Kandidatafhandling - Aalborg Universitet

Juni 2019

Faktorinvestering og porteføljeallokering - En praktisk tilgang

Antal normalsider: 60

Forfattere:
Morten Andersen (20145882)
Morten Bohn-Holm (20146580)

Vejleder:
Lasse Bork

Abstract

This Master's thesis examines the practical challenges of implementing the principles of factor investing and asset allocation strategies for investors on the financial markets. These include limitations of the asset universe and factor products available to the average investor, restrictions regarding the construction of long-short portfolios along with the consequences of transaction costs associated with the turnover ratio of portfolios. The main implications of these challenges include significantly lower risk-premiums for certain factors based on a liquid and feasible asset universe, along with a loss of diversification potential among factor products. Furthermore, we present an analysis based on a backtest framework of the three portfolio strategies: Global Minimum Variance, Equal Weights and the Equal Risk Contribution approach proposed by Maillard et al. (2008). The main conclusion of this analysis is, that after taking the challenges mentioned above into account, chosen factor products on the American stock market still manages to contribute to the diversification potential of what is assumed to represent an already well-diversified portfolio. The results are furthermore shown to be robust to changes in the rebalancing frequency.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning **2**
1.1 Problemformulering . . . 2
1.2 Afgrænsning af problemformulering . . . 3
1.3 Specialets opbygning . . . 3
1.4 Primære resultater . . . 3

2 Udvikling inden for investeringsteori **4**
2.1 Modern Portfolio Theory - Markowitz' mean-variance analyse . . . 4
2.2 Capital Asset Pricing Model . . . 7
2.3 Arbitrage Pricing Theory - Et framework for multifaktormodeller . . . 9
2.4 Risikofaktorer . . . 10
2.5 Den efficiente markedshypotese . . . 16
2.6 Forklaring af merafkastet ved faktorer . . . 18
2.7 Faktorinvestering i Norges statsejede pensionsfond . . . 20

3 Porteføljeallokeringsstrategier **21**
3.1 Equal Weights . . . 21
3.2 Equal Risk Contribution . . . 22
3.3 Global Minimum Variance . . . 24
3.4 Opsummering . . . 24

4 Backtest af allokeringsstrategier **26**
4.1 Backtest 1.0: En veldiversificeret portefølje . . . 26
4.2 Udfordringer ved implementering af faktorinvestering i praksis . . . 34
4.3 Backtest 2.0: Faktorers bidrag til en veldiversificeret portefølje . . . 40
4.4 Omsætningshastighed og transaktionsomkostninger . . . 44
4.5 Rebalanceringsfrekvens . . . 47
4.6 Diskussion af resultater . . . 50

5 Fremtidsudsigterne for faktorinvestering **51**

6 Konklusion **53**

Kapitel 1

Indledning

Interessen for faktorinvestering har i de seneste årtier vokset eksponentielt i en akademisk såvel som praktisk kontekst og har udviklet sig til at blive det formentlig vigtigste koncept inden for moderne investerings- og porteføljeteori. Principperne bag faktorinvestering er imidlertid ikke nye og defineres bedst som et forsøg på at eksponere sin portefølje over for forskellige kilder af systematisk risiko, i jagten på et bedre forhold mellem risiko og afkast. Dette blev første gang forsøgt tilbage i 1961 med formuleringen af én-faktormodellen CAPM, der kan ses som starten på det, vi i dag kalder faktorinvestering. Siden har forskere haft travlt med at præsentere videnskabelig evidens, der understøtter eksistensen af flere systematiske kilder til risikopræmier end markedspræmien fra CAPM. Dette leder hen til en af de største udfordringer inden for faktorinvestering, nemlig at afgøre hvilke faktorer, der er relevante. I en lang periode var standarden at benytte fire-faktormodellen fra Carhart (1997). Foruden markedsfaktoren bestod Carharts model af en size og value faktor, formuleret i Fama & French (1993), samt en momentumfaktor foreslået af Jegadeesh & Titman (1993). I nyere tid er der imidlertid blevet foreslået et hav af nye faktorer, hvilket også er en problemstilling, som rejses i Harvey et al. (2016). Heri identificeres en eksponentiel vækst i antallet af faktorer foreslået i akademiske papirer siden 1960, som akkumulativt summerer til mere end 300 faktorer i 2013. Denne trend afspejler i høj grad faktorinvesterings aktualitet og popularitet, men er samtidig et udtryk for en manglende konsensus omkring antallet af faktorer samt hvilke af disse, der bør indgå i en investors portefølje. Imens denne problemstilling bliver flittigt diskuteret og tiltrækker sig stor opmærksomhed i den akademiske verden, synes en anden meget central problemstilling til tider at blive overskygget - nemlig de udfordringer, som opstår ved at implementere faktorinvestering og porteføljeteori i praksis. Imens meget litteratur kort berører denne problemstilling, er det sjældent et emne, som danner udgangspunkt for en dybere analyse, hvormed det i mange tilfælde bliver svært at relatere det teoretiske til det praktiske. Disse udfordringer inkluderer bl.a. emner som porteføljers omsætningshastighed og dertilhørende transaktionsomkostninger, restriktioner for short-sales (long-short kontra long-only porteføljer) samt forskellen på teoretiske aktiver og aktiver, som rent faktisk er investerbare i praksis. Dette speciale har til formål at analysere og diskutere nogle af disse praktiske udfordringer, hvilket leder hen til følgende problemformulering.

1.1 Problemformulering

Hvilke udfordringer opstår ved at implementere faktorinvestering og porteføljeallokeringsstrategier i praksis, og hvilke implikationer har disse udfordringer for investorer på de finansielle markeder?

1.2 Afgrænsning af problemformulering

I henhold til at konkretisere samt sikre en fyldestgørende besvarelse af specialets problemformulering, har det været nødvendigt at foretage en række afgrænsninger. De mest overordnede af disse nævnes kort i dette afsnit, for at spore læser ind på den overordnede retning af projektet. Der vil imidlertid også blive argumenteret og diskuteret forskellige valg og fravalg løbende i afhandlingens afsnit.

Af primære afgrænsninger foretaget i afhandlingen, kan nævnes, at de opstillede backtests i kapitel 4 tager udgangspunkt i de tre porteføljestrategier beskrevet i kapitel 3, selvom udvalget af porteføljesallokeringsstrategier favner bredere end disse tre. Derudover afgrænses specialets analyse til at tage udgangspunkt i data for finansielle aktiver på det amerikanske marked. Det anerkendes imidlertid, at flere af rapportens resultater med fordel kan replikeres for andre geografiske markeder, eller i en aggregeret, international kontekst. Valget af amerikansk data skyldes primært tilgængeligheden og historikken af data for de medtagne finansielle produkter. Som nævnt i indledningen er der i den seneste tid foreslået et utal af forskellige faktorer i litteraturen, derfor er der også foretaget afgrænsninger ift. faktorer medtaget i denne afhandling. Foruden markedsfaktoren, tages der udgangspunkt i faktorerne size, value, momentum og quality, som vurderes til at være de fire faktorer, som i skrivende stund har de dybeste rødder i litteraturen, samt den mest overbevisende evidens for at tilbyde et systematisk merafkast ift. markedet. Endelig er der foretaget en række metodiske afgrænsninger i forbindelse med de udarbejdede backtests, herunder bl.a. estimationsmetoden for kovariansmatricer, månedligt data samt længden af estimationsvinduer, som diskuteres nærmere i kapitel 4.

1.3 Specialets opbygning

Specialet består af i alt seks kapitler samt appendiks. Kapitel 2 har til formål at give læser en gennemgang af udviklingen fra klassisk til moderne investeringsteori - fra Markowitz' banebrydende og nobelprisvindende mean-variance analyse, til moderne multifaktormodeller og faktorinvestering. Herefter præsenteres der i kapitel 3, tre centrale porteføljeallokeringsstrategier, som danner grundlag for en række forskellige backtests, som udarbejdes i afhandlingens fjerde kapitel. Heri præsenteres specialets analyse, som har til formål, dels at identificere udfordringer ved at implementere faktorinvestering og porteføljestrategier i praksis, samt at undersøge risikofaktorers bidrag til en eksisterende, veldiversificeret portefølje, når der tages forbehold for førnævnte udfordringer. Afhandlingen afrundes med kapitel 5, der diskuterer fremtidsudsigterne for faktorinvestering, hvorefter specialets samlede resultater konkluderes i kapitel 6.

1.4 Primære resultater

I dette speciale præsenteres en række interessante resultater, der bidrager til litteraturen om porteføljestrategier og faktorinvestering. Herunder kan bl.a. nævnes, at merafkastet for bl.a. momentum og quality er signifikant lavere, når disse dannes ud fra et likvidt og tilgængeligt aktivunivers som S&P 500 sammenlignet med et akademisk aktivunivers som CRSP. Derudover findes, at investerbare faktorprodukters diversifikationspotentiale er markant mindre end ved akademiske faktorer, som dem præsenteret i Fama & French (1993). Til trods for ovenstående finder afhandlingen, at fire investerbare faktorprodukter fra MSCI stadig formår at øge diversifikationspotentialet til en allerede veldivercificeret portefølje bestående af amerikanske stats- og virksomheds-obligationer, aktier samt internationale aktier dannet på baggrund af en Equal Weights og Equal Risk Contribution strategi.

Kapitel 2

Udvikling inden for investeringsteori

Dette kapitel har til formål at give læseren indsigt i udviklingen inden for portefølje- og investeringsteori og starter med en kort præsentation af Markowitz' mean-variance analyse, efterfulgt af Capital Asset Pricing Model og Arbitrage Pricing Theory, som danner grundlaget for de mere moderne investeringsteorier, herunder *faktorinvestering* og *multifaktormodeller*. Da specialets hovedemne er faktorinvestering, følger en mere omfangsrig gennemgang af dette fænomen i afsnit 2.4, herunder bl.a. en uddybning af begrebet *risikofaktor*, hvordan de kan bestemmes, samt en præsentation af de mest indflydelsesrige faktorer i dag. Endelig diskuteres de to overordnede, men vidt forskellige forklaringer på, hvorfor visse faktorer tilbyder et merafkast ift. markedet. Her tager den ene udgangspunkt i *den efficiente markedshypotese*, imens den anden støtter sig op ad adfærdsøkonomiske og psykologibaserede teorier til at forklare "anomalier" på de finansielle markeder.

2.1 Modern Portfolio Theory - Markowitz' mean-variance analyse

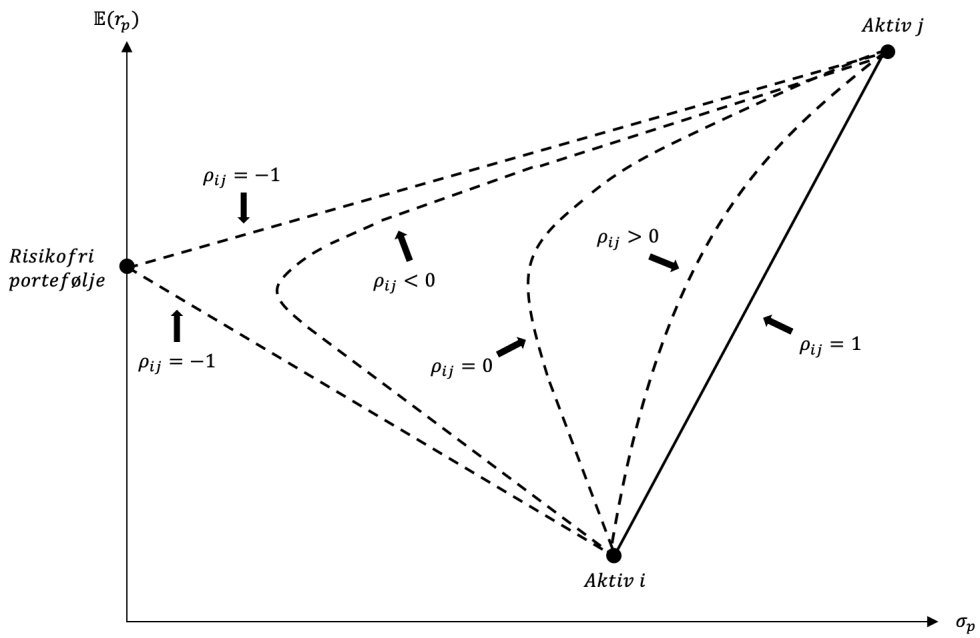
I en artikel fra 1952 under navnet "Portfolio Selection" introducerede den amerikanske økonom, Harry Markowitz, sin banebrydende porteføljeteori, som senere fik tilnavnet "Modern Portfolio Theory" (MPT), og for hvilken han blev tildelt Nobelprisen i økonomi i 1990. MPT var den første teori, som formaliserede hvordan investorer bør sammensætte deres porteføljer, men har på trods af sin alder ikke mistet sin relevans, og har sidenhen dannet grundlag for nyere investeringsteori. Derfor er det vigtigt at give læser et indblik i hovedbudskaberne fra MPT.

Selve teorien skal forstås, som et analytisk værktøj, der hjælper *rationelle, mean-variance optimerende* investorer med at sammensætte en portefølje af aktiver, som optimerer forholdet mellem porteføljens forventede afkast og risiko.[1] Dette gøres ved at udvide og formalisere diversifikationsbegrebet. Et centralt budskab i MPT er, at et givet aktivs risiko og afkast ikke bør vurderes i isolation, men i stedet hvordan det enkelte aktiv påvirker den samlede porteføljes risiko og afkast. Hermed får kovariansen mellem de pågældende aktivers afkast en meget central betydning for porteføljesammensætningen. Dette kommer til udtryk i figur 1, som forholder sig til det simple eksempel, hvor en portefølje kun består af to risikofyldte aktiver, i og j, med hver sin afkast- og risikoprofil, men til en række forskellige korrelationstal, ρ_{ij}. I figur 1 repræsenterer x-aksen porteføljeafkastets standardafvigelse, σ_p, imens y-aksen repræsenterer porteføljens forventede afkast, $\mathbb{E}(r_p)$. Af figuren ses tydeligt, at jo mindre korrelationen mellem de to aktivers afkast

[1] MPT operationaliserer et aktivs risiko som variansen (eller standardafvigelsen) til aktivets afkast.

er, jo større bliver diversifikationspotentialet, hvormed porteføljens samlede risiko reduceres. I tilfældet, hvor investor har mulighed for at investere i to aktiver med perfekt negativt korrellerede afkast ses, at han faktisk kan danne en fuldstændig risikofri portefølje, hvor alt risiko er diversificeret væk. Forklaringen til dette er, at når det ene aktiv performer dårligt, vil det andet aktiv performe tilsvarende godt og vice versa. Investor bliver derfor i dette tilfælde perfekt kompenseret i perioder, hvor et af hans aktiver performer dårligt[2]. Det ses samtidig, at diversifikationspotentialet gradvis mindskes i takt med, at korrelationen mellem de to aktiver øges (Grinblatt & Titman, 2002, s. 119).

Figur 1: Porteføljer med to risikofyldte aktiver, i og j, ved forskellige korrelationstal, ρ_{ij}



Egen fremstilling med inspiration fra kapitel 4 i Grinblatt & Titman (2002)

På baggrund af diversifikationsideerne i MPT kan et minimeringsproblem opstilles, som fører til en *mean-variance efficient* portefølje. Vi antager, at porteføljen består af n aktiver med forventede afkast, $\mathbb{E}(r_1), \mathbb{E}(r_2)$, ..., $\mathbb{E}(r_n)$ og kovarianser, σ_{ij}, for $i, j = 1, 2, ..., n$. Porteføljen er desuden defineret af et sæt vægte, w_i, som summerer til 1. For at løse minimeringsproblemet sættes det forventede porteføljeafkast lig en vilkårlig konstant, r, hvorefter porteføljen med mindst mulig varians for det givne afkastniveau kan bestemmes.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{2.1}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbb{E}(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(r_i) = r \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Ligning (2.1) udtrykker således porteføljeafkastets samlede varians[3]. Der tillades desuden negative portefølje-

[2]Eksemplet med perfekt negativ korrelation mellem afkast vil dog typisk være forbeholdt den teoretiske verden, da det i praksis vil være så godt som umuligt at finde aktiver med sådanne karakteristika.

[3]Se Appendiks A for udledning af variansen for en portefølje.

vægte, hvilket repræsenterer korte positioner i aktiverne (Luenberger, 1997, s. 158). Af ligning (2.1) fremgår desuden, hvordan porteføljevariansen afhænger positivt af aktivernes kovarians, σ_{ij}, hvilket forklarer hvorfor diversifikationspotentialet stiger, når kovariansen mellem aktiver mindskes, jf. figur 1. Minimeringsproblemet kan løses vha. Lagrange multipliers, λ og μ, jf. ligning (2.2).

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(r_i) - r\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) \tag{2.2}$$

En anden nyttig tilgang til porteføljeoptimering, er at betragte kovariansen mellem porteføljeafkastet og et givet aktivs afkast, som en marginalvarians, *marginal risk contribution*. Her fokuserer man på, hvordan den samlede porteføljevarians påvirkes ved en marginal stigning i et givet aktivs porteføljevægt. Dette er muligt eftersom, at kovariansen mellem et givet aktieafkast og porteføljeafkastet er proportional til den varians, som tilføjes porteføljen. Dette sker, når den pågældende akties porteføljevægt øges marginalt, og de resterende porteføljevægte holdes konstante, ved at finansiere de ekstra aktier med en investering, som ingen kovarians med porteføljen har - eksempelvis en tilsvarende kort position i et risikofrit aktiv. På denne måde kan investor på baggrund af kovarianser, og uden at estimere forventede afkast, vurdere hvordan den samlede porteføljevarians påvirkes ved marginale ændringer i de enkelte porteføljevægte og dermed vurdere, for hvilke aktiver porteføljevægtene bør opjusteres, og for hvilke de bør nedjusteres (Grinblatt & Titman, 2002, s. 120). I kapitel 3 bliver der bl.a. set nærmere på porteføljestrategierne, *Global Minimum Variance* og *Equal Risk Contribution*, der tager udgangspunkt i marginal risk contribution.

Med næsten 70 år på bagen er det ikke overraskende, at MPT er blevet udsat for en række kritikpunkter igennem tiden. Bl.a. antager teorien, at aktivers afkast følger en normalfordeling, hvilket er forkastet empirisk i en række studier. Benoit Mandelbrot og Eugene Fama udfordrede allerede denne antagelse tilbage i 60'erne, jf. Fama (1963) og senere i Fama (1976). MPT antager desuden, at korrelationen mellem aktivers afkast (som benyttes til at finde mean-variance efficiente porteføljer) er stabil over tid, hvilket mange aktiver ikke overholder i virkeligheden. Endelig er det vigtigt at understrege, at allokeringsstrategien baserer sig på *forventede* værdier for afkast udregnet på baggrund af historisk data. Dermed kan der opleves i praksis, at disse værdier ikke tager højde for eksempelvis nye omstændigheder, som ikke eksisterede da det historiske data blev genereret. Følgende citat af Warren Buffet, understreger meget godt denne pointe:

> *"If past history was all there was to the game, the richest people would be librarians"*

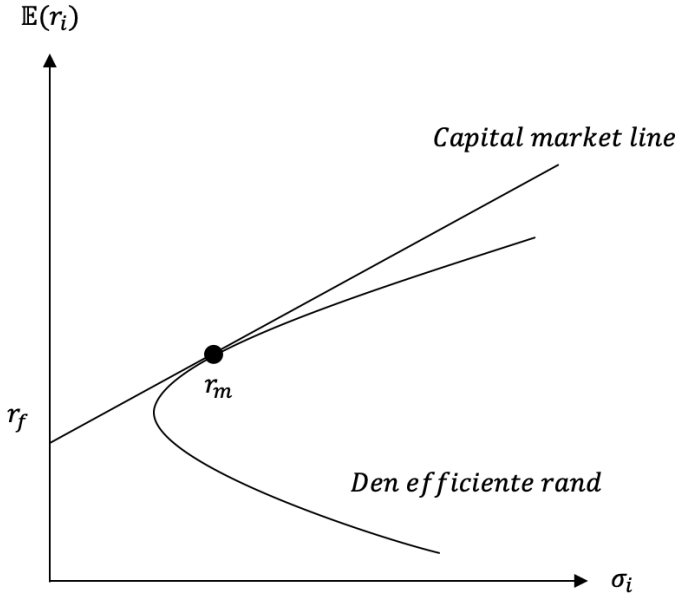
Til trods for kritikken har MPT spillet en central rolle for den efterfølgende udvikling af investeringsog porteføljeteori, da den gav en banebrydende forståelse og formalisering af diversifikationsbegrebet. Teorien har således fungeret som springbræt til mere avancerede og moderne investeringsteorier, herunder især CAPM og APT, der præsenteres i de følgende afsnit.

2.2 Capital Asset Pricing Model

Capital Asset Pricing Model blev skabt af Sharpe (1964), Treynor (1962), Lintner (1965) og Mossin (1966) og bliver ofte krediteret for at være den første formulerede faktormodel, idet den medtager *markedet* som faktor til forklaring af variationen i afkast på tværs af aktiver. En god forståelse af CAPM bidrager således til forståelsen af moderne faktorinvestering.

CAPM kan tolkes som en ligevægtsmodel, baseret på frameworket defineret af Markowitz. Figur 1 i afsnit 2.1 viste, at investor kan minimere sin porteføljes risiko ved en ændring af de respektive porteføljevægte. Den del af de forskellige kurver i figur 1 med en hældning > 0 betegnede Markowitz, som den *efficiente rand*, og er et sæt af *mean-variance efficiente* porteføljer, der minimerer porteføljevariansen for et givet afkast. Senere viste Tobin (1958), at ved eksistensen af et risikofrit aktiv, vil den efficiente rand blive lineær. Betydningen af dette var, at der i modsætning til MPT kunne vises, at der kun eksisterer én optimal portefølje af risikofyldte aktiver, kaldt *tangensporteføljen*, jf. figur 2.

Figur 2: Capital market line og den efficiente rand



Egen fremstilling med inspiration fra Ang (2014)

Sharpe (1964) viste, at denne portefølje, under en række antagelser[4] svarer til *markedsporteføljen* - en teoretisk portefølje bestående af samtlige aktiver på verdens finansielle markeder, vægtet i forhold til hvert enkelt aktivs markedskapitalisering. CAPM foreskriver således, at der kun eksisterer én optimal porteføljesammensætning bestående af hhv. en andel i det risikofrie aktiv og en andel i markedsporteføljen, hvor porteføljevægtene for disse to aktiver vil afhænge af investors risikoaversion. Disse forskellige kombinationer af porteføljevægte for det risikofrie aktiv og markedsporteføljen, illustreres grafisk i figur 2, og kaldes *capital market line*. Ovenstående medfører, at alle investorer, ifølge CAPM, kun eksponeres over for

[4]Herunder bl.a. homogene forventninger blandt investorer og et efficient marked (se afsnit 2.5)

den systematiske risiko ved at holde markedsporteføljen (også benævnt markedsfaktoren), hvor alt usystematisk risiko er bortdiversificeret (Cazalet & Roncalli, 2014; Luenberger, 1997).

Capital market line beskriver dermed forholdet mellem forventet afkast og risiko for et givet efficient aktiv eller portefølje og udtrykkes matematisk som:

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \frac{\mathbb{E}(r_m) - r_f}{\sigma_m}\sigma_i \tag{2.3}$$

Hvor $\mathbb{E}(r_m)$ og σ_m henholdsvis angiver den forventede værdi og standardafvigelsen til markedsafkastet. $\mathbb{E}(r_i)$ og σ_i er hhv. den forventede værdi og standardafvigelse til et vilkårligt efficient aktivs afkast. Hældningen på capital market line refereres derfor også ofte som *"the price of risk"* og er givet ved $K = \frac{\mathbb{E}(r_m)-r_f}{\sigma_m}$, som fortæller, hvor meget det forventede afkast på et efficient aktiv eller portefølje bør stige, når standardafvigelsen stiger med én enhed. Denne "price of risk" kan således anvendes til at måle graden af efficiens for et givet aktiv eller portefølje, og kaldes også for Sharpe-ratio:[5]

$$\text{Sharpe-ratio} = \frac{\mathbb{E}(r_p) - r_f}{\sigma_p} \tag{2.4}$$

I henhold til faktormodeller, så er CAPM, som tidligere nævnt, en én-faktormodel, som betyder, at risikoen til et givet aktiv måles på baggrund af faktoreksponeringen over for denne respektive faktor, som i CAPM er markedet. Dette leder hen til det andet prisforhold, som antages i CAPM, formelt kaldt *security market line*:

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}(\mathbb{E}(r_m) - r_f) \tag{2.5}$$

Hvor r_f er den risikofrie rente, $\mathbb{E}(r_i)$ er det forventede afkast til aktiv i og $\mathbb{E}(r_m)$ er det forventede afkast til markedsporteføljen. Udtrykket $\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$ repræsenterer aktiv i's eksponering overfor markedsfaktoren, $\mathbb{E}(r_m) - r_f$, og benævnes også som aktivets β:

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(r_m) - r_f) \tag{2.6}$$

CAPM fremhæver således vigtigheden af beta, i forklaringen af afkast på tværs af aktiver. Beta repræsenterer aktivets systematiske risiko, som modsat idiosynkratisk risiko, ikke kan bortdiversificeres, hvorfor investorer også kompenseres for denne. Udover at CAPM forudsætter en række strenge antagelser, forkastede Black et al. (1972) modellen empirisk, og viste at aktivers forventede afkast ikke er proportional til deres beta'er. Et stort antal papirer er sidenhen publiceret med samme konklusion (Cazalet & Roncalli, 2014, s. 4). Til trods for dette, formår modellen i høj grad at bibeholde sin aktualitet i såvel akademisk som praktisk kontekst, hvilket forklares af Ang (2014) ved:

> *"...the failure (i.e. CAPM) has been glorious, opening new vistas of understanding for asset owners who must hunt for risk premiums and manage risk. The basic intuition of the CAPM still holds true: that the factors underlying the assets determine asset risk premiums and that these risk premiums are compensation for investors' losses during bad times."*

Med andre ord har CAPM banet vejen for en ny retning inden for investeringsteori, som bl.a. inkluderer *multifaktormodeller* og *faktorinvestering*. To begreber der ses nærmere på i de følgende afsnit.

[5] Denne ratio har en afgørende rolle ift. at vurdere forskellige porteføljestrategiers performance i kapitel 4.

2.3 Arbitrage Pricing Theory - Et framework for multifaktormodeller

I dette afsnit præsenteres Arbitrage Pricing Theory som udvider og generaliserer modelframeworket fra CAPM ved at inddrage mere end én underliggende faktor til forklaring af aktivers afkast. Afsnittet er inspireret af Overby (2010) og Cazalet & Roncalli (2014).

En af de første der inddrog flere faktorer i asset pricing modeller var Ross (1976) som under navnet *Arbitrage Pricing Theory* (APT), introducerede et modelframework som bygger på samme intuition som CAPM, men med et mere generelt setup og med færre strenge antagelser. Ordet *arbitrage* hentyder til, at modellens faktorer ikke kan arbitreres eller diversificeres væk, nøjagtig ligesom markedsfaktoren i CAPM, hvorfor investorer skal kompenseres for at være eksponeret over for disse *risikofaktorer*. Det modsatte gør sig gældende for aktivers idiosynkratiske risiko, som antages at kunne elimineres perfekt vha. diversifikation. Med andre ord antager APT, at der ingen arbitragemuligheder eksisterer. I et multifaktor modelsetup antages, at afkastet til et givet aktiv, i, kan modelleres, som en lineær funktion af k faktorer:

$$r_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\mathcal{F}_j + \varepsilon_i \tag{2.7}$$

Ligning (2.7) antager, at afkastet til aktiv i kan forklares ved et mindre antal, k, faktorer. Niveauet for disse faktorer repræsenteres af $\mathcal{F}_j$, som hvert enkelt aktiv har forskellige sensitiviteter, β_{ij}, over for. Disse benævnes også som aktivernes faktor-betaer. Endelig består ligning (2.7) af modellens skæringspunkt, α_i, samt et ukorreleret idiosynkratisk element, ε_i. I tilfælde af veldiversificerede porteføljer antages, at det idiosynkratiske element ingen betydning har for den samlede varians. For at ε_i kan betegnes som idiosynkratisk, skal følgende tre krav overholdes:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$$
$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j$$
$$\text{cov}(\varepsilon_i, \mathcal{F}_j) = 0$$

Det idiosynkratiske element er dermed uafhængigt og kan bortdiversificeres. Faktorerne ($\mathcal{F}_j$) i ligning (2.7) kan tolkes på flere forskellige måder, men ofte tolkes de som proxies for *ny information* omkring relevante variable.[6] Dette betyder, at faktorerne kan skaleres til at have en middelværdi på nul,[7] $\mathbb{E}(\mathcal{F}_j) = 0$ som simplificerer setuppet, bl.a. fordi det medfører, at aktivets forventede afkast bliver lig konstanten α_i, jf. ligning (2.8):

$$\mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\mathcal{F}_j + \varepsilon_i) = \alpha_i \tag{2.8}$$

Ideen er her, at værdien af α_i afhænger af det enkelte aktivs eksponering over for de forskellige faktorer. Her er det især to elementer som er centrale: 1) I hvor høj grad aktiv i er eksponeret over for de forskellige faktorer (dette kan undersøges ved at køre en regression af aktivets afkast på de relevante faktorer) og 2) hvad er risikopræmien for at være eksponeret for de forskellige faktorer. Vha. arbitrage teori udleder APT, at risikopræmien til aktiv i ($\mathbb{E}(r_i) - r_f$) er givet ved en lineær funktion af de respektive faktorers risikopræmier, λ_j, jf. ligning (2.9):

[6] Se afsnit 2.4 for en oversigt over forskellige faktorer foreslået i litteraturen.

[7] Ofte antages også ukorrelerede faktorer $\text{cov}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_h) = 0$ for $j \neq h$

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\lambda_j \tag{2.9}$$

hvor $\lambda_j = \mathbb{E}(\mathcal{F}_j) - r_f$ og benævnes også som *price of risk* relateret til aktiv j. For beviset af ovenstående henvises til appendiks A.1 i Cazalet & Roncalli (2014).

Den underliggende ide i APT er således, at der eksisterer flere kilder til systematisk risiko end markedsfaktoren i CAPM. APT adskiller sig desuden fra CAPM ved ikke at antage en specifik nyttefunktion, som foreskrevet af Markowitz, og som implicerer, at alle investorer anvender samme mean-variance analyse. Til gengæld antages i APT, et stort antal af aktiver, som tillader en portefølje , hvor alt idiosynkratisk risiko er arbitreret væk, hvilket også er årsagen til, at der ikke indgår et idiosynkratisk element, ε_i, i ligning (2.9).

APT fungerer imidlertid kun som "framework" for multifaktormodeller, og kommer derfor heller ikke med konkrete påstande, om hvilke risikofaktorer der bør inddrages, eller hvordan disse bør bestemmes. Dette ses der nærmere på i næste afsnit.

2.4 Risikofaktorer

Med udgangspunkt i frameworket for multifaktormodeller fra forrige afsnit, vil der i det følgende blive uddybet, hvad der egentlig forstås ved en *risikofaktor*, metoder til at bestemme dem, samt en præsentation af nogle af de faktorer man typisk støder på i litteraturen, og som spiller en central rolle i afhandlingens analyse i kapitel 4.

Risikofaktorer skal ifølge faktorteori forstås som drivkraften bag aktivers risikopræmier, og har deres rødder i akademisk litteratur. Faktorer kan mere konkret tænkes på, som ethvert karakteristika, der relaterer en gruppe af aktiver, og som er relevant i forhold til at forklare deres afkast- og risikoprofil (Bender et al., 2013, s. 4). Jo mere eksponeret et aktiv er over for en eller flere risikofaktorer, jo større bør aktivets forventede afkast være, for at kompensere investor for den øgede risiko (faktoreksponering). CAPM, som var den første teori inden for faktorrisiko, påstår, at der kun findes én risikofaktor, markedsfaktoren, jf. afsnit 2.2. Siden formuleringen af APT og det teoretiske framework for multifaktormodeller er der imidlertid blevet foreslået et hav af forskellige relevante risikofaktorer, hvor nogle af disse har vundet større indpas i den akademiske og finansielle verden end andre.

En anderledes, men intuitiv, måde at fortolke risikofaktorer på, bliver præsenteret i Ang (2014), som beskriver risikofaktorer vha. en analogi til næringsstoffer og mad. Her forklarer han, at faktorer er til aktiver, hvad næringsstoffer er til mad. Med det mener han, at alt mad kan ses som et bundt af forskellige næringsstoffer, og ofte indeholder mad mere end ét makronæringsstof. Mennesker har, afhængig af helbred, køn, alder, interesser mm., forskellige krav til næringsstoffer, og en vigtig årsag til, at vi overhovedet spiser mad, er netop for at få de underliggende næringsstoffer. På samme måde skal aktiver forstås, som bundter af risikofaktorer, som afhængigt af det pågældende aktiv vil have forskellig grad af eksponering over for hver enkelt faktor. Nogle aktiver vil være eksponeret over for mange forskellige faktorer, imens andre vil være tæt på, kun at have eksponering over for en enkelt. Inden for faktorteori er en vigtig antagelse, at det som udgangspunkt er faktorerne, som investor interesserer sig for, imens det enkelte aktiv er underordnet. Investorer vil dog have forskellige præferencer samt risikoaversion, når det kommer til

forskellige kilder af faktorrisiko, på samme måde som ved næringsstoffer. Et eksempel på dette er, at mange investorer ønsker at undgå store mængder af volatilitet i deres investeringer. Dog findes der samtidig nogle "modige" investorer, der har "råd" til at have den modsatte præference, dvs. udholde meget store tab på sine investeringer i dårlige perioder, mod at opnå en "volatilitetspræmie" i normale tider. Det er vigtigt at pointere, at hver enkelt faktor definerer et tilsvarende sæt af "dårlige tider". For makro-faktorer (uddybes nedenfor) vil dårlige tider eksempelvis defineres som perioder med høj inflation eller lav vækst i BNP. For andre faktorer vil dårlige tider være perioder, hvor markedet eller visse investeringsstrategier performer dårligt. Ideen er imidlertid, at investor kompenseres med en risikopæmie i "gode" eller "normale tider" for at udholde tab i dårlige tider (Ang, 2014, s. 194-196).

2.4.1 Bestemmelse af faktorer

Miller (2006) diskuterer tre væsentlige kriterier som bør opfyldes når akademikere og forskere, forsøger at identificere samt bevise relevansen af nye faktorer. De skal således vise 1) vedholdenhed over tid 2) at volatiliteten i afkastene er "stor nok" relativt til den individuelle aktievolatilitet og 3) en stor forklaringskraft for en bred vifte af aktiver. I modsætning til aktieafkast og -volatilitet, så kan faktorer ikke direkte observeres, hvilket har ført til debat omkring, hvordan faktorer bør defineres og estimeres. Grundlæggende findes tre forskellige kategorier af faktorer, som benytter hver sin metodiske tilgang. Disse præsenteres kort nedenfor.

Statistisk faktoranalyse - Principal Component

Statistisk faktoranalyse er en estimationsteknik der eksempelvis vha. en principal component analyse (PCA), bestemmer hvilke faktorer, der er relevante at medtage i en multifaktormodel. Metoden baserer sig på ideen om, at kovarianser mellem aktieafkast tilbyder relevant information, som kan benyttes til at identificere faktorer. Faktoranalyse tager således udgangspunkt i kovarianserne mellem afkast, og bestemmer derefter, hvilke faktorer (hvilken faktorstruktur), der bedst forklarer de observerede kovarianser. Anvendelsen af denne procedure blev pioneret af Roll & Ross (1980). Fordelen ved denne metode er, at de valgte faktorer, vil være de bedste til at forklare kovarianserne mellem alle aktiver. Teoretisk set vil faktorerne, hvis kovarianserne ikke varierer over tid, fra en statistisk faktoranalyse være præcis de faktorer der ønskes. Ulempen ved metoden er dog, at aktiver ofte ikke overholder antagelsen om konstante kovarianser, samt at en statistisk faktoranalyse giver en meget begrænset indsigt i hvilke økonomiske variable faktorerne relaterer sig til[8] (Grinblatt & Titman, 2002, s. 184).

Makro-faktorer

En anden tilgang til at bestemme og estimere faktorer er at benytte makroøkonomiske variable som proxies for risikofaktorer. Her tages typisk udgangspunkt i et stort sæt af relevante økonomiske variable, som ændringer i output, arbejdsløshed, inflation, forskellige renter, oliepriser osv., hvorefter antallet af variable begrænses til eksempelvis de fem, der bedst forklarer den observerede variation i afkast på tværs af aktiver. Nogle af de første til at benytte sig af denne metode var Chen et al. (1986), som kom frem til, at følgende fem makroøkonomiske faktorer, bedst forklarer korrelationer mellem afkast på amerikanske aktier:

1. Ændringer i den månedlige vækstrate i BNP, som påvirker investorers forventninger til fremtidig industriel produktion og virksomheders indtjening.

[8] Denne afhandling kommer ikke til at beskæftige sig yderligere med PCA, hvorfor det statistiske og teoretiske grundlag bag ikke uddybes yderligere.

2. Ændringer i "default risk premium", målt som spændet mellem AAA og Baa obligationer med ens løbetid.

3. Ændringer i spændet mellem den korte og lange rente på statsobligationer, som påvirker diskonteringsraten til bestemmelse af nutidsværdien af fremtidige cash flows.

4. Uventede ændringer i prisniveauet, målt som differensen mellem aktuel og forventet inflation. Uventet høj eller lav inflation påvirker værdien af kontrakter indgået med leverandører, distributører samt finansielle kontrakter som f.eks. en virksomheds gældsinstrumenter.

5. Ændringer i den forventede inflation, målt som ændringer i den kortsigtede T-Bill rente. Ændringer i forventet inflation påvirker regeringers politik, forbrugertillid og renteniveauer.

Den største fordel ved at benytte makrofaktorer er, at de identificerede faktorer ofte er mere konkrete, og har i mange tilælde en bedre økonomisk intuition, sammenlignet med faktorer baseret på PCA. Ulempen ved metoden er, at visse potentielt vigtige faktorer kan være meget svære at gøre målbare, som eksempelvis politiske ændringer, som kan have betydelig effekt på aktiekurser[9]. Ofte indgår også forventningsbaserede faktorer, som eksempelvis uforventede shocks til inflation, hvilket kan være meget vanskeligt at kvantificere og måle[10] (Grinblatt & Titman, 2002, s. 185-186).

Style-faktorer

Den tredje og sidste kategori af faktorer har mange forskellige navne, herunder bl.a. "fundamental factors", "style factors" og "dynamic factors". Disse er faktorer, som fanger forskellige karakteristika for aktiver og kan være baseret på helt grundlæggende egenskaber som eksempelvis virksomheders størrelse, branche, vækst-potentiale og finansiel struktur. Markedsfaktoren fra CAPM er ligeledes et eksempel på en style-faktor. Rosenberg & Marathe (1976) var nogle af de første til at understrege vigtigheden, af det der i dag betegnes *style*-faktorer og argumenterede bl.a. for, at effekten af makroøkonomiske faktorer på individuelle aktiver, rent faktisk bedre bliver fanget vha. style-faktorer kontra makro-faktorer[11]. Af de tre forskellige kategorier af faktorer, må style-faktorer siges, at have vundet størst indpas i litteraturen (Bender et al., 2013, s. 4-5). I det følgende præsenteres nogle af de mest benyttede og anerkendte style-faktorer.

Fama & French's tre-faktormodel

En af de mest udbredte multifaktormodeller bestående af style-faktorer blev udarbejdet af Fama & French (1993). Heri opstilles en empirisk multifaktormodel med tre faktorer, til at forklare aktieafkast på det amerikanske aktiemarked. Disse tre faktorer er hhv. markedsfaktoren (MKT), som vi kender fra CAPM, suppleret med en size (SMB) samt value faktor (HML), hvilket resulterede i følgende opstilling:

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_{i,MKT}\mathbb{E}(r_m - r_f) + \beta_{i,SMB}\mathbb{E}(SMB) + \beta_{i,HML}\mathbb{E}(HML) \tag{2.10}$$

Ligning (2.10) er således blot en udvidelse af CAPM, hvor SMB er en forkortelse for "small minus big" og har til formål at fange forskellen i afkast på store og små aktier, hvor stor og lille refererer til aktiernes markedskapitalisering. SMB er således designet til at opfange mindre virksomheders relative merafkast

[9] Eksempelvis da Donald Trump blev præsident i USA, Storbritannien stemte sig ud af EU, murens fald mm.

[10] Af andre makro-faktorer kan bl.a. nævnes volatilitet på aktiemarkedet, "Productivity Risk", "Demographic Risk" og "Political Risk" jf. kapitel 7.2 i Ang (2014)

[11] Deres arbejde ledte bl.a. til udformningen af "Barra Risk modeller", som dog ikke uddybes yderligere i denne afhandling.

i forhold til større virksomheder, og kaldes også for size-faktoren. Effekten af virksomheders størrelse blev oprindeligt præsenteret af Banz (1981) og Reinganum (1981), som viste at små virksomheders aktier har tendens til at outperforme store virksomheders aktier, efter justering for deres betaer. Det er dog værd at bemærke, at effekten fra size-faktoren har været yderst begrænset siden midten af 1980'erne for amerikanske aktier, hvilket også fremgår af figur 3 længere nede. Dette har fået flere til at forholde sig kritisk til denne faktor de seneste år, hvor size-faktoren har været emne for diskussion. Samme historie ser desuden ud til at gøre sig gældende for internationalt data, hvor size-faktorens effekt ligeledes har været meget begrænset siden 1980'erne, jf. bl.a. Dimson et al. (2011), og Fama & French (2012) (Ang, 2014, s. 226-229).

Den tredje faktor i ligning (2.10) er HML, som står for "high minus low" og betegner afkastet af en portefølje bestående af aktier med en høj book-to-market ratio minus en portefølje bestående af aktier med lave book-to-market ratioer. En virksomheds book-to-market er et mål for virksomhedens værdi, og udregnes som aktiens bogførte værdi divideret med aktiens markedskapitalisering. HML faktoren er et forsøg på at operationalisere den såkaldte value/growth-faktor, som er meget udbredt i den finansielle verden. Ideen er her, at aktier med lave priser i forhold til virksomhedens egenkapital, er et udtryk for en "værdifuld" aktie (value) og bør i gennemsnit skabe et merafkast sammenlignet med aktier, hvor prisen er høj i forhold til virksomhedens egenkapital (growth). Sidstnævnte kaldes growth eller vækstaktier, da aktier med lav book-to-market ofte har oplevet længere perioder med betydelig vækst i aktiekursen, som årsag til den lave book-to-market. Valueaktier kan operationaliseres på mange forskellige måder, book-to-market er således kun en af flere forskellige måder at identificere value- og growthaktier på[12]. Fordelene ved valueaktier har været kendt i mange år, og kan spores tilbage til 1930-erne, hvor Graham et al. (1934) udgav bogen "Security Analysis", som hjalp investorer med at identificere aktier med lave priser relativt til virksomhedens værdi. Siden er antallet af akademiske artikler og research, der har til mål at forklare risikopræmien ved valueaktier steget enormt (Ang, 2014, s. 230).

Value-faktoren har modsat size-faktoren vist sig betydelig mere robust og vedvarende. Dette understøttes i figur 3 som plotter udviklingen i værdien af 1 kr. investeret i strategierne SMB og HML fra januar 1965 til december 2018. Figuren viser ret tydeligt forskellen på effekten af de to faktorer, og underbygger påstanden omkring size-faktorens begrænsede effekt siden midten af 1980'erne, som er samme periode, hvor det akkumulerede afkast for SMB når sit højeste niveau. HML strategien har performet betydeligt bedre, jf. figur 3, men det er her vigtigt at understrege, at der samtidig har været mange perioder af flere år siden 1965, hvor strategien har oplevet store tab. Især i forbindelse med recessionen i starten af 90'erne, IT-boblen i slut 90'erne samt finanskrisen i 2007-2008, hvor valueaktier også var udsat for store tab. Risikoen ved SMB, HML og andre faktorer generelt, er netop, at selvom der i gennemsnit eksisterer en risikopræmie over længere perioder, kan de enkelte faktorer sagtens opleve længere perioder med markante tab og underperformance. Et centralt emne i faktorinvestering er således for investorer at vurdere deres evne til at udholde disse tab, da dette har indflydelse på hvilke faktorer, man bør eksponere sin portefølje over for.

Momentum

Momentum-faktoren blev første gang nævnt i litteraturen af Levy (1967), men fik først sit gennembrud da Jegadeesh & Titman (1993) beskæftigede sig med den. Momentum-faktoren går i al sin enkelthed ud på

[12] Andre mål benytter omsætning, indtjening, dividender mm. Dog er book-to-market den mest benyttede operationalisering i den akademiske verden, jf. kapitel 7.3 i Ang (2014)

Figur 3: Akkumulerede afkast for SMB (size) og HML (value)

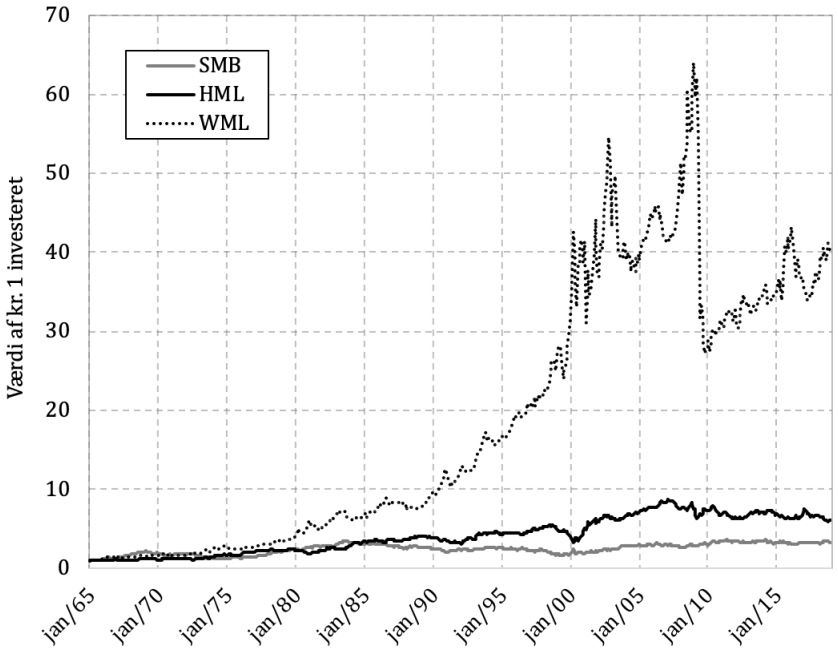
Egen fremstilling på baggrund af data fra Kenneth French's hjemmeside

at udvælge "vinder-aktier" og gå kort i "taber-aktier". Dette gøres ved at danne en portefølje på baggrund af aktier, der har haft et positivt afkast de seneste måneder,[13] mens man samtidig går kort i de aktier, der har klaret sig dårligt i samme periode. Derefter holdes denne portefølje i en periode, hvorefter man sælger ud til et (forhåbentligt) positivt afkast. Momentuminvestering går derfor imod det typiske ordsprog inden for investering, *buy low, sell high*, og beskrives bedre ved frasen, *buy high, sell higher.* Dermed baseres momemtuminvestering på præmissen, at "vindere" fortsætter med at vinde og "tabere" fortsætter med at tabe, og er derfor også ofte nævnt i litteraturen som past winners minus past losers (WML). Momentum-strategien er ligesom value- og size-faktoren baseret på en tværsnitsstrategi. Dvs. man sammenligner to grupper af aktier med hinanden i et tværsnit, frem for at kigge på individuelle aktier over tid (Ang, 2014, s. 235). Et eksempel på en operationalisering af denne faktor er at gå langt i de 10 pct. bedst performende aktier det seneste halve år, imens man samtidig går kort i de 10 pct. dårligst performende aktier.

Momentum-faktoren har historisk set været både size og value overlegen, når man kigger på akkumulerede afkast. Figur 4 er magen til figur 3 blot med den ene forskel, at momentum-faktoren, WML, fra Kenneth French's hjemmeside, er tilføjet. Ved tilføjelsen af WML, kan det næsten være svært at se forskellen mellem HML og SMB, netop fordi WML har et signifikant højere akkumuleret afkast. WML ender således med at have et akkumuleret afkast ca. 6,5 gange større end value-strategien ved udgangen af 2018. Tilsvarende er momemtum-faktoren også mere volatil, hvilket også delvist forklarer det højere afkast. Momentum er imidlertid ikke kun observeret for amerikanske aktier, men også i mange andre klasser af aktiver, bl.a. internationale aktier, statsobligationer, valutaer og råvarer jf. Asness et al. (2013).

[13] Litteraturen nævner forskellige længder på dette men ofte benyttes seks måneder.

Figur 4: Akkumulerede afkast for SMB (size), HML (value) og WML (momentum)



Egen fremstilling på baggrund af data fra Kenneth French's hjemmeside

Momentum-faktoren adskiller sig ikke kun fra de andre faktorer ift. afkast. Momentum kan nemlig ses som en pro-cyklisk investeringsmetode, hvor aktier der har gjort det godt købes af investorer med den forventning om, de kommer til at gøre det endnu bedre. En sådan strategi er imidlertid *destabiliserende* for aktiekurserne, hvorfor momentumstrategier vil være udsat for "korrektioner" hvor kurserne kan crashe og falde drastisk, jf. figur 4. Dette er anderledes for eksempelvis en valuestrategi, som kan betegnes som værende kontra-cyklisk. Dette skyldes, at ved valueinvestering vil investorer vente på, at aktiekursen er faldet tilstrækkeligt meget til, at aktien er blevet en value-aktie. Først når dette er sket, er den attraktiv for en valueinvestor. På denne måde er en valuestrategi modsat momentum, *stabiliserende* for aktiekurserne (Ang, 2014, s. 236). Momentum er ofte en faktor som tilføjes tre-faktormodellen af Fama & French (1993) jf. Carhart (1997)

<u>*Quality*</u>

Quality-faktoren har til formål at opfange merafkastet for aktier af "høj kvalitet" ift. markedet. Ligesom value kan quality spores tilbage til Graham et al. (1934), som skelnede mellem virksomheder af "high quality" og "low quality". I en senere bog, Graham (1965), nævner Benjamin Graham, hvordan bl.a. virksomheders dividende-udbetalinger kan agere som mål for quality. Sidenhen er der imidlertid foreslået rigtig mange forskellige kriterier for, hvad der definerer en qualityaktie, hvilket faktisk er en af udfordringerne ved denne faktor, og som sandsynligvis har været medvirkende til, at quality ikke har fået samme opmærksomhed som eksempelvis size, value og momentum. Quality er nemlig meget svær at definere konsistent og objektivt ud fra kvantitative indikatorer. Det er en subjektiv vurdering, som ikke

har en standard definition, hvilket har gjort faktoren svær at operationalisere i praksis. Af bud på forskellige quality træk hos virksomheder kan bl.a. nævnes deres konkurrenceevne, gennemsigtighed, vækst- og profitpotentiale, finansielle gearing, og egenkapitalforrentning (Bender et al., 2013, s. 27). I Fama & French (2015) udvider Fama & French deres tre-faktormodel fra 1993 med to yderligere faktorer, som falder under kategorien quality: profitabilitet (RMW) samt investeringsstrategi (CMA). Denne fem-faktormodel har dog ikke opnået samme anerkendelse som deres trefaktormodel foreslået i 1993.

Foruden markedsfaktoren, vil ovenstående fire faktorer, size, value, momentum og quality være de faktorer, der tages udgangspunkt i i afhandlingens analyse. Omend det anerkendes, at andre faktorer[14] kan eksistere og være relevante, vurderes at de førnævnte fire faktorer, på nuværende tidspunkt, har den største akademiske evidens. Indtil nu har fokus primært ligget på at præsentere de enkelte faktorer samt intuitionen bag disse forskellige strategier. I de følgende to afsnit drejes fokus over på, *hvorfor* der for nogle faktorer eksisterer et merafkast ift. markedet. Dette forklares typisk ud fra to forskellige teoretiske standpunkter, der i det følgende benævnes som hhv. rationel og adfærdsmæssig teori.

2.5 Den efficiente markedshypotese

Overordnet set skelnes der typisk mellem to forskellige teoretiske udgangspunkter ift. at forklare faktorers merafkast - en rationel og en adfærdsmæssig. I dette afsnit præsenteres *den efficiente markedshypotese*, da denne udgør et væsentligt led ift. det rationelle standpunkt, imens der i afsnit 2.6 drages paralleller til den adfærdsmæssige teori.

Økonomer der tror på den efficiente markedshypotese mener, at merafkastet ved faktorer er en kompensation for en systematisk risiko, som man eksponerer sin portefølje for. Den efficiente markedshypotese påstår, at prisen på et givet aktiv afspejler al tilgængelig information. Når ny information opstår, så vil denne nye information sprede sig så hurtigt, at det vil blive inkorporeret i prisen på aktivet uden forsinkelse (Malkiel, 2003). En af de første til at sætte prædikat på den efficiente markedshypotese var Fama (1970), som specificerede, hvornår et marked var efficient:

> *"A market in which prices always fully reflect available information is called efficient"* (Fama, 1970)

Fama (1970) specificerende dette argument yderlige ved at uddybe definitionen af "fully reflect" og foreslog en opdeling i tre grader, for at gøre hypotesen nemmere at teste empirisk. (1) Weak form efficiency der indebærer, at prisen på aktiver afspejler et informationssæt bestående udelukkende af historiske priser. Da resultaterne i Fama (1970) så ud til at understøtte denne form for efficiens, ændrede fokus sig til (2) semi-strong efficiency, som indebærer at priser afspejler alt offentligt tilgængeligt information herunder aktiesplits, årsrapporter, udstedelser af nye finansielle aktiver mm. Den sidste grad af efficiens kaldes (3) strong-form efficiency, hvor priser afspejler et informationssæt, som foruden at indeholde al offentlig information også indeholder relevant ikke-offentligt information, som eksempelvis insider-viden, som giver grupper af investorer monopolistisk adgang til relevant information, der kan have indflydelse på kursen (Fama, 1970, s. 388). Ud fra ovenstående definitioner argumenterer Fama (1970), at der ikke findes evidens for at forkaste EMH på weak og semi-strong niveau, imens der kun fremgår begrænset evidens imod hypotesen på strong-form niveau.

[14] Eksempelvis low-volatility og yield.

EMH er således tæt relateret til random-walk hypotesen, som kort fortalt påstår, at prisændringer er uafhængige og repræsenterer derfor fuldstændig tilfældige (random) afvigelser fra tidligere priser. Med andre ord vil prisen på et aktiv i morgen kun afhænge af den tilgængelige information i morgen, og ikke prisen i dag. For at få en bedre forståelse for random walk, er det også vigtigt at kende til konceptet "martingale", som i en statistisk kontekst, er en sekvens af tilfældige variable (stokastisk proces), for hvilken den betingede forventning til næste tal i sekvensen, på et givet tidspunkt, vil være lig den nutidige værdi i sekvensen. I forhold til aktiepriser formuleres dette som:

$$\mathbb{E}[P_{t+1}|P_t, P_{t-1}, ...] = P_t \tag{2.11}$$

$$\mathbb{E}[P_{t+1} - P_t|P_t, P_{t-1}, ...] = 0 \tag{2.12}$$

Hvor P_t er en stokastisk proces. Dette implicerer, at det bedste forecast af prisen på et aktiv i morgen, vil være aktivets pris i dag. Dette resulterer i følgende random-walk model for aktiepriser:

$$P_t = \mu + P_{t+1} + \varepsilon_t \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

Hvor μ er aktivets forventede prisændring (drift) og ε_t er modellens fejlled, som er uafhængigt og identisk fordelt med middelværdi 0 og varians σ^2.

Samuelson (1965) kombinerer, i sin artikel *"Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly"*, random walk og EMH ved at anvende "Law of Iterated Expectations" (se evt. appendiks B). Hermed viser han, at priser er "martingales" i et efficient marked. Ved at antage, at prisen på et aktiv, P_t til tid t er den rationelle forventning af noget "fundamental value", V^*, som er betinget af et informationssæt, I_t til rådighed til tid t. Så opnås:

$$P_t = [V^*|I_t] = \mathbb{E}_t V^* \tag{2.14}$$

$$P_{t+1} = \mathbb{E}[V^*|I_{t+1}] = \mathbb{E}_{t+1} V^* \tag{2.15}$$

Ved at anvende "Law of Iterated Expectations", så vil informationssættet til tiden t, I_t også være inkluderet i informationssættet til tiden $t+1$, I_{t+1}. Dvs. $I_t \subset I_{t+1}$, hvormed $E_t[E_{t+1}[V^*]] = E_t[V^*]$. Ved at tage forventningen til forskellen mellem ligning 2.14 og 2.15, så opnår vi:

$$\mathbb{E}_t[P_{t+1} - P_t] = \mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{t+1}[V^*] - \mathbb{E}_t[V^*]] = 0 \tag{2.16}$$

Ligning (2.16) udtrykker essensen i EMH, og viser, at forventningen til en ændring i prisen i $t+1$ er nul, hvilket betyder, at den fremtidige pris ikke kan forecastes på baggrund af informationssættet, I_t, der er til rådighed i periode t. Derfor må priserne afspejle al tilgængelig information, som betyder, at en professionel investor, der anvender de mest avanceret "state of the art" analyser, *ikke* bør være i stand til systematisk at opnå højere afkast end eksempelvis en abe, der udvælger tilfældige aktiver såfremt, at begge porteføljer indeholder samme mængde risiko. Dette skyldes, at al relevant information bliver afspejlet i aktivets pris så hurtigt, at en investor ikke kan nå at handle på baggrund af det (Malkiel, 2003; Campbell et al., 1997). Hvis EMH derfor holder, så vil fonde, der anvender *active management* spilde deres penge, fordi dette ikke vil skabe en merværdi for fonden.

Det er vigtigt at huske på, at ovenstående resultater er ved at være gamle, og synet på "det efficiente marked" har derfor også ændret sig i moderne tid. Faktisk påstår Ang (2014) at: *"Today, economists do not*

believe in perfectly efficient markets." og at de "klassiske" tre grader af efficiens fremført i Fama (1970) er forældede i en moderne kontekst. I relation hertil er den mere moderne forestilling en slags "near-efficient markets" udviklet af Grossman & Stiglitz (1980) i artiklen "On the impossibility of informationally efficient markets"[15]. I artiklen beskriver de bl.a. en verden, hvor markedet stort set er efficient, som henleder til et gådefuldt spørgsmål: De antager således, at det ikke er gratis at indsamle relevant information og handle på baggrund heraf, som det er tilfældet i praksis. Hertil kan man stille spørgsmålet - hvis alt information afspejles i prisen på aktiver, hvorfor er der så overhovedet nogen, som er villige til at betale for den information? På den anden side, hvis ingen betaler for informationen, hvordan kan denne så afspejles i priserne og gøre markederne efficiente? På baggrund heraf formulerer de en model, hvori markeder er "near-efficient", og som kan forklare hvorfor der i den virkelige verden findes "active managers" og individer, villige til at betale for denne information. Det relevante er her, at markeder kun er "near-efficient" hvorfor active managers leder efter såkaldte "lommer" af inefficiens i markedet, som tillader dem at opnå et merafkast (Ang, 2014, s. 209).

2.6 Forklaring af merafkastet ved faktorer

Hele diskussionen omkring, hvorvidt markeder er efficiente eller ej er relevant ift. at forklare, hvorfor der for visse faktorer eksisterer et merafkast ift. markedet. Der findes overordnet set to forskellige forklaringer på, hvad der driver afkastet på faktorer, som bunder i hver sit teoretiske udgangspunkt - hhv. rationel og adfærdsmæssig teori. Omfanget af litteratur som beskæftiger sig med risikopræmier og i særdeleshed, hvordan disse kan forklares er imidlertid meget stor. I dette afsnit gives blot en kort indsigt i de to forskellige teoretiske retninger, og der gives enkelte eksempler på forklaringer fra begge teorier.

2.6.1 Rationel teori

Merafkastet for faktorer kan ifølge rationel teori forklares ved, at markederne er efficiente (eller meget nær efficiente) jf. afsnit 2.5. Dette er ensbetydende med at faktorer afspejler en systematisk risiko som pr. definition ikke kan bortdiversificeres, hvorfor investor skal kompenseres for disse kilder af risiko, i form af en risikopræmie. Denne forklaring er således konsistent med EMH, som antager efficiente markeder og rationelle investorer og er desuden i overensstemmelse med APT fra Ross (1976). Eksempelvis argumenterer nogle for, at risikopræmien for small cap aktier skyldes, at disse virksomheder er mindre likvide (Liu, 2006) og gennemskuelige (Zhang, 2006) end større virksomheder. Andre argumenterer, at faktorer som size, value og momentum er mere følsomme over for shocks i væsentlige makroøkonomiske faktorer såsom vækst og inflation (Winkelmann et al., 2013). Netop pga. denne følsomhed, bærer faktorerne en risikopæmie som kompensation for denne eksponering over for systematisk risiko (Bender et al., 2013, s. 9). Ovenstående repræsenterer med andre ord, den "klassiske" tilgang til moderne investeringteori og faktorinvestering.

2.6.2 Adfærdsmæssig teori

I den anden ende af spektret findes en forklaring, som stiller sig i relativ stor kontrast til rationel teori. Denne tager udgangspunkt i adfærdsmæssig teori og mener, at kilden til faktorers merafkast skyldes *"systematiske fejl"* begået af investorer forklaret ved adfærdsmæssige bias, og fordi mennesker er underlagt forskellige restriktioner. Litteratur inden for behavioral finance foreslår, at disse bias skyldes kognitive og

[15]Der også var en del af den samling af papirer, som Stiglitz vandt nobelprisen for i 2001

følelsesmæssige svagheder. Af eksempler herpå kan bl.a. nævnes "herd-instinct" - når investorer køber eller sælger et aktiv fordi mange andre gør det samme. Frygten for at blive udelukket fra en profitabel investering, kan typisk forklare denne adfærd. Andre eksempler indebærer, investorer som overreagerer på nyheder, overvurderer deres egen dømmekraft eller har præferencer for "familiære" investeringer, som eksempelvis aktier i det firma de arbejder i eller aktier fra det land de bor i (home bias). Myopic loss aversion (når man er stærkt fokuseret på den kortsigtede performance af ens investeringer) kan også være skyld i, at investorer begår systematiske fejl. Tilhængere af denne adfærdsmæssige teoriretning mener, at hvis et tilstrækkeligt antal investorer udviser ovenstående adfærdstræk, og omkostningerne forbundet med at arbitrere disse bias væk er uoverkommelige for de rationelle investorer, så kan det føre til anomalier på de finansielle markeder, herunder risikopræmier ved faktorinvestering (Bender et al., 2013, s. 9).

2.6.3 Forskellige forklaringer til forskellige faktorer

Hvilken af de ovenstående teorier, som tilbyder den bedste forklaring afhænger naturligvis af brillerne der læser, men meget tyder på, at sandhedens skal findes ved en kombination af de to. For nogle faktorer tilbyder den rationelle teori meget overbevisende evidens, imens den for andre kommer en smule til kort. Det samme gør sig gældende for den adfærdsmæssig teori. Nedenfor følger et par eksempler på de to retningers forklaring af faktorer.

Ifølge rationel teori skyldes merafkastet for value-aktier, at investor eksponeres over for systematisk risiko, som ikke kan diversificeres væk. Zhang (2006) peger på, at denne risiko bl.a. skal findes i, at value virksomheder er mindre fleksible og generelt dårligere til at tilpasse sig ufordelagtige økonomiske situationer sammenlignet med growth virksomheder, som betyder at de er belastet af mere uproduktiv kapital i dårlige tider. Growth virksomheders muligheder for at skifte virksomhedsaktiviteter til profitable områder i dårlige tider er således bedre end de er for value virksomheder. En af forklaringerne hertil er ifølge Zhang, at human kapital for growth virksomheder ofte udgør en større andel af den samlede kapital end for value virksomheder. En anden forklaring, som også blev nævnt i indledningen til dette afsnit er, at value virksomheder reagerer hurtigere på shocks i realøkonomiske variable, end growth virksomheder, jf. Winkelmann et al. (2013) (Bender et al., 2013, s. 10).

I en adfærdsmæssig kontekst findes der en række forskellige forklaringer af merafkastet ved value-faktoren. En af disse foreslås af Barberis & Huang (2001) og tager udgangspunkt i loss aversion og mental accounting bias. Her argumenteres for, at der eksisterer loss aversion bias blandt investorer, da mange er mindre bekymrede for fremtidige tab på de aktiver, som i den seneste tid har performet godt (growth-aktier), fordi disse tab overskygges af tidligere gevinster. Derfor opfattes denne type af aktier blandt investorer som mindre risikable, hvorfor fremtidige cash-flows diskonteres med en lavere rate. Det modsatte gør sig gældende for et aktiv, som for nyligt har klaret sig dårligt (som ofte er tilfældet ved value-aktier) (Bender et al., 2013, s. 10-11). Adfærdsmæssig teori påpeger således, at value-aktier ikke fundamentalt set er mere risikable end growth-aktier, men er imidlertid "billige", fordi investorer ikke anerkender aktiens vækstpotentiale. Omvendt så er growth-aktier dyrere, fordi investorer er for positivt stemt overfor disse (Ang, 2014, s. 233).

Når det kommer til forklaring af momentum-faktorens risikopræmie, tilbyder den rationelle teori ikke en ligeså overbevisende forklaring som ved value. Typisk argumenteres der for, at en del af præmien kan forklares ved, at momentum-aktier er korreleret med makro-faktorer, som er en kilde til systematisk risiko. Det er imidlertid de adfærdsmæssige teorier, som for momentum-faktoren er mest citeret i litteraturen. Disse peger typisk på, at investorer er biased ift. at tolke information og handle på baggrund heraf. Dette fører

til to adfærdsmæssige forklaringer af momentum - overreaktion (jf. Barberis et al. (1998)) og underreaktion (jf. Hong & Stein (1999)) på ny information. Eksempelvis kan en forsinket overreaktion på gode nyheder omkring en aktie medføre, at prisen konsekvent stiger. Alternativt kan investorer undervurdere gode nyheder, som får kursen til at stige, men ikke nok til fuldt at reflektere de gode nyheder. I takt med, at investorer bliver klogere på nyheden vil prisen stige yderligere de følgende perioder og skabe momentum. De to forklaringer diskuteres flittigt i litteraturen, omend de begge tager udgangspunkt i adfærdsmæssig teori. Mængden af litteratur på området er desuden meget stor, og vil ikke uddybes yderligere i dette speciale.

2.7 Faktorinvestering i Norges statsejede pensionsfond

Norges Bank Investment Management (NBIM) har til opgave at forvalte Norges indtægter fra olie og gas på en ansvarlig måde, således denne formue kommer fremtidige og nuværende generationer af norges befolkning til gavn. I 2009 udgav Ang et al. (2009) en rapport, der havde til formål at undersøge tre emner omkring NBIM. Hovedformålet var at undersøge, hvorvidt fondens *active management*[16] tilførte værdi i fonden. I henhold til at besvare dette, kom de ind på tre problemstillinger: 1) hvorvidt EMH holder, fordi hvis dette er tilfældet, så kan active management kun tilføje lidt eller ingen værdi til fonden 2) En detaljeret analyse af det merafkast som active management har skabt for fonden 3) En anbefaling til fremtidige strategier til fonden. Til disse tre problemstillinger når Ang et al. (2009) frem til følgende.

1. Det seneste akademiske litteratur omkring EMH anerkender, at der er markedsimperfektioner, omkostninger ved indhentning af information samt andre kapitalbegrænsninger. Derfor kan Ang et al. (2009) ikke anbefale en ren passiv indeksstrategi for fonden, på trods af, det er svært at finde active managers, der leverer et systematisk afkast, som slår benchmarken, markedet.

2. Ved undersøgelse af NBIMs historiske afkast som resultat af active management, så viser det sig, dette har spillet en meget lille rolle for fondens samlede afkast. Den inkrementelle positive rolle, som den alligevel har haft, skyldtes fondens ubevidste eksponering over for systematiske risikofaktorer. Dette var samtidig også årsagen til, at afkastet, som active management stod for i årene 2008-2009, var lavere end benchmarken.

3. Eksponeringen over for risikofaktorer, som fonden ubevidst havde gjort, er faktisk en passende langsigtet strategi for fonden. Denne eksponering over for systematiske risikofaktorer bør dog indgå i benchmark og ikke som en del af active management.

Denne enkle opsummering er taget med for at understrege vigtigheden af faktorinvestering for institutionelle såvel som individuelle investorer i henhold til risikostyring. Norges fond er i stand til at være eksponeret over for systematiske risikofaktorer i længere perioder end den almene investor, da man må antage, at denne er i stand til at klare store systematiske tab som i 2008-2009. Samtidig viste det sig, at det active management som fonden havde foretaget, kunne være opnået mere passivt og billigere vha. faktoreksponering. Eksponering over for faktorer kan derfor ses som et alternativ til active management, da faktoreksponering er væsentligt billigere i henhold til transaktionsomkostninger og gebyrer til fonden. Det næste kapitel vil imidlertid tage et skridt væk fra faktorinvestering og i stedet komme med bud på, hvordan sammensætningen af aktiver i en given investors portefølje bør se ud i forhold til risikostyring af sin portefølje.

[16] *Active management* defineres som porteføljeforvalteres forsøg på aktivt at outperforme et givet indeks ved selv at udvælge aktiverne der indgår i porteføljen.

Kapitel 3

Porteføljeallokeringsstrategier

I dette kapitel præsenteres tre forskellige porteføljeallokeringsstrategier, som danner grundlaget for de forskellige backtests, der udarbejdes i kapitel 4. Disse strategier er henholdsvis equal weights (EW), equal risk contribution (ERC) samt global minimum variance (MV). Både MV og EW har i længere tid været populære værktøjer blandt akademikere og investorer af forskellig størrelse, da udregningen er simpel og ikke afhænger af forventede afkast, og derfor antages at være robuste. MV er den specifikke portefølje på den efficiente rand, som på et ex-ante grundlag minimerer porteføljens samlede varians. MV har dog den ulempe, at den ofte lider af stor koncentration af enkelte aktiver, med lav marginal risiko, hvormed der opgives noget af diversifikationspotentialet. Den omvendte problemstilling gør sig gældende for EW. Her vægtes alle aktiver med samme andel, $(1/n)$, hvormed koncentrationen af aktiver minimeres, dog tages der imidlertid ikke højde for varians og kovarians imellem aktiverne. En nyere strategi, der lægger sig mellem MV og EW er equal risk contribution foreslået i Maillard et al. (2008). Denne har til formål at tage det "bedste" fra MV og EW. Dette vil sige, at ERC tager højde for risikoen for det enkelte aktiv og kovarianserne aktiverne imellem, men samtidig også kombinerer aktiverne på sådan en måde, at man ikke opnår store koncentrationer af enkelte aktiver. De tre strategier gennemgås nedenfor.

3.1 Equal Weights

Equal weights, der også går under navnet $1/n$ strategien, går i al sin enkelthed ud på altid at holde samme vægt på tværs af alle aktiver, som indgår i investorers porteføljer. Dermed afhænger strategien hverken af aktivernes varians, korrelation eller forventede afkast. Duchin & Levy (2009) kalder denne strategi "The Talmudic rule" i deres artikel "Markowitz Versus the Talmudic Portfolio Diversification Strategies", da den jødiske bibel, ("Babylonian Talmud") kommer med følgende "anbefaling" ift. diversifikation:

> *"A man should always place his money, one third in land, a third in merchandise, and keep a third in hand."* (Duchin & Levy, 2009)

Dermed kan principperne fra denne porteføljestrategi, med lidt god vilje, dateres helt tilbage fra år 1500 f.kr, hvilket også kommer til udtryk ved dens enkle måde at diversificere på. Hvorom alting er, så har denne strategi ofte empirisk outperformet Markowitz' mere teoretiske mean-variance strategi, der ellers har til formål at maksimere Sharpe-ratioen for en givet portefølje. Samtidig har EW ofte vist sig at være meget effektiv i out-of-sample tests. DeMiguel et al. (2007) fandt, at den outperformede stort set alle porteføljestrategier den var oppe imod. Heriblandt mean-variance, MV, MV med shortselling, value

weighted porteføljer samt andre strategier. Den blev heri dog ikke testet mod ERC strategien, som gøres i denne afhandling.

3.2 Equal Risk Contribution

Equal risk contribution går i bund og grund ud på, at man i stedet for at allokere sine aktiver på baggrund af kapital, som ved equal weights, allokerer aktiverne på baggrund af aktivernes totale risikobidrag til porteføljen. Dette sker ved, at hvert aktiv, i, bidrager med samme totale mængde risiko, $\sigma_i(\mathbf{w}) = w_i \times \partial_{w_i}\sigma_p(\mathbf{w})$, til porteføljen, hvor $\mathbf{w}$ og σ defineres nedenfor. Strategien afhænger desuden ikke af gennemsnitlige forventede afkast, som er tilfældet ved en mean-variance analyse.

Lad os betragte en portefølje af vægte, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ...w_n)$ for n risikofyldte aktiver. Lad σ_i^2 være variansen til aktiv i og σ_{ij} være kovariansen mellem aktiv i og aktiv j. Σ er her defineret som kovariansmatricen. Lad $\sigma_p(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}^\intercal \Sigma \mathbf{w}} = \Sigma_i w_i^2 \sigma_i^2 + \Sigma_i \Sigma_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij}$ være porteføljens risiko. Den marginale risikotilføjelse for et givet aktiv, $\partial_{w_i}\sigma_p(\mathbf{w})$, er dermed givet ved følgende formel:

$$\partial_{w_i}\sigma_p(\mathbf{w}) = \frac{\partial \sigma_p(\mathbf{w})}{\partial w_i} = \frac{w_i \sigma_i^2 + \Sigma_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_p(\mathbf{w})} \tag{3.1}$$

Af ovenstående ligning ses, hvordan risikoen for porteføljen ændrer sig, når der ændres marginalt på en af vægtene til aktiverne i porteføljen, w_i. Ved ERC er det dog det totale risikobidrag for aktiv, i, der er interessant og notationen for dette er således $\sigma_i(\mathbf{w}) = w_i \times \partial_{w_i}\sigma_p(\mathbf{w})$. Heraf fremgår, at det totale risikobidrag til aktiv i er givet ved det marginale risikobidrag til aktiv i, men med vægten til aktiv i ganget på. Porteføljevariansen bliver således givet ved ligning (3.2)

$$\sigma_p(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\mathbf{w}) \tag{3.2}$$

Ovenstående viser, at porteføljens totale risiko er givet ved summen af de enkeltes aktivers totale risikobidrag.

Yderligere specifikation af ERC

Formålet med ERC er at danne en risikobalanceret portefølje, således at hvert aktiv bidrager med præcis lige meget risiko til porteføljen. Ligesom i den senere analyse i dette speciale, så pålægger vi os selv den restriktion, at man ikke kan gå kort i aktiver. Dermed skal porteføljevægtene ligge mellem 0 og 1 udtrykt ved $0 \leq w \leq 1$ for $i = 1, ...n$. Denne antagelse er begrundet ved, at det er de færreste investorer, der har mulighed for at gå kort i aktier jf. afsnit 4.2. Derudover ønsker dette speciale at sammenligne med andre porteføljeallokeringsmetoder, hvoraf det ikke er alle metoder, der tillader at gå kort i aktier, herunder equal weights. På baggrund af ovenstående restriktion, opstilles ligning (3.3), som angiver de optimale porteføljevægte, $\mathbf{w}^*$, for en ERC strategi.

$$\mathbf{w}^* = \left\{ \mathbf{w} \in [0,1]^n : \sum w_i = 1, w_i \times \partial_{w_i}\sigma_p(\mathbf{w}) = w_j \times \partial_{w_j}\sigma_p(\mathbf{w}) \text{ for alle } i,\ j \right\} \tag{3.3}$$

Ud fra ovenstående kan det dermed ses, at vægtenes numeriske værdi skal ligge mellem 0 og 1 samt summere til 1. Derudover fremgår, at vægten til aktiv i ganget med aktiv i's marginale risiko bidrag

til porteføljen skal være ækvivalent med vægten til aktiv j ganget med aktiv j's marginale risiko bidrag til porteføljen for alle aktiver af både i og j. Med andre ord skal de enkelte aktiver *totale risikobidrag* være lig hinanden.

For bedre at forstå ovenstående præsenteres et simpelt eksempel med kun to aktiver, og to vægte $\mathbf{w} = (w, 1-w)$. Man kunne gå yderligere i dybden med ERC og vise teoretiske eksempler, hvor $n > 2$ men i dette speciale er det nok at forstå intuitionen bag ERC, hvortil eksemplet med $n = 2$ er tilstrækkeligt:

$$\begin{bmatrix} w \times \partial_w \sigma(w) \\ (1-w) \times \partial_{(1-w)} \sigma(1-w) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_p(\mathbf{w})} \begin{bmatrix} w^2\sigma_1^2 + w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \\ (1-w)^2\sigma_2^2 + w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Kovariansen kan beskrives ved, $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$, hvor ρ angiver korrelationen mellem de to aktiver.

For at optimere ovenstående i henhold til ERC, skal der findes en vægt, hvorved aktiv 1's totale risikobidrag er lig aktiv 2's totale risikobidrag. Dette kan opskrives matematisk ved:

$$w^2\sigma_1^2 = (1-w)^2\sigma_2^2 \tag{3.5}$$

Hvor løsningen for w dermed gives ved:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{3.6}$$

Vektoren for de optimale vægte er således:

$$\mathbf{w}^* = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \tag{3.7}$$

Af ovenstående ses, at den optimale løsning for vægtene ved $n = 2$, tager ERC kun udgangspunkt i aktivernes varians og tager dermed ikke højde for korrelationen aktiverne imellem.

I tilfældet hvor $n > 2$ kræver løsningen af ERC en numerisk algoritme. Den foretrukne metode er typisk at benytte *Sequential Quadratic Programming* (SQP), som ikke uddybes yderligere i dette speciale. For en mere teknisk gennemgang af løsningen af ERC for $n > 2$ henvises til Maillard et al. (2008).

Tre kvalitative eksempler

- **Forskellig volatilitet samme korrelation**
  Tager man udgangspunkt i n aktiver med forskellig volatilitet, men samme korrelation aktiverne imellem, vil resultatet af ERC blive, at man holder en mindre andel af aktiver med høj volatilitet og større andel i aktiver med lav volatilitet.

- **Samme korrelation og volatilitet**
  Hvis korrelationen og volatiliteten var identisk for alle aktiver, vil ERC ikke adskille sig fra equal weights, og man vil derfor holde $1/n$ i alle aktiver.

- **Høj korrelation og høj volatilitet**
  Hvis korrelationen for visse aktiver i porteføljen er høj imellem hinanden, så vil ERC nedjustere vægten på disse aktiver. Det samme vil gøre sig gældende ved høj volatilitet på aktiverne[1].

[1] For en detaljeret og formel gennemgang af nedenstående, henvises til Maillard et al. (2008)

Ovenstående er beskrevet således, der er givet en intuitiv forklaring bag ERC, der er tilstrækkeligt i henhold til at forstå dette speciales resultater. For yderligere detaljer omkring strategien og dens karakteristika henvises til Maillard et al. (2008).

3.3 Global Minimum Variance

Global Minimum Variance strategien minder i høj grad om mean-variance, jf. afsnit 2.1, dog med den undtagelse, at MV er den eneste portefølje på den efficiente rand, der ikke afhænger af aktivernes forventede afkast. Denne sektion vil derfor være relativ kort. Afsnittet er skrevet med inspiration fra Kempf & Memmel (2006).

Den globale minimum varians portefølje er den portefølje med lavest mulig varians for en givet kovariansmatrice, Σ. MV løser derfor følgende minimeringsproblem:

$$\min_{(\mathbf{w}=w_1,\ldots,w_n)^\intercal} \quad \mathbf{w}^\intercal \Sigma \mathbf{w} \qquad s.t \quad \mathbf{w}^\intercal \mathbf{1} = 1 \tag{3.8}$$

Her er $\mathbf{1}$ en kolonne vektor med passende dimensioner, der indeholder 1-taller. $\mathbf{w}$ er en vektor bestående af porteføljevægtene, $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)^\intercal$. Vægtene for den globale minimum varians portefølje $\mathbf{w}_{MV}$ er givet ved:

$$\mathbf{w}_{MV} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\intercal \Sigma^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.9}$$

Det forventede afkast μ_{MV} samt variansen, σ^2_{MV} til minimum varians porteføljen, $\mathbf{w}_{MV}$, er henholdsvis givet ved:

$$\mu_{MV} = \mu^\intercal \mathbf{w}_{MV} = \frac{\mu^\intercal \Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\intercal \Sigma^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.10}$$

$$\sigma^2_{MV} = \mathbf{w}^\intercal_{MV} \Sigma \mathbf{w}_{MV} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\intercal \Sigma^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.11}$$

MV udregnes således udelukkende på baggrund af en kendt kovariansmatrice, som estimeres på baggrund af ens data. Den primært forskel på MV og ERC er, at ved MV sættes aktivernes marginale risikobidrag lig hinanden, imens det for ERC er aktivernes totale risikobidrag der sættes lig hinanden.

3.4 Opsummering

Som afrunding af dette kapitel, er det interessant at sammenligne de de tre ovennævnte strategier.

$$\begin{aligned}
&Equally\,Weighted\,(EW) && w_i = w_j \\
&Global\,Minimum\,Variance\,(MV) && \partial w_i \sigma_p(\mathbf{w}) = \partial w_j \sigma_p(\mathbf{w}) \\
&Equal\,Risk\,Contribution(ERC) && w_i \times \partial w_i \sigma_p(\mathbf{w}) = w_j \times \partial w_i \sigma_p(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

Ud fra ovenstående ses tydeligt, at EW klart er den mest enkle strategi mellem de tre, da denne ikke tager højde for volatiliteten for det enkelte aktiv. Samtidig ses det, at MV minder meget om ERC, dog med den undtagelse, at det ved MV er aktivernes marginale risikobidrag, der skal være lig hinanden, imens det ved ERC er det totale risikobidrag. Dermed skal ERC ses som en bro mellem EW og MV, hvilket også var målet med strategien ifølge Maillard et al. (2008). Det er således interessant at se, hvilke af disse

allokeringsstrategier, der performer bedst ved at teste dem imod hinanden. I henhold til ovenstående teoretiske egenskaber, så bør testen blandt disse allokeringsstrategier afspejle følgende:

$$\sigma_{MV} \leq \sigma_{ERC} \leq \sigma_{EW} \tag{3.12}$$

Derfor bør man umiddelbart forvente, at EW er den mest volatile strategi af de tre, da denne ikke tager højde for varians og kovarianser mellem aktiverne. Samtidig bør det ligeledes være den med det højeste samlede afkast, netop fordi denne strategi formentlig holder den højeste vægt i de mere volatile aktiver. ERC bør dernæst komme, da denne allokerer vægtene efter aktivernes totale risikobidrag. Den mindst volatile strategi bør være MV grundet dens marginale varians tilgang. Selvom det formentlig vil være strategien med den laveste varians, så er det ikke nødvendigvis den mest veldiversificeret, da den formentlig vil medføre en stor koncentration af de mindst risikofyldte aktiver. Årsagen hertil er, at man kan tilføje relativt meget af eksempelvis obligationer, før den marginale varians vil tilsvare et mere risikofyldt aktiv som S&P 500. Der er valgt ikke at teste en mean-variance strategi, da der er tilpas meget litteratur der kritiserer dennes resultater, heriblandt kan nævnes Cazalet & Roncalli (2014) samt Ang (2014). Mean-variance afhænger desuden af aktivernes forventede gennemsnitlige afkast, som kan være meget problematiske at estimere. Mean-variance er samtidig særdeles sensitiv i de parameter-værdier, man her angiver, og dette kan lede til store ændringer i sammensætningen af porteføljens aktiver. Porteføljestrategierne, der er valgt i dette speciale må også anses, som værende mere robuste, da de netop ikke kræver estimerede parameter-værdier som mean-variance, men i stedet kun en estimeret ex ante kovariansmatrice Maillard et al. (2008). Der er ligeledes kun valgt at tage udgangspunkt i disse tre strategier, da DeMiguel et al. (2007) viste, at EW outperformede stort set alle strategier i forskellige perioder på mellem 20 og 40 år med forskellige antal af totale aktiver. ERC var dog ikke inddraget i dette papir, hvilket gør den interessant.

Kapitel 4

Backtest af allokeringsstrategier

I dette afsnit opstilles en række backtests af de tre porteføljeallokeringsstrategier præsenteret i forrige afsnit: equal weights (EW), equal risk contribution (ERC) samt global minimum variance (MV). I afsnit 4.1 lægges der ud med en backtest (1.0) for fire brede aktiver, der repræsenterer en veldiversificeret portefølje, af hhv. amerikanske statsobligationer, virksomhedsobligationer, aktier samt internationale aktier. Herefter diskuteres i afsnit 4.2 nogle af de udfordringer, der opstår ved at implementere, ikke kun faktorinvestering, men også de forskellige porteføljestrategier, i praksis. På baggrund heraf udarbejdes i afsnit 4.3 en ny backtest (2.0), hvor porteføljen udvides med fire nye aktiver, der repræsenterer amerikanske aktier, der er eksponeret over for hver sin risikofaktor (size, value, momentum og quality). Denne har således til formål at undersøge, hvorvidt faktorprodukter kan bidrage positivt til en allerede veldivercificeret portefølje, når der tages højde for udfordringerne præsenteret i afsnit 4.2. I backtest 1.0 og 2.0 tages ikke højde for transaktionsomkostninger i udregningen af de enkelte porteføljeafkast. Denne problemstilling bliver imidlertid taget op i afsnit 4.4, hvor forholdet mellem omsætningshastighed og transaktionsomkostninger diskuteres, og der opstilles to yderligere backtests (hhv. 1.1 og 2.1). Disse forsøger at inkorporere transaktionsomkostningers betydning i de respektive backtests. I afsnit 4.5 analyseres rebalanceringsfrekvensens betydning for de enkelte porteføljestrategiers performance. Kapitlet afrundes med afsnit 4.6, som diskuterer afhandlingens fundne resultater. Kapitel 4 er altså essentielt ift. at besvare afhandlingens problemformulering.

4.1 Backtest 1.0: En veldiversificeret portefølje

Den første backtest tager udgangspunkt i data for fire brede aktiver, som repræsenterer hver sin klasse af aktiver: Amerikanske statsobligationer, virksomhedsobligationer, aktier samt internationale aktier. Når en sådan backtest laves i litteraturen, benyttes typisk teoretiske indeks, som ikke er investerbare i praksis. Da dette speciale har fokus på den praktiske implementering af investering, vil der i så høj grad som mulig benyttes aktiver, som reelt set er investerbare i praksis, bl.a. ved at benytte ETF's der søger at tracke et givet teoretisk indeks. På denne måde bliver analysen mere virkelighedsnær, hvilket er i overensstemmelse med specialets problemformulering, og samtidig adskiller sig fra meget af den eksisterende litteratur på området. Aktiverne der indgår i den første backtest er:

- BOND variablen indeholder månedlige afkast for "iShares 7-10 Year Treasury Bond ETF" (IEF), der søger at tracke investeringsresultater for amerikanske statsobligationer med en resterende løbetid på mellem syv og 10 år. Førsteprioriteten var at finde en bredere ETF, der trackede hele det amerikanske obligationsmarked uden en specificeret løbetid, som eksempelvis "iShares U.S. Treasury Bond ETF"

(GOVT). Dog lykkes det ikke at finde en sådan ETF med tilstrækkelig historisk data. IEF blev udvalgt da denne 1) tracker GOVT tættest sammenlignet med andre ETF's 2) er den tredjestørste U.S. Treasury ETF målt på værdien af aktiver under forvaltning og 3) har den længste datahistorik (starter i 2002).

- CORP variablen indeholder månedlige afkast for "iShares iBoxx $ Investment Grade Corporate Bond ETF" (LQD), der søger at tracke investeringsresultater for et bredt indeks bestående af "Investment Grade" virksomhedsobligationer (dvs. med kreditvurdering BBB- eller højere på Standard & Poor's kreditvurderingsskala).

- S&P variablen indeholder månedlige afkast for "iShares Core S&P 500 ETF" (IVV), som tracker det amerikanske S&P 500 indeks, der inkluderer de 500 førende amerikanske large-cap aktier. ETF'en har således til formål at repræsentere præstationen på det amerikanske aktiemarked.

- EAFE variablen indeholder månedlige afkast for "iShares MSCI EAFE ETF" (EFA), som tracker MSCI EAFE Index, der inkluderer large- og mid-cap aktier på tværs af 21 udviklede markeder verden over eksklusiv USA og Canada. Dermed har ETF'en til formål at repræsentere præstationen på internationale, udviklede aktiemarkeder i Europa, Mellemøsten samt Australien.

Ovenstående ETF's er udvalgt på baggrund af en række kriterier, hvor det vigtigste har været alderen på de enkelte ETF's, da vi ønsker at backtesten som minimum skal starte et par år før finanskrisen i 2008. Derudover har vi gået efter ETF's med stor markedsværdi og lave tracking errors, etableret af anerkendte investeringsforeninger med forholdsvis lave expense ratios. Her viste det sig at være iShares ETFs, der bedst imødegik vores krav. iShares formidles og udbydes af BlackRock, som pt. er verdens største kapitalforvalter, der i april 2019 havde aktiver under forvaltning til en samlet værdi af ca 6.500 milliarder USD. Alle fire ETF's er total return indeks hvilket indebærer, at der foruden kapitalgevinster og -tab, antages at udbytte, kupon- og udbetalinger geninvesteres i de respektive indeks. Dette vurderes at give et mere retvisende billede af præstationen for en givet ETF, sammenlignet med et rent prisindeks. Afkastene i de fire variable er udregnet på baggrund af månedlige priser i perioden 31/12/2002 til 31/12/2018. Denne periode er valgt, da der for BOND og CORP ikke eksisterer data før 2002. Omend denne periode med fordel kunne have været længere, vurderes den stadig som værende passende for en backtest, og formodes at opfange flere stadier i konjunkturcyklussen. Alt data er hentet fra Thomson Reuter's Eikon (tidl. Datastream).

Da der er forskel på, hvor omkostningstunge de forskellige ETF's er, er der i udregningen af de respektive afkast korrigeret for disse omkostninger ud fra de enkelte ETF's expense ratioer (ER). ER indeholder bl.a. administrationsgebyrer, skatteomkostninger samt andre omkostninger forbundet med at forvalte den enkelte ETF. S&P har den laveste ER på 0,04 pct. imens EAFE har den højeste på 0,31 pct. BOND og CORP har begge en ER på 0,15 pct. Metoden for korrigering vises i ligning (4.1):

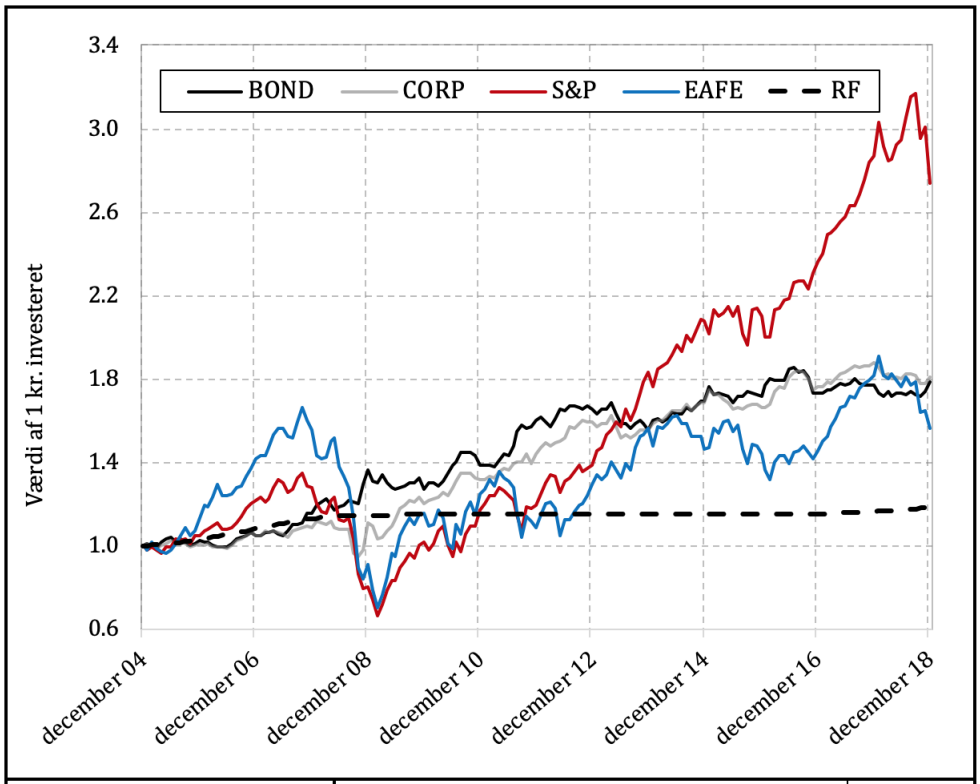
$$r_i^* = r_i - ((1 + ER)^{1/12} - 1) \tag{4.1}$$

Hvor r_i angiver det månedlige afkast for det enkelte aktiv, og r_i^* angiver afkastet korrigeret for ER.

Figur 5 lister de gennemsnitlige månedlige afkast, standardafvigelser, Sharpe-ratioer samt plotter de akkumulerede afkast for 1 kr. investeret i januar 2005 til december 2018 for de fire beskrevne aktiver, samt for variablen, RF, som er renten på one-month U.S. Treasury Bills, der benyttes som proxy for den risikofrie

rente.[1] Figuren viser, at aktieindeksene S&P og EAFE har de største gennemsnitlige afkast, men som kommer på bekostning af en højere standardafvigelse, hvilket ikke er overraskende. Det er heller ikke overraskende at, BOND, der repræsenterer amerikanske statsobligationer, har det laveste gennemsnitlige afkast og standardafvigelse imens CORP har lidt højere værdier for begge parametre.

Figur 5: Akkumulerede afkast for fire brede aktiver og den risikofrie rente



	BOND	*CORP*	*S&P*	*EAFE*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.36%	0.37%	0.68%	0.39%	0.10%
Standardafvigelse	1.77%	2.05%	3.97%	4.91%	0.14%
Akkumuleret afkast	1.79 kr.	1.81 kr.	2.74 kr.	1.56 kr.	1.18 kr.
Sharpe-ratio	0.15	0.13	0.15	0.06	-

Egen fremstilling

Kigger man udelukkende på Sharpe-ratioen som mål for performance ses, at BOND og S&P opnår det bedste forhold mellem afkast og risiko med en ratio på 0,15, imens CORP er lige i hælene på 0,13. EAFE har for den udvalgte periode den laveste Sharpe-ratio på 0,06. Selvom EAFE outperformede S&P i årene op til krisen, samt i de første år efter krisen, har udviklingen i internationale aktier haft stagnerende tendenser i de seneste år, sammenlignet med amerikanske aktier. Dette slår ud i et højere månedligt afkast og lavere risiko for S&P ift. EAFE og dermed også en væsentlig højere Sharpe-ratio. Selvom BOND og S&P har samme Sharpe-ratio er det vigtigt at huske på, at en forholdsvis lille forskel i afkast over en længere periode, kan have stor betydning for det akkumulerede afkast, hvilket også afspejles ved, at S&P ender ud

[1]Det vil igennem hele rapporten være denne rente, der henvises til, når der tales om den risikofrie rente. Denne opperationalisering er ækvivalent med Fama & French (1993)

med det højeste akkumulerede afkast i december 2018 på 2,74 kr., hvilket er ca. 53 pct. mere end BOND. Det er her, at man som investor skal spørge sig selv, om man er villig til at påtage sig den øgede risiko for at få del af det højere forventede afkast.

Effekten af, at der benyttes ETF's frem for teoretiske indeks, har vist sig at være forholdsvis begrænset for hhv. S&P og EAFE, da disse ETFs har relativt lave trackingfejl i forhold til deres "tilhørende" teoretiske indeks. For BOND og CORP er sagen lidt anderledes. Ideelt set ønskede vi, som tidligere nævnt, at inddrage en ETF som trackede et bredere indeks for BOND, eksempelvis "S&P U.S. Treasury Bond Index". Dette var ikke muligt, hvorfor BOND afviger noget mere fra det teoretiske indeks. I appendiks C findes en figur tilsvarende figur 5, blot for de teoretiske indeks, som er: 1) S&P U.S. Treasury Bond Index 2) S&P 500 Investment Grade Corporate Bond Index 3) S&P 500 4) MSCI EAFE Index. Heraf fremgår, at den største forskel findes for statsobligations- og virksomhedsobligationsindekset. Det teoretiske indeks for BOND har således et lidt lavere gennemsnitlig afkast samt standardafvigelse (hhv. 0,26 pct. og 0,96 pct.) og dermed også et lavere akkumuleret afkast (kr. 1,54), samt en anelse højere Sharpe-ratio (0.17) sammenlignet med ETF'en. ETF'en for CORP afviger fra det teoretiske indeks, ved at have en større standardafvigelse, til omtrent samme gennemsnitlige afkast, hvilket resulterer i en Sharpe-ratio på hele 0,19. Denne forskel på de teoretiske indeks og de udvalgte ETF's, har en betydning for backtesten, som diskuteres nærmere i afsnit 4.1.2.

4.1.1 Metode for backtest:

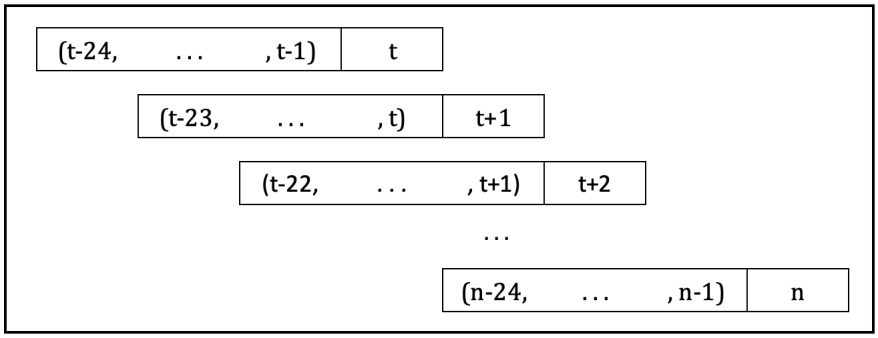
For ERC samt MV strategierne udregnes porteføljevægtene på baggrund af en estimeret varians-kovarians matrice for et rullende estimationsvindue på 24 perioder (2 år). Denne relativt korte periode er valgt, for at medfange så mange år som muligt før finanskrisens indtræden, da datasættet er begrænset til 2003. De primære fordele ved at benytte et vindue på kun to år, er at backtestperioden bliver længere samt, at der tages højde for, at varians og kovarians til afkast kan variere over relativt korte perioder. Ulempen er, at der er færre observationer til at estimere varians-kovarians matricerne samt, at et midlertidigt udslag i afkastet for et aktiv, vil have større påvirkning på den estimerede matrice, og dermed porteføljevægtene, selvom der kun er tale om en midlertidig anomali. Der er i litteraturen imidlertid ikke nogen konsensus om længden på estimationsvinduet. Ang (2014) opstiller en lignende backtest med et vindue på 60 perioder (5 år), imens Maillard et al. (2008) bruger et vindue på kun et enkelt år, på baggrund af daglige observationer. Inden valget faldt på de to år, sammenlignede vi desuden resultaterne fra backtesten med en periode på 5 år, samt en backtest med ugentlige afkast, og et vindue på et enkelt år, og forskellen blev vurderet til ikke at have signifikant betydning for resultaterne i dette speciale. Vi anerkender dog, at valget af estimationsvinduer samt forskellige estimationsmetoder for varians-kovarians matricen i høj grad kan diskuteres, og i princippet kan danne udgangspunkt for et speciale i sig selv[2]. Denne diskussion ligger imidlertid uden for omfanget af denne opgave. At estimationsvinduet er "rullende" repræsenterer, at investor én gang om måneden rebalancerer sine porteføljevægte, og tager samtidig højde for, at varianser og kovarianser til aktivers afkast ikke nødvendigvis er konstante over tid. Estimationsvinduet er opbygget, så porteføljevægtene til tid t bliver dannet på baggrund af historisk data fra periode $t-24$ til og med periode $t-1$. Porteføljevægtene for $t+1$ udregnes på baggrund af data fra $t-23$ til og med periode t og så videre, jf. figur 6, hvor n angiver datasættets sidste observation.

Da datasættet starter i januar 2003 og slutter i december 2018 bliver de første porteføljevægte udregnet

[2] jf. bl.a. DeMiguel et al. (2007)

for januar 2005, og de sidste i december 2018. Udregningerne af porteføljevægtene for de forskellige allokeringsstrategier er foretaget i R. Her benyttes funktionerne PERC samt PGMV fra pakken FRAPO til at udregne porteføljevægtene til hhv. ERC og MV strategierne. Da disse funktioner kun er bygget til at udregne porteføljevægte for et statisk estimationsvindue (dvs. en enkelt varians-kovarians matrice) benyttes iterationskommandoen, repeat, til at rebalancere porteføljevægtene én gang om måneden fra januar 2005 til december 2018. EW strategien kræver ikke estimerede tal af nogen art, men skal blot rebalanceres en gang månedligt, således at porteføljevægtene for alle aktiver i porteføljen udgør $1/n$, hvilket i dette tilfælde, med fire aktiver svarer til en vægt på $1/4 = 0.25$.[3]

Figur 6: Visualisering af rullende estimationsvindue



Egen fremstilling

Med månedlige porteføljevægte udregnet for alle tre allokeringsmetoder for i alt 168 måneder (jan. 2005 - dec. 2018) svarende til 14 år, udregnes tre tidserier med de vægtede porteføljeafkast for de tre forskellige strategier. Porteføljeafkastet til en givet periode, for en portefølje indeholdende n aktiver, udregnes på baggrund af ligning (4.2).

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \tag{4.2}$$

I de kommende backtests udregnes en række statistikker for at kunne sammenligne de forskellige allokeringsstrategiers performance og karakteristika. Dette inkluderer gennemsnitlig porteføljeafkast pr. måned, tilhørende standardafvigelse, Sharpe-ratio samt det akkumulerede afkast. Foruden disse rapporteres også strategiernes gennemsnitlige omsætningshastighed, (OH) for perioden, da backtest-frameworket ikke direkte inkorporerer transaktionsomkostninger. Omsætningshastigheden bliver derfor benyttet som mål for omkostningerne forbundet ved implementeringen af de enkelte strategier. Der findes flere mål for en porteføljes omsætningshastighed, vi benytter definitionen foreslået i DeMiguel et al. (2007) givet ved ligning 4.3:

$$OH = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^{T} \sum_{i=1}^{n} |w_{it} - w_{it-1}| \tag{4.3}$$

hvor n er antallet af aktiver i porteføljen, T er længden af backtestperioden, w_{it} er porteføljevægten til aktiv i i periode t. Omsætningshastigheden viser således den gennemsnitlige mængde af købs- og sal-

[3] I appendiks F findes en vejledende oversigt over brugen af vores R-koder. I appendiks G findes links til R-koder samt Excel-ark med specialets resultater og data.

gstransaktioner som procent af porteføljens værdi. Når andre faktorer holdes konstante, foretrækkes en lav omsætningshastighed over en høj, da dette medfører færre transaktionsomkostninger. I tilfælde af tilstrækkelig høje afkast, kan strategier med høj omsætningshastighed imidlertid stadig foretrækkes. Endelig betragtes også de enkelte strategiers koncentration af aktiver, målt ved det såkaldte *Herfindahl indeks*, h_t, givet ved:

$$h_t = \sum_{i=1}^{n} w_{it}^2 \tag{4.4}$$

hvor w_{it} angiver porteføljevægten til aktiv i på tid t. Indekset er lig 1, i tilfælde af en perfekt koncentreret portefølje dvs., at der kun investeres i et enkelt aktiv. Følges en equal weight strategi med porteføljevægte $1/n$ for alle aktiver, opnås et indeks på $1/n$. Ofte benyttes en normaliseret udgave af Herfindahl indekset, NH_t, jf. ligning 4.5:

$$NH_t = \frac{h_t - 1/n}{1 - 1/n} \tag{4.5}$$

hvor $NH_t \in [0, 1]$. En lav værdi af NH_t vil typisk foretrækkes over en høj, da dette indikerer en mere balanceret portefølje (Maillard et al., 2008).

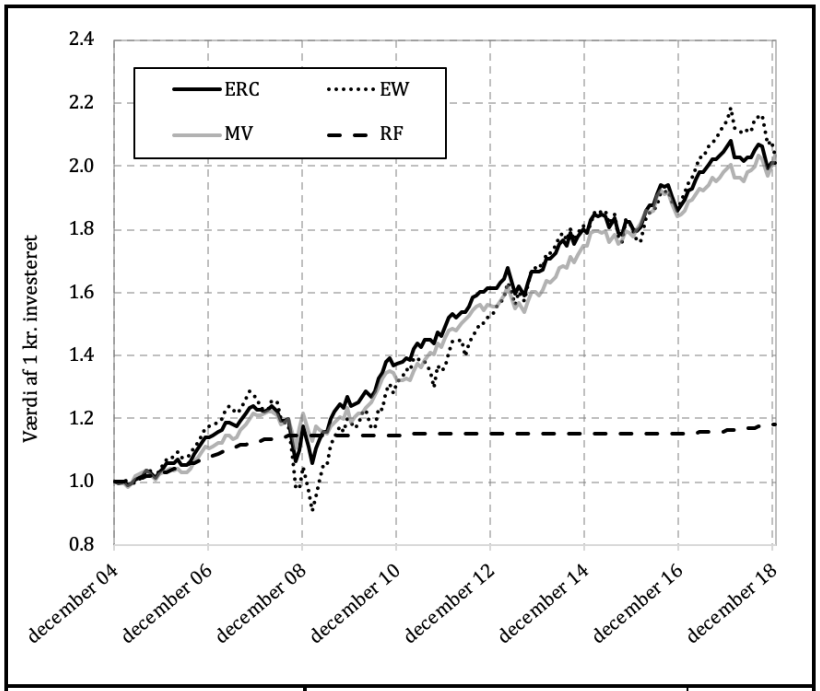
4.1.2 Resultater for backtest 1.0:

På baggrund af de udregnede porteføljeafkast opstilles figur 7 som plotter værdien af 1 kr. investeret i januar 2005 frem til december 2018, for hver af de tre allokeringsstrategier. Til sammenligning plottes også udviklingen af 1 kr. investeret i den risikofrie rente, RF.

Ved første øjekast på figur 7 ser det umiddelbart ud til at de tre porteføljeallokeringsstrategier i store træk performer som forventet, og som beskrevet i kapitel 3. EW er den strategi, som ender ud med det største gennemsnitlige afkast på 0,45 pct. omend forskellen mellem de tre strategiers afkast er meget begrænset. Standardafvigelserne til porteføljeafkastene er imidlertid mere interessante. EW har den største standardafvigelse på 2,36 pct. imens ERC ligger på 1,68 pct. og MV en smule lavere på 1,48 pct. Den umiddelbare styrke ved EW er dens simplicitet, men som kommer på bekostning af, at den i mange tilfælde fører til en begrænset diversifikation af risiko, når de individuelle aktiver har meget forskellige risikoprofiler eller er meget korreleret. MV-strategien stemmer ligeledes overens med forventningerne, da den ender ud med det laveste afkast (både akkumuleret og gennemsnitlig) af de tre strategier, men til gengæld til den laveste volatilitet. MV viser sin styrke i de perioder hvor de andre strategier oplever store tab, hvilket er bedst illustreret efter finanskrisen i figur 7 hvor MV er strategien, der taber mindst af sin værdi. Dette hænger naturligvis sammen med, at MV tildeler en høj vægt for stats- og virksomhedsobligationer (BOND og CORP), som typisk vil være mindre følsomme i krisetider. Ulempen ved MV er, at selvom der opnås en lav samlet porteføljerisiko, så vil man ofte opleve en stor koncentration i enkelte aktiver med lav varians, hvilket afspejles af den høje NH værdi for MV. Årsagen hertil er, at MV udjævner de enkelte aktivers risikobidrag, men kun ud fra en marginal betragtning. Det totale risikobidrag fra hvert aktiv vil derfor ofte være langt fra lig hinanden, hvilket fører til førnævnte koncentration af enkelte aktiver, hvormed strategien i sidste ende kan opgive visse fordele ved diversifikation i større eller mindre grad. Endelig ses, at ERC lever op til dens formål om at bygge bro mellem EW og MV. Både det akkumulerede og gennemsnitlige afkast for ERC ender med at ligge mellem afkastet for MV og EW ,og det samme gør sig gældende for volatiliteten,

hvilket er i fuld overensstemmelse med kapitel 3 og Maillard et al. (2008).

Figur 7: Backtest 1.0 - fire brede aktiver



	ERC	*EW*	*MV*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.43%	0.45%	0.43%	0.10%
Standardafvigelse	1.68%	2.36%	1.48%	0.14%
Akkumuleret afkast	2.01 kr.	2.03 kr.	2.03 kr.	1.18 kr.
Sharpe-ratio	0.20	0.15	0.23	-
Gns. Omsætningshastighed (OH)	3.34%	1.08%	11.66%	0.00%
Gns. norm. Herfindahl indeks (NH)	0.08	0.00	0.38	1.00

Egen fremstilling

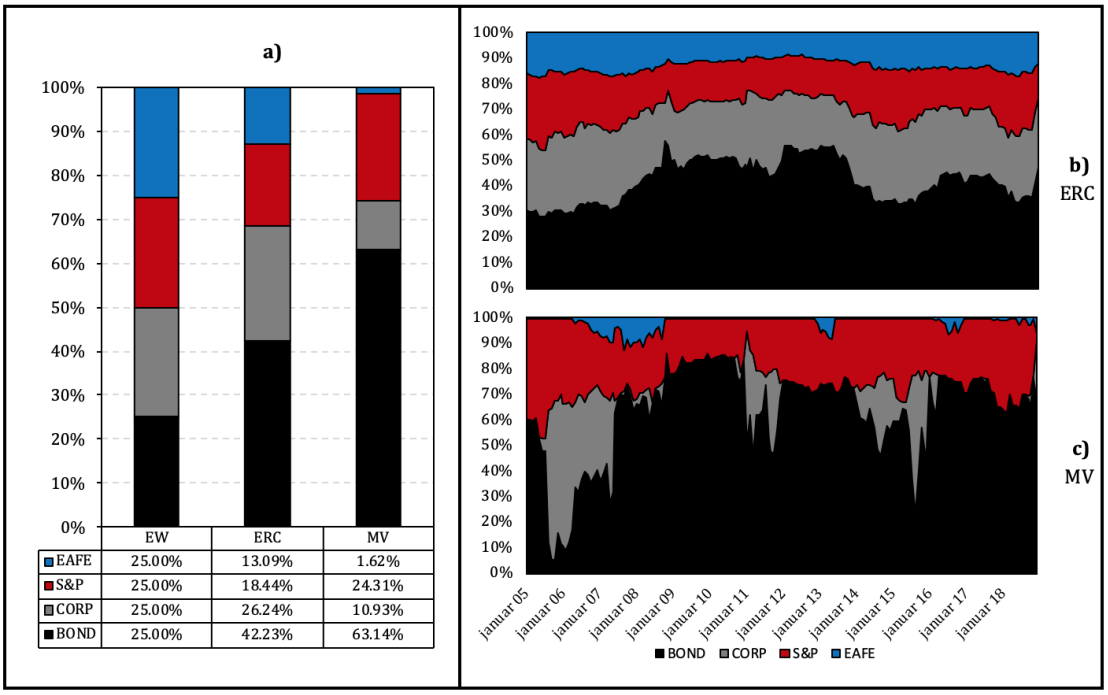
Den mindste koncentration af aktiver fås naturligvis i EW som altid vil have en NH værdi på 0. ERC har ligeledes en meget lav NH på 0.08, imens MV som tidligere nævnt har højest koncentration af aktiver, med en NH værdi på 0,38. Kigger man på Sharpe-ratioerne for de tre strategier, ses at til trods for, at EW har det største forventede afkast, er det denne strategi, som har den laveste Sharpe-ratio, på 0,15, hvilket kan forklares ved strategiens høje volatilitet. MV har højeste Sharpe-ratio på 0,23, imens ERC ligger på 0,20. Dog er det meget vigtigt at påpege, at den gennemsnitlige omsætningshastighed for MV (11,66 pct.) er betydeligt højere end for ERC (3,34 pct.) og MV (1,08 pct.), hvilket i praksis vil have meget store implikationer for det realiserede afkast[4]. Maillard et al. (2008) anerkender, at MV kan opnå større Sharpe ratioer end ERC, grundet en lav volatilitet, men fremhæver, at den store koncentration af enkelte aktiver ved MV kan eksponere porteføljen over for større tab på kort sigt. Omend det ikke er så overraskende, er det vigtigt at bemærke at Sharpe-ratioerne for de tre allokeringsstrategier enten er lig eller større end rationerne fra de "rene strategier" fra figur 5. Dette er et simpelt eksempel på, at man ved at danne en

[4]Konsekvenserne af omsætningshastighed og transaktionsomkostninger diskuteres i et større omfang i afsnit 4.4

portefølje af de fire aktiver bortdiversificerer usystematisk risiko, som resulterer i en højere Sharpe-ratio. Det skal dog påpeges, at man ved kun at investere i et enkelt aktiv, undgår transaktionsomkostninger ved rebalancering af sin portefølje. Dette er ikke tilfældet ved ERC, MV og EW, hvilket der kigges nærmere på i afsnit 4.4.

Noget af det som overraskede mest ved ovenstående backtest, er at forskellen på de tre allokeringsstrategier ikke er større. Omend der er en vis forskel på de tre strategier, synes de akkumulerede samt gennemsnitlige afkast at ligge overraskende tæt op ad hinanden. I appendiks D findes en figur tilsvarende figur 7, blot for de fire teoretiske aktiver fra appendiks C. Heraf fremgår det, at der er en noget større forskel på de tre forskellige strategier, både ift. afkast, og risiko. Figuren i appendiks D er således i bedre overensstemmelse med de backtest man finder i litteraturen, og som vist i Maillard et al. (2008), da disse tager udgangspunkt i teoretiske indeks og ikke investerbare ETF's som i figur 7. Denne forskel mellem en backtest for de teoretiske indeks og de praktiske ETF's understreger således relevansen af specialets problemformulering.

Figur 8: Gennemsnitlige vægte, (a), samt udvikling i porteføljevægte for hhv. ERC, (b), og MV, (c)



Egen fremstilling

Figur 8 viser et søjlediagram over de gennemsnitlige porteføljevægte for de tre allokeringsstrategier (a), samt udviklingen i porteføljevægtene i backtestperioden for ERC (b) og MV (c)[5]. Ikke overraskende, ses en forholdsvis stor koncentration af BOND for MV i størstedelen af backtestperioden, med en gennemsnitlig vægt på 63,14 pct. som for EW og ERC udgør hhv. 25 pct. og 42,23 pct. Derudover består MV-porteføljen i gennemsnit af 10,93 pct. i CORP, 24,31 pct. i S&P, samt 1,62 pct. i EAFE. Porteføljevægtene for EW er meget nemme at overskue, da der i hver periode rebalanceres, så der holdes præcis 25 pct. ($1/n$) i hvert

[5] Af åbenlyse årsager undlades udviklingen i porteføljevægte for EW.

aktiv. Dermed vægter EW de mere risikofyldte aktiver (EAFE og S&P) højere end både ERC og MV, hvilket afspejles i en højere værdi for både det gennemsnitlige afkast samt standardafvigelsen for EW jf. figur 7. ERC vægter i gennemsnit BOND med ca. 42 pct. som er mere end EW, men mindre end MV, imens CORP i gennemsnit vægtes med ca 26 pct. S&P og EAFE vægtes for ERC i gennemsnit med hhv. 18,4 og 13 pct. Diagram b) og c) i figur 8 viser, hvordan porteføljevægtene for ERC og MV udvikler sig over tid, og det første der falder i øjnene er, at ERC strategien har nogle væsentligt mere stabile vægte, imens vægtene for MV er mere volatile. Dette er i fuld overensstemmelse med den høje omsætningshastighed for MV, og den relativt lave omsætningshastighed for ERC. Af figuren fremgår, at begge strategier vægter BOND højere i årene efter finanskrisen, hvilket er meget intuitivt. En lidt overraskende observation, er de store vægte for CORP i MV fra slutningen af 2005 og frem til midt 2007[6].

4.2 Udfordringer ved implementering af faktorinvestering i praksis

Dette afsnit kigger nærmere på nogle af de udfordringer som opstår, når faktorinvestering implementeres i praksis. Herunder kan bl.a. nævnes forskelle på aktivuniverset i en teoretisk og praktisk kontekst samt begrænsninger ift. konstruktionen af long-short porteføljer. Derudover præsenteres de faktorprodukter, som i afsnit 4.3 tilføjes porteføljen fra backtest 1.0 i et forsøg på at øge diversifikationspotentialet for en allerede veldivercificeret portefølje.

4.2.1 Aktivuniverset for akademiske kontra investerbare faktorer

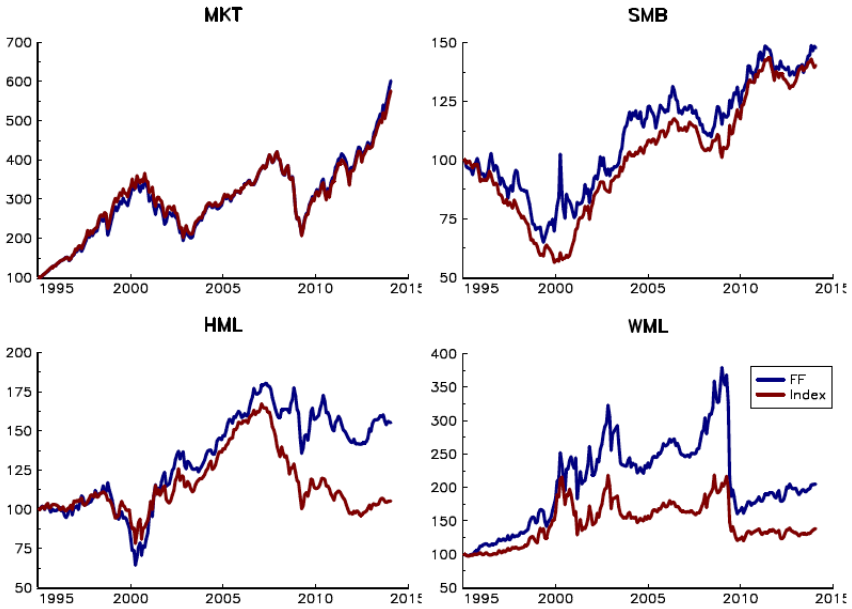
En af de udfordringer, som opstår, når faktorinvestering implementeres i praksis er, at der er en markant forskel på det tilgængelige aktivunivers. Faktorerne præsenteret i Fama & French (1993), og som blev gennemgået i afsnit 2.4 anvender således et langt bredere aktivunivers, når de identificerer deres faktorer, end hvad der rent faktisk er tilgængeligt for både institutionelle og individuelle investorer i praksis. Typisk anvendes databasen Center for Research in Security Prices (CRSP), som også er den Fama & French tager udgangspunkt i. Denne database indeholder en lang række small og micro cap aktier, der er vanskelige at handle, selv for institutionelle investorer. I et forsøg på at belyse konsekvenserne af dette, og gøre akademiske faktorer mere realistiske, replikerer Cazalet & Roncalli (2014) Fama og French's faktorer (MKT, SMB, HML og WML) ved at benytte præcis samme metodologi, men med den forskel, at de anvender S&P 500 som aktivunivers (illustreret ved den røde linje i figur 9). Herved observerer de væsentlige forskelle fra Fama & French's "akademiske" faktorer jf. figur 9.

Figur 9 viser, at aktivuniverset har mindst indflydelse på markedsfaktoren, MKT. Forskellen er lidt større for SMB, omend de to SMB kurver stadig formår at lægge relativt tæt op ad hinanden. Dette er egentlig overraskende, da S&P er et indeks bestående af large-cap aktier, imens der i CRSP eksisterer rigtig mange small og micro cap. For både HML og WML findes en signifikant forskel på de akademiske faktorer, og dem dannet på baggrund af S&P. Dette skyldes formentlig, at CRSP indeholder flere aktiver ude i "halerne". Eksempelvis kan det tænkes, at CRSP for HML, indeholder virksomheder med lavere book to market ratio, og for WML indeholder større "tabere" end S&P, hvilket bør øge afkastet, når der gås kort i disse.

Foruden ovenstående kritik til Fama og French's faktorer, kan også nævnes en artikel af Frazzini et al. (2012). Heri undersøges, hvorvidt det kan svare sig for institutionelle investorer at lave ETF's baseret

[6] I appendiks E findes en figur tilsvarende figur 8. Her fremgår den primære forskel i, at vægtene for MV ikke er lige så volatile for de teoretiske indeks, imens den gennemsnitlige beholdning af BOND også er større.

Figur 9: Akkumuleret afkast for F&F's faktorer dannet ud fra hhv. CRSP (blå) og S&P 500 (rød)



Kilde: Cazalet & Roncalli (2014)

på de akademiske faktorer. Dette gør de ved at replikere metodologien som Fama og French anvender, men på reelt data med reelle transaktionsomkostninger for at se, hvor stor en fond skal være, før det kan svare sig at lave investerbare produkter ud fra SMB, HML og WML faktorerne. Korrelationen for hver af disse investerbare produkter med deres respektive akademiske slægtninge var 0.96 for HML, 0.97 for WML og 0.78 for SMB. Frazzini et al. (2012) når frem til, at hvis en institutionel investor skulle lave de akademiske faktorer, som investerbare produkter, så ville break-even størrelsen for SMB, HML og WML på det amerikanske marked alene være hhv. $275, $214 og $56 mia. dollars, før det kan svare sig ift. transaktionsomkostninger at lave dem som investerbare produkt, hvilket er ret store break-even størrelser for en fond. Til sammenligning udgjorde værdien af den største ETF i 2018, "SPDR S&P 500 ETF (SPY)", ca. $242 mia. dollars.

4.2.2 Long-short vs. long-only porteføljer

En anden udfordring som opstår, når akademiske faktorer operationaliseres i praksis er, at disse faktorer typisk er designet som long-short porteføljer. Dvs. at man går langt i typen af aktiver, man forventer har et merafkast (lille virksomheder, value virksomheder, "vinder-aktier" osv.), imens man går kort i modparten (store virksomheder, growth virksomheder, "taber-aktier" osv.). Ang (2014) kalder også sådanne faktorer for *dynamiske*. Ved at gå kort i aktiver i længere perioder, fjernes markedseksponeringen fra faktorerne, hvorfor disse faktorers afkast også tolkes som merafkast ift. markedet. Dette betyder på den anden side, at jo færre aktiver, der gås kort i for hver faktor, jo højere vil eksponeringsgraden overfor markedet logisk nok også være, hvormed diversifikationspotentialet mindskes. Langt de fleste faktorbaserede produkter, der tilbydes på de finansielle markeder er ikke long-short porteføljer, men i stedet long-only. Dette skyldes primært de omkostninger som er forbundet med short-selling i praksis, samt at det for visse aktier

simpelthen ikke er muligt at tage en kort position i (især small cap-aktier), da det bl.a. kræver brugen af derivater (Cazalet & Roncalli, 2014, s. 52). Overordnet set, eksisterer der altså et trade-off mellem en porteføljes eksponeringsgrad over for en givet faktor, og hvor "investerbar" porteføljen er i praksis.

4.2.3 Investerbare faktorprodukter

For at man som investor kan gøre brug af principperne bag faktorinvestering, er det klart, at det kræver, at man har nogle faktorbaserede produkter til rådighed. Eksempler på dette er faktor-baserede mutual funds samt faktor-indeks. Sådanne produkter har for visse faktorer, (bl.a. size og value), efterhånden eksisteret i mange år, imens der for andre faktorer, som momentum og quality, stadig er et begrænset udvalg. I den seneste tid og i takt med den øgede interesse for faktorinvestering, er udbuddet af disse produkter steget væsentligt, og disse er blevet hurtigt adopteret af især institutionelle investorer. I det følgende præsenteres de udvalgte faktorbaserede produkter, som inddrages i en række backtests i dette speciale.

I henhold til de førnævnte praktiske begrænsninger forbundet med Fama & French's faktorer, vil det ikke give meget mening at supplere den eksisterende portefølje fra afsnit 4.1 med disse. I hvert fald ikke hvis man ønsker virkelighedsnære og realistiske resultater. I stedet er der valgt at tilføje fire faktorindeks fra MSCI, som repræsenterer hhv. size, value, momentum og quality faktorer. Disse fire indeks blev først udbudt som investerbare ETF's i 2013 af BlackRock, imens der findes data for de tilhørende teoretiske indeks helt tilbage fra 2001. I dette speciale er indeksene derfor anvendt for at få adgang til så lang en dataperiode som mulig, og for at kunne sammenligne resultaterne med backtest 1.0. Selvom disse indeks reelt set ikke var mulige at investere i tilbage i 2003, kan det stadig forsvares at inddrage dem i backtesten, så længe ETF'erne formår at tracke de teoretiske indeks fornuftigt. I nedenstående figur 10 ses, at de fire ETF's tracker indeksene stort set perfekt i perioden fra juli 2013 til december 2018.
Det er imidlertid vigtigt at påpege, at faktorindeksene fra MSCI ikke skal tolkes som "rene" faktorer, men har i stedet til formål at repræsentere aktiver der, til en vis grad, er *eksponeret* over for udvalgte faktorer. Implikationerne af dette bliver også diskuteret nedenfor. De fire faktorindeks er:

- SIZE - repræsenteret ved indekset MSCI USA Risk Weighted Index, som har til formål at omarrangere vægtene på moderindekset (MSCI USA) således aktiver med lav volatilitet får en højere tildelt vægt. Denne operationalisering af size faktoren diskuteres senere i dette afsnit.

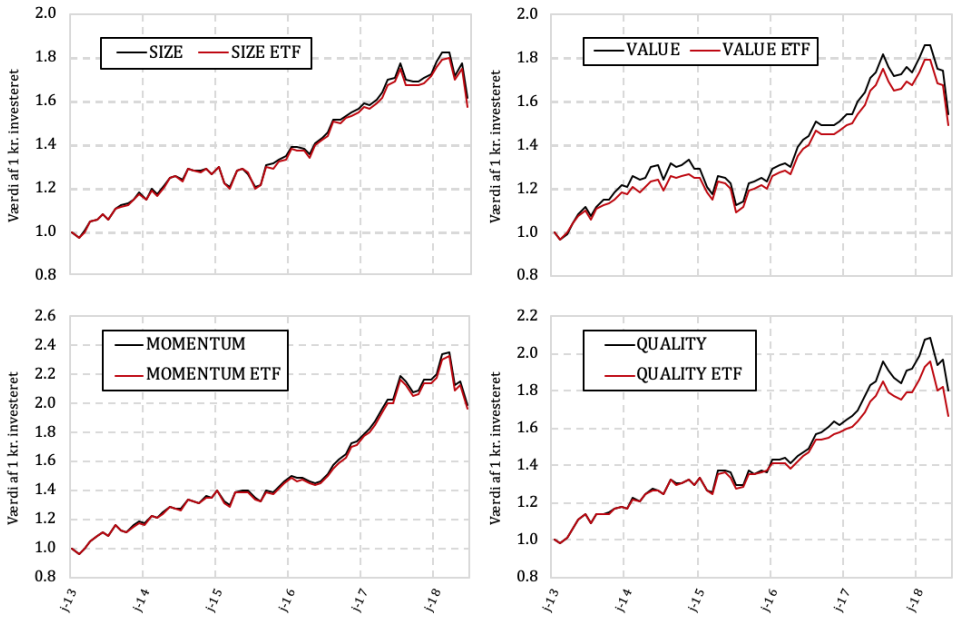
- VALUE - repræsenteret ved indekset MSCI USA Enhanced Value Index, som har til formål at opfange "cheaply-valued" aktivers outperformance af "richly-valued" aktiver. Indekset definerer value-aktier ud fra value-ratioerne: 1) forward price to earnings (Fwd P/E) 2) Enterprise value/operating cash flows (EV/CFO) og 3) price to book value (P/B).

- MOMENTUM - repræsenteret ved indekset MSCI USA Momentum Index, som har til formål at opfange merafkastet ved at investere i aktiver som i den seneste tid har performet godt (winners).

- QUALITY - repræsenteres ved indekset MSCI USA Quality Index, der har til formål at opfange merafkastet for aktiver med følgende tre "kvalitets-karakteristika": 1) Return on equity 2) Debt to equity 3) Earnings variability.[7]

[7] MSCI har yderligere to faktor-indeks, som hhv. repræsenterer faktorerne Low Volatility og High Dividend Yield. Disse medtages imidlertid ikke i porteføljen, da udbredelsen samt det akademiske grundlag for disse faktorer ikke er på niveau med de fire andre risikofaktorer.

Figur 10: Akkumulerede afkast for hhv. MSCI's faktorindeks og deres tilhørende ETF's



Egen fremstilling

Disse fire faktorindeks er ligesom aktiverne i backtest 1.0 total return indeks. Indeksene adskiller sig fra Fama og French's faktorer ved både at være baseret på et andet aktivunivers (MSCI USA) og være long-only porteføljer, imens den overordnede metodologi også adskiller sig fra Fama og French.

Netop fordi faktorindeksene fra MSCI adskiller sig fra faktorerne fra Fama & French (1993), er det interessant at opstille en fem-faktor regression med forklarende variable Mkt-RF, SMB, HML, WML og RMW på hvert af de fire indeks fra MSCI. Hermed er det muligt at blive klogere på om eksponeringsgraden for hhv. de akademiske faktorer stemmer overens med de investerbare faktorindeks. Inden regressionen køres bliver den risikofrie rente trukket fra de respektive MSCI-faktorerne jf. ligning (4.6). Dette bør resultere i, at alfa-estimaterne bør blive insignifikante, såfremt femfaktormodellen har tiltrækkelig forklaringskraft. Regressionsligningen ses nedenfor:

$$r_{it} - RF_{it} = \alpha_{it} + \beta_1(Mkt - RF)_{it} + \beta_2 \cdot SMB_{it} + \beta_3 \cdot HML_{it} + \beta_4 \cdot WML_{it} + \beta_5 \cdot RMW_{it} + \varepsilon_{it} \quad (4.6)$$

Hvor:

r_{it} = Afkastet til et givet MSCI faktorindeks til tiden t
RF_{it} = den risikofrie rente
α_{it} = skæringspunktet
β_1 = eksponeringsgraden over for markedsfaktoren
β_2 = eksponeringsgraden for FF's SMB faktor
β_3 = eksponeringsgraden for FF's HML
β_4 = eksponeringsgraden for FF's WML
β_5 = eksponeringsgraden for FF's RMW
ε_{it} = fejlleddet

Der er valgt at tage udgangspunkt i netop disse faktorer fra Fama og French, da MSCI indeksene således er repræsenteret ved sin "egen" akademiske faktor som forklarende variabel. Hvert MSCI indeks køres enkeltvis mod de akademiske faktorer. Forventningen til denne regression burde således være høje justeret R^2 værdier, insignifikante alfa-værdier, en relativ høj eksponeringsgrad over for markedsfaktoren samt en vis eksponering over for den relevante faktor. Resultaterne fra regressionerne ses i figur 11, hvor p-værdier er angivet i parentes.

Figur 11: Femfaktor-regression af MSCI's faktorindeks på Fama & French's faktorer i perioden 1999-2018

	SIZE	*VALUE*	*MOMENTUM*	*QUALITY*
$\hat{\alpha}$	0.001 (0.145)	0.001 (0.227)	0.000 (0.771)	0.000 (0.499)
$\hat{\beta}_1\ (Mkt - RF)$	0.867 (0.000)	1.03*** (0.000)	1.087*** (0.000)	0.941*** (0.000)
$\hat{\beta}_2\ (SMB)$	0.015 (0.591)	0.021 (0.497)	-0.062 (0.101)	-0.116*** (0.000)
$\hat{\beta}_3\ (HML)$	0.234*** (0.000)	0.289*** (0.000)	-0.110*** (0.003)	-0.205*** (0.000)
$\hat{\beta}_4\ (WML)$	-0.072*** (0.000)	-0.106*** (0.000)	0.270*** (0.000)	-0.009 (0.423)
$\hat{\beta}_5\ (RMW)$	0.246*** (0.000)	0.128*** (0.002)	0.235*** (0.000)	0.244*** (0.000)
$Adjusted\ R^2$	0.905	0.926	0.876	0.950

Egen fremstilling

Af regressionsresultaterne i figur 11 ses, at de fire regressioner er i fuld overensstemmelse med forventningerne og kritikken anført i afsnit 4.2.2, da alle fire indeks er meget eksponeret overfor markedet, med beta-estimater svingende fra 0,867 (SIZE) til 1,087 (MOMENTUM). Markeds-betaen er desuden yderst signifikant for alle fire regressioner, med meget lave p-værdier. Årsagen hertil skal findes i, at der netop er tale om long-only porteføljer baseret på aktivuniverset MSCI USA. Samtidig kan vi se, at alle fire alpha-estimater er insignifikante på et 10 pct. niveau, hvilket hænger fint sammen med, de høje værdier for justeret R^2. De akademiske faktorer svinger således mellem at kunne forklare omkring 88 pct. til 95 pct. af variationen i MSCI indeksene, hvilket må siges at være forholdsvis meget.

For både VALUE, MOMENTUM og QUALITY indeksene fra MSCI findes den største beta-koefficient, ved den akademiske modpart fra Fama & French, og alle disse er desuden signifikante på et 1 pct. niveau. For VALUE er den største beta således over for faktoren HML (0,289). Det tyder samtidig på, at VALUE er en anelse eksponeret over for RMW (0,128), samt negativt eksponeret over for WML. Sidstnævnte giver god mening, idet value-aktier, er karakteriseret ved at være relativt "billige", og vil derfor ikke være de samme aktier som har oplevet momentum. SMB faktoren er imidlertid insignifikant. MOMENTUM-indekset fra MSCI har størst eksponering over for WML (0,270) men også en forholdsvis stor eksponering over for RMW (0,235), hvilket kan skyldes, at aktier der har momentum ligeledes deler nogle karakteristika med

quality aktier. MOMENTUM er negativt eksponeret over for HML (-0,110), som kan forklares på samme måde, som at VALUE er negativt eksponeret over for WML. MOMENTUMs beta-koefficient for SMB er ikke signifikant forskellig fra nul. QUALITY-indekset har størst eksponering over for RMW med en signifikant beta-koefficient på 0,244. Derudover oplever QUALITY en negativ eksponeringsgrad over for både SMB og HML, imens beta-koefficienten for WML er insignifikant.

Regressionsresultaterne for VALUE, MOMETUM og QUALITY stemmer således ret godt overens med forventningerne. Historien er dog lidt anderledes for MSCI indekset SIZE, som adskiller sig fra de andre indeks ved at have en insignifikant beta-koefficient over for sin akademiske modpart, SMB. Dette skyldes formentlig, at SIZE har MSCI Risk Weighted Index som benchmark indeks, som tildeler aktiver med lav risiko en høj vægt, imens aktiver med høj risiko bliver tildelt en lavere vægt. Dette er en smule besynderligt, da det på baggrund af denne metodologi i højere grad lyder som et *low volatility* indeks. Dette kan måske hænge sammen med, at siden size-faktoren første gang så dagens lys i et akademisk papir af Banz (1981), så forsvandt merafkastet ift. markedet, når man korrigerer for markedseksponering (jf. afsnit 2.4). Dem der tror på nær-efficiente markeder, som beskrevet af Grossman & Stiglitz (1980), vil beskrive dette ved, at ny information så dagens lys og rationelle investorer handlede på baggrund af denne lomme af inefficiens. Hvorom alting er, så er faktoren size relativt kendt som faktor. Derfor kan MSCI have forklædt en low volatility faktor som size, da size har en mere familiær klang blandt investorer end den relativt nye low volatility. Af figur 11 ses, at SIZE, foruden markedsfaktoren er mest eksponeret over for HML (0,234) og RMW (0,246). MSCI fastholder dog, at deres SIZE indeks er eksponeret over for især mindre virksomheder, trods deres alternative operationalisering. En sidste bemærkelsesværdig observation fra figur 11 er, at med undtagelse af QUALITY, så er ingen af MSCI indeksene signifikant eksponeret over for SMB faktoren. Forklaringen herpå kan være, at aktivuniverset som benyttes for MSCI's indeks, som tidligere nævnt, er aktier som indgår i MSCI USA Index, som altså primært udgøres af large- og mid-cap aktier.

Ud fra resultaterne fra figur 11 tyder det på, at man som investor mister nogle af disversifikationsfordelene ved faktorindeksene fra MSCI, pga. den meget høje eksponeringsgrad over for markedet. Hermed tyder det på, at nogle af fordelene ved faktorinvestering forsvinder, når akademiske faktorer bliver forsøgt konverteret til investerbare produkter. Dette vil nu blive undersøgt nærmere ved henholdsvis at opstille en korrelationsmatrice for de akademiske faktorer og de investerbare produkter fra MSCI. Dette gøres ved at undersøge, hvor stor forskel der er mellem korrelationer for akademiske og investerbare faktorer. Lavere korrelation mellem faktorer vil give bedre diversifikationspotentiale for en given portefølje.

Figur 12: Korrelationsmatrice for de akademiske faktorer

F&F's faktorer

	Mkt-RF	*SMB*	*HML*	*WML*	*RMW*
Mkt-RF	1.00				
SMB	0.26	1.00			
HML	-0.10	-0.27	1.00		
WML	-0.31	0.12	-0.22	1.00	
RMW	-0.50	-0.58	0.44	0.08	1.00

Egen fremstilling

Ud fra figur 12 ses, at diversifikationspotentialet for de akademiske faktorer fra Fama & French er meget højt, da mange af disse korrelationer er tæt på nul og/eller negative. Historien er dog en anden, når der tages udgangspunkt i de investerbare produkter fra MSCI, jf. figur 13.

Ud fra denne matrice, ses at de fire indeks er yderst korreleret hinanden imellem. Dette hænger igen sammen med, at der kun tages lange positioner i aktiverne, som indgår i indeksene. Som resultat heraf ses, at faktorerne er særdeles korreleret med hinanden. Dette betyder altså, at en god portion af diversifikationspotentialet forsvinder, når faktorer konverteres til investerbare produkter. Kan faktorinvestering så i virkeligheden være med til at skabe en værdi for en relativt veldiversificeret portefølje? Næste afsnit vil tage udgangspunkt i netop denne problemstilling.

Figur 13: Korrelationsmatrice for MSCI indekser og MKT-Rf

MSCI's faktorprodukter

	S&P 500	*SIZE*	*VALUE*	*MOMENTUM*	*QUALITY*
S&P 500	1.00				
SIZE	0.91	1.00			
VALUE	0.94	0.92	1.00		
MOMENTUM	0.86	0.76	0.77	1.00	
QUALITY	0.96	0.84	0.88	0.85	1.00

Egen fremstilling

4.3 Backtest 2.0: Faktorers bidrag til en veldiversificeret portefølje

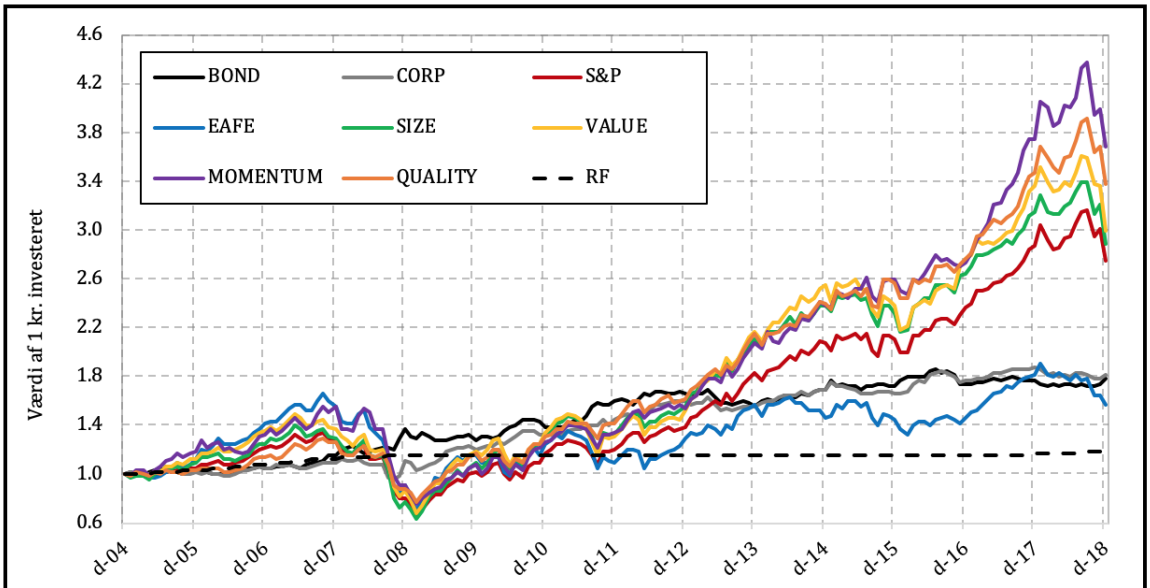
I dette afsnit foretages endnu en backtest, hvor porteføljen fra backtest 1.0 udvides med de fire faktorprodukter fra MSCI. Formålet med denne backtest er således at se, hvordan disse faktorprodukter kan bidrage til porteføljernes afkast- og risikoprofil. Metoden for backtesten er ækvivalent med den for backtest 1.0, og det samme er backtestperiode og estimationsvindue. I figur 14 listes gennemsnitlige månedlige afkast[8], standardafvigelser samt Sharpe-ratioer for de i alt otte forskellige aktiver som porteføljen består af samt for den risikofrie rente, RF. Desuden plottes udviklingen i de akkumulerede afkast for 1 kr. investeret i de respektive aktiver i januar 2005 frem til december 2018. Tallene og tidsserierne for BOND, CORP, S&P, EAFE samt RF er identiske med figur 5, men er medtaget igen for sammenligningens skyld.

Det fremgår af figuren, at de fire tilføjede faktorindeks alle har et større gennemsnitligt afkast end S&P, men samtidig også højere standardafvigelse, med undtagelse af QUALITY som har en standardafvigelse i perioden på 3,63 pct., selvom det er aktivet med det næsthøjeste forventede afkast (0,79 pct.). Det er derfor heller ikke overraskende, at netop QUALITY opnår den højeste Sharpe-ratio (0,19) af de ni aktiver. Det er også interessant, at MOMENTUM har det højeste gennemsnitlige afkast (0,88 pct.) men kun den næstlaveste standardafvigelse (4,34 pct.) af de fire faktorindeks, hvilket medfører en Sharpe-ratio på 0,18. SIZE og VALUE ligger meget tæt på hinanden mht. afkast og standardafvigelse, og har begge en Sharpe-ratio på 0,14. Det fremgår meget tydeligt af figuren, at de fire faktorindeks er meget korrellerede med S&P, hvilket

[8] De månedlige afkast er korrigeret for expense-ratioerne på samme måde som i afsnit 4.1. Alle fire faktorindeks har en årlig expense ratio på 0,15 pct.

også er forventeligt, da der er tale om long-only porteføljer, dannet på baggrund af mange af de samme amerikanske aktier, som indgår i S&P, hvilket også blev forklaret i afsnit 4.2. På baggrund af figuren, tyder det på, at de enkelte faktorindeks bærer en risikopræmie ift. det amerikanske aktiemarked, repræsenteret af S&P, som potentielt set kan bidrage til højere Sharpe-ratioer for de forskellige porteføljer. Denne risikopræmie stemmer fint overens med rationel teori, i og med at investor bør kompenseres for at være eksponeret over for en given faktor. Dette leder hen til den nye backtest for de otte aktiver. Denne er vist i figur 15. Her listes foruden de gennemsnitlige månedlige afkast, standardafvigelser og Sharpe-ratioer også gennemsnitlige omsætningshastigheder (OH) og normaliserede Herfindahl indeks (NH), desuden plottes de akkumulerede afkast for 1 kr. investeret i januar 2005 til december 2018 for de tre porteføljestrategier.

Figur 14: Akkumulerede afkast for fire brede aktiver, fire faktorindeks samt den risikofrie rente.



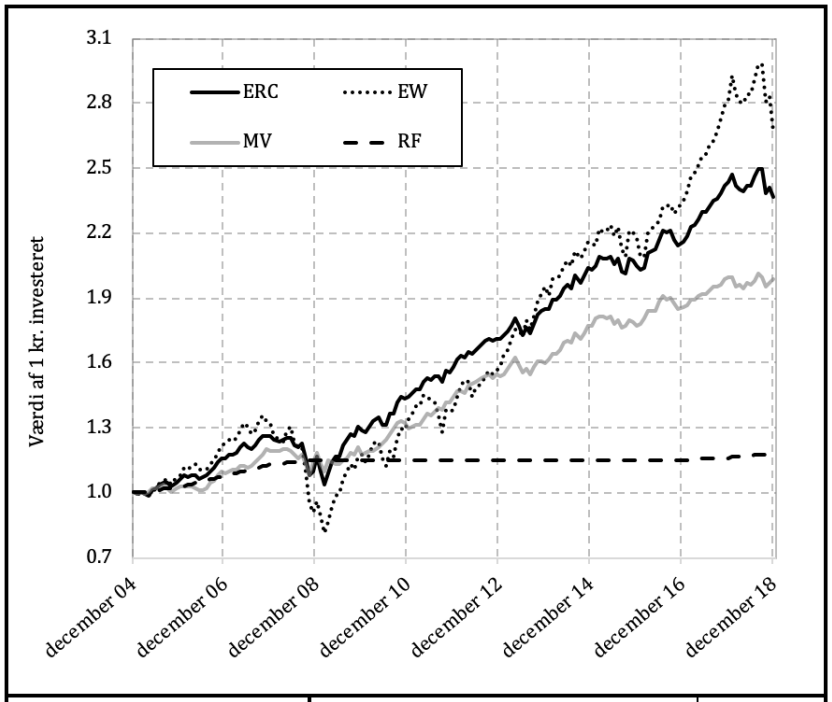
	BOND	*CORP*	*S&P*	*EAFE*	*SIZE*	*VALUE*	*MOMEN-TUM*	*QUALITY*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.36%	0.37%	0.68%	0.39%	0.74%	0.77%	0.88%	0.79%	0.10%
Standardafvigelse	1.77%	2.05%	3.97%	4.91%	4.62%	4.69%	4.34%	3.63%	0.14%
Sharpe-Ratio	0.15	0.13	0.15	0.06	0.14	0.14	0.18	0.19	-
Akkumuleret afkast	1.79 kr.	1.81 kr.	2.74 kr.	1.56 kr.	2.89 kr.	2.99 kr.	3.69 kr.	3.38 kr.	1.18 kr.

Egen fremstilling

Noget af det første der falder i øjnene i figur 15, er, at inddragelsen af de fire faktorindeks har bidraget til en større forskel på de tre allokeringsstrategier, sammenlignet med backtest 1.0. EW er endnu engang strategien med højest gennemsnitlig afkast (0,64 pct.) med en tilsvarende høj standardafvigelse på 3,16 pct. Dette har resulteret i en bedre Sharpe-ratio (0,17) sammenlignet med EW i backtest 1.0 (0.15). En bemærkelsesværdig observation er dog, at MOMENTUM og QUALITY indeksene har en større Sharpe-ratio isoleret set end EW-porteføljen for de otte aktiver, som man ellers må formode drager fordel af diversifikation. Det akkumulerede afkast for EW ender i december 2018 ud med at ligge på 2,67 kr. hvilket ligeledes er højere end de 2,08 kr. fra backtest 1.0. Den gennemsnitlige omsætningshastighed for EW er steget fra 1,08 pct. til 1,62 pct., imens det normaliserede Herfindahl indeks igen udgør 0. Overordnet set kan det konklud-

eres, at EW strategien har nydt fordel af inddragelsen af de fire faktorindeks, ift. et højere gennemsnitlig og akkumuleret afkast, større Sharpe-ratio, men til en anelse højere OH.

Figur 15: Backtest 2.0 - fire brede aktiver og fire faktorprodukter fra MSCI



	ERC	*EW*	*MV*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.53%	0.64%	0.42%	0.10%
Standardafvigelse	1.85%	3.16%	1.46%	0.14%
Akkumuleret afkast	2.37 kr.	2.67 kr.	1.99 kr.	1.18 kr.
Sharpe-ratio	0.23	0.17	0.22	-
Gns. omsætningshastighed (OH)	3.95%	1.61%	14.58%	0.00%
Gns. norm. Herfindahl indeks (NH)	0.12	0.00	0.46	1.00

Egen fremstilling

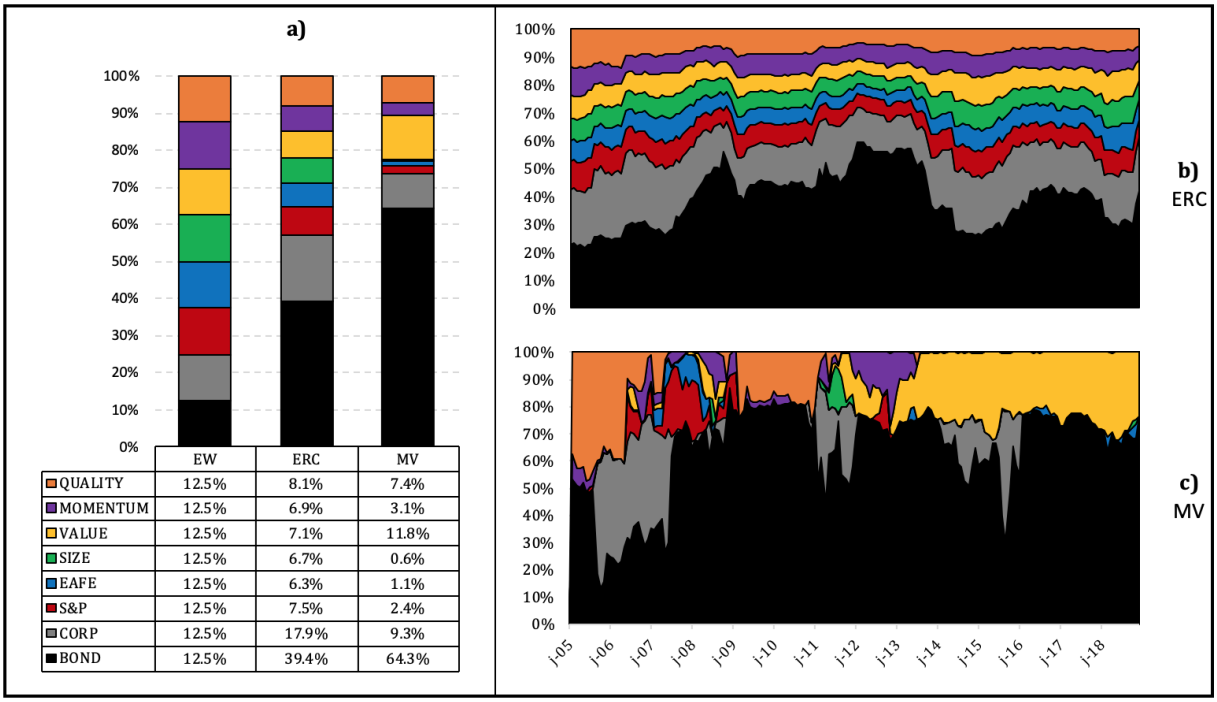
MV er strategien med den laveste standardafvigelse (1,46 pct.), gennemsnitlig samt akkumuleret afkast (0,42 pct. og 1,99 kr.). Sammenlignes dette med backtest 1.0 ses, at både standardafvigelse og gennemsnitlig afkast er blevet en anelse mindre (hhv fra 1,48 til 1,46 pct. og 0,45 til 0,42 pct), hvilket overordnet set fører til en marginalt lavere Sharpe-ratio for MV (0,22 kontra 0,23). Dette harmonerer ikke umiddelbart med hvad man ville forvente af at tilføje aktiver til sin portefølje. Omsætningshastigheden for MV er desuden steget fra 11,66 pct i backtest 1.0 til 14,58 pct. i backtest 2.0, samme trend gør sig gældende for det normaliserede Herfindahl indeks som er steget fra 0,38 til 0,46, hvilket indikerer en større koncentration af aktiver for backtest 2.0. Ovenstående observationer er interessante, da det indikerer, at inddragelsen af faktorindeksene for MV strategien primært har negative effekter, i form af et lavere gennemsnitlig og akkumuleret afkast og Sharpe-ratio, større omsætningshastighed og en større koncentration af aktiver.

ERC-strategien tilbyder igen et alternativ som ligger mellem de to andre strategier, med et gennemsnitligt afkast på 0,53 pct. (steget fra 0,44 pct), akkumuleret afkast på 2,37 kr. (steget fra 2,05 kr) samt en standard-

afvigelse på 1,85 pct. (steget fra. 1,68 pct). Dette har overordnet set ført til at Sharpe-ratioen er steget fra 0,20 til 0,23, hvilket er ensbetydende med, at ERC nu har den højeste Sharpe-ratio af de tre strategier. Dette er dog kommet på bekostning af en marginalt højere omsætningshastighed som er steget fra 3,35 pct. til 3,95 pct., og en anelse højere koncentration af aktiver med en NH værdi på 0,12 steget fra 0,08. Overordnet set har inddragelsen af de fire faktorindeks haft en positiv effekt for ERC strategiens performance, ligesom det var tilfældet ved EW.

I figur 16 vises de gennemsnitlige porteføljevægte for de tre strategier (a), samt udviklingen i porteføljevægtene for ERC (b) samt MV (c). Tendenserne er her meget som i backtest 1.0. MV er meget volatil og uforudsigelig, imens udviklingen for ERC vægtene er mere beherskede. Overordnet set er omsætningshastigheden også steget, hvilket er forventeligt, da der ved en portefølje med flere aktiver, også vil være flere porteføljevægte at justere på. Dette ses også på figur 16 ved de meget store udsving i vægtene for især MV. Backtest 2.0 er desuden præget af, at EW og ERC porteføljernes andel af aktier er blevet større. I backtest 1.0 var var det gennemsnitlige forhold mellem obligationer og aktier for EW 50/50 imens det for ERC var ca 70/30. Disse har ændret sig i backtest 2.0 til ca. at være 20/80 for EW og 60/40 for ERC. For MV er forholdet stort set uændret.

Figur 16: Gennemsnitlige vægte (a) samt udvikling i porteføljevægte for hhv. ERC (b) og MV (c)



	EW	ERC	MV
QUALITY	12.5%	8.1%	7.4%
MOMENTUM	12.5%	6.9%	3.1%
VALUE	12.5%	7.1%	11.8%
SIZE	12.5%	6.7%	0.6%
EAFE	12.5%	6.3%	1.1%
S&P	12.5%	7.5%	2.4%
CORP	12.5%	17.9%	9.3%
BOND	12.5%	39.4%	64.3%

Egen fremstilling

På baggrund af ovenstående kan det opsummeres, at der ved tilføjelsen af de fire faktorindeks fra MSCI først og fremmest er kommet en større forskel imellem de tre strategier, sammenlignet med backtest 1.0. Derudover har EW og ERC strategierne draget fordel af tilføjelsen, imens MV performer marginalt ringere. ERC-strategien er desuden den eneste strategi, som både har opnået en bedre Sharpe, og som samtidig outperformer (målt på Sharpe-ratio) alle de enkelte aktiver fra figur 14. I ovenstående backtest bliver der

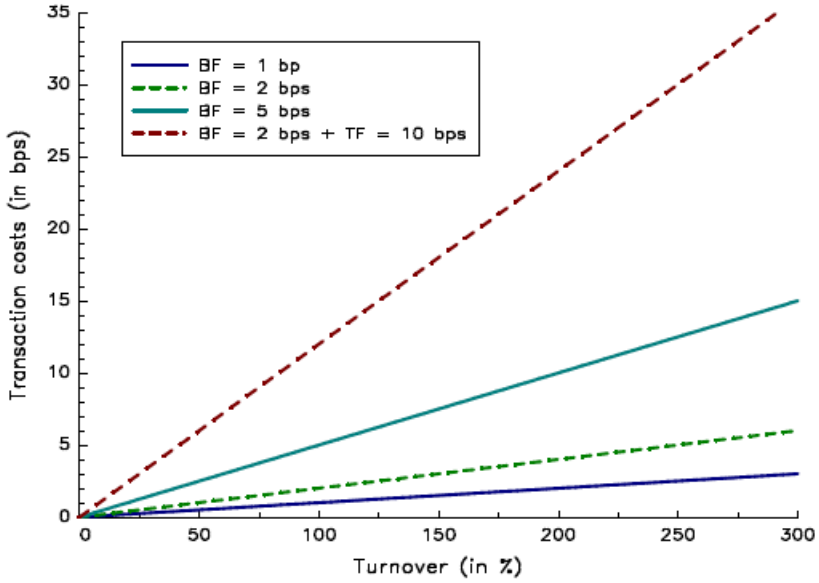
imidlertid ikke taget højde for transaktionsomkostningerne forbundet med de enkelte porteføljers omsætningshastighed. Denne problemstilling tages imidlertid op i afsnit 4.4.

4.4 Omsætningshastighed og transaktionsomkostninger

I relation til at holde afhandlingens resultater virkelighedsnære, så bør der ses nærmere på transaktionsomkostningerne, der opstår i forbindelse med de enkelte strategiers omsætningshastigheder. Dette gøres for at undersøge, hvorvidt disse transaktionsomkostninger vil æde det eventuelle merafkast som opstår, når faktorindeksene fra MSCI tilføjes porteføljen.

Omsætningshastighed bliver ofte i litteraturen anvendt som en proxy for transaktionsomkostninger. I denne afhandling er det imidlertid mere interessant at undersøge, hvorvidt der findes en metode, hvorved omsætningshastighed kan omregnes til transaktionsomkostninger for derefter at se dets indvirkning på de respektive porteføljeafkast. Ved granskning af litteraturen på dette område, så har Cazalet & Roncalli (2014) estimeret en lineær sammenhæng til denne omregning, jf. figur 17. De argumenterer for, at 1 pct. i omsætningshasighed svarer til 1 basispoint for long-only porteføljer i et aktivunivers som eks. S&P 500 eller MSCI Europa. Ligeledes estimerer de, at 1 pct. i omsætningshastighed for long-short porteføljer svarer til et sted mellem 5 og 10 basispoint. De lineære sammenhænge kan ses i figur 17.

Figur 17: Lineært forhold mellem transaktionsomkostninger og omsætningshastighed (turnover)



Kilde: Cazalet & Roncalli (2014)

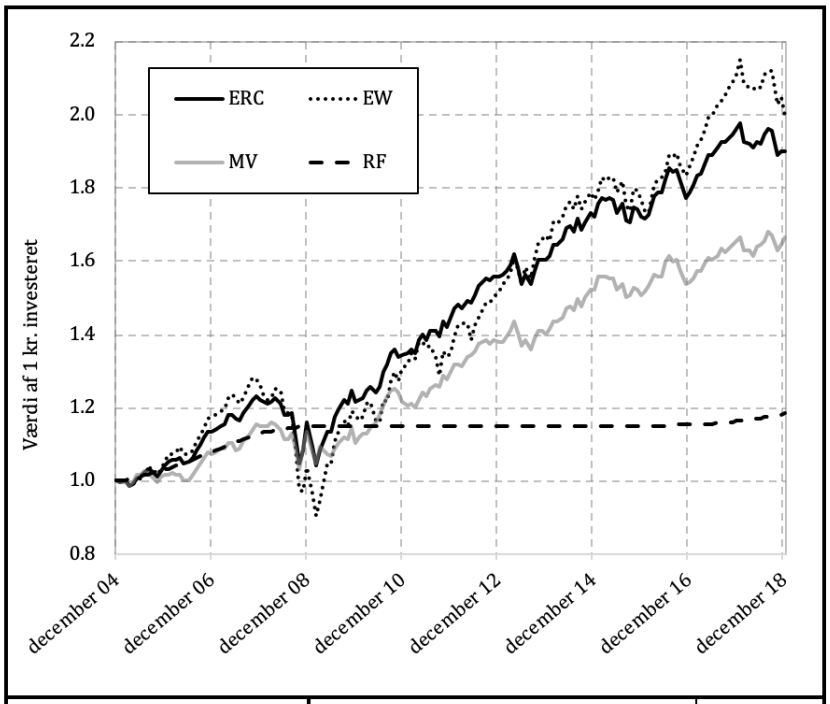
I dette projekts porteføljer anvendes konverteringsraten 1 basispoint per 1 pct. i omsætningshastighed, da porteføljerne i denne afhandling udelukkende er long-only, bestående af aktiver fra et meget tilgængeligt og likvidt aktivunivers (MSCI USA). Det skal samtidig bemærkes, at denne konverteringsrate er gældende for individuelle investorer, imens den for store institutionelle investorer formentlig vil være lavere. Der er mange forhold, der påvirker konverteringsraten mellem omsætningshastighed og transaktionsomkost-

ninger, men i denne afhandling vurderes den relativt simple konverteringsrate foreslået af Cazalet & Roncalli at være tilstrækkelig. Det er desuden samme konverteringsrate som foreslås af Bender et al. (2013), og understøttes desuden af nedenstående citat fra Bogle (2017):

> *"Transactions cost money, and we estimate that turnover costs are roughly 0.5 percent on each purchase and sale, meaning that a fund with 100 percent portfolio turnover would carry a cost to shareholders of about 1 percent of assets, year after year."*

I figur 18 og 19 opstilles hhv. backtest 1.1 og 2.1. Disse backtest er ækvivalente med backtest 1.0 og 2.0, blot med den forskel, at porteføljeafkastene er justeret for transaktionsomkostninger forbundet med omsætningshastigheden.

Figur 18: Backtest 1.1 - Fire brede aktiver justeret for transaktionsomkostninger



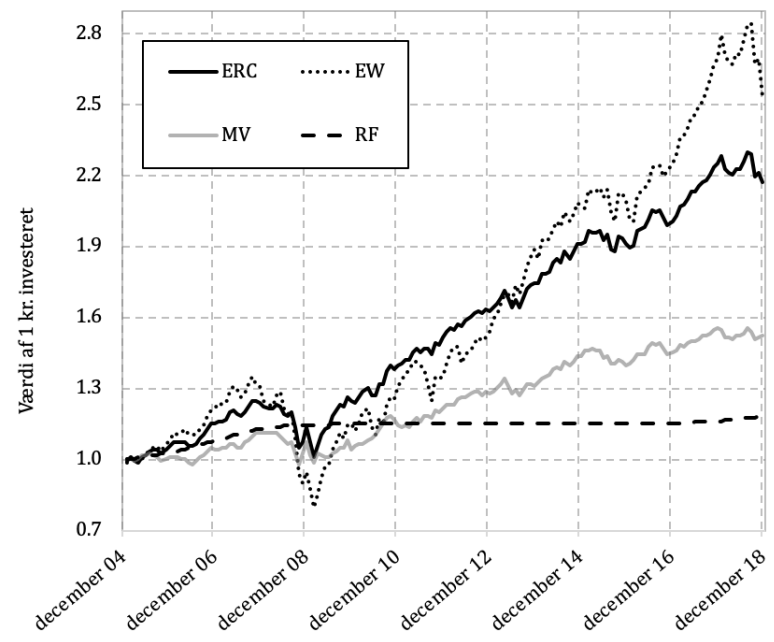
	ERC	*EW*	*MV*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.40%	0.44%	0.32%	0.10%
Standardafvigelse	1.69%	2.36%	1.48%	0.14%
Akkumuleret afkast	1.90 kr.	2.00 kr.	1.67 kr.	1.18 kr.
Sharpe-ratio	0.18	0.14	0.15	-
Gns. Omsætningshastighed (OH)	3.34%	1.08%	11.66%	0.00%
Gns. norm. Herfindahl indeks (NH)	0.08	0.00	0.38	1.00

Egen fremstilling

Af figur 18 fremgår, at forskellene på de tre porteføljestrategier er blevet væsentlig større end de var i backtest 1.0. Det ses samtidig, at i forhold til backtest 1.0, så er de gennemsnitlige afkast logisk nok faldet for alle tre strategier, og det samme er Sharpe-ratioerne. Den største forskel findes ved MV, da denne har den ultimativt største omsætningshastighed. Dette medfører, at Sharpe-ratioen er faldet fra 0,23 til

0,15 efter korrigering for transaktionsomkostninger. ERC klarer sig væsentligt bedre, da dennes Sharpe-ratio kun falder fra 0,20 til 0,18. Transaktionsomkostninger har mindst indflydelse på EW, hvor Sharpe-ratioen falder 0,15 til 0,14. MV har dermed gået fra at være strategien med højest Sharpe til at ligge på niveau med EW. MV er samtidig strategien med højest gennemsnitlig normaliseret Herfindahl indeks. Dette er ensbetydende med, at der ikke længere er tvivl om, at ERC er den bedst performende strategi, efter korrigeringen af transaktionsomkostninger. Spørgsmålet er imidlertid om denne tendens stadig gør sig gældende når de fire faktorindeks tilføjes porteføljen. Svaret hertil findes i figur 19.

Figur 19: Backtest 2.1 - Otte aktiver justeret for transaktionsomkostninger



	ERC	*EW*	*MV*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.48%	0.61%	0.26%	0.10%
Standardafvigelse	1.86%	3.16%	1.48%	0.14%
Akkumuleret afkast	2.17 kr.	2.54 kr.	1.53 kr.	1.18 kr.
Sharpe-ratio	0.20	0.16	0.11	-
Gns. omsætningshastighed (OH)	3.95%	1.61%	14.58%	0.00%
Gns. norm. Herfindahl indeks (NH)	0.12	0.00	0.46	1.00

Egen fremstilling

Tilbage i afsnit 4.3 konkluderede vi, at omsætningshastigheden steg for alle tre allokeringsstrategier, når de fire faktorindeks blev tilføjet porteføljen, hvilket ledte til spørgsmålet hvorvidt faktorprodukterne fortsat kan bidrage positivt til porteføljerne, når der tages højde for den øgede omsætningshastighed. Med udgangspunkt i figur 19, må svaret hertil være ja. I hvert fald for ERC og EW strategierne. Efter korrektion for transaktionsomkostninger ses, at ERC porteføljen oplever en stigning i Sharpe-ratioen fra 0,18 i backtest 1.1 til 0,20 i backtest 2.1. Sharpe for EW stiger fra 0,14 til 0,16, imens den falder for MV fra 0,15 til 0,11. Resultaterne er med andre ord robuste ift. transaktionsomkostninger. ERC er dermed stadig strategien med højest Sharpe-ratio, og er desuden den eneste af de tre strategier, som opnår højere Sharpe-ratio

end de enkelte faktorprodukter isoleret set, jf. figur 14. Ovenstående resultater bekræfter relevansen af transaktionsomkostnigners betydning for forskellige porteføljestrategiers performance, og viser desuden, at til trods for de mange udfordringer forbundet ved at implementere faktorinvestering i praksis, ser faktorprodukter ud til stadig at kunne bidrage positivt til en allerede veldivercificeret portefølje for ERC og EW. I næste afsnit ses nærmere på rebalanceringsfrekvensens indflydelse på de fundne resultater.

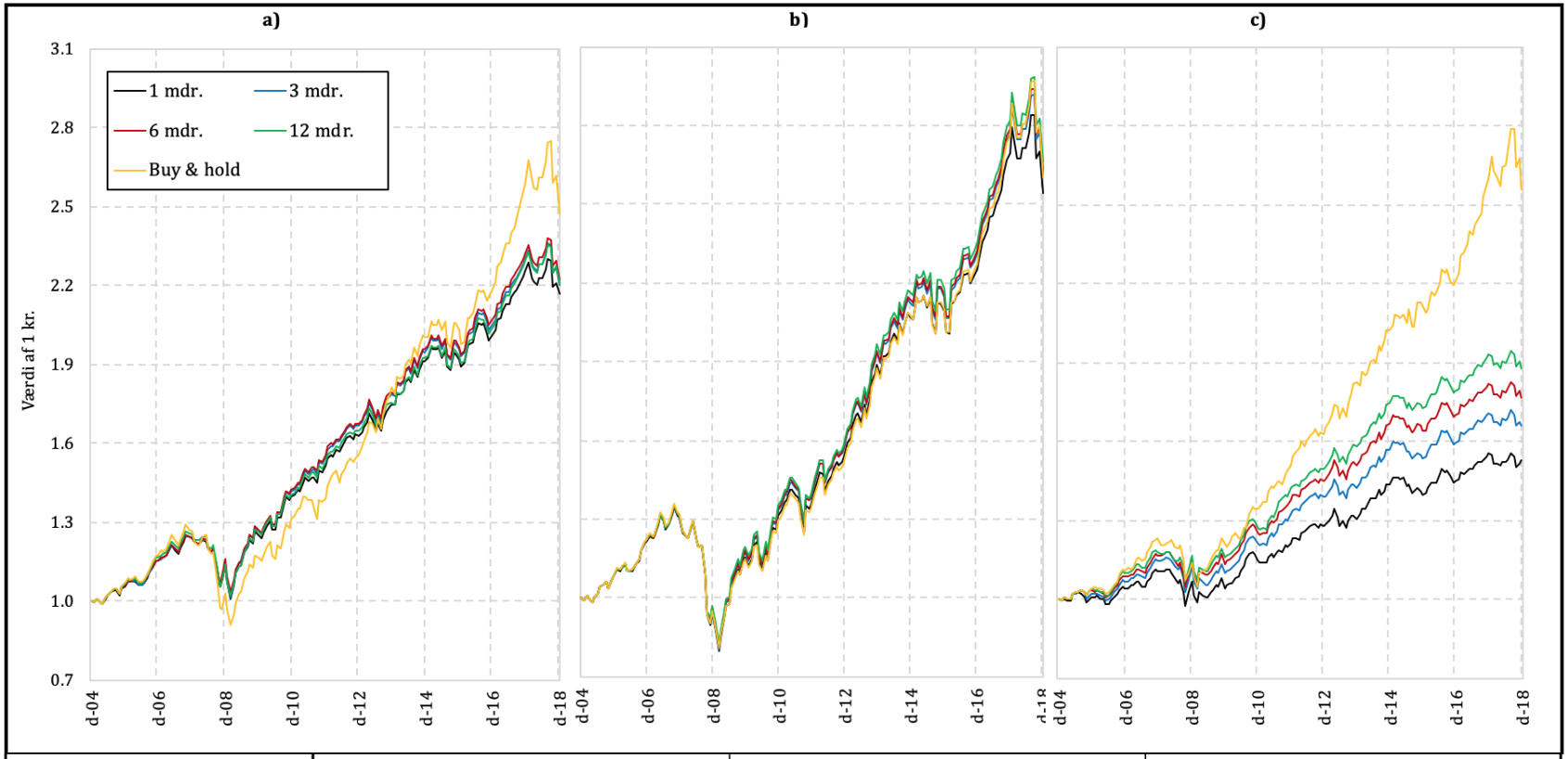
4.5 Rebalanceringsfrekvens

I de hidtidige backtests, er de respektive porteføljer rebalanceret månedligt. Fordelen ved en så hyppig rebalanceringsfrekvens er, at man ikke bevæger sig særlig langt væk fra sine "mål" for porteføljevægtene. Dermed holder man altid de aktiver man ønsker, i den mængde man ønsker, eller som en givet investeringsstrategi foreskriver. Dette har været en vigtig forudsætning i dette speciale, for at sikre et repræsentativt sammenligningsgrundlag for de tre forskellige investereingsstrategier. Dog kommer en hyppig rebalanceringsfrekvens som hovedregel på bekostning af en højere gennemsnitlig omsætningshastighed og dermed også højere transaktionsomkostninger, som mindsker det reelle afkast på porteføljen[9]. Omvendt vil længere intervaller mellem rebalancering af porteføljevægte føre til færre omkostninger ifm. at "vedligeholde" porteføljen, men vil samtidig øge risikoen for at porteføljevægtene driver langt væk fra deres oprindelige mål, hvormed investor risikerer at bevæge sig langt væk fra sin oprindelige investeringsstrategi. Investorer er derfor i mange tilfælde nødt til at vurdere, hvor ofte det kan betale sig at rebalancere porteføljen. Dette afhænger imidlertid af rigtig mange forskellige faktorer, hvorfor der heller aldrig vil være et entydigt svar på dette spørgsmål. Problematikken er dog interessant at rejse, hvorfor der i dette afsnit undersøges hvordan resultaterne fra backtest 2.1 i afsnit 4.4 påvirkes, når rebalanceringsfrekvensen ændres. Der sammenlignes i alt fem forskellige holding perioder, hvor den mindste er 1 mdr. (som i de tidligere backtests) og den længste er en "buy & hold" strategi (B&H), hvor der slet ikke rebalanceres, men i stedet sammensættes en portefølje i periode 1, hvorefter vægtene fluktuerer frit. Derudover sammenlignes med en holding periode på hhv. 3, 6 og 12 mdr. Resultaterne for de forskellige rebalanceringsfrekvenser vises i figur 20. For at opnå sammenlignelige resultater, er der taget højde for forskelle i omsætningshastigheder og transakationsomkostninger for de forskellige holdingperioder. Alle afkast er således justeret for transaktionsomkostninger på samme måde som backtest 1.1 og 2.1, svarende til, at 1 pct. omsætningshastighed = 1 basispoint. Ved månedlig rebalancering justeres afkastet således hver måned, imens afkastet justeres hver tredje måned, ved en rebalancering hver tredje måned og så fremdeles.

Figur 20 indeholder meget information og kan virke en anelse overvældende og uoverskuelig ved første øjekast. Vi kan dog trøste med at afsløre, at de vigtigste konklusioner fra figuren er relativt nemme at gennemskue. Med udgangspunkt i diagram a), som plotter de akkumulerede afkast for ERC, med forskellige rebalanceringsfrekvenser, ses, at der efter justering for transaktionsomkostninger kun er en marginal og insignifikant forskel på at rebalancere hhv. tolv, fire eller to gange om året, for både det gennemsnitlige og akkumulerede afkast samt for standardafvigelsen. Det er således kun B&H som tilbyder en benævnelsesværdig forskel fra de øvrige. For ERC, opnås den bedste Sharpe-ratio ved at reblancere sin portefølje hver sjette måned (0.214), hvilket som sagt ligger tæt på 1, 3 og 12 mdr. B&H strategien opnår i gennemsnit et højere afkast pr. måned (0,57 pct. kontra 0,49 pct. for 6 mdr.), men til en højere risiko (2,44 pct. kontra 1,84 pct.), hvilket ender ud i en Sharpe-ratio på 0,192, hvilket er den laveste af de fem.
I diagram b) findes en tilsvarende tendens, hvor rebalanceringsfrekvenser synes at have endnu mindre indflydelse på resultaterne for EW. De akkumulerede afkast ligger mere eller mindre fuldstændig oven

[9] Vi så i afsnit 4.4 at den hyppige rebalancering især straffede MV strategien meget hårdt.

Figur 20: Backtest 2.1 ved forskellige rebalanceringsfrekvenser



Nøgletal	*ERC*					*EW*					*MV*				
	1 mdr.	3 mdr.	6 mdr.	12 mdr.	B&H	1 mdr.	3 mdr.	6 mdr.	12 mdr.	B&H	1 mdr.	3 mdr.	6 mdr.	12 mdr.	B&H
*Gennemsnitlig afkast pr. måned**	0.48%	0.49%	**0.49%**	0.49%	0.57%	**0.61%**	0.62%	0.63%	0.63%	0.62%	0.26%	0.31%	0.35%	0.39%	**0.58%**
Standardafvigelse	1.86%	1.85%	**1.84%**	1.88%	2.44%	3.16%	**3.15%**	3.13%	3.12%	3.14%	1.48%	1.45%	**1.41%**	1.43%	1.81%
Sharpe-ratio	0.204	0.209	**0.214**	0.208	0.192	0.160	0.166	0.168	**0.171**	0.166	0.110	0.146	0.177	0.199	**0.263**
Akkumuleret afkast	2.17 kr.	2.20 kr.	2.22 kr.	2.21 kr.	**2.47 kr.**	2.54 kr.	2.61 kr.	2.63 kr.	**2.66 kr.**	2.61 kr.	1.53 kr.	1.66 kr.	1.77 kr.	1.88 kr.	**2.56 kr.**
Gns omsætningshastighed (OH)	3.95%	2.84%	1.94%	1.34%	**0.00%**	1.61%	0.85%	0.62%	0.49%	**0.00%**	14.58%	8.67%	5.43%	3.33%	**0.00%**
Gns. norm. Herindahl-indeks (NH)	0.121	0.121	0.119	0.116	**0.026**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.461	0.467	0.468	0.457	**0.344**

Egen fremstilling

i hinanden, selv for B&H, og der eksisterer ikke rigtig en bemærkelsesværdig forskel på de forskellige afkast og standardafvigelser. Lidt interessant er det dog, at den mindste Sharpe-ratio opnås ved månedlig rebalancering (0,16) imens den højeste opnås ved årlig rebalancering (0,17), som både har højere forventet afkast samt lavere standardafvigelse. Noget tyder således på, at fordelene ved hyppig rebalancering ikke kompenserer tilstrækkeligt for de øgede transaktionsomkostninger for EW-strategiens vedkommende.

De mest opsigtsvækkende resultater i figur 20, skal dog findes for MV-strategien i diagram c), som uden tvivl er den strategi hvor rebalanceringsfrekvensen har størst betydning for performance, hvilket ikke er overraskende, da denne strategi har markant større omsætningshastigheder, og derfor også bliver "straffet" tilsvarende hårdt, jo oftere der rebalanceres. Dette ses tydeligt i figur 20, hvor det gennemsnitlige og akkumulerede afkast stiger i takt med at holdingperioden øges, hvilket primært skyldes, at transaktionsomkostningerne mindskes. Samtidig synes standardafvigelsen at have en tendens til at falde (med undtagelse af 12 mdr og B&H), jo længere holdingperioden bliver. Kombinationen af disse to observationer fører til en konsekvent og markant stigende Sharpe-ratio, hver gang holdingperioden øges. Faktisk ender B&H for MV-strategien med at være den absolut bedst performende strategi, ikke kun i forhold til de øvrige holdingperioder for MV, men for alle de backtests, der er foretaget i hele dette speciale, med en Sharpe-ratio på hele 0,26. Her er det imidlertid meget vigtigt at påpege, at denne høje Sharpe-ratio i høj grad kan skyldes tilfældigheder eller "held" om man vil. Ser vi tilbage på, hvordan porteføljevægtene i periode 1 for MV fordeler sig, jf. figur 16 afsnit 4.3, kan vi se, at MV foreskriver, at der reelt set kun holdes BOND (53 pct.), QUALITY (38 pct) samt en smule i MOMENTUM (9 pct.). Går vi blot få perioder længere frem, ændres denne fordeling drastisk, hvilket netop er et af kendetegnene ved MV, nemlig en meget volatil og ustabil udvikling for porteføljevægtene, sammenlignet med de to andre strategier. Var porteføljen i stedet dannet blot få måneder senere, ville porteføljevægtene se helt anderledes ud, og resultaterne i figur 20 ville være tilsvarende anderledes[10]. Med andre ord er resultaterne for de forskellige holdingperioder for MV ikke særlig robuste over for ændringer i faktorer, som backtestperiodens start, længden af estimationsvinduet for varians-kovarians matricen mm. I forlængelse heraf er det således også vigtigt at fastslå, at ovenstående konklusioner *ikke* kan tolkes som generelle "regler" for hvor ofte der bør rebalanceres for de forskellige strategier. Man kan således sagtens forestille sig nogle andre resultater og konklusioner, hvis backtesten var foretaget for en anden periode, estimationsvinduet for varians-kovarians matricen var anderledes, eller hvis porteføljen bestod af andre aktiver. Vi kan dog udlede følgende punkter ud fra ovenstående resultater med en vis sikkerhed:

- Holdingperioden for hhv. ERC og EW spiller en væsentlig mindre rolle, end for MV.
- For ERC er der kun en benævnelsesværdig forkskel for B&H sammenlignet med de resterende holdingperioder, og forskellene i Sharpe-ratioerne er forholdsvis lille. Laveste Sharpe-ratio opnås ved B&H (0,192), den største opnås ved rebalancering hver 6. måned (0,214).
- EW er strategien hvor rebalanceringsfrekvensen har mindst betydning. Laveste Sharpe-ratio er ved månedlig rebalancering (0,160), den største opnås ved årlig rebalancering (0,171).
- MV er strategien hvor rebalanceringsfrekvensen har den største betydning, grundet strategiens høje omsætningshastighed, som straffer afkastet hårdt ved en hyppig rebalancering. Laveste Sharpe-ratio opnås her ved månedlig rebalancering (0,110), højeste opnås ved B&H (0,263).

[10]En tilsvarende backtest kørt for perioden 2008-2018 viser, at MV i denne periode ikke længere oplever en meget høj Sharpe-ratio for B&H sammenlignet med de andre strategier. Dette bekræfter, at den høje Sharpe-ratio for MV ved B&H i figur 20, nærmere skyldes en tilfældighed og ikke en regel. De øvrige resultater viste ikke en væsentlig forskel fra resultaterne i figur 20

- For alle tre strategier er der således mulighed for at opnå større Sharpe-ratioer ved at øge holdingperioden, og for både EW og MV opnås de laveste Sharpe-ratioer ved månedlig rebalancering efter der er justeret for transaktionsomkostninger. Det kan således tyde på, at en månedlig rebalancering ikke er optimalt i praksis, grundet høje transaktionsomkostninger som straffer det realiserede afkast.

4.6 Diskussion af resultater

Resultaterne i denne afhandling viser, at faktorprodukter, til trods for en række praktiske udfordringer, har potentiale til at bidrage positivt til en allerede veldivercificeret portefølje. Der er imidlertid en række forhold, som med fordel kan diskuteres ift. de fundne resultater. Nogle af disse forhold er også kort nævnt tidligere i specialet.

Første forhold, som er relevant at diskutere, er metodologien for vores analyse, som også blev beskrevet i afsnit 4.1. Der er rigtige mange forskellige måder at udarbejde backtests på, og der findes i litteraturen ikke konsensus om, hvad der er mest korrekt. Vores metodologi bærer præg af både fordele og ulemper. Ideelt set ville vi gerne have haft et længere estimationsvindue for vores backtests, for bl.a. at øge antallet af observationer for de udregnede kovarians-matricer. Inden valget faldt på 24 måneder, fremstillede vi imidlertid en backtest for 60 måneder, som havde samme hovedkonklusioner, som resultaterne i denne rapport. Herunder bl.a. fordelingen af vægte for de tre allokeringsstrategier samt rangeringen af Sharpe-ratioer. Problemet med et 60 måneders vindue var, at vores backtest først ville starte i 2008, lige omkring aktiemarkedets crash ifb. med finanskrisen, hvilket heller ikke er hensigtsmæssigt. En anden mulighed er at benytte ugentlige eller daglige observationer frem for månedlige. Dette blev også fravalgt, da det komplicerer behandlingen af data og de udarbejdede resultater. Månedlige afkast er desuden langt nærmere normaltfordelt sammenlignet med eksempelvis daglige afkast. Endelig er månedlige afkast nemmere at tolke og sammenligne med resultater i andet litteratur, og er nemmere at regressere mod bl.a. Fama & French's data, som også baseres på månedlige observationer.

Et andet forhold, som er vigtigt at kommentere på er, at nogle af resultaterne måske ikke virker overbevisende i rapporten. En Sharpe-ratio som eksempelvis stiger fra 0,18 til 0,20, som var tilfældet ved ERC-strategien i backtest 1.1 og 2.1, kan umiddelbart virke som en ubetydelig ændring. Her er det dog vigtigt at huske på, at disse Sharpe-ratioer er udarbejdet på baggrund af månedlige afkast. Dette betyder, at Sharpe-ratioerne for de enkelte strategier samt ændringerne heri, vil være væsentlige højere på årlig basis. Vi har valgt ikke at annualisere de udregnede Sharpe-ratioer vha. en standardformel i dette speciale, da dette kræver en række strenge antagelser, som ofte ikke er opfyldt i praksis, jf. Lo (2002). Kigger vi nærmere på eksemplet med en Sharpe-ratio, der stiger fra 0,18 til 0,20, så er dette en stigning på mere end 10 pct. Effekten af dette ses lettest ved et konkret eksempel. Hvis vi antager en risikofri rente på 0 pct. kan en Sharpe-ratio på 0,18 fås ved et gennemsnitligt månedligt afkast på 0,5 pct. til en månedlig standardafvigelse på ca. 2,8 pct. ($0,5/2,8 = 0,18$). Det betyder, at afkastet skal stige til 0,56 for at Sharpe-ratioen stiger til de 0,20. Der er således tale om mere end 10 pct. stigning i afkastet til samme standardafvigelse. På årlig basis er det ensbetydende med, at aktivets afkast approksimativt er steget fra 6 pct til 6,7 pct. til samme risiko. Denne forskel på 0,7 procentpoint for to aktiver med samme risiko, vil have en markant betydning for de akkumulerede afkast over længere tidshorisonter.

Kapitel 5

Fremtidsudsigterne for faktorinvestering

Eksistensen af det systematiske merafkast som opnås ved at eksponere sin portefølje over for faktorer, kan ikke nødvendigvis garanteres i fremtiden. Dette skyldes, at faktorer ikke er statiske, men ændrer sig over tid på baggrund af ny information og adfærd på de finansielle markeder. Et eksempel på dette er size-faktoren, der som nævnt tidligere, udviste et systematisk merafkast i perioden frem til 1981, hvorefter Banz (1981) udgav sin artikel omkring faktoren og merafkastet forsvandt, når man tager forbehold for markedseksponering. For at kunne besvare spørgsmålet, om faktorer vil udvise et merafkast i fremtiden, er det nødvendigt at vide, hvad der driver afkastet. Hertil er der i denne afhandling givet to forklaringer, rationel og adfærdsmæssig teori, der henholdsvis tror på systematisk risiko og systematiske fejl. Disse blev dækket i afsnit 2.5. Netop drivkraften bag afkastet er essentiel i henhold til at forstå, om det er en "free lunch" som markedet skal korrigere for, eller om faktorerne bærer en systematisk risiko.

Hvis man tager udgangspunkt i adfærdsmæssig teori, så vil merafkastet skyldes et adfærdsmæssigt bias, altså fejl, som investorer bliver ved med at udvise/udøve. Merafkastet vil derfor først forsvinde, så snart investorer stopper med at udøve denne adfærd eller, at det kan betale sig for rationelle investorer at arbitrære merafkastet væk. I forhold til det rationelle perspektiv, så kan faktorer eksistere i al evighed, da det højere afkast repræsenterer en højere risiko, som investor kompenseres for (Bender et al., 2013). I henhold til denne problemstilling, så er det måske muligt at komme med bud på, hvilke faktorer, der er i større risiko for at forsvinde i en nær fremtid, da disse faktorer formentlig bør være dem, som rationel teori har svært ved at forklare.

Et bud på sådan en faktor kunne være *low volatility* faktoren. Denne er ikke grundigt præsenteret i dette speciale, omend man kan argumentere for, at SIZE indekset fra kapitel 4 nærmere var et low volatility indeks forklædt som et size indeks. I henhold til almindelig finansiel teori, heriblandt CAPM, så bør en højere risiko (standardafvigelse) blive afspejlet med et henholdvis højere afkast, der også benævnes *price of risk*. Dette er imidlertid ikke tilfældet for *low volatility* faktoren. Her viser det sig, at denne har udvist et systematisk afkast, der er for højt i forhold til aktiernes lave betaer og lave standardafvigelser. Denne faktor bliver derfor også benævnt som *the risk anomaly*. Litteraturen om denne relativt nye faktor er imidlertid sparsommelig. Dette ser dog ud til at ændre sig, da flere og flere investeringsselskaber er ved at få øjnene op for denne faktor (heriblandt MSCI). Dette medfører en risiko for *factor crowding*[1], og at prisen som resultat heraf, vil stige på low volatility aktier, til det som den reelt set burde være i henhold til teorien. Dermed vil det højere afkast for aktier med lav volatilitet forsvinde, ligesom det skete med size-faktoren (Ang,

[1]Flere investorer investerer i en given faktor, hvilket driver priserne op, og merafkastet vil altså forsvinde

2014). Hvorom alting er, så vil dette kun være tilfældet, såfremt man får arbitræret merafkastet væk og får lavet produkter, der rent faktisk afspejler faktoren, hvilket ikke nødvendigvis kommer til at ske, da det som vist i denne afhandling kan være svært at skabe investerbare produkter, der perfekt repræsenterer faktorer.

Det svært at sige, om de valgte faktorer i denne afhandling vil fortsætte med at udvise et systematisk merafkast ift. markedet. Dette skyldes, at de kan forklares både vha. rationel og adfærdsmæssig teori. Her kan bl.a. nævnes, at en faktor som value udmærket kan forklares vha. rationel teori. Omvendt så kommer rationel teori lidt til kort, når der forsøges at forklare merafkastet ved quality og momentum, hvilket måske betyder, at de er i større risiko for at blive i arbitreret væk i fremtiden, da kilden til merafkastet *måske* består i, at investorer begår systematiske fejl, og hvis investorer derfor begynder at opføre sig rationelt, så vil merafkastet altså forsvinde.

En faktor, der har udvist et systematisk merafkast i en lang periode er value. Denne har været i stand til at modstå factor crowding. Vayanos & Woolley (2013) kommer dog med et modargument til factor crowding. De påstår, at denne effekt kun opstår så længe allokeringen af ressourcerne til disse faktorer er permanente. Hvis der i stedet er tale om flows, og at man *jagter* faktorer, jamen så vil der blive ved med at eksistere momentum og quality, da allokeringen af ressourcer sker på baggrund af valgte definitioner af faktorer. På denne måde bliver disse definitioner af faktorer en selvopfyldende profeti, fordi investorer bliver ved med at jagte merafkastet. Hvis dette er tilfældet, så vil adfærdsmæssig teori fortsætte med at være bedst mulig forklaring for visse faktorer, fordi investorer altså fortsætter med at udøve systematiske fejl, fordi man tror der eksisterer en faktor (Barberis & Shleifer, 2003).

Faktorer har altså en række forskellige forklaringer og hvorvidt de kommer til at eksistere i fremtiden er svært at sige. Dog kan man stadig sige med en vis sikkerhed, at markedsfaktoren formentlig fortsat vil levere et afkast højere end den risikofrie rente. Omvendt så er faktorer som momentum, quality og low volatility i større risiko for at blive arbitreret væk, da rationel teori har svært ved at forklare disse. Omvendt så vil merafkastet imidlertid kun forsvinde, hvis folk stopper med at *jagte* faktorerne, hvilket formentlig ikke bliver tilfældet.

Kapitel 6

Konklusion

Faktorinvestering som fænomen er langt fra nyt, men har været under udvikling i mange år. Det kan således ses som resultatet af en længere udviklingsproces, der gradvist har raffineret og udbygget den klassiske investeringsteori med rødder helt tilbage til Markowitz' mean-variance analyse. Det er en tilgang til investering, som er baseret på eksistensen af faktorer, der over længere tidshorisonter har tilbudt investorer en risikopræmie ift. markedet, og som er velfunderet i akademisk litteratur. Denne præmie reflekterer, afhængigt af den teoretiske baggrund, en systematisk risiko, som investor påtager sig (rationel), eller eksistensen af systematiske fejl begået af investorer (adfærdsmæssig). Faktorinvestering er imidlertid stadig forbundet med mange udfordringer og problemstillinger, som endnu ikke findes entydige svar på. Den centrale problemstilling, der rejses i denne afhandling, omhandler de udfordringer, der opstår, når principperne bag faktorinvestering skal implementeres i praksis samt implikationerne af disse udfordringer for investorer. I afhandlingen konkluderes det bl.a., at merafkastet for visse faktorer er signifikant lavere, når de dannes ud fra et likvidt og tilgængeligt aktivunivers som S&P 500 sammenlignet med et akademisk aktivunivers som CRSP. Derudover findes, at de investerbare faktorprodukters diversifikationspotentiale er markant mindre end ved akademiske faktorer, som dem præsenteret i Fama & French (1993). Årsagen hertil er, at faktorprodukter i praksis ofte kun går langt i de underliggende aktiver, hvormed eksponeringsgraden over for markedet vil være meget høj. Dette medfører, at eksponeringen over for de enkelte faktorer bliver svækket, og at korrelationen mellem faktorprodukterne bliver høj. Til trods for ovenstående udfordringer konkluderes, at fire investerbare faktorprodukter fra MSCI[1] stadig formår at øge diversifikationspotentialet til en allerede veldivercificeret portefølje bestående af amerikanske stats- og virksomhedsobligationer, aktier samt internationale aktier dannet på baggrund af en EW og ERC-strategi. For MV kan faktorprodukterne ikke bidrage positivt til porteføljen. Disse resultater er desuden robuste ift. transaktionsomkostninger forbundet med at rebalancere de forskellige porteføljer. Endelig konkluderes det, at rebalanceringsfrekvensen efter justering for transaktionsomkostninger har en yderst begrænset effekt for ERC og EW, mens den er af afgørende betydning for en MV-strategi. For alle tre strategier er det imidlertid muligt at opnå højere Sharpe-ratioer ved at øge holdingperioden til mere end én måned, hvilket tyder på, at månedlig rebalancering ikke er en optimal rebalanceringsfrekvens i praksis.

[1] Disse repræsenterer aktiver, som er eksponeret over for faktorerne size, value, momentum og quality.

Litteraturliste

Ang, A. (2014), 'Asset management - a systematic approach to factor investing', *Oxford University Press* .

Ang, A., Goetzmann, W. N. & Schaefer, S. (2009), 'Evaluation of active management of the norwegian government pension fund–global', *report to the Norwegian Ministry of Finance* .

Asness, C. S., Moskowitz, T. J. & Pedersen, L. H. (2013), 'Value and momentum everywhere', *The Journal of Finance* **68**(3), 929–985.

Banz, R. W. (1981), 'The relationship between return and market value of common stocks', *Journal of financial economics* **9**(1), 3–18.

Barberis, N. & Huang, M. (2001), 'Mental accounting, loss aversion, and individual stock returns', *the Journal of Finance* **56**(4), 1247–1292.

Barberis, N. & Shleifer, A. (2003), 'Style investing', *Journal of financial Economics* **68**(2), 161–199.

Barberis, N., Shleifer, A. & Vishny, R. (1998), 'A model of investor sentiment', *Journal of financial economics* **49**(3), 307–343.

Bender, J., Briand, R., Melas, D. & Subramanian, R. A. (2013), 'Foundations of factor investing', *Available at SSRN 2543990* .

Black, F., Jensen, M. C., Scholes, M. et al. (1972), 'The capital asset pricing model: Some empirical tests', *Studies in the theory of capital markets* **81**(3), 79–121.

Bogle, J. C. (2017), *The Little Book of Common Sense Investing: The Only Way to Guarantee Your Fair Share of Stock Market Returns*, John Wiley & Sons.

Campbell, J. Y., Campbell, J. W., Lo, A. W.-C., MacKinlay, A. C., Champbell, J. J., LO, A. A., Lo, A. W. et al. (1997), *The econometrics of financial markets*, princeton University press.

Carhart, M. M. (1997), 'On persistence in mutual fund performance', *The Journal of finance* **52**(1), 57–82.

Cazalet, Z. & Roncalli, T. (2014), 'Facts and fantasies about factor investing', *Available at SSRN 2524547* .

Chen, N.-F., Roll, R. & Ross, S. A. (1986), 'Economic forces and the stock market', *Journal of business* pp. 383–403.

DeMiguel, V., Garlappi, L. & Uppal, R. (2007), 'Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy?', *The review of Financial studies* **22**(5), 1915–1953.

Dimson, E., Marsh, P. & Staunton, M. (2011), 'Equity premia around the world', *Available at SSRN 1940165* .

Duchin, R. & Levy, H. (2009), 'Markowitz versus the talmudic portfolio diversification strategies', *Journal of Portfolio Management* **35**(2), 71.

Fama, E. F. (1963), 'Mandelbrot and the stable paretian hypothesis', *The journal of business* **36**(4), 420–429.

Fama, E. F. (1970), 'Efficient capital markets: A review of theory and empirical work', *The journal of Finance* **25**(2), 383–417.

Fama, E. F. (1976), *Foundations of finance: portfolio decisions and securities prices*, Basic Books (AZ).

Fama, E. F. & French, K. R. (1993), 'Common risk factors in the returns on stocks and bonds', *Journal of financial economics* **33**(1), 3–56.

Fama, E. F. & French, K. R. (2012), 'Size, value, and momentum in international stock returns', *Journal of financial economics* **105**(3), 457–472.

Fama, E. & French, K. R. (2015), 'A five-factor asset pricing model', *Journal of financial economics* **116**(1), 1–22.

Frazzini, A., Israel, R. & Moskowitz, T. J. (2012), 'Trading costs of asset pricing anomalies', *Fama-Miller working paper* pp. 14–05.

Graham, B. (1965), *The intelligent investor*, Prabhat Prakashan.

Graham, B., Dodd, D. L. F., Cottle, S. et al. (1934), *Security analysis*, McGraw-Hill New York.

Grinblatt, M. & Titman, S. (2002), *Financial Markets and Corporate Strategy, Second Edition*, The McGraw-Hill Companies.

Grossman, S. J. & Stiglitz, J. E. (1980), 'On the impossibility of informationally efficient markets', *The American economic review* **70**(3), 393–408.

Harvey, C. R., Liu, Y. & Zhu, H. (2016), '… and the cross-section of expected returns', *The Review of Financial Studies* **29**(1), 5–68.

Hong, H. & Stein, J. C. (1999), 'A unified theory of underreaction, momentum trading, and overreaction in asset markets', *The Journal of finance* **54**(6), 2143–2184.

Jegadeesh, N. & Titman, S. (1993), 'Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency', *The Journal of finance* **48**(1), 65–91.

Kempf, A. & Memmel, C. (2006), 'Estimating the global minimum variance portfolio', *Schmalenbach Business Review* **58**(4), 332–348.

Levy, R. A. (1967), 'Relative strength as a criterion for investment selection', *The Journal of Finance* **22**(4), 595–610.

Lintner, J. (1965), 'Security prices, risk, and maximal gains from diversification', *The journal of finance* **20**(4), 587–615.

Liu, W. (2006), 'A liquidity-augmented capital asset pricing model', *Journal of financial Economics* **82**(3), 631–671.

Lo, A. W. (2002), 'The statistics of sharpe ratios', *Financial analysts journal* **58**(4), 36–52.

Luenberger, D. G. (1997), 'Investment science', *OUP Catalogue* .

Maillard, S., Roncalli, T. & Teïletche, J. (2008), 'On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios', *Available at SSRN 1271972* .

Malkiel, B. G. (2003), 'The efficient market hypothesis and its critics', *Journal of economic perspectives* **17**(1), 59–82.

Miller, G. (2006), 'Needles, haystacks, and hidden factors', *Journal of Portfolio Management* **32**(2), 25.

Mossin, J. (1966), 'Equilibrium in a capital asset market', *Econometrica: Journal of the econometric society* pp. 768–783.

Overby, L. J. (2010), 'Capm, factor models and apt'.
URL: *http://www.juloverby.dk/courses/cfi/slides/mean_var_3.pdf*

Reinganum, M. R. (1981), 'Misspecification of capital asset pricing: Empirical anomalies based on earnings' yields and market values', *Journal of financial Economics* **9**(1), 19–46.

Roll, R. & Ross, S. A. (1980), 'An empirical investigation of the arbitrage pricing theory', *The Journal of Finance* **35**(5), 1073–1103.

Rosenberg, B. & Marathe, V. (1976), Common factors in security returns: Microeconomic determinants and macroeconomic correlates, Technical report, University of California at Berkeley.

Ross, S. (1976), 'The arbitrage theory of capital asset pricing', *Journal of Economic Theory* **13**(3), 341–360.
URL: *https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:jetheo:v:13:y:1976:i:3:p:341-360*

Samuelson, P. (1965), 'Proof that properly anticipated prices fluctuale randomly, lndusrrial management review 6'.

Sharpe, W. F. (1964), 'Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk', *The journal of finance* **19**(3), 425–442.

Tobin, J. (1958), 'Liquidity preference as behavior towards risk', *The review of economic studies* **25**(2), 65–86.

Treynor, J. L. (1962), 'Jack treynor's' toward a theory of market value of risky assets", *Available at SSRN 628187* .

Vayanos, D. & Woolley, P. (2013), 'An institutional theory of momentum and reversal', *The Review of Financial Studies* **26**(5), 1087–1145.

Winkelmann, K., Suryanarayanan, R., Hentschel, L. & Varga, K. (2013), 'Macro-sensitive portfolio strategies: Macroeconomic risk and asset cash-flows', *MSCI Market Insight* .

Zhang, X. F. (2006), 'Information uncertainty and stock returns', *The Journal of Finance* **61**(1), 105–137.

Appendiks

A: Variansen for en portefølje med n aktiver

Vi ønsker at udlede variansen til porteføljeafkastet for n aktiver. Variansen til aktiv i's afkast betegnes σ_i^2, variansen til porteføljens afkast betegnes σ_p^2, og kovariansen mellem aktiv i og j's afkast betegnes σ_{ij}. Udledningen foretages relativt enkelt:

$$\sigma_p^2 = E\big[(r_p - \bar{r_p})^2\big]$$

$$\sigma_p^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i}\right)^2\right]$$

$$\sigma_p^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r_i})\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \bar{r_j})\right)\right]$$

$$\sigma_p^2 = E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \bar{r_i})(r_j - \bar{r_j})\right]$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Ovenstående er et vigtigt resultat, der viser hvordan variansen til et porteføljeafkast, relativt nemt kan udregnes vha. de parvise kovarianser for porteføljens aktivafkast samt aktivernes respektive porteføljevægte. Desuden fremgår det af ligningen, at porteføljevariansen afhænger positivt af kovariansen mellem de enkelte aktiver, hvilket er ensbetydende med, at diversifikationspotentialet øges, når kovariansen mellem afkast mindskes.

B: Law of Iterated Expectations

Vi definerer to informationssæt I_t og J_t, hvor al informationen fra I_t også indgår i J_t, men J_t indeholder også yderligere information, som ikke indgår i I_t. Vi kan derfor skrive:

$$J_t \supseteq I_t$$

Derudover, så er forventningerne til en tilfældig variabel X, afhængig af disse to informationssæt, så vi kan skrive

$$\mathbb{E}[X|I_t] \; og \; \mathbb{E}[X|J_t]$$

"Law of Iterated Expectations" påstår:

$$\mathbb{E}[X|I_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|J_t]|I_t]$$

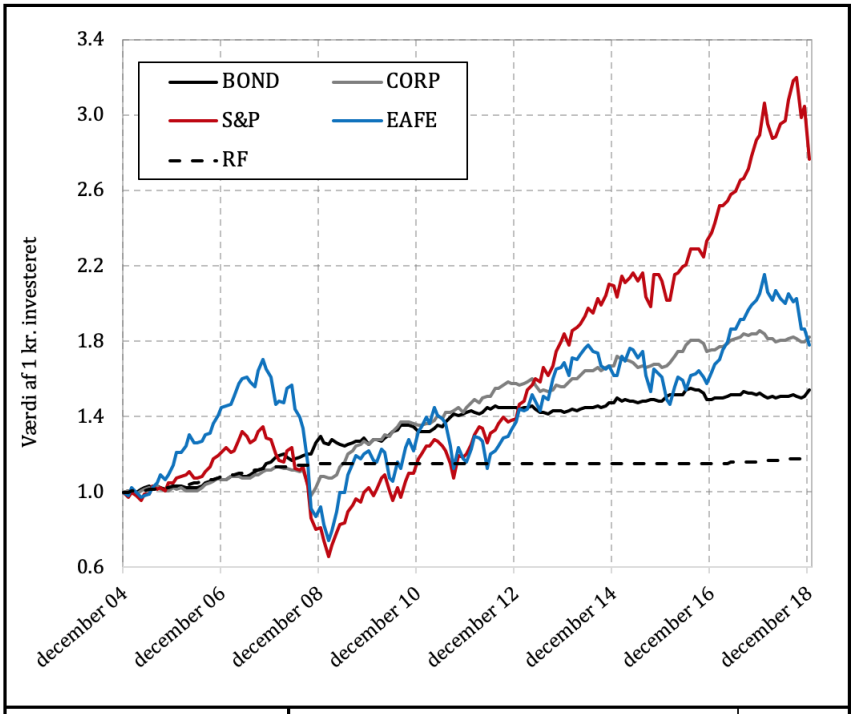
Dette implicerer at det bedste forecast man kan lave af en tilfældig variabel X, hvis man kun har informationssættet I_t tilgængeligt, er den forecast man kunne lave, hvis man havde det bedre informationssæt til rådighed, J_t. Derfor kan det begrænsede informationssæt, I_t ikke anvendes til at bestemme forecast fejlen, man ville opnå, hvis man lavede en forecast på baggrund af informationssættet J_t (Samuelson, 1965). Dette kan omskrives til

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X|J_t]|I_t] = 0$$

C: Akkumulerede afkast for fire teoretiske indeks

Nedenstående figur lister akkumulerede samt gennemsnitlige afkast pr. måned, standardafvigelser og Sharpe-ratioer for fire teoretiske ikke-investerbare indeks, samt for den risikofrie rente, RF:

- BOND*: S&P U.S. Treasury Bond Index
- CORP*: S&P 500 Investment Grade Corporate Bond Index
- S&P*: S&P 500
- EAFE*: MSCI EAFE Index



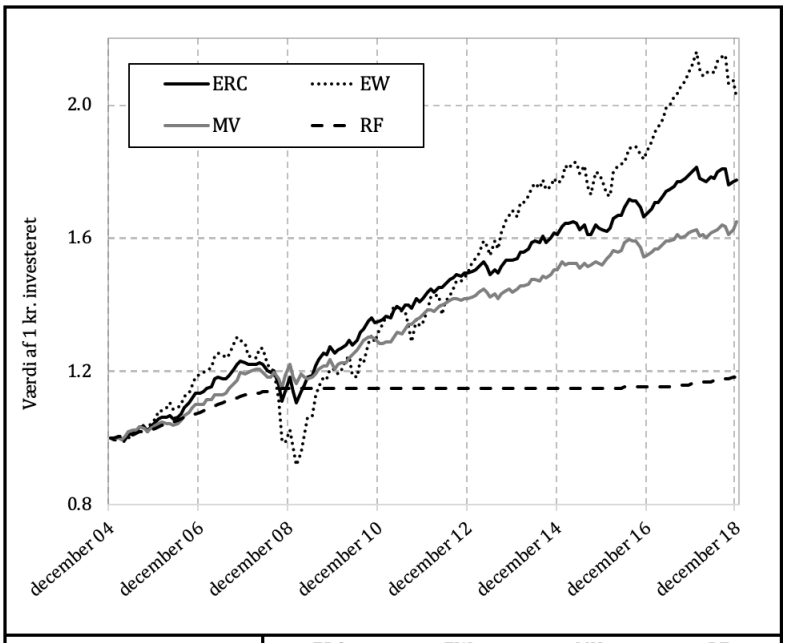
	*BOND**	*CORP**	*S&P**	*EAFE**	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.26%	0.37%	0.69%	0.46%	0.10%
Standardafvigelse	0.96%	1.37%	3.98%	4.80%	0.14%
Akkumuleret afkast	1.54 kr.	1.82 kr.	2.77 kr.	1.78 kr.	1.18 kr.
Sharpe-ratio	0.17	0.19	0.15	0.08	-

Egen fremstilling

*Den anførte asterisk indikerer, at der tale om teoretiske indeks og ikke ETF's

D: Backtest for fire teoretiske indeks

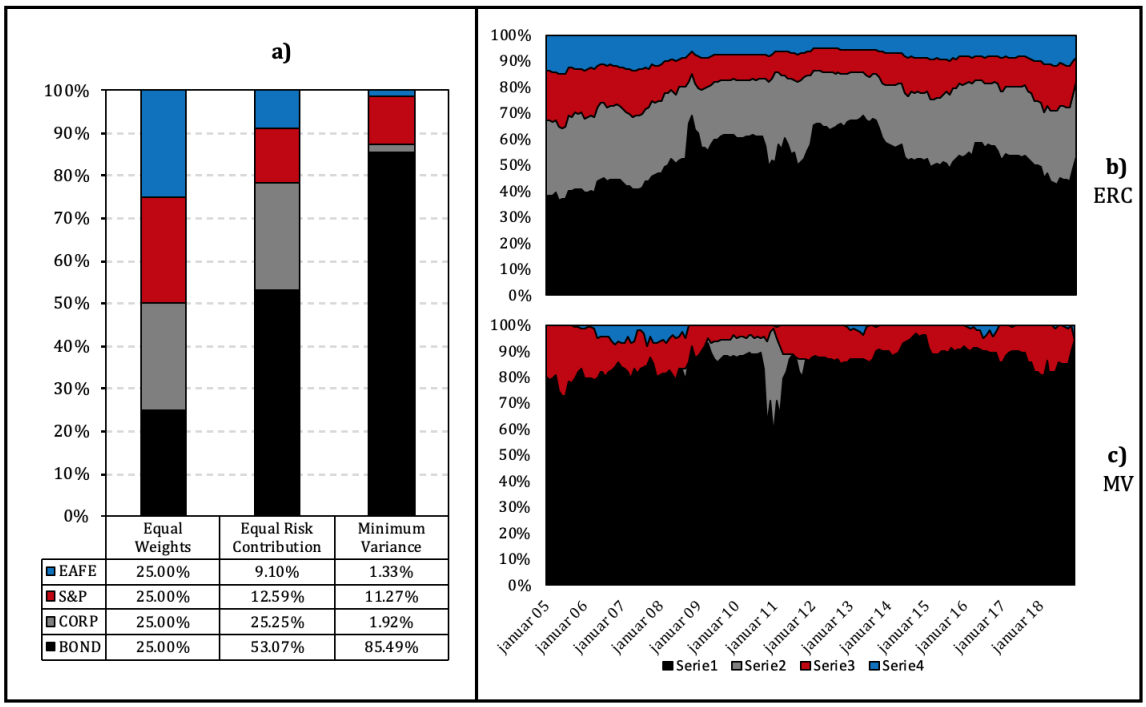
Nedenstående figur illustrerer en backtest for de fire teoretiske indeks fra appendiks C:



	ERC	*EW*	*MV*	*RF*
Gennemsnitlig afkast pr. md.	0.35%	0.44%	0.30%	0.10%
Standardafvigelse	1.11%	2.24%	0.89%	0.14%
Sharpe-ratio	0.22	0.15	0.23	0.00
Akkumuleret afkast	1.78 kr.	2.02 kr.	1.65 kr.	1.18 kr.

Egen fremstilling

E: Vægte for de fire teoretiske indeks

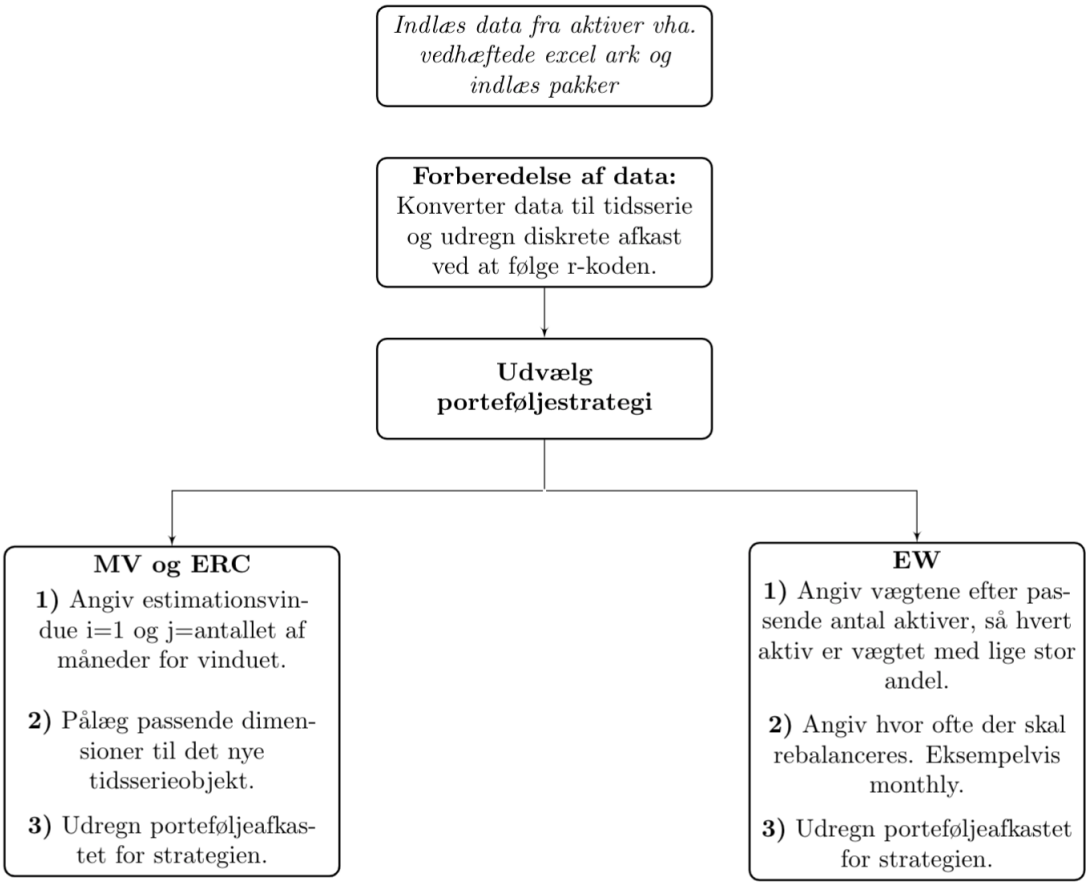


	Equal Weights	Equal Risk Contribution	Minimum Variance
EAFE	25.00%	9.10%	1.33%
S&P	25.00%	12.59%	11.27%
CORP	25.00%	25.25%	1.92%
BOND	25.00%	53.07%	85.49%

Egen fremstilling

F: Vejledning til R-koder

Den følgende flow diagram er en vejledning til R-koderne og har til formål at gøre det muligt for læseren at replikere data, såfremt man har indhentet det relevante data.



I R-koden indlæses først datasættet. Herefter oprettes priserne som tidsserie variabel, hvorefter afkastene for disse bliver udregnet. Dernæst skal der udvælges den strategi, som man vil køre en backtest for. Ved valg af MV og ERC skal der udregnes en kovarians matrice. Hertil er det vigtigt, man angiver månederne korrekt som angivet i flow-diagrammet. Dernæst kommer vel nok det vigtigste, og det er at få dimensionerne mellem vægtene og afkastene til at være lige store, før afkastet for strategien kan udregnes.Dette er formentlig det sværeste, hvis resultaterne skal replikeres, for dette skal gøres manuelt. Når dette er gjort, så fås porteføljevægtene.

Ved EW er det noget nemmere, da man blot her skal angive vægtene selv samt, hvor ofte rebalanceringen finder sted. Herefter klarer pakken PerformanceAnalytics resten, og afkastene bliver udregnet.

G: Links til R-koder, Excel-ark og datasæt

På følgende links findes R-koder, Excel-ark samt datasæt benyttet til at fremstille resultaterne i dette speciale.

Forkortet link: https://bit.ly/2KlOw8I

Fuld link: https://drive.google.com/drive/folders/1Ld5_s_ZoamjlK9td_lhi2BXzHH1lbr3T?usp=sharing