

# Forecasting af aktieafkast

En komparativ analyse af lineære og ikke-lineære modellers evne til at forecaste aktieafkast ud fra statistik og profitabilitet.

Af:

Emil Færgemann Viken & Kristoffer Schøn

*Kandidatafhandling, cand.oecon*



**AALBORG UNIVERSITET**  
STUDENTERRAPPORT

31. maj 2018

**Titel:**

Forecasting af aktieafkast

**Projektperiode:**

10. semester, forårssemester 2018

**Projekt gruppe:**

10

**Gruppemedlemmer:**

---

Emil Viken Færgemann

---

Kristoffer Schøn

**Vejleder:**

Lasse Bork

**Kopier: 2**

**Normal sider: 58**

**Antal sider: 90**

**Færdiggjort: 31-05-2018**



---

## Abstract

Empirical finance studies have for years been studying the field of forecasting stock returns often with mixed results. This paper presents an examination of the S&P500 index and will be using one-step-ahead forecast to predict the return of the series. The intention of the paper is to compare linear models with non-linear models, and test which type of models that statistical and profitable preforms the best. We also try to combine the forecast for the linear and non-linear models to see if this produce better results. We use data from 2007 until 2017 and the forecast is in two different time periods. The first period is taking place in a bull market, the in-sample period runs from 2014 until 2017, and the out-of-sample forecast is in 2017. The next period is opposite the first one in a bear market and is taking place around the financial crisis of 2008. The in-sample period is in 2007-2008 and the out-of-sample period is in for the remaining of 2008. The paper uses the Box-Jenkins technique for the linear models. For the non-linear models the artificial neural network will be used.

To avoid making general assumptions about the forecasting models, the time interval for the return will be divided into three periods. The three periods consist of daily, weekly and monthly returns, which give this paper another dimension because the length of the return could have an impact on the forecasting models performance. It is clear that especially the neural networks deliver good result in the profitable analysis for the monthly returns.

We find that the non-linear models perform better than the linear models, especially in the bull market. The data is not normally distributed, which can be an explanation for the poor performance for the linear models. For the bear market the results are more mixed when the models are compared with both statistical and profitable measures. Three out of five times a combination model is chosen as the best. This also indicates that the linear models do have some sort of structure that can be used to modeling the data.

# Indhold

<b>Figurer</b>	<b>v</b>
<b>Tabeller</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introduktion</b>	<b>1</b>
1.1 Metode . . . . .	3
1.1.1 Model udvælgelse . . . . .	4
1.1.2 Profitabilitet . . . . .	5
1.1.2.1 Algoritmehandel . . . . .	5
1.1.3 Transaktionsomkostninger . . . . .	6
1.1.4 Økonomisk værdi . . . . .	6
<b>2 Lineære modeller</b>	<b>8</b>
2.1 Stationaritet . . . . .	8
2.1.1 Modelfit . . . . .	9
<b>3 Artificiel neurale netværk</b>	<b>10</b>
3.1 Hvad er et neuralt netværk? . . . . .	10
3.1.1 Sigmoid neuroner . . . . .	11
3.1.2 Backpropagation algoritmen, og hvordan den virker . . . . .	12
3.1.2.1 To antagelser for tabsfunktionen . . . . .	13
3.1.2.2 De fire fundamentale ligninger bag backpropagation . . . . .	14
<b>4 Evalueringsmetoder</b>	<b>16</b>
4.1 RMSE, MAE og Diebold-Mariano . . . . .	16
4.2 Retningen . . . . .	17
4.3 Mincer-Zarnowitz . . . . .	17
4.4 Sharpe-ratio . . . . .	18
4.5 Henriksson-Merton . . . . .	18
4.6 Pesaran-Timmerman . . . . .	19
4.7 Beregning af MRAR . . . . .	19
<b>5 Data og forecastingsproces</b>	<b>21</b>
5.1 Tidsperiode . . . . .	21
5.2 Deskriptiv statistisk . . . . .	22
5.3 Forecastingproces . . . . .	23
<b>6 Analyse</b>	<b>25</b>

---

6.1	Bull markedes forecastingsanalyse . . . . .	25
6.1.1	Udvælgelse af forecastingsmodeller . . . . .	25
6.1.2	Daglig afkast . . . . .	27
6.1.2.1	Statistisksforecastanalyse . . . . .	28
6.1.2.2	Profitabilitetsanalyse . . . . .	32
6.1.2.3	Risikojusteret afkast . . . . .	36
6.1.2.4	Opsummering . . . . .	38
6.1.3	Ugentlig afkast . . . . .	38
6.1.3.1	Statistisksforecastanalyse . . . . .	38
6.1.3.2	Profitabilitetsanalyse . . . . .	39
6.1.3.3	Risikojusteret afkast . . . . .	41
6.1.3.4	Opsummering . . . . .	41
6.1.4	Månedlig afkast . . . . .	42
6.1.4.1	Statistisksforecastanalyse . . . . .	42
6.1.4.2	Profitabilitetsanalyse . . . . .	42
6.1.4.3	Risikojusteret afkast . . . . .	43
6.1.4.4	Opsummering . . . . .	44
6.2	Bear markedes forecastingsanalyse . . . . .	44
6.2.1	Daglig afkast . . . . .	44
6.2.1.1	Statistisksforecastanalyse . . . . .	44
6.2.1.2	Profitabilitetsanalyse . . . . .	45
6.2.1.3	Risikojusteret afkast . . . . .	46
6.2.1.4	Opsummering . . . . .	46
6.2.2	Ugentlig afkast . . . . .	47
6.2.2.1	Statistisksforecastanalyse . . . . .	47
6.2.2.2	Profitabilitetsanalyse . . . . .	47
6.2.2.3	Risikojusteret afkast . . . . .	48
6.2.2.4	Opsummering . . . . .	48
6.2.3	Månedlig afkast . . . . .	49
6.2.3.1	Statistisksforecastanalyse . . . . .	49
6.2.3.2	Profitabilitetsanalyse . . . . .	49
6.2.3.3	Risikojusteret afkast . . . . .	50
6.2.3.4	Opsummering . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>51</b>
7.1	Kombinationsmodellernes manglende afkast performance . . . . .	51
7.2	Long-and-short strategien . . . . .	52
7.3	Mincer-Zarnowitz bias påvirkning på profitabiliteten . . . . .	53
7.4	Stemmer rapportens resultater overens med den efficiente markedshypotese?	54
<b>8</b>	<b>Konklusion</b>	<b>56</b>
	<b>Litteratur</b>	<b>59</b>

---

<b>A Figurer</b>	<b>62</b>
<b>B Tabeller</b>	<b>67</b>
<b>C Ligninger</b>	<b>88</b>

# Figurer

3.1	Illustration for perceptron . . . . .	10
3.2	Sigmoid funktion . . . . .	12
3.3	Eksempel på notation for vægtene i netværket . . . . .	12
3.4	Eksempel på notation for bias og aktivering i netværket . . . . .	13
5.1	Udviklingen i S&P500-indeks lukkekurser fra år 2007 til år 2018 . . . . .	21
5.2	Afkastserien for S&P500-indekset fra år 2007 til år 2018 . . . . .	22
6.1	One-step ahead forecasts for de fem forecastingsmodeller for de første 100 forecasts	29
6.2	Forecastingsmodellerne absolutte akkumulerede fejl igennem hele forecastings- perioden . . . . .	30
A.1	Det ugentlige afkast for S&P500-indekset fra år 2007 til og med år 2017 . . . . .	63
A.2	Det månedlig afkast for S&P500-indekset fra år 2007 til og med år 2017 . . . . .	63
A.3	One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det ugentlige afkast for bull perioden . . . . .	63
A.4	De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det ugentlige afkast for bull perioden . . . . .	64
A.5	One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	64
A.6	De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	64
A.7	One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det daglig afkast for bear perioden . . . . .	65
A.8	De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det daglig afkast for bear perioden . . . . .	65
A.9	One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det daglig ugentlig for bear perioden . . . . .	65
A.10	De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden . . . . .	66
A.11	One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det daglig månedlig for bear perioden . . . . .	66
A.12	De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det månedlig afkast for bear perioden . . . . .	66



# Tabeller

4.1	Henriksson-Mertons sandsynlighedsfordeling . . . . .	18
5.1	Deskriptiv statistik for det daglige, ugenlige og månedlige S&P500 afkast fra år 2014 til og med 2017 . . . . .	22
5.2	Deskriptiv statistik for det daglige, ugenlige og månedlige S&P500 afkast fra år 2007 til og med 2008 . . . . .	23
6.1	AIC-værdier for det daglige, ugenlige og månedlige afkast for bull perioden . . .	26
6.2	Fejl-værdier for neurale netværk på det daglige, ugenlige og månedlige afkast for bull perioden . . . . .	27
6.3	Resultaterne af LM-test for modellernes residualer for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	28
6.4	LM-test for de standardiserede residualer for modellerne for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	28
6.5	Forecastingsevalueringer for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	29
6.6	Diebold-Mariano test for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	30
6.7	Forecastingsevalueringer for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	31
6.8	Diebold-Mariano test for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	31
6.9	Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	33
6.10	Henriksson-Merton test og Pesaran-Timmermann test resultater for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	34
6.11	Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	35
6.12	Henriksson-Merton test og Pesaran-Timmermann test resultater for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	36
6.13	Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	36
6.14	Risikojusteret afkast for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden . . . . .	37
6.15	Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det daglige afkast i bull perioden . . . . .	37

---

6.16 Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det ugentlige afkast i bull perioden . . . . .	41
6.17 Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det månedlige afkast i bull perioden . . . . .	43
6.18 Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det daglige afkast i bear perioden . . . . .	46
6.19 Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater . . . .	48
6.20 Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det månedlige afkast i bear perioden . . . . .	50
7.1 Unbiased/biased modeller . . . . .	53
8.1 Oversigt over vindende modeller i forhold til forskellige evalueringer og afkastlængder . . . . .	56
B.1 Resultaterne af LM-test for modellernes residualer for bull perioden . . . . .	68
B.2 LM-test for de standardiserede residualer for bull perioden . . . . .	68
B.3 Forecastingskriterier for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig og det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	68
B.4 Diebold-Mariano test for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden . . . . .	69
B.5 Forecastingsevalueringer for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden . . . . .	69
B.6 Diebold-Mariano test for de seks hybridmodeller for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden . . . . .	70
B.7 Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bull perioden . . . . .	70
B.8 Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for forecastingsmodellerne for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden . . . . .	71
B.9 Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bull perioden . . . . .	71
B.10 Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for hybridmodellerne for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden . . . . .	72
B.11 Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bull perioden . . . . .	72
B.12 Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bull perioden . . . . .	72
B.13 Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	73
B.14 Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	74
B.15 Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	74
B.16 Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden . . . . .	75
B.17 BIC-værdier for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden . .	75
B.18 Fejl-værdier for neurale netværk på det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden . . . . .	76

---

B.19	Resultaterne af LM-test for modellernes residualer for bear perioden . . . . .	76
B.20	LM-test for de standardiserede residualer for bear perioden . . . . .	77
B.21	Forecastingskriterier for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig og det månedlig afkast for bear perioden . . . . .	77
B.22	Diebold-Mariano test for de fem forecastingsmodeller for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden . . . . .	78
B.23	Forecastingskriterier for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden . . . . .	78
B.24	Diebold-Mariano test for de seks hybridmodeller for det daglige, ugentlige og månedlige afkast for bear perioden . . . . .	79
B.25	Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden . . . . .	80
B.26	Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for forecastingsmodellerne for det daglige, ugentlige og månedlige afkast for bear perioden . . . . .	80
B.27	Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden . . . . .	81
B.28	Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for hybridmodellerne for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden . . . . .	81
B.29	Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden . . . . .	82
B.30	Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden . . . . .	82
B.31	Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden . . . . .	83
B.32	Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden . . . . .	84
B.33	Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden . . . . .	84
B.34	Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden . . . . .	85
B.35	Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det månedlige afkast for bear perioden . . . . .	85
B.36	Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlige afkast for bear perioden . . . . .	86
B.37	Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det månedlig afkast for bear perioden . . . . .	86
B.38	Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlig afkast for bear perioden . . . . .	87

# 1 Introduktion

At forecaste finansielle afkast har været en af de mest udbredte økonomiske dicipliner igennem de sidste 60 år. Muligheden for at tilegne sig en profitabel fordel gennem et korrekt forecast er tillokkende for enhver investor. Tilbage i 1970'erne beskrev Eugene Fama gennem *efficient capital markets*, hvordan markederne fuldt ud reflekterer alt tilgængelig information. Ved ny information spredes nyheden hurtigt og er indkopereret i prisen på aktivet uden forsinkelse. Dette efterlader investor uden mulighed for at forecaste fremtidige afkast. Hverken teknisk eller fundamental analyse vil være til nogen nytte her. [23]

*The accepted view was that when information arises, the news spreads very quickly and is incorporated into the prices of securities without delay. Thus, neither technical analysis, which is the study of past stock prices in an attempt to predict future prices, nor even fundamental analysis, which is the analysis of financial information such as company earnings and asset values to help investors select “undervalued” stocks, would enable an investor to achieve returns greater than those that could be obtained by holding a randomly selected portfolio of individual stocks, at least not with comparable risk. [23]*

Den effiente markedshypotese er associeret med ideen omkring en random walk, hvor prisændringen forekommer stokastisk fra tidligere priser. Logikken bag random walk lyder, at informationen på markedet er uafhængt, og informationen er derfor direkte priset ind i markedet. Nyheder er per definition uforudsigelige, og derfor er prisændringer tilfældige.

*Most early studies supported the random walk model, finding that the predictable variation in equity returns was both economically and statistically small. However, much recent research has found evidence that equity returns can be predicted with some reliability. [20]*

Siden slutningen af det tyvende århundrede er overbevisningen af den effiente markedshypotese mindsket. Flere finansielle økonomer og statistikere har en tro på, at afkastet er delvist forudsigeligt. Fremtidige aktiepriser kan delvist forudsiges ud fra prismønstre og nogle bestemte fundamentale valueringsmetoder. [23]

Et merafkast, som tidligere blev anset for en anormalitet i markedet, kan muligvis være forudsigeligt. ARIMA-modellen har været et bredt anvendt redskab igennem de sidste mange årtier. Modellen er forholdsvis simpel at implementere og let at forstå. Dette har også betydet, at den har været populær, når det kom til forecasting.[33] Endvidere har benyttelsen af ikke-lineære modeller i nyere tid vundet indpas, såsom neurale netværk. Derfor kan det også anses som problematisk kun at anvende de simple univariate ARIMA-modeller, da ARIMA-modellerne har det svært med at modellere data hvis dette ikke er

---

lineært. Selvom det kan være svært for andre modeller at ligge en betydelig afstand til ARIMA-modellen, ses det alligevel, at den ofte bliver slået. [11]

Selvom der argumenteres for, at afkastet kan være delvist forudsigeligt, bliver opgaven ikke mindre vanskelig af at pålægge yderligere to faktorer, som har indflydelse på den enkelte investors investeringsstrategi. Disse to faktorer udgøres af henholdsvis transaktionsomkostninger og risikoniveauet.

Er det muligt at producere positiv profit selv efter pålægning af transaktionsomkostninger og risikokorrektion? Et argument for, hvorfor EMH stadig er relevant, ligger i investors adfærd. Når først en profitabel investeringsstrategi er alment kendt, ”vil spekulanter søge mod denne og udvande profibiliteten”. [11] Et element der besværliggør forecasting yderligere, er de kaotiske dynamikker data besidder.

*After the stock market crash of October 19, 1987, interest in nonlinear dynamics, especially deterministic chaotic dynamics, has increased in both the financial press and the academic literature. [14]*

Markedet opfører sig ofte langt fra lineært, og markedsbevægelserne er større end hvad, der kan forventes statistisk sandsynligt ud fra en normalfordeling. Derfor er behovet for de ikke-lineære modeller vokset. En forklaring, der kan ligge til grund for dette, kan findes gennem kaotiske systemer, der styrer aktiemarkedet. Kaos kan være interessant af flere årsager. I *buisness cycle* litteraturen er der to måder at generere output fluktationer. I Box-Jenkins tidsserie modeller har økonomien en stabil ligevægt, men bliver konstant forstyrret af eksterne choks. For de kaotiske modeller, følger økonomien en ikke-lineær dynamik, som er selvforstærkende og ikke går mod ligevægten igen. [14]

For at modellere den ikke-lineære dynamik kan flere modeller anvendes. Både de bilineære *Threshold Autoregressive* (TAR) modeller samt den *Autoregressive Heteroskedastiske* (ARCH), men ifølge Zhang er gevinsten ikke stor ved brug af disse modeller [33]. I nyere tid er kunstige neurale netværk anbefalet som et alternativ til tidsserie forecasting. Det neurale netværk besidder en fordel i dens fleksible ikke-lineære modelleringssevner. [33] Styrken for de neurale netværk ligger i dens evne til mønstergenkendelse. I forhold til de lineære modeller tolererer neurale netværk bedre støj, kaotiske komponenter og brede haler. De neurale netværk har dog en svaghed, når det kommer til overfitting af data, stort antal af parametre, samt at finde og igen replikere en stabil løsning. [17]

Litterært er der på forecastingsområdet ikke en sandhed når det kommer til forecastingsteknik og hvilken metode der er bedst. Dette skyldes især at tidsserie er komplekse og hver enkelte model ikke kan indfange alle de forskellige mønstre der gemmer sig i data. Både ARIMA og neurale netværk har styrker og svagheder som modeller. ARIMA-modellerne har ofte haft det problematisk med at modellere komplekse ikke-lineære problemer og den evne til dette kan sjældent anskues som tilstrækkelig. Ligeledes har det givet blandede resultater, når neurale netværk skulle modellere lineære problemer. En hybrid model kan sommetider vise sig som en god strategi, hvis data indeholder karakteristika som både indeholder lineære og ikke-lineære sammenhænge. [33]

I den finansielle litteratur er sammenhængen mellem et præcist og profitabelt afkast ofte blevet undersøgt. Et godt og præcist forecast med lave forecast fejl er ikke nødvendigvis et forecast der omsættes til en kapitalgevinst. Et forecast der handles ud fra forecast fejlen, vil nødvendigvis ikke kunne generere samme profit, som et forecast der er guidede ud fra ændringen i forecastet. [19]

En måde for investorer at genere velstand er via allokering af frie midler til at opnå den største nytte. I forbindelse med dette kommer begrebet risikoaversion også ind i billedet. Investorne skal altid gøre sig overvejelser om hvor meget risiko de er villig til at påtage sig for at opnå et højere afkast.

Introduktionen til dette emne rejser en del interessante spørgsmål. Hvorledes er det muligt at forecaste afkastet ud fra en ARIMA-, neuralt netværk- eller hybrid model? Et holistisk syn på modellen er vigtigt. Derfor er det også vigtigt at notere at et godt forecast målt ud fra statistiske kriterier ikke nødvendigvis betyder, at man har lavet et profitabelt forecast, og et forecast, som passer til investors risikoprofil. Derfor vil de tre evaluering-metoder anvendes for at teste, om de forecastede modeller har en chance mod en simpel *buy-and-hold* strategi.

**Problemformulering:** *Hvilken af lineære eller ikke-lineære modeller giver de mest optimale forecasts baseret på statistiske kriterier og profitabilitet, og er dette det samme uafhængigt af afkastlængden?*

## 1.1 Metode

Debatten om forecastingsmodeller, der leverer resultater som vedvarende slår benchmark, har i den akademiske verden været stor. Malkiel har været en af de økonomer, der har udvist størst tiltro til den foromtalte EMH. I Malkiel's bog *A Random Walk Down Wall Street* beskriver han, hvordan chimpanser, der kaster dartpile mod *Wall Street Journal*, kunne opnå en portefølje, der kan performe lige så vel, som en portefølje sammensat af de skarpeste eksperter. [23]

*I conclude that our stock markets are far more efficient and far less predictable than some recent academic papers would have us believe. Moreover, the evidence is overwhelming that whatever anomalous behavior of stock prices may exist, it does not create a portfolio trading opportunity that enables investors to earn extraordinary risk adjusted returns [23]*

Ligesom Malkiel er fortaler for EMH, findes der økonomer, der på den anden side mener, at afkast kan forecastes, og et ekstraordinært risikojusteret afkast kan opnås. I forbindelse med at opnå det højere risikojusteret afkast, skeles der til to paradigmer; *fundamental* og *teknisk* analyse. Hvad angår den fundamental analyse peger senere økonomisk teori på forhold som *dividend-price ratio* kan forudsige en solid andel af aktieafkastet, især jo længere tidsperioden er [3]. Ligeledes anvendes teknisk analyse når tidligere priser og prismønstre kan være med til at forecaste fremtidige priser [2]. Inden for teknisk analyse er der en del metoder der anvendes for at opnå en højere profitabilitet. Ligesom ved teknisk analyse og mønstergenkendelse er modellerne bestemt til at skulle forecaste ud fra tidligere prisniveauer og ARIMA har historisk set været en populær lineær model til tidsserie forecast [33]. Ligeledes er neurale netværk blev mere inddrævet i den finansielle litteratur. For at lave en optimal komparativ opstilling mellem de to modeller er det kun de historiske priser der vil bestemme forecastet for de to modeller. Forecastene ud fra de

historiske værdier danner dermed baggrund for den statistiske og profitable evaluering samt det risikjusterede afkast.

I rapporten er der afgrænset fra fundamentale måleinstrumenter og fokus er istedet at forecaste på historisk data. Der afgrænses for de fundamentale måleenheder så som dividend-price ratio, da inklusion af disse variable vil besværliggøre forecastet.

Tidshorizonten har ofte spillet en afgørende rolle ved investeringsstrategier. Her kan der blandt andet refereres til Hawawini der påviser at beta på enkeltstående aktier bliver påvirket af tidsintervallet samt markedsværdien. Beta på aktier med en lille markedsværdi går fra en offensiv til defensiv aktie, jo kortere tidsintervallet bliver. Ligeledes bliver beta på aktier med en stor markedsværdi højere, jo længere tidsintervallet bliver. [13]. Rapporten har valgt at arbejde med daglige, ugentlige og månedlige data, for ligeledes at se om forskellige tidsintervaller har påvirkning på forecastet og dets resultater. Rapporten har valgt data fra S&P500 i perioden år 2007 til og med år 2017.

### 1.1.1 Model udvælgelse

De lineære modeller vælges ud fra hvilke modeller der opnår de laveste *Akaike informationskriterie* (AIC), dog med et maksimum på fem lags for autoregressive og moving average modeller, og et maksimum på to lags for ARIMA-modeller.

Neurale netværk er blevet et populært værktøj i den finansielle verden. [17] I denne rapport bygges det op af fem lags, der benyttes som input-variable. Derefter forarbejdes input-variableerne igennem neuroner, for til sidst at danne output variabelen, som i dette tilfælde er forecastet. Metoden, der er anvendt, er teknisk, da det neurale netværk bliver designet ud fra laggede værdier af den afhængige variabel. Antallet af hidden layers er ligeledes afgørende for det neurale netværks performance. Ofte er der en hårfin balancegang for at finde det optimale hidden layers. Ved at forøge hidden layers øges muligheden også for overfitting, som fører til dårligere out-of-sample performance. I denne rapport anvendes mellem et og to hidden layers. Ligeledes skal der foretages et valg om antallet af neuroner i hvert hidden layer. Da der ikke eksisterer noget perfekt valg, men kun en "rule of thumb" kaldet *geometric pyramid*, anvendes denne i rapporten. Geometric pyramid foreslår et interval mellem en halv til tre gange så mange neuroner, som der er input variable i datasættet. [17]

Tidserien, der er brugt til at designe det neurale netværk, er opbygget i to forskellige enheder; træning og testning. Træningssættet bruges til mønstergenkendelse i data og udgør den største andel af de samlede observationer; omkring 75 procent. Testsættet evaluerer det trænedede netværks evner og udgør 25 procent.

Der findes to skoler på området omkring træning af data, og hvornår denne træning skal stoppes. *Konvergenstilgangen*, som er den ene skole, ønsker, at modellen ikke fanges i et lokalt minimum og pointerer sværhedsgraden i at ramme et globalt minimum. Træningsperioden skal først stoppe, når den ikke længere kan forbedres. Den anden skole kaldet den *træningsbaserede tilgang* helliger sig til, at afbrydelser skal finde sted i træningen. Dermed bliver vægtene tilfældige; det neurale netværk bedømmes ud fra dens evne at få data til at passe til den generelle population. Problemet med denne tilgang er, at man ikke ved, om træningsperioden kan forbedres.

Den primære forskel på de to skoler er overtræning versus overfitting. I denne rapport

vælges den konvergensbaserede metode, da det ønskes at ramme den laveste fejl som overhovedet muligt. [17]

### 1.1.2 Profitabilitet

Det er alment accepteret inden for den akademiske verden, at man evaluerer modellers evne til at forecaste ud fra statistiske kriterier, så som hvor langt de forecastede værdier fra de aktuelle værdier. Men som nævnt tidligere, så er det ikke garenteret at den model der giver de laveste fejl også er den model der giver det højeste afkast. Derved suppleres den statistiske undersøgelse med en profitabilitetsundersøgelse. Det ultimative mål for at teste en model og dermed en strategi er at måle profitabiliteten. For mange tradere og analytikere er markedsretningen vigtigere end værdien af forecastet. Da der handles ud fra troen på om markedet skal op eller ned den følgende dag. Selve afkastet for tidsserien beregnes:

$$R = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t),$$

hvor  $R$  er afkastet og  $P_t$  er prisen til tidspunkt  $t$ . Denne rapport ønsker at måle de estimerede modellers profitabilitet mod en simpel buy-and-hold strategi. Buy-and-hold strategien indebærer en lang position i markedet ved første observation, og et salg foretages først ved sidste observation. Herefter bliver det samlede afkast for perioden beregnet. Endvidere vil mål så som *Sharpe-ratio*, antal vindende handler samt den samlede profit efter transaktionsomkostninger opstilles. Dette for at give mere nuanceret billede af modellerne end kun hvordan de performer ud fra deres respektive afkast. For eksempel er Sharpe-ratio en metode at vurdere det risikojusteret afkast, men samtidig også en metode man skal være påpasselig med da denne besidder svagheder. Derfor vil *Morningstar Risk-Adjusted Return* (MRAR) også blive anvendt som mål for profitabiliteten og bevise hvor meget velstand investor er villig til at opgive for at modtage mere sikkerhed. Vindende handler inkluderes, da dette mål beskriver hvor effektiv modellerne er til at fange markedsudviklingen. Tilsidst vil transaktionsomkostninger inkluderes da investor i sidste ende er interesseret i hvor meget den samlede gevinst er på bundlinjen.

#### 1.1.2.1 Algoritmehandel

De udvalgte modeller i rapporten vil handle efter ændringen i de forecastede værdier. Der udarbejdes to algoritmer der handler på baggrund af to handelsstrategier; en *buy-and-sell* strategi og en long-and-short strategi. I buy-and-sell strategien vil algoritmen købe hvis ændringen i den forecastede værdi er over nul; den vil ligeledes sælge hvis denne er under nul. Hvis der forekommer flere perioder hvor ændringerne i de forecastede værdier er positive, så bibeholdes den nuværende position indtil der forekommer et salgssignal

$$\Delta_f = \begin{cases} \Delta_f > 0 = \text{lang} \\ \Delta_f < 0 = \text{sælg} \end{cases}$$



I long-and-short strategien vil ændringen i de forecastede værdier under nul ikke længere kun udløse et salgssignal, men der vil nu kunne tages en kort position i aktivet. Ligeledes vil en ændring i de forecastede værdi over nul betyde et køb af den korte position. Long-and-short strategien følger derfor

$$\Delta_f = \begin{cases} \Delta_f > 0 = \text{lang} \\ \Delta_f < 0 = \text{sælg} \\ \Delta_f > 0 = \text{køb} \\ \Delta_f < 0 = \text{kort} \end{cases}$$

Ydermere anvendes en *Henriksson-Merton* test, der undersøger, om investorer kan producere et højere afkast end benchmark. Denne markedstimning i forecastet er her altafgørende for at kunne opnå et højere afkast. *Pesaran-Timmermann* tester om der er statistisk signifikans mellem de forecastede værdier og den aktuelle retning på aktivet, og bliver inkluderet for at teste for nøjagtigheden af retningen for de forskellige forecastningsmodeller.

### 1.1.3 Transaktionsomkostninger

Transaktionsomkostninger er et ofte debateret emne, når det kommer til at teste for profitabilitet. Målet i rapporten er at estimere transaktionsomkostninger, som er realistiske og så virkelighedstro som overhovedet muligt. En tabel over den dynamiske models afkast og samlede profit vil blive opstillet. Differensen mellem de to mål er transaktionsomkostningerne i procent.

Det valgte datasæt i rapporten er S&P500-indekset. Valget i forhold til transaktionsomkostninger stod mellem en indeksfond, som tracker markedet, eller en *Exchange-Traded Fond* (ETF) som ligeledes tracker markedet. Forskellen på indeksfonden og ETF'en er antallet af mulige handler, der kan foretages på en dag. Indeksfonden kan kun handles ved lukkeprisen, og kan derfor kun omsættes en gang i døgnet. Modsat kan en ETF handles på lige fod med aktier, og køb og salg kan foretages i hele handelsperioden.

For at notere prisen per transaktion er Bloomberg blevet anvendt. Prisen for Vanguard 500 indeksfond er listet til 0.15 procent. Prisen på Vanguard S&P500 ETF er listet til 0.04 procent. Derfor handles S&P500 gennem ETF handel, da det sikrer den laveste transaktionsomkostning.

### 1.1.4 Økonomisk værdi

Til sidst i rapporten anvendes MRAR, der beregner det risikojusteret afkast for tidsserien. I klassisk finansiel forstand er *mean-variance* den måde hvor investorerne vurderer risikoen mod afkastet. Investor vil altid søge mod efficiente investeringer [24]. Derfor ønskes det også, at se om de lineære eller ikke-lineære modeller kan levere et forbedret risikojusteret afkast.

Investorerne vil i denne rapport justerer for risiko ved at beregne en straf risiko som bliver målt gennem  $\gamma$ . Denne straf er baseret ud fra *expected utility theory* (EUT). EUT

påstår at investor vælger mellem risiko og afkast ved at sammenligne forventede nytteværdier. Derefter beregnes den vægtede sum ved at gange nytteværdierne med dens respektive sandsynlighed [25]. I denne rapport sættes  $\gamma$  lig to, da det også anvendes som mål af både Goetzmann & Alii samt Morningstar [22]. MRAR straffer de afkast der viser de største udsving og derigennem den største volatilitet.

## 2 Lineære modeller

I dette afsnit beskrives teorien bag de lineære modeller der vil anvendes i denne rapport. Først vil der komme en kort gennemgang af stationaritet, og hvordan der testes for dette gennem en Dickey-Fuller test. Derefter beskrives ARMA-modellen og antagelserne bag denne. AIC anvendes som selektionskriterie for at vælge det mest optimale antal af lags der skal anvendes i de lineære modeller.

### 2.1 Stationaritet

En tidsserie, der ikke er stationær, er uforudsigelig, og kan hverken modelleres eller forecastes. Derfor er det vigtigt at arbejde med stationært data. Hvis en serie ikke er stationær, og derved indeholder en unit root, kan den blive gjort stationær ved tage differensen. Ved hjælp af en *Argumented Dickey-Fuller* test kan det tjekkes, om data er stationært. Dickey-Fuller testen er

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \epsilon_t,$$

hvor  $\Delta$  betegner ændringen,  $y_t$  er tidsserien på tidspunkt  $t$ ,  $\gamma$  er parameteren der angiver om serien har en unit root. Nulhypotesen lyder, at hvis  $\gamma$  er lig nul, indeholder serien en unit root, alternativt afvises nulhypotesen og data vil dermed være stationært. Nulhypotesen accepteres eller afvises på baggrund af de kritiske værdier i Dickey-Fuller tabellen.[6]

$$H_0 = \gamma = 0,$$

$$H_A = \gamma < 0.$$

Hvis data er stationært, er det muligt at modellere gennem en ARMA-model. I denne model er det muligt at kombinere en autoregressiv proces  $AR(p)$  med en moving average proces  $MA(q)$ .  $AR(p)$  består af  $p$  lags og  $MA(q)$  består af  $q$  lags. Hvis  $q = 0$  følger  $y_t$  en  $AR(p)$ , og hvis  $p = 0$  følger  $y_t$  en  $MA(q)$ . De autoregressive led er lags af den afhængige variabel,  $y_t$ . Moving average leddene er lags af fejlløbet,  $\epsilon_t$ . Denne kombination opskrives:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \beta_i \epsilon_{t-i}$$

### 2.1.1 Modelfit

Det er naturligt, når man estimerer en model at tjekke, hvor godt data fitter. AIC er et god selektionskriterie for at sammenligne konkurrerende modeller. Ved at tilføje flere lags for  $p$  og/eller  $q$  er der stor chance for, at summen af de kvadrerede estimerede residualer reduceres. Problemet er dog, at inklusion af ekstra koefficienter reducerer forecasting performance. AIC-værdien skal ideelt set være så lille som mulig. Jo bedre fit modellen har, jo mere nærmer AIC sig  $-\infty$ . [6] AIC opskrives på følgende måde:

$$AIC = T * \ln \sum_{i=1}^n \epsilon_t^2 + 2n,$$

hvor  $T$  er antallet af observationer,  $\epsilon_t^2$  er de kvadrerede residualer, mens  $n$  er antallet af estimerede parametre. [6]

# 3 Artificiel neurale netværk

I dette afsnit vil teorien for artificielle neurale netværk blive beskrevet, da disse modeller repræsenterer de ikke-lineære modeller som skal anvendes til at forecaste S&P500 afkastet.

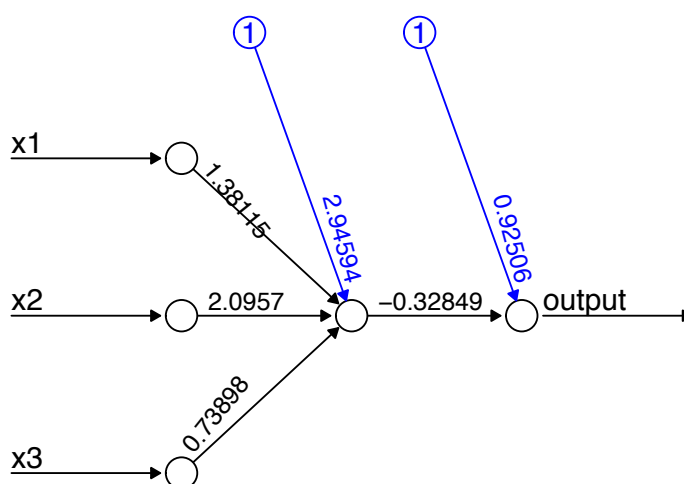
Der startes med at forklare hvad et neuralt netværk er, og hvordan det fungerer. Dernæst kigges der på den algoritme, *backpropagation*, der anvendes i de neurale netværk for at minimere netværkets tabsfunktion, og derved giver de mest optimale vægte.

## 3.1 Hvad er et neuralt netværk?

Et neuralt netværk er inspireret af menneske hjernen, og finder derfor sine rødder inden for den biologiske verden. Menneskets hjerne består af millioner af neuroner der er forbundet til hinanden, hvilket gør mennesket i stand til at foretage komplekse beslutninger. På samme måde som den menneskelige hjerne er opbygget, så kan man opbygge et tilsvarende netværk, hvor forskellige neuroner er forbundet, og tager beslutninger på baggrund af forskellige informationer. [27]

Den måde hvorpå man opstiller sådan et neuralt netværk er ved at introducere et udtryk der kaldes for *perceptron*. Perceptroner tager forskellige binære inputs,  $x_1, x_2, \dots$ , og producer ét enkelt binært output. Dette er vist i nedenstående illustration.

Figur 3.1. Illustration for perceptron



I figur 3.1 ses det at denne perceptron har tre inputs;  $x_1, x_2$  og  $x_3$ . Men før dette netværk kan tage nogle beslutninger, så skal der tilegnes nogle vigtigheder for disse inputs. Derfor introduceres inputenes *vægte*,  $w_1, w_2, \dots$ , som skal anvendes i en simpel regel til at tage

beslutninger. Netværkets output, som lige nu er et binært system, tager enten værdien nul eller et, hvis den vægtede sum,  $\sum_j w_j x_j$ , er større eller mindre end en *grænseværdi*. Denne grænseværdi er lige nu også binær og er en parameter af perceptronen. [27] Dette betyder at outputtet tager værdien ét hvis den vægtede sum af inputtene overstiger grænseværdien; dette kan udtrykkes som

$$output = \begin{cases} 0, & \text{hvis } \sum_j w_j x_j \leq \text{grænseværdi}, \\ 1, & \text{hvis } \sum_j w_j x_j > \text{grænseværdi}. \end{cases}$$

Ovenstående betingelse er lidt besværlig at anvende, og der kan derfor laves to ændringer for at simplificere denne. Man kan skrive den vægtede sum som produktet af to vektorer,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sum_j w_j x_j$ . Den anden ændring er at rykke grænseværdien om på den anden side af ulighedstegnet, og derigennem erstatte det med perceptrons *bias*,  $b = -\text{grænseværdi}$ . Perceptrons bias skal ses som et mål for hvor let det er for perceptronen at give outputte ét. Ved en meget negativ bias er det svært for perceptronen at outputte én. Ved at anvende bias i stedet for grænseværdien, så kan perceptron reglen omskrives til

$$output = \begin{cases} 0, & \text{hvis } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b \leq 0, \\ 1, & \text{hvis } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b > 0. \end{cases}$$

Men denne meget forsimplede tilgang til at aktivere perceptronen, således at denne giver et vis output, gøres lidt mere kompleks, således at outputtet kan tage alle værdier mellem nul og én, i stedet for kun de to værdier. Dette forklares igennem *sigmoid neuroner*. [27]

### 3.1.1 Sigmoid neuroner

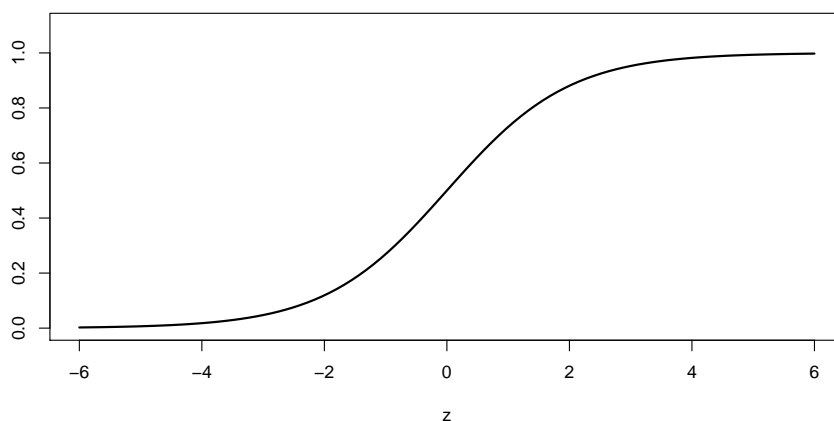
Ligesom perceptrons, så har sigmoid neuroner inputs,  $x_1, x_2, \dots$ , men i stedet for at disse inputs er binære, så kan disse tage alle værdier mellem nul og én. Sigmoid neuroner har også vægte, som angiver vigtigheden af inputtene til outputtet, og disse har også biaser. Men outputtet er ikke længere nul eller én, men er givet ved  $\sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b)$ , hvor  $\sigma$  kaldes for *sigmoid funktionen*, og denne er defineret som

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},$$

hvor  $z = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b$ . Denne sigmoid funktion tager funktioner mellem nul og én, og har formen som vist i figur 3.2.

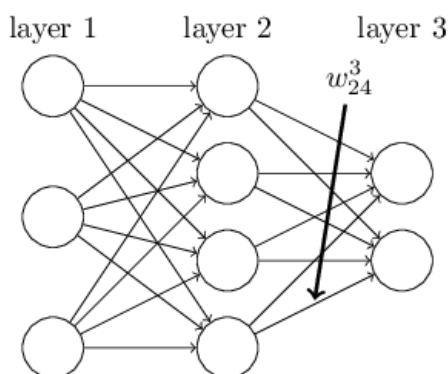
Ud fra sigmoid funktionen, og figur 3.2 kan det ses at hvis  $z$  er positiv og et meget stort tal, så vil  $e^{-z} \approx 0$  og derfor vil  $\sigma(z) \approx 1$ ; så når  $z$  er positiv og et stort tal så vil outputtet for sigmoid funktionen være tæt på én. Modsat, hvis  $e^{-z} \rightarrow \infty$  så vil  $\sigma(z) \approx 0$ .

Det er nu blevet beskrevet tilstrækkeligt hvad et neuralt netværk er, og hvordan det overordnet virker. Der er nu tid til at se på den algoritme der ligger til grund for at minimere netværkets tabsfunktion.

**Figur 3.2.** Sigmoid funktion

### 3.1.2 Backpropagation algoritmen, og hvordan den virker

Før der ses på backpropagation algoritmen, så vil der startes med at ses på notationen der gør det muligt at referere til vægtene i netværket på en entydig måde. Der vil bruges  $w_{jk}^l$  til at benævne vægten for forbindelsen fra den  $k$ 'te neuron i det  $(l-1)$ 'te layer til den  $j$ 'te neuron i det  $l$ 'te layer. Nedenstående illustration viser vægten på en forbindelse fra den fjerde neuron i andet layer til den anden neuron i det tredje layer af netværket.

**Figur 3.3.** Eksempel på notation for vægtene i netværket

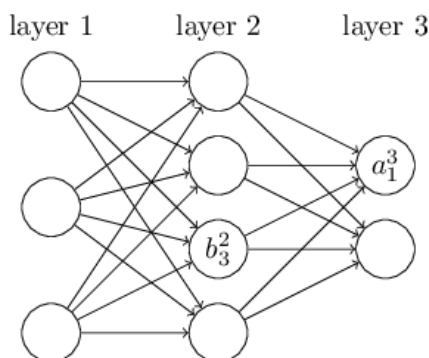
På samme måde så bruges der en lignende notation for netværkets biaser og aktiveringer. Der anvendes  $b_j^l$  for biasen for den  $j$ 'te neuron i det  $l$ 'te layer. På samme måde anvendes  $a_j^l$  for aktiveringen for den  $j$ 'te neuron i det  $l$ 'te layer. I nedenstående illustration ses biasen,  $b_3^2$ , for den tredje neuron i andet layer. Ligeledes vises aktiveringen,  $a_1^3$ , for den første neuron i det tredje layer.

Figur 3.3 og figur 3.4 er lånt af [27]. Med disse notationer, da er aktiveringen,  $a_j^l$ , af den  $j$ 'te neuron i det  $l$ 'te layer relateret til aktiveringen i det  $(l-1)$ 'te layer ved nedenstående formel:

$$a_j^l = \sigma \left( \sum_k w_{jk}^l a_k^{l-1} + b_j^l \right), \quad (3.1)$$

hvor summen er over alle  $k$  neuroner i det  $(l-1)$ 'te layer. For at omskrive dette udtryk på matrix form defineres en vægt matrix,  $\mathbf{w}^l$ , for hvert layer,  $l$ . Indgangen i vægtmatricen,

**Figur 3.4.** Eksempel på notation for bias og aktivering i netværket



$\mathbf{w}^l$ , er bare vægtene der forbindes til neuronerne i det  $l$ 'te layer - indgang i den  $j$ 'te række og  $k$ 'te kolonne er  $w_{jk}^l$ . På samme måde defineres hvert layer,  $l$ , en *bias vektor*,  $\mathbf{b}^l$  - komponenterne i bias vektoren er bare  $b_j^l$  værdierne, én komponent for hver neuron i det  $l$ 'te layer. Til sidst defineres der en aktiveringsvektor,  $\mathbf{a}^l$ , vis komponenter er aktiveringerne  $a_j^l$ . [27]

Med disse notationer så kan ovenstående udtryk omskrives til en mere kompakt og vektoriseret form:

$$\mathbf{a}^l = \sigma(\mathbf{w}^l \mathbf{a}^{l-1} + \mathbf{b}^l) \quad (3.2)$$

Dette udtryk giver en global måde at tænke på hvordan aktivering i et layer relateres til aktivering i det tidligere layer; vi ganger vægtmatricen med aktiveringerne og lægger bias vektoren til, og bruger denne værdi i vores sigmod-funktion - denne værdi der anvendes inde i sigmod-funktionen defineres også som  $\mathbf{z}^l = \mathbf{w}^l \mathbf{a}^{l-1} + \mathbf{b}^l$ , og kaldes for *vægtede input* til neuronerne i layer  $l$ . Det er også værd at nævne at  $\mathbf{z}^l$  har komponenterne  $z_j^l = \sum_k w_{jk}^l a_k^{l-1} + b_j^l$ ; hvor  $z_j^l$  er det vægtede input til aktiveringsfunktionen for den  $j$ 'te neuron i layer  $l$ .

### 3.1.2.1 To antagelser for tabsfunktionen

Målet med backpropagation er at beregne den partielle afledte af tabsfunktionen,  $C$ , med respekt til enhver vægt,  $w$ , eller bias,  $b$ , i netværket. Men før at backpropagationen kan virke, så skal der laves to hovedantagelser omkring formen af tabsfunktionen. Inden antagelserne diskuteres, så er det nyttigt med et eksempel på en tabsfunktion. Der anvendes følgende kvadratisk tabsfunktion:

$$C = \frac{1}{2n} \sum_x (y(x) - \mathbf{a}^L)^2, \quad (3.3)$$

hvor  $n$  er det totale antal af træningseksempler; summen er over individuelle træningseksempler,  $x$ ;  $y = y(x)$  er det korresponderende ønskede output;  $L$  benævner antallet af layers i netværket; og  $\mathbf{a}^L = \mathbf{a}^L(\mathbf{x})$  er vektoren for aktiveringsoutput fra netværket når  $x$  er input. [27]

Den første antagelse der skal anvendes før, at der kan anvendes backpropagation er antagelsen om at tabsfunktionen kan skrives som et gennemsnit,  $C = 1/n \sum_x C_x$  over



tabsfunktionerne  $C_x$  for de individuelle træningseksempler,  $x$ . Dette er sagen for den kvadratiske tabsfunktion, hvor tabet for et enkelt træningseksempel er givet ved  $C_x = 1/2(y - a^l)^2$ . Grunden til at denne antagelse er nødvendig er fordi at backpropagation faktisk lader os beregne den partielle afledte,  $\partial C_x / \partial w$  og  $\partial C_x / \partial b$  for et enkelt træningseksempel. Dernæst gendannes  $\partial C / \partial w$  og  $\partial C / \partial b$  ved at tage gennemsnittet over træningseksemplet. [27]

Den næste antagelse der laves for tabet, er at det kan skrives som en funktion af outputtene fra det neurale netværk. For eksempel, så tilfredsstill den kvadratiske tabsfunktion dette krav, siden det kvadratiske tab for et enkelt træningseksempel,  $x$ , kan skrives som

$$C = \frac{1}{2}(y - a^L)^2 = \frac{1}{2} \sum_j (y_j - a_j^L)^2, \quad (3.4)$$

og dette er en funktion af output aktiveringerne. Denne tabsfunktioner afhænger også at det ønskede output,  $y$ . [27]

### 3.1.2.2 De fire fundamentale ligninger bag backpropagation

Backpropagation handler om at forstå hvordan ændringer i vægtene og biases i netværket, kan ændre på tabsfunktionen. Dette betyder at man skal beregne den partielle afledte,  $\partial C / \partial w_{jk}^l$  og  $\partial C / \partial b_j^l$ . Men for at beregne disse, så skal der først introduceres en mellem-liggende mængde,  $\delta_j^l$ , hvilket kaldes for *fejlen* i den  $j$ 'te neuron i det  $l$ 'te layer. Backpropagation giver en procedure til at beregne fejlen, og dernæst relaterer  $\delta_j^l$  til  $\partial C / \partial w_{jk}^l$  og  $\partial C / \partial b_j^l$ . Fejlen kan defineres som

$$\delta_j^l = \frac{\partial C}{\partial z_j^l}. \quad (3.5)$$

På samme måde som tidligere, så anvendes  $\delta^l$  til at betegne vektoren af alle fejlene der er i layer  $l$ . Backpropagation giver en måde at beregne  $\delta^l$  for hvert layer, og dernæst relatere disse fejl til de to afledte produkter. [27]

Der vil nu blive vist de fire ligninger der danner grundlag for backpropagation. Sammen så udgør disse fire ligninger en måde hvorpå man kan beregne fejlen,  $\delta^l$ , og gradienten for tabsfunktionen. Der vil først blive vist de fire ligninger, og dernæst vil der komme et bevis for ligningerne. [27]

Først ses der på ligningen for fejlen i output layeret. Komponenterne i  $\delta^l$  er givet ved

$$\delta_j^l = \frac{\partial C}{\partial a_j^L} \sigma'(z_j^L). \quad (3.6)$$

Det første led på højre side,  $\partial C / \partial a_j^L$ , måler bare hvor hurtigt tabet ændrer sig som en funktion af det  $j$ 'te outputs aktivering. Hvis, for eksempel, at  $C$  ikke afhænger særlig meget af en bestemt output neuron, så vil  $\delta_j^L$  være lav. Det andet led,  $\sigma'(z_j^L)$ , måler hvor hurtigt at aktiveringsfunktionen,  $\sigma$ , ændrer sig i  $z_j^L$ . [27]

Bemærk at ovenstående ligning er det komponentvise udtryk for  $\delta^L$ . Det er et meget fint udtryk, men den er ikke på matrix form, som der ønskes for backpropagation. Det er dog nemt at omskrive ligningen om til et matrix-baseret udtryk

$$\delta^L = \nabla_a C \odot \sigma'(\mathbf{z}^L), \quad (3.7)$$

hvor  $\nabla_a C$  er defineret som en vektor vis komponenter er de partiale afledte,  $\partial C / \partial a_j^L$ . Man kan tænke på  $\nabla_a C$  at denne udtrykker ændringsraten af  $C$  med respekt til outputaktiveringerne. [27]

En ligning for fejlen,  $\delta^l$ , i termer af fejlen i det næste layer,  $\delta^{l+1}$ : Denne skrives som

$$\delta^l = ((\mathbf{w}^{l+1})^T \delta^{l+1}) \odot \sigma'(\mathbf{z}^l). \quad (3.8)$$

Antag at fejlen,  $\delta^{l+1}$ , kendes. Når der ganges denne med den transponerede vægtmatrice, så kan det tænkes på som om at fejlen bevæger sig *baglæns* igennem netværket, hvilket giver et mål for fejlen i output for det  $l$ 'te layer. Dernæst tages Hadamard produktet. Dette gør at fejlen rykkes baglæns igennem aktiveringsfunktionen i layer  $l$ , hvilket giver fejlen,  $\delta^l$ , i det vægtede input til layer  $l$ . [27]

En ligning for ændringsraten for tabsfunktionen med henhold til enhver bias i netværket: Dette kan skrives som

$$\frac{\partial C}{\partial b_j^l} = \delta_j^l. \quad (3.9)$$

Denne ligning siger at fejlen,  $\delta_j^l$  er lige præcis ændringsraten i tabsfunktionen med henhold til enhver bias i netværket.

En ligning for ændringsraten for tabsfunktionen med henhold til enhver vægt i netværket kan skrives som

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} = a_k^{l-1} \delta_j^l. \quad (3.10)$$

Dette udtryk fortæller hvordan man beregner ændringen i tabsfunktionen med hensyn til enhver vægt i netværket, i termer af mængderne  $\delta^l$  og  $a^{l-1}$  - hvilket allerede vides ved hvordan det beregnes. Når aktiveringen i layer  $l-1$  er lav,  $a_k^{l-1} \approx 0$ , så vil gradient ledet,  $\partial C / \partial w$ , også have en tendens til at være lav. I et sådan tilfælde, så siges det er vægtene *lærer langsomt*, hvilket betyder at vægtene ikke ændringer sig særlig meget igennem gradient descent. [27]

## 4 Evalueringemetoder

Dette afsnit er delt ind i tre sektioner. Første sektion omhandler den statistiske evaluering af forecast-modellerne og hvilke, der præsterer bedst. De to klassiske tabsfunktioner RMSE og MAE anvendes. Diebold-Mariano testen anvendes for at se, om der er en signifikant forskel imellem modellerne. Til sidst bliver en Mincer-Zarnowitz test forklaret; denne tester om modellerne er unbiased, så der hverken igennemsnit forecastes for højt eller lavt. Næste sektion omhandler profitabiliteten i modellerne, og er den, der har interesse for investorne, da profitabiliteten indikerer, om en dynamisk model kan generere et højere afkast end en statisk. Ændringen i forecastet bliver brugt som styringsværktøj i forhold til at placere købs- og salgsordrer i den dynamiske trading strategi. Derefter anvendes tre måleenheder for at teste profitabiliteten. Den første er Sharpe-ratioen, som er et simpelt risiko-justeret mål for afkastet. Herefter anvendes en Henriksson-Merton test til at teste for markedstimningen i modellen. Til sidst sluttes der af med en Pesaran-Timmermann test, der vurderer hvor gode modellerne er til at forecaste retningen. Sidste sektion under evalueringemetoder ønsker en nærmere gennemgang af risikoen for de forskellige strategier. Hvis en strategi giver et højt afkast, men samtidig har en stor påtaget risiko, vil den risikoinverse investor være tilbøjelige til at placere sine midler i et risikoenlig aktiv. MRAR som er et risikomål, udviklet af Morningstar, anvendes til at risikojustere afkastene ud fra hvor stor variabilitet der har været i afkastserien.

### 4.1 RMSE, MAE og Diebold-Mariano

Der findes ingen konsensus omkring den mest passende måde at måle performance af et forecast. Der findes dog nogle standard teknikker, som går igen i den videnskabelige litteratur. I denne rapport bruges to forskellige teknikker til at måle forecast performance, nemlig tabsfunktionerne RMSE og MAE. RMSE straffer outliers hårdere, da den anvender kvadrerede værdier. De to modeller opskrives:

$$RMSE = n^{-1} \sum_{i=1}^n \sqrt{(y_t - \hat{y}_t)^2},$$
$$MAE = n^{-1} \sum_{i=1}^n |y_t - \hat{y}_t|.$$

Ved mål af forecastfejlen måles forskellen på den prædikterede værdi,  $\hat{y}_t$ , og den observerede værdi,  $y_t$ ;  $n$  er antallet af observationer [4]. Efter tabsfunktionen er blevet defineret, er det ofte interessant at måle, om et forecast er mere præcist end et andet. Derfor anvendes

en hypotesetest for at se, om der er en signifikant forskel på de to forecasts. Tabsfunktioner viser ofte en forskel i fejlen, men det betyder nødvendigvis ikke, at modellen er overlegen. Derfor anvendes en Diebold-Mariano for at teste, om en model er den konkurrerende model overlegen. Det er værd at notere i teststørrelsen DM, at de konkurrerende forecastingsmodeller ikke må være indlejret i hinanden. Hvis dette er tilfældet, benyttes en Clark-West test.

For at måle forecastfejls tab i periode  $t + 1$  for model 1 mod model 2 findes middeltabet mellem de to modeller. Derefter testes det, om middeltabet er statistisk forskelligt fra nul.

$$\bar{d} = n^{-1} \sum_{t+1}^n [g(e_{1,t+1}) - g(e_{2,t+1})]$$

I dette projekt anvendes DM testen kreeret af Harvey, Laybourne og Newbold. Dette skyldes seriekorrelationen mellem forecastfejlen. Istedet for en normal fordeling evalueres DM testen ud fra en  $t$ -fordeling med  $n - 1$  frihedsgrader.  $\gamma_i$  er den  $i$ 'te autokovarians for  $d$  serien. [6]

$$DM = \bar{d} \sqrt{\gamma_0 + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_q / (n - 1)}$$

## 4.2 Retningen

Istedet for kun at finde den mindste fejl som i RMSE og MAE kan retningen anvendes som et evalueringværktøj. Især inden for forudsigelse af finansielle afkast kan retningen være interessant, da der ofte florerer et asymmetrisk forhold mellem negative og positive afkast. Retningen opskrives som

$$L(y, \hat{y}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \text{sign}(\Delta y) = \text{sign}(\Delta \hat{y}), \\ 0, & \text{if } \text{sign}(\Delta y) \neq \text{sign}(\Delta \hat{y}). \end{cases}$$

I ovenstående udtryk forudsiges ændringen i retningen. Retningen måler, hvor ofte modellen er i stand til at forudsige, om afkastet falder eller stiger i næste periode mod den aktuelle ændring. Jo højere værdi desto bedre er modellen til at forudsige retningen. [4]

## 4.3 Mincer-Zarnowitz

Mincer-Zarnowitz er en test, der måler bias i forecastene. Forskellen mellem forecastet og de realiserede værdier måler størrelsen på biasen. Forecastet vil systematisk under- eller overestimere dens realisationer, hvis biasen er enten negativ eller positiv. [4] Mincer-Zarnowitz opskrives:

$$y_{t+n} = \beta_0 + \beta_1 y_{t+h,t} + u_t.$$

Skal de forecastede værdier anses som optimale, skal  $(\beta_0, \beta_1)$  være lig med  $(0, 1)$ . Nulhypotesen lyder, at modellen er unbiased og derfor hverken forecaster systematisk for højt eller lavt og opstilles: [4]

$$H_0 : b_0 = 0 \quad \cup \quad b_1 = 1.$$

## 4.4 Sharpe-ratio

Det mest anvendte risikojusterede mål igennem de sidste 60 år har været Sharpe-ratioen. [10] Sharpe-ratio bygger på, om investor tager smarte beslutninger, eller om et godt resultat skyldes en stor risikotagning. Sharpe-ratioen inkorporerer volatiliteten af afkastet på en simpel måde. Sharpe-ratioen vil blive defineret ud fra to måleenheder: afkastet, samt variabiliteten af risikoen, målt igennem standard afvigelsen. Jo højere Sharpe-ratio, jo højere afkast og lavere volatilitet. [32] Sharpe-ratioen opstilles som

$$Sharpe = R/\sigma.$$

Ulemper ved anvendelse af Sharpe-ratioen opstår når data ikke er normal fordelt. *Kurtosis* og *skewness* er ofte problematiske for fordelingen, og den viser sig ikke særlig effektiv at anvende som måleenhed. [10] Desuden anvender rapporten et andet risikojusteret mål igennem MRAR som vil blive gennemgået senere.

## 4.5 Henriksson-Merton

Henriksson-Merton modellen tester for markedstiming. Modellen findes både som en parametrisk og ikke parametrisk test. I denne rapport anvendes den ikke parametriske test. Modellens framework er udviklet, så den analyserer den statistiske performance af korrelationen mellem et forecast og realiserede værdier af afkastet. [28] Nedenunder defineres den fælles sandsynlighedsfordeling.

**Tabel 4.1.** Henriksson-Mertons sandsynlighedsfordeling

Realiserede værdier	Forecastede værdier		
	$x_t < 0$	$x_t \geq 0$	
$y_t < 0$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{10}$
$y_t \geq 0$	$P_{21}$	$P_{22}$	$P_{20}$
	$P_{01}$	$P_{02}$	1

Sandsynlighedsfordelingen er opdelt mellem forecastede og realiserede værdier. I sandsynligheden  $P_{11}$  er både den forecastede værdi, samt den realiserede værdi under nul, og dermed vil modellen have forecastet korrekt. Modsat indikerer  $P_{12}$  et ukorrekt forecast, da den forecastede værdi er over nul og den realiserede værdi under nul. En let måde at notere dette på er at definere sandsynligheder som:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \text{Pro}(x_t < 0, y_t < 0), \\
P_{12} &= \text{Pro}(x_t \geq 0, y_t < 0), \\
P_{21} &= \text{Pro}(x_t < 0, y_t \geq 0), \\
P_{22} &= \text{Pro}(x_t \geq 0, y_t \geq 0).
\end{aligned}$$

I  $P_{10}$  er alle realiserede værdier under nul og i  $P_{20}$  er alle realiserede værdier over nul. I  $P_{01}$  er alle forecastede værdier under nul og i  $P_{02}$  er alle forecastede værdier over nul. De betingede sandsynligheder  $P_1$  og  $P_2$  følger:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_{11}/P_{10}, \\
P_2 &= P_{22}/P_{20}.
\end{aligned}$$

Merton uddyber betingelsen for, at hvis et rationelt forecast skal have en positiv værdi, skal de betingede sandsynligheder følge at  $P_1 + P_2 > 1$ . Hvis  $P_1 + P_2 = 1$  vil forecastet for markedstiming ingen økonomisk værdi have for en investor. Jo højere værdien er fra 1, jo mere økonomisk værdi vil modellen have. Nulhypotesen lyder:

$$H_0 : \frac{P_{11}}{P_{10}} + \frac{P_{22}}{P_{20}} = 1.$$

Hvis nulhypotesen holder, er der ingen markedstiming i forecastmodellen. [28]

## 4.6 Pesaran-Timmerman

Pesaran-Timmermann er en ikke-parametrisk test der undersøger forecastets evne til at forudsige retningen [29]. I Pesaran-Timmermann defineres en række input-variable som bruges til at udregne teststatistikken,  $S_n$ .

$$S_n = \frac{\hat{P} - \hat{P}_*}{\{\hat{V}(\hat{P}) - \hat{V}(\hat{P}_*)\}^{0.5}}.$$

$\hat{P}$ , som defineres ud fra  $n^{-1} \sum_{t=1}^n I(y_t, x_t)$ . Her er  $I(y_t, x_t)$  sandsynligheden for at både den forecastede værdi, samt den realiserede værdi har samme retning. Jo tættere  $\hat{P}$  går mod en, jo mere præcis er forecastet. De resterende input variable beskrives i appendiks C.

Ved at anvende Pesaran-Timmermann testen, kan det ses om retningsvariablen er statistisk signifikant. Testen er en Hausmann type test, har fordelingen  $N(0, 1)$  og er en-sidet test med de kritiske værdier 1, 5 og 10 procent på 2.330, 1.645 og 1.282. [9]

## 4.7 Beregning af MRAR

Porteføljeforvaltere påpeger ofte deres overlegne evne til at levere et højere merafkast. Mange af de anvendte måleenheder kan desværre manipuleres. Derfor benyttes *Morningstar*

*Risk-Adjusted Return* til at teste, om rapportens model giver et merafkast i en dynamisk trading strategi. [15] MRAR er defineret som:

$$MRAR(\gamma) = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (1 + R)^{\gamma} \right]^{-\frac{12}{\gamma}} - 1$$

MRAR er modellens premium afkast justeret for risiko,  $T$  er antallet af observationer.  $R$  er modellens afkast [26]. Som nævnt tidligere så tager  $\gamma$  værdien to.

# 5 Data og forecastingsproces

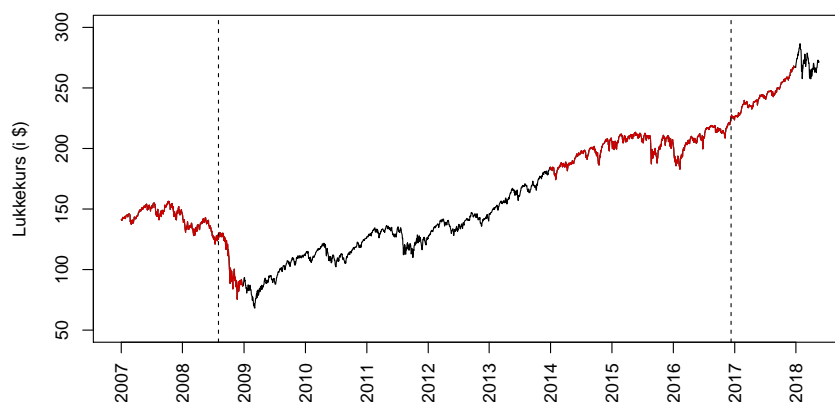
Dette afsnit har til formål at beskrive det valgte data igennem grafisk afbildning, transformering af data og en beskrivelse af karakteristika for data efter transformeringen. Derudover gennemgås den valgte forecastingsproces, hvor det primært diskuteres hvorfor der vælges one-step ahead forecast i stedet for multi-step ahead forecast.

## 5.1 Tidsperiode

Som tidligere nævt benyttes S&P500-indekset i perioden fra år 2007 til og med år 2017. I figur 5.1 ses lukkekursene for S&P500-indekset fra den valgte tidsperiode. Tidsperioden er inddelt i to subperioder, hvor den første periode svarer til i alt 500 observationer, der karakteriseret ved at kursen er faldende i forhold til starttidspunktet (bear markedet); markeret med rødt til venstre i figuren. Alt til venstre for den stiplede linje indikerer træningssættet som modellerne bliver estimeret på, og alt til højre for den stiplede linje indikerer testsættet.

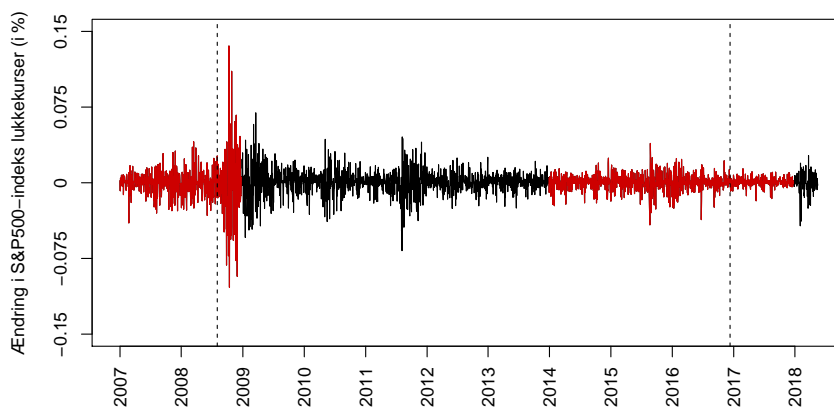
Den anden periode er karakteriseret ved at være i en opadgående trend (bull markedet). Igen indikerer alt til venstre for den stiplede linje træningssættet, og alt til højre indikerer testsættet. Denne periode er på 1000 observationer i alt.

*Figur 5.1.* Udviklingen i S&P500-indeks lukkekurs fra år 2007 til år 2018



Det er tydeligt at vurdere ud fra figur 5.1 at data indeholder en trend, da lukkekursen er stigende igennem perioden. Derfor tages første differensen af S&P500 lukkekursene; dette giver også det daglige afkast som er vist i figur 5.2. Denne serie ser mere stationær ud en serien vist i figur 5.1.



**Figur 5.2.** Afkastserien for S&P500-indekset fra år 2007 til år 2018

Det ses også ud fra denne figur 5.2 at volatiliteten er stigende omkring 2008 hvor finanskrisen opstod, og det er i denne periode testsættet starter, hvilket kan give interessante resultater.

Tidsperioden fra 2007-2017 er blevet valgt, grundet dens aktualitet. S&P500 er valgt da det er bredt respekteret og et stort globalt indeks. Rapporten har som tidligere nævnt valgt at arbejde med daglig, ugentlig og månedlig data. Afkastserierne for det ugentlig og det månedlig afkast kan ses i appendiks under figur A.1 og figur A.2. Her ses det at jo længere afkastperioden bliver jo mere persistent ser serien ud til at blive.

## 5.2 Deskriptiv statistisk

Da der i denne rapport arbejdes med forecasting af aktieafkast, så vil dataserien for de daglige, ugentlige og månedlige afkast blive beregnet ud fra de daglige, ugentlige og månedlige lukkekurser for S&P500-indekset. Inden der begyndes at omforme og arbejdes med dataet, så kigges der på de forskellige seriers karakteristika igennem deskriptiv statistik. Deskriptiv statistik kan give nogle indikationer af hvordan dataet ser ud og hvordan det er fordelt.

Der henvises til tabel 5.1 og tabel 5.2 hvor forskellige karakteristika for de forskellige afkastlængder for S&P500 er blevet opstillet. Det ses her at alle afkastlængderne har

**Tabel 5.1.** Deskriptiv statistik for det daglige, ugentlige og månedlige S&P500 afkast fra år 2014 til og mod 2017

	Daglig	Ugentlig	Månedlig
Middelværdi	0.0004	0.0015	0.0073
Standard afvigelse	0.0076	0.0148	0.0279
Minimum	-0.0417	-0.1065	-0.1184
Maksimum	0.0390	0.0537	0.0993
Skewness	-0.4426	-0.8940	-0.5422
Kurtosis	3.2078	6.0726	2.0034
Jarque Bera $p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.0000
Dickey Fuller $p$ -værdi	0.000 0	0.0000	0.0000

**Tabel 5.2.** Deskriptiv statistik for det daglige, ugentlige og månedlige S&P500 afkast fra år 2007 til og med 2008

	Daglig	Ugentlig	Månedlig
Middelværdi	-0.0009	-0.0037	-0.0197
Standard afvigelse	0.0198	0.0326	0.0637
Minimum	-0.1360	-0.1960	-0.3294
Maksimum	0.1356	0.1648	0.1101
Skewness	0.1583	-0.9258	-1.9239
Kurtosis	9.9306	8.1871	5.3773
Jarque Bera $p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.0000
Dickey Fuller $p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.0030

meget lave middelværdier, dog er der et mønster der hentyder at jo længere afkastlængde desto højere middelværdi. Dette giver en indikation af at man vil forvente et højere afkast jo længere afkastperioden bliver - hvilket rent intuitivt giver god mening. Det ses også ud fra minimumsværdierne at afkastlængden giver større negative minimumsværdier, og for maksimumsværdierne ses det også at disse er stigende i afkastlængden, på nær det månedlige afkast i tabel 5.2. Alt dette forklarer derved også den stigende standard afvigelse, da større afspredelse i dataet giver en større standard afvigelse.

Skewness er et mål for tilstedeværelsen af symmetri i dataet - dvs. om der er symmetri i fordelingen af afkastet; så hvis fordelingen ser ens ud på både højre og venstre siden, så forekommer der symmetri. Hvis skewness er lig med nul så er dataet normalfordelt; modsat hvis skewness er forskellig fra nul så er fordelingen af dataet skæv. Derudover, så betyder en negativ skewness at dataet er venstreskæv, imens en positiv skewness betyder at dataet er højreskævt. [7] Ses der på skewness-værdierne for de seks afkastlængder, så ses det er alle har en negativ skewness på nær daglig afkast i tabel 5.2, dette indikerer at data for de fem perioder er venstreskævt, mens et enkelt er højreskævt.

Kurtosis indikerer om dataet har brede eller smalle haler i forhold til en normalfordeling. En høj eller positiv kurtosis vil antyde brede haler eller tilstedeværelsen af outliers. Lave eller negative kurtosis-værdier indikerer derfor smalle haler og derved ikke nær så mange outliers. En kurtosis værdi på nul svarer til haler på en normalfordeling. [7] Ses der på kurtosis-værdierne for de seks afkastperioder, ses det at alle datalængder har brede haler eller outliers. Bemærk dog at det månedlig afkast har de smalleste haler i både tabel 5.1 og 5.2 for de seks afkastperioder.

Jarque-Bera testen, tester for normalitet i dataet. Nulhypotesen er at dataet er normalfordelt, og det ses at denne forkastes i alle seks afkastperioder.

Til sidst udføres der en Dickey-Fuller test, for at teste om dataet er stationært. Nulhypotesen er at der forekommer en unit root i dataet, og dataet er derfor ikke stationært. Det ses at nulhypotesen afvises i alle seks afkastperioder, hvilket indikerer at dataet er stationært.

### 5.3 Forecastingsproces

I rapporten anvendes one-step ahead forecast. Multi-step ahead forecast udelukkes, da kvaliteten på forecastet formindskes jo længere der forecastes ud i fremtiden [6]. Udover

dette vil multi-step ahead forecast altid konvergere mod en ligevægt. Perioden bliver desuden opdateret for hvert forecast igennem et rullende vindue, og derfor vil one-step ahead give det mest præcise forecast. Data fittes i en forudbestemt periode, hvorefter der bliver forecastet i slutningen af perioden. 75 procent af data vil blive brugt til at fitte modellerne, hvor de resterende 25 procent vil blive anvendt til out-of-sample forecast og sammenligning.

Efter der er udført ét one-step ahead forecast, findes det aktuelle afkast, hvorefter forecastfejlen udregnes, modellen reestimeres og der laves et nyt forecast for den næste periode. Denne metode foretages, da det muliggør sammenligning og en vurdering af out-of-sample forecastet og reelle observerede værdier. Denne forecastmetode benævnes også som et pseudo-out-of-sample, da et helt korrekt out-of-sample forecast foretages ved at benytte alt tilgængelig data frem til idag, så morgendagen kan forecastes.

Når det kommer til forecasting, er der to dominerende paradigmer hvad angår observationsbehandling, ekspanderende- og rullende vinduer; ved ekspanderende vinduer udvides in-sample perioden. Starttidspunktet ligger fast, og sluttidspunktet flytter sig i takt med, at nye observationer indtræder i datasættet. Derimod er et rullende vindue karakteriseret ved, at in-sample perioden ligger fast. Starttidspunktet flytter sig i takt med at nye observationer indtræder i datasættet, det samme gør sig gældende for sluttidspunktet. I rapporten vælges et rullende vindue, da der ønskes at in-sample længden forbliver den samme.

# 6 Analyse

Analysen i denne rapport vil være inddelt i to hovedsektioner, hvor der i den ene undersøges de lineære, ikke-lineære og kombinationsmodellers (hybrid modeller) evne til at forecaste i et *bull marked*; den anden sektion undersøger modsat den første, hvordan de lineære, ikke-lineære og hybridmodeller forecaste i et *bear marked*. I begge sektioner vil der blive udarbejdet en statistisk forecastanalyse, hvor modellerne bliver udsat og udvalgt ud fra statistiske modeller og evalueringer. Den udvalgte model bliver undersøgt, om den er statistisk bedre end de andre modeller; denne bliver også testet mod hybridmodellerne for at se, om der er en kombination mellem lineære og ikke-lineære modeller, der er bedre end den bedste af de individuelle modeller. Dernæst opfølges den statistiske analyse af en profitabilitetsanalyse, hvor modellerne anvendes til at handle med ud fra tre strategier; en *buy-and-hold* strategi, hvor der købes i starten af out-of-sample perioden og der sælges i slutningen af denne periode; en *buy-and-sell* strategi, hvor der købes, når algoritmen giver et købssignal og der sælges, når algoritmen giver et salgssignal - så her sættes der en grænse for, at der kun kan holdes lange positioner; og til sidst en *long-and-short* strategi, hvor modellen går langt, når der gives et købssignal, og sælger når algoritmen giver et salgssignal, for derefter at gå kort i markedet - denne strategi giver derved mulighed for at vinde på et kurstab. Dernæst gennemgås forecastingsmodellerne ud fra deres risikojusteret afkast, hvor disse rangeres i forhold til den profit de giver på baggrund af den risiko de pålægger.

Ovenstående undersøgelser udføres på det daglige, ugentlige og månedlige S&P500 afkast for at se, om afkastperiodens længde har en påvirkning på de statistiske evalueringer, profitabiliteten samt rangeringen for forecastingsmodellerne.

## 6.1 Bull markedes forecastingsanalyse

Som beskrevet i sektion 5.1 vil analysen, der vedrører bull markedet være repræsenteret ved den stigning, der sker fra år 2014 til og med år 2017. Som det er vist på figur 5.2, figur A.1 og figur A.2, ses det, at alt data fra år 2014 til 2017 anvendes til in-sample træning af de forskellige modeller, og dernæst bliver hele år 2017 forecastet out-of-sample.

### 6.1.1 Udvælgelse af forecastingsmodeller

Dette afsnit har til formål at vise den metode, der anvendes til at udvælge de lineære og ikke-lineære modeller. Der vil blive valgt én autoregressiv model, en moving average model og en kombination af de to igennem en autoregressiv moving average model, samt et

neuralt netværk med helholdsvis et og to hidden layers. De lineære modeller udvælges ved at anvende *Akaike information criterion* (AIC). De modeller med den laveste AIC bliver udvalgt. De ikke-lineære modeller udvælges ved at se på, hvilke af de forskellige neurale netværk, der giver den laveste fejl.

Der startes med at normalisere datasættet. Dette gøres, fordi det neurale netværks aktiveringsfunktion (jf. afsnit 3.1.1 fungerer bedst, hvis dataet enten går fra minus en til en eller fra nul til en. Derfor anvendes denne transformation, og i denne rapport går dataet fra nul til en.

$$\frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)} \quad (6.1)$$

Som (6.1) viser, så tages det pågældende afkast på en bestemt dag, og minimumsværdien trækkes fra denne, dernæst divideres der med differensen mellem afkastets maksimum- og minimumsværdi. Denne transformering gør, at dataet ligger mellem nul og en.

Først udarbejdes der en række autoregressive, moving average og autoregressive moving average modeller på den valgte in-sample periode. De modeller, der vælges, er de modeller, der opnår den laveste AIC for deres familie. Derfor ses det ud fra tabel 6.1, hvilke lineære modeller der bliver valgt for de forskellige afkastlængder.

**Tabel 6.1.** AIC-værdier for det daglige, ugentlige og månedlige afkast for bull perioden

	<i>AIC-værdier</i>		
	Daglig	Ugentlig	Månedlig
AR(1)	<b>-713.99</b>	<b>-2001.12</b>	-2203.48
AR(2)	-704.21	-1987.13	-2202.99
AR(3)	-704.42	-1951.19	<b>-2206.62</b>
AR(4)	-698.68	-1946.24	-2204.63
AR(5)	-646.31	-1941.51	-2203.62
MA(1)	481.60	-487.09	404.59
MA(2)	<b>-137.71</b>	-507.59	-314.06
MA(3)	-112.35	<b>-588.62</b>	-781.77
MA(4)	-108.49	-560.15	-1114.63
MA(5)	-106.95	-548.52	<b>-1328.18</b>
ARMA(1,1)	<b>-1201.94</b>	-1696.13	-2203.30
ARMA(2,1)	<i>1198.99</i>	-1799.96	-2199.66
ARMA(1,2)	-1200.63	<b>-1810.56</b>	<b>-2206.96</b>
ARMA(2,2)	<i>1193.67</i>	-1742.73	-2205.00

*Note:* Markeret med **fed** betyder at modellen har den laveste AIC-værdi, og denne vælges til den videre undersøges på det pågældende afkast, og kursiv betyder at modellen ikke kan konvergere.

Tabel 6.2 viser fejlene for de neurale netværk. [17] siger, at neurale netværk ikke bliver

bedre ved at have mere end to hidden layers. En ulempe ved mere end to hidden layers er derimod, at det tager længere tid at estimere forecastene, og derfor vælges to neurale netværk; et hvor der er ét hidden layer og et hvor der er to hidden layers. Antallet af neuroner i hvert hidden layer udvælges ud fra, hvor lav en fejl det neurale netværk laver.

**Tabel 6.2.** Fejl-værdier for neurale netværk på det daglige, ugentlige og månedlige afkast for bull perioden

	<i>Fejl</i>		
	Daglig	Ugentlig	Månedlig
NN(1)	3.8992	1.4487	1.1128
NN(2)	3.5925	1.3544	1.1131
NN(3)	3.5059	1.3441	<b>1.1201</b>
NN(4)	3.5497	<b>1.2792</b>	1.1223
NN(5)	<b>3.4335</b>	1.3601	1.1303
NN(1,1)	4.1542	1.4638	1.1197
NN(2,1)	3.7263	1.3563	1.1026
NN(1,2)	4.1446	1.4395	1.1120
NN(2,2)	3.3926	1.3846	<b>1.0520</b>
NN(3,1)	4.1452	1.2835	1.1110
NN(3,2)	4.1473	1.3418	1.1049
NN(1,3)	3.8404	1.4525	1.1170
NN(2,3)	4.1526	1.4434	1.1135
NN(3,3)	3.6588	1.4244	1.1028
NN(4,1)	4.1400	1.2846	1.1144
NN(4,2)	3.5802	<b>1.2410</b>	1.0985
NN(4,3)	3.6030	1.2470	1.1087
NN(1,4)	4.1549	1.3074	1.1210
NN(2,4)	3.6180	1.3888	1.1174
NN(3,4)	3.5128	1.4429	1.1057
NN(4,4)	<b>3.3625</b>	1.3982	1.0672

*Note:* Markeret med fed betyder at modellen har den laveste fejl-værdi, og denne vælges til den videre undersøgelse på det pågældende afkast.

### 6.1.2 Daglig afkast

Det ses ud fra tabel 6.1, at AR(1)-, MA(2)-, og en ARMA(1,1)-model bliver valgt til at repræsentere de lineære modeller for det daglige afkast. Fordi disse har de laveste AIC-værdier, er det ikke ensbetydende med, at disse også er anvendelige til at forecaste. Der må nemlig ikke forekomme seriekorrelation i modellernes residualer, og der testes for dette igennem en LM-test. Resultaterne for sådan en test kan ses i tabel 6.3.

Som det ses ud fra tabel 6.3, er det kun ARMA(1,1)-modellen, der ikke har seriekorrelation i residualerne. AR(1)- og MA(2)-modellen skal derfor estimeres igennem en GARCH(1,1)-model for at få elimineret denne seriekorrelation, der forekommer i disse mo-

**Tabel 6.3.** Resultaterne af LM-test for modellernes residualer for det daglige afkast for bull perioden

	Daglig		
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)
Q(4)-statistik	177.1548	253.0959	4.9900
$p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.2883
Q(8)-statistik	179.5610	313.9942	5.1180
$p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.7449

dellers standardiserede residualer. Resultaterne for LM-testen, når modellerne estimeres igennem en GARCH(1,1), kan ses i tabel 6.4.

Det ses ud fra tabel 6.4, at når disse to modeller estimeres igennem en GARCH(1,1), er den serielle korrelation i residualerne elimineret, og derved kan disse lineære modeller nu anvendes til at lave forecasts.

Ud fra tabel 6.2 ses det, at de to neurale netværk, der vælges til at repræsentere de ikke-lineære modeller, er henholdsvis et netværk med et hidden layer og fem neuroner, og et netværk med to hidden layers med henholdsvis fire i hvert layer. Disse to er valgt, fordi de har de laveste fejl, når modellerne estimeres på data.

Nu da alle modellerne er udvalgt og der er sørget for, at modellerne opfylder de krav, der skal til for at anvende dem til økonometrisk brug, vil disse fem modeller anvendes til det videre forecast. Næste afsnit beskriver den statistiske analyse, hvor der ses på resultaterne for de forskellige modellers forecast og deres performance.

**Tabel 6.4.** LM-test for de standardiserede residualer for modellerne for det daglige afkast for bull perioden

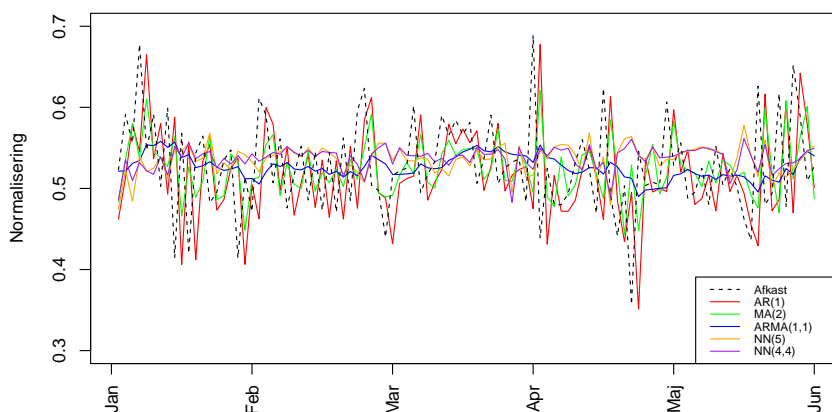
Residual form	Model	Q(4)-statistik	$p$ -værdi	Q(8)-statistik	$p$ -værdi
	AR(1)	8.6375	0.0708	9.5674	0.2967
$\hat{\epsilon}_t^2/\hat{h}_t$	MA(2)	0.0045	0.9999	0.01027	1.0000

### 6.1.2.1 Statistisksföcastanalyse

Der kan nu udføres forecast for det daglige afkast ud fra de valgte modeller, som tidligere er beskrevet. I figur 6.1 ses en grafisk afbildning af de første 100 forecasts for de forskellige modellers forecast sammenlignet med det aktuelle afkast. Det ses her tydeligt, at de lineære modeller har en større afvigelse end de to neurale netværk; de to sidstnævnte ser mere eller mindre ud til at være konstant sammenlignet med de lineære modeller. Desuden skal det også bemærkes, at AR(1)- og MA(2)-modellen egentlig forecaste mange af de store udsving, blot et lag senere.

I tabel 6.5 ses en række forecastingsevalueringer for de fem forskellige forecastingsmodeller. Disse forecastingsevalueringer bruges til at vurdere hvilken af de fem forecast, der leverer det bedste forecast.

Det ses ud fra tabel 6.5, at den model, der leverer den laveste MAE, er NN5-modellen; dog tæt efterfulgt af NN44-modellen. Her ligger de lineære modeller et stykke fra de neurale

**Figur 6.1.** One-step ahead forecasts for de fem forecastingsmodeller for de første 100 forecasts

netværk, hvor ARMA(1,1)-modellen leverer den laveste MAE af de lineære modeller. Kigges der i stedet på RMSE, gør det samme mønster sig gældende; NN5-modellen har den laveste værdi, meget tæt efterfulgt af NN44-modellen. I forhold til retnings-variablen, ses det også her, at NN5-modellen suverænt har den bedste retning på 61.69 procent; NN44-modellen leverer også en flot retnings-variabel svarende til 54.41 procent. De lineære modeller kommer knap nok over 35 procent på retningen, hvilket ikke er prangende; dette betyder, at man vil have større sandsynlighed for at forecaste den rigtige retning ved kast med en fair mønt. Det ses også ud fra Mincer-Zarnowitz, at ingen af modellerne leverer unbiased forecasts. Dette betyder at alle modeller i gennemsnit forecaste enten for højt eller for lavt. Ud fra tabel 6.5 vurderes det, at NN5-modellen giver de bedste forecasts af de fem modeller, da denne har de laveste tabsfunktioner og den højeste retning.

Ud fra figur 6.2 ses modellernes absolutte akkumulerede fejl. AR(1)-modellen har de højeste akkumulerede fejl, efterfulgt af MA(2)-modellen. NN44-modellen og NN5-modellen ligger relativt tæt på hinanden igennem hele forløbet. Overraskende nok har ARMA(1,1) suverænt de laveste akkumulerende absolutte fejl.

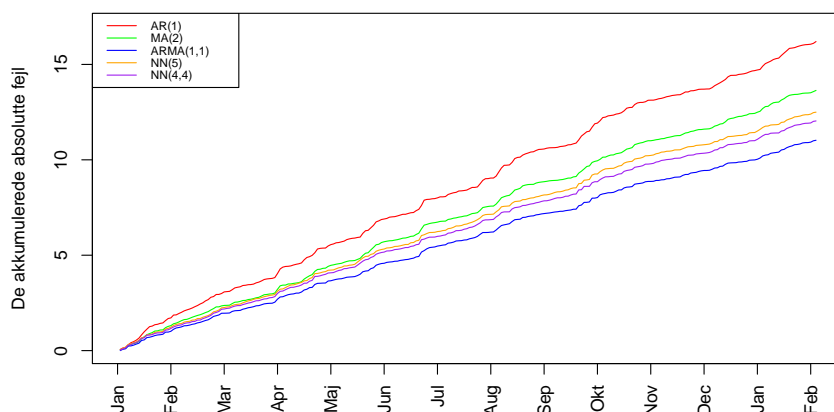
Der kan nu udføres Diebold-Mariano (DM) test for at teste, om NN5-modellen ren statistisk har bedre forecastingsevne end de andre modeller. NN5 modellen blev vurderet som den model, der giver de mest optimale og præcise forecasts, derfor bruges denne model som benchmark (M1) i DM-testen. I tabel 6.6 ses alle  $p$ -værdierne for DM-testen, hvor M2 er den konkurrerende model.

Når der testes for lige gode forecasts imellem NN5-modellen og AR(1)-modellen, så fremgår det ud fra tabel 6.6, at nulhypotesen afvises, hvilket betyder, at en af de to modeller statistisk giver et bedre forecast end den anden. Testes der om AR(1)-modellen

**Tabel 6.5.** Forecastingsevalueringer for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44
MAE	0.0618	0.0521	0.0421	0.0323	0.0413
RMSE	0.0821	0.0680	0.0573	0.0443	0.0563
Retning	0.3180	0.3525	0.2835	0.6169	0.5441
MZ $p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.0000	0.0401	0.0000



**Figur 6.2.** Forecastingsmodellerne absolutte akkumulerede fejl igennem hele forecastingsperioden

er bedre end benchmark modellen, ses det, at nulhypotesen forkastes. Når benchmark modellen testes imod AR(1)-modellen gives en  $p$ -værdi på 100 procent, hvilket gør, at nulhypotesen accepteres, og det kan derfor konkluderes, at NN5-modellen ren statistisk har bedre forecastingsevne end AR(1)-modellen. Dette mønster gentager sig for de resterende modeller; så her afvises nulhypotesen, når der testes, om de resterende modeller er bedre end benchmark modellen, og nulhypotesen accepteres, når der testes for, om benchmark giver bedre forecastingsevne end de lineære modeller. Derfor er NN5-modellens forecast statistisk bedre end de andre modeller.

**Tabel 6.6.** Diebold-Mariano test for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	Diebold-Mariano $p$ -værdi			
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN44
$M1 = M2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$M1 < M2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$M1 > M2$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

**Note:** NN5-modellen er benchmark-modellen ( $M_1$ ).

Da de lineære modeller ikke kan opfange de ikke-lineære sammenhænge, der forekommer i dataet, og de neurale netværk ikke altid kan opfange de lineære sammenhænge i dataet, har det næste afsnit til formål at se, om der kan laves en hybridmodel mellem de lineære og ikke-lineære modeller, der giver endnu bedre forecastingsevalueringer end NN5-modellen.

Nu er det blevet testet hvilke af modellerne, der alene giver de mest optimale og præcise forecasts, men det kan godt ske, at en kombination af lineære og ikke-lineære modeller kan give en endnu bedre forecastingsevne end modellerne isoleret set. Der opstilles derfor en række hybridmodeller på baggrund af de tidligere modeller, og disse modeller kan ses i tabel 6.7, hvor forecastingsevalueringer også kan ses.

Som tabel 6.7 viser, så er det NN5ARMA11-modellen, der har den laveste MAE og RMSE; denne model har også den højeste retning på 51.55 procent, og er den eneste,

**Tabel 6.7.** Forecastingsevalueringer for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	MAE	RMSE	Retning	MZ $p$ -værdi
NN5AR1	0.0468	0.0628	0.3682	0.0000
NN5MA2	0.0427	0.0577	0.3953	0.0000
NN5ARMA11	0.0391	0.0540	0.5155	0.4972
NN44AR1	0.0482	0.0642	0.3295	0.0000
NN44MA2	0.0443	0.0593	0.3372	0.0000
NN44ARMA11	0.0409	0.0556	0.3915	0.0006

som giver unbiased forecasts. De andre modeller når ikke retninger, der er højere end 40 procent, og ingen af dem giver unbiased resultater.

Det ser ikke rigtig ud til, at nogle af hybridmodellerne kan slå NN5-modellen, udover kombinationen mellem NN5 og ARMA(1,1). Derfor laves en Diebold-Mariano test for at se, om nogle af hybridmodellerne er signifikant bedre end NN5-modellen.

Det ses ud fra tabel 6.8, at ingen af kombinationsmodellerne er i nærheden af at slå NN5-modellen. Dette betyder, at der er statistiske forskelle i NN5-modellens forecastingsevne mod hybridmodellernes forecastingsevner.

Ud fra ovenstående analyse af forecasting af det daglige S&P500 afkast, viser denne analyse, at den model, der leverer de bedste forecasts, er det neurale netværk med et hidden layer med fem neuroner. Denne model har de laveste tabsfunktioner og den højeste retning sammenlignet med de andre modeller og hybridmodeller. Det vurderes derfor ud fra et statistisk synspunkt, at NN5-modellen er den mest optimale model at anvende, når der skal forecastes på det daglige S&P500 afkast i et bull marked.

Det blev vist at NN5-modellen ren statistisk gav de mest optimale forecasts, men er det også ensbetydende med, at denne model er mest optimal, når denne bruges til at handle med ud fra forskellige handelsalgoritmer? Det næste afsnit har til formål at se, om de før omtalte modeller kan anvendes til at handle med.

**Tabel 6.8.** Diebold-Mariano test for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	$M1 = M2$	$M1 < M2$	$M1 > M2$
NN5AR1	0.0000	0.0000	1.0000
NN5MA2	0.0000	0.0000	1.0000
NN5ARMA11	0.0000	0.0000	1.0000
NN44AR1	0.0000	0.0000	1.0000
NN44MA2	0.0000	0.0000	1.0000
NN44ARMA11	0.0000	0.0000	1.0000

**Note:** NN5-modellen er benchmark-modellen ( $M_1$ ).

### 6.1.2.2 Profitabilitetsanalyse

Der er i det tidligere afsnit blevet set på hvilke af modellerne, der ren statistisk giver de mest optimale forecasts ud fra en række tabsfunktioner, en retningsvariabel og om forecastene i gennemsnit skyder for højt eller for lavt. Der blev også udarbejdet en Diebold-Mariano test for at se, om den valgte model rent statistisk var bedre end de andre modeller. Ud fra alle disse vurderingsmetoder, så blev NN5-modellen valgt som værende den model, der gav de bedste forecasts.

Følgende afsnit har til formål at undersøge profitabiliteten på modellerne. Derfor bliver der i dette afsnit udarbejdet en profitabilitetsanalyse, hvor de forskellige modellers forecasts bliver brugt til at handle udfra. Der udføres to former for algoritmer. Fremgangsmetoden på den første algoritme følger; hvis ændringerne i modellens forecast i morgen forecaster at markedet skal op, så signaleres et købssignal, og modellen køber derfor i dag til lukkekursen. Hvis ændringerne i modellens forecast forecaster, at markedet skal ned i morgen, så giver dette et salgssignal, og modellen sælger til lukkekursen i dag. Denne strategi kaldes for *buy-and-sell* (B&S), og denne holdes op imod en simpel *buy-and-hold* (B&H) strategi.

Udover en buy-and-sell strategi, udarbejdes der også en algoritme, der kan håndtere korte positioner; *long-and-short* (L&S) strategi. Denne handelsalgoritme er sat op således, at ved slutningen af dagen forecaster modellerne, om markedet skal op eller ned i næste periode, og dette signalerer så, om man skal holde en lang eller en kort position. Hvis modellen signalerer et købssignal, holdes der en lang position; hvis der signaleres et salgssignal, holdes en kort position. Dette giver mulighed for at profitere på et kursfald. Algoritmen er dog meget naiv, da der kun kan holdes en 100 procent lang eller en 100 procent kort position. Denne algoritme holdes ligeledes op imod buy-and-hold og buy-and-sell strategierne.

Resultaterne af algoritmerne for de forskellige modeller kan ses i tabel 6.9.

Som tabel 6.9 viser, så giver en simpel B&H-strategi en samlet afkast på 19.46 procent over forecastingsperioden. Det ses også, at standardafvigelsen for denne strategi er 5.24 procent, hvilket giver en 3.58 Sharpe-ratio. Dets maksimumsafkast er 1.39 procent, og dets minimumsafkast er -1.79 procent. Der bliver handlet én gang, da der bliver købt i starten af perioden og solgt i slutningen af perioden. Da afkastet er positivt, vinder denne model 100 procent af dets handler. Det ses, at der er 142 perioder hvor kursen stiger, og der er 115 perioder hvor kursen falder. Grundet de lave transaktionsomkostninger, ender denne strategi med en samlet profit på 19.42 procent.

Sammenlignes B&H-strategien med B&S-strategien for de forskellige forecastingsmodeller, ses det, at de lineære modeller leverer et negativ afkast, hvor AR(1)- og MA(2)-modellerne giver en negativ afkast på henholdsvis -21.97 og -15.70 procent. Det er også disse to modeller, der har de højeste standardafvigelser og de laveste Sharpe-ratioer. Her er ARMA(1,1)-modellen lidt mere beskeden; dog stadig med negativ afkast, men denne har en relativ lav volatilitet. Det ses også, at det kun er den model af de lineære modeller, der opnår et maksimum afkast på over én procent, hvor de to andre knap nok kommer over én procent. Sammenlignes dette med deres minimumsafkast, ses det, at alle de lineære modeller opnår et minimumsafkast på over -1.65 procent. Disse lineære modeller udfører også mange handler; AR(1) udfører 88, MA(2) udfører 77 og ARMA(1,1) med små 66 handler. Disse modeller skaber mange købs- og salgssignaler, hvilket øger omkostningerne. Det ses også, at de lineære modellers vindende antal handler er relativt lave; AR(1) med

**Tabel 6.9.** Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44
Afkast (%)	19.46	-21.97	-15.70	-5.13	12.89	11.30
Standard afvigelse (%)	5.24	5.39	3.50	1.28	1.81	1.57
Sharpe-ratio	3.58	-4.07	-4.48	-3.99	7.12	7.19
Maksimum afkast (%)	1.39	0.59	0.96	2.06	1.82	1.67
Minimum afkast (%)	-1.79	-1.65	-1.65	-1.65	-1.88	-1.20
Antal handler	1	88	77	66	79	84
Transaktionsomkostninger (%)	0.004	3.52	3.08	2.64	3.16	3.36
Vindende handler (%)	100.00	20.45	29.87	27.27	65.82	60.71
Antal perioder op	148	129	130	127	131	129
Antal perioder ned	113	128	127	130	126	128
Profit (%)	19.42	-25.49	-18.78	-7.77	9.73	7.94

	L&S				
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44
Afkast (%)	-61.75	-49.20	-28.28	6.07	2.91
Standard afvigelse (%)	5.39	3.50	1.28	1.81	1.57
Sharpe-ratio	-11.45	-14.04	-22.01	-3.36	-1.85
Maksimum afkast (%)	0.59	0.96	2.06	1.82	1.67
Minimum afkast (%)	-1.67	-2.15	-1.65	-1.88	-1.20
Antal handler	176	157	135	156	168
Transaktionsomkostninger (%)	7.04	6.28	5.40	6.24	6.72
Vindende handler (%)	15.34	20.38	20.00	57.05	49.40
Profit (%)	-68.79	-55.48	-33.68	-0.17	-3.81

20.45 procent vindende handler, MA(2) med 29.87 procent og ARMA(1,1) med 27.27 procent - dette er ikke imponerende statistikker.

Hvis der derimod ses på de neurale netværk med samme handelsstrategi, leverer de to netværk positive afkast på 12.89 procent for NN5-modellen og 11.30 procent for NN44-modellen. Dette er en væsentlig forbedring i forhold til de lineære modeller, men stadig ikke et bedre afkast end ved en simpel B&H-strategi. Volatiliteten er det punkt, hvor modellerne virkelig skiller sig ud, og derigennem forbedres Sharpe-ratioen; NN5-modellen har en Sharpe-ratio på 7.12 og NN44-modellen har en på 7.19. Det ses også, at disse modeller opnår maksimumsafkast på henholdsvis 1.82 og 1.67 procent; mens deres minimumsafkast er på niveau med de lineære modeller. Disse netværk foretager ligeledes mange handler med 79 og 84, hvilket bidrager til høje transaktionsomkostninger. Det ses også at de neurale netværk virkelig skiller sig ud fra de lineære modeller, når man ser, hvor mange af deres handler de vinder; 65.82 procent for NN5-modellen og 60.71 for NN44-modellen - virkelige gode resultater, da modellerne vinder flere handler, end de taber. Det ses også, at deres samlede profit er positiv, modsat de lineære modeller profit, men dog en del lavere end profitten for en B&H-strategi.

Tabel 6.9 viser også resultaterne, når modellerne handler ud fra en L&S-strategi. Her ses det, at de lineære modeller opnår rimelige høje negative afkast. Derudover stiger antallet af handler med næsten dobbelt så mange som for B&S-strategien. Det ses også, at den eneste

model, der vinder over 50 procent af dets handler, er NN5-modellen med 57.05 procent. Til sidst ses det, at de meget høje negative afkast og de høje handelsomkostninger bidrager til endnu højere negative profitter for de lineære modeller. De neurale netværk opnår også negative profitter, men disse er dog mere beskedne på -0.17 procent for NN5-modellen og -3.81 procent for NN44-modellen.

Hvis afkastet for perioden kendes ud fra tabel 6.9, vil investor selvfølgelig vælge den simple B&H-strategi. Denne strategi giver den absolut højeste profit på 19.42 procent. Strategien giver også en Sharpe-ratio 3.58; hvilket er relativt højt dog ikke den højeste. Hvis man ikke kender afkastet over perioden, og man ville skulle handle videre, så vil NN5-modellen nok blive udvalgt sammen med en B&S-strategi, da denne giver en meget høj Sharpe-ratio sammenlignet med de andre modeller, samt det er også den af forecastingsmodellerne der giver den højeste profit på næsten otte procent. L&S-strategien vil slet ikke blive betragtet som en god strategi i forhold til de andre strategier, da disse giver negative profitter på grund af dets mange handler.

Da NN5-modellen er den model med den laveste risiko og den højeste profit, er det interessant at undersøge, om der er markedstiming i modellen, og om der er statistisk grundlag for, at denne kan forecaste retningen? Dette bliver undersøgt ved hjælp af en Henriksson-Merton test og en Pesaran-Timmerman test, der henholdsvis tester for markedstiming og om modellen kan forecaste retningen. Resultaterne af disse to tests kan ses i tabel 6.10.

**Tabel 6.10.** Henriksson-Merton test og Pesaran-Timmermann test resultater for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44
HM-statistik	0.9435	0.9048	0.9107	1.1751	0.9598
PT-statistik	0.8595	1.6144	1.7660	3.3905	0.4223

**Note:** En HM-statistik større end 1 betyder at der er markedstiming. Nulhypotesen for PT forkastes ved 10%, 5% og 1% ved værdier på 1.282, 1.645 og 2.330

Det ses i tabel 6.10, at HM-statistikken giver resultater på under én for stort set alle modellerne. Den eneste model, der har en markedstiming over ét, er NN5-modellen og er derfor den af modellerne der har den bedste markedstiming. Kigges der i stedet på Pesaran-Timmerman statistikken, skal denne give en værdi på over 1.645, for at nulhypotesen afvises inden for et fem procents signifikansniveau; Ligger modellerne inden for de fem procents signifikansniveau, afvises nulhypotesen om, at modellen ikke kan forecaste retningen. Det ses, at de eneste modeller, der ikke kommer over 1.645, er AR(1), MA(2) og NN44-modellen; der er derfor ikke statistisk grundlag for, at disse kan forecaste retningen. ARMA(1,1) og NN5-modellen har PT-statistikker, der er over de 1.645, og derved er der statistisk grundlag for, at disse kan forecaste retningen.

Samme undersøgelse kan laves for hybridmodeller, som blev beskrevet i tidligere afsnit. Resultaterne for hybridmodellernes performance kan ses i tabel 6.11.

Der opnås kun positivt afkast for B&S-strategien, når det neurale netværk sammen sættes med ARMA(1,1)-modellen. De andre hybridmodeller giver meget høje negative

**Tabel 6.11.** Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	B&S					
	NN5AR1	NN5MA2	NN5ARMA11	NN44AR1	NN44MA2	NN44ARMA11
Afkast	-22.55	-15.37	7.70	-21.98	-14.26	1.32
Standard afvigelse	2.69	1.86	0.91	2.73	1.88	0.85
Sharpe-ratio	-8.38	-8.24	8.44	-8.04	-7.60	1.55
Maksimum afkast	0.59	0.77	1.82	0.59	0.77	1.54
Minimum afkast	-1.65	-1.48	-1.06	-1.65	-1.65	-1.09
Antal handler	84	75	76	84	85	83
Trans.omkostninger	3.36	3.00	3.04	3.36	3.40	3.32
Vindende handler	20.24	26.67	55.26	20.24	32.94	49.40
Antal perioder op	133	137	144	127	130	126
Antal perioder ned	128	124	117	134	131	135
Profit	-25.91	-18.37	4.66	-25.34	-17.66	-2.00

	L&S					
	NN5AR1	NN5MA2	NN5ARMA11	NN44AR1	NN44MA2	NN44ARMA11
Afkast	-62.59	-49.55	-4.62	-61.77	-47.34	-17.39
Standard afvigelse	2.69	1.86	0.91	2.73	1.88	0.85
Sharpe-ratio	-23.27	-26.58	-5.07	-22.59	-25.24	-20.45
Maksimum afkast	0.59	0.77	1.82	0.59	0.77	1.57
Minimum afkast	-1.67	-1.86	-1.45	-1.67	-1.65	-1.39
Antal handler	168	151	150	168	171	166
Trans.omkostninger	6.72	6.04	6.00	6.72	6.84	6.64
Vindende handler	15.48	21.19	47.33	13.69	23.98	36.75
Profit	69.31	-55.59	-10.62	-68.49	-54.18	-24.03

afkast i denne strategi. Når NN5-modellen sammensættes med ARMA(1,1)-modellen, giver dette den højeste Sharpe-ratio på 8.44. Det er også den model, der har en af de laveste transaktionsomkostninger, og den hybridmodel, der vinder flest af dets handler med op til 55 procent. Dette bidrager til en positiv profit på 4.66 procent; dog ikke bedre end NN5-modellen alene i samme strategi, eller en B&H-strategien.

For L&S-strategien genererer ingen af hybridmodellerne positivt afkast. Det er dog stadig NN5ARMA11-modellen, der giver det mindst negative resultat i forhold til profit. På grund af, at alle afkast er negative, vil investor ikke være interesseret i at anvende L&S-strategien for det daglige afkast på S&P500.

Der tjekkes nu for markedstiming igennem Henriksson-Merton testen og for, om hybridmodellerne kan forecaste retningen igennem en Peseran-Timmerman test. Resultaterne kan ses i tabel 6.12.

Her ses det, at ingen af hybridmodellerne, på nær NN5ARMA11 har en HM-statistik over én, og derfor er der ikke noget statistisk grundlag for at sige, at hybridmodellerne har en markedstiming. Det ses dog, at NN5ARMA11-modellen har en HM-statistik på 1.0655, hvilket lige præcis er over én, men stadig så tæt på én, at det kan være svært at argumentere for, at denne faktisk besidder markedstiming.

Denne tabel viser, at de eneste hybridmodeller, der har en PT-statistik over 1.645, er NN44AR1 og NN44ARMA11; så disse to modeller har statistisk grundlag for at kunne

**Tabel 6.12.** Henriksson-Merton test og Pesaran-Timmermann test resultater for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	NN5AR1	NN5MA2	NN5ARMA11	NN44AR1	NN44MA2	NN44ARMA11
HM-statistik	0.9669	0.9823	1.0655	0.8779	0.9164	0.8600
PT-statistik	0.0473	0.0473	1.5124	2.1698	1.2967	4.3982

*Note:* En HM-statistik større end 1 betyder at der er markedstiming. Nulhypotesen for PT accepteres ved 10%, 5% og 1% ved værdier på 1.282, 1.645 og 2.330

forudsige retningen. Ingen af de andre hybridmodeller har en PT-statistik over 1.645. Det ses, at NN5ARMA11 har en PT-statistik på 1.5124, hvilket gør, at man vil afvise nulhypotesen om ingen retningsforecasting ved et ti procents signifikansniveau.

Det næste afsnit har til formål at rangere de forskellige forecastingsmodeller på baggrund af deres risikojusterede afkast - så hvor meget afkast der opnås mod den ekstra risiko, man påtager sig.

### 6.1.2.3 Risikojusteret afkast

I de to foregående afsnit er der blevet testet for den statistiske performance samt profitabiliteten af de anvendte modeller. I dette afsnit vil det risikojusterede afkast blive beregnet vil hjælp af MRAR. En højere MRAR betyder, at modellen leverer mere konsistente afkast, med en større regelmæssighed. Investor er mere bekymret for et muligt negativt udfald end et positivt og er derfor villig til at give afkald på en smule afkast for at opnå en større sikkerhed.

I overstående tabel kan det ses, at resultatet i MRAR ikke giver de store afvigelser i forhold til det oprindelige beregnede afkast. Det største risikojusteret afkast ses i NN5MA2 modellen hvor korrektionen kommer op på 15.05 procent. Ofte har de modeller, der giver store negative afkast, en stor risikokorrektion. Disse modeller er dog ikke af interesse, da de ikke leverer et positivt afkast til investor. Kigges der derimod, på de modeller der giver et positivt afkast, er der inter der slår benchmark modellen. I forvejen leverer den allerede

**Tabel 6.13.** Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det daglige afkast for bull perioden

	B&H		B&S				
			AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44
Afkast(%)	19.46		-21.97	-15.70	-5.13	-12.89	11.30
MRAR(%)	20.90		-20.10	-14.94	-5.29	13.10	11.55
Diff(%)	1.43		1.88	0.76	-0.16	0.21	0.25
			L&S				
			AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44
Afkast(%)			-61.75	-49.20	-28.28	6.07	2.91
MRAR(%)			-47.07	-39.75	-25.27	4.16	2.22
Diff(%)			14.68	9.45	3.01	-1.92	-0.69

**Tabel 6.14.** Risikojusteret afkast for de seks hybridmodeller for det daglige afkast for bull perioden

B&S						
	NN5AR1	NN5MA2	NN5ARMA11	NN44AR1	NN44M2	NN44ARMA11
Afkast(%)	-22.55	-15.37	7.70	-21.98	- 14.26	1.32
MRAR(%)	-20.55	-14.59	6.84	-20.11	-13.60	0.51
Diff(%)	2.00	0.77	-0.86	1.87	0.66	-0.80
L&S						
	NN5AR1	NN5MA2	NN5ARMA11	NN44AR1	NN44M2	NN44ARMA11
Afkast(%)	-62.59	-49.55	-4.62	-61.77	-47.34	-17.39
MRAR(%)	-47.54	-39.95	-5.84	-47.08	-38.47	-16.67
Diff(%)	15.05	9.60	-1.22	14.69	8.87	0.72

det højeste afkast, og med en risikojustering på 1.43 er det den af modellerne med positivt afkast der opnår højest MRAR.

**Tabel 6.15.** Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det daglige afkast i bull perioden

	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN5	NN44	
R > 50%				x	x	
MZ > 10%						
DM > $M_1$				$M_1$		
B&S A > B						
L&S A > B						
B&S SR > B				x	x	
L&S SR > B						
HM > 1				x		
PT < 10%		x	x	x		
	NN5AR1	NN5MA2	NN5ARMA11	NN44AR1	NN44MA2	NN44ARMA11
R > 50%			x			
MZ > 10%			x			
DM > $M_1$						
B&S A > B						
L&S A > B						
B&S SR > B			x			
L&S SR > B						
HM > 1			x			
PT < 10%			x	x	x	x

**Note:** R > 50% henviser til de modeller der har en retningsvariabel på over 50%; MZ > 10% henviser til modeller der har en Mincer-Zarnowitz p-værdi på over 10%; DM >  $M_1$  henviser til modeller der har en Diebold-Mariano statistik der gør at modellen er bedre end benchmark-modellen  $M_1$ ; B&S A > B henviser til modeller der i B&S-strategien har et afkast der er højere end afkastet i B&H-strategien; L&S A > B henviser til modeller der i L&S-strategien har et afkast der er højere end afkastet i B&H-strategien; B&S SR > B henviser til modeller der i B&S-strategien har en Sharpe-ratio der er højere end Sharpe-ratioen i B&H-strategien; L&S SR > B henviser til modeller der i L&S-strategien har en Sharpe-ratio der er højere end Sharpe-ratioen i B&H-strategien.



#### 6.1.2.4 Opsummering

Det kan ses ud fra tabel 6.18 at de eneste modeller der opnår en retning på over 50 procent er de to neurale netværk, men ingen af disse modeller er Mincer-Zarnowitz unbiased, hvilket betyder at de i gennemsnit forecaster enten for højt eller for lavt. Det vurderes dog at NN5-modellen har de bedste statistiske kriterier, og derfor anvendes denne som benchmark model i en Diebold-Mariano test, men der er ingen af de resterende modeller der slår denne model ren statistisk. NN5-modellen kan dog ikke slå en B&H-strategi når denne bruges til at handle med; det er kun for B&S-strategien at denne opnår en bedre Sharpe-ratio end benchmark strategien. NN5-modellen er også den eneste model der ren statistisk har en markedstiming, da denne har en  $HM > 1$ , og der er også et statistisk grundlag for at denne kan forecaste retningen.

I forhold til hybridmodellerne, så ses det at NN5ARMA11-modellen har lignende resultater som NN5-modellen alene. Men da denne model ikke er statistisk bedre end NN5-modellen i Diebold-Mariano testen så må det vurderes at NN5-modellen giver de mest optimale forecast på det daglige S&P500 afkast i et bull markedet.

#### 6.1.3 Ugentlig afkast

Det ugentlige afkast bliver udsat for samme former for analyser som gennemgået ved det daglige afkast. Der startes derfor med en statistisk analyse, hvor der ses på hvilken af modellerne, der ren statistisk giver de mest optimale forecasts. Dernæst udarbejdes en profitabilitetsanalyse, hvor modellerne igen testes imod en *buy-and-hold* strategi, og på denne måde undersøges det, om den model, der ren statistisk er mest optimal, også giver den højeste profit.

Fremgangsmetoden for det ugentlige afkast er tilsvarende til det daglige afkast, og derfor vil alle tabeller og figurer blive sat i appendiks. Desuden vil kun de mere væsentlige resultater benævnes.

##### 6.1.3.1 Statistisksforecastanalyse

Som tabel 6.1 viser, så vælger AIC en AR(1)-, MA(3)- og ARMA(1,2)-model for det ugentlige afkast. Problemet med dette er, at det ugentlige afkast er meget persistent, og derved forekommer der seriekorrelation i modellernes fejlled. Resultaterne af LM-testen kan ses i tabel B.1 i appendiks B. Her oplever alle modeller seriekorrelation i både lag fire og otte. Denne seriekorrelation i fejlledene skal elimineres før, at modellerne kan bruges til at estimere forecasts. Derved estimeres modellerne igennem en GARCH(1,1)-model. Begrundelsen for at disse estimeres igennem en GARCH(1,1)-model er, fordi GARCH-modeller er gode til at håndtere seriekorrelation.

Der vælges en GARCH(1,1)-model, da Hansen og Lundes artikel fra 2005 argumenterer for, at intet kan slå en GARCH(1,1)-model. Deres resultater viser desuden, at der ikke er noget statistisk grundlag for at anvende en anden ARCH/GARCH-model [12].

Efter at modellerne er blevet estimeret igennem en GARCH(1,1)-model, skal der tjekkes, at seriekorrelationen er forsvundet; dette gøres ved at se, om de standardiserede residualer er statistisk insignifikante. Resultaterne af denne LM-test kan ligeledes ses i tabel B.2. Her ses det, at de standardiserede residualer er statistisk insignifikante, hvilket gør, at de alle

sammen accepterer nulhypotesen om ingen seriekorrelation. Derved kan disse nu anvendes til forecasting.

Fra tabel 6.2 ses det, at for det ugentlige afkast bliver der valgt et neuralt netværk med et hidden layer med fire neuroner, og der bliver valgt et netværk med to hidden layers, hvor der er fire og to neuroner i hvert hidden layer.

Modellerne kan nu anvendes til at udføre one-step ahead forecasts, og i figur A.3 ses de fem modelleres one-step ahead forecasts imod det reelle afkast i out-of-sample perioden. Ud fra denne figur ser det ud som om, at MA(3)-modellen afviger rigtig meget i forhold til det reelle afkast, så på baggrund af det visuelle tjek, forventes det, at denne model klarer sig dårligt sammenlignet med de andre modeller, der ligger tættere på det aktuelle afkast.

I tabel B.3 ses de forskellige forecastsevalueringer for de fem modeller. Her ses det som forventet, at MA(3)-modellen har de suværent højeste tabsfunktioner. Det ses, at den model med de laveste tabsfunktioner er NN42-modellen. Figur A.4 viser de akkumulerede absolutte fejl imod hinanden. AR(1)- og ARMA(1,2)-modellerne ligger meget tæt igennem hele perioden. NN3- og NN42-modellerne følges ligeledes godt ad igennem perioden; dog er NN42-modellen den med de laveste akkumulerede absolutte fejl. NN42-model har også den højeste retnings-variabel sammen med NN3-modellen. Det skal dog lige bemærkes den høje retningsvariabel på MA(3)-modellen, der havde de højeste tabsfunktioner. Det ses dog også, at det kun er de to ikke-lineære modeller, der accepterer nulhypotesen i Mincer-Zarnowitz regressionen; de andre modeller forecaster derfor i gennemsnit enten for højt eller for lavt.

I tabel B.4 ses resultaterne af en Diebold-Mariano test, hvor NN42-modellen er benchmark modellen. Benchmark modellen er ren statistisk bedre end samtlige lineære modeller. Det ses dog at NN42-modellen ikke er statistisk bedre end NN4-modellen; så her er der ingen statistisk grundlag for at den ene model giver bedre forecasts end den anden.

Det undersøges nu, om der er en kombination af de lineære og ikke-lineære modeller, der kan give mere optimale forecasts end NN42-modellen. Der henvises derfor til tabel B.5. Her ses alle tabsfunktionerne og retnings-variablerne for alle kombinationsmodellernes forecasts. Kombination mellem NN42- og MA(3)-modellen giver de laveste tabsfunktioner, samt den bedste retning på over 60 procent; denne retnings-variabel er dog otte procentpoint lavere end selve NN42-modellen. Desuden er NN42MA3-modellen unbiased i MZ-testen.

Til at undersøge om nogle af kombinationsmodellerne er bedre end NN42-modellen, så udsættes disse for en Diebold-Mariano test for at se, om disse ren statistisk er bedre end NN42-modellen. Resultaterne af sådan en test kan ses i tabel B.6. Her ses det at der er ikke er statistisk grundlag for at NN42-modellen er bedre end NN42MA3-modellen.

Det ses også at NN42MA3-modellen har lavere tabsfunktioner, men denne har dog en lavere retning end NN42-modellen. Det kan derfor være svært at vælge hvilken af disse to modeller der ren statistisk er bedst.

### 6.1.3.2 Profitabilitetsanalyse

Der tjekkes nu, om modellerne kan bruges til at handle med, og om disse er bedre end en B&H-strategi ved at handle ud fra en B&S-strategi og/eller en L&S-strategi. Resultaterne

for algoritmerne kan ses i tabel B.7. Det ses, at AR(1)- og ARMA-modellen igen giver høje negative afkast sammenlignet med resultaterne for det daglige afkast. MA(3)-modellen giver nu et afkast på 12.95 procent. Her bliver de lineære modeller igen slået af de neurale netværk, der giver positive afkast på 14.58 procent for NN42-modellen og 13.30 procent for NN4-modellen.

For de neurale netværk stiger standardafvigelsen for begge modeller, hvis de sammenlignes med det daglige afkast. Dette betyder også, at Sharpe-ratioerne bliver mindre end ved det daglige afkast for de fleste modeller. MA(3)-modellen er faktisk den af alle modellerne, der leverer det højeste maksimumsafkast, tæt efterfulgt af de to netværk. Denne model giver også en af de laveste minimumsafkast kun slået af NN4-modellen. Alle modellerne laver mellem 67 og 74 handler, hvilket er rimeligt. Når det kommer til vindende handler, så kan AR(1)- og ARMA(1,2)-modellen ikke følge med, med deres 26.09 og 30.00 procent; MA(3)-modellen vinder hele 67.57 procent af dets handler, og de to neurale netværk vinder næsten over 70 procent af deres handler - hvilket er noget af en forbedring i forhold til det daglige afkast. Det ses til sidst, at NN42-modellen giver en højere profit end NN4-modellen. Dog er der ingen af modellerne, der slår en B&H-strategi.

Kigges der derimod på L&S-strategien, ses det her, at de lineære modeller igen opnår meget høje negative afkast på nær MA(3)-modellen, der giver et positiv afkast på 7.22 procent. De ikke-lineære modeller giver med denne strategi afkast på 8.53 procent for NN4-modellen og 11.09 procent for NN42-modellen, hvilket er noget af en forbedring i forhold til det daglig afkast. Det ses også, at det er de to netværk, der giver det højeste maksimum afkast på næsten 1.80 procent. Alle modeller laver handler, der ligger mellem 134 til 147. Det ses også i den her strategi, at AR(1)- og ARMA(1,2)-modellen vinder 21.01 og 23.57 af deres handler respektivt. NN4-modellen vinder 61.81 og NN42-modellen vinder 64.93 procent af dets handler, hvilket igen er meget imponerende.

Det testes nu for, om modellerne har en markedstiming og om de kan forecaste retningen. I tabel B.8 ses resultaterne af Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann testene. Her ses det, at alle modellerne har en HM-statistik på over én, men NN42-modellen har den højeste HM-statistik og derfor har denne mest markedstiming. Desuden ses det i forhold til PT-statistikken, at alle modeller kan forecaste retningen.

I forhold til hybridmodellerne så ses det i tabel B.9 for B&S-strategien at de eneste hybridmodeller der giver positive afkastrater er NN4MA3- og NN42MA3-modellerne. Disse udfører helholdsvis 76 og 74 handler, og vinder 67.11 og 68.92 procent af deres handler. Sammenlignes disse resultater med de individuelle modeller for samme strategi, så giver hybridmodellerne højere profit, samt at disse har højere Sharpe-ratio; desuden er disse Sharpe-ratioer også bedre end for B&H-strategien.

Det ses at når der disse hybridmodeller handler ud fra L&S-strategien, så giver dette en smule lavere afkastrater end for B&S-strategien, men disse afkastrater er stadig højere end de individuelle modellers afkast for samme strategi. Her vinder NN4MA3-modellen 61.18 procent af dets handler og NN42MA3-modellen vinder 62.84 procent af dets handler.

Det kan ses ud fra tabel B.10 at NN42MA3-modellen har den højeste HM-statistik og derfor kan der argumenteres for at denne har den bedste markedstiming af hybridmodellerne. Alle hybridmodellerne har dog statistisk grundlag for at kunne forecaste retningen.

Så ud fra profitabilitetsanalysen blev det vist at en kombination mellem NN42 og MA(3) giver højere profitrater, samt de højeste Sharpe-ratioer end de individuelle modeller.

### 6.1.3.3 Risikojusteret afkast

Resultaterne for det risikojusterede afkast på det ugentlige data tegner lidt det samme mønster som for det daglige afkast. Kigges der i tabel B.11 for de individuelle modeller ses det, at benchmark igen giver den højeste MRAR af de modeller der gav et positivt afkast. De neurale netværk i B&S-strategien leverer også et fornuftigt risikojusteret resultat for investor.

Det er dog kombinationsmodellerne i tabel B.12 der giver de mest iøjnefaldende resultater. NN4MA3 og NN42MA3 MRAR er på henholdsvis 1.07 procent og 1.19 procent i B&S-strategien. Disse to modeller er dem der kommer tilnærmelsesvis tæt på benchmark modellen, men alligevel må B&S-strategien vurderes som den bedste med en MRAR på 1.24 procent.

**Table 6.16.** Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det ugentlige afkast i bull perioden

	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42	
R > 50%		x		x	x	
MZ > 10%		x				
DM > $M_1$				x	$M_1$	
B&S A > B						
L&S A > B						
B&S SR > B						
L&S SR > B						
HM > 1	x	x	x	x	x	
PT < 10%	x	x	x	x	x	
	NN4AR1	NN4MA3	NN4ARMA12	NN42AR1	NN42MA3	NN42ARMA12
R > 50%	x	x	x	x	x	x
MZ > 10%	x		x	x	x	x
DM > $M_1$		x			x	
B&S A > B						
L&S A > B						
B&S SR > B		x			x	
L&S SR > B					x	
HM > 1	x	x	x	x	x	x
PT < 10%	x	x	x	x	x	x

### 6.1.3.4 Opsummering

Ovenstående analyse og tabel 6.16 viser at det kun er MA(3), NN4 og NN42 der har en retning på over 50 procent, men den viste også at det kun er MA(3)-modellen der giver unbiased forecasts. Grundet lave tabsfunktioner vælges NN42-modellen som benchmark i

Diebold-Mariano testen og det blev vist at der ikke er et statistisk grundlag for at denne model giver bedre forecast end NN4-modellen. Det ses dog også at ingen af modellerne giver afkast der er større end benchmark strategien, selvom at både MA(3), NN4 og NN42 giver positive afkaststrater for begge strategier. Disse tre modeller har et statistisk grundlag for at have en markedstiming, og samme grundlag for at kunne forecaste retningen.

Hybrid modellerne har alle en retning på over 50 procent, hvor fem af disse giver unbiased forecasts. Men kun en af disse kan slå benchmark modellen i en Diebold-Mariano test, og der er derfor ikke et statistisk grundlag for at NN42-modellen giver bedre forecasts end NN42MA3-modellen. Det blev vist af denne model gav afkaststrater der var højere end de individuelle modellers afkaststrater, men ikke en høj nok afkaststrat til at kunne slå benchmark-strategien. Denne model har statistisk grundlag for markedstiming og forecasting af retningen.

### 6.1.4 Månedlig afkast

Nu laves samme analysen for det månedlige afkast. For det månedlige afkast ses der er en større persistens, hvilket kunne give interessante resultater. Igen vil tabeller og figurer blive sat i appendiks, og der vil derfor henvises til disse og resultaterne vil hurtigt blive gennemgået. For at opretholde læsers interesse er det kun de mest nævneværdige resultater, der bliver beskrevet.

#### 6.1.4.1 Statistiskforecastanalyse

Det ses ud fra tabel 6.1, at AIC vælger en AR(3), MA(5) og ARMA(1,2) til at repræsentere de lineære modeller for den månedlige afkastserie. LM-testen viser, at der kun er seriekorrelation er i residualerne for MA(5) og derfor anvendes der en GARCH-model. De neurale netværk leverer ligesom for både de daglige og ugentlige modeller en lavere RMSE og MAE, og hvis der sammenlignes med de ugentlige afkast, ses det også, at tabene er markant lavere. Retningen på de neurale netværk er bemærkelsesværdig for de månedlige afkast. NN3 opnår en retning på 95.38 procent mens NN22 opnår en retning på hele 96.22 procent. De lineære modellers retning er under 50 procent og derfor ikke specielt imponerende. Diebold-Mariano testen i tabel B.4 viser ligesom tabsfunktionerne og retningen, at det neurale netværk er bedre end de lineære modeller. NN3 er valgt som den overlegne model, da den har de laveste tab i RMSE og MAE samt en retning, der er tæt på NN22. Ud fra Diebold-Mariano testen ses det, at NN3 er de andre modeller overlegen rent statistisk.

De statistiske evalueringer for hybridmodellerne vil i forbindelse med tabel B.5 vælge NN3AR3, da den har både lavest MAE og RMSE og den bedste retning. NN3ARMA12 er dog ikke langt efter. Diebold-Mariano testen i B.6 beskriver desuden, at er den statistisk mest overlegne model.

#### 6.1.4.2 Profitabilitetsanalyse

Resultaterne i denne del af analysen er overraskende, hvis der ses på de neurale netværks performance mod benchmark B&H-strategien. For første gang slår algoritmen benchmark

modellen i både B&S- og L&S-strategierne og endda med en væsentlig margin. NN3 og NN22 leverer afkast på hele 18.11 procent og 17.84 procent mod en B&H på kun 13.86 procent. Endnu bedre er resultaterne for L&S-strategien, hvor afkastene er på hele 22.19 procent og 21.65 procent. De lineære modeller vil ikke beskrives yderligere, da alle afkastene for disse modeller er negative. Endvidere ses det også, at begge neurale netværk har en bedre Sharpe-ratio på henholdsvis 3.05 for NN3 og 2.98 for NN22 i B&S mod en Sharpe-ratio på 2.15 i benchmark-strategien, og endnu bedre bliver den, hvis der kigges på L&S-strategien i tabel B.13. NN3 og NN22 vinder i B&S-strategien hele 76.92 procent og 76.19 procent af handlerne, lidt tilbagegang er der for de vindende handler i L&S-strategien, hvor det kun er 66.67 procent og 66.40 procent af handlerne. Profitabiliteten er ligeledes bedre i både B&S-strategien og L&S-strategien end ved at anvende B&H. Dette betyder også, at investor vil opnå et positivt afkast ved at benytte sig af forecastene i de to neurale netværk, hvor især NN3 leverer gode resultater.

Ingen af hybridmodellerne leverer et positivt afkast og derfor vil disse ikke blive uddybet yderligere.

### 6.1.4.3 Risikojusteret afkast

For de månedlige afkast, slår to af forecastingsmodellerne benchmarkmodellen ud fra de risikojusterede afkast. Ud fra tabel B.15 ses det, at begge neurale netværk for både B&S-samt L&S-strategien giver et risikojusteret afkast næsten én procent højere end benchmark.

**Tabel 6.17.** Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det månedlige afkast i bull perioden

	AR(3)	MA(5)	ARMA(1,2)	NN3	NN22	
R > 50%				x	x	
MZ > 10%		x				
DM > $M_1$				$M_1$		
B&S A > B				x	x	
L&S A > B				x	x	
B&S SR > B				x	x	
L&S SR > B				x	x	
HM > 1	x	x	x	x	x	
PT < 10%	x	x	x	x	x	
	NN3AR3	NN3MA5	NN3ARMA12	NN22AR3	NN22MA5	NN22ARMA12
R > 50%	x	x	x	x	x	x
MZ > 10%						
DM > $M_1$						
B&S A > B						
L&S A > B						
B&S SR > B						
L&S SR > B						
HM > 1	x	x	x	x	x	x
PT < 10%	x	x	x	x	x	x

Derudover giver de neurale netværk de højeste afkast i forvejen, hvor især NN3-modellen præsterer godt. Derfor vil investor også være bedst tjent ved at vælge NN3-modellen over benchmark, hvis der skal forecastes på månedlig afkast. Ingen af kombinationsmodellerne giver positive afkast og vil derfor ikke uddybes mere.

### 6.1.4.4 Opsummering

For det månedlige afkast for bull perioden blev det vist at det kun er de to neurale netværk der har en retning på over 50 procent, men ingen af disse giver unbiased forecasts. Men begge af disse modeller giver afkastrater der er højere end benchmark-strategien, hvor NN3-modellen giver de højeste afkast i begge strategier. Det er også den model der opnår de højeste Sharpe-ratioer. Her opnår de neurale netværk også statistisk grundlag for at have markedstiming og for at kunne forecaste retningen.

Hybrid modellerne har intet at byde ind med, udover at disse kun giver retningen på over 50 procent.

## 6.2 Bear markedes forecastingsanalyse

Der vil nu blive udarbejdet samme analyse som for sektion 6.1, bare hvor der nu kigges på et *bear markedet*; altså et marked hvor lukkekursen på S&P500 falder igennem en periode. I sektion 5.2 ses hvilken periode der er tale om; fra starten af år 2007 til og med år 2008. Her ses det at lukkekursen for S&P500 tager et dyk igennem denne periode på cirka 500 observationer.

Også her ses der på det daglige, ugentlige og månedlige afkast, og der vil udarbejdes en statistisksforecastanalyse, profitabilitetsanalyse og en analyse på de forskellige modellers risikojusteret afkast.

### 6.2.1 Daglig afkast

Det kan ses ud fra tabel B.17 at AIC vælger at der skal vælges en AR(1)-, MA(5)-, og ARMA(1,1)-model. Alle specifikationerne og alle de formelle testes kan ses i tabel B.19 og tabel B.20. Det ses også ud fra tabel B.18 at de neurale netværk med de laveste fejl er et netværk med et hidden layer og tre neuroner og et netværk med to hidden layers og fire neuroner i hvert layer.

#### 6.2.1.1 Statistisksforecastanalyse

Det kan ses i tabel B.21 at når de tidligere nævnte modeller anvendes til at forecaste med så ses det at den model med den laveste MAE er ARMA(1,1)-modellen, men den model med den laveste RMSE er NN44-modellen. Det ses så også at ingen af modellerne har en retning på over 50 procent, og ingen af dem er unbiased ifølge Mincer-Zarnowitz regressionen. Det vælges dog at NN44-modellen er den af modellerne der er bedst, da denne har den laveste RMSE, og en af de højeste retninger.

Når der så testes om NN44-modellen statistisk er bedre end de andre modeller, så ses det ud fra tabel B.22, at denne er bedre end AR(1)- og MA(5)-modellerne, men denne er ikke statistisk bedre end ARMA(1,1)- og NN3-modellerne. Der er derfor ikke et statistisk grundlag for at sige at NN44-modellen er den bedste af forecastingsmodellerne.

Ses der derimod på hybridmodellernes forecastingsevalueringer, tabel B.23, så ses det at det er en kombination mellem et af de neurale netværk og ARMA(1,1)-modellen der giver de laveste tabsfunktioner. Disse kombinationer giver dog også de dårligste retningsvariabler, men ingen af hybridmodellerne leverer en retningsvariabel på over 50 procent. Heller ingen af disse er unbiased ifølge en Mincer-Zarnowitz regression.

Det ses ud fra tabel B.24 at NN44-modellen ikke statistisk er bedre end NN3ARMA11-model eller en NN44ARMA11-model. Så her kan det sagtens være at en anden model giver bedre forecast end NN44-modellen.

### 6.2.1.2 Profitabilitetsanalyse

I forhold til profitabilitetsanalysen så ses resultaterne for de enkelte forecastingsmodeller i tabel B.25. Her ses det at en B&H-strategi i bear perioden giver et negativt afkast på 38 procent, og at volatiliteten er relativ høj i forhold til bull markedet. På grund af det negative afkast, så betyder det at denne strategi taber 100 procent af dets handler, og denne giver en samlet profit på minus 38.07 procent.

I forhold til en B&S-strategi så ses det til ens overraskelse at det er en AR(1)-modellen der er den eneste model der giver et positiv afkast på 11.62 procent, med en meget lavere volatilitet på 3.06 procent, end volatiliteten i B&H-strategien. Denne strategi laver 29 handler, hvilket gør at omkostningerne bliver højere, og denne vinder hele 62.07 procent af dets handler. Den samlede profit bliver 10.46 procent. De resterende modeller giver negative afkaster og profitter, så disse vil ikke betragtes som en konkurrent til AR(1)-modellen i denne strategi.

Ses der i stedet på L&S-strategien så har AR(1)-modellen igen et meget højt afkast, og en meget høj Sharpe-ratio. Her vinder modellen 63.79 procent af dets handler, og har en samlet profit på 58 procent. Men i denne strategi der får NN44-modellen også et positivt afkast på 33.97 procent. Selvom at denne models afkast er lavere end AR(1)-modellens, så ender NN44-modellen stadig med en Sharpe-ratio der er højere end AR(1)-modellens. Derved kan der argumenteres for at NN44-modellen rent faktisk er den bedste model når der kigges på profitabilitet fordi i denne model får du mere afkast per risiko. Men det ses til gengæld også at NN44-modellen kun vinder 47.54 procent af dets handler mod 63.79 procent i AR(1)-modellen; her kan der snakkes om at NN44-modellen har været "heldig" i dets forecast, og bare har ramt en god handel. Der er ingen af modellerne der har en HM-statistik på over 1, og derfor er der ingen af modellerne der har markedstiming.

Ses der på kombinationer mellem forecastene for B&S-strategien i tabel B.27, så ses det at ingen af disse modeller for denne strategi giver positive afkast eller lignende, der kan konkurrere med de individuelle forecastingsmodeller.

Ligledes ved L&S-strategien for hybridmodellerne, så ses det at samme mønster tegner sig, og ingen af modellerne giver positive afkastrater.



### 6.2.1.3 Risikojusteret afkast

Bear perioden er blevet estimeret i en tidsperiode med store udsving og det giver sig også til kende i det svingende resultater på forecastsmodellerne. Benchmark-modellen har i tabel B.29 i denne periode et risikojusteret afkast på -36.40 procent. Den bedste model for B&S-strategien er AR(1) der leverer et risikojusteret afkast på 10.71 procent hvilket er 0.91procent dårligere end det oprindelige afkast. Det klart største risikojusterede afkast ses for AR(1) på hele 64.35 procent hvilket er hele 4.03 procent bedre end det oprindelige afkast. De neurale netværk skuffer lidt i denne periode, da de leverer risikojusterede afkast der er dårligere end det oprindelige.

Alle kombinationsmodellerne giver igen negative afkast og vil af samme årsag som tidligere ikke uddybes mere.

### 6.2.1.4 Opsummering

Denne analyse viste af ingen af modellerne, hverken hybrid eller individuelle, giver retninger på over 50 procent, og ingen af dem giver unbiased forecasts. Det ses dog at der ikke er statistisk grundlag for at en NN44-model er bedre end ARMA(1,1) og NN3. NN3 og NN44 giver højere afkast end benchmark-strategien, men deres afkastrater for B&S-strategien er negative, hvor de er positive for L&S-strategien. AR(1)-modellen derimod har positive vækstrater i begge handelsstrategier, og vinder suverænt på den front. Disse tre modeller opnår også højere Sharpe-ratio en B&H. Selvom at AR(1)-modellen giver gode afkastrater,

**Tabel 6.18.** Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det daglige afkast i bear perioden

	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44	
R > 50%						
MZ > 10%						
DM > $M_1$			x	x	$M_1$	
B&S A > B	x			x	x	
L&S A > B	x			x	x	
B&S SR > B	x				x	
L&S SR > B	x			x	x	
HM > 1						
PT < 10%	x	x	x	x		
	NN3AR1	NN3MA5	NN3ARMA11	NN44AR1	NN44MA5	NN44ARMA11
R > 50%						
MZ > 10%						
DM > $M_1$			x			x
B&S A > B						x
L&S A > B			x			x
B&S SR > B						
L&S SR > B						x
HM > 1						
PT < 10%	x	x	x		x	x

så er der ingen statistisk grundlag for at denne har en markedstiming, men der er statistisk grundlag for at denne kan forecaste retningen.

Ingen af hybridmodellerne opnår positive afkast, og ingen af dem får bedre statistiske resultater end de individuelle modeller.

## 6.2.2 Ugenlig afkast

Det kan ses ud fra tabel B.17 at AIC vælger en AR(1)-, MA(4)-, og ARMA(1,1)-model. Alle specifikationerne og alle de formelle testes kan ses i tabel B.19 og tabel B.20. Det ses også ud fra tabel B.18 at de neurale netværk med de laveste fejl er et netværk med et hidden layer og to neuroner og et netværk med to hidden layers med henholdsvis to og en neuron(er) i hvert layer.

### 6.2.2.1 Statistisksforecastanalyse

Som tabel B.21 viser så har NN2-modellen de laveste tabsfunktioner, den bedste retning og denne er Mincer-Zarnowitz unbiased. De andre modeller er ikke tæt på at slå denne model på de statistiske evalueringer, og denne model vurderes som værende den bedste af disse fem forecastingsmodeller. Det ses også i tabel B.22 at denne model er statistisk bedre end de andre.

Det ses for hybridmodellerne at alle modellerne giver retninger på over 60 procent, men ingen af disse er Mincer-Zarnowitz unbiased. Der testes for om disse modeller statistisk er bedre end NN2-modellen i tabel B.24, og her ses det at den eneste model hvor NN2-modellen ikke er statistisk bedre er en kombination mellem NN2 og MA(4).

### 6.2.2.2 Profitabilitetsanalyse

I forhold til profitabilitet, så ses det i tabel B.31 at der ikke er nogle af de individuelle modeller der giver et positivt afkast for B&S-strategien, men MA(4)-, NN2- og NN21-modellerne giver et afkast der er højere end benchmark strategien. Disse modeller har også det til fælles at disse vinder mere end 50 procent af deres handler, hvilket de resterende ikke gør.

For L&S-strategien der giver de førnævnte modeller positive afkast, og det er også disse modeller der har de højeste Sharpe-ratioer. Disse vinder stadig over 50 procent af deres handler; og alle modellernes vindende handler er blevet forbedret end for B&S-strategien. NN2-modellen er den der giver den højeste profit.

Hybrid modellernes profitabilitetsanalyse kan ses i tabel B.32. Her ses det for B&S at ingen af modellerne giver positive afkast, men NN2MA4- og NN21MA4-modellerne giver mindre negativt afkast end benchmark strategien. Disse to vinder også over 50 procent af deres handler.

Disse to får også positive afkast når disse modeller anvendes i en L&S-strategi. Her ses det at NN21MA4-modellen giver en afkast på over 18 procent. Denne er suveværnt

den bedste i alle kategorier på nær dets transaktionsomkostninger der er lidt højere end nogle af de andre modeller.

### 6.2.2.3 Risikojusteret afkast

Den meget volatile periode for bear-markedet giver sig også i udtryk for de risikojusterede afkast. Ekstrem højere MRAR udregnes i dette tilfælde. I tabel B.33 er det mest iøjnefaldende resultat at NN2 og NN21 i L&S-strategien, begge giver et positivt afkast men et negativt risikojusteret afkast. Den lineære model i L&S-strategien MA(4) opnår en MRAR på 3.02 procent og derved er det den eneste model der giver et positivt afkast. Rangeringen af modellerne fra det ugentlig afkast betyder også, at de to modeller der leverede det højeste afkast, ikke er optimale for investor. Istedet vil MA(4) modellen blive valgt.

### 6.2.2.4 Opsummering

**Tabel 6.19.** Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater

	AR(1)	MA(4)	ARMA(1,1)	NN2	NN21	
R > 50%		x		x	x	
MZ > 10%	x	x	x	x		
DM > $M_1$				$M_1$		
B&S A > B	x			x	x	
L&S A > B	x			x	x	
B&S SR > B	x				x	
L&S SR > B	x			x	x	
HM > 1	x	x	x	x	x	
PT < 10%	x	x	x	x		
	NN2AR1	NN2MA4	NN3ARMA11	NN21AR1	NN21MA4	NN21ARMA11
R > 50%	x	x	x	x	x	x
MZ > 10%						
DM > $M_1$		x				
B&S A > B		x	x		x	
L&S A > B		x			x	
B&S SR > B		x			x	
L&S SR > B		x			x	
HM > 1	x	x	x	x	x	x
PT < 10%	x	x	x	x	x	

Tabel 6.19 opsummerer de mest væsentlige resultater for alle forecastingsmodellerne for det ugentlige afkast i bear perioden. Som denne tabel også viser, så er der ni modeller der har en retningsvariabel på over 50 procent, men ud af de ni modeller, så er der kun to af dem der giver unbiased forecasts; og af disse to modeller er der kun en model (NN2-modellen) der giver højere afkast end B&H-strategien i begge handelsstrategier. Denne model har også en højere Sharpe-ratio end benchmark. Men denne model giver ikke en højere profit end NN21MA4-modellen. Denne model giver det højeste afkast og profit når der anvendes en L&S-strategi; denne er dog bare ikke unbiased, modellen forecaster derfor i gennemsnit

for højt eller for lavt.

### 6.2.3 Månedlig afkast

Det kan ses ud fra tabel B.17 at AIC vælger en AR(1)-, MA(2)-, og en ARMA(1,1)-model. Ligesom det også gør sig gældende for de daglige og ugentlige modeller, kan alle specifikationer og formelle testes ses i tabel B.19 og B.20. De neurale netværk er valgt ud fra tabel B.18, her vælges et netværk med et hidden layer med fire neuroner, og et netværk med to hidden layers med henholdsvis to og en neuron(er) i hvert layer.

#### 6.2.3.1 Statistisksforecastanalyse

Det ses ud fra tabel B.21 at den model med de bedste tabsfunktioner er NN4-modellen, og denne har også en af de højeste retninger. Den højeste retning tilfalder NN21-modellen med hele 98.95 procent. Disse to neurale netværk er dog ikke Mincer-Zarnowitz unbiased, men det er alle de lineære modeller; både AR(1) og ARMA(1,1) har retninger på over 50 procent. NN4-modellen vurderes at være den mest optimale ren statistisk.

Når der udføres et Diebold-Mariano test for så at finde ud af om dette også er gældende, så ses det ud fra tabel B.22 at ingen af modellerne slår en NN4-model ren statistisk. Derved understøtter dette at NN4-modellen giver de mest optimale forecast, når der vurderes ud fra et statistisk synspunkt.

Tabel B.23 viser de statistiske evalueringer for hybridmodellerne. Det ses at alle kombinationer der indeholder NN4-modellen giver lavere MAE end NN4-modellen alene. Alle hybridmodellerne har også retninger på over 50 procent, men ingen af dem er Mincer-Zarnowitz unbiased. Når disse testes for om de er statistisk bedre end NN4-modellen, så ses det ud fra tabel B.24, at det ikke kan afvises at NN4-modellen er bedre end NN4-AR(1), NN4-MA(2) og NN4-ARMA(1,1).

#### 6.2.3.2 Profitabilitetsanalyse

Tabel B.35 viser resultaterne fra profitabilitetsanalysen af de individuelle forecastingsmodeller. Her ses det at det kun er de neurale netværk der er bedre end benchmark, i begge strategier. For B&S ses det at NN4-modellen giver et positivt afkast på 2.09 procent, og vinder 58.82 procent af dets handler. Den samlede profit ender på 1.41 procent. NN21-modellen giver næsten et afkast på 18 procent, hvilket er yderst imponerende. Denne vinder over 57 procent af dets handler, og ender med en samlet profit på 17.23 procent.

For L&S-strategien ses det at de to neurale netværks afkast stiger markant; NN4-modellen giver et afkast på over 40 procent, og NN21-modellen givet et på hele 71.87 procent. Modellerne vinder henholdsvis 65.63 procent og 66.67 procent af deres handler, og med beskedne 32 og 36 handler, så ender den samlede profit på 30.80 og 70.43 procent.

Tabel B.36 viser resultaterne af samme analyse for hybridmodellerne. Her ses det at disse modeller giver meget høje, negative afkastrater der alle overskrider benchmark stra-

tegien, og der er derfor ikke grundlag for at kommenter på dem.

### 6.2.3.3 Risikojusteret afkast

I tabel B.37 vælges NN3 og NN22 selv efter der er risikojusteret. Selvom afkastet bliver lidt mindre, er det alligevel så overlegent i forhold til benchmark. Det er især NN22 der performer ekstraordinært godt. Kombinationsforecasten giver resultater der afviger langt fra benchmark og kommenteres ikke yderligere.

### 6.2.3.4 Opsummering

Her blev det vist at MA(4) og de to neurale netværk fik retninger på over 50 procent, og at både MA(4) og NN2 gav unbiased forecasts. Der er dog statistisk grundlag for at NN2-modellen giver bedre forecasts end de andre modeller. Det ses at NN2- og NN21-modellerne giver højere afkast i B&S end B&H-strategien, men disse opnår stadig negative afkastrater. Det er først når der anvendes L&S-strategien at disse to modellerne giver positive afkaster. Dette gør MA(4)-modellen også, og denne opnår faktisk bedre afkastrater end NN21-modellen. Disse tre modeller har også statistisk grundlag for markedstiming og MA(4) og NN2 har også grundlag for at kunne forecaste retningen.

I forhold til hybridmodellerne, så har alle en retning på over 50 procent, men ingen af dem er unbiased. Det blev også vist at der for NN2MA4 og NN21MA4 var statistisk grundlag for at disse modelleres forecast er mindst ligeså gode som NN2-modellens.

**Tabel 6.20.** Opsummeringstabel for alle modellerne og de mest væsentlige resultater for det månedlige afkast i bear perioden

	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21	
R > 50%	x		x	x	x	
MZ > 10%	x	x	x			
DM > $M_1$				$M_1$		
B&S A > B				x	x	
L&S A > B				x	x	
B&S SR > B				x	x	
L&S SR > B				x	x	
	NN4AR1	NN4MA2	NN4ARMA11	NN21AR1	NN21MA2	NN21ARMA11
R > 50%	x	x	x	x	x	x
MZ > 10%						
DM > $M_1$						
B&S A > B						
L&S A > B						
B&S SR > B						
L&S SR > B						

# 7 Diskussion

I overstående analyse er modellerne testet ud fra et statistisk kriterie, et profitabilitets kriterie samt et risikojusteret kriterie. Flere af resultaterne, som kom ud fra analysen, var både forventlige men også overraskende. Dette efterlader flere interessante spørgsmål i rapporten, som i dette afsnit vil diskuteres.

## 7.1 Kombinationsmodellernes manglende afkast performance

I stort set alle perioder opnår de neurale netværk et højere afkast end de lineære modeller. Alle afkastene for de lineære modeller giver et negativt afkast på nær en enkelt model i det ugentlige data, hvor en MA(3) leverer et positivt afkast i både B&S og L&S for bull-markedet. For bear-markedet er der to modeller der leverer positivt afkast, nemlig AR(1) for det ugentlige, samt MA(4) for det månedlige data, hvor det for MA(4) modellen kun foregår i L&S-strategien. Det vil sige, at ud af 36 serier leverer de lineære modeller kun 5 positive afkast, de neurale netværk er suverænt bedst hvad angår positive afkast. Ud af 24 serier belønner de neurale netværk investorer med et positivt afkast 20 gange. Den manglende profitabilitet på de lineære modeller er på den ene side meget iøjnefaldende og overraskende, fordi det negative resultat er så overvældende.

På den anden side kan de dårligere resultater leveret af de lineære modeller også være forventede. Ud fra den deskriptive statistik ses det, at der forekommer både negativ skewness samt en kurtosis, der afviger fra nul. Dette indikerer, at data ikke er normaltfordelt og dermed højst sandsynlig har en påvirkning på de lineære modellers performance. Det ses også, at retningen for de lineære modeller er markant dårligere end for det neurale netværk. Tidligere i rapporten er det også beskrevet, hvordan det kan være problematisk for ARIMA-modeller at levere præcise forecast ud fra det finansielle data anvendt i rapporten. Deraf vil det være problematisk for ARIMA lige så snart tidsserien indeholder en deterministisk funktion, som er gældende i kaos teori. ARIMA modellen har svært ved at forecaste udsvingene i modellen. [18]

Tidsserier kan på ingen måde kun anses som lineære eller ikke-lineære, men indeholder ofte dele af begge ting [33]. At kombinere de lineære modeller med de neurale netværk, blev i rapporten anset som en god ide da litteraturen på området, beskrev de forbedrede resultater ved en forecastkombination. [33] [19]

I forbindelse med den komparative analyse, var resultaterne af kombinationsmodellerne så markant lavere afkastmæssigt hvis det sammenlignes med de neurale netværk, at det har bragt følgende spørgsmål i rapporten frem:

- **Hvorfor leverede kombinationsmodellerne ikke bedre?**

Ud af de samlede 72 kombinationsforecast, er der kun 8 der leverer et positivt afkast. På bull-markedet er det NN5ARMA11 og NN44ARMA11 der er positiv i B&S strategien for de daglige afkast, samt NN4MA3 og NN42MA3 for det ugentlige afkast. For bear-markedet er der to modeller. Det drejer sig om NN2MA4 og NN21MA4 for de ugentlige afkast. Før alle kombinationsforecastene i rapporten var udarbejdet, var forventningen af disse ville leverer solide afkast, da [33] beskriver hvordan kombinationen af ARIMA og neurale netværk kan være en effektiv måde at forbedre forecastpræstationen i forhold til at anvende modellerne enkeltvis. Det skuffende resultat i kombinationsforecastanalysen bør først og fremmest tilskrives de lineære modeller, hvor det ses, at de lineære modeller der klarer sig godt også er dem der giver de bedste kombinationsforecast når de kombineres med et neuralt netværk.

## 7.2 Long-and-short strategien

L&S-strategien præsterer i analysen væsentlig bedre på bear-markedet end hvad der er tilfældet på bull-markedet. Som investor vil det i stort set alle tilfældene på et marked i en opadgående trend være en dårlig idé at have en L&S-strategi, anderledes ser det dog ud når samme strategi testes på bear-markedet.

- **Hvilken årsag kan ligge bag neurale netværks gode performance for L&S-strategien på bear-markedet?**

I retrospektiv er det altid nemt at identificere hvilken periode markedet har bevæget sig i. For en investor der træder ind på markedet, er det langt sværere at vurdere om markedet den næste uge, måned eller år skal op eller ned. Under første del af analysen havde de neurale netværk problemer med at generere samme afkast som benchmark i rapporten. En væsentlig faktor for de neurale netværks haltende performance sammenlignet med B&H-strategien kan findes i markedstrenden. En kort position i markedet er ensbetydende med, at en tro på markedet vil falde, men i out-of-sample perioden i 2017 ender en del flere handler med positivt afkast, end med negativt afkast. Derfor var anden del af analysen også interessant og inspireret ud fra resultaterne fra [31].

Det ses også at L&S-strategien præsterer helt anderledes, når den underliggende trend i markedet er nedadgående. Her opnår de neurale netværk ekstraordinære store afkast for både de daglige, ugentlige og månedlige afkast. For alle 6 modeller gælder det, at de leverer positive afkast og lægger en tydelig distance til B&H-strategien. Ydermere gælder det, at for to ud af de tre markeder er der flere perioder med negativt end positivt afkast. Selv efter de fratrukne transaktionsomkostninger præsterer de neurale netværk klart bedre end benchmark modellen. Dette holder også stik med overstående argument om short handel fungerer bedre på et bear marked.

### 7.3 Mincer-Zarnowitz bias påvirkning på profitabiliteten

I rapporten bliver der foretaget en Mincer-Zarnowitz test for alle modellerne. En del af forecastmodellerne er bias, hvilket betyder de enten i gennemsnit forecaster for højt eller lavt. Dette betyder som regel også, at modellen vil kasseres, da forecastet er upålideligt. To ting gør sig alligevel gældende for, at modellen ikke forkastes. For det første argumenterer [5] at MZ-testen har svært ved at skelne forskellen mellem om forecastet er irrationelt og dermed bias, eller om det lider af asymmetrisk tab. For det andet ønskes det i rapporten at måle profitabiliteten, hvilket ikke er en statistisk måleenhed.

Nedenstående tabel 7.1 giver et overblik over afkastet på de følgende modeller og om de er bias eller unbiased. Der vælges kun modeller, der genererer et positivt forecast. Der er valgt at tage et uddrag fra de ugentlige og månedlige afkast på bull-markedet, da disse giver det bedste vurderingsgrundlag. Der er valgt at se bort fra resultaterne fra det daglige afkast for både bull- og bear-markedet, da ingen af modellerne er unbiased og derfor giver det ingen mening at inddrage disse i en sammenligning. Desuden er det kun NN2 for de ugentlige afkast der er unbiased for de neurale netværk i bear-perioden.

Hvad angår kombinationsmodellerne er alle forecast i bear perioden bias. Det er kun en enkelt model for det daglige afkast samt alle modellerne for det ugentlige der giver et unbiased forecasts. Derfor vil kombinationsmodellerne på bull-markedet også kommenteres senere. Modellerne er sorteret efter et signifikansniveau på 5%, hvor de er unbiased, hvis de ikke kan forkastes.

**Tabel 7.1.** Unbiased/biased modeller

Unbiased				
	MA(3)(U)	NN42(U)	NN3(M)	NN42(M)
Afkast	5.60%	13.81%	13.30%	14.58%
Biased				
	NN3(U)	MA(3)(M)		
Afkast	14.52%	12.95%		

Overstående tabel viser, at det er svært at påvise sammenhængen, hvis forholdet mellem profit og unbiased forecast skal påvises. Hvis modellernes egenskaber så som modellering af lineær og ikke-lineær data lægges til side og modellerne kun vurderes ud fra et profitabilitets perspektiv, kan de statistiske kriterier unbiased forecast virke omsonst. Resultaterne for de to biased forecasts er på højde med de bedste unbiased forecasts. Det er dog nævneværdigt at alle afkast, der er ekstraordinære negative alle sammen er biased, og derfor kan der alligevel godt findes en sammenhæng i forholdet mellem unbiased og profit.

En anden vigtig observation i rapporten sker ved kombinationsforecastet. Det ses under de daglige afkast, at alle modeller giver bias forecasts, selvom NN5 er tæt på at levere et unbiased forecast. Det blev vist at kombinationsforecastet mellem NN5 og ARMA(1,1) giver et unbiased resultat. De bias resultater for især de lineære modeller er ikke overraskende, da de i gennemsnit skyder længere forbi i deres forecast. Selvom de neurale netværk gør



det lidt bedre, er det alligevel bemærkelsesværdigt, at resultaterne er så dårlige. De bedre resultater for kombinationsforecastet kan måske igen ledes tilbage til Zhang og hvorledes disse modeller kan opfange både den ikke lineære og lineære dynamik, der forekommer i data.

## 7.4 Stemmer rapportens resultater overens med den efficiente markedshypotese?

I rapporten anvendes en B&H-strategi som benchmark i profitabilitetsanalysen. Resultaterne for forecastene er forskellige alt afhængig af forecastinterval samt markedstrenden. Hvis der argumenteres ud fra bull-markedet kan resultaterne vurderes til ikke at have outperformat benchmark, og dermed er det svært at argumenterer imod den efficiente markedshypotese. På bear-markedet er resultaterne dog så markant forskellige fra benchmark, at følgende spørgsmål i diskussionen er fundet relevant:

- **Er der markedstiming i rapportens modeller?**

De skuffende resultater i profitabilitetsanalyse på bull-markedet leder tilbage til introduktionen, og den efficiente markedshypotese. Her er det ikke muligt at opnå et højere afkast uden at påtage mere risiko. Kun i enkelte tilfælde slår modellerne buy & hold strategien, men når der ikke er en model der vedvarende kan outperforme benchmark kan det ikke udelukkes at være en anormalitet.

Resultatet er ligeledes skuffende i forhold til Kumar som benytter sig af en strategi bestående af lineære og ikke lineære modeller. Ligeledes finder [33], at hybrid modellerne skulle kunne opnå et bedre resultat, hvilket i rapporten kun gør sig gældende for det ugentlige afkast, mellem NN42 og MA(3).

Hvis der kigges på de risikojusteret afkast, ses det at der er mere risiko forbundet med, at være lang i markedet end ved at anvende de neurale netværk. Både for de daglige og ugentlige afkast kan det argumenteres for at anvende de neurale netværk da sharpe ratio for disse er højere.

At opnå et solidt afkast i et bull-markedet er altid væsentligt for investor, men vigtigheden i at risikominimerer i nedgående trend kan ikke undervurderes. Negative afkast er ofte forbundet med hurtigere fald i aktivets værdi også kaldet asymmetrisk volatilitet. Her gælder det at negative (positive) afkast er lig med stigende (faldende) volatilitet [1]. Dette betyder også at investor har interesse i et forecast der rådgiver til en position ude af markedet for dermed at undgå et kurstab, eller direkte at kunne lukrere på kursfaldet igennem en short position.

For de lineære modeller er det kun AR(1) for de daglige afkast samt MA(4) for de ugentlige afkast der slår benchmark. Dermed kan det hverken for bull-markedet eller bear-markedet fastslås nogle tendinger til at vælge en lineære model over en random walk. Anderledes ser det ud hvis de neural som også tidligere blev beskrevet i det overstående afsnit ved L&S-strategien. Her slår det neurale netværk B&H-strategien samtlige gange både ved at anvende dem på B&S samt L&S. At det neurale netværk outperformer benchmark alle gange kan ikke vurderes til at være en anormalitet og derfor tegner der sig også et mønster af at de neurale netværk muligvis leverer et overlegent resultat sammenlignet

med benchmark. Dette betyder yderligere at der kan stilles spørgsmåltegn ved (EMH og at investor ikke kan opnå et ekstraordinært afkast uden ekstra risikotagning.)

## 8 Konklusion

Der er i denne rapport blevet arbejdet med lineære og ikke-lineære modellers evne til at forecaste det daglige, ugentlige og månedlige S&P500 afkast i både et bull og bear marked. Der er blevet udarbejdet statistiske teststørrelser for at evaluere modellernes evne til at forecaste ren statistisk, og der er blevet udarbejdet handelsstrategier og algoritmer for at evaluere modellernes evne til at skabe profit. Problemformuleringen i denne rapport lød:

*Hvilken af lineære eller ikke-lineære modeller giver de mest optimale forecasts baseret på statistiske kriterier og profitabilitet, og er dette det samme uafhængigt af afkastlængden?*

Tabel 8.1 viser en oversigt over hvilke modeller der er overlegne i henholdsvis den statistiske evaluering og profitabilitets evalueringen for det daglige, ugentlige og månedlige S&P500 afkast. For det daglige afkast i et bull markedet, blev det vist at et neuralt netværk med fem neuroner (NN5) giver de mest optimale forecasts ren statistisk; denne model har den laveste MAE, RMSE, den højeste retning og der er ingen af de konkurrerende modeller, hverken individuel eller hybrid, der ren statistisk slår NN5-modellen. Det blev også vist at den samme model også giver de mest optimale forecasts baseret ud fra profitabilitetsanalysen; denne model giver det højeste afkast, profit og denne vinder flest af sine handler. Det kan derfor konkluderes at der på det daglige S&P500 afkast i et bull markedet er mest optimalt at anvende neurale netværk til at forecaste.

For det ugentlige afkast i bull markedet blev det igen vist at det er en ikke-lineær model der ud fra et statistisk synspunkt giver mest optimale forecasts; det neurale netværk med henholdsvis fire og to neuroner viste sig at have den laveste MAE, RMSE, den bedste retning og denne gav unbiased forecasts - i forhold til Diebold-Mariano testen så

**Tabel 8.1.** Oversigt over vindende modeller i forhold til forskellige evalueringer og afkastlængder

	Bull markedet	
	Statistisks evaluering	Profitabilitets evaluering
Daglig	NN	NN
Ugentlig	NN	Kombination
Månedlig	NN	NN

	Bear markedet	
	Statistisk evaluering	Profitabilitet evaluering
Daglig	-	Lineære
Ugentlig	Kombination	Kombination
Månedlig	Kombination	NN

er der ikke statistisk grundlag for at det neurale netværk er bedre end en kombination mellem et neuralt netværk og en moving average model med tre lags. Men da det neurale netværk har lavere tabsfunktioner og bedre retning, så vurderes det stadig at denne ren statistisk giver bedre forecasts. Det blev da vist at i forhold til profitabilitetsanalysen at NN42MA3-modellen gav det højeste afkast, Sharpe-ratio og profit. Det kan derved være svært at konkludere om det er lineære eller ikke-lineære modeller der er dominerende for det ugentlige S&P500 afkast, men siden at den lineære model ikke kan stå alene, så må det konkluderes at de ikke-lineære modeller igen har en fordel når der skal forecastes på det ugentlige afkast.

For det månedlige afkast i bull markedet blev det igen vist at det er de neurale netværk der er overlegne både ren statistisk og profitabelt. Det neurale netværk gav den laveste MAE, RMSE, højeste retning og der var ingen af de konkurrerende modeller der kunne slå disse ren statistisk. I forhold til profitabiliteten så gav det neurale netværk det højeste afkast, Sharpe-ratio, profit og denne vandt flest af dets handler. Derved må det igen konkluderes at neurale netværk igen er bedst at anvende når der skal forecastes på det månedlige S&P500 afkast.

I forhold til det daglige afkast i bear markedet, så viste rapportens analyse, at der er mange forskellige modeller, der giver gode resultater ren statistisk; ARMA(1,1) har den laveste MAE, NN44ARMA11 giver den laveste RMSE, NN3MA5 og NN44MA5 giver den højeste retning, og Diebold-Mariano testen viste at ARMA(1,1)-modellens forecaste ren statistisk er bedre end mange af de andre listede modellers forecast; men der var også nogle af andre modellerne hvor det ikke kunne siges hvilket forecaste der stod alene, og siden at forskellige modeller vinder på forskellige kriterier, så kan der ikke rigtig konkluderes noget i forhold til hvilken af lineære og ikke-lineære modeller der giver de bedste forecaste ren statistisk. I forhold til profitabiliteten, så viste analysen at en AR(1)-model var overlegen i både afkast, profit, Sharpe-ratio og vindende handler.

For det ugentlige S&P500 afkast i et bear markedet blev det vist at en kombination mellem lineære og ikke-lineære modeller (NN2MA5) var i stand til at give de mest optimale statistiske forecasts; laveste MAE, RMSE samt at denne havde en retning der var tæt på at være den højeste, kun slået af et neuralt netværk. Det er også den samme model der performer bedst i profitabilitetstesten med det højeste afkast, Sharpe-ratio, profit og vindende handler. Det kan derfor konkluderes at når der skal forecastes på det ugentlige S&P500 afkast i et bear markedet, så giver en kombination mellem lineære og ikke-lineære modeller de mest optimale forecasts.

På det månedlige afkast i bear markedet er det en kombination der giver de bedste statistiske evalueringer med det laveste tabsfunktioner. I forhold til profitabilitets evalueringen så er det et neuralt netværk der giver det højeste afkast, profit, Sharpe-ratio og vindende handler.

Der tegner sig et mønster af at hvis der skal forecastes i et bull markedet, så ser det ud til at de ikke-lineære modeller er dominerende i forhold til at leverer de mest optimale forecasts, uanset om der kigges på det daglige, ugentlige eller månedlige afkast. Hvis markedet befinder sig i en bear periode, så ser det mere ud til at det er en kombination mellem lineære og ikke-lineære modeller der giver de mest optimale forecasts på tværs af afkastlængder.

---

Konklusionen må derved være at ikke-lineære modeller giver de mest optimale forecast i et bull markedet vurderet ud fra et statistisk og profitabilitetssynspunkt, og dette resultat er det samme uafhængigt af afkastlængderne.

Modsat så er det en kombination mellem lineære og ikke-lineære modeller der giver de mest optimale forecast i et bear markedet vurderet ud fra en statistisk vinkel, og det er lidt blandet for profitabilitetensvinklen, hvilken der er mest dominerende på tværs af afkastlængder.

# Litteratur

- [1] Bekaert, Geert & Wu, Guojun; *Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets*, The Review of Financial Studies, Vol 13, 2000, pp. 1-42.
- [2] Caginalp, G. & Laurent, H.; *The predictive power of price patterns*, Applied Mathematical Finance, 1998, pp.181-205.
- [3] Cochrane, John H.; *Asset Pricing*, University of Chicago, 2000.
- [4] Diebold, Francis, X.; *Forecasting in Economics, Business, Finance and Beyond*, University of Pennsylvania, 2017.
- [5] Elliott, Graham & Komunjer, Ivana & Timmermann Allan; *Bias in Macroeconomic Forecasts: Irrationality or Asymmetric Loss*, Journal of the European Economic Association, Vol 6, 2008, pp. 122-157.
- [6] Enders, Walter; *Applied Econometric Time Series*, University of Alabama - Fourth Edition, 2015.
- [7] Engineering Statistics Handbook. *Measures of Skewness and Kurtosis* <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35b.htm>, identifieret d. 17/11-2017.
- [8] Fleming, Jeff & Kirby, Chris & Ostdiek, Barbare ; *The Economic Value of Volatility Timing*, The Journal of Finance, Vol. 56, 2001, pp.329-352.
- [9] Gencay, Ramazan; *Optimization of technical trading strategies and the profitability in security markets*, Economic Letters, 1998, pp.249-254.
- [10] Goetzmann, William & Ingersoll, Jonathan & Spiegel, Matthew, Welch, Ivo; *Sharpening Sharpe Ratios*, Yale School of Management.
- [11] Granger, Clive W.J; *Forecasting stock market prices: Lessons for forecasters*, International Journal of Forecasting, 1992, pp.3-13.
- [12] Hansen, Peter R.; Lunde, Asger; *A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?*, Journal of Applied Econometrics, 2005.
- [13] Hawawini, Gabriel *Why Beta Shifts as the Return Interval Changes*, Financial Analysts Journal, Vol. 39, 1983, pp. 73-77.
- [14] Hsieh, David A; *Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets*, The Journal of Finance, 1991, pp. 1839-1877.

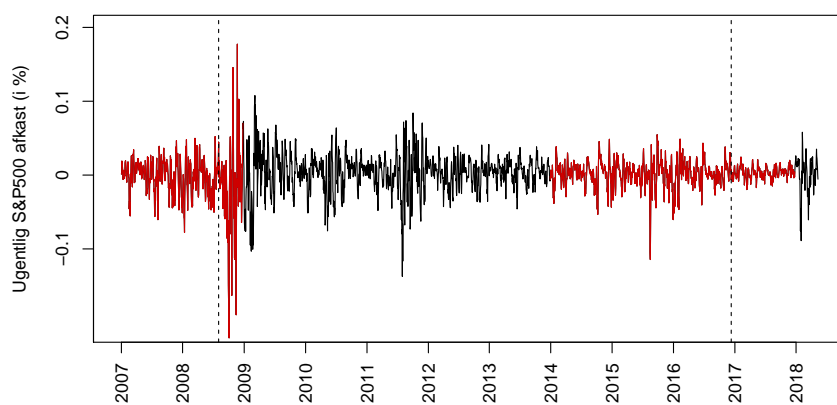
- [15] Ingersoll, Jonathan & Spiegel, Matthew & Goetzmann, William, & Welch, Ivo; *Portfolio Performance Manipulation and Manipulation-proof Performance Measures*, The Review of Financial Studies, Vol 20, 2007, pp. 1503-1546.
- [16] Jensen, Michael C & Bennington, George A; *Random walks and technical theories: some additional evidence*, The Journal of Finance, 1970, Vol 25, pp 469-482.
- [17] Kaastra, Ibeling & Boyd, Milton; *Designing a neural network for forecasting financial and economic time series*, Neurocomputing, 1996, pp. 215-236.
- [18] Kohzadi, Nowrous & Boyd, Milton; & Kermanshahi, Bahman & Kaastra, Ibeling *A comparison of artificial neural network and time series models of forecasting commodity prices*, Neurocomputing, 1996, pp. 169-181.
- [19] Kumar, Manish & Thenmozhi, M.; *Stock Index Return Forecasting and Trading Strategy Using Hybrid ARIMA-Neural Network Model*, International Journal of Financial Management, 2012, pp. 1-13.
- [20] Lehmann, Bruce N.; *Fads, Martingales and Market Efficiency*, The Quarterly Journal of Economics, 1990, pp. 1-28.
- [21] Leung, Mark. T & Daouk, Hazem & Chen, An-Sing; *Forecasting stock indices: a comparison of classification and level estimation models*, International Journal of Forecasting, 2000, pp.173-190.
- [22] Maillard, Didier; *Manipulation-Proof Performance measure and the Cost of Tail Risk*, Amundi Asset management, 2017.
- [23] Malkiel, Burton G.; *The Efficient Market Hypothesis and Its Critics*, Journal of Economic Perspective, 2003, Vol 17, pp. 59-82.
- [24] Markowitz, Harry; *Portfolio Selection*, The journal of Finance, 1952, Vol 7, pp. 77-91.
- [25] Monging, Philippe; *Expected Utility Theory*, Handbook of Economic Methodology, 1997, pp. 342-350.
- [26] Morningstar; *MRAR Illustrated*, 2009.
- [27] Nielsen, Michael; *Neural Networks and Deep Learning*, link: [www.neuralnetworksanddeeplearning.com](http://www.neuralnetworksanddeeplearning.com), Identifieret: 30-05-2018.
- [28] Pesaran, Hashem, M. & Timmermann, Allan G.; *A generalization of the non-parametric Henriksson-Merton test of market timing*, Economic Letters, 1994, pp. 1-7.
- [29] Pesaran, Hashem, M & Timmermann, Allan.; *A Simple Nonparametric Test of Predictive Performance*, Journal of Business and Economics Statistics, Vol 10, 1992, pp.461-465.
- [30] Rabin, Matthew & Thaler, Richard H.; *Anomalies-Risk Aversion*, Journal of Economic Perspectives, 2001, Vol 15, pp-219-232.

- [31] Rodríguez, Fernando F. & Martel, Christian, G. & Rivero, Simon S.; *On the profitability of technical trading rules based on artificial neural networks: Evidence from the Madrid stock market*, Documento de Trabajo, 1999.
- [32] Sharpe, William, F.; *Mutual Fund Performance*, The Journal of Business, Vol. 39, 1966, pp. 119-138.
- [33] Zhang, Peter, G.; *Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model*, Neurocomputing, 2003, pp. 159-175.

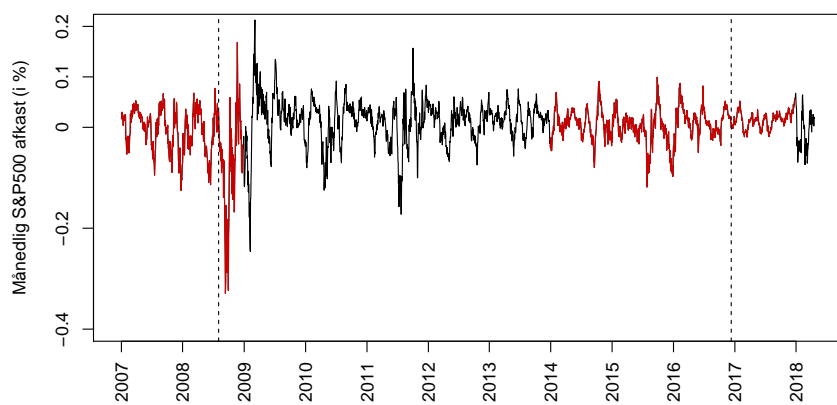


A  
**Figurer**

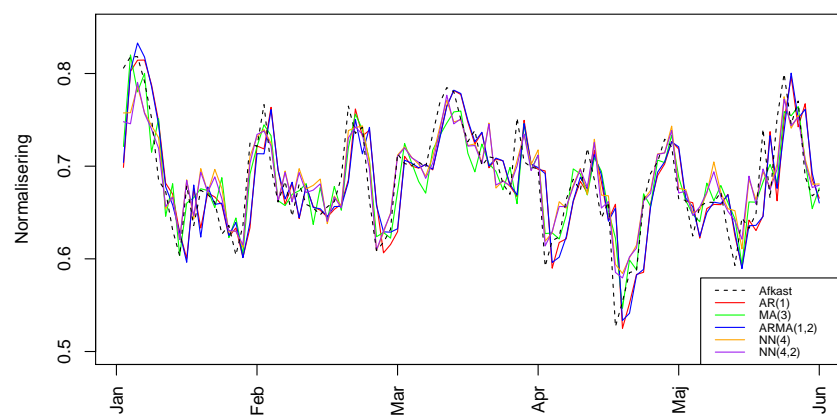
*Figur A.1.* Det ugentlige afkast for S&P500-indekset fra år 2007 til og med år 2017



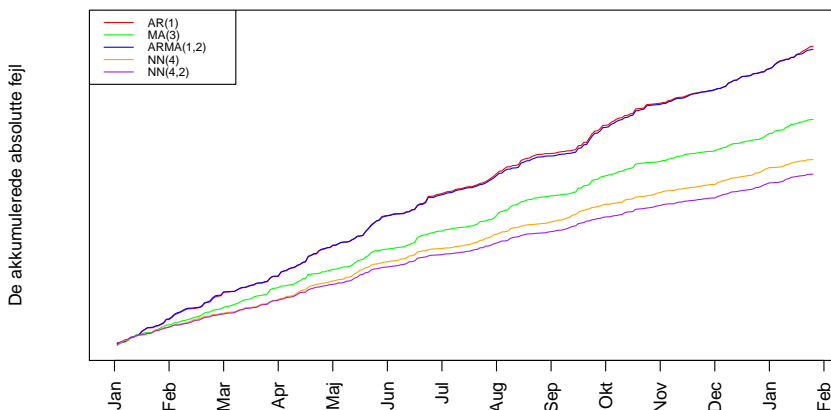
*Figur A.2.* Det månedlige afkast for S&P500-indekset fra år 2007 til og med år 2017



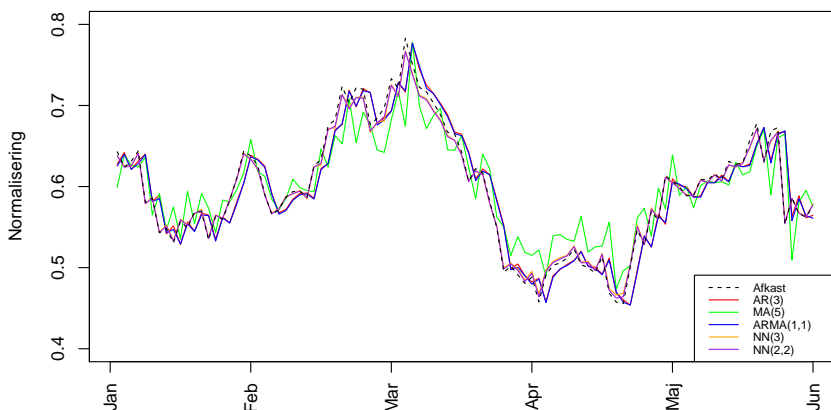
*Figur A.3.* One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det ugentlige afkast for bull perioden



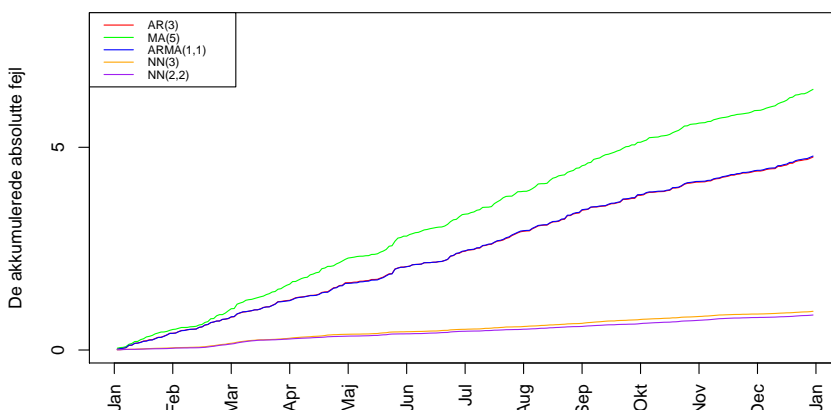
**Figur A.4.** De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det ugenlige afkast for bull perioden



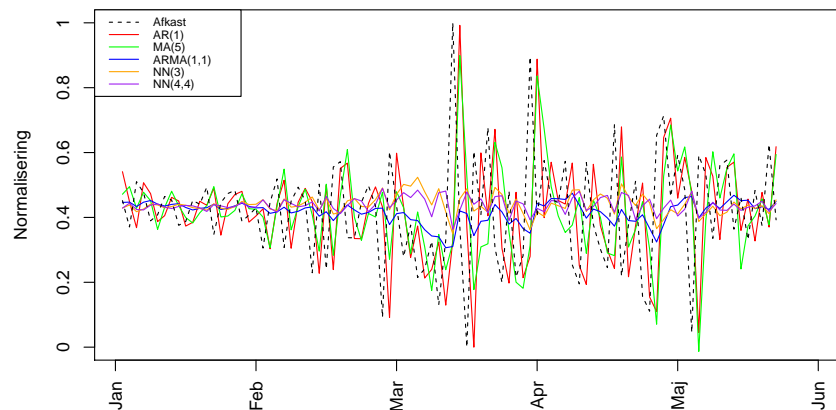
**Figur A.5.** One-step ahead forecast for forecastignsmodellerne på det månedlig afkast for bull perioden



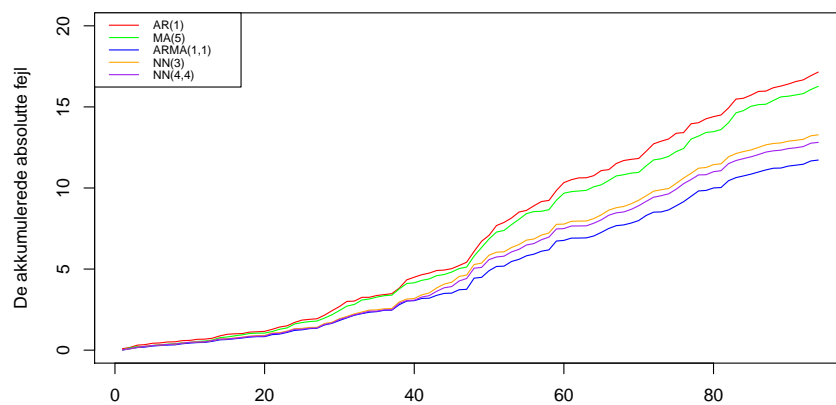
**Figur A.6.** De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden



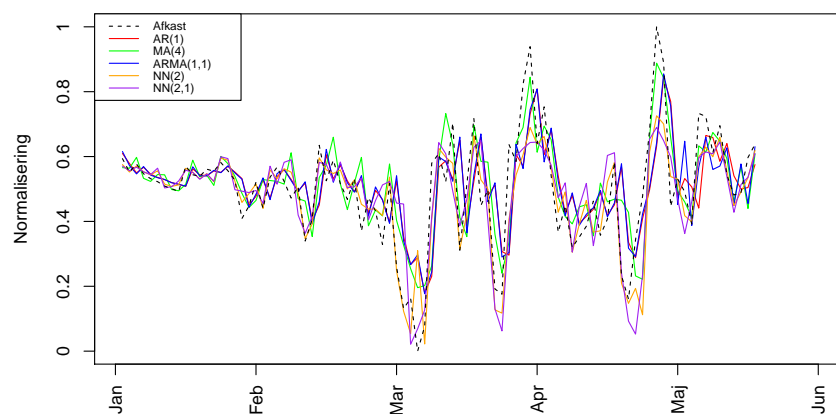
**Figur A.7.** One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det daglig afkast for bear perioden



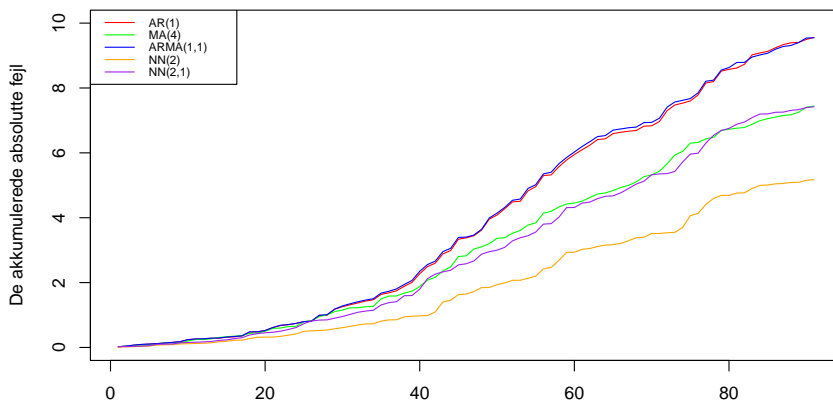
**Figur A.8.** De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden



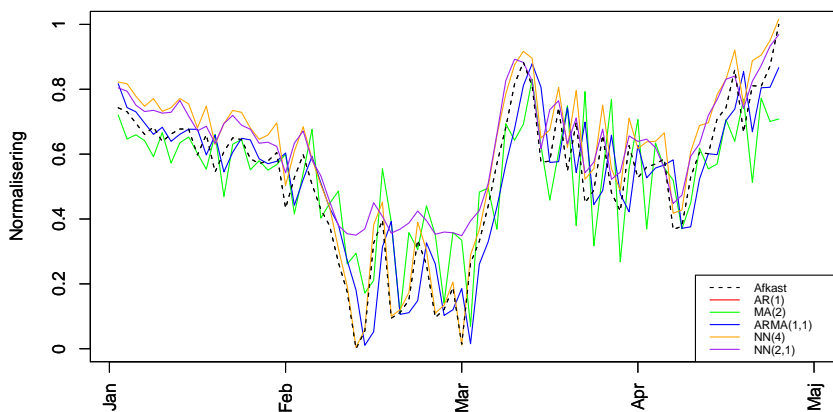
**Figur A.9.** One-step ahead forecast for forecastingsmodellerne på det daglig ugentlig for bear perioden



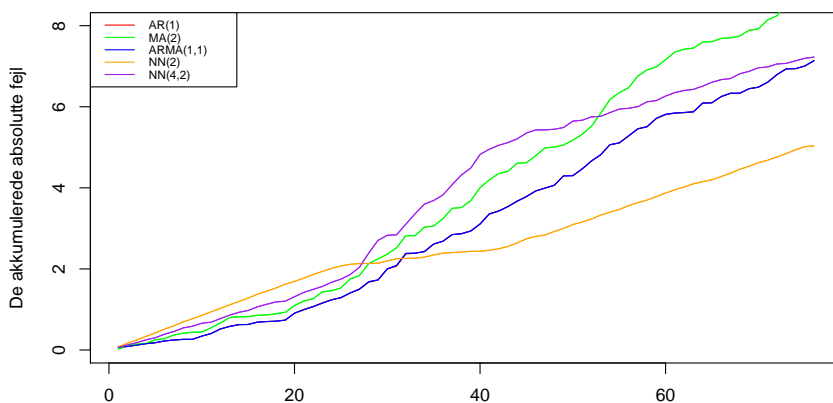
**Figur A.10.** De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden



**Figur A.11.** One-step ahead forecast for forecastignsmodellerne på det daglig månedlig for bear perioden



**Figur A.12.** De akkumulerede absolutte fejl for de fem forecastignsmodeller for det månedlig afkast for bear perioden



**B**

**Tabeller**

**Tabel B.1.** Resultaterne af LM-test for modellernes residualer for bull perioden

	Ugentlig		
	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)
Q(4)-statistik	216.4059	452.7399	155.1467
$p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.0000
Q(8)-statistik	218.1305	582.5383	168.9704
$p$ -værdi	0.0000	0.0000	0.0000

	Månedlig		
	AR(3)	MA(5)	ARMA(1,2)
Q(4)-statistik	1.1393	107.2888	0.7498
$p$ -værdi	0.8880	0.0000	0.9451
Q(8)-statistik	1.8744	286.9167	1.4857
$p$ -værdi	0.9846	0.0000	0.9929

**Tabel B.2.** LM-test for de standardiserede residualer for bull perioden

Residual form	Model	Ugentlig			
		Q(4)-statistik	$p$ -værdi	Q(8)-statistik	$p$ -værdi
$\hat{\epsilon}_t^2/\hat{h}_t$	AR(1)	5.1293	0.2743	5.8480	0.6643
	MA(3)	3.7875	0.4355	3.9969	0.8574
	ARMA(1,2)	5.7081	0.2203	6.4156	0.6008

Residual form	Model	Månedlig			
		Q(4)-statistik	$p$ -værdi	Q(8)-statistik	$p$ -værdi
$\hat{\epsilon}_t^2/\hat{h}_t$	MA(5)	4.8558	0.3024	7.1341	0.5222

**Tabel B.3.** Forecastingskriterier for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig og det månedlig afkast for bull perioden

	Ugentlig				
	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42
MAE	0.0290	0.0220	0.0287	0.0192	0.0187
RMSE	0.0397	0.0299	0.0390	0.0248	0.0246
Retning	0.4588	0.5569	0.4549	0.6627	0.6827
MZ $p$ -værdi	0.0000	0.1345	0.0000	0.0001	0.0777

	Månedlig				
	AR(5)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN3	NN22
MAE	0.0201	0.0264	0.0202	0.0047	0.0060
RMSE	0.0271	0.0336	0.0272	0.0060	0.0067
Retning	0.4748	0.4412	0.4748	0.9538	0.9622
MZ $p$ -værdi	0.0133	0.3310	0.0079	0.0000	0.0000

**Tabel B.4.** Diebold-Mariano test for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden

	Ugentlig			
	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4
$M1 = M2$	0.0000	0.0004	0.0000	0.4620
$M1 < M2$	0.0000	0.0002	0.0000	0.2310
$M1 > M2$	1.0000	0.9998	1.0000	0.7690

	Månedlig			
	AR(5)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN22
$M1 = M2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$M1 < M2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$M1 > M2$	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

**Tabel B.5.** Forecastingsevalueringer for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden

	Ugentlig			
	MAE	RMSE	Retning	MZ $p$ -værdi
NN4-AR1	0.0217	0.0285	0.5686	0.6518
NN4-MA3	0.0193	0.0256	0.6157	0.0838
NN4-ARMA12	0.0215	0.0281	0.5765	0.7184
NN42-AR1	0.0215	0.0285	0.5765	0.4536
NN42-MA3	0.0189	0.0255	0.6235	0.4942
NN42-ARMA12	0.0213	0.0281	0.5804	0.5864

	Månedlig			
	MAE	RMSE	Retning	MZ $p$ -værdi
NN3AR3	0.0106	0.0144	0.7059	0.0007
NN3MA5	0.0144	0.0185	0.6092	0.0000
NN3ARMA12	0.0107	0.0145	0.6891	0.0004
NN22AR3	0.0109	0.0146	0.4790	0.0000
NN22MA5	0.0144	0.0184	0.6008	0.0000
NN22ARMA12	0.0110	0.0147	0.6849	0.0000



**Tabel B.6.** Diebold-Mariano test for de seks hybridmodeller for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden

	Ugentlig		
	$M1 = M2$	$M1 < M2$	$M1 > M2$
NN4AR1	0.0010	0.0005	0.9995
NN4MA3	0.1826	0.0913	0.9087
NN4ARMA12	0.0021	0.0011	0.9989
NN42AR1	0.0009	0.0005	0.9995
NN42MA3	0.2021	0.1010	0.8990
NN42ARMA12	0.0018	0.0009	0.9991

	Månedlig		
	$M1 = M2$	$M1 < M2$	$M1 > M2$
NN3AR5	0.0000	0.0000	1.0000
NN3MA3	0.0000	0.0000	1.0000
NN3ARMA12	0.0000	0.0000	1.0000
NN22AR5	0.0000	0.0000	1.0000
NN22MA3	0.0000	0.0000	1.0000
NN22ARMA12	0.0000	0.0000	1.0000

**Tabel B.7.** Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bull perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42
Afkast (%)	18.12	-20.80	12.95	-19.64	13.30	14.58
Standard afvigelse (%)	4.86	4.83	4.22	4.77	3.82	4.10
Sharpe-ratio	3.73	-4.31	3.07	-4.12	3.48	3.56
Maksimum afkast (%)	1.39	0.79	1.39	0.65	1.15	1.15
Minimum afkast (%)	-1.79	-2.15	-1.49	-2.15	-1.97	-2.15
Antal handler	1	69	74	70	72	67
Transaktionsomkostninger (%)	0.004	2.76	2.96	2.80	2.88	2.68
Vindende handler (%)	100.00	26.09	67.57	30.00	69.44	76.12
Antal perioder op	143	122	127	121	128	132
Antal perioder ned	112	135	130	136	129	125
Profit (%)	18.08	-23.56	9.99	-22.44	10.42	11.90

	L&S				
	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42
Afkast (%)	-59.08	7.22	-57.35	8.53	11.09
Standard afvigelse (%)	4.83	4.22	4.77	3.82	4.10
Sharpe-ratio	-12.23	1.71	-12.02	-2.23	2.71
Maksimum afkast (%)	0.79	1.79	0.65	1.79	1.79
Minimum afkast (%)	-3.01	-1.49	-3.61	-2.46	-2.46
Antal handler	138	147	140	144	134
Transaktionsomkostninger (%)	5.52	5.88	5.60	5.76	5.36
Vindende handler (%)	21.01	59.18	23.57	61.81	64.93
Profit (%)	-64.60	1.34	-62.95	2.77	5.73

**Table B.8.** Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for forecastingmodellerne for det ugentlig og månedlige afkast for bull perioden

	Ugentlig				
	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42
HM-statistik	1.5446	1.6237	1.5369	1.6545	1.6625
PT-statistik	8.6810	9.9753	8.5507	11.1083	10.5980
	Månedlig				
	AR(5)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN3	NN22
HM-statistik	1.7627	1.6950	1.7796	1.9682	1.9636
PT-statistik	12.0346	10.9218	12.0346	10.4421	14.8177

**Table B.9.** Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bull perioden

	B&S					
	NN4AR1	NN4MA3	NN4ARMA12	NN42AR1	NN42MA3	NN42ARMA11
Afkast	-10.36	16.05	-8.85	-9.96	16.80	-8.34
Standard afvigelse	4.04	3.91	4.01	4.16	4.04	4.14
Sharpe-ratio	-2.57	4.11	-2.21	-2.39	4.16	-2.02
Maksimum afkast	0.79	1.38	0.79	0.79	1.38	0.79
Minimum afkast	-2.15	-1.09	-2.15	-2.15	-0.69	-2.15
Antal handler	61	76	62	60	74	62
Trans.omkostninger	2.44	3.04	2.48	2.40	2.96	2.40
Vindende handler	45.90	67.11	48.39	46.67	68.92	48.39
Antal perioder op	122	126	124	122	128	123
Antal perioder ned	135	131	133	135	219	134
Profit	-12.80	13.01	-11.33	-12.36	13.84	-10.82
	L&S					
	NN4AR1	NN4MA3	NN4ARMA12	NN42AR1	NN42MA3	NN42ARMA12
Afkast	-38.79	13.98	-35.76	-37.99	15.54	-34.76
Standard afvigelse	4.04	3.91	4.01	4.16	4.04	4.14
Sharpe-ratio	-9.60	3.58	-8.92	-9.12	3.85	-8.40
Maksimum afkast	0.88	1.79	0.88	0.88	1.79	0.88
Minimum afkast	-2.46	-1.38	-2.95	-2.46	-1.38	-2.95
Antal handler	121	152	123	119	148	123
Trans.omkostninger	4.84	6.08	4.92	4.76	5.92	4.92
Vindende handler	38.84	61.18	39.84	39.50	62.84	39.84
Profit	-43.63	7.90	-40.68	-42.75	9.62	-39.68

**Tabel B.10.** Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for hybridmodellerne for det ugentlige og månedlige afkast for bull perioden

	Ugentlig					
	NN4AR1	NN4MA3	NN4ARMA12	NN42AR1	NN42MA3	NN42ARMA12
HM-statistik	1.6626	1.6623	1.6545	1.6551	1.6783	1.6623
PT-statistik	10.5710	10.7076	10.3253	10.8215	10.5774	2.9875

	Månedlig					
	NN3AR5	NN3MA3	NN3ARMA12	NN422AR5	NN22MA5	NN22ARMA12
HM-statistik	1.8736	1.8463	1.8736	1.8736	1.8632	1.8553
PT-statistik	13.6154	13.3581	13.6154	9.7951	13.3581	1.9321

**Tabel B.11.** Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det ugentlige afkast for bull perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42
Afkast(%)	18.12	-20.80	12.95	-19.64	13.30	14.58
MRAR(%)	19.36	-19.19	13.34	-18.30	13.91	15.26
Diff(%)	1.24	1.61	0.39	1.34	0.61	0.68

	L&S				
	AR(1)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN4	NN42
Afkast(%)	-59.08	7.22	-57.35	8.53	11.09
MRAR(%)	-45.63	7.19	-44.74	8.43	10.84
Diff(%)	13.45	-0.03	12.61	-0.10	-0.25

**Tabel B.12.** Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlige afkast for bull perioden

	B&S					
	NN4AR1	NN4MA3	NN4ARMA12	NN42AR1	NN42M3	NN42ARMA12
Afkast(%)	-10.36	16.05	-8.85	-9.96	16.80	-8.34
MRAR(%)	-10.22	17.12	-8.94	-9.82	18.00	-8.50
Diff(%)	0.15	1.07	-0.10	0.14	1.19	-0.15

	L&S					
	NN4AR1	NN4MA3	NN4ARMA12	NN42AR1	NN42M3	NN42ARMA12
Afkast(%)	-38.79	13.98	-35.76	-37.99	15.54	-34.76
MRAR(%)	-33.07	14.54	-31.07	-32.44	16.29	-30.39
Diff(%)	5.73	0.56	4.70	5.54	0.75	4.37

**Tabel B.13.** Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden

	B&H	B&S				
		AR(5)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN3	NN22
Afkast (%)	13.86	-19.56	-17.13	-20.44	18.11	17.84
Standard afvigelse (%)	6.45	6.34	5.21	6.34	5.93	5.99
Sharpe-ratio	2.15	-3.09	-3.29	-3.22	3.05	2.98
Maksimum afkast (%)	1.39	0.97	0.97	0.97	1.13	1.13
Minimum afkast (%)	-1.79	-1.88	-2.21	-1.88	-0.72	-0.72
Antal handler	1	60	73	61	65	63
Transaktionsomkostninger (%)	0.004	2.40	2.92	2.44	2.60	2.52
Vindende handler (%)	100.00	26.67	34.25	24.59	76.92	76.19
Antal perioder op	133	121	121	119	121	121
Antal perioder ned	105	117	117	119	117	117
Profit (%)	13.82	-21.96	-20.05	-22.88	15.51	15.32

	L&S				
	AR(5)	MA(3)	ARMA(1,2)	NN3	NN22
Afkast (%)	-51.64	-46.56	-53.17	22.19	21.65
Standard afvigelse (%)	6.34	5.21	6.34	5.93	5.99
Sharpe-ratio	-8.15	-8.94	-8.38	3.74	3.62
Maksimum afkast (%)	0.97	0.97	0.97	1.57	1.57
Minimum afkast (%)	-2.64	-2.21	-2.64	-1.19	-1.19
Antal handler	121	145	121	129	125
Transaktionsomkostninger (%)	4.84	5.80	4.84	5.16	5.00
Vindende handler (%)	19.01	24.83	18.18	66.67	66.40
Profit (%)	-56.48	-52.36	-58.01	17.03	16.65

**Tabel B.14.** Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden

	B&S					
	NN3AR5	NN3MA3	NN3ARMA12	NN22AR5	NN22MA3	NN22ARMA11
Afkast	-11.46	-12.51	-12.74	-13.53	-13.23	-13.60
Standard afvigelse	5.99	5.37	6.00	6.02	5.39	6.02
Sharpe-ratio	-1.91	2.33	-2.13	-2.25	-2.45	-2.26
Maksimum afkast	0.58	0.77	0.58	0.58	0.77	0.58
Minimum afkast	-2.06	-1.88	-2.06	-2.06	-1.88	-2.06
Antal handler	43	57	43	41	57	42
Trans.omkostninger	1.72	2.28	1.72	1.64	2.28	1.68
Vindende handler	32.56	36.84	27.91	29.27	35.09	26.19
Antal perioder op	120	117	120	121	115	119
Antal perioder ned	118	121	118	117	123	119
Profit	-13.18	-14.79	-14.46	-15.17	-15.51	-15.28

	L&S					
	NN3AR5	NN3MA3	NN3ARMA12	NN22AR5	NN22MA3	NN22ARMA12
Afkast	-35.96	-37.81	-38.51	-39.43	-39.25	-40.24
Standard afvigelse	5.99	5.37	6.00	6.02	5.39	6.02
Sharpe-ratio	-5.99	-7.05	-6.42	-6.55	-7.28	-6.68
Maksimum afkast	0.65	1.29	0.65	0.65	1.06	0.65
Minimum afkast	-2.46	-1.88	-2.64	-2.64	-1.88	-2.64
Antal handler	84	113	84	80	113	82
Trans.omkostninger	3.36	4.52	3.36	3.20	4.52	3.28
Vindende handler	25.00	25.66	20.24	22.50	23.89	19.51
Profit	-39.32	-42.33	-41.87	-42.63	-43.77	-43.52

**Tabel B.15.** Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden

	B&H	B&S				
		AR(3)	MA(5)	ARMA(1,2)	NN3	NN22
Afkast(%)	13.86	-19.56	-17.13	-20.44	18.11	17.84
MRAR(%)	14.39	-18.05	-16.01	-18.79	19.58	19.27
Diff(%)	0.53	1.51	1.12	1.65	1.47	1.43

	L&S				
	AR(3)	MA(5)	ARMA(1,2)	NN3	NN22
Afkast(%)	-51.64	-46.56	-53.17	22.19	21.65
MRAR(%)	-41.11	-37.94	-42.07	23.96	23.32
Diff(%)	10.54	8.62	11.10	1.77	1.66

**Tabel B.16.** Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlig afkast for bull perioden

	B&S					
	NN3AR3	NN3MA5	NN3ARMA12	NN22AR3	NN22M5	NN22ARMA12
Afkast(%)	-11.46	-12.51	-12.74	-13.53	-13.23	-13.60
MRAR(%)	-11.03	-11.94	-12.16	-12.90	-12.60	-12.97
Diff(%)	0.44	0.56	0.58	0.63	0.63	0.64

	L&S					
	NN3AR3	NN3MA5	NN3ARMA12	NN22AR3	NN22M5	NN22ARMA12
Afkast(%)	-35.96	-37.81	-38.51	-39.43	-39.25	-40.24
MRAR(%)	-30.76	-32.05	-32.56	-33.19	-33.08	-33.77
Diff(%)	5.20	5.76	5.96	6.24	6.17	6.46

**Tabel B.17.** BIC-værdier for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden

	<i>AIC-værdier</i>		
	Daglig	Ugentlig	Månedlig
AR(1)	<b>-1213.53</b>	<b>-1445.52</b>	<b>-1503.77</b>
AR(2)	-1196.51	-1340.94	-1500.66
AR(3)	-1172.71	-1340.34	-1502.01
AR(4)	-1125.37	-1342.31	-1501.63
AR(5)	-987.38	-1338.51	-1499.64
MA(1)	40.37	110.06	-28.40
MA(2)	-237.17	-231.47	<b>-750.90</b>
MA(3)	-408.03	-520.74	-305.23
MA(4)	-540.04	-749.17	-340.32
MA(5)	<b>-627.82</b>	<b>-923.78</b>	-566.37
ARMA(1,1)	<b>-1296.29</b>	<b>-1392.91</b>	<b>-1504.04</b>
ARMA(2,1)	<i>-1296.29</i>	-1341.25	-1502.97
ARMA(1,2)	-1282.40	-1379.73	-1502.30
ARMA(2,2)	<i>-1282.40</i>	-1342.25	-1501.25

*Kursiv betyder at modellen ikke kan konvergere.*

**Tabel B.18.** Fejl-værdier for neurale netværk på det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden

	<i>Fejl</i>		
	Daglig	Ugentlig	Månedlig
NN(1)	0.4381	0.2662	0.2632
NN(2)	0.4320	<b>0.2649</b>	0.2598
NN(3)	<b>0.4278</b>	0.2698	0.2661
NN(4)	0.4357	0.2659	<b>0.2581</b>
NN(5)	0.4294	0.2686	0.2586
NN(1,1)	0.4382	0.2619	0.2699
NN(2,1)	0.4379	<b>0.2616</b>	<b>0.2559</b>
NN(1,2)	0.4385	0.2690	0.2598
NN(2,2)	0.4383	0.2678	0.2614
NN(3,1)	0.4408	0.2672	0.2633
NN(3,2)	0.4375	0.2703	0.2568
NN(1,3)	0.4416	0.2681	0.2631
NN(2,3)	0.4372	0.2675	0.2656
NN(3,3)	0.4376	0.2718	0.2637
NN(4,1)	0.4344	0.2714	0.2658
NN(4,2)	0.4406	0.2742	0.2573
NN(4,3)	0.4452	0.2650	0.2712
NN(1,4)	0.4365	0.2633	0.2584
NN(2,4)	0.4347	0.2720	0.2651
NN(3,4)	0.4383	0.2650	0.2603
NN(4,4)	<b>0.4320</b>	0.2700	0.2657

**Tabel B.19.** Resultaterne af LM-test for modellernes residualer for bear perioden

	Daglig		
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)
Q(4)-statistik	120.9545	90.2572	7.4799
<i>p</i> -værdi	0.0000	0.0000	0.1126
Q(8)-statistik	126.8490	119.1819	10.8727
<i>p</i> -værdi	0.0000	0.0000	0.2090
	Ugentlig		
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)
Q(4)-statistik	18.6598	222.6246	98.2335
<i>p</i> -værdi	0.0009	0.0000	0.0000
Q(8)-statistik	71.8691	230.2466	103.2049
<i>p</i> -værdi	0.0000	0.0000	0.0000
	Månedlig		
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)
Q(4)-statistik	1.8756	134.5329	1.6295
<i>p</i> -værdi	0.7586	0.0000	0.8035
Q(8)-statistik	4.5899	181.4569	4.3991
<i>p</i> -værdi	0.8004	0.0000	0.8194

**Tabel B.20.** LM-test for de standardiserede residualer for bear perioden

		Daglig			
Residual form	Model	$Q(4)$ -statistik	$p$ -værdi	$Q(8)$ -statistik	$p$ -værdi
$\hat{\epsilon}_t^2/\hat{h}_t$	AR(1)	0.5781	0.9998	2.8334	0.5861
	MA(5)	0.1402	0.9977	1.2236	0.9964
		Ugentlig			
Residual form	Model	$Q(4)$ -statistik	$p$ -værdi	$Q(8)$ -statistik	$p$ -værdi
$\hat{\epsilon}_t^2/\hat{h}_t$	AR(5)	4.8558	0.3024	7.1341	0.5222
	MA(5)	0.1402	0.9977	1.2236	0.9964
	ARMA(1,1)	0.1402	0.9977	1.2236	0.9964
		Månedlig			
Residual form	Model	$Q(4)$ -statistik	$p$ -værdi	$Q(8)$ -statistik	$p$ -værdi
$\hat{\epsilon}_t^2/\hat{h}_t$	MA(2)	0.2187	0.9944	0.2211	0.9999

**Tabel B.21.** Forecastingskriterier for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig og det månedlig afkast for bear perioden

		Daglig				
		AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44
MAE		0.1824	0.1731	0.1247	0.1303	0.1295
RMSE		0.2439	0.2318	0.1734	0.1748	0.1732
Retning		0.3333	0.3407	0.2366	0.2151	0.2903
MZ $p$ -værdi		0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000
		Ugentlig				
		AR(1)	MA(4)	ARMA(1,1)	NN2	NN21
MAE		0.1051	0.0818	0.1049	0.0532	0.0715
RMSE		0.1434	0.1087	0.1422	0.0709	0.0999
Retning		0.3889	0.6778	0.4333	0.8222	0.8000
MZ $p$ -værdi		0.3141	0.5361	0.2638	0.5691	0.0020
		Månedlig				
		AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21
MAE		0.0939	0.1190	0.0939	0.0646	0.1227
RMSE		0.1189	0.1506	0.1192	0.0707	0.1590
Retning		0.5067	0.4533	0.5200	0.8933	0.9895
MZ $p$ -værdi		0.1263	0.9489	0.1391	0.0000	0.0000



**Tabel B.22.** Diebold-Mariano test for de fem forecastingsmodeller for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden

	Daglig			
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3
$M1 = M2$	0.0006	0.0006	0.9736	0.6223
$M1 < M2$	0.0003	0.0003	0.4868	0.3112
$M1 > M2$	0.9997	0.9997	0.5132	0.6888
	Ugentlig			
	AR(1)	MA(4)	ARMA(1,1)	NN21
$M1 = M2$	0.0000	0.0007	0.0000	0.0018
$M1 < M2$	0.0000	0.0003	0.0000	0.0009
$M1 > M2$	0.9999	0.9997	0.9999	0.9999
	Månedlig			
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN21
$M1 = M2$	0.0001	0.0000	0.0001	0.0003
$M1 < M2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
$M1 > M2$	0.9999	1.0000	0.9999	0.9999

**Tabel B.23.** Forecastingskriterier for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden

	Daglig			
	MAE	RMSE	Retning	MZ $p$ -værdi
NN3AR1	0.1477	0.1966	0.3226	0.0000
NN3MA5	0.1432	0.1940	0.3441	0.0000
NN3ARMA11	0.1267	0.1733	0.1720	0.0000
NN4AR1	0.1473	0.1950	0.3333	0.0000
NN4MA5	0.1424	0.1925	0.3441	0.0000
NN4ARMA11	0.1264	0.1720	0.2043	0.0000
	Ugentlig			
	MAE	RMSE	Retning	MZ $p$ -værdi
NN2AR1	0.0586	0.0824	0.7111	0.0000
NN2MA5	0.0433	0.0589	0.8111	0.0000
NN2ARMA11	0.0584	0.0821	0.7111	0.0002
NN21AR1	0.0736	0.1043	0.6667	0.0000
NN21MA5	0.0569	0.0821	0.7889	0.0000
NN21ARMA11	0.0734	0.1036	0.6556	0.0000
	Månedlig			
	MAE	RMSE	Retning	MZ $p$ -værdi
NN4AR1	0.0523	0.0640	0.6800	0.0006
NN4MA2	0.0581	0.0738	0.6400	0.0008
NN4ARMA11	0.0524	0.0641	0.6800	0.0006
NN21AR1	0.0775	0.1064	0.6400	0.0000
NN21MA2	0.0901	0.1281	0.5200	0.0000
NN21ARMA11	0.0778	0.1069	0.6267	0.0000

**Tabel B.24.** Diebold-Mariano test for de seks hybridmodeller for det daglige, ugentlige og månedlige afkast for bear perioden

	Daglig		
	$M1 = M2$	$M1 < M2$	$M1 > M2$
NN3AR1	0.0172	0.0086	0.9914
NN3MA5	0.0102	0.0051	0.9949
NN3ARMA11	0.9843	0.4922	0.5078
NN44AR1	0.0165	0.0083	0.9917
NN44MA5	0.0086	0.0043	0.9957
NN44ARMA11	0.7200	0.6400	0.3600

	Ugentlig		
	$M1 = M2$	$M1 < M2$	$M1 > M2$
NN2AR1	0.1124	0.0562	0.9438
NN2MA5	0.0308	0.9846	0.0154
NN2ARMA11	0.1171	0.0585	0.9415
NN21AR1	0.0013	0.0006	0.9994
NN21MA5	0.1275	0.0637	0.9363
NN21ARMA11	0.0015	0.0007	0.9993

	Månedlig		
	$M1 = M2$	$M1 < M2$	$M1 > M2$
NN4AR1	0.2246	0.8877	0.1123
NN4MA2	0.6607	0.9846	0.0154
NN4ARMA11	0.2319	0.8841	0.1159
NN21AR1	0.0176	0.0088	0.9912
NN21MA2	0.0021	0.0011	0.9989
NN21ARMA11	0.0163	0.0081	0.9919

**Tabel B.25.** Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44
Afkast (%)	-38.03	11.62	-73.99	-49.56	-12.87	-3.00
Standard afvigelse (%)	16.42	3.06	13.84	4.58	1.79	1.30
Sharpe-ratio	-2.32	3.80	-5.35	-10.83	-7.20	-2.31
Maksimum afkast (%)	12.07	12.07	3.78	8.77	11.10	13.56
Minimum afkast (%)	-6.59	-6.59	-9.70	-9.70	-10.36	-10.36
Antal handler	1	29	26	25	32	31
Transaktionsomkostninger (%)	0.004	1.16	1.04	1.00	1.28	1.24
Vindende handler (%)	0.00	62.07	19.23	20.00	50.00	45.16
Antal perioder op	47	46	45	50	50	42
Antal perioder ned	46	47	48	43	43	51
Profit (%)	-38.07	10.46	-75.03	-50.56	-14.15	-4.24

	L&S				
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44
Afkast (%)	60.32	-107.99	-60.30	12.39	33.97
Standard afvigelse (%)	3.06	13.84	4.58	1.79	1.30
Sharpe-ratio	19.72	-7.81	-13.18	6.93	26.07
Maksimum afkast (%)	12.07	6.59	10.22	12.47	13.56
Minimum afkast (%)	-7.44	-14.27	-12.07	-10.36	-10.36
Antal handler	58	51	50	62	61
Transaktionsomkostninger (%)	2.32	2.04	2.00	2.48	2.44
Vindende handler (%)	63.79	27.45	28.00	50.00	47.54
Profit (%)	58.00	-110.03	-62.30	9.91	31.53

**Tabel B.26.** Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for forecastingsmodellerne for det daglige, ugentlige og månedlige afkast for bear perioden

	Daglig				
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44
HM-statistik	0.8691	0.8732	0.9201	0.3991	0.3830
PT-statistik	1.4606	1.3518	1.4291	5.7438	0.9129

	Ugentlig				
	AR(1)	MA(4)	ARMA(1,1)	NN2	NN21
HM-statistik	1.3269	1.5961	1.3253	1.6424	1.6663
PT-statistik	3.0649	5.8833	3.0287	6.9691	6.2943

	Månedlig				
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21
HM-statistik	1.7173	1.6308	1.6867	1.9796	1.8000
PT-statistik	6.2342	5.5769	6.2342	3.9357	7.1940

**Tabel B.27.** Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden

	B&S					
	NN3AR1	NN3MA5	NN3ARMA11	NN44AR1	NN44MA5	NN44ARMA11
Afkast	-98.63	-87.24	-36.87	-111.47	-82.11	-21.40
Standard afvigelse	8.40	7.31	2.49	8.14	7.05	1.96
Sharpe-ratio	-11.75	-11.94	-14.81	-13.70	-11.65	-10.93
Maksimum afkast	0.74	3.63	11.10	0.74	3.63	11.10
Minimum afkast	-10.36	-16.83	-10.36	-10.36	-9.70	-6.88
Antal handler	30	25	31	31	26	28
Trans.omkostninger	1.20	1.00	1.24	1.24	1.04	1.12
Vindende handler	13.33	16.00	35.48	12.90	15.38	42.86
Tabende handler	86.67	84.00	64.52	87.10	84.62	57.14
Antal perioder op	45	47	47	46	47	46
Antal perioder ned	48	46	46	47	46	47
Profit	-99.83	-88.24	-38.11	-112.71	-83.15	-22.52

	L&S					
	NN3AR1	NN3MA5	NN3ARMA11	NN44AR1	NN44MA5	NN44ARMA11
Afkast	-160.29	-137.51	-35.27	-182.96	-124.24	-4.33
Standard afvigelse	8.40	7.31	2.49	8.14	7.05	1.96
Sharpe-ratio	-19.09	-18.82	-14.16	-22.48	-17.63	-2.21
Maksimum afkast	7.13	6.59	11.17	4.76	6.59	24.59
Minimum afkast	-12.07	-16.83	-11.05	-12.07	-14.27	-11.05
Antal handler	61	50	61	61	51	55
Trans.omkostninger	2.44	2.00	2.44	2.44	2.04	2.20
Vindende handler	18.03	22.00	37.70	16.39	23.53	40.00
Tabende handler	81.97	78.00	62.30	83.61	76.47	60.00
Profit	-162.73	-139.51	-3.71	-185.40	-126.28	-6.53

**Tabel B.28.** Henriksson-Merton og Peseran-Timmermann test for hybridmodellerne for det daglige, ugentlig og månedlige afkast for bear perioden

	Daglig					
	NN3AR1	NN3MA5	NN3ARMA11	NN44AR1	NN44MA5	NN44ARMA11
HM-statistik	0.8264	0.7234	0.5835	0.8233	0.7637	0.7380
PT-statistik	1.4006	1.5965	1.5341	1.1912	1.5965	3.8445

	Ugentlig					
	NN2AR1	NN2MA4	NN2ARMA11	NN21AR1	NN21MA4	NN21ARMA11
HM-statistik	1.6849	1.6849	1.6181	1.6849	1.6676	1.6181
PT-statistik	6.2876	7.3762	6.0719	6.0719	6.7746	0.6907

	Månedlig					
	NN4AR1	NN4MA2	NN4ARMA11	NN21AR1	NN21MA2	NN4ARMA11
HM-statistik	1.8304	1.7982	1.8304	1.7681	1.7131	1.7943
PT-statistik	3.0650	2.6312	3.0650	2.3876	2.0150	0.2422

**Tabel B.29.** Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44
Afkast(%)	-38.03	11.62	-73.99	-49.56	-12.87	-3.00
MRAR(%)	-36.40	10.71	-64.16	-45.28	-13.50	-5.02
Diff(%)	1.64	-0.91	9.83	4.28	-0.63	-2.02

	L&S				
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN3	NN44
Afkast(%)	60.32	-107.99	-60.30	12.39	33.97
MRAR(%)	64.35	-84.53	-53.58	9.21	27.11
Diff(%)	4.03	23.46	6.73	-3.19	-6.86

**Tabel B.30.** Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det daglig afkast for bear perioden

	B&S					
	NN3AR1	NN3MA5	NN3ARMA11	NN44AR1	NN44M5	NN44ARMA11
Afkast(%)	-98.63	-87.24	-36.87	-111.47	-82.11	-21.40
MRAR(%)	-76.45	-73.37	-33.98	-85.12	-67.74	-20.81
Diff(%)	22.18	13.87	2.89	26.35	14.37	0.60

	L&S					
	NN3AR1	NN3MA5	NN3ARMA11	NN44AR1	NN44M5	NN44ARMA11
Afkast(%)	-160.29	-137.51	-35.27	-182.96	-124.24	-4.33
MRAR(%)	-93.57	-90.71	-39.95	-98.93	-84.23	-18.91
Diff(%)	66.71	46.80	-4.69	84.03	40.01	-14.58

**Tabel B.31.** Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN2	NN21
Afkast (%)	-35.38	-112.31	-11.83	-105.57	-11.07	-15.37
Standard afvigelse (%)	17.19	11.49	13.65	11.79	16.43	10.94
Sharpe-ratio	-2.06	-9.78	-0.87	-8.95	-0.67	-1.41
Maksimum afkast (%)	13.56	0.74	11.05	3.43	12.07	12.07
Minimum afkast (%)	-10.36	-13.81	-13.72	-13.81	-14.34	-14.34
Antal handler	1	27	23	29	30	30
Transaktionsomkostninger (%)	0.004	1.08	0.92	1.16	1.20	1.20
Vindende handler (%)	0.00	18.52	60.87	27.59	53.33	50.00
Antal perioder op	46	42	36	44	41	43
Antal perioder ned	44	48	54	46	49	47
Profit (%)	-35.42	-113.39	-12.75	-106.73	-12.27	-16.57

	L&S				
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN2	NN21
Afkast (%)	-190.30	11.71	-175.32	14.36	5.76
Standard afvigelse (%)	11.49	13.65	11.79	16.43	10.94
Sharpe-ratio	-16.56	0.86	-14.87	0.87	0.53
Maksimum afkast (%)	7.24	11.05	9.79	12.07	12.07
Minimum afkast (%)	-13.81	-13.72	-13.81	-14.34	-14.34
Antal handler	54	45	57	60	60
Transaktionsomkostninger (%)	2.16	1.80	2.28	2.40	2.40
Vindende handler (%)	22.22	62.22	28.07	53.33	51.67
Profit (%)	-192.46	9.91	-177.60	11.96	3.36

**Tabel B.32.** Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden

	B&S					
	NN2AR1	NN2MA5	NN2ARMA11	NN21AR1	NN21MA5	NN21ARMA11
Afkat	-72.36	-15.42	-72.13	-80.82	-8.87	-75.57
Standard afvigelse	11.84	13.33	12.03	8.99	10.50	9.20
Sharpe-ratio	-6.11	-1.16	-5.99	-8.99	-0.85	-8.21
Maksimum afkast	4.08	12.07	3.32	3.32	12.07	3.43
Minimum afkast	-18.93	-12.68	-18.93	-18.93	-12.68	-18.93
Antal handler	24	25	25	23	26	27
Trans.omkostninger	0.96	1.00	1.00	0.92	1.04	1.08
Vindende handler	33.33	56.00	36.00	26.09	57.69	33.33
Antal perioder op	39	44	41	39	40	42
Antal perioder ned	51	46	49	51	50	48
Profit	-73.32	-16.24	-73.13	-81.74	-9.91	-76.65

	L&S					
	NN2AR1	NN2MA5	NN2ARMA11	NN21AR1	NN21MA5	NN21ARMA11
Afkast	-107.52	4.98	-106.94	-124.44	18.08	-113.82
Standard afvigelse	11.84	13.33	12.03	8.99	10.50	9.20
Sharpe-ratio	-9.08	0.37	-8.89	-13.84	1.72	-12.37
Maksimum afkast	10.36	12.07	5.05	4.04	12.07	4.04
Minimum afkast	-18.93	-12.68	-18.93	-18.93	-12.68	-18.93
Antal handler	47	50	49	45	52	53
Trans.omkostninger	1.88	2.00	1.96	1.80	2.08	2.12
Vindende handler	38.30	56.00	38.78	35.56	57.69	37.74
Profit	-109.40	2.98	-108.90	-126.24	16.00	-115.94

**Tabel B.33.** Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN2	NN21
Afkast(%)	-35.38	-112.31	-11.83	-105.57	-11.07	-15.37
MRAR(%)	-34.89	-84.95	-15.89	-84.07	-18.86	-22.46
Diff(%)	0.49	27.36	-4.06	21.50	-7.79	-7.09

	L&S				
	AR(1)	MA(5)	ARMA(1,1)	NN2	NN21
Afkast(%)	-190.30	11.71	-175.32	14.36	5.76
MRAR(%)	-99.48	3.02	-99.55	-17.08	-21.76
Diff(%)	90.82	-8.69	75.77	-31.44	-27.52

**Table B.34.** Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det ugentlig afkast for bear perioden

	B&S					
	NN2AR1	NN2MA5	NN2ARMA11	NN21AR1	NN21MA5	NN21ARMA11
Afkast(%)	-72.36	-15.42	-72.13	-80.82	-8.87	-75.57
MRAR(%)	-63.28	-17.41	-65.16	-70.09	-12.21	-68.53
Diff(%)	9.08	-1.99	6.97	10.72	-3.34	7.04

	L&S					
	NN2AR1	NN2MA5	NN2ARMA11	NN21AR1	NN21MA5	NN21ARMA11
Afkast(%)	-107.52	4.98	-106.94	-124.44	18.08	-113.82
MRAR(%)	-87.54	3.10	-87.79	-90.96	17.72	-90.53
Diff(%)	19.98	-1.88	19.15	33.47	-0.36	23.29

**Table B.35.** Profitabilitetsanalyse for de fem forecastingsmodeller for det månedlige afkast for bear perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21
Afkast (%)	-38.80	-83.46	-58.34	-84.80	2.09	17.99
Standard afvigelse (%)	21.91	21.74	17.12	21.66	25.19	13.57
Sharpe-ratio	-1.77	-3.84	-3.41	-3.92	0.08	1.33
Maksimum afkast (%)	13.56	3.22	3.32	3.22	12.07	12.07
Minimum afkast (%)	-10.36	-24.59	-11.85	-24.59	-17.35	-13.30
Antal handler	1	19	27	18	17	19
Transaktionsomkostninger (%)	0.004	0.76	1.08	0.72	0.68	0.76
Vindende handler (%)	0.00	31.58	40.74	27.78	58.82	57.89
Antal perioder op	36	42	40	43	40	41
Antal perioder ned	39	33	35	32	35	34
Profit (%)	-38.84	-84.22	-59.42	-85.52	1.41	17.23

	L&S				
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21
Afkast (%)	-127.34	-77.87	-130.01	40.08	71.87
Standard afvigelse (%)	21.74	17.12	21.66	25.19	13.57
Sharpe-ratio	-5.86	-4.55	-6.00	1.59	5.30
Maksimum afkast (%)	4.05	5.70	4.05	12.07	12.07
Minimum afkast (%)	-24.59	-11.85	-24.59	-17.35	-13.30
Antal handler	37	53	35	32	36
Transaktionsomkostninger (%)	1.48	2.12	1.40	1.28	1.44
Vindende handler (%)	32.43	43.40	28.57	65.63	66.67
Profit (%)	-128.82	-79.99	-131.41	38.80	70.43



**Tabel B.36.** Profitabilitetsanalyse for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlige afkast for bear perioden

	B&S					
	NN4AR1	NN4MA2	NN4ARMA11	NN21AR1	NN21MA2	NN21ARMA11
Afkat	-60.02	-56.41	-60.02	-69.94	-50.82	-80.30
Standard afvigelse	22.50	19.67	22.45	16.80	14.08	16.76
Sharpe-ratio	-2.67	-2.87	-2.67	-4.16	-3.61	-4.79
Maksimum afkast	1.61	1.93	1.61	1.61	3.32	1.61
Minimum afkast	-20.54	-20.54	-20.54	-24.59	-19.60	-24.59
Antal handler	13	20	13	14	24	14
Trans.omkostninger	0.52	0.80	0.52	0.56	0.96	0.56
Vindende handler	15.38	35.00	15.38	21.43	41.67	21.43
Antal perioder op	33	36	33	36	37	37
Antal perioder ned	42	39	42	39	38	38
Profit	-60.54	-57.21	-60.54	-70.50	-51.78	-80.86

	L&S					
	NN4AR1	NN4MA2	NN4ARMA11	NN21AR1	NN21MA2	NN21ARMA11
Afkast	-80.48	-73.23	-80.48	-100.31	-62.06	-121.03
Standard afvigelse	22.50	19.67	22.45	16.80	14.08	16.76
Sharpe-ratio	-3.58	-3.72	-3.59	-5.97	-4.41	-7.22
Maksimum afkast	6.24	8.16	6.24	4.45	6.28	4.45
Minimum afkast	-20.54	-20.54	-20.54	-24.59	-19.60	-24.59
Antal handler	25	39	25	27	47	27
Trans.omkostninger	1.00	1.56	1.00	1.08	1.88	1.08
Vindende handler	36.00	46.15	36.00	33.33	46.81	29.63
Profit	-81.48	-74.79	-81.48	-101.39	-63.94	-122.11

**Tabel B.37.** Risikojusteret afkast for de fem forecastingsmodeller for det månedlig afkast for bear perioden

	B&H	B&S				
		AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21
Afkast(%)	-38.80	-83.46	-58.34	-84.80	2.09	17.99
MRAR(%)	-38.57	-81.06	-73.81	-81.38	1.76	16.52
Diff(%)	0.23	2.40	-15.47	3.41	-0.33	-1.46

	L&S				
	AR(1)	MA(2)	ARMA(1,1)	NN4	NN21
Afkast(%)	-127.24	-77.87	-130.01	40.08	71.87
MRAR(%)	-98.62	-91.11	-98.68	34.24	69.97
Diff(%)	28.72	-13.24	31.33	-5.84	-1.91

**Tabel B.38.** Risikojusteret afkast for de seks hybridforecastingsmodeller for det månedlig afkast for bear perioden

	B&S					
	NN4AR1	NN4MA2	NN4ARMA11	NN21AR1	NN21M2	NN21ARMA11
Afkast(%)	-60.02	-56.41	-60.02	-69.94	-50.82	-80.30
MRAR(%)	-69.21	-68.46	-69.21	-67.56	-64.28	-79.45
Diff(%)	-9.19	-12.05	-9.19	2.38	-13.46	0.85

	L&S					
	NN4AR1	NN4MA2	NN4ARMA11	NN21AR1	NN21M2	NN21ARMA11
Afkast(%)	-80.48	-73.23	-80.48	-100.31	-62.06	-121.03
MRAR(%)	-91.72	-91.50	-91.72	-86.69	-76.62	-98.04
Diff(%)	-11.25	-18.28	-11.25	13.62	-14.57	22.99

C

Ligninger

## The Hadamard produkt

Antag at  $s$  og  $t$  er to vektorer af samme dimension. Da bruges  $s \odot t$  til at benævne det elementvise produkt af de to vektorer. Komponenterne af  $s \odot t$  er egentlig bare  $(s \odot t)_j = s_j t_j$ . Et eksempel på dette er,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 3 \\ 2 * 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

## Udledning af ligningerne til det neurale netværk

Der vil i dette appendix blive udledt beviser for, at de fire fundamentale ligninger der anvendes i backpropagation, faktisk passer.

Der startes med at kigge på beviset for at **ligning 1** passer. Genkald fra tidligere at fejlen i output layeret,  $\delta_j^L$ , kan defineres som:

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial z_j^L}.$$

Ved at anvende *kæde reglen*, så kan ovenstående udtryk omskrives til

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial a_j^L} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L}. \quad (\text{C.2})$$

Det vides fra tidligere at  $a_j^L = \sigma(z_j^L)$ . Differentieres  $z_j^L$  med hensyn til  $a_j^L$  så opnås:

$$\frac{\partial z_j^L}{\partial a_j^L} = \sigma'(z_j^L).$$

Dette kan indsættes på dets plads i (C.2), og derved opnås **ligning 1**:

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial a_j^L} \sigma'(z_j^L).$$

Der ses nu på beviset for **ligning 2**. Her er det specielle at der gerne vil opnås en udtryk for  $\delta_j^l$  vha.  $\delta_j^{l+1}$ . Derved kan kæde reglen igen anvendes

$$\delta_j^l = \frac{\partial C}{\partial z_j^l} = \frac{\partial C}{\partial z_j^{l+1}} \frac{\partial z_j^{l+1}}{\partial z_j^l}. \quad (\text{C.3})$$

Dets vides at  $z_j^{l+1} = \sum_k w_{jk}^{l+1} a_k^l + b_j^l = \sum_k w_{jk}^{l+1} \sigma(z_j^l) + b_j^l$ , og hvis dette differentieres med hensyn til  $z_j^l$ , så opnås der

$$\frac{\partial z_j^{l+1}}{\partial z_j^l} = w_{jk}^{l+1} \sigma'(z_j^{l+1}).$$

Indsættes dette i (C.3) så opnås **ligning 2**:

$$\delta_j^l = \sum_k w_{jk}^{l+1} \sigma'(z_j^l) \delta_j^{l+1},$$

da  $\partial C / \partial z_j^{l+1} = \delta_j^{l+1}$ .

Beviset for **ligning 3** vises også ved at anvende kæde reglen:

$$\frac{\partial C}{\partial b_j^l} = \frac{\partial C}{\partial z_j^l} \frac{\partial z_j^l}{\partial b_j^l}. \quad (\text{C.4})$$

Hvis  $\sum_k w_{jk}^l \sigma'(z_j^l) + b_j^l$  differentieres med hensyn til  $b_j^l$  så giver dette 1. Da  $\partial C / \partial z_j^l = \delta_j^l$ , så opnås **ligning 3**:

$$\frac{\partial C}{\partial b_j^l} = \delta_j^l.$$

Beviset for **ligning 4** opnås også ved at anvende kæde reglen

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} = \frac{\partial C}{\partial z_j^l} \frac{\partial z_j^l}{\partial w_{jk}^l} = a_k^{l-1} \delta_j^l. \quad (\text{C.5})$$

Herved er det vist at (C.5) er identisk med **ligning 4**.

## Udledning af Pesara-Timmermann testen

Input variable i Pesaran-Timmermann testen:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= n^{-1} \sum_{t=1}^n (y_t, x_t) \\ \hat{P}_* &= \hat{P}_y \hat{P}_x + (1 - \hat{P}_y)(1 - \hat{P}_x) \\ \hat{V}(\hat{P}) &= n^{-1} \hat{P}_*(1 - \hat{P}_*) \\ \hat{V}(\hat{P}_*) &= n^{-1} (2\hat{P}_y - 1)^2 \hat{P}_x (1 - \hat{P}_x) + n^{-1} (2\hat{P}_x - 1)^2 \hat{P}_y (1 - \hat{P}_y) + 4n^{-1} \hat{P}_y \hat{P}_x (1 - \hat{P}_y)(1 - \hat{P}_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_y &= n^{-1} \sum_{t=1}^n (y_t) \\ \hat{P}_x &= n^{-1} \sum_{t=1}^n (x_t) \end{aligned}$$