [Eva98, kap. 9], dog udvidet til det komplekse tilfælde. I [Smo83] behandles emnet til dels mere generelt, idet funktionsrummet over U blot er et såkaldt tilladeligt Banachrum, hvilket bl.a. forudsætter, at det er indeholdt i rummet af begrænsede, kontinuerte funktioner.

I [Eva98] behandles kun Hilbertrummet $H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$, men til gengæld er der ingen begrænsning på dimensionen af U , hvilket ikke er tilfældet, hvis det skal være tilladeligt. Ifølge et korollar til Sobolevs sætning [Gru08, Corollary 6.14] er $H^l(U) \subseteq C_{L^\infty}^k(\bar{U})$, såfremt $l > k + \frac{n}{2}$. I denne situation er det interessant at betragte $l = 1$ og $k = 0$, hvormed $n < 2$, dvs. $n = 1$. Heraf sluttet, at det giver store begrænsninger på dimensionen, hvis $H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$ skal være tilladeligt.

I kapitlet behandles et mere generelt problem end i kapitel 2, eftersom (2.1) erstattes af en ikke-lineær ligning, og funktionerne generaliseres til vektorfunktioner. Der foretages dog også en indsnævring af problemstillingen, idet kun $A = -\Delta$ betragtes. Ligesom tidligere er $U_T := U \times]0, T]$, hvor $U \subset \mathbb{R}^n$ er åben, begrænset og glat.

Således behandles et problem af typen

$$\partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{i } U_T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{på } \partial U \times [0, T] \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{på } U \times \{t = 0\}, \quad (4.3)$$

hvor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ og $\Delta \mathbf{u} := (\Delta u_1, \dots, \Delta u_m)$. I nedenstående er $V := H_0^1(U; \mathbb{C}^m)$ og $H := L_2(U; \mathbb{C}^m)$.

Ligning (4.1) er en diffusions- og reaktionsligning, og hvis $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ angiver koncentrationerne af m forskellige kemiske stoffer i en væske, så beskriver $-\Delta \mathbf{u}$ i henhold til indledningen diffusionen, mens $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ beskriver stoffernes reaktion med hinanden. Ligning (4.2) og (4.3) angiver hhv. rand- og begyndelsesbetingelsen.

Det antages, at $\mathbf{g} \in V$, og $\mathbf{f} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ er Lipschitz-kontinuert, dvs. der eksisterer en konstant K_L , så følgende gælder for alle $x, y \in \mathbb{C}^m$:

$$\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\|_{\mathbb{C}^m} \leq K_L \|x - y\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Dermed haves

$$\|\mathbf{f}(x)\|_{\mathbb{C}^m} - \|\mathbf{f}(0)\|_{\mathbb{C}^m} \leq \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(0)\|_{\mathbb{C}^m} \leq K_L \|x\|_{\mathbb{C}^m},$$

hvorved der for $x \in \mathbb{C}^m$ og $\tilde{K} := \max\{K_L, \|\mathbf{f}(0)\|_{\mathbb{C}^m}\}$ gælder, at

$$\|\mathbf{f}(x)\|_{\mathbb{C}^m} \leq \|\mathbf{f}(0)\|_{\mathbb{C}^m} + K_L \|x\|_{\mathbb{C}^m} \leq \tilde{K}(1 + \|x\|_{\mathbb{C}^m}). \quad (4.4)$$

Ved brug af Minkowskis ulighed samt Poincarés ulighed [Gru08, Theorem 4.29] fås, at en norm på $H_0^1(U)$ er

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n \int_U |\partial_k v(x)|^2 dx} \text{ for } v \in H_0^1(U).$$

Eftersom $V = H_0^1(U)^m$ følger af (A.2), at for $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m) \in V$ er

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\|v_1\|_{H_0^1(U)}^2 + \dots + \|v_m\|_{H_0^1(U)}^2} = \left(\int_U \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\partial_j v_i(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

en norm på V . Ved brug af Poincarés ulighed fås for en konstant $\hat{K} > 0$, at

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &:= \int_U \|\mathbf{v}(x)\|_{\mathbb{C}^m}^2 dx = \int_U (|v_1(x)|^2 + \dots + |v_m(x)|^2) dx = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{L_2(U)}^2 \\ &\leq \hat{K} \sum_{i=1}^m \|\partial_1 v_i\|_{L_2(U)}^2 \leq \hat{K} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|\partial_j v_i\|_{L_2(U)}^2 = \hat{K} \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

så for normen $|\cdot|$ på $L_2(U; \mathbb{C}^m)$ gælder

$$|\mathbf{v}| \leq \sqrt{\hat{K}} \|\mathbf{v}\|. \quad (4.6)$$

Ved brug af a_D defineret i (2.26) indføres for $\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}} \in V$ sesquilinear formen

$$a(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}}) := \sum_{k=1}^m a_D(w_k, \tilde{w}_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n (\partial_j w_k | \partial_j \tilde{w}_k)_{L_2(U)}. \quad (4.7)$$

Eftersom a_D er $H_0^1(U)$ -elliptisk jf. punkt (i) på s. 30, findes en konstant $c > 0$, så

$$\operatorname{Re} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} a_D(w_k, w_k) \geq \sum_{k=1}^m c \|w_k\|_{H_0^1(U)}^2 = c \|\mathbf{w}\|^2, \quad (4.8)$$

hvormed a er V -elliptisk. Derudover er a begrænset på V , idet

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}})| &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \|\partial_j w_k\|_{L_2(U)} \|\partial_j \tilde{w}_k\|_{L_2(U)} \\ &= \sum_{k=1}^m \left| \left(\|\partial_1 w_k\|_{L_2(U)}, \dots, \|\partial_n w_k\|_{L_2(U)} \right) \cdot \left(\|\partial_1 \tilde{w}_k\|_{L_2(U)}, \dots, \|\partial_n \tilde{w}_k\|_{L_2(U)} \right) \right| \quad (4.9) \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|w_k\|_{H_0^1(U)} \|\tilde{w}_k\|_{H_0^1(U)} \leq \|\mathbf{w}\| \|\tilde{\mathbf{w}}\|. \end{aligned}$$

Af argumentationen omkring (2.13) følger, at for fast $\mathbf{v} \in V$ inducerer a en operator $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$, der for $\varphi \in C_0^\infty(U)^m$ i henhold til (A.3) er givet ved

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \overline{\varphi} \rangle = a(\mathbf{v}, \varphi) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \langle \partial_j v_k, \partial_j \overline{\varphi_k} \rangle = \sum_{k=1}^m \langle -\Delta v_k, \overline{\varphi_k} \rangle = \langle -\Delta \mathbf{v}, \overline{\varphi} \rangle.$$

Så $\mathcal{A}\mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v}$ i $(C_0^\infty(U)^m)'$, hvilket kan identificeres med $\mathcal{D}'(U)^m$ jf. sætning A.0.3.

Inspireret af definition 2.1.2 indføres en svag løsning til (4.1)-(4.3):

Definition 4.0.2 (Svag løsning)

En funktion $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$ med $\mathbf{u}' \in L_2(0, T; V^*)$ kaldes en svag løsning til (4.1)-(4.3), hvis

$$\langle \mathbf{u}'(t), \overline{\mathbf{v}} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) | \mathbf{v})_H$$

for hvert $\mathbf{v} \in V$ og n.a. $t \in [0, T]$, samt $\mathbf{u}(0) = \mathbf{g}$.

4.1 EKSISTENS OG ENTYDIGHED AF SVAG LØSNING

I dette afsnit bevises, at der eksisterer en entydigt bestemt svag løsning til (4.1)-(4.3). Hertil skal Banachs fikspunktssætning anvendes, der omhandler en afbildning af følgende type:

Definition 4.1.1 (Kontraktion)

Lad X være et Banachrum. En afbildning $J : X \rightarrow X$ kaldes en kontraktion, hvis der eksisterer en konstant $\gamma < 1$, så der for alle $x_1, x_2 \in X$ gælder, at

$$\|J(x_1) - J(x_2)\|_X \leq \gamma \|x_1 - x_2\|_X.$$

Besidder en afbildning denne egenskab, har den ifølge Banachs fikspunktssætning, der bevises ved iterativt at konstruere en Cauchy-følge, et entydigt fikspunkt.

Sætning 4.1.2 Eksistens og entydighed af svag løsning

Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være åben, begrænset og glat, samt lad $\mathbf{f} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ være Lipschitz-kontinuert og $\mathbf{g} \in V$. Dermed eksisterer en svag løsning til begyndelses- og randværdiproblemet givet ved (4.1)-(4.3), og denne er entydigt bestemt.

Bevis:

Størstedelen af beviset omhandler eksistensen af en svag løsning. Målet herfor er at anvende Banachs fikspunktssætning på en operator defineret på $X := C([0, T]; H)$ med $\|\mathbf{v}\|_X := \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{v}(t)|$. Idet $L_2(U; \mathbb{C}^m)$ er et Banachrum, gælder dette også for X .

For et vilkårligt $\mathbf{v} \in X$ sættes $\mathbf{h}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t))$ for $t \in [0, T]$. Herom gælder, at $\mathbf{h} \in L_2(0, T; H)$, idet $\mathbf{h}$ er en sammensætning af kontinuerte funktioner, så $\mathbf{h}$ er stærkt målelig, og af (4.4) fås, at

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_{L_2(0, T; H)}^2 &= \int_0^T |\mathbf{f}(\mathbf{v}(t))|^2 dt = \int_0^T \int_U \|\mathbf{f}(\mathbf{v}(x, t))\|_{\mathbb{C}^m}^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_U \tilde{K}^2 (1 + \|\mathbf{v}(x, t)\|_{\mathbb{C}^m})^2 dx dt < \infty. \end{aligned}$$

Nu betragtes det lineære system

$$\partial_t \mathbf{w} - \Delta \mathbf{w} = \mathbf{h} \text{ i } U_T \quad (4.10)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ på } \partial U \times [0, T] \quad (4.11)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} \text{ på } U \times \{t = 0\}, \quad (4.12)$$

hvor rand- og begyndelsesbetingelsen i hhv. (4.11) og (4.12) er uforandrede. Systemet er ikke-koblet, hvormed (4.10) kan opskrives som m uafhængige ligninger, der ifølge eksempel 2.0.5 er paraboliske. Det er muligt at bruge teorien fra afsnit 2.1.3, idet $-\Delta$ induceres af sesquilinear formen a , der er begrænset og V -elliptisk jf. hhv. (4.9) og (4.8).

Til (4.10)-(4.12) eksisterer dermed en entydig svag løsning $\mathbf{w} \in L_2(0, T; V)$ med $\mathbf{w}' \in L_2(0, T; V^*)$. Ifølge sætning 1.5.3 er $\mathbf{w} \in X$, og derudover opfylder $\mathbf{w}$, at $\mathbf{w}(0) = \mathbf{g}$ samt for hvert $\hat{\mathbf{v}} \in V$ og n.a. $t \in [0, T]$, at

$$\langle \mathbf{w}'(t), \bar{\hat{\mathbf{v}}} \rangle + a(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{v}}) = (\mathbf{h}(t)|\hat{\mathbf{v}})_H. \quad (4.13)$$

Operatoren $J : X \rightarrow X$ indføres ved $J(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, der er veldefineret grundet entydigheden af $\mathbf{w}$, og herunder vises, at såfremt $T > 0$ vælges tilpas lille, er J en kontraktion. I den forbindelse vælges $\tilde{\mathbf{v}} \in X$ vilkårligt, og $\tilde{\mathbf{w}} = J(\tilde{\mathbf{v}})$ indføres som ovenfor. Dermed opfylder $\tilde{\mathbf{w}}$ en lighed analog til (4.13) med $\tilde{\mathbf{h}} := \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}})$.

Dernæst benyttes benyttes punkt (ii) i sætning 1.5.3:

$$\begin{aligned} \partial_t |\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|^2 &= \langle \mathbf{w}' - \tilde{\mathbf{w}}', \overline{\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{w}' - \tilde{\mathbf{w}}'}, \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}} \rangle \\ &= 2\operatorname{Re} \langle \overline{\mathbf{w}' - \tilde{\mathbf{w}}'}, \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}} \rangle = 2\operatorname{Re} (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|\mathbf{w}' - \tilde{\mathbf{w}}')_H. \end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{w} \in D(-\Delta)$, følger af Lax-Milgrams lemma, at $a(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{v}}) = (-\Delta \mathbf{w}|\hat{\mathbf{v}})_H$ for alle $\hat{\mathbf{v}} \in V$, så ved at vælge $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{w}$ og benytte (4.5) samt (4.7) fås

$$\|\mathbf{w}\|^2 = a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = (-\Delta \mathbf{w}|\mathbf{w})_H.$$

Ved kompleks konjugering ses, at $\|\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{w}|\mathbf{w})_H$. Samles overstående fås

$$\begin{aligned} \partial_t |\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|^2 + 2\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2 &= 2\operatorname{Re} (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|\mathbf{w}' - \tilde{\mathbf{w}}')_H - 2(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|\Delta(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}))_H \\ &= 2\operatorname{Re} (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|\mathbf{w}' - \Delta \mathbf{w} - (\tilde{\mathbf{w}}' - \Delta \tilde{\mathbf{w}}))_H \\ &= 2\operatorname{Re} (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}})_H. \end{aligned}$$

Ved brug af (1.9) med parameteren $\hat{K}$ fra (4.6) haves

$$\partial_t |\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|^2 + 2\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2 \leq \frac{1}{\hat{K}} |\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|^2 + \hat{K} |\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}}|^2 \leq \|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2 + \hat{K} |\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}}|^2.$$

Ignoreres den resulterende norm $\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2$ på venstresiden og udnyttes Lipschitz-kontinuiteten af $\mathbf{f}$, opnås for Lipschitz-konstanten K_L , at

$$\partial_t |\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}|^2 \leq \hat{K} |\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t))|^2 \leq \hat{K} K_L^2 |\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)|^2.$$

Integreres over $[0, s]$ for $s \in [0, T]$ opnås

$$\int_0^s \partial_t |\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)|^2 dt \leq \hat{K} K_L^2 \int_0^s |\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)|^2 dt.$$

Da $\mathbf{w}$ og $\tilde{\mathbf{w}}$ opfylder begyndelsesbetingelsen i (4.12) fås

$$|\mathbf{w}(s) - \tilde{\mathbf{w}}(s)|^2 \leq \hat{K} K_L^2 \int_0^s |\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)|^2 dt + |\mathbf{w}(0) - \tilde{\mathbf{w}}(0)|^2 \quad (4.14)$$

$$\leq \hat{K} K_L^2 \int_0^s \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_X^2 dt \leq \hat{K} K_L^2 T \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_X^2. \quad (4.15)$$

Idet højresiden af (4.15) er uafhængig af s , er

$$\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|_X^2 = \max_{0 \leq s \leq T} |\mathbf{w}(s) - \tilde{\mathbf{w}}(s)|^2 \leq \hat{K} K_L^2 T \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_X^2.$$

Heraf fås

$$\|J(\mathbf{u}) - J(\tilde{\mathbf{u}})\|_X \leq K_L \sqrt{\hat{K} T} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_X,$$

hvorved J er en kontraktion, såfremt T vælges så lille, at $K_L \sqrt{\hat{K} T} < 1$.

Givet et vilkårligt T , vælges T' så $K_L \sqrt{\hat{K} T'} < 1$. Dermed kan Banachs fikspunktsætning anvendes til at finde et entydigt fikspunkt $\mathbf{v}_1$ for J , dvs. $J(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$. I henhold til definitionen af J er $\mathbf{v}_1$ på intervallet $[0, T']$ en svag løsning til (4.10)-(4.12) med $\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_1)$. Dermed er $\mathbf{v}_1$ en svag løsning til (4.1)-(4.3) på det samme interval. Eftersom $\mathbf{v}_1(t) \in V$ for n.a. $t \in [0, T']$, eksisterer $T_1 \in [\frac{9}{10}T', T']$, så $\mathbf{v}_1(T_1) \in V$.

Nu betragtes (4.10)-(4.12) med $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1(T_1)$. Hertil fås ved gentagelse af ovenstående argumentation en svag løsning $\mathbf{v}_2$ på intervallet $[0, T']$, og T_2 kan vælges i $[\frac{9}{10}T', T']$, så $\mathbf{v}_2(T_2) \in V$. Således kan $\mathbf{v}_1$ forlænges ved $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(t - T_1)$ for $T_1 < t \leq T_1 + T_2$ til en svag løsning på $[0, T_1 + T_2]$, sådan at $\mathbf{v}_1(T_1 + T_2) \in V$. Fortsættes iterativt, vindes mindst $\frac{9}{10}T'$ i hvert skridt, hvorved der i endeligt mange skridt konstrueres en svag løsning til (4.1)-(4.3) på hele intervallet $[0, T]$.

Entydigheden af den svage løsning bevises ved at antage, at $\mathbf{u}$ og $\tilde{\mathbf{u}}$ begge er svage løsninger til (4.1)-(4.3). Dermed er de fikspunkter for J , så $\mathbf{u} = J(\mathbf{u})$ og $\tilde{\mathbf{u}} = J(\tilde{\mathbf{u}})$, hvormed (4.14) for $s \in [0, T]$ giver, at

$$|\mathbf{u}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)|^2 \leq \hat{K} K_L^2 \int_0^s |\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)|^2 dt.$$

Af Gronwalls ulighed på integralform i lemma B.0.2 sluttes, at venstresiden er lig nul, så $\mathbf{u} \equiv \tilde{\mathbf{u}}$. $\square$

4.2 IKKE-LINEÆRT EKSEMPEL

I dette afsnit, der beror på [Eva98, afs. 9.4.1], behandles et konkret eksempel på en diffusions- og reaktionsligning med begyndelses- og randbetingelser. Eksemplet er en simpel udgave af (4.1)-(4.3), hvor $m = 1$, $U = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $f(u) = u^2$ og u er reel:

$$\partial_t u - \Delta u = u^2 \text{ i } U_T \quad (4.16)$$

$$u = 0 \text{ på } \partial U \times]0, T[\quad (4.17)$$

$$u = g \text{ på } U \times \{t = 0\}. \quad (4.18)$$

Herunder vises, at såfremt $T > 0$ og $g \geq 0$ er tilpas store i en bestemt forstand, som senere uddybes, eksisterer der ikke en glat løsning til ligningen i (4.16) med rand- og begyndelsesbetingelser værende hhv. (4.17) og (4.18).

Betragtes udelukkende det ikke lineære led i (4.16), haves den sædvanlige differentialligning $\frac{d}{dt}u = u^2$, der løses af $u(t) = \frac{1}{K-t}$ for $K \in \mathbb{R}$. Såfremt $u(0) > 0$, vil løsningen have en lodret asymptote i $t = K$. Diffusionsleddet i (4.16) har modsat en tendens til at virke udglattende. Den følgende analyse vil vise, hvad der sker, når de to led optræder i samme ligning.

Af spektralsætningen jf. punkt (iv)-(v) på s. 31 følger, at egenværdierne for $-\Delta_D$ er positive og kan ordnes, således der findes et mindste element $\lambda_1 > 0$. Dette element kaldes den principale egenværdi for $-\Delta_D$ og fra tidligere argumenter på s. 30-31 fås, at den tilhørende egenfunktion w_1 tilhører $H_0^1(U)$ og yderligere er glat. Dermed haves, at

$$\begin{aligned} -\Delta_D w_1 &= \lambda_1 w_1 \text{ i } U \\ w_1 &= 0 \text{ på } \partial U. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Det er velkendt, at w_1 kan vælges, så

$$w_1(x) > 0 \text{ i } U \quad \text{og} \quad \int_U w_1(x) dx = 1, \quad (4.20)$$

hvor positiviteten følger af [Eva98, Theorem 2, s. 336], som bevises ved hjælp af det stærke maksimumsprincip.

Herunder antages, at $u \in C^\infty(U \times]0, T]) \cap C(\overline{U_T})$ er en løsning til (4.16)-(4.18) med $g \geq 0$ og $g \not\equiv 0$. Bemærkningen under sætning 3.3.1 kan benyttes til at slække antagelsen om glatheden til $\partial_i u, \partial_{ij}^2 u, \partial_t u \in C(U_T)$ for $i, j = 1, \dots, n$ samt $u \in C(\overline{U_T})$.

Derudover antages, at $\inf_{\overline{U_T}} u$ realiseres i $(x_0, t_0) \in U_T$. Eftersom $\partial_t u - \Delta u = u^2 \geq 0$, er u ifølge det stærke maksimumsprincip i sætning 3.3.1 konstant på U_{t_0} , men $u = 0$ på $\partial U \times]0, T[$, så grundet kontinuiteten af u er $u = 0$ på U_{t_0} . Dermed er $g \equiv 0$, hvilket strider mod antagelsen, hvorved $\inf_{\overline{U_T}} u$ antages på randen, hvor $u = 0$. Således er $u > 0$ i U_T .

Dermed kan indføres den nulpunktsfrie funktion

$$\eta(t) := \int_U u(x, t) w_1(x) dx \text{ for } t \in [0, T],$$

og ved brug af (4.16), selvadjungeretheden af Δ_D samt (4.19) fås

$$\begin{aligned}\eta'(t) &= \int_U \partial_t u w_1 \, dx = \int_U (\Delta_D u + u^2) w_1 \, dx = \int_U (u \Delta_D w_1 + u^2 w_1) \, dx \\ &= \int_U (-u \lambda_1 w_1 + u^2 w_1) \, dx = -\lambda_1 \eta(t) + \int_U u^2 w_1 \, dx.\end{aligned}$$

Derudover giver Cauchy-Schwarzs ulighed og (4.20), at

$$\eta(t) = \int_U u w_1^{\frac{1}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \, dx \leq \left(\int_U u^2 w_1 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U w_1 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_U u^2 w_1 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

så

$$\eta'(t) = -\lambda_1 \eta(t) + \int_U u^2 w_1 \, dx \geq -\lambda_1 \eta(t) + \eta(t)^2.$$

Indføres $\xi(t) = e^{\lambda_1 t} \eta(t)$, der ligeledes er nulpunktsfri, giver uligheden, at

$$\begin{aligned}\xi'(t) &= e^{\lambda_1 t} \eta'(t) + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \eta(t) \\ &\geq e^{\lambda_1 t} (-\lambda_1 \eta(t) + \eta(t)^2) + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \eta(t) = e^{\lambda_1 t} \eta(t)^2 = e^{-\lambda_1 t} \xi(t)^2,\end{aligned}$$

hvormed

$$\left(-\frac{1}{\xi(t)} \right)' = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)^2} \geq e^{-\lambda_1 t}.$$

Ved integration på begge sider haves

$$\int_0^t \left(-\frac{1}{\xi(t)} \right)' dt = -\frac{1}{\xi(t)} + \frac{1}{\xi(0)} \geq \int_0^t e^{-\lambda_1 t} dt = -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_1},$$

så

$$-\frac{1}{\xi(t)} \geq -\frac{1}{\xi(0)} + \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} = \frac{-\lambda_1 + \xi(0)(1 - e^{-\lambda_1 t})}{\xi(0)\lambda_1}.$$

Nu antages, at $\eta(0) = \xi(0) > \lambda_1$, og det bemærkes, at denne antagelse i henhold til definitionen af η har indflydelse på størrelsen af $u(x, 0) = g$. Derudover indføres

$$t^* = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\eta(0) - \lambda_1}{\eta(0)} \right).$$

For $t \in [0, t^*[$ haves

$$\xi(t) \geq \frac{\xi(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \xi(0)(1 - e^{-\lambda_1 t})},$$

hvormed $\xi(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_-^*]{} \infty$. Idet $\lim_{t \rightarrow t_-^*} e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t^*}$, sluttet heraf, at $\lim_{t \rightarrow t_-^*} \eta(t) = \infty$.

Dette er imidlertid ikke muligt, hvis T er valgt så stor, at $t^* \in [0, T]$, da

$$u \mapsto u(\cdot, t) \mapsto (u(\cdot, t)|w_1)_{L_2(U)} = \eta(t)$$

er kontinuert på $[0, T]$. Dermed sluttet, at hvis g er så stor, at

$$\eta(0) = \int_U g w_1 \, dx > \lambda_1,$$

og T så stor, at $t^* \leq T$, kan regularitetsantagelserne om u ikke gælde. Ovenstående diskussion er værd at opsummere i en sætning:

Sætning 4.2.1

Lad $U = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, og lad λ_1 være den principale egen værdi for $-\Delta_D$. Hvis funktionen $u : \overline{U_T} \rightarrow \mathbb{R}$ er en svag løsning til

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= u^2 \quad \text{i } U_T \\ u &= 0 \quad \text{på } \partial U \times]0, T[\\ u &= g \quad \text{på } U \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

hvor g og T opfylder, at

$$\eta_0 := \int_U g(x) w_1(x) \, dx > \lambda_1 \quad \text{og} \quad T \geq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\eta_0 - \lambda_1}{\eta_0} \right),$$

så er $u \notin C^\infty(U \times]0, T[) \cap C(\overline{U_T})$.

Her stopper [Eva98] behandlingen af eksemplet, men det er interessant at holde det op mod afsnit 4.1. Konklusionen om regularitetsantagelserne for u kan virke modsigende set i lyset af sætning 4.1.2 omhandler eksistens og entydighed af en svag løsning til (4.1)-(4.3), hvor det af beviset følger, at den svage løsning er kontinuert på $[0, T]$.

I (4.1) kræves, at f er Lipschitz-kontinuert – et krav, som $f(u) = u^2$ ikke opfylder. Til gengæld er det muligt at definere f på anden vis, hvilket følger ved at antage, at u er en svag løsning til (4.16)-(4.18), og for $R := \sup_{\overline{U_T}} |u|$ indføre

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } |t| \leq R+1 \\ (R+1)|t| & \text{for } |t| \geq R+1. \end{cases}$$

Denne funktion er Lipschitz-kontinuert på $\mathbb{R}$ med konstanten $2(R+1)$, hvilket vises ved at tage $s, t \in \mathbb{R}$ og betragte den situation, at $|s| \leq R+1$ og $t \geq R+1$. Da fås, at

$$|f(t) - f(s)| = \int_s^{R+1} |2\tau| \, d\tau + \int_{R+1}^t |R+1| \, d\tau \leq 2(R+1) \int_s^t d\tau = 2(R+1)|t - s|.$$

Det er herudfra klart, hvorledes udregningerne skal modificeres for de øvrige kombinationer af s og t . Dermed er f Lipschitz-kontinuert på $\mathbb{R}$, og u løser (4.1)-(4.3) med dette f , eftersom funktionsværdierne for u tilhører $[-R, R]$ jf. definitionen af R , og på dette interval gør f ikke andet end at kvadrere.

Således sluttet, at u er kontinuert på $[0, T]$, men ifølge sætning 4.2.1 er det således ikke muligt, at $u \in C^\infty(U \times]0, T[)$, hvis g og T er tilpas store. I bedste fald er $u \in C^\infty(U \times]0, t])$ for t tæt på nul.

Eksemplet illustrerer, at sætning 4.1.2 ganske vist giver eksistensen af en entydig svag løsning til (4.1)-(4.3), men denne kan ikke forventes at være særlig regulær.

4.3 STATIONÆRT EKSEMPEL

I dette afsnit analyseres et ikke-lineært, stationært randværdiproblem, hvilket vil sige, at det er uafhængigt af t . Et problem af denne type har interesse i forbindelse med at modellere ligevægtstilstande for tidsafhængige problemer.

Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være åben, begrænset og glat. Systemet, der betragtes, er

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{i } U \quad (4.21)$$

$$u = 0 \quad \text{på } \partial U, \quad (4.22)$$

hvor $p > 1$, og u er en reel funktion. Den følgende analyse viser, at størrelsen af eksponenten p har stor indflydelse på løsningernes udseende.

Ifølge [Eva98, Theorem 3, s. 482] eksisterer mindst én ikke-triviell løsning til (4.21)-(4.22), såfremt $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$. Derfor antages her, at $\frac{n+2}{n-2} < p < \infty$, og målet er at bevise, at under vises geometriske antagelser om U er den eneste løsning i $C^2(\bar{U})$ den trivielle. Grundet denne opsplitning kaldes eksponenten $p = \frac{n+2}{n-2}$ kritisk.

Definition 4.3.1 (Stjerneformet område)

En mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er stjerneformet mht. origo, hvis der for hvert $x \in U$ gælder, at $\{\lambda x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq U$.

Det er klart, at U er stjerneformet mht. origo, såfremt U er konveks og $0 \in U$.

I det følgende betegner $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ det udadvendte enhedsnormalvektorfelt langs ∂U , hvilket er veldefineret, når U er C^1 .

Lemma 4.3.2 [Eva98, Lemma, s. 515]

Antag, at $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er C^1 og stjerneformet mht. origo. Da gælder for alle $x \in \partial U$, at $x \cdot \nu(x) \geq 0$.

Ved hjælp af dette lemma, som er geometrisk oplagt, er det muligt at bevise det føromtalte resultat omhandlende opførslen af løsninger til (4.21)-(4.22):

Sætning 4.3.3 [Eva98, Theorem 1, s. 515]

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være C^1 , begrænset og stjerneformet mht. origo. Antag, at $u \in C^2(\bar{U})$ er en reel løsning til (4.21)-(4.22) med en eksponent, som opfylder, at $\frac{n+2}{n-2} < p < \infty$. Dermed er $u \equiv 0$ i U .

Bevis:

For $x \in U$ multipliceres (4.21) med $x \cdot \nabla u$, hvorefter der integreres over U :

$$\underbrace{\int_U (-\Delta u)(x \cdot \nabla u) \, dx}_P = \underbrace{\int_U |u|^{p-1} u (x \cdot \nabla u) \, dx}_Q. \quad (4.23)$$

Overflademålet af ∂U angives $d\sigma$, og en af Greens formler [Eva98, Theorem 2, s. 628] anvendes til at omskrive P :

$$P = - \sum_{i,j=1}^n \int_U \partial_{ii}^2 u x_j \partial_j u \, dx = \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_U \partial_i u \partial_i (x_j \partial_j u) \, dx}_{P_1} - \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_{\partial U} \partial_i u \nu_i x_j \partial_j u \, d\sigma}_{-P_2}.$$

Ved brug af samme formel omskrives P_1 :

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{i,j=1}^n \int_U (\partial_i u \delta_{ij} \partial_j u + \partial_i u x_j \partial_{ji}^2 u) \, dx = \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \partial_j \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \right) x_j \, dx \\ &= \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) x_j \, dx \\ &= \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \sum_{j=1}^n \left(- \int_U \frac{|\nabla u|^2}{2} \, dx + \int_{\partial U} \frac{|\nabla u|^2}{2} x_j \nu_j \, d\sigma \right) \\ &= \left(1 - \frac{n}{2} \right) \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial U} \frac{|\nabla u|^2}{2} (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}) \, d\sigma. \end{aligned}$$

I henhold til beviset for [Gru08, Theorem 4.12] eksisterer en funktion $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)$, for hvilken $r_U \tilde{u} = u$, hvor r_U betegner restriktionen til U . Grundet kontinuiteten af u og $\tilde{u}$ samt (4.22), er $\tilde{u} = 0$ på ∂U .

Randen er hermed en niveauflade for $\tilde{u}$, så $\nabla \tilde{u}(x)$ står for ethvert $x \in \partial U$ ortogonalt på det $(n-1)$ -dimensionale tangentplan i x . Idet normalvektoren udspænder det én-dimensionale ortogonalkomplement hertil, er $\nabla \tilde{u}(x) = \nabla u(x)$ parallel med $\boldsymbol{\nu}(x)$ for hvert $x \in \partial U$. Eftersom $\boldsymbol{\nu}(x)$ er en enhedsvektor, fås hermed, at $\nabla u(x) = \pm |\nabla u(x)| \boldsymbol{\nu}(x)$, så

$$\begin{aligned} P_2 &= - \int_{\partial U} (\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu})(x \cdot \nabla u) \, d\sigma \\ &= - \int_{\partial U} (\pm |\nabla u| \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})(x \cdot (\pm |\nabla u| \boldsymbol{\nu})) \, d\sigma = - \int_{\partial U} |\nabla u|^2 (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Af ovenstående fås, at

$$P = \frac{2-n}{2} \int_U |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial U} |\nabla u|^2 (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}) \, d\sigma. \quad (4.24)$$

Inden Q omskrives, indføres først en funktionsfølge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ved $f_k(t) = \sqrt{\frac{1}{k} + t^2}$ for $t \in \mathbb{R}$. Det fremgår, at $f_k \in C^\infty(\mathbb{R})$, og for alle $t \in \mathbb{R}$ gælder, at $f_k(t)^{p+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} |t|^{p+1}$. Heraf slutes, at

$$\int_U f_k(u(x))^{p+1} \, dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_U |u(x)|^{p+1} \, dx,$$

idet $(1 + \|u\|_\infty)^{p+1}$ er en integrabel majorant. Ved brug af dette samt delvis integration, hvor randbidragene giver nul jf. (4.22), fås

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^n \int_U |u|^{p-1} u \partial_j u x_j \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_U f_k(u(x))^p \frac{1}{2f_k(u(x))} 2u \partial_j u x_j \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_U \partial_j \left(\frac{f_k(u(x))^{p+1}}{p+1} \right) x_j \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^n \int_U f_k(u(x))^{p+1} \, dx \\ &= -\frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} \, dx. \end{aligned}$$

Sammen med (4.23) og (4.24) giver det følgende lighed, der betegnes Derrick-Pohozaev identiteten:

$$\left(\frac{n-2}{2} \right) \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial U} |\nabla u|^2 (\nu \cdot x) \, d\sigma = \frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} \, dx.$$

Af lemma 4.3.2 fås, at

$$\left(\frac{n-2}{2} \right) \int_U |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} \, dx. \quad (4.25)$$

Eftersom $u \in C^2(\overline{U})$, er $\Delta u \in C(\overline{U}) \subseteq L_2(U)$, så $u \in D(\Delta_{\max})$, hvor $\Delta_{\max}$ angiver den maksimale realisation af Laplace-operatoren. Af (4.22) sluttes, at $u \in H_0^1(U)$, så i alt er $u \in H_0^1(U) \cap D(\Delta_{\max}) = D(-\Delta_D)$ jf. [Gru08, Theorem 4.27], hvormed brug af sesquilinear formen fra (2.26), Lax-Milgrams lemma og (4.21) giver, at

$$\begin{aligned} \int_U |\nabla u|^2 \, dx &= a_D(u, u) = (-\Delta_D u | u)_{L_2(U)} = (|u|^{p-1} u | u)_{L_2(U)} \\ &= \int_U |u|^{p-1} u^2 \, dx = \int_U |u|^{p+1} \, dx. \end{aligned}$$

Ved at anvende denne lighed i (4.25) fås

$$\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p+1} \right) \int_U |u|^{p+1} \, dx \leq 0.$$

Hvis $u \not\equiv 0$, er $\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p+1} \leq 0$, så $p \leq \frac{n+2}{n-2}$, hvilket strider mod antagelsen om p . Heraf konkluderes, at $u \equiv 0$ i U . $\square$

Kapitel 5

Globale løsninger under eksponentiel vækst

Dette kapitel er baseret på artiklen [Bar94] af A. Barabanova og har til formål at godtgøre, at løsninger til et diffusions- og reaktionssystem, hvor den ikke-lineære del vokser eksponentielt, er globalt definerede.

Det bemærkes, at der regnes reelt, og systemet skal løses i Banachrummet $C(\overline{U})$ frem for i et Hilbertrum, som det hidtil har været tilfældet. Derfor skal den lineære teori fra kapitel 2 her erstattes af semigruppeteori. Dette synspunkt er af tidsmæssige årsager ikke behandlet nærmere – i stedet henvises til [Gru08, kap. 14] og [Eva98, afs. 7.4]. Ligeledes har det inden for den givne tidsramme ikke været muligt at undersøge detaljerne i de artikler, som A. Barabanova refererer til.

5.1 SYSTEMET

Systemet, der betragtes, er

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \Delta & 0 \\ 0 & K_2 \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u\varphi(v) \\ -u\varphi(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{på } U \times]0, \infty[, \quad (5.1)$$

hvor $U \subset \mathbb{R}^n$ er åben, begrænset og C^1 . Derudover er $K_1, K_2 > 0$, og $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ er ikke-negativ, hvor $\mathbb{R}_+$ er mængden af ikke-negative, reelle tal. Ligning (5.1) er i [Bar94] analyseret med Robin randbetingelsen

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \partial_n & 0 \\ 0 & \eta_2 \partial_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \eta_1 & 0 \\ 0 & 1 - \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{på } \partial U \times]0, \infty[,$$

hvor $\eta_1, \eta_2 \in C^1(\partial U)$ og $\eta_1(x), \eta_2(x) \in [0, 1]$ for $x \in \partial U$. Begyndelsesbetingelsen er

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{på } U \times \{t = 0\}, \quad (5.2)$$

hvor $u_0, v_0 \in L_\infty(U)$ er ikke-negative.

Gennem tiden har flere matematikere udvist interesse for problemstillingen. I 1979 godtgjorde N. Alikakos i artiklen [Ali79] eksistensen af globale løsninger i det tilfælde, at $\varphi(v) \leq K \left(1 + |v|^{n+\frac{2}{n}}\right)$ for en konstant K . Fire år senere blev dette krav af K. Masuda i [Mas83] reduceret til $\varphi(v) \leq K (1 + |v|^\beta)$ for $\beta > 0$ vilkårlig.

I nedenstående behandling af problemstillingen forudsættes blot, at

$$\varphi(v) \leq e^{\alpha v}, \text{ hvor } \alpha > 0. \quad (5.3)$$

Dette krav til φ blev betragtet i [CH90] og [HK83], der begge er skrevet af A. Haraux i samarbejde med henholdsvis T. Cazenave og M. Kirane.

Formålet med kapitlet er at gennemgå resultaterne i [Bar94] i det tilfælde, at U er C^∞ samt $\eta_1, \eta_2 \equiv 0$, hvormed randbetingelsen bliver en homogen Dirichlet betingelse – ligesom i den foregående del af specialet:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ på } \partial U \times]0, \infty[, \quad (5.4)$$

5.2 EGENSKABER VED LØSNINGER

Målet er at bevise, at der – på trods af at φ kan vokse eksponentielt – eksisterer globale løsninger indeholdt i $C(\overline{U}) \times C(\overline{U})$ til (5.1), og som opfylder (5.2) samt (5.4). Det, at de globale løsninger tilhører $C(\overline{U}) \times C(\overline{U})$, betyder, at de for alle $t > 0$ tilhører denne mængde.

I kontrast hertil kaldes en løsning lokal, såfremt den for et $T > 0$ er defineret på det endelige interval $[0, T]$. I forbindelse hermed indføres eksplosionstiden af en løsning (u, v) ved

$$T^* = \inf \left\{ t > 0 \mid \sup_{0 \leq \tau < t} (\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(U)} + \|v(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(U)}) = \infty \right\},$$

hvis dette infimum eksisterer, og ellers sættes $T^* = \infty$.

Det bemærkes, at φ grundet kontinuiteten på $\mathbb{R}_+$ har et grænsepunkt i nul. Det er derfor muligt at spejle φ i den lodrette linje ved nul, hvilket giver en funktion $\tilde{\varphi} \geq 0$ defineret på $\mathbb{R}$.

I det følgende antages, at (u, v) på intervallet $[0, T]$ er en lokal løsning til (5.1), hvor φ er erstattet med $\tilde{\varphi}$. Eksistensen af denne kan formentlig godtgøres ved et kontraktionsargument analogt til det i beviset for sætning 4.1.2. Herunder argumenteres for, at u er ikke-negativ, hvilket gøres ved at multiplicere den første differentia ligning i (5.1) med $u^- := -\min(u, 0)$ og dernæst integrere over U :

$$\int_U u^- \partial_t u \, dx + K_1 \int_U -u^- \Delta u \, dx = - \int_U u^- u \tilde{\varphi}(v) \, dx.$$

Eftersom u^- er en faktor i hver integrand, kan integrationsområdet reduceres til $\{u < 0\}$. Såfremt det er tilladt at differentiere under integralet samt anvende Greens

formel fås

$$-\frac{1}{2}\partial_t \int_{\{u<0\}} (u^-)^2 dx - K_1 \int_{\{u<0\}} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\{u<0\}} (u^-)^2 \tilde{\varphi}(v) dx.$$

Herefter multipliceres med -1 , integralet med $|\nabla u|^2$ ignoreres, og det udnyttes, at $\{u < 0\}$ er begrænset, hvorved $\tilde{\varphi}$ kan vurderes opadtil ved supremum:

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{\{u<0\}} (u^-)^2 dx \leq \sup_{\overline{U} \times [0,t]} \tilde{\varphi}(v) \int_{\{u<0\}} (u^-)^2 dx.$$

Faktoren foran integralet på højresiden er en ikke-negativ funktion af t , og eftersom $u_0 \geq 0$ for $x \in U$, er $u^-(x, 0) = u_0^- = 0$. Dermed kan specialtilfældet af Gronwalls ulighed på differential form fra lemma B.0.1 anvendes, hvilket giver, at

$$\int_{\{u<0\}} (u^-)^2 dx = 0.$$

Heraf konkluderes, at $u^- \equiv 0$, så $u(x, t) \geq 0$ for $x \in \overline{U}$ og $t \in [0, T]$.

Analysen kan uddybes, for ovenstående giver, at $\partial_t u - K_1 \Delta u = -u\tilde{\varphi}(v) \leq 0$ i U_T , så u er en underløsning. Dermed fås af punkt (ii) i det svage maksimumsprincip fra sætning 3.1.1, at for $t \in [0, T]$ er

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_\infty(U)} \leq \max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u = \max\{0, \|u_0\|_{L_\infty(U)}\} = \|u_0\|_{L_\infty(U)}. \quad (5.5)$$

Ekspllosionstiden for u er defineret analogt til T^* – blot uden leddet med v . Da vurderingen i (5.5) er uafhængig af T , eksploderer u ikke på noget tidspunkt.

Brugen af det svage maksimumsprincip er under forbehold af, at regularitetskravene for u er opfyldt. Ligesom de øvrige regularitetskrav i kapitlet, er dette ikke eftervist, eftersom det kræver et nærmere studium af løsningsbegrebet i Banachrummet $C(\overline{U})$.

I forbindelse med den anden differentialligning i (5.1) følger, at $u\tilde{\varphi}(v) \geq 0$, så v er en overløsning hertil. Da giver punkt (iv) i det svage maksimumsprincip, at $\min_{\overline{U}_T} v$ antages på den paraboliske rand Γ_T . Af begyndelses- og randbetingelserne vides, at $v = 0$ på $\partial U \times]0, T[$ og $v(\cdot, 0) \geq 0$ på U , så $v \geq 0$ på Γ_T , hvormed $v \geq 0$ på U_T .

5.3 ENS DIFFUSIONSKONSTANTER

A. Barabanova omtaler kun yderst kortfattet tilfældet $K_1 = K_2$ ved at skrive, at eksistensen af globale løsninger til (5.1) med randbetingelsen angivet i (5.4) i dette tilfælde er en konsekvens af et maksimumsprincip. Formålet med afsnittet er at afdække mekanismerne bag et fyldestgørende argument herfor.

Addition af de to ligninger, der indgår i (5.1), giver

$$\partial_t(u + v) - K_1 \Delta(u + v) = 0, \quad (5.6)$$

der er lineær, så teorien fra kapitel 2 kan benyttes. Af sætning 2.1.8 og 2.1.9 fås, at der eksisterer en entydig svag løsning $u + v \in L_2(0, \infty; H_0^1(U))$ til (5.6), som opfylder $(u + v)(0) = u_0 + v_0$.

Af forrige afsnit følger, at hvis eksistensen af en lokal løsning u til første ligning i (5.1) kan godtgøres, er denne ikke-negativ og vil ikke eksplodere. En løsning til den anden ligning i (5.1) er $(u + v) - u = v$, der ligeledes er ikke-negativ.

Af semigruppeteori fås, at $T^* = \infty$ for $u + v$, hvormed dette også gælder for v . Dermed er det formentlig muligt at benytte et kontraktionsargument analogt til det i beviset for sætning 4.1.2 til at udvide intervallet for den lokale løsning. For hver gang forlænges intervallet med en størrelse, der er nedadtil begrænset, hvorved (u, v) bliver globalt defineret.

Argumentationen er ikke fyldestgørende, bl.a. fordi løsningsrummet er $L_2(0, \infty; H_0^1(U))$ og ikke $C(\bar{U})$, men det giver en idé om bevisstrategien i tilfældet $K_1 = K_2$.

5.4 FORSKELLIGE DIFFUSIONSKONSTANTER

I dette afsnit betragtes den situation, at $K_1 \neq K_2$. I forbindelse hermed bringer T. Cazenave og A. Haraux i [CH90] et relevant resultat, der giver eksistensen af en lokal, ikke-negativ løsning $(u, v) \in C(\bar{U}) \times C(\bar{U})$ til (5.1)-(5.2) med randbetingelsen i (5.4). Området $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ er således invariant for (u, v) i henhold til følgende definition fra [Smo83] – her tilpasset den konkrete problemstilling:

Definition 5.4.1 (Invariant område)

Lad $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ være lukket. Såfremt en løsning (u, v) til (5.1)-(5.2) og (5.4) med samtlige begyndelses- og randværdier i Σ opfylder, at $(u(x, t), v(x, t)) \in \Sigma$ for alle $(x, t) \in U_T$, kaldes Σ et invariant område for den pågældende løsning.

Siden [HK83] af A. Haraux og M. Kirane har det været kendt, at det er tilstrækkeligt at etablere en uniform vurdering af $\|u\varphi(v)\|_p$ for et $p > \frac{n}{2}$ for at slutte, at løsningerne er globale og tilhører $C(\bar{U}) \times C(\bar{U})$. For at udnytte dette viste A. Barabanova et tekniske resultat:

Lemma 5.4.2 [Bar94, Proposition 2]

Antag, at φ opfylder (5.3), og lad (u, v) være en ikke-negativ løsning til (5.1)-(5.2) med randbetingelsen i (5.4) på $[0, T[$, hvor u_0 opfylder (5.14) nedenfor. For

$$\|u_0\|_\infty < K < \frac{8K_1K_2}{\alpha n(K_1 - K_2)^2},$$

og $g(r) := \left(\frac{K}{K-r}\right)^{\frac{4K_1K_2}{(K_1-K_2)^2}}$, hvor $0 \leq r < K$, eksisterer $p > \frac{n}{2}$, så følgende integral er ikke-voksende på $]0, T[$:

$$\int_U g(u) e^{\alpha p v} dx \quad (5.7)$$

Det bemærkes, at eksistensen af den lokale løsning (u, v) følger af bemærkningen oven over definition 5.4.1, samt at det er meningsfyldt at indsætte u i g , idet $K - u \neq 0$ ifølge (5.5). Integralet i (5.7) er veldefineret, eftersom begge faktorer i integranden afhænger kontinuert af u og v , der selv er kontinuerte på $\bar{U}$.

Derudover gøres opmærksom på, at beviset er væsentligt mere detaljeret end i [Bar94].

Bevis:

Ved at vælge

$$p = \frac{4K_1K_2}{\alpha K(K_1 - K_2)^2}. \quad (5.8)$$

ses ved indsættelse af den øvre grænse for K , at $p > \frac{n}{2}$.

For fast $t \in [0, T[$ er $u \geq 0$ i U , mens $u = 0$ på ∂U jf. (5.4). Grundet kontinuiteten af u er funktionen aftagende på enhver tilstrækkelig kort kurve i U , der ender i et vilkårligt punkt $x \in \partial U$. Eftersom U er C^1 , er den udadrettede normalvektor $\nu(x) := \nu$ veldefineret. For tilpas lille $\varepsilon > 0$ fås hermed, at $u(x + t\nu)$ har minimum på $] -\varepsilon, 0]$ i $t = 0$, så $\left. \frac{d}{dt} u(x + t\nu) \right|_{t=0} \leq 0$. Noteres den retningsafledte af u i ν 's retning med $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, sluttet ved hjælp af kædereolen, at

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u(x) \leq 0. \quad (5.9)$$

Argumentationen følger analogt for v . Af definitionen på g fås

$$g'(r) = \frac{4K_1K_2}{(K_1 - K_2)^2} \frac{\left(\frac{K}{K-r} \right)^{\frac{4K_1K_2}{(K_1 - K_2)^2}}}{K - r} \geq 0. \quad (5.10)$$

For enhver løsning (u, v) til (5.1)-(5.2) med randbetingelsen i (5.4) haves ved brug af en af Greens formler [Eva98, Theorem 3, s. 628], såfremt $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in C^2(\bar{U})$, at

$$\partial_t \int_U g(u) e^{\alpha p v} dx = \int_U (g'(u) \partial_t u e^{\alpha p v} + \alpha p g(u) e^{\alpha p v} \partial_t v) dx.$$

Differentiation under integraltegnet kan godtgøres, hvis $\partial_t u(\cdot, t), \partial_t v(\cdot, t) \in C(\bar{U})$. Dermed haves

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_U g(u) e^{\alpha p v} dx \\ &= \int_U (e^{\alpha p v} g'(u) (K_1 \Delta u - \varphi(v)u) + \alpha p g(u) e^{\alpha p v} (K_2 \Delta v + u \varphi(v))) dx \\ &= \int_U -K_1 \nabla u \cdot \nabla (g'(u) e^{\alpha p v}) dx + \int_U u \varphi(v) e^{\alpha p v} (\alpha p g(u) - g'(u)) dx \\ &\quad - \int_U \alpha p K_2 \nabla v \cdot \nabla (g(u) e^{\alpha p v}) dx + \int_{\partial U} e^{\alpha p v} \left(K_1 g'(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha p K_2 g(u) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Ved at udnytte (5.9), (5.10) og kendskabet til de øvre faktorer, der indgår i det sidste integral, fås

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \int_U g(u) e^{\alpha p v} dx \\
 & \leq \int_U -K_1 e^{\alpha p v} \nabla u \cdot (g''(u) \nabla u + \alpha p g'(u) \nabla v) dx + \int_U u \varphi(v) e^{\alpha p v} (\alpha p g(u) - g'(u)) dx \\
 & \quad - \int_U \alpha p K_2 e^{\alpha p v} \nabla v \cdot (g'(u) \nabla u + \alpha p g(u) \nabla v) dx \\
 & = \int_U -e^{\alpha p v} \left(K_1 g''(u) |\nabla u|^2 + (K_1 + K_2) \alpha p g'(u) \nabla u \cdot \nabla v + \alpha^2 p^2 K_2 g(u) |\nabla v|^2 \right) dx \\
 & \quad + \int_U u \varphi(v) e^{\alpha p v} (\alpha p g(u) - g'(u)) dx. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Såfremt begge integraler i (5.11) er ikke-positive, kan sluttet, at integralet i (5.7) er ikke-voksende. Til at starte med behandles det første led, der indeholder følgende kvadratiske form i ∇u og ∇v , hvor (x, t) er fast:

$$\underbrace{K_1 g''(u)}_A |\nabla u|^2 + \underbrace{\alpha p (K_1 + K_2) g'(u)}_B \nabla u \nabla v + \underbrace{\alpha^2 p^2 K_2 g(u)}_C |\nabla v|^2.$$

Ved at indføre $\xi = \nabla u$ og $\eta = \nabla v$ fås, at den kvadratiske form kan skrives som

$$\sum_{j=1}^n (A \xi_j^2 + B \xi_j \eta_j + C \eta_j^2), \tag{5.12}$$

der er en sum af n kvadratiske former. Om koefficienterne kan vises, at $B^2 - 4AC = 0$, dvs. at g opfylder

$$\alpha^2 p^2 (K_1 + K_2)^2 g'(r)^2 = 4 \alpha^2 p^2 K_1 K_2 g(r) g''(r), \tag{5.13}$$

hvilket gøres ved først at udregne g'' på baggrund af (5.10):

$$\begin{aligned}
 g''(r) &= \frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2} \frac{\frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2} \left(\frac{K}{K-r} \right)^{\frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2} - 1} \left(\frac{K(K-r)}{(K-r)^2} \right) + \left(\frac{K}{K-r} \right)^{\frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2}}}{(K-r)^2} \\
 &= \frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2} \left(\frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2} + 1 \right) \frac{\left(\frac{K}{K-r} \right)^{\frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2}}}{(K-r)^2}.
 \end{aligned}$$

Således haves på højre side af (5.13), at

$$4K_1 K_2 g''(r) g(r) = \frac{16K_1^2 K_2^2}{(K_1 - K_2)^2} \left(\frac{4K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2} + 1 \right) \frac{\left(\frac{K}{K-r} \right)^{\frac{8K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2}}}{(K-r)^2},$$

mens der på venstresiden heraf gælder, at

$$(K_1 + K_2)^2 (g'(r))^2 = (K_1 + K_2)^2 \frac{16K_1^2 K_2^2}{(K_1 - K_2)^4} \frac{\left(\frac{K}{K-r} \right)^{\frac{8K_1 K_2}{(K_1 - K_2)^2}}}{(K-r)^2}.$$

Det følger straks, at det valgte g opfylder (5.13), så A og hver af parenteserne i (5.12) har ifølge [Wad04, Lemma 11.58] samme fortegn. Idet venstresiden af (5.13) er ikke-negativ, er $g''(r) \geq 0$, og da $K_1 > 0$, er hver af de kvadratiske former i (5.12) positiv semidefinit, hvorved dette også gælder for summen, så den første integrand i (5.11) er ikke-positiv.

I forbindelse med det andet led i (5.11) er det nok at vise, at $\alpha p g(r) - g'(r) \leq 0$, hvilket giver det ønskede, idet φ og u er ikke-negative. Hertil benyttes definitionen af p , hvilket giver, at

$$\frac{g'(r)}{g(r)} = \frac{4K_1K_2}{(K_1 - K_2)^2} \left(\frac{K}{K - u} \right)^{-1} \frac{K}{(K - u)^2} \geq \frac{4K_1K_2}{(K_1 - K_2)^2 K} = \alpha p.$$

Dermed slutes, at $\partial_t \left(\int_U g(u) e^{\alpha p v} dx \right) \leq 0$ på $]0, T[$. $\square$

5.5 EKSISTENS AF GLOBALE LØSNINGER

Det er nu muligt at bevise eksistensen af globale løsninger til det givne begyndelses- og randværdiproblem.

Sætning 5.5.1 [Bar94, Theorem 1]

Antag, at $\varphi(v) \leq e^{\alpha v}$ for $\alpha > 0$. Lad (u, v) være en lokal løsning til (5.1)-(5.2) med randbetingelsen i (5.4), og hvor der om begyndelsesfunktionerne gælder, at $u_0, v_0 \in L_\infty(U)$ samt

$$\|u_0\|_{L_\infty(U)} < \frac{8K_1K_2}{\alpha n(K_1 - K_2)^2}. \quad (5.14)$$

Da er (u, v) globalt defineret og indeholdt i $C(\overline{U}) \times C(\overline{U})$.

Det bemærkes, at restriktionen i (5.14) er mild, såfremt K_1 er tæt på K_2 .

Bevis:

Først defineres p som i (5.8). Eftersom u ifølge (5.5) er begrænset i $L_\infty(U)$, er

$$\|u\varphi(v)\|_p \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty \left(\int_U |\varphi(v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u_0\|_\infty \|\varphi(v)\|_p. \quad (5.15)$$

I henhold til valget af K er $\frac{K}{K-u} \geq 1$, hvormed $g(u) \geq 1$, idet eksponenten, som udtrykket er opløftet i, er positiv. Da $|\varphi(v)| \leq e^{\alpha v}$ og $p > 0$, fås hermed, at

$$(\|\varphi(v)\|_p)^p = \int_U |\varphi(v)|^p dx \leq \int_U e^{\alpha p v} dx \leq \int_U g(u) e^{\alpha p v} dx.$$

Lad $|U|$ betegne målet af U . Lemma 5.4.2 giver, at $\int_U g(u) e^{\alpha p v} dx$ er ikke-voksende på $]0, T[$, så af ovenstående fås

$$(\|\varphi(v(\cdot, t))\|_p)^p \leq \int_U g(u) e^{\alpha p v} dx \Big|_{t=0} = \int_U g(u_0) e^{\alpha p v_0} dx \leq |U| g(\|u_0\|_\infty) e^{\alpha p \|v_0\|_\infty}.$$

Ved at sammenholde denne vurdering med (5.15) konkluderes, at $u\varphi(v)$ er uniformt begrænset i $L_p(U)$ for $t \in]0, T[$.

Da $p > \frac{n}{2}$, slttes af bemærkningen før lemma 5.4.2, at (u, v) er globalt defineret og kontinuert på $\overline{U} \times \overline{U}$. $\square$

Til trods for at argumentationen i tilfældet $K_1 = K_2$ ikke er fyldestgørende fornemmes alligevel, at tilfældet ikke er så vanskeligt, blot et tilstrækkeligt kendskab til semigruppeteori og løsningsbegrebet i Banachrummet $C(\overline{U})$ er præsenteret.

Derimod fremgår af dette afsnit, at systemet er noget vanskeligere at behandle, når diffusionskonstanterne er forskellige. I denne situation kræves flere metoder – og det er i henhold til (5.14) nødvendigt med strengere krav til data.

Appendiks A

Funktionalanalyse

Formålet med dette appendiks er at bringe generelle funktionalanalytiske resultater. Først redegøres for konstruktionen af Banach- og Hilbertrum ud fra allerede eksisterende. Det bemærkes, at der ikke føres beviser herfor, eftersom de vil fylde meget og primært bestå af relativt simple overvejelser.

Lemma A.0.1

Lad $X_1, \dots, X_N$ være Banachrum. Da er $X := X_1 \times \dots \times X_N$ et Banachrum med normen

$$\|(x_1, \dots, x_N)\|_X := \|x_1\|_{X_1} + \dots + \|x_N\|_{X_N} \quad (\text{A.1})$$

for $(x_1, \dots, x_N) \in X_1 \times \dots \times X_N$.

Specielt gælder, at X er et Hilbertrum, hvis $X_1, \dots, X_N$ er Hilbertrum. I dette tilfælde bruges normen

$$\|(x_1, \dots, x_N)\|_X := \sqrt{\|x_1\|_{X_1}^2 + \dots + \|x_N\|_{X_N}^2}, \quad (\text{A.2})$$

der er ækvivalent med den forrige norm samt udspringer af det indre produkt

$$((x_1, \dots, x_N)|(y_1, \dots, y_N))_X := (x_1|y_1)_{X_1} + \dots + (x_N|y_N)_{X_N},$$

hvor $(x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \in X$.

Ofte benyttes notationen $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_N$, der – såfremt $X_1, \dots, X_N$ er Hilbertrum – kaldes den ortogonalt direkte sum af $X_1, \dots, X_N$. Det beror på, at X_1 kan identificeres med underrummet

$$\underbrace{\{(x_1, 0, \dots, 0) \mid x_1 \in X_1\}}_{m \text{ indgange}} \subseteq X,$$

og tilsvarende identifikationer kan laves for de øvrige vektorrum, hvormed Hilbertrumene står ortogonalt på hinanden.

Ligeledes konstrueres et nyt Banachrum ved at danne fællesmængden af eksisterende Banachrum:

Lemma A.0.2

Lad X være et topologisk vektorrum og $X_1, \dots, X_N$ Banachrum, hvor $X_i \subseteq X$ topologisk for $i = 1, \dots, N$. Da er $Y := X_1 \cap \dots \cap X_N$ et Banachrum med normen

$$\|x\|_Y := \|x\|_{X_1} + \dots + \|x\|_{X_N} \text{ for } x \in Y.$$

Et specialtilfælde af lemmaet opstår ligesom før, såfremt $X_1, \dots, X_n$ er Hilbertrum. I så fald benyttes en anden norm på Y :

$$\|x\|_Y := \sqrt{\|x\|_{X_1}^2 + \dots + \|x\|_{X_N}^2}.$$

Denne udspringer af det indre produkt

$$(x|y)_Y := (x|y)_{X_1} + \dots + (x|y)_{X_N} \text{ for } x, y \in Y,$$

således Y selv er et Hilbertrum.

Det bemærkes, at det altid er muligt at vælge $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_N$, eftersom dette ifølge lemma A.0.1 er et Banachrum og dermed et topologisk vektorrum. Desuden er $X_i \subseteq X$ topologisk for $i = 1, \dots, N$, idet der eksempelvis for $x \in X_1$ og med normen angivet i (A.1) gælder, at

$$\|x\|_X = \|x\|_{X_1} + \|0\|_{X_2} + \dots + \|0\|_{X_N} = \|x\|_{X_1}.$$

Herefter følger en sætning, der giver en identifikation af dualrummet til det kartesiske produkt af topologiske vektorrum med det kartesiske produkt af dualrummene.

Sætning A.0.3

For topologiske vektorrum $X_1, \dots, X_N$ haves identifikationen $(X_1 \oplus \dots \oplus X_N)' = X_1' \oplus \dots \oplus X_N'$.

Bevis:

Lad $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N) \in X_1' \oplus \dots \oplus X_N'$. For $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in X_1 \oplus \dots \oplus X_N =: X$ er afbildningen

$$\varphi \mapsto \langle \mathbf{w}, \varphi \rangle := \sum_{k=1}^N \langle w_k, \varphi_k \rangle \quad (\text{A.3})$$

lineær og kontinuert. Det sidste vises ved at udnytte lineariteten, hvorfor det er nok at vise kontinuiteten i nul. Derfor betragtes et net $\varphi_\mu = (\varphi_{\mu,1}, \dots, \varphi_{\mu,N}) \rightarrow \mathbf{0}$ i X . Det topologiske vektorrum X er udstyret med produkttopologien, som pr. definition er initialtopologien induceret af projektionerne $\pi_j : X \rightarrow X_j$ for $j = 1, \dots, N$. Dermed haves, at $\varphi_{\mu,k} \rightarrow 0$ i X_k , og kontinuiteten af w_k medfører, at $\langle w_k, \varphi_{\mu,k} \rangle \rightarrow 0$ i X_k for $k = 1, \dots, N$, så $\langle \mathbf{w}, \varphi_\mu \rangle \rightarrow 0$.

Heraf sluttet, at $\varphi \mapsto \langle \mathbf{w}, \varphi \rangle$ tilhører X' , hvormed $\mathbf{w}$ udpeger et element $\Lambda_{\mathbf{w}} \in X'$ givet ved $\Lambda_{\mathbf{w}}(\varphi) = \langle \mathbf{w}, \varphi \rangle$. Afbildningen $\mathbf{w} \mapsto \Lambda_{\mathbf{w}}$ er injektiv, idet nulrummet er trivielt, hvilket vises ved at antage, at $\Lambda_{\mathbf{w}}(\varphi) = 0$ for alle $\varphi \in X$. Vælges $\varphi = (\varphi_1, 0, \dots, 0)$, hvor $\varphi_1 \in X_1$ er vilkårlig, fås

$$0 = \Lambda_{\mathbf{w}}(\varphi) = \sum_{k=1}^N \langle w_k, \varphi_k \rangle = \langle w_1, \varphi_1 \rangle,$$

hvorved $w_1 = 0$. Argumentet gentages for $k = 2, \dots, N$, hvilket giver, at $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Afbildningen er desuden surjektiv, for givet $\Lambda \in X'$ skrives $\varphi \in X$ som

$$\varphi = (\varphi_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, \varphi_N).$$

Sammensætningen $\varphi_1 \mapsto (\varphi_1, 0, \dots, 0) \mapsto \Lambda(\varphi_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}$ er lineær og kontinuert, hvormed der findes $w_1 \in X'_1$, så $\langle w_1, \varphi_1 \rangle = \Lambda(\varphi_1, 0, \dots, 0)$. Gentages argumentet for $k = 2, \dots, N$ følger ved at sætte $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_N)$, at

$$\Lambda\varphi = \Lambda(\varphi_1, 0, \dots, 0) + \dots + \Lambda(0, \dots, 0, \varphi_N) = \langle w_1, \varphi_1 \rangle + \dots + \langle w_N, \varphi_N \rangle = \langle \mathbf{w}, \varphi \rangle.$$

Dermed er etableret en lineær, bijektiv afbildning $X'_1 \oplus \dots \oplus X'_N \rightarrow X'$, hvorved det ønskede er bevist. $\square$

Appendiks B

Gronwalls uligheder

Dette appendiks indeholder to forskellige udgaver af Gronwalls ulighed.

Lemma B.0.1 Gronwalls ulighed på differentiell form [Eva98, s. 624]

Lad η være en ikke-negativ, absolut kontinuert funktion på intervallet $[0, T]$, samt lad φ og ψ være ikke-negative, integrable funktioner på $[0, T]$. Hvis der for n.a. $t \in [0, T]$ gælder, at

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t), \quad (\text{B.1})$$

så haves for alle $t \in [0, T]$, at

$$0 \leq \eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right). \quad (\text{B.2})$$

Specielt er $\eta \equiv 0$ på $[0, T]$, såfremt $\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t)$ for $t \in [0, T]$ og $\eta(0) = 0$.

Bevis:

Ved at udnytte Analysens Hovedsætning, (B.1) og ikke-negativiteten af φ og ψ følger for n.a. $s \in [0, T]$, at

$$\frac{d}{ds} \left(\eta(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \right) = e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} (\eta'(s) - \varphi(s)\eta(s)) \leq e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \psi(s) \leq \psi(s).$$

Af ligheden ses, at venstresiden er integrabel, så for $t \in [0, T]$ fås ved integration, at

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(\eta(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \right) ds \leq \int_0^t \psi(s) ds,$$

hvormed

$$\eta(t) e^{-\int_0^t \varphi(r) dr} \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds,$$

hvilket beviser (B.2). Specialtilfældet fås direkte af (B.2) ved indsættelse. $\square$

Lemma B.0.2 Gronwalls ulighed på integralform [Eva98, s. 625]

Lad ξ være en ikke-negativ, integrabel funktion på intervallet $[0, T]$. Antag, at der eksisterer konstanter $K_1, K_2 \geq 0$, så der for n.a. $t \in [0, T]$ gælder, at

$$\xi(t) \leq K_1 \int_0^t \xi(s) \, ds + K_2, \quad (\text{B.3})$$

da haves for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$0 \leq \xi(t) \leq K_2 (1 + K_1 t e^{K_1 t}).$$

Specielt er $\xi(t) = 0$ for n.a. $t \in [0, T]$, såfremt $K_2 = 0$.

Bevis:

For $t \in [0, T]$ indføres $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) \, ds$. Af (B.3) haves for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$\eta'(t) \leq K_1 \eta(t) + K_2.$$

Idet ξ er integrabel på $[0, T]$, er η absolut kontinuert, så lemma B.0.1 kan anvendes herpå, hvorved

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t K_1 \, ds} \left(\eta(0) + \int_0^t K_2 \, ds \right) = e^{K_1 t} (\eta(0) + K_2 t) = K_2 t e^{K_1 t}.$$

Dermed gælder for n.a. $t \in [0, T]$, at

$$\xi(t) = \eta'(t) \leq K_1 \eta(t) + K_2 \leq K_2 (1 + K_1 t e^{K_1 t}).$$

□

Appendiks C

Erratum

Formålet med dette appendiks er at uddybe fodnoten på s. 18, således beviset for sætning 1.5.3 bliver korrekt. I den forbindelse er det nødvendigt med et lemma, der fremstår som en generalisering af [Gru08, Lemma 3.6]:

Lemma C.0.3

Lad X være et refleksivt Banachrum, og lad $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R}; X) \cap L_1(\mathbb{R}; X)$. Hvis $\mathbf{f}$ har distributionsafledt $\mathbf{g} \in L_1(-\infty, 0; X)$ for $t < 0$ og $\mathbf{h} \in L_1(0, \infty; X)$ for $t > 0$, så er $\partial_t \mathbf{f} = \mathbf{f}'$, hvor $\mathbf{f}'$ betegner den L_1 -funktion, som fås ved at sammenklistre $\mathbf{g}$ og $\mathbf{h}$.

Bevis:

Af punkt (i) i sætning 1.5.1 og kontinuiteten af $\mathbf{f}$ følger, at

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(0) + \int_0^t \mathbf{h}(s) \, ds \text{ for } t > 0,$$

og

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{g}(s) \, ds \text{ for } t_0 < t, \quad (\text{C.1})$$

hvoraf specielt

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(t_0) + \int_{t_0}^0 \mathbf{g}(s) \, ds \text{ for } t_0 < 0. \quad (\text{C.2})$$

Ved at trække (C.1) fra (C.2) fås, at

$$\mathbf{f}(0) - \mathbf{f}(t) = \int_{t_0}^0 \mathbf{g}(s) \, ds + \int_t^{t_0} \mathbf{g}(s) \, ds = \int_t^0 \mathbf{g}(s) \, ds \text{ for } t < 0.$$

For $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ have således, at

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \mathbf{f}, \varphi \rangle &= \langle \mathbf{f}, -\varphi' \rangle \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi'(t) \left(\mathbf{f}(0) - \int_t^0 \mathbf{g}(s) \, ds \right) dt - \int_0^\infty \varphi'(t) \left(\mathbf{f}(0) + \int_0^t \mathbf{h}(s) \, ds \right) dt. \end{aligned}$$

Det bemærkes, at integralerne i stedet for at have nul som grænse burde have hhv. $-\varepsilon$ og ε for så at lade ε konvergere mod nul, men idet $\mathbf{f}$ er kontinuert, har $\mathbf{f}(+0)$ og $\mathbf{f}(-0)$ den fælles værdi $\mathbf{f}(0)$.

Dernæst benyttes Bochners identitet til at sætte $\mathbf{f}(0)$ uden for integralet. Derudover ombyttes integrationsordenen, og grænserne ændres ved argumentation analog til den i beviset for punkt (i) i sætning 1.5.1. I den forbindelse benyttes ved integralet af $\mathbf{h}$ en indikatorfunktion for en trekant næsten magen til den i figur 1.1 blot uden øvre grænse, mens en indikatorfunktion for en tilsvarende trekant i 3. kvadrant anvendes ved $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned}\langle \partial_t \mathbf{f}, \varphi \rangle &= -\mathbf{f}(0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t) dt + \int_{-\infty}^0 \int_t^0 \varphi'(t) \mathbf{g}(s) ds dt - \int_0^{\infty} \int_0^t \varphi'(t) \mathbf{h}(s) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathbf{g}(s) \int_{-\infty}^s \varphi'(t) dt ds - \int_0^{\infty} \mathbf{h}(s) \int_s^{\infty} \varphi'(t) dt ds \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathbf{g}(s) (\varphi(s) - 0) ds - \int_0^{\infty} \mathbf{h}(s) (0 - \varphi(s)) ds.\end{aligned}$$

Ved at indføre

$$\mathbf{f}'(s) = \begin{cases} \mathbf{g}(s) & \text{for } s < 0 \\ \mathbf{h}(s) & \text{for } s > 0 \end{cases}$$

fås, at

$$\langle \partial_t \mathbf{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \mathbf{f}'(s) ds,$$

hvoraf det slutes, at $\partial_t \mathbf{f} = \mathbf{f}'$ i $D'(\mathbb{R}; X)$. □

Bevisændringer for sætning 1.5.3

Herunder følger en udredning af, hvorledes beviset for sætning 1.5.3 skal modificeres, således det bliver gyldigt. Som beskrevet i fodnoten skal $\mathbf{u}$ forlænges på en mere sofistikeret måde end ved at forlænge den lineært ned til nul. I stedet indledes med at spejle $\mathbf{u}$, der er kontinuert på $[0, T]$ med værdier i V' , om $t = 0$. Derved fremkommer en funktion på intervallet $[-T, T]$, og denne spejles nu om $t = T$, hvilket resulterer i en funktion $\mathbf{u}_f$ defineret på $[-T, 3T]$.

Herefter indføres en testfunktion $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ med $\chi \equiv 1$ på $[0, T]$ og $\chi \equiv 0$ uden for $[-\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}]$. Ud fra denne defineres $\tilde{\mathbf{u}} = \chi \mathbf{u}_f$, der tilhører $L_2(\mathbb{R}; V) \subseteq L_2(\mathbb{R}; V')$, idet $\mathbf{u} \in L_2(0, T; V)$ pr. antagelse, og $\text{supp}(\chi) \subseteq [-\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}]$. Dermed gælder også, at $\tilde{\mathbf{u}} \in L_1(\mathbb{R}; V')$, da funktionen har kompakt støtte. Det bemærkes, at lemma 1.4.1 på baggrund af tilhørsforholdet $\tilde{\mathbf{u}} \in L_2(\mathbb{R}; V)$ giver, at $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(\mathbb{R}; H)$, hvorved kontinuiteten af udtrykkene over (1.15) fås direkte.

Det sidste, der mangler at blive godtgjort, er, at $\tilde{\mathbf{u}}' \in L_2(\mathbb{R}; V')$, hvilket i henhold til lemma 1.4.1 gør det muligt at flytte differentiationen af foldningen mellem $\tilde{\mathbf{u}}$ og en testfunktion ind på førstnævnte. Ved at differentiere $\tilde{\mathbf{u}}$ på hvert af intervallerne fås følgende:

$$\tilde{\mathbf{u}}'(t) = \begin{cases} \chi'(t)\mathbf{u}(-t) - \chi(t)\mathbf{u}'(-t) & \text{for } t < 0 \\ \mathbf{u}'(t) & \text{for } 0 < t < T \\ \chi'(t)\mathbf{u}(2T-t) - \chi(t)\mathbf{u}'(2T-t) & \text{for } t > T. \end{cases}$$

Heraf fremgår, at på hvert af de tre intervaller fås L_2 -funktioner med værdier i V' , og grundet den kompakte støtte tilhører de også L_1 . Eftersom $\mathbf{u} \in C([0, T]; V')$, er $\tilde{\mathbf{u}} \in C(\mathbb{R}; V')$, hvormed den distributionsafledte af $\tilde{\mathbf{u}}$ ifølge lemma C.0.3 fås ved at sammenklistre funktionerne på hvert af delintervallerne, hvoraf det slutes, at $\tilde{\mathbf{u}}' \in L_2(\mathbb{R}; V')$. Resten af beviset for sætning 1.5.3 følger dermed uforandret.

Referencer

- [AB92] Karl Gustav Andersson and Lars-Christer Böiers. *Ordinära differentialekvationer*. Studentlitteratur, 2. edition, 1992.
- [Ali79] Nicholas D. Alikakos. *L^p -bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations*. Communications in Partial Differential Equations, Vol. 4, No. 8, 1979.
- [Alm07] Ricardo Almeida. *Compact Linear Operators, A Survey*. Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. 37, No. 1, 2007.
- [Bar94] Assia Barabanova. *On the Global Existence of Solutions of a Reaction-Diffusion Equation with Exponential Nonlinearity*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 122, No. 3, 1994.
- [BM01] Christian Berg and Tage Gutmann Madsen. *Mål- og integralteori*. Matematisk Afdeling - Københavns Universitet, 2001.
- [CH90] Thierry Cazenave and Alain Haraux. *Introduction aux Problèmes d'évolution Semi-linéaires*. Mathématiques et Applications, Vol. 1, 1990.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1. edition, 1998.
- [Fol84] Gerald B. Folland. *Real Analysis – Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, 1. edition, 1984.
- [Gru08] Gerd Grubb. *Distributions and Operators*. Springer, 1. edition, 2008.
- [HK83] A. Haraux and M. Kirane. *Estimations C^1 pour des Problèmes Paraboliques Non-Linéaires*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. 5, No. 3-4, 1983.
- [Joh09] Jon Johnsen. *Notes on Functional Analysis*. 2009. <http://people.math.aau.dk/~jjohnsen/Teaching/Notes/hilbert.pdf> (tilgæet d. 1. juni 2010).
- [Lie96] Gary M. Lieberman. *Second Order Parabolic Partial Differential Equations*. World Scientific Publishing Company, 1. edition, 1996.
- [Mas83] K. Masuda. *On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Reaction-Diffusion Equations*. Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 12, No. 3, 1983.

-
- [Ped95] Gert Kjærgård Pedersen. *Analysis Now*. Springer, 2. edition, 1995.
- [Ped00] Michael Pedersen. *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*. Chapman & Hall/CRC, 1. edition, 2000.
- [PW67] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice-Hall, 1. edition, 1967.
- [RS72] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Volume I: Functional Analysis*. Academic Press, Inc., 1. edition, 1972.
- [Smo83] Joel Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1. edition, 1983.
- [Tem84] Roger Temam. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Elsevier Science Publishers, 3. edition, 1984.
- [Wad04] William R. Wade. *An Introduction to Analysis*. Pearson Prentice Hall, 3. internationale edition, 2004.