# Dynamisk personlast og stokastiske lastmodeller til estimering af gangbroers dynamiske respons

# BILAG

**Kandidatspeciale**

Civilingeniør i Bygge- og Anlægskonstruktion
Aalborg Universitet
Juni 2010

Rasmus Bødker & Heidi Christensen

# Indholdsfortegnelse


**A BS 5400** **1**

A.1 Simplificeret metode . . . 1

**B Generel metode for beregning af dynamisk respons** **5**

B.1 Begyndelsesværdiproblem . . . 5

**C Udæmpede egenfrekvenser og egensvingningsformer** **9**

C.1 En simpelt understøttet bjælke . . . 9

**D Numerisk tidsintegration** **13**

D.1 Newmark algoritmen . . . 13

**E Opbygning af beregningsprogrammer** **15**

E.1 BS 5400 og Eurocode . . . 15

E.2 Probabilistisk program . . . 16

E.3 Avancerede probabilistiske programmer . . . 18

E.4 Matsumoto . . . 19

E.5 Summation af respons . . . 20

**F Stokastisk lastmodel** **21**

F.1 Konvergens af tidsskridt . . . 21

**G Komfort i forbindelse med vibrationer af gangbroer** **29**

G.1 Undersøgelser af komfort . . . 29

**H Analytiske udtryk for egensvingingsformer for gangbro C** **33**

H.1 Fittede udtryk . . . 33

**I Lastmodel III** **35**

I.1 Bestemmelse af lasten . . . 35

I.2 Kontrol af beregningsprogram . . . . . . . . . . 38

**J Lasthistorier og tidshistorier for accelerationsniveauet 41**

J.1 Lasthistorie . . . . . . . . . . 41

J.2 Tidshistorie for accelerationsniveauet . . . . . . . . . . 44

**Litteratur 53**

# Bilag A

# BS 5400

---

I dette bilag beskrives beregningen af den maksimale lodrette acceleration ud fra den simplificerede metode, der er angivet i den britiske standard for vurdering af vibrationer af gangbroer BS 5400. Desuden foreligger et gennemregnet eksempel ud fra den simplificerede metode for bromodel $A_1$.

---

## A.1 Simplificeret metode

Dette afsnit er baseret på anneks B i *BS 5400* [British Standard, 2006, Annex B, afsnit B.2]. Den simplificerede metode er kun gældende for ét fags, to fags og tre fags kontinuerte gangbroer, der er symmetriske, har konstant tværsnit og kan betragtes som simpelt understøttede.

Den maksimale lodrette acceleration $\ddot{u}_{max}$ bestemmes ved formel (A.1).

$$\ddot{u}_{max} = 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot u \cdot K \cdot \psi \tag{A.1}$$

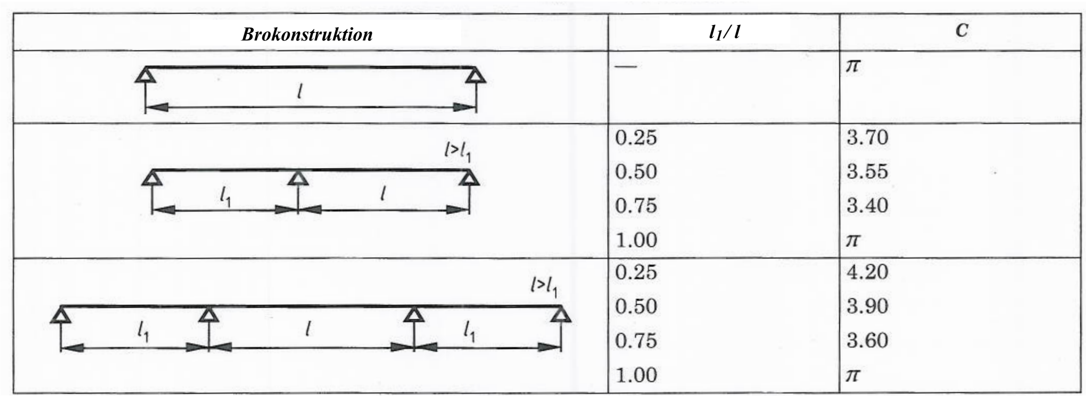
hvor
- $f$ er egenfrekvensen af den givne gangbro [Hz]
- $u$ er den statiske udbøjning [m]
- $K$ er en formfaktor [-]
- $\psi$ er en dynamisk responsfaktor [-]

Hvis egenfrekvensen af den givne gangbro ikke er opgivet direkte, kan den bestemmes ud fra formel (A.2), hvor egenvægten af den givne gangbro er inkluderet, mens der ikke er medtaget nyttelast fra gående personer.

$$f = \frac{C^2}{2 \cdot \pi \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I \cdot g}{G}} \tag{A.2}$$

hvor
- $C$ er en formfaktor [-]
- $l$ er længden af hovedfaget af den givne gangbro [m]
- $E$ er den givne gangbros elasticitetsmodul [kN/m$^2$]
- $I$ er den givne gangbros inertimoment [m$^4$]
- $g$ er tyngdeaccelerationen [m/s$^2$]
- $G$ er vægten af den givne gangbro pr. meter [kN/m]

Formfaktoren $C$ bestemmes ud fra figur A.1.



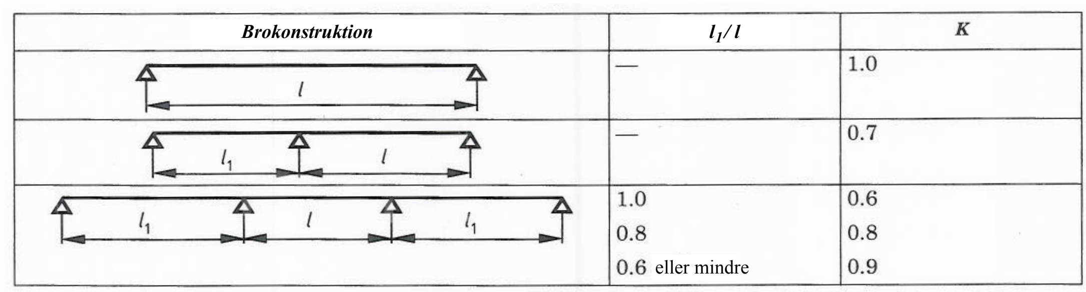
| Brokonstruktion | $l_1/l$ | $C$ |
|---|---|---|
| $l$ | — | $\pi$ |
| $l>l_1$; $l_1$, $l$ | 0.25 | 3.70 |
| | 0.50 | 3.55 |
| | 0.75 | 3.40 |
| | 1.00 | $\pi$ |
| $l>l_1$; $l_1$, $l$, $l_1$ | 0.25 | 4.20 |
| | 0.50 | 3.90 |
| | 0.75 | 3.60 |
| | 1.00 | $\pi$ |

**Figur A.1** *Formfaktoren C. [British Standard, 2006, s. 67]*

Den statiske udbøjning $u$ bestemmes på midten af hovedfaget for en lodret punktlast på $Q = 0,7$ kN virkende i dette punkt. Udbøjningen bestemmes ved formel (A.3).

$$u = \frac{1}{48} \cdot \frac{Q \cdot l^3}{E \cdot I} \tag{A.3}$$

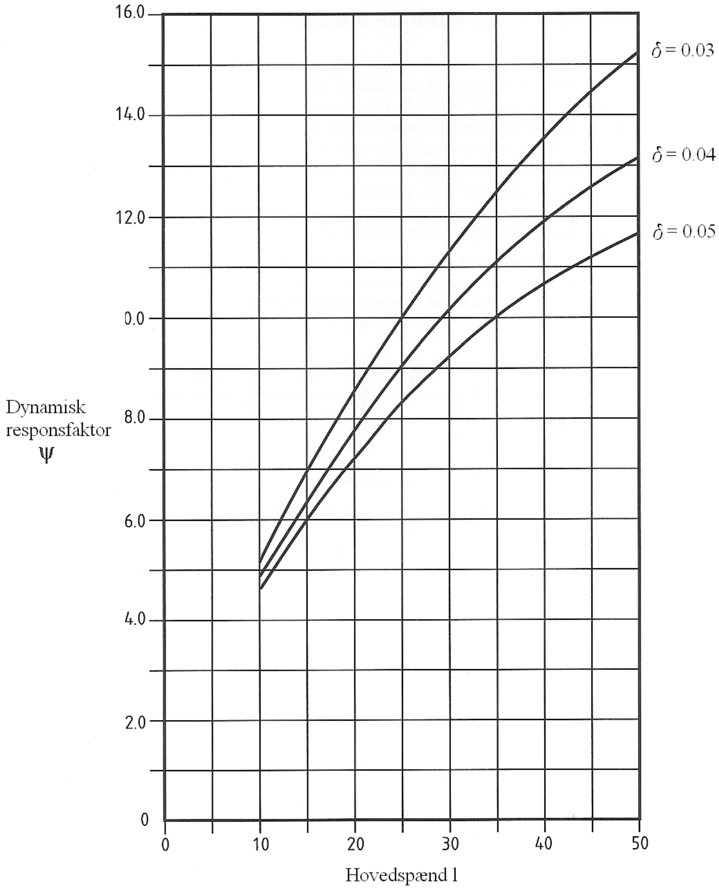
Formfaktoren $K$ bestemmes ud fra figur A.2



| Brokonstruktion | $l_1/l$ | $K$ |
|---|---|---|
| $l$ | — | 1.0 |
| $l_1$, $l$ | — | 0.7 |
| $l_1$, $l$, $l_1$ | 1.0 | 0.6 |
| | 0.8 | 0.8 |
| | 0.6 eller mindre | 0.9 |

**Figur A.2** *Formfaktoren K. [British Standard, 2006, s. 67]*

Den dynamiske responsfaktor $\psi$ er givet i figur A.3.




**Figur A.3** *Den dynamiske responsfaktor $\psi$. [British Standard, 2006, s. 69]*

For at aflæse $\psi$ skal den logaritmiske dekrement $\delta$ bestemmes, hvilket gøres ud fra formel (A.4).

$$\delta = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{A.4}$$

hvor
$\zeta$ er den givne gangbros dæmpningsforhold [-]

[Nielsen, S. R. K., 2004, s. 14]

### A.1.1 Beregningseksempel

Der foretages et beregningseksempel med bromodel $A_1$. De anvendte parametre for bromodel $A_1$ er givet i tabel A.1.

| | Længde, $l$ $[m]$ | Masse, $m$ $[kg]$ | Egenfrekvens, $f$ $[Hz]$ | Dæmpningsforhold, $\zeta$ $[\%]$ |
|---|---|---|---|---|
| Bromodel $A_1$ | 40 | 80.000 | 2,0 | 0,3 |

**Tabel A.1** *De anvendte parametre for bromodel $A_1$.*

Idet egenfrekvensen af gangbroen er kendt, kan bøjningsstivheden $EI$ bestemmes ud fra en omskrivning af formel (A.2). Bøjningsstivheden bestemmes derfor ud fra formel (A.5).

$$EI = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot G \cdot f^2 \cdot l^4}{C^4 \cdot g} \tag{A.5}$$

Vægten af gangbroen per meter $G$ bestemmes ved:

$$\begin{aligned} G &= \frac{m \cdot g}{l} \\ &= \frac{80.000kg \cdot 9,82m/s^2}{40m} \\ &= 19.640N/m \\ &= 19,6kN/m \end{aligned}$$

Formfaktoren $C = \pi$ jf. figur A.1, da der betragtes en simpelt understøttet gangbro med ét fag.

Stivheden betemmes ud fra formel (A.5) til:

$$\begin{aligned} EI &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot G \cdot f^2 \cdot l^4}{C^4 \cdot g} \\ &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 19,6kN/m \cdot (2Hz)^2 \cdot (40m)^4}{\pi^4 \cdot 9,82m/s^2} \\ &= 8,3 \cdot 10^6 kN \cdot m^2 \end{aligned}$$

Den statiske udbøjning bestemmes på midten af hovedfaget for en lodret punktlast på $Q = 0,7$ kN virkende i dette punkt. Udbøjningen bestemmes ved formel (A.3).

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{48} \cdot \frac{Q \cdot l^3}{E \cdot I} \\ &= \frac{1}{48} \cdot \frac{0,7kN \cdot (40m)^3}{8,3 \cdot 10^6 kN \cdot m^2} \\ &= 1,12 \cdot 10^{-4} m \end{aligned}$$

Formfaktoren $K = 1,0$ jf. figur A.2, da der betragtes en simpelt understøttet gangbro med ét fag.

Den dynamiske responsfaktor $\psi$ aflæses på figur A.3 ud fra den logaritmiske dekrement og gangbroens længde. Den logaritmiske dekrement bestemmes ud fra formel (A.4).

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \cdot \pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \frac{0,003}{\sqrt{1 - 0,003^2}} \\ &= 0,019 \end{aligned}$$

Idet der kun forekommer tre kurver med $\delta = 0,03$, $\delta = 0,04$ og $\delta = 0,05$ på figur A.3, anvendes kurven for $\delta = 0,03$ til aflæsning af $\psi$, som aflæses til:

$$\psi = 13,5$$

Den maksimale lodrette acceleration $\ddot{u}_{max}$ bestemmes ved formel (A.1).

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{max} &= 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot u \cdot K \cdot \psi \\ &= 4 \cdot \pi^2 \cdot (2Hz)^2 \cdot (1,12 \cdot 10^{-4} m) \cdot 1,0 \cdot 13,5 \\ &= 0,24m/s^2 \end{aligned}$$

Bilag **B**

# Generel metode for beregning af dynamisk respons

I dette bilag beskrives fremgangsmåden i at bestemme det dynamiske respons ud fra bevægelsesligningen med tilhørende begyndelsesbetingelser. Der gennemgås en bromodel med flere frihedsgrader for at bilaget kan anvendes generelt i rapporten.

## B.1 Begyndelsesværdiproblem

Gangbroers dynamiske respons bestemmes ud fra bevægelsesligningen, som for et system med flere frihedsgrader (MDOF) er givet ved formel (B.1). [Nielsen, S. R. K., 2004, s. 45]

$$\underline{\underline{m}} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{\underline{k}} \cdot \underline{u}(t) = \underline{f_p}(t) \quad , \quad t > 0 \tag{B.1}$$

hvor
- $\underline{\underline{m}}$ er en massematrice [kg]
- $\underline{\ddot{u}}(t)$ er en accelerationsvektor [m/s$^2$]
- $\underline{\underline{c}}$ er en dæmpningsmatrice [kg/s]
- $\underline{\dot{u}}(t)$ er en hastighedsvektor [m/s]
- $\underline{\underline{k}}$ er en stivhedsmatrice [N/m]
- $\underline{u}(t)$ er en flytningsvektor [m]
- $\underline{f_p}(t)$ er en kraftvektor [N]
- $t$ er tiden [s]

[Nielsen, S. R. K., 2004, s. 45]

Formel (B.1) løses ved at anvende begyndelsesbetingelserne givet ved formel (B.2) og (B.3).

$$\underline{u}(0) = \underline{u}_0 = 0m \tag{B.2}$$
$$\underline{\dot{u}}(0) = \underline{\dot{u}}_0 = 0m/s \tag{B.3}$$

hvor
- $\underline{u}_0$ er begyndelsesflytningen [m]
- $\underline{\dot{u}}_0$ er begyndelseshastigheden [m/s]

[Nielsen, S. R. K., 2004, s. 45]

Begyndelsesværdiproblemet givet ved bevægelsesligningen jf. formel (B.1) og begyndelsesbetingelserne jf. formel (B.2) og (B.3) er basisligningerne for tvungne svingninger af et lineært viskost dæmpet system med flere frihedsgrader. [Nielsen, S. R. K., 2004, s. 45]

Gangbroerne betragtet i dette projekt modelleres som Bernoulli-Euler bjælker, hvor der sker en tvungen svingning, dvs. vibrationer er forårsaget af en last på gangbroerne. Gangbroernes flytnings-, hastigheds- og accelerationsfelt kan bestemmes ved formel (B.4), (B.5) og (B.6). [Nielsen, S. R. K., 2004, s. 133]

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x) \cdot q_j(t) \tag{B.4}$$

$$\dot{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x) \cdot \dot{q}_j(t) \tag{B.5}$$

$$\ddot{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x) \cdot \ddot{q}_j(t) \tag{B.6}$$

hvor

$\Phi^{(j)}(x)$ er den j'te udæmpede egensvingningsform [-]
$q_j(t)$ er den j'te udæmpede modale koordinat for flytningen [m]
$\dot{q}_j(t)$ er den j'te udæmpede modale koordinat for hastigheden [m/s]
$\ddot{q}_j(t)$ er den j'te udæmpede modale koordinat for accelerationen [m/s$^2$]
$j$ angiver den betragtede frihedsgrad [-]

[Nielsen, S. R. K., 2004, s. 133]

I bilag C er de udæmpede egensvingningsformer for en simpelt understøttet bjælke beregnet, og det er fundet, at de er givet ved formel (B.7).

$$\Phi^{(j)}(x) = sin\left(j \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right) \tag{B.7}$$

hvor

$x$ er koordinaten langs gangbroerne [m]
$l$ er længden af gangbroerne [m]

$q_j(t)$, $\dot{q}_j(t)$ og $\ddot{q}_j(t)$ bestemmes ud fra bevægelsesligningen jf. formel (B.1) med tilhørende begyndelsesbetingelser, idet $u$ erstattes af $q$, da systemet skal løses i modale koordinater i stedet for kartesiske koordinater. Idet det antages at systemet er dekoblet, så bestemmes $q_j(t)$, $\dot{q}_j(t)$ og $\ddot{q}_j(t)$ ved formel (B.8).

$$\ddot{q}_j + 2 \cdot \zeta_j \cdot \omega_j \cdot \dot{q}_j + \omega_j^2 \cdot q_j = \frac{1}{M_j} \cdot F_j(t) \quad , \quad j = 1, ..., n \quad , \quad t > 0 \tag{B.8}$$

hvor

$\zeta_j$ er dæmpningsforholdet for den j'te frihedsgrad [-]
$\omega_j$ er den cirkulære egenfrekvens for den j'te frihedsgrad [Hz]
$M_j$ er den modale masse for den j'te frihedsgrad [kg]
$F_j(t)$ er den modale last for den j'te frihedsgrad [N]
$n$ er antallet af frihedsgrader [-]

[Nielsen, S. R. K., 2004, s. 75]

Den cirkulære egenfrekvens bestemmes ved formel (B.9), den modale masse bestemmes ud fra integralet givet ved formel (B.10), mens den modale last bestemmes ud fra formel (B.11). For en simpelt understøttet bjælke kan det eftervises, at den modale masse kan reduceres som angivet i formel (B.10).

$$\omega_j = 2 \cdot \pi \cdot f_j \tag{B.9}$$

$$M_j = \int_0^l \frac{m}{l} \cdot \left(\Phi^{(j)}(x)\right)^2 dx = 0,5 \cdot m_j \tag{B.10}$$

$$F_j(t) = \int_0^l \Phi^{(j)}(x) \cdot f_p(x,t) dx = \Phi^(j)(x) \cdot f_p(t) \tag{B.11}$$

hvor
$f_j$ er gangbroernes j'te egenfrekvens [Hz]
$m$ er gangbroernes masse [kg]
$l$ er gangbroernes længde [m]
$f_p$ er personlasten beskrevet i kapitel 2 [N]

[Nielsen, S. R. K., 2004, s. 133]

For en simpelt understøttet bjælke kan det eftervises, at den modale masse jf. formel (B.10) kan bestemmes som $M_j = 0,5 \cdot m$.

Begyndelsesværdiproblemet jf. formel (B.8) løses vha. Newmark algoritmen, som er en numerisk tidsintegrationsmetode, der er nærmere beskrevet i bilag D.

Bilag C

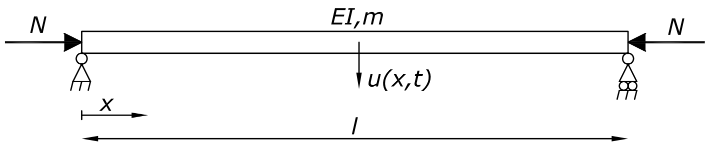
# Udæmpede egenfrekvenser og egensvingningsformer

I dette bilag bestemmes de udæmpede egenfrekvenser og de udæmpede egensvingningsformer for en simpelt understøttet bjælke.

## C.1 En simpelt understøttet bjælke

Dette afsnit er baseret på *Linear Vibration Theory* og *Introduktion til dynamik* [Nielsen, S. R. K., 2004, s. 123-126] og [Damkilde, L., 1998, s. 10-11].

De udæmpede egenfrekvenser og egensvingningsformer ønskes bestemt for en simpelt understøttet bjælke som vist på figur C.1.




**Figur C.1** *En simpelt understøttet bjælke.*

Der tages udgangspunkt i formel (C.1), som er den styrende differentialligning for svingninger af en Bernoulli-Euler bjælke.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(N\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{m(x)}{l}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{C.1}$$

hvor
$N$ er normalkraften i bjælken [N]

Differentialligningen beskriver bøjningssvingninger af en plan og ret bjælke med en kontinuert massefordeling. Der tages kun hensyn til deformationer fra bøjningsmomenter, hvilket betyder, at det er en relativ slank bjælke, der betragtes.

Løsningen til formel (C.1), som beskriver bjælkens egensvingninger, søges som et produkt af en stedafhængig faktor og en tidsafhængig faktor.

$$u(x,t)=\Phi(x)\cdot\cos(\omega\cdot t) \tag{C.2}$$

hvor
$\Phi(x)$ er den udæmpede egensvingningsform [-]
$\omega$ er den cirkulære udæmpede egenfrekvens [Hz]

Indføres dette udtryk i differentialligningen i formel (C.1) findes det, at formel (C.2) er en løsning, hvis $\Phi(x)$ og $\omega$ er løsninger til differentialligningen:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\cdot\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(N\cdot\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)-\omega^2\cdot\frac{m(x)}{l}\cdot\Phi(x)=0 \tag{C.3}$$

Betragtes specialtilfældet hvor bjælkens tværsnit er konstant, og hvor der ikke er normalkraft i bjælken, kan diffentialligningen reduceres til:

$$EI\cdot\frac{d^4\Phi(x)}{dx^4}-\omega^2\cdot\frac{m}{l}\cdot\Phi(x)=0 \tag{C.4}$$

Løsningen til formel (C.4) kan skrives som:

$$\Phi(x)=A\cdot\sin\left(\lambda\cdot\frac{x}{l}\right)+B\cdot\cos\left(\lambda\cdot\frac{x}{l}\right)+C\cdot\sinh\left(\lambda\cdot\frac{x}{l}\right)+D\cdot\cosh\left(\lambda\cdot\frac{x}{l}\right)\qquad x\in[0,l] \tag{C.5}$$

Her er A, B, C og D integrationskonstanter, og $\lambda$ er en dimensionsløs konstant, der er givet ved:

$$\lambda^4=\frac{\frac{m}{l}\cdot\omega^2\cdot l^4}{EI} \tag{C.6}$$

Integrationskonstanterne bestemmes ved at gøre brug af randbetingelserne for en simpelt understøttet bjælke, der er givet ved:

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad \Phi(0)=0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\Phi(0)=0 \\ x=l: &\qquad \Phi(l)=0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\Phi(l)=0 \end{aligned}$$

Randbetingelserne ved $x=0$ indsættes i formel (C.5).

$$\begin{aligned} \Phi(0)=0 &\quad\Rightarrow\quad B+D=0 \\ \tfrac{d^2}{dx^2}\Phi(0)=0 &\Rightarrow -\tfrac{\lambda^2}{l^2}\cdot B+\tfrac{\lambda^2}{l^2}\cdot D=0 \end{aligned}$$

Dermed er $B=D=0$, og formel (C.5) kan reduceres til:

$$\Phi(x)=A\cdot\sin\left(\lambda\cdot\frac{x}{l}\right)+C\cdot\sinh\left(\lambda\cdot\frac{x}{l}\right)\qquad x\in[0,l] \tag{C.7}$$

Randbetingelserne ved $x=l$ indsættes i formel (C.7).

$$\begin{aligned} \Phi(l)=0 &\quad\Rightarrow\quad A\cdot\sin(\lambda)+C\cdot\sinh(\lambda)=0 \\ \tfrac{d^2}{dx^2}\Phi(0)=0 &\Rightarrow -A\cdot\tfrac{\lambda^2}{l^2}\cdot\sin(\lambda)+C\cdot\tfrac{\lambda^2}{l^2}\cdot\sinh(\lambda)=0 \end{aligned}$$

De to ligninger opstilles på matriceform.

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\frac{\lambda^2}{l^2}\sin(\lambda) & \frac{\lambda^2}{l^2}\sinh(\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

For at få egentlige løsninger for A og C skal ligningssystemets determinant være 0.

$$\frac{2\cdot\lambda^2}{l^2}\cdot\sin(\lambda)\cdot\sinh(\lambda)=0$$

Dette kan kun opfyldes hvis:

$$\sin(\lambda)=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_j=j\cdot\pi,\quad j=1,2,...$$

Indsættes dette resultat i formel (C.6) og isoleres den udæmpede egenfrekvens findes:

$$\underline{\omega_j = j^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\frac{m}{l}}}}, \quad j = 1, 2, ...$$

Indsættes $\lambda$ i formel (C.8) bestemmes $C = 0$, og de udæmpede egensvingningsformer beskrevet ved formel (C.7) kan reduceres til:

$$\underline{\Phi^{(j)}(x) = A \cdot \sin\left(j \cdot \pi \cdot \frac{x}{l}\right)}, \quad j = 1, 2, ...$$

hvor

$A$ er en konstant, der er ubekendt ved en egensvingningsanalyse, og sættes normalt til 1 [-]

Bilag **D**

# Numerisk tidsintegration

I dette bilag beskrives Newmark algoritmen, som anvendes til at løse bevægelsesligningen, der er den fundamentale ligning i forbindelse med analyse af vibrationer. Der gennemgås en bromodel med flere frihedsgrader for at bilaget kan anvendes generelt i rapporten.

## D.1 Newmark algoritmen

Newmark algoritmen er en numerisk tidsintegration af bevægelsesligningen jf. formel (B.1) i det begrænsede tidsinterval $[t_0,\ t_0 + T]$, hvor $t_0$ angiver begyndelsestidspunktet og $T$ angiver den tid det tager at passere en given gangbro. Ved hjælp af Newmark algoritmen bestemmes en approksimativ løsning til bevægelsesligningen til et givent tidspunkt $t_s = t_0 + s \cdot \Delta t$, hvor $s = 1, 2, ..., n$ og $\Delta t = T/n$, hvor $n$ angiver antallet af tidsskridt. [Nielsen, S. R. K., 2007, s. 31]

Newmark algoritmen er en singlestep algoritme, hvor flytningen, hastigheden og accelerationen bestemmes til et nyt tidspunkt på betingelse af, at flytningen, hastigheden og accelerationen er kendt til tidspunktet før, og at lasten er kendt til alle tidspunkter. [Nielsen, S. R. K., 2007, s. 31]

For at starte algoritmen, skal der angives begyndelsebetingelser. Begyndelsesbetingeserne er givet ved begyndelsesflytningsvektoren $\underline{u}_0$ og begyndelseshastighedsvektoren $\underline{\dot{u}}_0$ til tiden $t_0$. Begyndelsesaccelerationsvektoren $\underline{\ddot{u}}_0$ bestemmes ud fra bevægelsesligningen givet ved formel (D.1).

$$\underline{\underline{m}} \cdot \underline{\ddot{u}}_0 = \underline{f}_0 - \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\dot{u}}_0 - \underline{\underline{k}} \cdot \underline{u}_0 \tag{D.1}$$

hvor
$\underline{\underline{m}}$ er en massematrice [kg]
$\underline{f}_0$ er kraften til begyndelsestidspunktet [N]
$\underline{\underline{c}}$ er en dæmpningsmatrice [kg/s]
$\underline{\underline{k}}$ er en stivhedsmatrice [N/m]

For at bestemme accelerations-, flytnings- og hastighedsvektoren til et nyt tidspunkt $t_{s+1}$, hvor $s = 0, 1, ...n$ og $n$ er antallet af tidsskridt, skal der bestemmes en indikator for den nye flytnings- og hastighedsvektor, som bestemmes ved formel (D.2) og (D.3).

$$\overline{\underline{u}}_{s+1} = \underline{u}_s + \underline{\dot{u}}_s \cdot \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \Delta t^2 \cdot \underline{\ddot{u}}_s \tag{D.2}$$

$$\overline{\underline{\dot{u}}}_{s+1} = \underline{\dot{u}}_s + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot \underline{\ddot{u}}_s \tag{D.3}$$

hvor
$\Delta t$ er tidsskridtet [s]
$\beta$ er en parameter, der bestemmer den numeriske stabilitet og nøjagtighed [-]
$\gamma$ er en parameter, der bestemmer den numeriske stabilitet og nøjagtighed [-]

Den nye accelerationsvektor bestemmes ud fra bevægelsesligningen og anvendelse af en dynamisk massematrice $\widetilde{m}$ givet ved formel (D.4).

$$\underbrace{\left(\underline{\underline{m}} + \gamma \cdot \Delta t \cdot \underline{\underline{c}} + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \underline{\underline{k}}\right)}_{\widetilde{m}} \cdot \underline{\ddot{u}}_{s+1} = \underline{f}_{s+1} - \underline{\underline{c}} \cdot \overline{\underline{\dot{u}}}_s - \underline{\underline{k}} \cdot \overline{\underline{u}}_{s+1} \tag{D.4}$$

Den nye flytnings- og hastighedsvektor bestemmes ved formel (D.5) og (D.6).

$$\underline{u}_{s+1} = \underline{\overline{u}}_{s+1} + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \underline{\ddot{u}}_{s+1} \tag{D.5}$$

$$\underline{\dot{u}}_{s+1} = \underline{\dot{\overline{u}}}_{s+1} + \gamma \cdot \Delta t \cdot \underline{\ddot{u}}_{s+1} \tag{D.6}$$

Bilag **E**

# Opbygning af beregningsprogrammer

I dette bilag forklares det, hvordan de udviklede beregningsprogrammer er opbygget, og hvad de enkelte filer overordnet indeholder. Formålet er at give et overblik over de mange programmer og filer, som kan findes på den vedlagte CD-ROM.

## E.1 BS 5400 og Eurocode

På den vedlagte CD-ROM findes to mapper, som hedder hhv. *BS 5400* og *Eurocode*. Disse mapper indeholder de to programmer, der er anvendt i forbindelse med forstudiet, hvor lasten bestemmes iht. BS 5400 og Eurocode. Da de to programmer grundlæggende er meget ens og består af tre filer med samme filnavne, forklares de derfor samtidigt. Programmerne er skrevet i MatLab og består af en programfil kaldet *Main* og to funktionsfiler kaldet *Newmark* og *Last*. Programmerne gennemløbes som angivet i punktopstillingen nedenfor, hvor punktopstillingen viser hvilke filer, der anvender hvilke filer.

- *Main.m*
  - *Newmark.m*
    - *Last.m*

Punktopstillingen angiver her, at i programfilen *Main* anvendes funktionsfilen *Newmark*, hvori funktionsfilen *Last* anvendes. I det følgende beskrives funktionen af de enkelte filer i samme kronologiske rækkefølge, som filerne bliver anvendt i programmerne.

***Main:***
I programfilen *Main* indtastes alle de nødvendige inputdata for det enkelte program. Først defineres parametrene for bromodellen, hvilket i disse programmer modelleres som et dynamisk system med én frihedsgrad. De nødvendige parametre er derfor $l$, $m$, $f$ og $\zeta$. Derudover skal parametrene $\beta$, $\gamma$ og $\Delta t$ angives, som anvendes ved Newmark tidsintegrationen. Efter inputdataene er angivet beregner programmet en gangbros modale masse, stivhed og dæmpning. Den modale masse bestemmes ud fra formel (B.10), som for en simpelt understøttet bjælke kan reduceres til:

$$M = 0,5 \cdot m$$

Dæmpningen og stivheden af det dynamiske system bestemmes ved:

$$c = 2 \cdot \zeta \cdot (2 \cdot \pi \cdot f) \cdot M$$
$$k = (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot M$$

Flytningen, hastigheden og accelerationen af en given gangbro bestemmes ud fra bevægelseligningen, hvilken er givet ved formel (E.1).

$$M \cdot \ddot{q}(t) + c \cdot \dot{q}(t) + k \cdot q(t) = F(t) \quad , \quad t > 0 \tag{E.1}$$

Flytningen, hastigheden og accelerationen bestemmes ud fra Newmark algoritmen, som er nærmere beskrevet i bilag D. Newmark algoritmen foretages i funktionsfilen *Newmark*, mens den modale last $F(t)$ der anvendes i Newmark algoritmen beregnes i funktionsfilen *Last*.

***Newmark:***
For at starte Newmark algoritmen, skal der angives begyndelsesbetingelser. Begyndelsesbetingelserne er givet ved begyndelsesflytningen i modale koordinater $q_0$ og begyndelseshastigheden i modale koordinater $\dot{q}_0$ til tiden $t_0$. Derudover skal der anvendes en modal last $F_0$ til begyndelsestidspunktet $t_0$. Systemet ønskes i hvile ved begyndelsen, og begyndelsesbetingelserne er derfor givet ved:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0\ s \\ q_0 &= 0\ m \\ \dot{q}_0 &= 0\ m/s \\ F_0 &= 0\ N \end{aligned}$$

Newmark algoritmen køres herefter $n$ antal gange svarende til antallet af tidsskridt $\Delta t$, der ønskes undersøgt. Det er valgt, at det ønskede antal tidsskridt skal svare til den tid, det tager personen at passere en gangbro, da det er fundet, at den maksimale acceleration forekommer, imens personen er på gangbroen. Antallet af tidsskridt $n$ og den tid det tager at krydse en gangbro $T$ bestemmes ved formel (E.2).

$$n = \frac{T}{\Delta t} \qquad ,\text{hvor} \qquad T = \frac{l}{v} \tag{E.2}$$

Der bestemmes en acceleration til hvert enkelt tidsskridt, hvoraf den maksimale acceleration kan bestemmes.

***Last:***
I filen *Last* bestemmes den modale last til hvert tidsskridt iht. hhv. BS 5400 og Eurocode. Lastmodellerne angivet i BS 5400 og Eurocode er beskrevet i forstudiet, og derfor kommenteres dette ikke yderligere.

## E.2 Probabilistisk program

For den probabilistiske metode beskrevet i forstudiet findes på den vedlagte CD-ROM i mappen *Probabilistisk program* et MatLab/Fortran-program, der er udviklet til at lave disse analyser. Programmet består af følgende otte filer, hvoraf seks filer er MatLab-filer og to er Fortran-filer. Programmet gennemløbes som angivet i punktopstillingen nedenfor, hvor punktopstillingen viser hvilke filer, der anvender hvilke filer.

- *Main.m*
  - *Normalfordelt.m*
  - *Alpha.m*
    - *Normalfordelt.m*
  - *Fortraneksport.m*
- *NewmarkSDOF.f90* (Fortran)
  - *LastSDLF.f90* (Fortran)
- *Main.m*
  - *Fraktiler.m*
  - *Plot.m*

I det følgende beskrives funktionen af de enkelte filer i samme kronologiske rækkefølge, som filerne bliver anvendt i programmet.

***Main:***
Programmet består af en programfil *Main*, hvor inputdata angives tilsvarende BS 5400- og Eurocode-programmet. Ved dette program skal der desuden angives middelværdier og spredninger for de normalfordelte stokastiske variable, der indgår i lastmodellen, samt der skal angives det antal Monte Carlo simuleringer, der ønskes foretages.

***Normalfordelt:***
Funktionsfilen *Normalfordelt* er en fil, som ud fra de angivne spredninger og middelværdier for de stokastiske variable, laver Monte Carlo simuleringer, hvorved der simuleres normalfordelte tal. Monte Carlo simuleringen fungerer ved, at der generes et ligefordelt tal mellem 0 og 1 vha. en funktion i MatLab. Dette tal sættes lig med $F1$ i formel (E.3).

$$X = \Phi^{-1}(F1) \cdot \sigma_X + \mu_X \tag{E.3}$$

hvor
- $X$ er en stokastisk variabel, som er normalfordelt
- $\Phi$ er fordelingsfunktionen for en standard normalfordeling
- $F1$ er et ligefordelt tal mellem 0 og 1
- $\sigma_X$ er spredningen af den normalfordelte stokastiske varialbel X
- $\mu_X$ er middelværdien af den normalfordelte stokastiske variabel X

Herved bestemmes én værdi for $X$ og ved at gentage proceduren $n$ antal gange, kan f.eks. 300.000 gangfrekvenser simuleres. Efter $n$ antal Monte Carlo simuleringer undersøges det, om nogen af de simulerede værdier er negative, og hvis dette er tilfældet simuleres nye tal for disse.

***Alpha:***
I funktionsfilen *Alpha* bestemmes middelværdien og spredningen for den dynamiske lastfaktor ved udtrykket bestemt af Kerr jf. afsnit 2.3.1. Desuden sikres det her, at ekstreme værdier for gangfrekvensen ikke giver urealistiske værdier for middelværdien af den dynamiske lastfaktor. Dette er nærmere beskrevet i forstudiet.

***Fortraneksport:***
*Fortraneksport* er en funktionsfil, som udskriver alle data, som skal anvendes i Newmark algoritmen og lastmodellen til en txt-fil. Formålet hermed er at eksportere dataene over i Fortran, hvori beregningerne i Newmark algoritmen gennemføres. Denne fremgangsmåde er valgt, da hele programmet oprindeligt var lavet i MatLab, men da MatLab kræver meget længere beregningstid end Fortran, blev de beregningstunge dele udarbejdet i Fortran for at reducere beregningstiden.

***NewmarkSDOF (Fortran):***
I denne Fortran-fil importeres først txt-filerne, som blev eksporteret fra MatLab. Efterfølgende gennemregnes Newmark algoritmen, hvor lasten bestemmes ved funktionsfilen *LastSDLF*, hvilket forløber på samme måde som i MatLab for BS5400- og Eurocode-programmet. Den maksimale acceleration gemmes ved hver Monte Carlo simulering, og det totale antal maksimale accelerationer udskrives til en txt-fil, som kan importeres i MatLab.

***LastSDLF (Fortran):***
I denne fil bestemmes den modale last til hvert tidsskridt ud fra lastmodel I. Her anvendes de simulerede parametre fra Monte Carlo simuleringerne, som er importeret fra MatLab.

***Fraktiler & Plot:***
I programfilen *Main* kan txt-filen med de maksimale accelerationer importeres, da programfilen er opdelt i celler. Her er der mulighed for at køre en celle, som anvender funktionsfilen *Fraktiler*, der kan beregne 50%, 75% og 95% fraktilen for fordelingsfunktionen. Desuden er det muligt at køre en celle som anvender funktionsfilen *Plot*, som plotter en tætheds- og fordelingsfunktion for de maksimale accelerationer.

## E.3 Avancerede probabilistiske programmer

De avancerede probabilistiske programmer er anvendt i kapitel 5 og 6, hvor der medtages flere frihedsgrader og flere lastkomponenter i lastmodellen. På den vedlagte CD-ROM findes der to mapper, som hedder hhv. *Avanceret probabilistisk program* og *Avanceret probabilistisk program - multimode*. Begge programmer er grundlæggende ens opbygget, og svarer overordnet til samme opbygning som det *Probabilistiske program*, der er beskrevet i afsnit E.2. Begge programmer benytter følgende filer i den angivne rækkefølge til at eksportere de nødvendige data til Fortran, hvor de tidskrævende beregninger laves.

- *Main.m*
  - *Normalfordelt.m*
  - *Alpha.m*
    - *Normalfordelt.m*
  - *MCK.m*
  - *MCKeksisterende.m*
  - *Fortraneksport.m*
- Beregninger i Fortran
- *Main.m*
  - *Fraktiler.m*
  - *Plot.m*

Filerne har de samme filnavne som i det *Probabilistiske program* jf. afsnit E.2, fordi indholdet overordnet er det samme. I det følgende kommenteres kun de filer, hvori der forekommer væsentlige ændringer ift. det *Probabilistiske program*.

***Alpha:***
For disse programmer bestemmes ikke kun middelværdien og spredningen for den første dynamiske lastfaktor, men også middelværdier og spredninger for de øvrige dynamiske lastfaktorer. For *Avanceret probabilistisk program - multimode* programmet beregnes desuden de dynamiske lastfaktorer for de mellemharmoniske lastkomponenter.

***MCK & MCKeksisterende:***
I disse funktionsfiler defineres $m$, $c$ og $k$ for alle frihedsgrader. Funktionsfilen *MCK* anvendes ved gangbro A og B, mens der anvendes funktionsfilen *MCKeksisterende* for gangbro C.

**Beregninger i Fortran**
Programmet *Avanceret probabilistisk program* indeholder følgende Fortran-filer:

- *NewmarkMDOF.f90*
  - *LastMDLF.f90*
    - *Egensvingningsformer.f90*
  - *Egensvingningsformer.f90*

Programmet *Avanceret probabilistisk program - multimode* indeholder følgende Fortran-filer:

- *NewmarkMDOF.f90*
  - *Lastmultimode.f90*
    - *Normalpha.f90*
    - *Normsubalpha.f90*
    - *Egensvingningsformer.f90*
  - *Egensvingningsformer.f90*

***NewmarkMDOF:***
Denne fil importerer dataene, der er eksporteret fra MatLab. Newmark algoritmen laves på tilsvarende måde som i funktionsfilen *NewmarkSDOF.f90*, der blev anvendt i det *Probabilistiske program*. Forskellen er her, at dette gentages det antal gange, som svarer til antallet af frihedsgrader, hvilket kan gøres, da bevægelsesligningerne antages at dekoble. Da det ved anvendelse af flere frihedsgrader ikke nødvendigvis er på midten af gangbroerne, de største accelerationer finder sted, bestemmes accelerationerne i 50 punkter langs gangbroerne.

***LastMDLF & Lastmultimode:***
I disse filer bestemmes den modale last ved hhv. lastmodel II, som er beskrevet i afsnit 6.2, og lastmodel III som er beskrevet i 6.2. Lastmodel III gør hertil brug af funktionsfilerne *Normalpha* og *Normsubalpha*, og beregningerne heri er beskrevet i bilag I.

***Egensvingningsformer:***
I funktionsfilen beregnes egensvingningsformerne for gangbro C, hvilket er beskrevet i bilag H.

## E.4 Matsumoto

I mappen *Matsumoto* på den vedlagte CD-ROM findes et MatLab/Fortran-program, der anvender Matsumotos metode til at beregne det dynamiske respons fra flere personer. Programmet kan både anvendes til grupper og spredte personer. Programmet består af følgende ti filer, hvoraf seks filer er MatLab-filer og fire er Fortran-filer. Programmet gennemløbes som angivet i punktopstillingen nedenfor.

- *Main.m*
  - *Normalfordelt.m*
  - *Alpha.m*
    - *Normalfordelt.m*
  - *Fortraneksport.m*
- *NewmarkSDOF.f90* (Fortran)
  - *Eksponential.f90* (Fortran)
  - *Antal.f90* (Fortran)
  - *LastSDLF.f90* (Fortran)
- *Main.m*
  - *Fraktiler.m*
  - *Plot.m*

Da alle MatLab-filerne er de samme som anvendt i *Probabilistisk program* kommenteres MatLab-filerne til dette program ikke yderligere. Desuden er indholdet i Fortran-filerne næsten det samme, hvorfor kun forskelle ift. det *Probabilistiske program* beskrives.

***NewmarkSDOF (Fortran):***
Newmark algoritmen anvender i dette program et større antal tidsskridt end de programmer, hvor der antages én person på gangbroerne. Antallet af tidsskridt beregnes i dette program ud fra den tid, som det tager personen at gå over en gangbro, samt tiden fra den første person ankommer til den givne gangbro, og til den sidste person forlader den givne gangbro. Når den første person har forladt den givne gangbro, sættes lasten til 0 N.

***Eksponential (Fortran):***
Tidsafstandene imellem personerne ankommer til den givne gangbro bestemmes i denne funktionsfil ved Monte Carlo simuleringer. Der simuleres syv eksponentialfordelte tidsafstande, da den første person går ind på en gangbro til tiden 0 s.

***Antal (Fortran):***
Denne funktionsfil anvendes ved hvert tidsskridt til at bestemme, hvor mange personer der opholder sig på den givne gangbro til det pågældende tidspunkt. Herudfra kan Matsumotos faktor, der skal ganges på broresponset for én gående person bestemmes.

## E.5 Summation af respons

I mappen *Summation af respons* på den vedlagte CD-ROM findes to MatLab/Fortran-programmer, der anvender metoden, hvor der summeres tidshistorier til at beregne det dynamiske respons fra flere personer. Det ene program anvendes til grupper, og det andet program anvendes til spredte personer. Begge programmer består af ni filer, hvoraf seks filer er MatLab-filer og tre er Fortran-filer. For begge programmer er MatLab-filerne ens, og der er kun små forskelle i Fortran-filerne. Programmerne gennemløbes som angivet i punktopstillingen nedenfor.

- *Main.m*
  - *Normalfordelt.m*
  - *Alpha.m*
    - *Normalfordelt.m*
  - *Fortraneksport.m*
- *NewmarkSDOF.f90* (Fortran)
  - *Eksponential.f90* (Fortran)
  - *LastSDLF.f90* (Fortran)
- *Main.m*
  - *Fraktiler.m*
  - *Plot.m*

Da alle MatLab-filerne er de samme som anvendt i *Probabilistisk program* og *Matsumoto*, kommenteres MatLab-filerne til disse program ikke yderligere, hvorfor kun Fortran-filerne kommenteres.

***NewmarkSDOF (Fortran):***
I newmark algoritmen beregnes og summeres det dynamiske respons for otte personer af gangen. Dette gøres ved at beregne tidshistorien for accelerationerne for den enkelte person i gruppen og summere det med de øvrige personers tidshistorie. Den enkelte persons tidshistorie begynder, når personen ankommer til en given gangbro og slutter, når den sidste person har forladt gangbroen. I den summerede tidshistorie for de otte personer bestemmes den maksimale acceleration. Forskellen på de to programmer for hhv. en gruppe af personer og spredte personer ligger i hvilken ganghastighed der anvendes.

***Eksponential (Fortran):***
Tidsafstandene imellem personerne ankommer til en given gangbro bestemmes i denne funktionsfil ved Monte Carlo simuleringer. Tidsafstandene anvendes til at bestemme, hvorfra den enkelte tidshistorie skal summeres.

Bilag **F**

# Stokastisk lastmodel

I dette bilag foretages et konvergensstudie af tidsskridtet anvendt i Newmark algoritmen for en stokastisk lastmodel, hvor der tages udgangspunkt i lastmodel I og bromodel $A_1$.

## F.1 Konvergens af tidsskridt

For at undersøge hvilket tidsskridt der skal anvendes i Newmark algoritmen, er der foretaget et konvergensstudie, hvor den maksimale acceleration bestemmes ved at anvende forskellige tidsskridt. I den stokastiske lastmodel, lastmodel I, anvendes parametrene givet i tabel F.1.

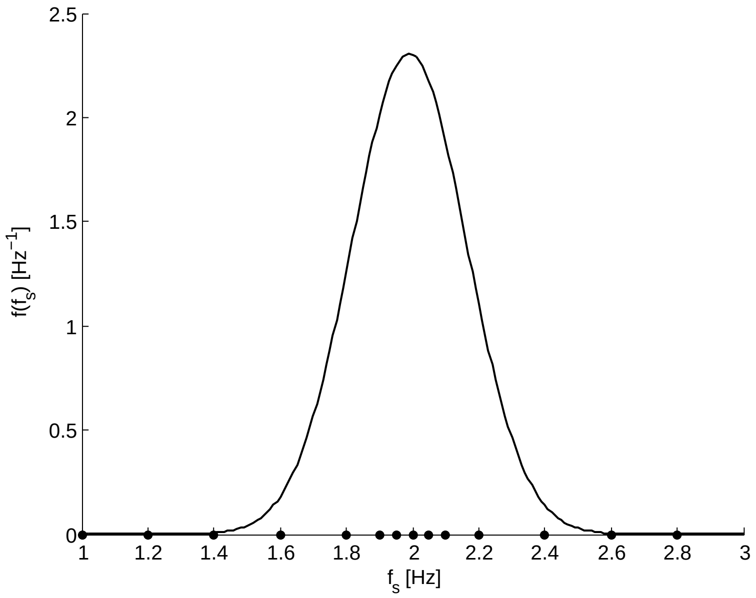
| | $f_s$ [Hz] | $l_s$ [m] | $\alpha_1$ [-] | $m_p$ [kg] |
|---|---|---|---|---|
| Fordeling | Normal | Normal | Normal | Normal |
| $\mu$ | 1,99 | 0,71 | $\mu_{\alpha_1}(f_s)$ | 75 |
| $\sigma$ | 0,173 | 0,071 | $0,16 \cdot \mu_{\alpha_1}(f_s)$ | 15 |

**Tabel F.1** *Anvendte fordelinger for parametrene i lastmodel I.*

Idet gangfrekvensen, skridtlængden, den dynamiske lastfaktor og personens masse varierer fra simulering til simulering, kan det være svært at afgøre, hvilken indflydelse de enkelte parametre har på konvergensen af de maksimale accelerationer. Derfor foretages en undersøgelse, hvor alle parametrene betragtes som deterministiske og varieres én af gangen. Dette gøres ved at lave ca. 15 beregninger, hvor skridtlængden, den dynamiske lastfaktor og personens masse holdes konstant og der udvælges ca. 15 forskellige værdier af gangfrekvensen for at se, hvilken indflydelse gangfrekvensen har på konvergensen af tidsskridtet. Tilsvarende gøres hvor skridtlængden varieres og de øvrige parametre holdes konstant, hvor den dynamiske lastfaktor varieres og de øvrige parametre holdes konstant samt hvor personens masse varieres og de øvrige parametre holdes konstant.

### Variation af gangfrekvensen

Først foretages et konvergensstudie, hvor skridtlængden, den dynamiske lastfaktor og personens masse holdes konstant, mens gangfrekvensen varieres. Der udvælges 14 gangfrekvenser, hvorudfra der bestemmes 14 værdier af den maksimale acceleration. Værdierne for gangfrekvensen vælges ved at betragte tæthedsfunktionen for gangfrekvensen, som er vist i figur F.1.




**Figur F.1** *Tæthedsfunktion for gangfrekvensen N(1,99 Hz ; 0,173 Hz) og de udvalgte værdier angivet ved punkter.*

Ud fra figur F.1 ses det, hvilke udfald af gangfrekvenser, der er mulige at få ved en Monte Carlo simulering, og der udvælges derfor 14 gangfrekvenser, som både dækker normalfordelingen bredt, og specifikt omkring egenfrekvensen tilhørende bromodel $A_1$. De 14 gangfrekvenser der betragtes er angivet i Herz, og givet ved:

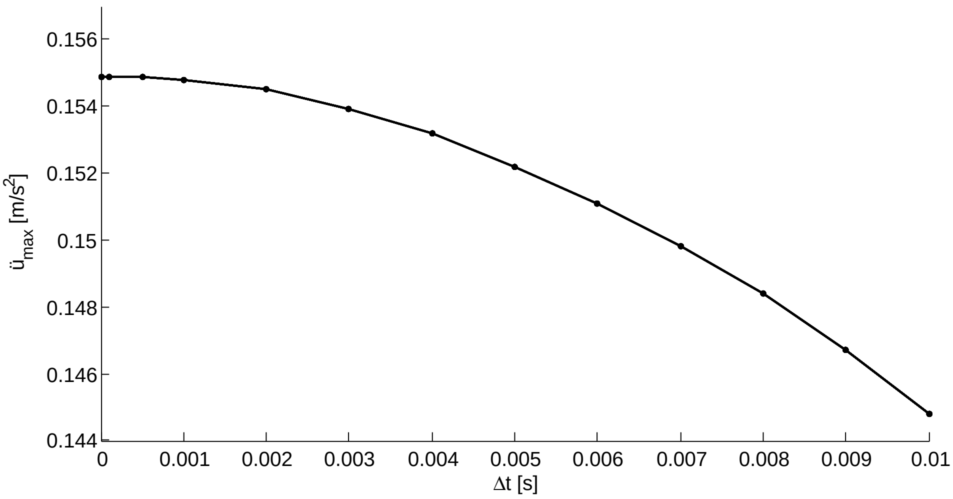
[1 1,2 1,4 1,6 1,8 1,9 1,95 2,0 2,05 2,1 2,2 2,4 2,6 2,8]

Ved beregningen af de maksimale accelerationer anvendes konstante værdier for skridtlængden på $l_s = 0,71$ m, den dynamiske lastfaktor på $\alpha_1 = 0,3$ og personens masse på $m_p = 75$ kg. Skridtlængden, den dynamiske lastfaktor og personens masse er valgt ud fra normalfordelingerne for disse.

Beregningen af de maksimale accelerationer forløber som beskrevet i bilag B, hvor alle 14 beregninger er lavet med tidsskridtene angivet i sekunder, og givet ved:

[0,01 0,009 0,008 0,007 0,006 0,005 0,004 0,003 0,002 0,001 0,0005 0,0001 0,00001]

Der bestemmes derfor 14 kurver, der viser de maksimale accelerationer som funktion af tidsskridtet. Ud fra analyserne er det fundet, at det er omkring frekvensen 2,0 Hz, der skal anvendes mindst tidsskridt for at opnå konvergens. Det vil sige, at det er i området, hvor der opstår resonans, hvor gangfrekvensen er lig med egenfrekvensen, at der kræves mindst tidsskridt for at opnå konvergens. På figur F.2 ses den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en gangfrekvens på 2,05 Hz, som er et af de tilfælde, der kræver det mindste tidsskridt.

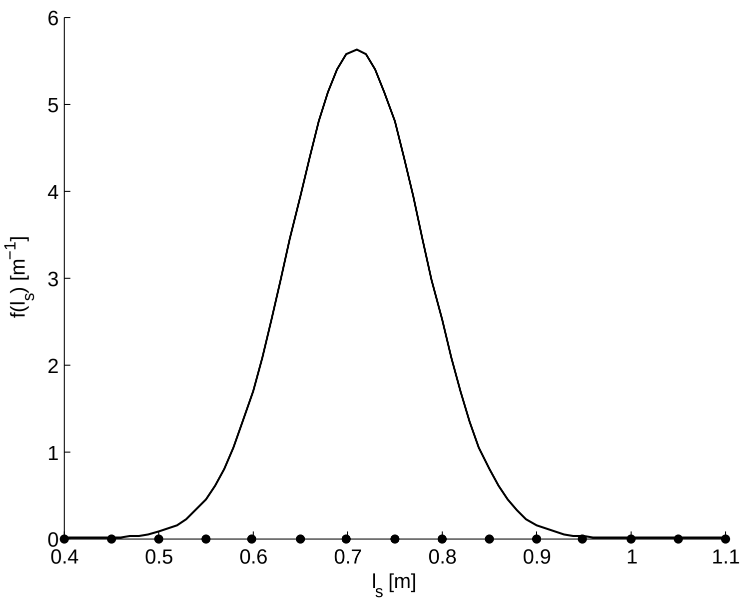



**Figur F.2** *Den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en gangfrekvens på 2,05 Hz.*

Ved at betragte figur F.2 ses det, at accelerationen nærmer sig et stabilt niveau, når tidsskridtet mindskes, og det vurderes, at accelerationen er konvergeret til et tilfredsstillende niveau, når der anvendes et tidsskridt på 0,0005 s.

## Variation af skridtlængden

Der foretages et konvergensstudie, hvor gangfrekvensen, den dynamiske lastfaktor og personens masse holdes konstant, mens skridtlængden varieres. Der udvælges 15 skridtlængder, hvorudfra der bestemmes 15 værdier for den maksimale acceleration. Værdierne for skridtlængden vælges ved at betragte tæthedsfunktionen for skridtlængden, som er vist i figur F.3.




**Figur F.3** *Tæthedsfunktion for skridtlængden N(0,71 m ; 0,071 m) og de udvalgte værdier angivet ved punkter.*

Ud fra figur F.3 ses det, hvilke udfald af skridtlængder, der er mulige at få ved en Monte Carlo simulering, og der udvælges derfor 15 skridtlængder, som dækker normalfordelingen bredt. De 15 skridtlængder der betragtes er angivet i meter, og givet ved:

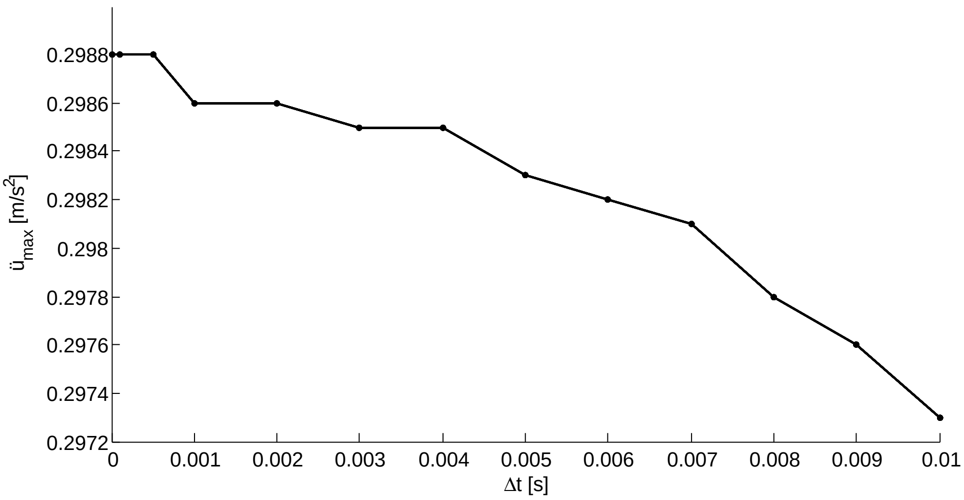
[0,4 0,45 0,5 0,55 0,6 0,65 0,7 0,75 0,8 0,85 0,9 0,95 1,0 1,05 1,1]

I beregningen af de maksimale accelerationer anvendes konstante værdier for gangfrekvensen på $f_s = 2$ Hz, den dynamiske lastfaktor på $\alpha_1 = 0,3$ og personens masse på $m_p = 75$ kg. Der er valgt en gangfrekvens, der svarer til egenfrekvensen af bromodel $A_1$, da det er fundet i analyserne af variationen af gangfrekvensen, at det er i resonansområdet, der kræves mindst tidsskridt. Den dynamiske lastfaktor er vurderet ud fra normalfordelingen for denne.

Beregningen af de maksimale accelerationer forløber som beskrevet i bilag B, hvor alle 15 beregninger er lavet med tidsskridtene givet ved:

[0,01 0,009 0,008 0,007 0,006 0,005 0,004 0,003 0,002 0,001 0,0005 0,0001 0,00001]

Der bestemmes 15 kurver, der viser de maksimale accelerationer som funktion af tidsskridtet. Ud fra analyserne er det fundet, at accelerationsniveauet nærmer sig stabile værdier ved mindre tidsskridt end ved analyserne, hvor gangfrekvensen er varieret. På figur F.4 ses den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en skridtlængde på 1,1 m, som er et af de tilfælde, der kræver det mindste tidsskridt.




**Figur F.4** *Den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en skridtlængde på 1,1 m.*

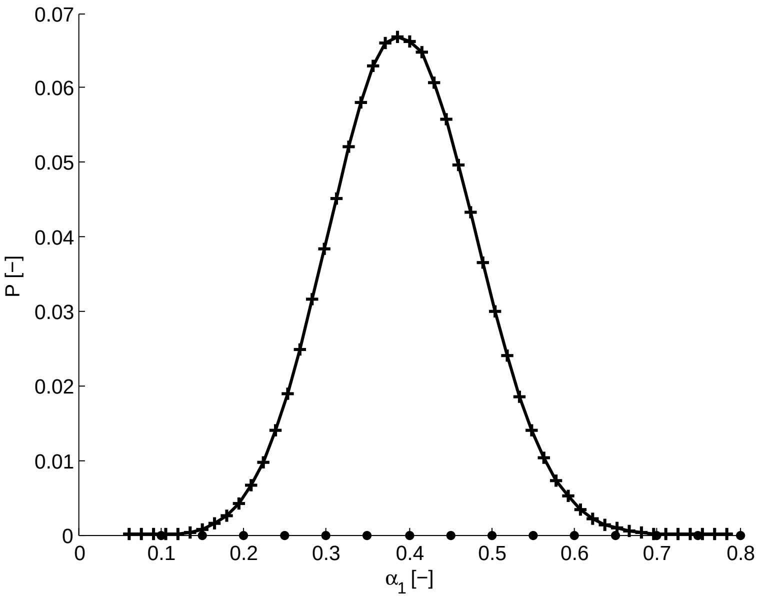
Ved at betragte figur F.4 ses det, at der er medtaget flere decimaler op af ordinataksen end i figur F.2. Det vurderes derfor ud fra figur F.2, at skridtlængden er af mindre betydning for konvergens af accelerationsniveauet, og at det derfor ikke er nødvendigt med et mindre tidsskridt end vurderet ud fra analyserne med variation af gangfrekvensen for at opnå et tilfredsstillende estimat af det dynamiske respons for bromodel $A_1$.

## Variation af den dynamiske lastfaktor

Der foretages et konvergensstudie, hvor gangfrekvensen, skridtlængden og personens masse holdes konstant, mens den dynamiske lastfaktor varieres. Der udvælges 15 værdier for den dynamiske lastfaktor, hvorudfra der bestemmes 15 værdier for den maksimale acceleration.

I beregningen af de maksimale accelerationer anvendes konstante værdier for gangfrekvensen på $f_s = 2$ Hz, skridtlængden på $l_s = 0,71$ m og personens masse på $m_p = 75$ kg. Der er valgt en gangfrekvens, der svarer til egenfrekvensen af bromodel $A_1$, da det er fundet i analyserne af variationen af gangfrekvensen, at det er i resonansområdet, der kræves mindst tidsskridt. Den dynamiske lastfaktor er vurderet ud fra normalfordelingen for denne.

Værdierne for den dynamiske lastfaktor vælges ved at betragte sandsynlighedsfunktionen for den dynamiske lastfaktor, hvilket er vist i figur F.5.




**Figur F.5** *Sandsynlighedsfunktion for den dynamiske lastfaktor N($\mu_{\alpha_1}(f_s)$ ; $\sigma_{\alpha_1}(f_s)$) og de udvalgte værdier angivet ved punkter.*

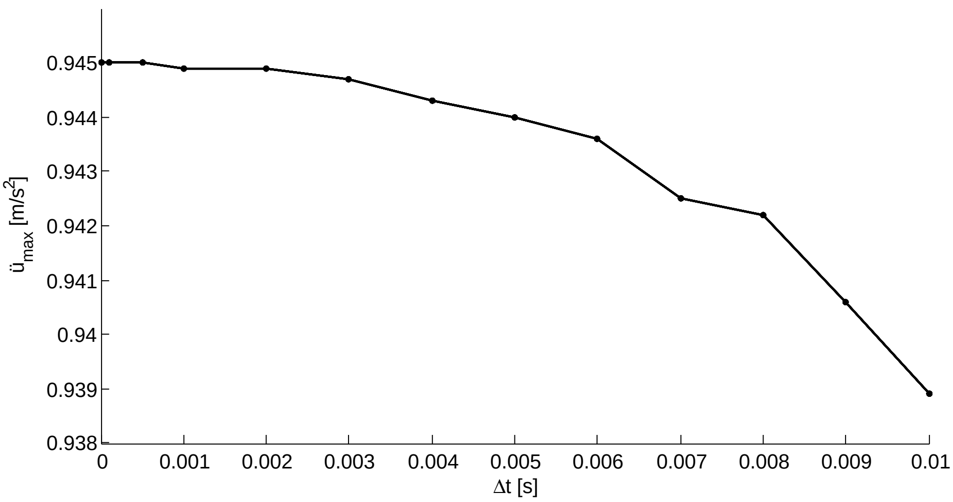
Ud fra figur F.5 ses hvilke udfald af den dynamiske lastfaktor der er mulige at få ved en Monte Carlo simulering, og der udvælges derfor 15 værdier for den dynamiske lastfaktor, som dækker sandsynlighedsfunktionen bredt. De 15 værdier for den dynamiske lastfaktor der betragtes er givet ved:

[0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,35 0,4 0,45 0,5 0,55 0,6 0,65 0,7 0,75 0,8]

Beregningen af de maksimale accelerationer for hver Monte Carlo simulering forløber som beskrevet i bilag B, hvor alle 15 beregninger er lavet med tidsskridtene givet ved:

[0,01 0,009 0,008 0,007 0,006 0,005 0,004 0,003 0,002 0,001 0,0005 0,0001 0,00001]

Der bestemmes 15 kurver, der viser de maksimale accelerationer som funktion af tidsskridtet. Ud fra analyserne er det fundet, at accelerationsniveauet nærmer sig stabile værdier ved mindre tidsskridt end ved analyserne, hvor gangfrekvensen er varieret. På figur F.6 ses den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en dynamisk lastfaktor på 0,7, som er et af de tilfælde, der kræver det mindste tidsskridt.




**Figur F.6** *Den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en dynamiske lastfaktor på 0,7.*

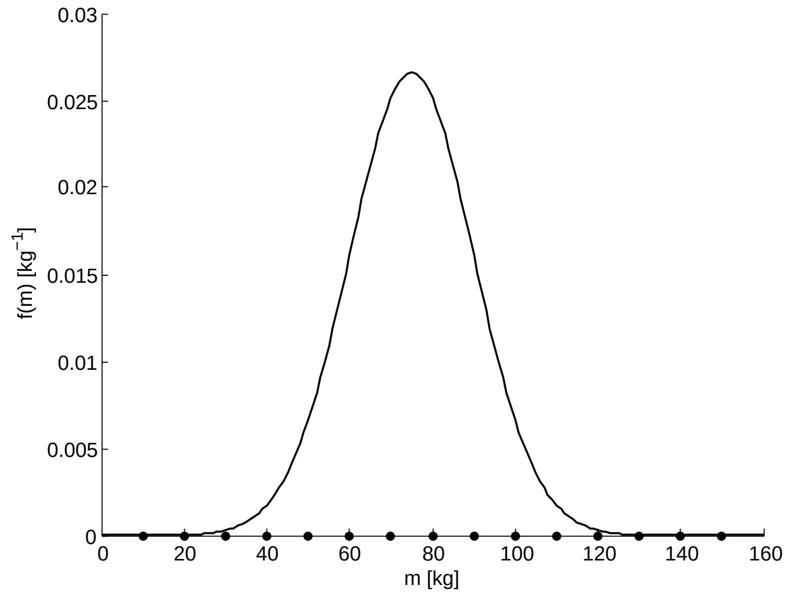
Ved at betragte figur F.6 ses det, at der ikke kræves mindre tidsskridt end fundet ved analyserne med variation af gangfrekvensen. Det vurderes derfor ud fra figur F.6, at det derfor ikke er nødvendigt med et mindre tidsskridt end vurderet ud fra analyserne med variation af gangfrekvensen for at opnå et tilfredsstillende estimat af det dynamiske respons for bromodel $A_1$.

### Variation af personens masse

Der foretages et konvergensstudie, hvor gangfrekvensen, skridtlængden og den dynamiske lastfaktor holdes konstant, mens personens masse varieres. Der udvælges 15 værdier for personens masse, hvorudfra der bestemmes 15 værdier for den maksimale acceleration.

I beregningen af de maksimale accelerationer anvendes konstante værdier for gangfrekvensen på $f_s = 2$ Hz, skridtlængden på $l_s = 0,71$ m og den dynamiske lastfaktor på $\alpha_1 = 0,3$. Der er valgt en gangfrekvens, der svarer til egenfrekvensen af bromodel $A_1$, da det er fundet i analyserne af variationen af gangfrekvensen, at det er i resonansområdet, der kræves mindst tidsskridt. Personens masse er vurderet ud fra normalfordelingen for denne.

Værdierne for personens masse vælges ved at betragte tæthedsfunktionen for personens masse, hvilket er vist i figur F.7.




**Figur F.7** *Tæthedsfunktion for personens masse N(75 kg ; 15) og de udvalgte værdier angivet ved punkter.*

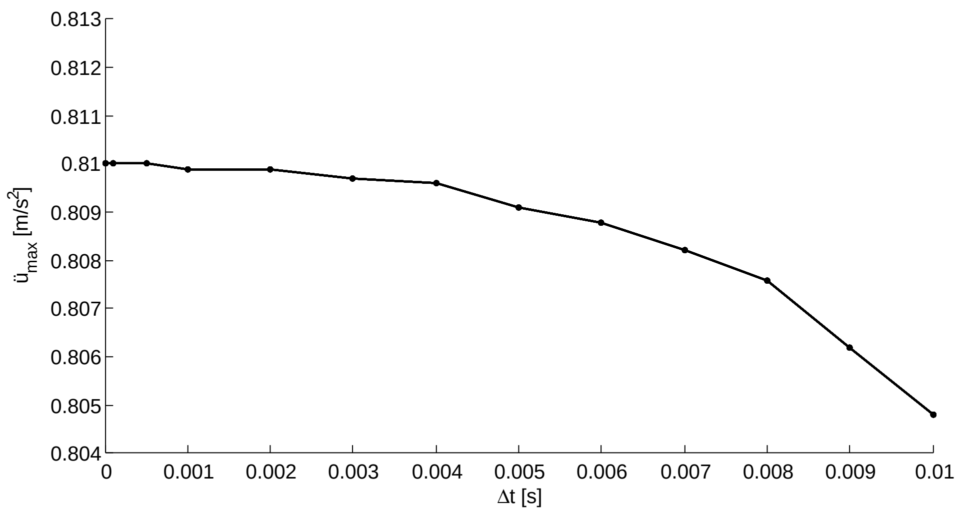
Ud fra figur F.7 ses hvilke udfald af personens masse der er mulige at få ved en Monte Carlo simulering, og der udvælges derfor 15 værdier for personens masse, som dækker tæthedsfunktionen bredt. De 15 værdier af personens masse der betragtes er angivet i kilo, og givet ved:

[10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150]

Beregningen af de maksimale accelerationer for hver Monte Carlo simulering forløber som beskrevet i bilag B, hvor alle 15 beregninger er lavet med tidsskridtene givet ved:

[0,01 0,009 0,008 0,007 0,006 0,005 0,004 0,003 0,002 0,001 0,0005 0,0001 0,00001]

Der bestemmes 15 kurver, der viser de maksimale accelerationer som funktion af tidsskridtet. Ud fra analyserne er det fundet, at accelerationsniveauet nærmer sig stabile værdier ved mindre tidsskridt end ved analyserne, hvor gangfrekvensen er varieret. På figur F.8 ses den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for personens masse på 150 kg, som er et af de tilfælde, der kræver det mindste tidsskridt.




**Figur F.8** *Den maksimale acceleration som funktion af tidsskridtet for en masse af personen på 150 kg.*

Ved at betragte figur F.8 ses det, at der ikke kræves mindre tidsskridt end fundet ved analyserne med variation af gangfrekvensen. Det vurderes derfor ud fra figur F.8, at det derfor ikke er nødvendigt med et mindre tidsskridt end vurderet ud fra analyserne med variation af gangfrekvensen for at opnå et tilfredsstillende estimat af det dynamiske respons for bromodel $A_1$.

Bilag **G**

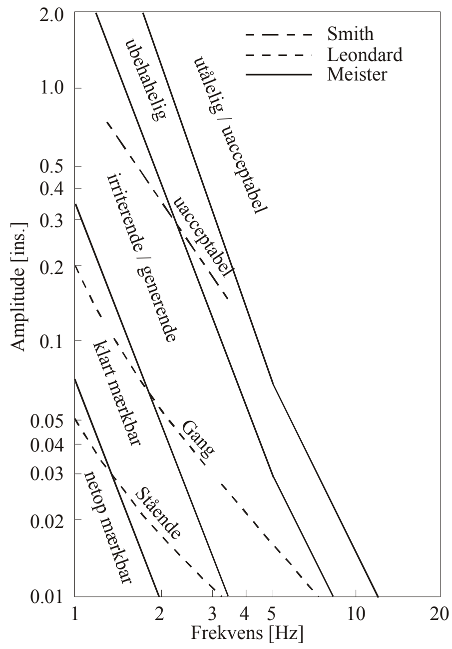
# Komfort i forbindelse med vibrationer af gangbroer

I dette bilag redegøres der for nogle af de forsøg, der gennem tiden er lavet for at give indblik i menneskers opfattelse af komfort, når de opholder sig på konstruktioner der vibrerer.

## G.1 Undersøgelser af komfort

For at undersøge personers opfattelse af vibrationer er der gennem tiden udført et antal forsøg. De første undersøgelser var ikke direkte relateret til gangbroer, men udgør det første skridt i forskningen af personers opfattelse af vibrationer og danner basis for senere undersøgelser. En af de første undersøgelser blev foretaget af Reiher og Meister, der klassificerede den menneskelige opfattelse i seks kategorier som en funktion af vibrationsamplituden og -frekvensen. Dette er illustreret på figur G.1. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 23]

Undersøgelser af personers opfattelse af vibrationer på broer er bl.a. udført af Leonard, der foretog undersøgelser relateret til gående og stående personer under vibrationer af begrænset varighed. Resultaterne heraf viste, at stående personer er mere følsomme overfor vibrationer end gående. Dette kan ses på figur G.1. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 25]

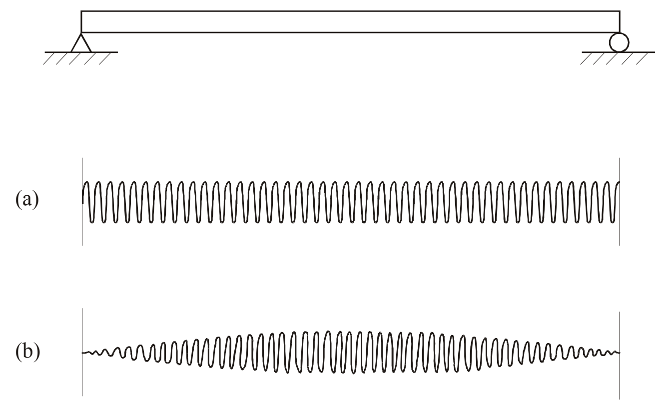



**Figur G.1** *Skalaer for menneskers opfattelse af vibrationer. Der er tre skalaer udarbejdet af hhv. Meister, Leonard og Smith. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 25]*

På figur G.1 ses tre forskellige skalaer for personers opfattelse af vibrationer hhv. Meisters, Leonards og Smiths skala. Meisters skala er som tidligere beskrevet baseret på de første udførte forsøg med menneskers opfattelse af vibrationer og ikke direkte relateret til broer. Skalaen lavet af Leonard er baseret på broer, men forsøgene er gældende for vibrationer af begrænset varighed. Derudover er der udført et forsøg af Smith, hvor der anvendes en enkelt gående person på en bro. Det bemærkes, at for hhv. Leonards og Smiths skalaer er vibrationsniveauerne under de angivne grænser acceptable og vibrationsniveauerne over er uacceptable. Forudsætningerne og begrænsningerne for de tre fundne skalaer er opstillet i punktform:

- Meister - Forsøgene er ikke direkte relateret til broer.
- Leonard - Forsøgene er direkte relateret til broer, men er kun gældende for vibrationer af begrænset varighed.
- Smith - Forsøgene er direkte relateret til broer, og er baseret på en enkelt gående person på en bro.

Undersøgelserne udført af Smith viser, at en gående person også i tilfældet med vedvarende sinusformede vibrationer, kun føler den maksimale amplitude på midten. Dette er illusreret på figur G.2. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 26]




**Figur G.2** *Simpelt understøttet bjælke. (a) Sinusformede vibrationer på midten af spændet. (b) De vibrationer en gående person føler. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 26]*

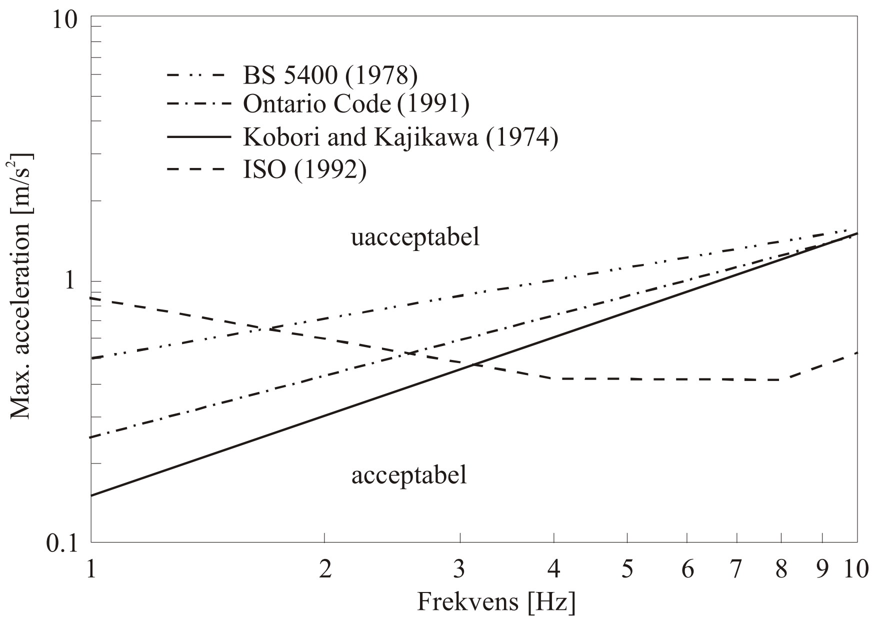
Ved forsøget kategoriserede Smith kun opfattelserne af vibrationerne i to kategorier hhv. acceptabel og uacceptabel. Resultatet af forsøget er givet ved skalaen vist på figur G.1. I det følgende betragtes kun hhv. Leonards og Smiths resultater, da forsøgene er direkte relateret til broer. Grænsen for hvornår vibrationerne er acceptable/uacceptable for gående personer er væsentligt højere ved Smiths end ved Leonards skala, hvilket kan ses på figur G.1. Dette kan skyldes, at Leonard har valgt, at anvende en nedre grænse i stedet for en middelværdi. Derudover blev forsøgene ikke lavet med samme længde af broen, hvilket kan have indflydelse på resultaterne. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 26]

Ved at anvende en middelværdi af resultaterne fundet af hhv. Leonard og Smith er der opstillet et niveau for acceptable accelerationer $\ddot{u}_{limit}$, som er givet ved formel (G.1).

$$\ddot{u}_{limit} = 0{,}5 \cdot \sqrt{f} \tag{G.1}$$

hvor
$f$ er den første egenfrekvens til en given gangbro [Hz]

Den øvre grænse for accelerationen bestemt ved formel (G.1) anvendes bl.a. i den britiske standard for vurdering af vibrationer af gangbroer BS 5400 [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 27]. I andre normer og standarder anvendes der andre grænser for vibrationerne. Pimentel lavede en sammenligning af grænserne for vibrationsniveauer relateret til gangbroer for fire standarder, herunder BS 5400, Ontario Code, Kobori og Kajikawa og ISO 10137. Disse er angivet i figur G.3. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 28]




**Figur G.3** *Acceptable værdier af lodrette vibrationer af gangbroer ud fra forskellige standarder. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 29]*

Ud fra figur G.3 ses det, at BS 5400 tillader det højeste vibrationsniveau over et typiske område for gangbroers egenfrekvenser. Udover de givne grænser i figur G.3 foreslog Bachmann et konstant acceptabelt accelerationsniveau på 0,5 $m/s^2$. [Zivanovic, S. et al., 2005, s. 28]

Der foreligger derfor ikke noget entydigt svar på, hvilket accelerationsniveau der kan accepteres, og det må vurderes i det enkelte tilfælde, hvad der vurderes acceptabelt.

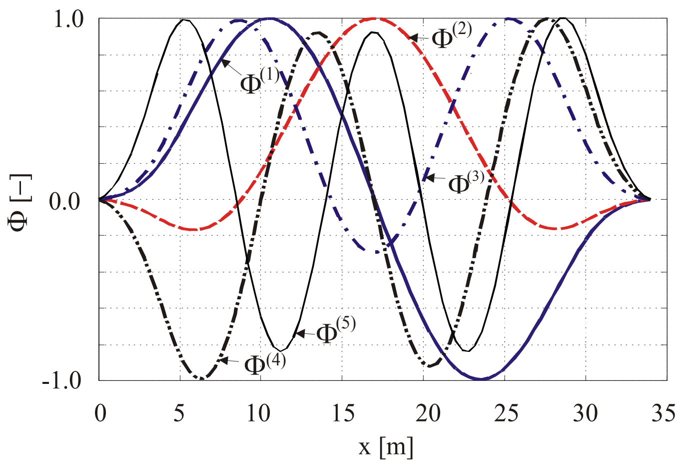
# Bilag H

# Analytiske udtryk for egensvingingsformer for gangbro C

I dette bilag bestemmes analytiske udtryk for de fem første egensvingingsformer for gangbro C ud fra en figur.

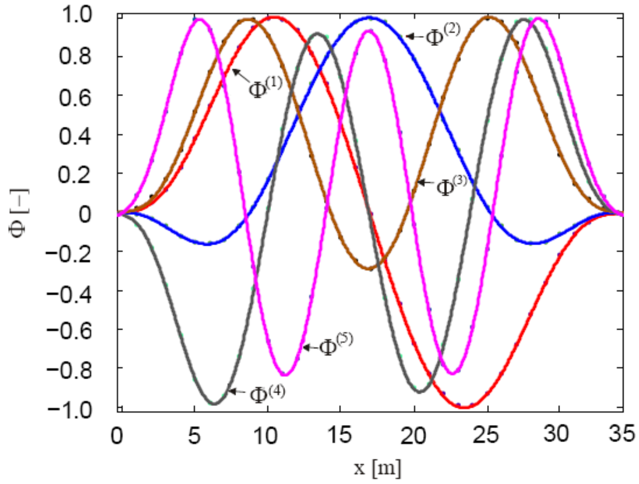
## H.1 Fittede udtryk

For den eksisterende gangbro kaldet gangbro C er der kun begrænset kendskab til egensvingningsformerne, hvor de tilgængelige informationer er vist på figur H.1.




**Figur H.1** *De første fem egensvingningsformer for gangbro C. [Zivanovic, S. et al., 2007]*

De fem egensvingningsformer tilhørende gangbro C's fem laveste egenfrekvenser er grafisk vist på figur H.1, men da egensvingningsformerne skal anvendes i et beregningsprogram ønskes de beskrevet ved analytiske udtryk. Dette er gjort ved, at aflæse punkter på kurverne vist på figur H.1, og efterfølgende fitte analytiske udtryk til de aflæste punkter. På figur H.2 kan det ses, hvordan de fittede kurver tilpasser de aflæste punkter.




**Figur H.2** *Fittede kurver til de aflæste punkter.*

Punkterne er aflæst pr. meter for den 34 m lange gangbro, og kurverne er fittet vha. funktionen Curve Fitting Tool i MatLab. De fittede kurver er valgt beskrevet som analytiske udtryk ved en sum af sinusfunktioner givet på formen vist ved formel (H.1), hvor værdierne er angivet i tabel H.1.

$$\Phi^{(j)}(x) = \sum_{d=1}^{n} a_d \cdot sin(b_d \cdot x + c_d) \tag{H.1}$$

| j | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ | $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,8517 | 0,1850 | 0,0052 | 0,3638 | 0,3893 | -3,4510 | 0,1235 | 0,4834 | 0,4834 |
| 2 | 0,3908 | 0,2077 | -1,9550 | 0,3784 | 0,0774 | 0,2567 | 0,2492 | 0,3759 | 1,4800 |
| 3 | 0,9184 | 0,1323 | -0,6714 | 0,4103 | 0,4553 | -2,9880 | 0,8528 | 0,2237 | 0,9331 |
| 4 | 1,0140 | 0,3343 | -2,5080 | 0,8289 | 0,5734 | -0,2800 | 0,5358 | 0,2410 | -4,0800 |
| 5 | 0,7514 | 0,5442 | -1,3500 | 0,2894 | 0,0917 | -0,01236 | 0,3600 | 0,1824 | 1,6170 |
| j | $a_4$ | $b_4$ | $c_4$ | $a_5$ | $b_5$ | $c_5$ | $a_6$ | $b_6$ | $c_6$ |
| 2 | 0,0169 | 0,5639 | 1,3410 | | | | | | |
| 3 | 0,0576 | 0,5897 | 4,1430 | | | | | | |
| 4 | 0,4421 | 0,6198 | 2,0670 | | | | | | |
| 5 | 0,1927 | 0,3746 | 1,5130 | 0,1089 | 0,7560 | 1,3660 | 0,1087 | 0,9106 | 1,8560 |
| j | $a_7$ | $b_7$ | $c_7$ | | | | | | |
| 5 | 0,0604 | 0,9883 | 3,6460 | | | | | | |

**Tabel H.1** *Værdier som skal anvendes i formel (H.1).*

Bilag **I**

# Lastmodel III

I dette bilag beskrives lastmodel III, og hvordan de enkelte indgående parametre bestemmes. Desuden foreligger der en kontrol af om det udarbejdede MatLab/Fortran-program til analyser med lastmodel III foretager korrekte beregninger ift. analyser foretaget af Zivanovic.

## I.1 Bestemmelse af lasten

Den totale last er givet ved en summation af fem hoved- og mellemharmoniske lastkomponenter, og beskriver hele spektret fra $0,25 \cdot f_s - 5,25 \cdot f_s$. Lastmodel III er givet ved formel (I.1). [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 11]

$$f_p(t) = m_p \cdot g + \sum_{i=1}^{5} F_i^h(t) + \sum_{i=1}^{5} F_i^m(t) \tag{I.1}$$

hvor
$F_i^h(t)$ er den i'te hovedharmoniske lastkomponent [-]
$F_i^m(t)$ er den i'te mellemharmoniske lastkomponent [-]

[Zivanovic, S. et al., 2007, s.11]

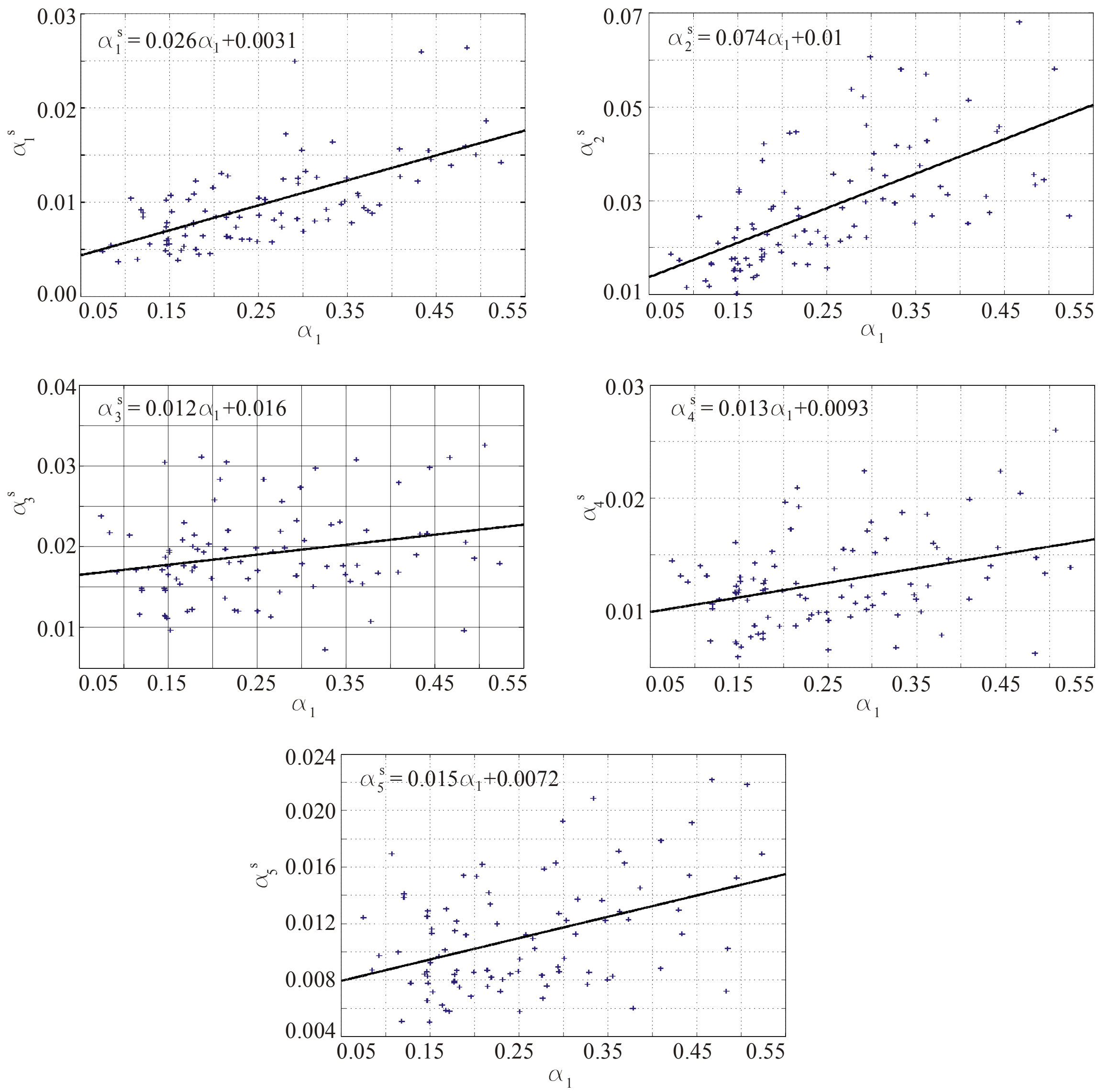
De hoved- og mellemharmoniske lastkomponenter er givet ved hhv. formel (I.2) og (I.3).

$$F_i^h(t) = m_p \cdot g \cdot \alpha_i^h \cdot \sum_{\overline{f}_j^h = i-0.25}^{i+0.25} \overline{\alpha}_i^h(\overline{f}_j^h) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \overline{f}_j^h \cdot f_s \cdot t + \theta(\overline{f}_j^h)) \tag{I.2}$$

$$F_i^m(t) = m_p \cdot g \cdot \alpha_i^m \cdot \sum_{\overline{f}_j^m = i-0.75}^{i-0.25} \overline{\alpha}_i^m(\overline{f}_j^m) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \overline{f}_j^m \cdot f_s \cdot t + \theta(\overline{f}_j^m)) \tag{I.3}$$

hvor
$\alpha_i^h$ er den i'te hovedharmoniske dynamiske lastfaktor [-]
$\alpha_i^m$ er den i'te mellemharmoniske dynamiske lastfaktor [-]
$\overline{f}_j^h$ er frekvensforholdet mellem den aktuelle frekvenslinie og gangfrekvensen $f_s$ for en hovedharmonisk lastkomponent [-]
$\overline{f}_j^m$ er frekvensforholdet mellem den aktuelle frekvenslinie og gangfrekvensen $f_s$ for en mellemharmonisk lastkomponent [-]
$\overline{\alpha}_i^h(\overline{f}_j^h)$ er den normaliserede dynamiske lastfaktor til den i'te hovedharmoniske lastkomponent [-]
$\overline{\alpha}_i^m(\overline{f}_j^m)$ er den normaliserede dynamiske lastfaktor til den i'te mellemharmoniske lastkomponent [-]
$\theta(\overline{f}_j^h)$ er faseforskydningen for en hovedharmonisk lastkomponent [rad]
$\theta(\overline{f}_j^m)$ er faseforskydningen for en mellemharmonisk lastkomponent [rad]

De dynamiske lastfaktorer for de mellemharmoniske lastkomponenter bestemmes ved at betragte forholdet mellem disse og den første hovedharmoniske dynamiske lastfaktor. Dette forhold er angivet på figur I.1, hvor der også er angivet et lineært fit til hver af graferne. Størrelsen af de dynamiske lastfaktorer for de mellemharmoniske lastkomponenter kan derfor findes, når den dynamiske lastfaktor for den første hovedharmoniske lastkomponent er kendt.




**Figur I.1** *De dynamiske lastfaktorer for de mellemharmoniske lastkomponenter. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 6]*

De normaliserede dynamiske lastfaktorer for hhv. de hoved- og mellemharmoniske lastkomponenter $\overline{\alpha_i}(\overline{f_j})$ og $\overline{\alpha_i^s}(\overline{f_j^s})$ findes ved formel (I.4) og (I.5).

$$\overline{\alpha}_i^h(\overline{f}_j^h) = a_{i,1}^h \cdot e^{-\left(\frac{\overline{f}_j^h - b_{i,1}^h}{c_{i,1}^h}\right)^2} + a_{i,2}^h \cdot e^{-\left(\frac{\overline{f}_j^h - b_{i,2}^h}{c_{i,2}^h}\right)^2} + a_{i,3}^h \cdot e^{-\left(\frac{\overline{f}_j^h - b_{i,3}^h}{c_{i,3}^h}\right)^2} \tag{I.4}$$

$$\overline{\alpha}_i^m(\overline{f}_j^m) = a_{i,1}^m \cdot e^{-\left(\frac{\overline{f}_j^m - b_{i,1}^m}{c_{i,1}^m}\right)^2} + a_{i,2}^m \cdot e^{-\left(\frac{\overline{f}_j^m - b_{i,2}^m}{c_{i,2}^m}\right)^2} \tag{I.5}$$

hvor

$a_{i,r}^h$, $b_{i,r}^h$ og $c_{i,r}^h$ ($r$=1, 2, 3) er ni fittingsparametre for den i'te hovedharmoniske lastkomponent [-]
$a_{i,r}^m$, $b_{i,r}^m$ og $c_{i,r}^m$ ($r$=1, 2) er ni fittingsparametre for den i'te mellemharmoniske lastkomponent [-]

[Zivanovic, S. et al., 2007, s. 7-9]

Fittingsparametrene for de fem hoved- og mellemharmonsike lastkomponenter er givet i hhv. tabel I.1 og tabel I.2.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^h_{i,1}$ | 0,785200 | 0,513000 | 0,390800 | 0,325500 | 0,280600 |
| $b^h_{i,1}$ | 0,999900 | 2,000000 | 3,000000 | 4,000000 | 4,999000 |
| $c^h_{i,1}$ | 0,008314 | 0,011050 | 0,009560 | 0,008797 | 0,007939 |
| $a^h_{i,2}$ | 0,020600 | 0,133000 | 0,156700 | 0,164700 | 0,158400 |
| $b^h_{i,2}$ | 1,034000 | 1,957000 | 3,000000 | 4,001000 | 5,004000 |
| $c^h_{i,2}$ | 0,252400 | 0,263200 | 0,055250 | 0,066410 | 0,078250 |
| $a^h_{i,3}$ | 0,107400 | -0,049840 | 0,068660 | 0,068880 | 0,072890 |
| $b^h_{i,3}$ | 1,001000 | 1,882000 | 2,957000 | 3,991000 | 4,987000 |
| $c^h_{i,3}$ | 0,036530 | 0,058070 | 0,560700 | 0,375000 | 0,450100 |

**Tabel I.1** *Fittingsparametre for de fem hovedharmoniske lastkomponenter. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 9]*

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^m_{i,1}$ | 0,340600 | 0,302400 | 0,262700 | 0,234400 | 0,264500 |
| $b^m_{i,1}$ | 0,498800 | 1,500000 | 2,500000 | 3,501000 | 4,499000 |
| $c^m_{i,1}$ | 0,008337 | 0,008735 | 0,009748 | 0,009898 | 0,010190 |
| $a^m_{i,2}$ | 0,280300 | 0,134500 | 0,245600 | 0,235500 | 0,238900 |
| $b^m_{i,2}$ | 1,133000 | 1,532000 | 0,231200 | -1,576000 | 1,153000 |
| $c^m_{i,2}$ | 0,638800 | 0,723300 | 2,932000 | 7,050000 | 4,561000 |

**Tabel I.2** *Fittingsparametre for de fem mellemharmoniske lastkomponenter. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 9]*

Frekvensforholdene mellem den aktuelle frekvenslinie og gangfrekvensen $\overline{f}^h_j$ for en hovedharmonisk lastkomponent tilhører intervallet $[i - 0,25,\ i + 0,25]$. Der er derfor taget hensyn til spektrets bredde på $0,5 \cdot f_s$ omkring hver af de harmoniske lastkomponenter, når den normaliserede dynamiske lastfaktor for den givne harmoniske lastkomponent bestemmes. Hver af de harmoniske lastkomponenter beskrives ved 40 frekvenslinier. Frekvensforholdene mellem den aktuelle frekvenslinie og gangfrekvensen $\overline{f}^m_j$ for en mellemharmonisk lastkomponent tilhører intervallet $[i - 0,75,\ i - 0,25]$. Tilsvarende de hovedharmoniske lastkomponenter anvendes 40 frekvenslinier til at beskrive de mellemharmoniske lastkomponenter. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 7-9]

For faseforskydningerne $\theta(\overline{f}^h_j)$ og $\theta(\overline{f^m_j})$ er det ved hver lasthistorie, der er analyseret, fundet, at disse er ligefordelt i intervallet $[-\pi,\ \pi]$. Idet der ikke er fundet nogen indbyrdes afhængighed mellem ændringen af faseforskydningerne omkring de hovedharmoniske lastkomponenter og mellem forskellige harmoniske lastkomponenter, anvendes der en ligefordelt værdi for faseforskydningerne indenfor intervallet $[-\pi,\ \pi]$. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 10]

## I.2 Kontrol af beregningsprogram

For at vurdere om analyserne lavet med den multi-harmoniske lastmodel giver korrekte fordelingsfunktioner, er der lavet en kontrol heraf. Zivanovic har i forbindelse med beskrivelsen af lastmodellen lavet en analyse med bromodel $C_5$ [Zivanovic, S. et al., 2007]. Denne analyse efterlignes i dette bilag, og fordelingsfunktionen sammenlignes med fordelingsfunktionen fundet af Zivanovic [Zivanovic, S. et al., 2007].

Analysen laves tilsvarende Zivanovic, hvor lastmodel III og bromodel $C_5$ anvendes, og der laves 2.000 Monte Carlo simuleringer [Zivanovic, S. et al., 2007]. Størrelsen af tidsskridtet anvendt af Zivanovic er ikke kendt, men der vælges her et tidsskridt på 0,005 s. For parametrene i lastmodel III anvendes fordelingerne angivet i tabel I.3 og I.4, hvilket svarer til de fordelinger Zivanovic har anvendt [Zivanovic, S. et al., 2007].

| | $f_s$ [Hz] | $l_s$ [m] | $m_p$ [kg] |
|---|---|---|---|
| Fordeling | Normal | Normal | Deterministisk |
| $\mu$ | 1,87 | 0,71 | 76,4 |
| $\sigma$ | 0,186 | 0,071 | 0 |

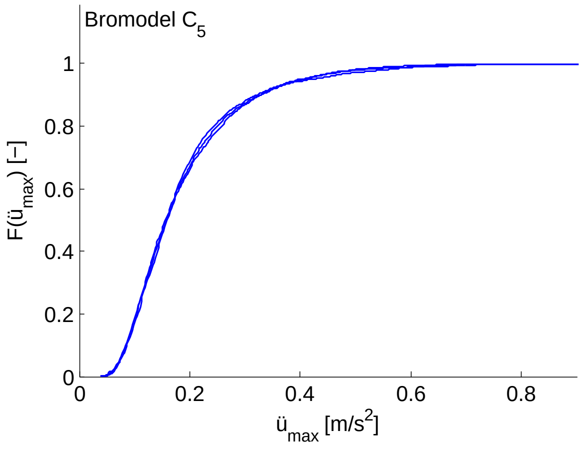
**Tabel I.3** *Anvendte fordelinger for gangfrekvensen, skridtlængden og personens masse. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 4 og 7]*

| | $\alpha_1$ [-] | $\alpha_2$ [-] | $\alpha_3$ [-] | $\alpha_4$ [-] | $\alpha_5$ [-] |
|---|---|---|---|---|---|
| Fordeling | Normal | Normal | Normal | Normal | Normal |
| $\mu$ | $\mu_{\alpha_1}(f_s)$ | 0,07 | 0,05 | 0,05 | 0,03 |
| $\sigma$ | $0,16 \cdot \mu_{\alpha_1}(f_s)$ | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,015 |

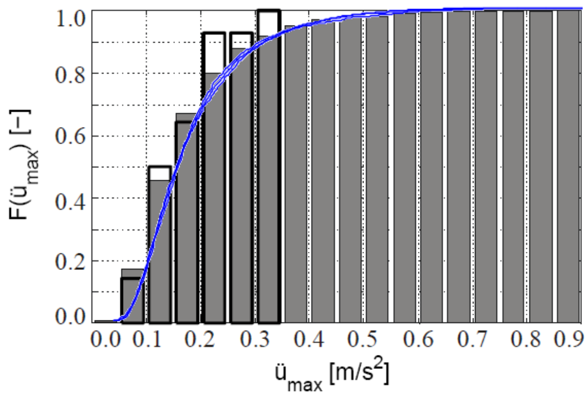
**Tabel I.4** *Anvendte fordelinger for de dynamiske lastfaktorer. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 5]*

De simulerede værdier af de dynamiske lastfaktorer, som bliver negative, erstattes ikke af nye simulerede tal som anvendt i analyserne i rapporten, men sættes til nul som Zivanovic gør [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 5]. Ligeledes betragtes accelerationerne ikke i 50 punkter langs gangbroen, men accelerationerne beregnes kun midt på gangbroen [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 14-15].

Med disse forudsætninger findes de tre fordelingsfunktioner vist på figur I.2. Der er lavet tre ens analyser, da de 2.000 Monte Carlo simuleringer som Zivanovic anvender, er et relativt lavt antal. Dette betyder, at resultatet ikke bliver ens hver gang der foretages en analyse, hvorfor der er lavet tre analyser for at sikre, at resultatet ikke ændres væsentligt pga. antallet af Monte Carlo simuleringer.




**Figur I.2** *Fordelingsfunktioner lavet med samme forudsætninger som Zivanovic anvender.*




**Figur I.3** *Blå: Beregnede fordelingsfunktioner. Grå: Zivanovic's fordelingsfunktion. Sort: Fordelingsfunktion for målte data. [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 16]*

På figur I.3 er de tre fordelingsfunktioner vist sammen med to fordelingsfunktioner bestemt af Zivanovic. Fordelingsfunktionen angivet med sorte streger er nogle eksperimentelle målinger, som Zivanovic har lavet for at vise, at den multi-harmoniske lastmodel beskriver virkeligheden godt [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 16-17]. Denne fordelingsfunktion er kun baseret på 14 tidshistorier, og der mangler derfor et statistisk grundlag for at kunne konkludere, hvor god lastmodellen i virkeligeheden er [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 15].

Fordelingsfunktionen vist med grå er resultatet fra Zivanovic's analyse med 2.000 Monte Carlo simuleringer med forudsætningerne beskrevet i dette bilag [Zivanovic, S. et al., 2007, s. 14-17]. De tre fordelingsfunktionerne beregnet i dette bilag ses at stemme godt overens med fordelingsfunktionen bestemt af Zivanovic, hvormed det forudsættes, at det udviklede beregningsprogram foretager analyserne korrekt.

# Bilag J

# Lasthistorier og tidshistorier for accelerationsniveauet

I dette bilag bestemmes lasthistorier for lastmodel I, II og III, og forskellen mellem disse vises og kommenteres. Derudover bestemmes tidshistorier for accelerationsniveauet for hhv. gangbro A, B og C, hvor der anvendes forskellige bro- og lastmodeller, og forskellene kommenteres.

## J.1 Lasthistorie

Ved at anvende lastmodel I, II og III kan der bestemmes en last $f_p(t)$ fra én gående person, som funktion af tiden. For at have ens forudsætninger for de tre lastmodeller anvendes deterministiske værdier for de indgående parametre i lastmodellerne. Værdierne af de indgående parametre i hhv. lastmodel I, II og III er opstillet i tabel J.1, J.2 og J.3.

| $f_s$ [Hz] | $l_s$ [m] | $m_p$ [kg] | $\alpha_1$ [-] | $\varphi_1$ [rad] |
|---|---|---|---|---|
| 1,99 | 0,71 | 75 | 0,4 | 0 |

**Tabel J.1** *Anvendte deterministiske værdier for de parametre, der indgår i lastmodel I.*

| $f_s$ [Hz] | $l_s$ [m] | $m_p$ [kg] | $\alpha_1$ [-] | $\alpha_2$ [-] | $\alpha_3$ [-] | $\varphi_1$ [rad] | $\varphi_2$ [rad] | $\varphi_3$ [rad] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,99 | 0,71 | 75 | 0,4 | 0,07 | 0,05 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

**Tabel J.2** *Anvendte deterministiske værdier for de parametre, der indgår i lastmodel II.*

| $f_s$ [Hz] | $l_s$ [m] | $m_p$ [kg] | $\alpha_1$ [-] | $\alpha_2$ [-] | $\alpha_3$ [-] | $\alpha_4$ [-] | $\alpha_5$ [-] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,99 | 0,71 | 75 | 0,4 | 0,07 | 0,05 | 0,05 | 0,03 |

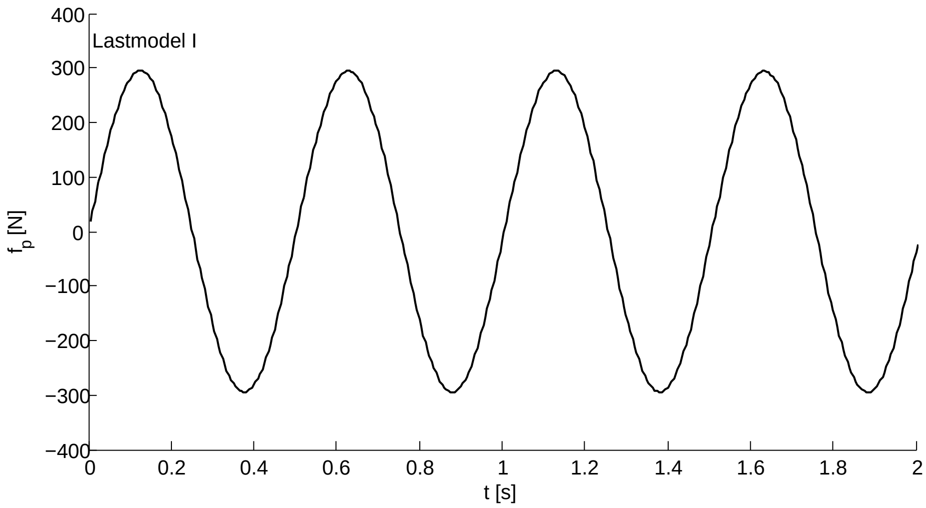
**Tabel J.3** *Anvendte deterministiske værdier for de parametre, der indgår i lastmodel III.*

Faseforskydningerne i lastmodel III bestemmes ligefordelt indenfor intervallet $[-\pi, \pi]$.

Lasten fra én gående person er uafhængig af hvilken af de tre gangbroer, der betragtes. Den eneste forskel er varigheden af lasten, idet den tid det tager at passere gangbroerne, er forskellig afhængig af hvilken af gangbroerne A, B og C, der betragtes. Det vælges derfor at optegne lasten for gangbro A.

Lasthistorierne er optegnet for 2 sekunder, da det herved at lettere at se forskellen på lastmodel I, II og III.

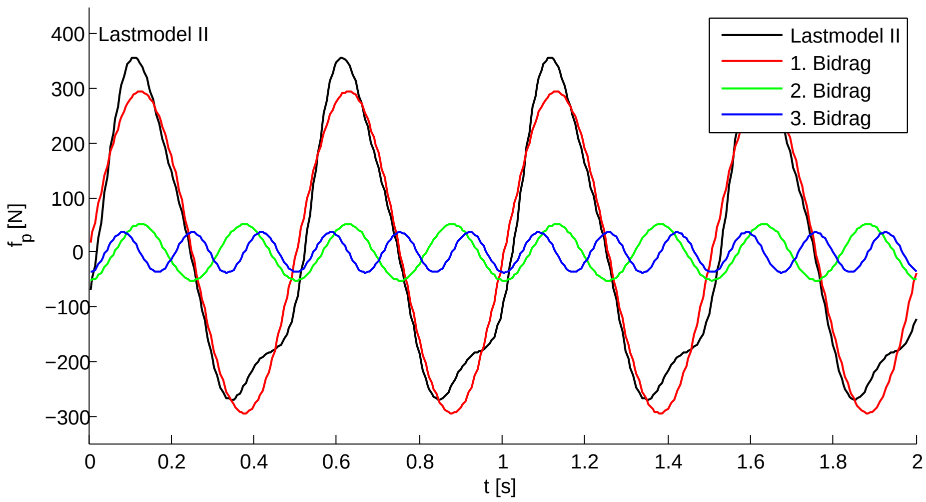
Lasthistorien for lastmodel I er optegnet på figur J.1.




**Figur J.1** *Lasthistorie for 2 sekunder for lastmodel I for gangbro A.*

Lastmodel I på figur J.2 er givet ved en periodisk kraft.

Lasthistorien for lastmodel II er optegnet på figur J.2. På figur J.2 er der optegnet fire kurver, hvor den ene er lasthistorien fundet ud fra lastmodel II, mens de tre resterende kurver angiver lasten som funktion af tiden for de tre lastkomponenter, der indgår i lastmodel II.

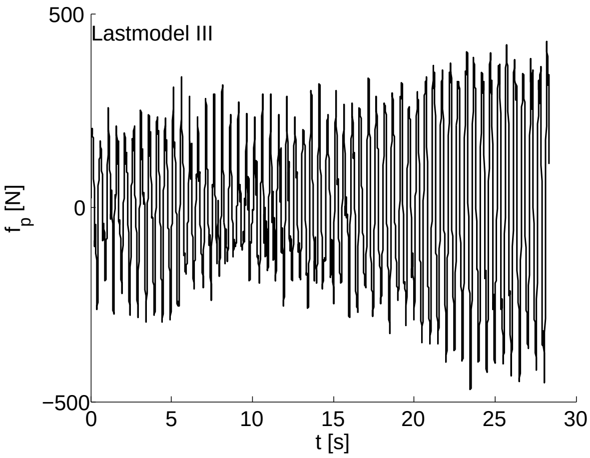



**Figur J.2** *Lasthistorie for 2 sekunder for lastmodel II for gangbro A.*

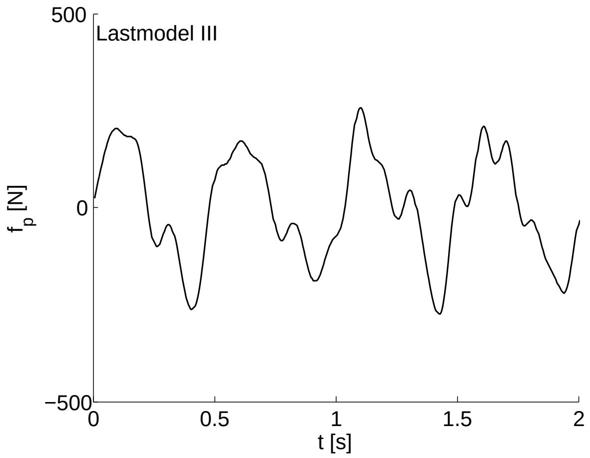
På figur J.2 ses lasthistorierne for hhv. lastkomponent 1, 2 og 3, som indgår i lastmodel II. Lasthistorierne for lastkomponent 1, 2 og 3 er periodiske, og den absolutte værdi af lastamplituderne er konstant. Amplituden og perioden for den anden og tredje lastkomponent ses at være væsentligt mindre end for den første lastkomponent, hvilket også var forventet grundet de dynamiske lastfaktorer for de enkelte lastkomponenter. Det bemærkes desuden, at faseforskydningerne for den anden og tredje lastkomponent er forskellig fra faseforskydningen for den første lastkomponent.

Lastmodel II er desuden optegnet på figur J.2, hvilken er en summation af de tre lasthistorier for de tre lastkomponenter. Lasten ses tilsvarende lastmodel I jf. figur J.1 at være periodisk. Sammenlignes figur J.1 og J.2 ses det, at lastamplituden for de positive værdier er højere ved lastmodel II, og at lasthistorien for lastmodel II ikke er givet ved en jævn sinusform. Dette er forårsaget af summationen af de tre sinusformede og periodiske lastkomponenter.

Lasthistorien for lastmodel III for hele bropassagen er optegnet på figur J.3, mens lasthistorien for 2 sekunder er optegnet på figur J.3. Årsagen til at lasthistorien optegnes for hele bropassagen er, at lasten ikke er periodisk.




**Figur J.3** *Lasthistorie for hele bropassagen for lastmodel III for gangbro A.*




**Figur J.4** *Lasthistorie for 2 sekunder for lastmodel III for gangbro A.*

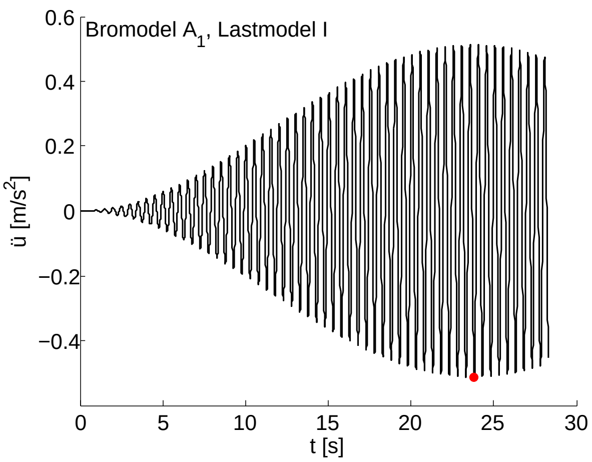
Ud fra figur J.3 og J.4 ses det, at lasten ikke er periodisk i modsætning til lasten fra lastmodel I og II. Dette skyldes, at der i lastmodel III tages hensyn til, at en person ikke bevæger sig med en konstant gangfrekvens hen over gangbroen. Det bemærkes, at figur J.3 er et eksempel på, hvordan lasthistorien kan se ud, da denne vil ændres hver gang der foretages en beregning af lasten, idet faseforskydningerne bestemmes ligefordelt indenfor intervallet $[-\pi, \pi]$.

## J.2 Tidshistorie for accelerationsniveauet

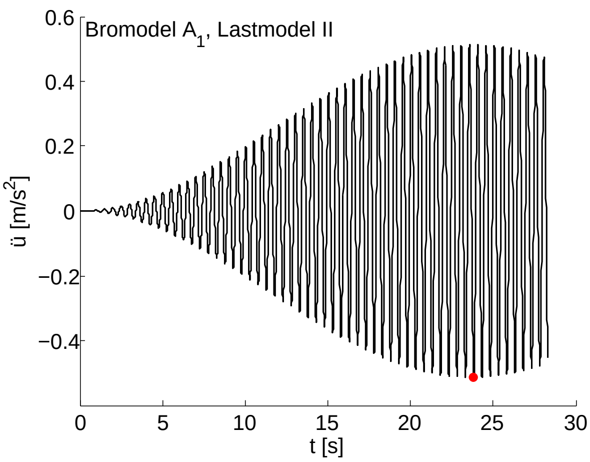
Der optegnes tidshistorier for accelerationsniveauet for de fem analyser angivet i afsnit 5.1 og 6.1, hvor der er foretaget analyser af bromodel $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_5$, $B_5$ og $C_5$, og anvendt hhv. lastmodel I, II og III. Dette gøres for at kunne vurdere, hvad der sker, når der anvendes mere avancerede bro- og lastmodeller. For at have samme udgangspunkt for de seks bromodeller, er det valgt at betragte accelerationerne som funktion af tiden på midten af gangbroerne og anvende parametrene angivet i tabel J.1, J.2 og J.3 til hhv. lastmodel I, II og III. Det er desuden valgt kun at betragte tidshistorier, der har en længde svarende til den tid personen opholder sig på gangbroerne.

### Gangbro A

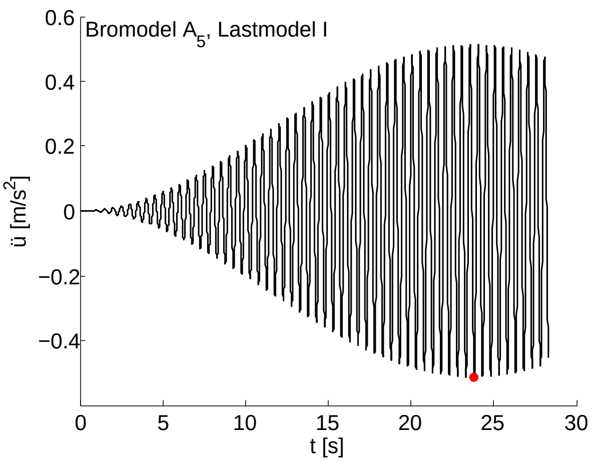
Tidshistorierne for accelerationsniveauet for gangbro A for de fem analyser er vist på figur J.5, J.6, J.7, J.8 og J.9, hvor de røde punkter markerer de maksimale accelerationer.



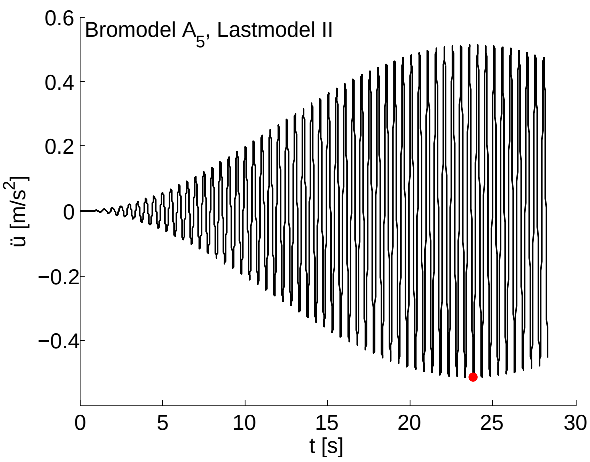

**Figur J.5** *Tidshistorie for gangbro A for analyse 1.*



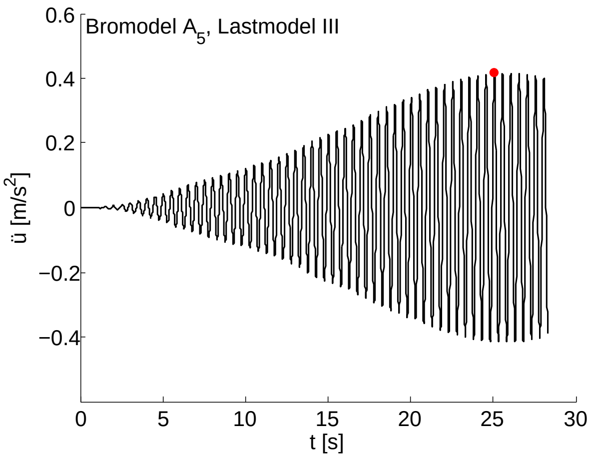

**Figur J.6** *Tidshistorie for gangbro A for analyse 2.*



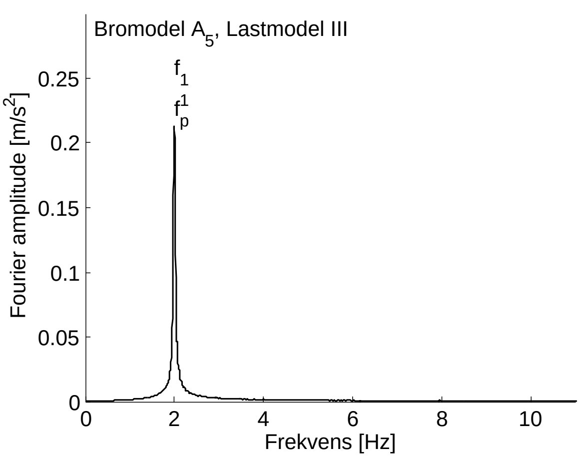

**Figur J.7** *Tidshistorie for gangbro A for analyse 3.*




**Figur J.8** *Tidshistorie for gangbro A for analyse 4.*




**Figur J.9** *Tidshistorie for gangbro A for analyse 5.*




**Figur J.10** *Fourier spekter for gangbro A for analyse 5. $f_1$ markerer beliggenheden af den første egenfrekvens, og $f_p^1$ markerer beliggenheden af den første lastkomponent.*

Ud fra figur J.5, J.6, J.7 og J.8 ses det, at de fire tidshistorier for accelerationsniveauet generelt er ens, da indhyldningskurven har samme form og samme amplituder. Dette hænger sammen med, at det jf. kapitel 5 er fundet, at antallet af frihedsgrader og lastkomponenter ikke er af betydning for det probabilistiske estimat af gangbro A's dynamiske respons. Dette er også grunden til, at indhyldningskurven for tidshistorien for accelerationsniveauet er domineret af den første egensvingningsform jf. figur 5.1.

Betragtes tidshistorien for accelerationsniveauet på figur J.9 ses det, at denne ikke har helt samme indhyldningskurve som de fire andre tidshistorier for gangbro A. Dette skyldes, at lasten bestemt ved lastmodel III afviger fra lastmodel I og II. Indhyldningskurven for tidshistorien er dog stadig styret af den første egensvingningsform. For at verificere dette, er der lavet en fast Fourier transformation af tidshistorien for det dynamiske respons vist på figur J.9, dvs. der er anvendt et tidsvindue, der svarer til den tid personen befinder sig på gangbroen. På figur J.10 er vist et spekter, som angiver Fourier amplituden som funktion af frekvensen. På figur J.10 er det angivet hvilken lastkomponent og egensvingningsform, der dominerer det probabilistiske estimat af gangbro A's dynamiske respons. Der er ikke lavet et spekter for de øvrige analyse 1-4, da tidshistorierne er meget ens.

Grunden længden af gangbro A og den anvendte ganghastighed givet ved $f_s \cdot l_s$, tager det personen ca. 28,3 s at gå over gangbro A. På figur J.5, J.6, J.7, J.8 og J.9 ses det, at svingningerne ikke er aftaget væsentligt efter 28,3 s, hvor personen har forladt gangbroen. Dette skyldes, at der opstår resonanssvingninger, da middelværdien af gangfrekvensen er meget tæt på den første egenfrekvens, samt at gangbro A kun er svagt dæmpet.

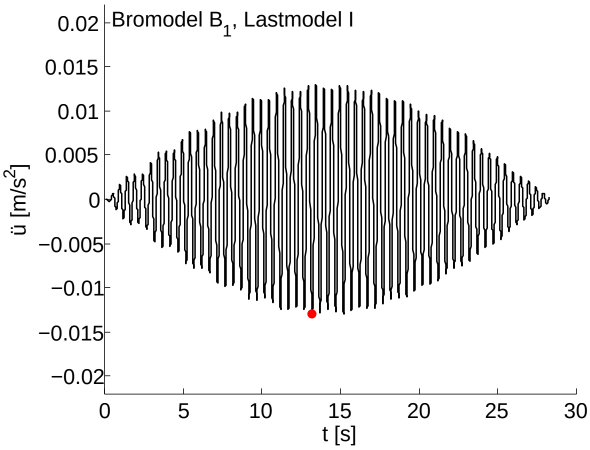
De maksimale accelerationer i tidshistorierne, som er markeret med et rødt punkt, er sammenholdt i tabel J.4. Her giver analyse 1-4 ca. samme maksimale accelerationer, hvor analyse 5 giver en væsentligt lavere maksimal acceleration. Dette skyldes, at lastmodellen og dermed lasthistorien for lastmodel III er væsentligt anderledes end lastmodel I og II.

| Analyse 1 [m/s$^2$] | Analyse 2 [m/s$^2$] | Analyse 3 [m/s$^2$] | Analyse 4 [m/s$^2$] | Analyse 5 [m/s$^2$] |
|---|---|---|---|---|
| -0,5121 | -0,5125 | -0,5120 | -0,5125 | 0,4160 |

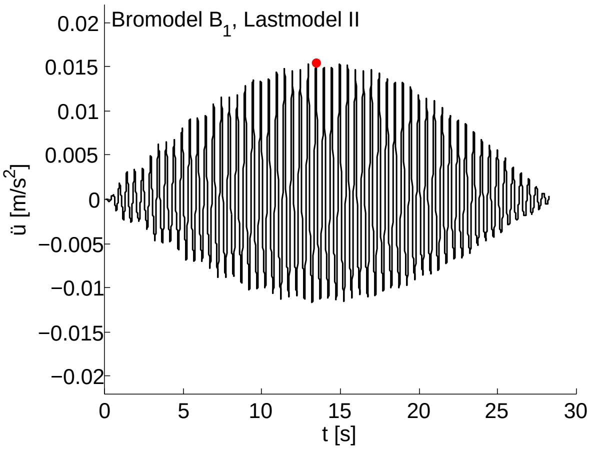
**Tabel J.4** *De maksimale accelerationer for gangbro A for analyse 1-5.*

## Gangbro B

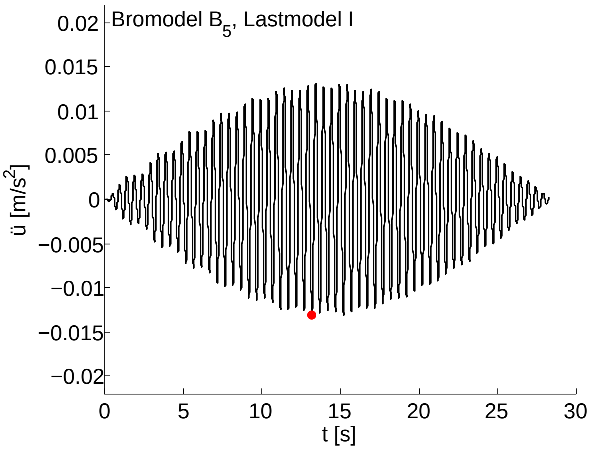
Tidshistorierne for accelerationsniveauet for gangbro B for de fem analyser er vist på figur J.11, J.12, J.13, J.14 og J.15, hvor de røde punkter markerer den maksimale acceleration.



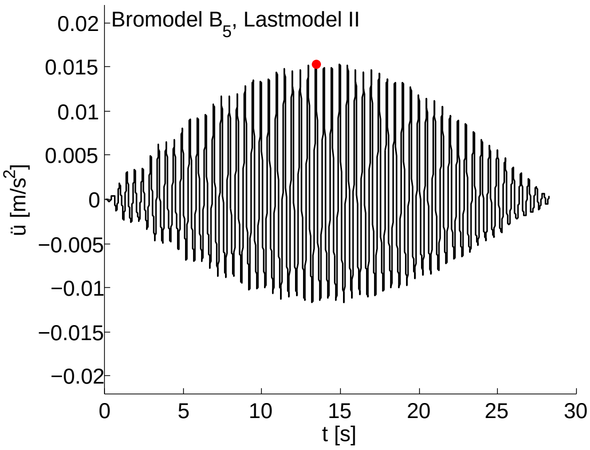

**Figur J.11** *Tidshistorie for gangbro B for analyse 1.*



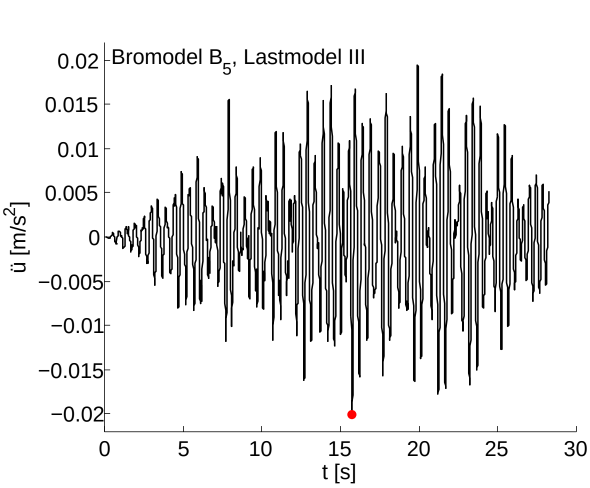

**Figur J.12** *Tidshistorie for gangbro B for analyse 2.*



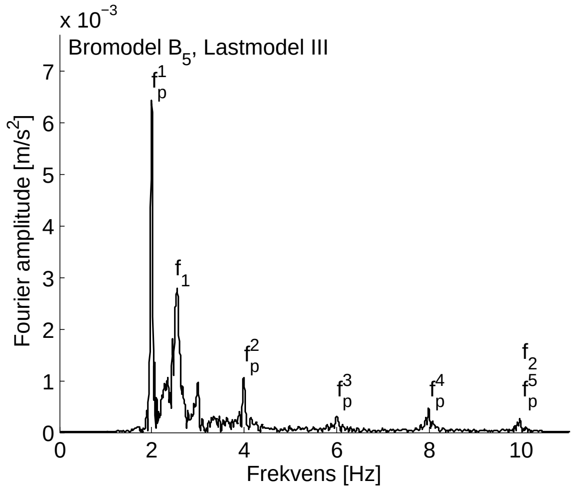

**Figur J.13** *Tidshistorie for gangbro B for analyse 3.*




**Figur J.14** *Tidshistorie for gangbro B for analyse 4.*




**Figur J.15** *Tidshistorie for gangbro B for analyse 5.*




**Figur J.16** *Fourier spekter for gangbro B for analyse 5. $f_j$ markerer beliggenheden af egenfrekvenserne, og $f_p^i$ markerer beliggenheden af lastkomponenterne.*

Tilsvarende tidshistorierne for accelerationsniveauet for gangbro A, ses det på figur J.11, J.12, J.13 og J.14, at svingningen er domineret af den første egensvingningsform jf. figur 5.1. Det tager personen 28,3 s at bevæge sig hen over gangbro B, og ud fra figur J.11, J.12, J.13, J.14 og J.15 ses det, at svingningerne dæmpes og næsten er ophørt inden personen forlader gangbroen. Dette skyldes, at egenfrekvenserne for gangbro B afviger mere fra middelværdien af gangfrekvenserne, end det er tilfældet for egenfrekvenserne for gangbro A, hvorfor der ikke forekommer nogen resonansopbygning.

Betragtes tidshistorierne for analyse 1 og 3 på hhv. figur J.11 og J.13 ses disse at være tilnærmelsesvis ens. Dette er i overensstemmelse med, at antallet af frihedsgrader ikke har væsentlig betydning for det probabilistiske estimat af gangbro B's dynamiske respons jf. kapitel 5, hvorfor indhyldningskurven for tidshistorierne af accelerationsniveauet er domineret af den første egensvingningsform jf. figur 5.1.

Accelerationerne som funktion af tiden fundet ud fra analyse 2 og 4 er lidt større end ved analyse 1 og 3, hvilket er i overensstemmelse med, at antallet af lastkomponenter har en lille betydning for det probabilistiske estimat af gangbro B's dynamiske respons jf. kapitel 5. Desuden ses det på figur J.1 og J.2, at amplituden af lasten er større ved lastmodel II end ved lastmodel I, hvilket bevirker at accelerationerne bliver lidt større, når der anvendes lastmodel II.

Ved at betragte lasthistorien for lastmodel II jf. figur J.2 findes det, at denne ikke er symmetrisk, og at det er de positive værdier der er størst, dvs. hvor kraften vender nedad. Tidshistorierne for accelerationerne på figur J.12 og J.14 for analyse 2 og 4 bliver derfor også asymmetriske, hvor accelerationerne er størst, når gangbroen svinger nedad.

På figur J.15 ses det, at tidshistorien for accelerationsniveauet for analyse 5 afviger fra de andre tidshistorier for accelerationsniveauet. Dette skyldes, at lastmodellen og dermed lasthistorien for lastmodel III er væsentligt anderledes end lastmodel I og II.

Der er lavet en fast Fourier transformation af tidshistorien for det dynamiske respons vist på figur J.15, da denne er fundet mere interessant at analysere end de øvrige tidshistorier for det dynamiske respons. På figur J.16 ses et spekter, hvor Fourier amplituderne er angivet som funktion af frekvensen. Det er desuden angivet på figur J.16 hvilke lastkomponenter og egensvingningsformer, der påvirker det probabilistiske estimat af gangbro B's dynamiske respons.

Ud fra spektret ses det, at det stadig er den første lastkomponent og den første egensvingningsform, der dominerer det probabilistiske estimat af gangbro B's dynamiske respons. Desuden ses det, at de højere lastkomponenter også giver et bidrag til svingningen, mens de højere egensvingningsformer giver ubetydelige bidrag til svingningen. Dette er i overensstemmelse med, at det er fundet i kapitel 5 og 6, at antallet af lastkomponenter er af mindre betydning for det probabilistiske estimat af det dynamiske respons for gangbro B, mens antallet af frihedsgrader ikke har nogen betydning.

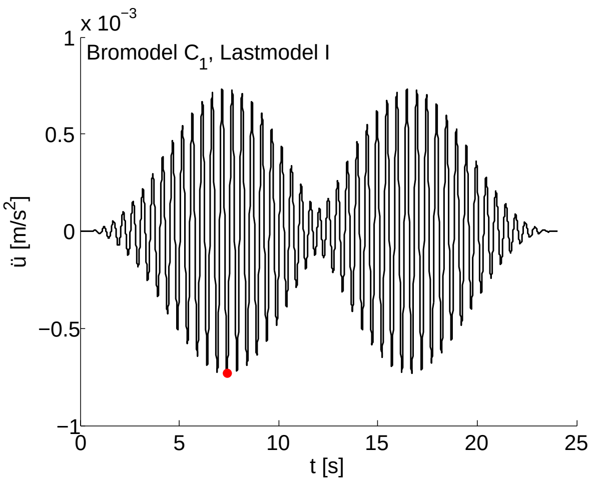
De maksimale accelerationer i tidshistorierne er sammenholdt i tabel J.5. Her giver analyse 1 og 3 samt analyse 2 og 4 ca. samme maksimale accelerationer, og analyse 5 giver en væsentligt større maksimal acceleration.

| Analyse 1 [m/s$^2$] | Analyse 2 [m/s$^2$] | Analyse 3 [m/s$^2$] | Analyse 4 [m/s$^2$] | Analyse 5 [m/s$^2$] |
|---|---|---|---|---|
| -0,0130 | 0,0154 | -0,0131 | 0,0154 | -0,0202 |

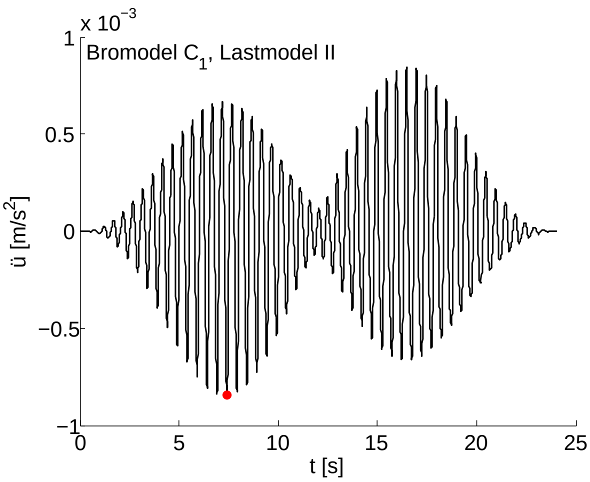
**Tabel J.5** *De maksimale accelerationer for gangbro B for analyse 1-5.*

## Gangbro C

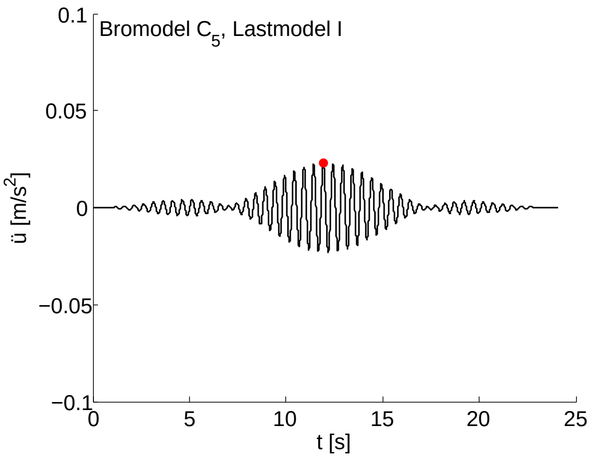
Tidshistorierne for gangbro C for de fem analyser er vist på figur J.17, J.18, J.19, J.21 og J.23, hvor de røde punkter markerer den maksimale acceleration. Det bemærkes at ordinatakserne for tidshistorierne ikke er ens, hvilket skyldes, at det så kanvære svært at se formen på indhyldningskurven.



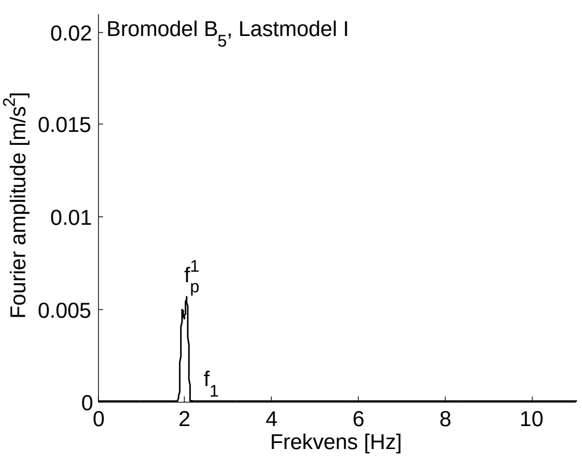

**Figur J.17** *Tidshistorie for gangbro C for analyse 1.*



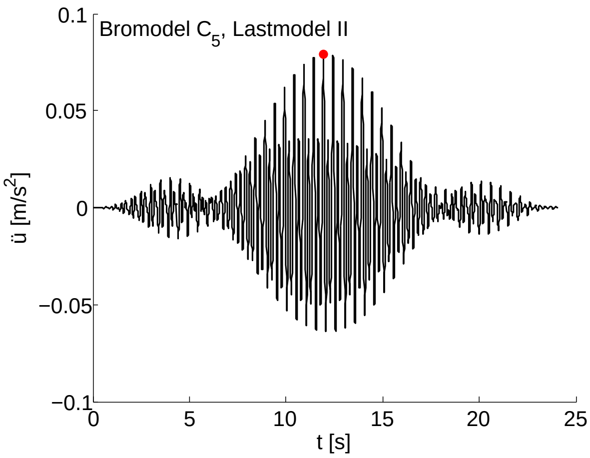

**Figur J.18** *Tidshistorie for gangbro C for analyse 2.*



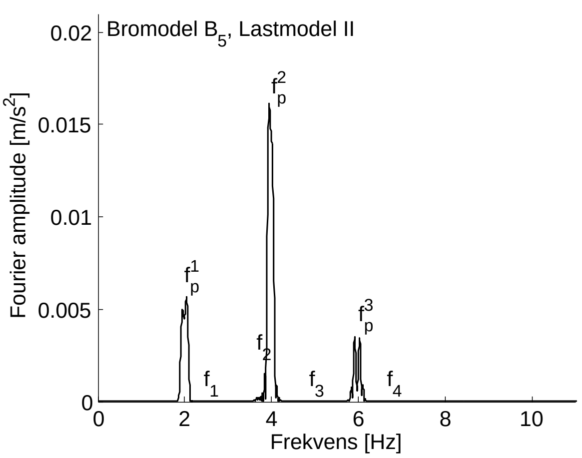

**Figur J.19** *Tidshistorie for gangbro C for analyse 3.*



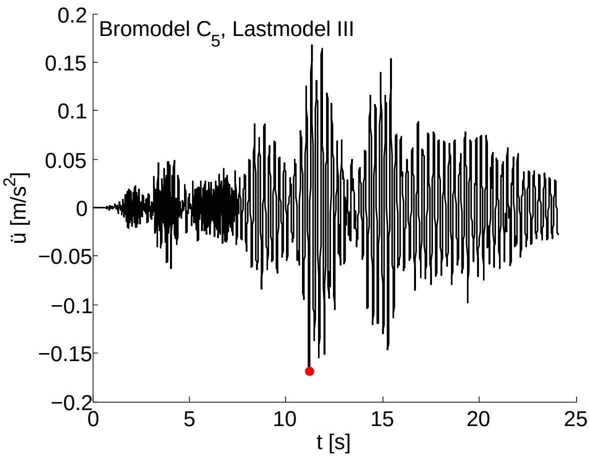

**Figur J.20** *Fourier spekter for gangbro C for analyse 3. $f_1$ markerer beliggenheden af den første egenfrekvens, og $f_p^1$ markerer beliggenheden af den første lastkomponent.*



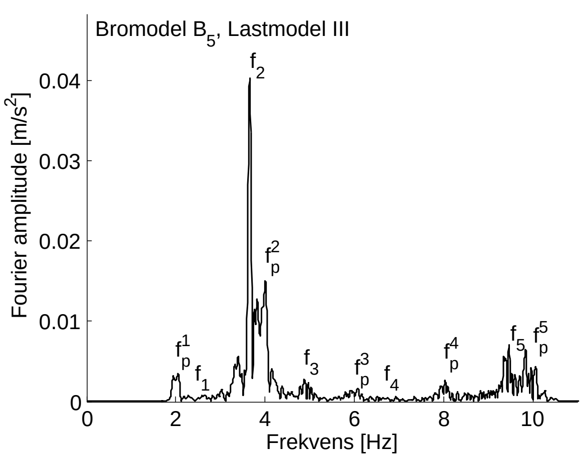

**Figur J.21** *Tidshistorie for gangbro C for analyse 4.*




**Figur J.22** *Fourier spekter for gangbro C for analyse 4. $f_j$ markerer beliggenheden af egenfrekvenserne, og $f_p^i$ markerer beliggenheden af lastkomponenterne.*




**Figur J.23** *Tidshistorie for gangbro C for analyse 5.*




**Figur J.24** *Fourier spekter for gangbro C for analyse 5. $f_j$ markerer beliggenheden af egenfrekvenserne, og $f_p^i$ markerer beliggenheden af lastkomponenterne.*

Ud fra figur J.17, J.18, J.19, J.21 og J.23 ses det, at tidshistorierne for accelerationsniveauet, ikke er ens, hvilket er i overensstemmelse med, at antallet af frihedsgrader og lastkomponenter har betydning for det probabilistiske estimat af gangbro C's dynamiske respons jf. kapitel 5 og 6.

På figur J.17 og J.18 ses accelerationerne at være meget små, hvilket er forårsaget af, at den første egensvingningsform jf. figur 5.2(b) bevirker, at accelerationerne bliver nul på midten af gangbroen. Grunden til, at accelerationerne ikke bliver helt nul er, at der er fittet udtryk for egensvingsningsformerne jf. bilag H, som ikke giver værdien nul nøjagtigt. Der er ikke lavet spektre for analyse 1 og 2, da accelerationsniveuet i virkeligheden er 0, hvormed responset ikke er særlig interessant at analysere. Formen på indhyldningskurven ses dog på figur J.17, at kunne henføres til den første egensvingningsform.

Sammenlignes figur J.17 og J.18 kan det ses, at tidshistorien for accelerationsniveauet for analyse 2 ikke har symmetriske toppe, hvilket er forårsaget af, at de positive værdier af lasten er større end de absolutte værdier af de negative værdier af lasten jf. figur J.2.

Betragtes figur J.19 kan det ses, at accelerationsniveauet stiger, og at formen på indhyldningskurven for tidshistorien for accelerationsniveauet ændres. Dette skyldes, at svingningerne på midten af gangbro C er styret af den anden egensvingningsform jf. figur 5.2(b). Spektret på figur J.20 viser blot, at det dynamiske respons for gangbro C er styret af frekvenser på ca. 2 Hz, hvilket svarer til lastkomponenten i lastmodel I.

På figur J.21 er accelerationsniveauet steget ift. figur J.19, og det kan ses, at der foreligger nogle ændringer i formen på indhyldningskurven. Dette skyldes, at der er flere af lastfrekvenserne i lastmodel II, der rammer omkring egenfrekvenserne, hvorfor både antallet af frihedsgrader og lastkomponenter har betydning for det probabilistiske estimat af gangbro C's dynamiske respons. Spektret på figur J.22 viser, at tidshistorien for responset indeholder de samme frekvenser som de tre lastkomponenter i lastmodel III, hvor lastkomponent 2 er den mest dominerende. Dette skyldes, at det kun er egenfrekvens 2, 3 og 5 som bidrager til responset på midten af gangbroen, og lastkomponent 2 har en lastfrekvens, der ligger tæt på 2. og 3. egenfrekvens. Det kan ses ud fra formen på tidshistorien på figur J.21, at det dynamiske respons er styret af den anden egensvingningsform samt noget mere, hvilket må være egensvingningsformen fra 3. og 5. egensvingningsfrekvens.

Ud fra figur J.23 ses det, at tidshistorien for det dynamiske respons bliver kompliceret, når der foretages en analyse med fem frihedsgrader og anvendes lastmodel III. Dette skyldes, at flere af lastfrekvenserne er sammenfaldende med egenfrekvenserne. På spektret på figur J.24 ses det, at det er den anden egensvingningsform, der er dominerende for det dynamiske respons, mens den tredje og femte egensvingningsform også bidrager. Desuden ses det på figur J.24, at det er den anden lastkomponent, der giver det største bidrag, mens de øvrige lastkomponenter også giver et bidrag til svingningen af gangbro C.

De maksimale accelerationer i tidshistorierne er sammenholdt i tabel J.6. Her giver analyse 1 og 2 ca. 0 $m/s^2$, og det maksimale accelerationsniveau stiger fra analyse 3 op til analyse 5. Dette skyldes, at analyse 3, 4 og 5 er lavet med bromodel $C_5$ og hhv. lastmodel I, II og III. Jo højere nummer på lastmodellen, jo flere lastfrekvenser medtages i lastmodellen, og dermed påvirkes flere af egenfrekvenserne, hvilket medfører den højere maksimale acceleration.

| Analyse 1 [$m/s^2$] | Analyse 2 [$m/s^2$] | Analyse 3 [$m/s^2$] | Analyse 4 [$m/s^2$] | Analyse 5 [$m/s^2$] |
|---|---|---|---|---|
| -0,001 | -0,001 | 0,0229 | 0,0789 | -0,1687 |

**Tabel J.6** *De maksimale accelerationer for gangbro C for analyse 1-5.*

# Litteratur


British Standard. *BS 5400-2:2006 Steel, concrete and composite bridges - Part 2: Specification for loads*. British Standard, 2006.

Damkilde, L. *Introduktion til dynamik*. Danmarks Tekniske Universitet, 1998.

Nielsen, S. R. K. *Vibration Theory, Vol. 1. Linear Vibration Theory*. Aalborg tekniske Universitetsforlag, 2004.

Nielsen, S. R. K. *Structural Dynamics, Vol. 9. Computational Dynamics*. Aalborg Universitet, 2007.

Zivanovic, S. et al. *Vibration Serviceability of Footbridges under Human-induced Excitation: A Literature Review*. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2):1–74, 2005.

Zivanovic, S. et al. *Probabiltiy-based prediction of multi-mode vibration response to walking excitation*. *Engineering Structures*, 29(6):942–954, 2007.