



(Kilde: <http://www.shutterstock.com>, licens udstedt til Marikka Beierholm)

The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model

En økonometrisk analyse af sammenhængen mellem forbrugsvækst og afkast på finansielle aktiver

English title: The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model - An econometric analysis regarding the relation between consumption growth and financial asset returns

Vejleder: Lasse Bork
Afleveringsdato: 8. August 2016

Udarbejdet af:
Marikka Beierholm

Titelblad

The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model

En økonometrisk analyse af relationen mellem forbrugsvækst og afkast på finansielle aktiver

Det Samfundsvidenskabelige Fakultet

Aalborg Universitet

Modul 8: Kandidatspeciale (30 ECTS)

Afleveringsdato: 08-08-2016

Projektgruppe: 10. semester, gruppe 5

Vejleder: Lasse Bork

Udarbejdet af:

20113921 Marikka Beierholm

Antal anslag eksklusiv forside, indholdsfortegnelse, litteraturliste samt bilag: 151.696

Antal normalsider eksklusiv forside, indholdsfortegnelse, litteraturliste samt bilag: 63,2

Executive Summary

This thesis seeks to understand the relation between consumption growth and returns on financial assets. In order to do so the thesis investigates the Consumption based Capital Asset Pricing Model (CCAPM) with constant relative risk aversion as a part of the consumption based asset pricing framework. The thesis performs formal econometric estimation and testing of the model using the empirical tool Generalized Method of Moments (GMM). The thesis finds through the use of GMM estimation a subjective discount factor δ above 1. A subjective discount factor above 1 is not in accordance with the theoretical perspective which states that investor prefer consumption today rather than consumption in the future, hence the estimate should be below 1. The estimate of the risk aversion γ is 172 and is too high. Even though the model empirically is not rejected by the J-test, the estimates are not significant different from 0. Furthermore, the thesis finds that the model cannot explain the risk premium on US stocks without allowing high value of risk aversion. The above mentioned problem is called the equity premium puzzle. Additionally, the thesis finds that a high risk aversion in the standard model with constant relative risk aversion leads to another puzzle, the so called risk-free rate puzzle. The high risk-free rate in the standard model is not consistent with the historical observed low risk-free rate. The above mentioned results of the GMM estimation are consistent with the findings of Cochrane (2007) and Veerbek (2004).

There have previously been made several modifications to the standard model in order to solve the problems with the equity premium puzzle and risk-free rate puzzle. One of the made modifications to the standard model, is the assumption that investor might have more complicated preferences than the power utility specification used in the standard model. In order to address the aforementioned complicated preferences, development of habit formation models might constitute a viable alternative to the standard model. These models allow for nonseparability in utility over time. With the hope of obtaining a better performance of the CCAPM, this thesis presents the Campbell-Cochrane model. The Campbell-Cochrane model is an external habit formation model where habit depends on aggregate consumption which is unaffected by any one investor's decisions. In the Campbell-Cochrane model, investor gradually develops habits for the consumption level he or she faces. This model assumes that investor gets accustomed to a high standard of living after periods of good times. Consequently, a fall in consumption hurts even though the same level of consumption would have been satisfying in periods of bad times.

The thesis presents the results of Campbell and Cochrane (1999). They do not engage in formal econometric estimation and testing of the model but instead they rely on calibration and simulation. This thesis focus on their results but also presents Stig W. Møller's econometric GMM estimation of the Campbell-Cochrane model. They find that their model among other things explains procyclical variation of stock prices and the model explain countercyclical variation of stock market volatility. Furthermore, the model is capable of explaining the equity premium puzzle both in the short- and long-run despite a low risk-free rate. Møller tests the Campbell-Cochrane model using the 25 Fama and French value and size portfolios. This thesis chooses to present his results because he tests the model using the previous mentioned econometric GMM method. The estimation results record that the model is capable of explaining the size premium but fails to explain the value premium. Furthermore, he finds that a low surplus consumption ratio during recessions is able to forecast high future stock returns. Hence the Campbell-Cochrane model accounts for time-varying countercyclical expected returns on stocks.

Indholdsfortegnelse

Liste over figurer	vi
Liste over tabeller	vi
Anvendt notation i afhandlingen	vii
1 Indledning	1
1.1 Problemfelt	1
1.2 Problemformulering	2
1.3 Afhandlingens opbygning	3
2 Teoretisk gennemgang af standardmodellen med power nytte	5
2.1 Antagelser om forbrug og nytte	5
2.2 Prisfastsættelse i standardmodellen	7
2.2.1 Den risikofrie rente	8
2.2.2 Risiko	9
2.2.3 Afkast	11
2.2.4 Power nytte	13
3 Økonometrisk metode	16
3.1 Generalized Method of Moments	16
3.1.1 Fremgangsmåde ved GMM	18
3.1.2 Implementering af estimeringsprincippet	20
3.1.3 Antagelser ved GMM	22
3.1.4 J Test	22
3.1.5 GMM estimering af standardmodellen	23
3.1.6 Heteroskedasticitet og seriel korrelation	25
4 Estimering af standardmodellen	27
4.1 Databeskrivelse	27
4.2 Indledende analyse af statistiske egenskaber	28
4.2.1 Stationaritet	29
4.2.2 Korrelationstest	31
4.2.3 Risikopræmie	33
4.2.4 Heteroskedasticitet & autokorrelation	34

4.3 Opstilling af momentbetingelser	34
4.4 Afhandlingens resultater	35
4.5 Sammenligning med andre resultater	36
4.6 Modelkritik	38
4.6.1 Equity premium puzzle	39
4.6.2 Risk-free rate puzzle	39
4.6.3 Løsninger på puzzles	40
5 Campbell-Cochrane modellen	44
5.1 Campbell-Cochrane modellen	44
5.1.1 Følsomhedsfunktionen	49
5.1.2 Den risikofrie rente	50
5.2 Resultater for Campbell-Cochrane modellen	52
5.2.1 Valg af parametre i Campbell-Cochrane modellen	52
5.2.2 Løsning og resultater for modellen	53
5.2.3 Evaluering af Campbell-Cochrane modellen	57
5.2.4 Delkonklusion	59
5.3 GMM estimering af Campbell-Cochrane modellen	60
5.3.1 Tilføjelse til modellen	61
5.3.2 Opstilling af momentbetingelser	62
5.3.3 Estimeringsresultater	63
5.3.4 Delkonklusion:	68
6 Perspektivering	69
6.1 Historisk tilbageblik på udviklingen af CCAPM modellen	69
6.2 Fremtiden for CCAPM	71
7 Konklusion	73
8. Referencer	76
Appendiks A	80
Appendiks B	83
Appendiks C	86

Liste over figurer

Figur 1: Grafiske plots af forbrugsvækst samt afkast på obligationer og aktier	29
Figur 2: Plots af nye tidsserier	31
Figur 3: Plot af aktieafkast, den risikofri rente & risikopræmie	33
Figur 4: Faktiske vs. forudsagte merafkast.	38
Figur 5: Pris/dividende ratio som funktion af overskudsforbrugsratio	54
Figur 6: Relativ risikoaversion	65
Figur 7: Realiserede gennemsnitlige afkast & modellens forudsagte gennemsnitlige afkast	66
Figur 8: Realiserede gennemsnitlige afkast & modellens forudsagte gennemsnitlige afkast	67

Liste over tabeller

Tabel 1: Dataoverblik	28
Tabel 2: Augmentet Dickey-Fuller test	30
Tabel 3: Augmented Dickey-Fuller test for differensede tidsserier	31
Tabel 4: Korrelationstest	32
Tabel 5: Korrelationstest på de nye tidsserier	32
Tabel 6: Afhandlingens resultater ved GMM estimering	35
Tabel 7: Reestimering af standardmodellen med Veerbeks datasæt	37
Tabel 8: Valg af parametre i Campbell-Cochrane modellen	52
Tabel 9: Lang tidshorisont for afkast regressioner i Campbell-Cochrane modellen	55
Tabel 10: Korrelationstest med diskonteringsfaktor	56
Tabel 11: GMM estimering af Campbell-Cochrane modellen	64

Anvendt notation i afhandlingen

γ Risikoaversion i standardmodellen	$g_T(\theta)$ Stikprøvemomentet
γ Nyttekurveparameter i Campbell-Cochrane modellen	$Q_T(\theta)$ Kriteriefunktion
δ Subjektiv diskonteringsfaktor	$\hat{\theta}$ GMM estimator
ψ Intertemporal substitution	T Stikprøvestørrelse
C Forbrug	J_T J-testen
$U'(C)$ Marginalnytte af forbrug	S Varians-kovarians matricen for g_T
$E[\cdot]$ Forventningsoperatoren	u_t Fejlleddet
p Prisen på et aktiv	X_t Habitniveau
x_{t+1} Payoff på tidspunkt $t + 1$	S_t Overskudsforbrugsratioen
m_{t+1} Stokastisk diskonteringsfaktor	s_t log-overskudsforbrugsratio
R^f Den risikofrie rente	ϕ Persistensparameter
r^f Logaritmen til den risikofri rente	$\bar{s}$ Steady state niveau
R^i Afkast for et risikofyldt aktiv	ν_{t+1} Forbrugsstød
cov Kovarians	$\lambda(s_t)$ Følsomhedsfunktion
D^i Dividendebetaling	g Gennemsnitlig forbrugsvækstrate
$g(\theta_0)$ Momentbetingelse	σ^2 Varians
w_t Vektor af variable i modellen	σ Standardafvigelse
z_t Vektor af instrumentvariable	ρ Korrelation
M Antal momentbetingelser	γ/S_t Risikoaversion i Campbell-Cochrane modellen
K Antal parametre	R^2 Modellens forecastevne
I Identitetsmatrice	α Skæringskoefficient
W_t Vægtmatrice	β Hædningskoefficient
W_T^{OPT} Den optimale vægtmatrice	B Renteparame

1 Indledning

Hvordan priserne på finansielle aktiver bevæger sig er essentielt for mange vigtige beslutninger – ikke blot for professionelle investorer, men også for mange mennesker i deres hverdagsliv. Det enkelte individs valg af opsparing i form af enten kontanter, bankindskud, aktier, fast ejendom eller andre finansielle aktiver afhænger af det enkelte individs risikoaversion, herunder ønsker til det forventede afkast sammenholdt med den påtagede risiko. Investering i spekulative aktiver er samtidig en social aktivitet, hvor mange investorer bruger en stor del af deres fritid på at diskutere investeringer, læse om forskellige investeringer samt udveksle sladder om andres succes eller fiasko (Shiller, 1984, s. 457). Endvidere er prisen på finansielle aktiver (herefter benævnt ”aktivpriser”) af lige så vigtig betydning for makroøkonomien, da de bidrager med afgørende information til nøgleøkonomiske beslutninger såsom fysisk investering og forbrug. På trods af at aktivpriser ofte forekommer at reflektere afgørende værdi, har der historisk været eksempler på det modsatte ved begivenheder ofte refereret til som ”bobler” eller ”crash”. Endvidere kan ændringer i aktivpriser være medvirkende til finansielle kriser, hvis omfang potentielt kan være skadelig for hele økonomien samlet set, jævnfør den seneste recession, som havde sin begyndelse i USA. Givet den vigtige rolle som aktivpriser ofte udgør for beslutningstagere, opstår der naturligt et spørgsmål om, hvad der egentligt kan udsiges om disses determinanter. Det er dermed interessant at undersøge, hvilket adfærdsmønster der fremkommer, når det undersøges, hvordan forventede afkast varierer over tid og på tværs af forskellige aktiver.

1.1 Problemfelt

Cochrane (2007) fremhæver i *”Financial Markets and the Real Economy”* den indbyrdes afhængighed mellem det finansielle område og makroøkonomien. Ifølge Cochrane (2007, s. 242) vil makroøkonomien uden inddragelse af det finansielle område ikke være i stand til forklare simple forhold mellem opsparing og investering eller forklare husholdningers beslutningstagning angående, hvor meget, der skal opspares og hvor meget, der skal forbruges, hvor finansielle markeder tillader forskydning af forbrug i mellem forskellige stadier af tid og tilstande. En adskillelse af de to områder vil dermed svække forståelsen af den sande markedsdynamik. Kombinationen af det finansielle og makroøkonomiske område har derfor de seneste årtier opnået særlig interesse inden for prisfastsættelse af finansielle aktiver.

1.2 Problemformulering

Ovenstående problemfelt leder hen imod følgende problemformulering for nærværende afhandling:

”Hvilken implikation har forbrugsvækst for afkast på finansielle aktiver i USA?”

For at besvare ovenstående problemformulering fordrer en undersøgelse af modellen *”Consumption-based Capital Asset Pricing Model med power nytte (standardmodellen)”*. Som anført i afsnit 1.1 er relationen mellem det finansielle område og det makroøkonomiske område helt essentielt, når det kommer til forståelse af sand markedsdynamik. Begrundelsen for netop at vælge den forbrugsbaserede Capital Asset Pricing model (CCAPM) med power nytte er, at modellen forbinder afkast på finansielle aktiver til makroøkonomien. Undersøgelse af ovennævnte forbrugsbaserede model fordrer endvidere en præcisering og uddybning af nærværende afhandlings metodiske tilgang til empiriske test af førnævnte model. Metoden *”Generalized Method of Moments”* er tidligere blevet foreslået af Hansen (1982), som en økonometrisk måde, hvorpå CCAPM kan estimeres og underkastes derfor i nærværende afhandling nærmere analyse. Ydermere undersøges, hvorledes den teoretiske model kan påføres det empiriske grundlag, og hvilke resultater, der fremkommer ved at estimere den empiriske model på det valgte datasæt. Afslutningsvis foretages en undersøgelse af, hvorledes den forbrugsbaserede model med power nytte kan videreudvikles og optimeres. Afledt af førnævnte undersøgelse af optimeringspotentiale, vil det ligeledes blive diskuteret, hvad fremtiden bringer for den forbrugsbaserede model i kontekst af afhandlingens analyse.

Med ovenstående In Mente afdækkes problemformuleringen således primært ved anvendelse af en forbrugsbaseret Capital Asset Pricing model, hvis antagelser om forbrug og nytte til at forecaste afkast på finansielle aktiver indgår som et centralt led i besvarelsen af nærværende afhandlings problemformulering. Den forbrugsbaserede model søger at forklare, hvad der driver systematisk risiko, hvilket skal forstås som de makroøkonomiske faktorer og dynamikker, der forklarer markedsrisikopræmien. Forklaringen bygger på, at folks velbefindende afhænger af deres forbrugsniveau i gennem livet. Ud fra det finansielle marked kan individer beslutte, hvor meget, der skal forbruges nu, og hvor meget, der skal spares op i form af investering i finansielle aktiver, og der-

med udskyde forbruget til et senere tidspunkt. Dermed bidrager finansielle markeder med muligheden for at forskyde forbrug i mellem forskellige tidsperioder samt forskydning i form af forskellige økonomiske stadier såsom perioder med høj økonomisk vækst kontra perioder med recession.

Med ovenstående In Mente påvirkes udbud og efterspørgsel på finansielle aktiver således ud fra individernes præferencer, hvad angår forskydning af forbrug i mellem forskellige tidsperioder og stadier i økonomien. Modellen fremsætter, at aktiver bør give en høj præmie, hvis afkast heraf allerede er lavt i dårlige tider (Cochrane, 2007, s. 258). Implikationen for prisfastsættelse af aktiver er, at aktiver, der klarer sig godt i perioder med lavt forbrug er højt efterspurgt, hvilket driver priserne op, og dermed mindskes det forventede afkast. Nærværende afhandling anvender derfor forbrug som værende en indikator for henholdsvis gode samt dårlige tilstande i økonomien. Der afgrænses i afhandlingen til udelukkende at fokusere på data fra USA i perioden 1950 til 2008. Modellen bliver påført data fra USA af den årsag, at der tidligere er opdaget interessante fund ved, at anvende modellen på netop data fra USA. Dette vil belyses nærmere i afhandlingens analyse.

1.3 Afhandlingens opbygning

Afhandlingen er opbygget således, at der i ovenstående afsnit 1 er blevet givet en kort introduktion til det valgte emne samt fremsat en problemformulering og problemafgrænsning for afhandlingen. Dernæst vil der i afsnit 2 blive behandlet en teoretisk gennemgang af standardmodellen med power nytte. I afhandlingens afsnit 3 beskrives den valgte økonometriske metode med fokus på at påføre den valgte metode på CCAP-modellen med power nytte. I afsnit 4 vil det valgte datamateriale blive præsenteret. Heraf vil der blive opstillet relevante momentbetingelser ud fra det teoretiske grundlag. Yderligere vil der i afsnit 4 udføres relevante økonometriske test for at teste, hvorvidt antagelserne for GMM metoden er opfyldt. Hvis det er tilfældet, at antagelserne ikke er opfyldt, vil det valgte datamateriale blive transformeret således, at det vil opfylde de krav, der er opstillet for metoden. Dernæst vil modellen ligeledes i afsnit 4 blive estimeret og resultaterne vil blive analyseret. Analysens resultater vil blive sammenlignet med andres empiriske resultater, der er fremkommet ved ligeledes at estimere standardmodellen med power nytte, men blot ved at anvende et andet datamateriale. Der vil slutteligt i afsnit 4 blive givet en kritisk vurdering af modellen og i relevans heraf vil equity premium puzzle og risk-free rate puzzle blive præsenteret. Afledt af ovenstående puzzles vil der blive præsenteret udvidelser af standardmodellen som løsningsforslag for de nævnte puzzles.

I afhandlingens afsnit 5 vil Campbell-Cochrane modellen med habit formation blive præsenteret som et løsningsforslag på de såkaldte puzzles. Modellen bliver ikke estimeret i afhandlingen, men i stedet afgrænses det til, at der tages udgangspunkt i andres empiriske resultater, og disse vil blive analyseret og dernæst sammenlignet med resultaterne fra estimeringen af standardmodellen i afsnit 4. I Afsnit 5 præsenteres både Campbells og Cochranes egne resultater for modellen, samt Stig V. Møller, som estimerer Campbell-Cochrane modellen ved at anvende GMM metoden, som er blevet præsenteret i afsnit 3. I afsnit 6 vil udviklingen af feltet for prisfastsættelse af finansielle aktiver i kontekst med forbrugsvækst blive diskuteret, hvor der blandt andet fokuseres på, hvad man har lært ved at studere området og hvad næste skridt er for forskningsområdet. Slutteligt vil der i afsnit 7 konkluderes, således afhandlingens problemformulering besvares ud fra analysens resultater, der er fremkommet fra de forgående afsnit.

2 Teoretisk gennemgang af standardmodellen med power nytte

I dette afsnit præsenteres den teoretiske gennemgang af standardudgaven af The Consumption-based Capital Asset Pricing model (CCAPM). Denne model er en udvidelse af CAPM, som giver indsigt i en forståelse af forskellige afkast på forskellige aktiver. I dette afsnit udledes standardmodellen dermed, hvor der senere i afhandlingen vil blive diskuteret mulighederne for en udvidelse af de forskellige antagelser i netop denne model i forventning om en statistisk forbedring af modellen. CCAPM prisfastsætter finansielle aktiver under hensyntagen til forbrug, og det er dermed en model, som relaterer den finansielle sektor til realøkonomien. Den forbrugsbaserede model med power nytte vil dermed fremadrettet i afhandlingen blive benævnt som standardmodellen, hvor der senere i afhandlingen vil blive introduceret udvidelser af standardmodellen.

2.1 Antagelser om forbrug og nytte

Der introduceres en repræsentativ agent, som aggregeres ud fra investorer i økonomien, og som antages at opnå nytte fra det aggregerede forbrugsniveau i økonomien (Cambell et. all., 1997, s.292). Det vil dermed fremadrettet i afhandlingen blot skrives *investor* frem for investorer, da denne investor repræsenterer alle investorer i økonomien. Modellen fremstilles dermed ud fra antagelser om nytte og forbrug, hvor den repræsentative investor maksimerer sin forventede fremtidige nytte. Ved at anvende en model med en repræsentativ investor er alle investorer homogene og træffer de samme beslutninger, og der opnås dermed en mere simpel model. *Marginalnytte* introduceres som værende et mål for, hvordan man har det. Alternativet til forbrug i dag er, at man i stedet kan vælge at investere i finansielle aktiver. Det marginale tab af nytte ved at forbruge lidt mindre i dag, og i stedet investere skal være lig med den ekstra marginalnytte, som opnås ved at sælge investeringen på et tidspunkt i fremtiden, og dermed anvende afkastet fra investeringen som forbrug (Cochrane, 2000, s. 13).

Givet, at aktiver på nogle tidspunkter har et højt payoff, i mens det på andre tidspunkter har et lavt payoff, er det attraktivt med aktiver, som har et højt payoff på tidspunkter, hvor man har en høj marginalnytte, og attraktivt med aktiver, hvor man opnår et lavt payoff i tider, hvor man har en lav marginalnytte (Cochrane, 2000, s. 13). Der ønskes et forbrug, som er stabilt over tid. Endvidere antages det, at renten er relateret til det gennemsnitlige fremtidige niveau af marginalnytte og dermed til det forventede forbrugsniveau. En høj rente associeres med en forventning om stigende forbrug, da det i tider med høje renter giver mening at spare op, købe obligationer og dermed væl-

ge at forbruge på et senere tidspunkt. Nedenstående ligning udtrykker den nytte investor opnår ved nutidigt samt fremtidigt forbrug:

$$U(C_t, C_{t+1}) = U(C_t) + \delta E_t[U(C_{t+1})]$$

hvor C_t betegner forbruget på tidspunkt t og C_{t+1} betegner forbruget på tidspunkt $t + 1$. Dermed betegner $U(C_t)$ og $U(C_{t+1})$ den nytte, der opnås ved nutidigt forbrug samt forbrug på et senere tidspunkt. Der anvendes en power nyttefunktion:

$$U(C_t) = \frac{1}{1-\gamma} C_t^{1-\gamma}$$

Nyttefunktionen fanger det fundamentale ønske om mere forbrug. Forbruget C_{t+1} er stokastisk, da investor ikke ved, hvad sin formue vil være i morgen, og dermed ikke ved, hvor meget han vil vælge at forbruge i fremtiden. Den periodiske nyttefunktion $U(\cdot)$ er stigende, hvilket reflekterer et ønske om mere forbrug, og den er konkav, hvilket reflekterer faldende marginalnytter ved yderligere forbrug (Cochrane, 2000, s. 14). γ angiver investors risikoaversion givet, at investor ønsker at udjævne forbruget over tid. Jo højere denne koefficient er, jo mere risikoavers vil investor være. Den valgte nyttefunktion vil blive beskrevet mere detaljeret i afsnit 2.2.3. δ ($0 < \delta \leq 1$) betegner den subjektive diskonteringsfaktor, og ved at diskontere fremtiden med δ indfanger man investors utålmodighed. Den subjektive diskonteringsfaktor vil dermed altid være positiv, idet det antages, at marginalnyttens på forbrug tillige altid vil være positiv, da den subjektive diskonteringsfaktor afhænger af forholdet mellem den marginale nytte på henholdsvis tidspunkt t og tidspunkt $t + 1$.

Der antages, at investor frit kan sælge og købe så meget af payoff x_{t+1} , som der ønskes til en pris p_t . Ved at betegne det oprindelige forbrugsniveau som e , hvilket svarer til, at investor ikke har købt nogle aktiver, og ved at betegne mængden af aktiver, som investor vælger at købe som ξ , kan man udlede, hvor meget investor vil købe eller sælge:

$$\max_{\{\xi\}} U(C_t) + E_t \delta U(C_{t+1}) \text{ s. t.}$$

$$C_t = e_t - p_t \xi$$

$$C_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \xi$$

Ved at substituere restriktionerne ind i den objektive funktion, og dermed finde den afledte med hensyn til ξ , og sætte den lig nul, findes førsteordensbetingelsen, også kaldet for eulerligningen, for det optimale forbrugsniveau samt optimale porteføljevalg:

$$p_t U'(C_t) = E_t [\delta U'(C_{t+1}) x_{t+1}] \quad (1)$$

Indtil førsteordensbetingelsen holder vil investor købe enten mere eller mindre af aktivet. $p_t U'(C_t)$ udtrykker et tab i nytte, såfremt investor vælger at købe en ekstra enhed af aktivet. $E_t [\delta U'(C_{t+1}) x_{t+1}]$ betegner stigningen i (diskonteret, forventet) nytte som investor opnår fra det ekstra payoff på tidspunkt $t+1$, som opnås ved at udskyde sit forbrug på tidspunkt t . Investor bliver ved med at købe eller sælge aktivet, indtil det marginale nyttetab er lig med den marginale nyttegevinst (Cochrane, 2000, s. 15).

2.2 Prisfastsættelse i standardmodellen

For at finde den forventede pris divideres der med den marginale nytte på tidspunkt t i funktionen for det optimale forbrugsniveau, og dermed isoleres prisen:

$$p_t = E_t \left[\delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} x_{t+1} \right] \quad (2)$$

Ovenstående ligning (2) er den centrale prisfastsættelsesformel for aktiver. Givet payoff x_{t+1} og givet investors forbrugsvalg C_t, C_{t+1} fortæller udtrykket, hvilken markedspris p_t , som kan forventes (Cochrane, 2000, s. 15). Prisen bliver dermed udtrykt ved den forventede værdi af et diskonteret payoff. Dette er givet ved den stokastiske diskonteringsfaktor m_{t+1} :

$$m_{t+1} = \delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \quad (3)$$

Den stokastiske diskonteringsfaktor signalerer det diskonterede forhold, der er i mellem den marginale nytte på tidspunkt t og på tidspunkt $t + 1$, hvor den benyttede diskonteringsfaktor er den tidligere defineret subjektive diskonteringsfaktor δ . m_{t+1} kaldes også for den intertemporale marginale substitutionsrate, da det er den rate, hvor investor er villig til at substituere forbrug på tidspunkt $t + 1$ for i stedet at forbruge på tidspunkt t (Cochrane, 2000, s. 17). Ved at substituere den stokastiske diskonteringsfaktor, jævnfør ligning (3), ind i den centrale prisfastsættelsesformel, jævnfør ligning (2), kan prisformlen udtrykkes således, at prisen på et aktiv på tidspunkt t bestemmes som værende den forventede værdi af den stokastiske diskonteringsfaktor multipliceret med payoff (Cochrane, 2000, s. 16):

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}) \quad (4)$$

2.2.1 Den risikofrie rente

Nedenstående udtryk viser logaritmen til den risikofrie rente, og kan anvendes til at bestemme de faktorer, der driver den risikofrie rente (Campbell, et. al., 1997, s. 306). Følgende udtryk er blevet udledt i appendiks A:

$$r_{f,t+1} = -\log(\delta) + \gamma E_t[\Delta c_{t+1}] - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2} \quad (5)$$

I ovenstående ligning (5) angiver små bogstaver, at logaritmen er taget til variablen. Hvis der kigges nærmere på det første led af ligningen, bemærkes det, at når den subjektive diskonteringsfaktor er lav, vil det medføre en høj rente. Årsagen hertil er, at når den subjektive diskonteringsfaktor er lav, er det ensbetydende med, at investor har en høj tidspræference. Når investor har en høj tidspræference, er der behov for en højere rente, hvis investor skal have incitament til at opspare frem for at forbruge det hele i dag. Andet led i ligningen viser, at en høj forventet forbrugsvækst vil medføre en høj rente. Investor ønsker en forbrugsudvikling, som er jævn, hvilket resulterer i, at investor vil flytte fremtidig forbrug til i dag ved at optage lån. Dette medfører, at låneefterspørgs-

len vil stige, og dermed ligeledes presse renten op. Risikoaversionen γ bestemmer, hvor følsom renten vil være over for forbrugsændringer. I standardmodellen vil en høj risikoaversion medføre en lav elasticitet af den intertemporal substitution, som betegnes ved ψ . Investor er dermed modvillig over for, at renteændringer skal påvirke sit forbrugsvalg, når risikoaversionen er høj. Derfor kræver det en meget høj rente, hvis det skal påvirke investors forbrugsvalg. Det sidste led i ligningen skal fortolkes som værende sikkerhedsopsparing. Dette led antyder, at når variansen for forbruget er højt, vil det medføre, at renten er lav. En høj varians for forbruget er ensbetydende med, at der er usikkerhed omkring forbruget, hvilket vil medføre, at investor er mere tilbøjelig til at opspare, hvilket reducerer renten. Størrelsen på risikoaversionen vil medføre en forstærkning af sikkerhedsopsparingen (Campbell, et. al., 1997, s. 307).

2.2.2 Risiko

Hvis, der ikke er nogen form for usikkerhed for investor ved at investere i aktivet, kan diskonteringsfaktoren m_{t+1} udtrykkes ved at anvende den risikofrie rente R^f :

$$p_t = \frac{1}{R^f} x_{t+1} \quad (6)$$

Dette udtryk angiver, at prisen er lig det tilbagediskonterede payoff, som er diskonteret med den risikofrie rente, hvor diskonteringsfaktoren udtrykkes som $\frac{1}{R^f}$. Ved at anvende den risikofrie rente tilfalder hele payoff for investeringen investor (Cochrane, 2000, s. 16). Hvis, der i stedet er usikkerhed om, hvorvidt dele af payoff tilfalder investor, anvendes der i stedet en risikojusteret diskonteringsfaktor, som er udtrykt ved $1/R^i$. Mere risikobetonede aktiver sælger til en lavere pris end tilsvarende risikofrie aktiver, så de prisfastsættes derfor ved at anvende en risikojusteret diskonteringsfaktor:

$$p_t^i = \frac{1}{R^i} E_t(x_{t+1}^i) \quad (7)$$

Her betegner i , at ethvert risikofyldt aktiv i skal diskonteres med en aktivspecifikt risikojusteret diskonteringsfaktor $1/R^i$. Den risikofyldte rente er dermed forskellig alt efter, hvilken risiko, der

er knyttet til aktivet i , og som anvendes til at prisfastsætte. Der er dermed forskellige risikokorrek-
tioner, som fremkommer ved forskellige aktiver. Ligning (4) er derfor en generel betegnelse, som
omfatter alle disse risikokorrekationer ved at danne en enkelt diskonteringsfaktor, som er den
samme for hvert aktiv, og tage forventningen hertil (Cochrane, 2000, s. 17). Risikokorrekationen
kan defineres som kovariansen i mellem payoff og den stokastiske diskonteringsfaktor. Denne
kovarians er dermed givet ved:

$$\text{cov}(m, x) = E(mx) - E(m)E(x) \quad (8)$$

Da investor ønsker at have et jævnt forbrug over tid, og derfor ønsker aktiver, som giver et højt
afkast i tider med et lavt forbrugsniveau, anvendes kovariansen som risikokorrekation. Dermed
antages det, at hvis kovariansen i mellem payoff og den stokastiske diskonteringsfaktor er negativ,
vil dette være ensbetydende med, at aktiverne betragtes som værende risikofyldte (Cochrane,
2000, s. 22). Ved at påføre definitionen for kovariansen jævnfør ligning (8), og anvende prisform-
len på reduceret form, $p = E(mx)$, kan ligning (4) udtrykkes således:

$$p = E(m)E(x) + \text{cov}(m, x) \quad (9)$$

Ved at anvende definitionen for den risikofrie rente $R^f = 1/E(m)$ og indsætte denne i ligning (9)
kan prisen i stedet udtrykkes således:

$$p = \frac{E(x)}{R^f} + \text{cov}(m, x) \quad (10)$$

Prisen på et risikofyldt aktiv afhænger nu af to dele. Den første del af ligningen $\frac{E(x)}{R^f}$ er aktivets
pris i en risikoneutral verden, og den anden del giver risikokorrekationen $\text{cov}(m, x)$. Hvis aktivets
payoff kovarierer positivt med den stokastiske diskonteringsfaktor, har den en højere pris samt et
lavere payoff, hvor det omvendte er gældende for et aktiv, hvis payoff kovarierer negativ med den
stokastiske diskonteringsfaktor. Sidstnævnte er givet som godtgørelse for den højere risiko, som

er forbundet med aktivet (Cochrane, 2000, s. 23). For at give en bedre forståelse af risikokorrektionen substitueres definitionen for m , udtryk ved forbrug, ind i prisformel (10), og dermed fås følgende udtryk:

$$p = \frac{E(x)}{R^f} + \frac{\text{cov}[\delta U'(C_{t+1}), x_{t+1}]}{U'(C_t)} \quad (11)$$

Ud fra ovenstående udtryk ses det, at marginalnyttens $U'(C)$ falder, når forbruget C stiger. Dette forklares ud fra, at der ved forbrug er aftagende marginalnytte, og, at der derfor i perioder med høj forbrugsvækst, vil være lav marginalnytte. På den måde vil aktivets pris mindske, når payoff kovarierer positivt med forbrug, og omvendt vil prisen på et aktiv stige, hvis aktivets payoff kovarierer negativt med forbrug. Dette skyldes, at investorer ikke bryder sig om usikkerhed, når det kommer til forbrug (Cochrane, 2000, s. 23). Hvis man har et aktiv, hvor payoff kovarierer positivt med forbrug, og dermed har et aktiv, som betaler godt, når man allerede er i en position, hvor forbrugsvæksten er høj, og betaler dårligt, når man er i en position, hvor man i forvejen har en lav forbrugsvækst, vil dette aktiv medføre, at ens forbrugsstrøm bliver mere volatil. Investor vil derfor kræve en lav pris, for at skulle købe et sådan aktiv, da aktivet dermed anses for at være mere risikofyldt. Hvis man i stedet køber et aktiv, hvis payoff kovarierer negativt med forbrug, vil det udjævne ens forbrug, og aktivet er dermed mere værdifuldt end dets forventede payoff indikerer (Cochrane, 2000, s. 23).

2.2.3 Afkast

Hvis man i stedet ser nærmere på afkast, så kan ligning (4) ligeledes udtrykkes i termer af afkast på følgende måde:

$$1 = E_t(m_{t+1}R_{t+1}^i)$$

hvor afkastet er givet ved:

$$R_{t+1}^i = \frac{(P_{t+1}^i + D_{t+1}^i)}{P_t^i}$$

Afkastet betegnes som R^i for at skelne i mellem et aktivs bevægelse R^i fra et andet aktivs bevægelse R^j . Ovenstående ligning angiver, at den forventede værdi af den stokastiske diskonteringsfaktor multipliceret med afkastet er lig 1. Selvom forventet afkast kan variere over tid blandt forskellige aktiver, og dermed have forskellige risici, vil det forventede diskonterede afkast altså altid være det samme, nemlig 1. Den stokastiske diskonteringsfaktor er universel, hvilket er ensbetydende med, at den kan anvendes til at prisfastsætte alle aktiver. Bruttoafkastet for aktiv i på tidspunkt $t + 1$ er givet ved den pris, man får, når man sælger aktivet på tidspunkt $t+1$ plus de dividender, man får på tidspunkt $t + 1$, hvor det hele divideres med den pris, man selv gav for aktivet på tidspunkt t . Ved at påføre betegnelsen for kovariansen, jævnfør ligning (9), opnås følgende udtryk for afkastet:

$$1 = E(m)E(R^i) + cov(m, R^i) \quad (12)$$

Endvidere, hvis den risikofrie rente $R^f = \frac{1}{E(m)}$, påføres udtrykket fås:

$$E(R^i) - R^f = -R^f cov(m, R^i) \quad (13)$$

Hvis man i stedet påfører betegnelsen for den stokastiske diskonteringsfaktor udtrykt ved forbrug, jævnfør ligning (3), kan ovenstående ligning omskrives til følgende udtryk:

$$E(R)^i - R^f = -\frac{cov[U'(C_{t+1}), R_{t+1}^i]}{E[U'(C_{t+1})]} \quad (14)$$

Aktiver har et forventet afkast, som består af en risikofri del, og som består af en risikokorrektion. Det samme, som var gældende ved payoff, gælder dermed også ved afkast; Aktiver, hvis afkast kovarierer positivt med forbrug, gør forbruget mere volatil, og må dermed give et højere forventet afkast, for at få investorer til at investere i netop disse aktiver. Ligning (14), specificerer det merafkast, som tilfalder investor ved at investere i et risikofyldt aktiv frem for et risikofri aktiv. Risiko vil få afkastet til at variere, alt efter aktivets evne til at udjævne forbruget, hvilket er målt

ved kovariansen (Cochrane, 2000, s. 24). I afhandlingen skelnes, der mellem begrebet merafkast og risikopræmie. Merafkast vil anvendes, når der generelt er tale om det merafkast, investor får ved at investere i forskellige grupper af aktiver såsom forskellige former for obligationer og aktier frem for det risikofrie aktiv, hvilket senere vil blive anvendt i analysen jævnfør afsnit 4. Begrebet risikopræmie vil udelukkende blive anvendt som det merafkast, der tilfalder investor ved at investere i aktier, og risikopræmien er dermed givet ved aktieafkast fratrasket det risikofrie afkast.

2.2.4 Power nytte

For, at der kan finde en prisfastsættelse sted i standardmodellen, skal der defineres en nyttefunktion. I den netop gennemgåede standardmodel anvendes der, som tidligere nævnt jævnfør afsnit 2.1 power nytte, som værende den anvendte nyttefunktion. Ved at anvende formelen for power nytte:

$$U(C_t) = \frac{1}{1-\gamma} C_t^{1-\gamma}$$

og tage den afledte med hensyn til forbrug findes den marginale nytte $U'(C_t) = C_t^{-\gamma}$. Ved at substituere udtrykket ind i ligning (3) kan den stokastiske diskonteringsfaktor i stedet udtrykkes således:

$$m_{t+1} = \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}$$

Ved at indsætte det nye udtryk, for den stokastiske diskonteringsfaktor, i prisformlen udtrykt ved afkastet fås følgende udtryk:

$$1 = E_t \left[\delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} R_{t+1}^i \right] \quad (15)$$

Den valgte type nyttefunktion er separabel over tid, hvilket er ensbetydende med, at forbrug i dag er uafhængig af tidligere perioders forbrug. Når γ har positive værdier vil det være ensbetydende med, at nyttefunktionen er stigende men med en aftagende stigningstakt, og den er dermed en konkav nyttefunktion. Når dette er tilfældet, vil investor være risikoavers. Hvis γ i stedet har en værdi på nul, vil nyttefunktionen blive lineær, og dermed er investor i stedet risikoneutral. Det sidste tilfælde er, hvor nyttefunktionen har negative værdier af γ , og nyttefunktionen bliver dermed konveks, og investor er en risikosøgende investor. I litteraturen er der bred enighed om, at investor har den førstnævnte konkave nyttefunktion, hvor han dermed vil være risikoavers. Denne nyttefunktion reflekterer investors ønske om et højere forbrug, men han har aftagende marginalnytte af yderligere forbrug. Risikoaversionen er ensbetydende med, at investor ønsker et sikkert forbrug, og jo højere risikoaversionen er, jo stærkere er ønsket om et sikkert forbrug. Ud fra Arrow-Pratt definitionen skelnes der mellem absolut risikoaversion ARA og relativ risikoaversion RRA (Munk, 2013, s. 112):

$$ARA = -\frac{U''(C)}{U'(C)} \quad (16)$$

$$RRA = -C \frac{U''(C)}{U'(C)} = -C \cdot ARA \quad (17)$$

Absolut risikoaversion udtrykker risikoaversion over for henholdsvis absolutte beløbsændringer, hvor relativ risikoaversion i stedet udtrykker risikoaversionen over for procentvise ændringer i forbruget. Ud fra ligning (16) kan den absolutte risikoaversion fastsættes til nedenstående:

$$-\frac{-\gamma C_t^{-(1+\gamma)}}{C_t^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{C_t} \quad (18)$$

Ligeledes kan den relative risikoaversion ud fra ligning (17) udtrykkes som:

$$-C_t \frac{-\gamma C_t^{-(1+\gamma)}}{C_t^{-\gamma}} = \gamma \quad (19)$$

Ved aftagende absolut risikoaversion vil investor ved et stigende forbrugsniveau være mindre risikoavers over for ændringer i forbruget. Såfremt ovenstående er tilfældet vil investor være mere villig til at investere mere i risikofyldte aktiver i takt med en formue stigning. Derimod vil tilfældet med konstant relativ risikoaversion være ensbetydende med, at investors risikoaversion vil være konstant over for procentvise ændringer i forbrugsniveauet. Dermed vil investor ved sammensætning af sin portefølje ønske at holde en fast andel af risikofyldte aktiver (Munk, 2013, s. 113). I resten af afhandlingen vil γ i standardmodellen udtrykkes som risikoaversion i stedet for konstant relativ risikoaversion.

En ulempe ved netop denne type nyttefunktion er, at risikoaversionen γ ligeledes bestemmer elasticiteten af den intertemporal substitution ψ , som udtrykker investors villighed til at flytte forbrug over tid. Det forholder sig således, at risikoaversionen γ og elasticiteten af den intertemporale substitution er hinandens reciprokke: $\psi = 1/\gamma$. Dermed vil en høj risikoaversion medføre en lav elasticitet af den intertemporale substitution, da investor dermed ønsker at have det samme forbrugsniveau over tid og ligeledes i forskellige økonomiske tilstande (Campbell, et. al., 1997, s. 306).

3 Økonometrisk metode

I dette afsnit introduceres Generalized Method of Moments (GMM), som er en økonometrisk metode, der anvendes til at estimere statistiske modeller med. Metoden er udarbejdet af Lars Peter Hansen, som introducerede GMM i hans research Paper i 1982. Ligeledes introducerede Hansen og Singleton i 1982, hvordan GMM kan anvendes med udgangspunkt i den forbrugsbaserede model. I 2013 vandt Hansen sammen med Robert Schiller og Eugene Fama en Nobelpris for deres bidrag til empiriske analyser af prisfastsættelse af aktiver jævnfør *"The Economic Sciences Prize Committee (2013)"*. Nedenstående afsnit vil bestå af en teoretisk gennemgang af GMM, en opstilling af antagelser, der skal være opfyldt ved den anvendte metode samt en beskrivelse af J_T -testen, som er en test, der anvendes til at vurdere, hvor god en model er. Slutteligt vil GMM proceduren påføres den valgte forbrugsbaserede model.

3.1 Generalized Method of Moments

GMM estimering starter typisk med en økonomisk teori, og data anvendes til at producere estimater af modelparametrene. I GMM estimeres ens valgte modelparametre med estimatoren θ ud fra nogle opstillede momentbetingelser. Estimering er gjort under minimale statistiske antagelser, og der gives ofte kun lidt opmærksomhed til modellens generelle fit (Nielsen, 2005, s. 3). En momentbetingelse er et udsagn, der involverer det data og de parametre, som har interesse, og disse betingelser er i termer af forventningen (momenter), som er antydnet af modellen. Disse momentbetingelser bør være nok til at identificere de ukendte parametre i modellen. Der kan anvendes nedenstående generelle udtryk for momentbetingelsen:

$$g(\theta_0) = E[f(w_t, z_t, \theta_0)] = 0 \quad (20)$$

θ er en $K \times 1$ vektor af parametre med den sande værdi θ_0 . $f(\cdot)$ er en M dimensional vektor af potentielle ikke lineære funktioner. w_t er en vektor af de variable, der indgår i modellen, og z_t er en vektor af instrumentvariable (Nielsen, 2005, s. 3). Når der vælges instrumentvariable, er formålet at vælge nogle, som opfanger så meget information som muligt. For et givent sæt af observationer w_t og z_t er det ikke muligt at beregne forventningen, og man anvender i stedet stikprøve gennemsnittet, hvilket er tilsvarende stikprøvemomentet, som defineres på følgende måde:

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(w_t, z_t, \theta) \quad (21)$$

Man kan udlede en estimator, $\hat{\theta}$, som er løsningen til $g_T(\theta) = 0$. Hvis det var muligt, ville man vælge θ således, at ethvert element af $g_T(\theta) = 0$, hvilket i tilfældet med CCAPM, ville være ensbetydende med, at modellen prisfastsætter aktiver perfekt i stikprøven (Cochrane, 2000, s. 178). Generelt er dette tilfældet, hvis $M = K$, hvilket er ensbetydende med, at der er præcis ligeså mange momentbetingelser, som der er parametre, og dermed siges det, at ligningssystemet er præcist identificeret, og estimatoren refereres til som "Method of Moments" (MM) estimatoren (Nielsen, 2005, s. 4). Men ofte er der flere momentbetingelser end der er parametre. Tilfældet, hvor $M > K$, refereres til som over-identificering, og estimatoren betegnes som GMM estimatoren. I dette tilfælde er der dermed flere momentbetingelser end der er parametre, og der er ingen løsning til $g_T(\theta) = 0$ generelt, og man forsøger i stedet at minimere afstanden fra vektoren $g_T(\theta)$ til 0 (Nielsen, 2005, s. 6). Dermed estimeres parametervektoren θ ved at minimere kriteriefunktionen defineret på følgende måde:

$$Q_T(\theta) = g_T(\theta)' W_T g_T(\theta) \quad (22)$$

hvor W_T er en vægtmatrice, som tilføjer vægt til de individuelle momentbetingelser. Man kan tænke på W_T som værende reflekterende for vigtigheden af de forskellige momentbetingelser (Nielsen, 2005, s. 6). Vægtmatricen fortæller dermed, hvor meget fokus, som skal gives til hvert moment. I normaltilfældet anvendes identitetsmatricen $W = 1$, da GMM behandler alle aktiver symmetrisk, og målet er, at minimere summen af de kvadrerede prisfejl (Cochrane, 2000, s. 181). GMM estimatoren afhænger af den valgte vægtmatrice:

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T) = \arg \min_{\theta} \{g_T(\theta)' W_T g_T(\theta)\} \quad (23)$$

Da ligning (22) er kvadratisk er det ensbetydende med, at $Q_T(\theta) \geq 0$. I eksemplet med det præcist identificeret tilfælde, hvor vægtmatricen er overflødig og estimatoren $\hat{\theta}_{MM}$ er unik, udskiftes ovenstående $\geq$ med et lighedstegn. For at opnå en konsistent GMM estimator påføres "store tals

lov”, som antager, at data skal være således, at store tals lov gælder for $f(w_t, z_t, \theta)$, hvilket vil sige, at $T^{-1} \sum_{t=1}^T f(w_t, z_t, \theta) \rightarrow E[f(w_t, z_t, \theta)]$ for $T \rightarrow \infty$. Ovenstående er en restriktion for adfærden for det valgte data. For i.i.d data er antagelsen opfyldt, hvor der ved tidsserier kræves stationaritet og svag korrelation kendt fra OLS regression. Dette vil blive uddybet i afsnit 3.1.3. Hvis data overholder ovenstående antagelser, og momentbetingelserne er korrekte, således at, $g(\theta_0) = 0$, gælder det, at $\hat{\theta}_{GMM}(W_T) \rightarrow \theta_0$ når $T \rightarrow \infty$ for alle positive semi-definite W_T . Forskellige vægtmatricer giver forskellige estimators, og ovenstående udtrykker, at selvom, de kan være forskellige for et givent datasæt, er de alle konsistente. Intuition er følgende, at, hvis store tals lov er gældende for w_t, z_t, θ_0 , så vil stikprøvemomentet, $g_T(\theta)$, konvergere hen i mod populationsmomentet, $g(\theta)$. Da $\hat{\theta}_{GMM}(W_T)$ gør, at $g_T(\theta)$ bevæger sig så tæt på 0 som muligt, vil det være en konsistent estimator for løsningen til $g(\theta) = 0$. Kravet er, at W_T er positivt definite, således at der påføres en positiv og ikke 0 vægt på alle momentbetingelserne. Hvis ovenstående ikke er tilfældet risikeres det, at vigtig information mistes.

3.1.1 Fremgangsmåde ved GMM

Dette afsnit har til formål at forklare, hvorledes den efficiente GMM estimator kan findes ud fra et givent datasæt. For en positiv definite vægtmatrice W , er den efficiente GMM estimator, som er asymptotisk normalfordelt givet ved:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{GMM} - \theta_0) \rightarrow N(0, V) \quad (24)$$

hvor den asymptotiske varians er givet ved:

$$V = (D'WD)^{-1}D'WSWD(D'WD)^{-1} \quad (25)$$

D betegner den forventede værdi for $M \times K$ matrixen for den førsteafledte for momenterne:

$$D = E \left[\frac{\partial f(w_t, z_t, \theta)}{\partial \theta'} \right]$$

Den afledte af stikprøvemomentet kan betegnes på følgende måde:

$$D_T = \frac{\partial g_T(\theta)}{\partial \theta'} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial f(w_t, z_t, \theta)}{\partial \theta'}$$

og $D = D_T$ idet $T \rightarrow \infty$

Ud fra ovenstående følger det, at variansen for estimatoren afhænger af vægtmatricen, W_T . Nogle vægtmatricer giver præcise estimators, hvor andre vægtmatricer producerer dårlige estimators med stor varians. Det er derfor relevant at udvælge den vægtmatrice, W_T^{OPT} , som producerer den estimator, som har den mindste mulige asymptotiske varians. Den estimator vil fremadrettet benævnes den optimale GMM estimator. Momenter med lille varians er mere informative for parametrene og bør derfor have større vægt end momenter med høj varians og som derfor bør have en mindre vægt tildelt. Hansen (1982) fandt, at den optimale vægtmatrice, W_T^{OPT} , har den egenskab, at den er givet ved:

$$W_T^{OPT} = S^{-1}$$

S defineres som kovariansmatricen af ortogonalitetsbetingelsen i stikprøven. Med en optimal vægtmatrice, $W = S^{-1}$, kan den asymptotiske varians jævnfør ligning (25) simplificeres til nedenstående:

$$V = (D'S^{-1}D)^{-1}D'S^{-1}SS^{-1}D(D'S^{-1}D)^{-1} = (D'S^{-1}D)^{-1} \quad (26)$$

Ovenstående Ligning (26) er dermed den mindste mulige asymptotiske varians. De bedste momentbetingelser bliver dermed i matrix forstand dem, hvor S er lille og D er stor. Lille S er ensbetydende med, at variationen i stikprøvemomentet er lille. D er derivatet af momentet, så en stor D er ensbetydende med, at momentbetingelsen vil være meget overskredet hvis $\theta \neq \theta_0$, og at momentet er meget informativ i henhold til de sande værdier, θ_0 .

3.1.2 Implementering af estimeringsprincippet

I ovenstående afsnit er estimeringsprincippet samt de asymptotiske egenskaber ved GMM blevet udledt. I dette afsnit vil afhandlingen vise, hvorledes ovenfor nævnte procedure kan implementeres, således, at den efficiente GMM estimator findes givet et datasæt. Den efficiente estimator er defineret som den værdi, der minimerer kriteriefunktionen $Q_T(\theta)$:

$$\frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta} = \begin{matrix} 0 \\ (K \times 1) \end{matrix} \quad (27)$$

Ovenstående ligning er på kvadratisk form, så minimeringen kan foregå ved at løse K ligninger for K ubekendte parametre i θ . Hvis funktionen $f(w_t, z_t, \theta)$ er ikke-lineær, hvilket er tilfældet med CCAPM, er det i fleste tilfælde ikke muligt at finde en analytisk løsning, og i stedet skal der anvendes en numerisk procedure for at minimere $Q_T(\theta)$. For at finde den efficiente GMM estimator, skal den optimale vægtmatrice, W_T^{OPT} findes. Vægtmatricen afhænger af parametrene generelt, og for at estimere den optimale vægtmatrice anvendes en konsistent estimator af θ_0 (Nielsen, 2005, s. 13). Estimeringen foregår derfor trinvis. Der er tre forskellige fremgangsmåder, man kan anvende for at finde den efficiente GMM estimator, og det er henholdsvis ”two-step efficient GMM”, ”Iterated GMM estimator” og slutteligt ”Continuously updated GMM estimator (CUE)”. Ved *two-step efficient GMM* vælges der indledningsvist en vægtmatrice, eksempelvis identitetsmatricen $W_{[1]} = I_R$, og dermed finder man en konsistent men inefficent første trin GMM estimator:

$$\hat{\theta}_{[1]} = \arg \min_{\theta} g_T(\theta)' W_{[1]} g_T(\theta) \quad (28)$$

Dernæst kan den optimale vægtmatrice, $W_{[2]}^{OPT}$, findes baseret på $\hat{\theta}_{[1]}$. Givet den optimale vægtmatrice kan man dermed finde den efficiente GMM estimator:

$$\hat{\theta}_{[2]} = \arg \min_{\theta} g_T(\theta)' W_{[2]}^{OPT} g_T(\theta) \quad (29)$$

Estimatoren er ikke unik, da denne afhænger af det indledningsvis valg af vægtmatrice $W_{[1]}$ (Nielsen, 2005, s. 13). Ved den *iterative metode*, vil man efter at have fundet estimatoren $\hat{\theta}_{[2]}$ opdatere vægtene således, at man finder $W_{[3]}^{OPT}$ og dernæst opdatere den optimale estimator $\hat{\theta}_{[3]}$. Man kan skifte mellem at estimere $W_{[i]}^{OPT}$ og $\hat{\theta}_{[i]}$, indtil på forhånd fastlagte konvergenskriterier bliver opfyldt. Konvergenskriteriet kan eksempelvis være indtil der ikke længere fremkommer væsentlige ændringer i kriteriefunktion. Iterativ GMM afhænger ikke af den oprindelige vægtmatrice. De to førstnævnte metoder er asymptotisk tilsvarende. Ved den tredje fremgangsmåde *CUE* erkender man, at vægtmatricen afhænger af parametrene, og man omformulerer GMM kriteriefunktionen til:

$$Q_T(\theta) = g_T(\theta)' W_t(\theta) g_T(\theta) \quad (30)$$

Ovenstående minimeres med hensyn til θ . Denne *CUE* metode er ikke mulig at løse analytisk. Som tidligere nævnt fandt Hansen i hans research paper fra 1982, at den mest optimale vægtmatrice er den inverse til S , således, at $W^{OPT} = S^{-1}$. Indsættes den optimale vægtmatrice i ligning (29) fås følgende udtryk for estimeringen:

$$\hat{\theta}_{[2]} = \arg \min_{\theta} g_T(\theta)' \hat{S}^{-1} g_T(\theta) \quad (31)$$

Denne vægtmatrice har den laveste varians-kovarians matrice i mellem alle estimatorer (Cochrane, 2000, s. 179). Dermed er $\hat{\theta}_{[2]}$ en konsistent, asymptotisk normalfordelt og et asymptotisk efficient estimat af parametervektoren θ . Med efficient menes der, at den dermed har den mindste

varians-kovarians matrice blandt alle estimerne, som giver forskellige lineære kombinationer af $g_T(\theta) = 0$.

3.1.3 Antagelser ved GMM

Når man anvender GMM, er der nogle statistiske antagelser, som der skal tages højde for. En af dem er, at variablene, som indgår i modellen skal være stationære variable, hvilket betyder, at variablenes middelværdi, varians samt kovarians skal være konstante over tid (Cochrane, 2000, s.185). Dette testes ved, at anvende en Dickey Fuller test. Ved GMM må fejlleddene gerne være serielt korrelerede, og derfor kan det i stedet være relevant at anvende en Augmented Dickey Fuller test (ADF). Forskellen på de to tests, er at sidstnævnte ADF-test tager højde for autokorrelation i fejlleddene. Testen undersøger, hvorvidt der er unit-root tilstede, og hvis dette er tilfældet, vil ens variable ikke være stationære. Dette testes ved at anvende en H_0 -hypotese og en alternativhypotese. H_0 -hypotesen er, at der er unit-root tilstede, og dette er tilfældet, hvis ens p-værdi er under det valgte 5% signifikansniveau. Såfremt dette ikke er tilfældet forkastes H_0 -hypotesen, og man accepterer i stedet alternativhypotesen, hvor der ikke er unit-root tilstede, og ens variable er dermed stationære (Heij, et. al, 2004, s. 597). Dette vil blive testet senere på det valgte datamateriale, og såfremt, at de valgte variable ikke er stationære, vil datamaterialet blive transformeret. Ved GMM skal antagelsen om ortogonalitet ligeledes være opfyldt. Ortogonalitetsbetingelsen indebærer, at de forklarende variable i ens model skal være eksogene og asymptotisk ukorreleret med fejlleddet. Denne antagelse skal også være opfyldt for de variable, der bliver valgt som instrumentvariable i modellen (Heij, et. al, 2004, s. 194). Den anvendte formel for varians ved GMM inkluderer ikke de sædvanlige antagelser om, at variable er i.i.d normalfordelt, homoskedastiske osv. Disse antagelser kan man godt indføre, når man anvender GMM, men dette er ikke et krav (Cochrane, 2000, s. 187).

3.1.4 J_T Test

Når man har estimeret de parametre, som gør, at modellen passer bedst, skal man dernæst teste, hvor godt modellens ”fit” er. Dette gøres ved at anvende J_T testen, som undersøger, hvorvidt prisfejlene er signifikant forskellige fra nul. Når man har en model, som er overidentificeret vil det medføre positive prisfejl, da det ikke er muligt, at alle momentbetingelser kan sættes lig nul. Hvis prisfejlene er meget store, tyder det på, at modellen ikke er holdbar og den afvises dermed. Testen er:

$$J_T = T[g_T(\hat{\theta})'S^{-1}g_T(\hat{\theta})] \sim \chi^2(\#M - \#K) \quad (32)$$

Ved ovenstående ligning (32) forsøger man dermed at minimere prisfejlene, hvor man anvender den optimale vægtmatrice. J_T statistikken evalueres i forhold til en χ^2 fordeling, med rang #momentbetingelser (M) - #parametre(K) (Cochrane, 2000, s. 184). J_T testen kan dog kritiseres, fordi, hvis kovariansmatricen for prisfejlene er høj, vil det medføre, at J_T -statistikken mindskes, og det vil derfor blive svært at afvise modellen. I nyere tid er man begyndt at fokusere på, om ens GMM estimator medfører lave prisfejl frem for at fokusere på J_T testen. Når man skal beregne modellens prisfejl, anvender man sin models forventede afkast, som er bestemt ud fra ens estimerede parametre fratrasket det faktiske afkast. Det vil dermed være ensbetydende med, at en model med lave prisfejl, er en model, som er god til at forklare det historiske afkast. Det er dermed ikke en god ide alene at teste, hvor god ens model er blot på baggrund af J_T testen, da man dermed nemt kan risikere at acceptere en model, som er uinteressant (Veerbek, 2004, s. 152).

3.1.5 GMM estimering af standardmodellen

Når standardmodellen skal estimeres ved GMM metoden, tages der udgangspunkt i den centrale prisfastsættelsesligning jævnfør ligning (4) afsnit 2.2. Ved at substituere diskonteret payoff, og lade prisen p_t være lig 1, kan ligning (4) omskrives, og dermed kan momentbetingelsen for populationen betegnes på følgende måde:

$$E_t[m_{t+1}(\theta)R_{t+1} - 1] = 0 \quad (33)$$

Modeller med diskonteringsfaktorer involverer nogle ukendte parametre og data, hvorfor der anvendes (θ) , når det er vigtigt at huske på dette. I denne model skrives diskonteringsfaktoren som $m_{t+1}(\theta)$, for at vise, at den afhænger af parametrene γ og δ , som er udtrykt ved parametervektoren $\theta = (\gamma, \delta)'$. R og p er vektorer. Man forsøger typisk at undersøge, hvorvidt en model for m kan prisfastsætte et antal af aktiver på samme tid (Cochrane, 2000, s. 178). Det er bekvemt at de-

finere fejlleddene, hvilket er tilsvarende prisfejlene $u_t(\theta)$ som et objekt, hvis gennemsnit skal være nul:

$$u_{t+1}(\theta) = m_{t+1}(\theta)R_{t+1} - p_t \quad (34)$$

Ved GMM minimerer man således afstanden i mellem populationsmomenterne og stikprøvemomenterne. Dette gøres ved at minimere gennemsnittet af prisfejlene, hvilket er udtrykt ved ovenstående formel (Heij et. al., 2004, s. 41). Ovenstående ligning (34) udtrykker dermed prisfejlen mellem den faktiske og den forventede pris. For at estimere θ anvendes stikprøvegennemsnittet til momentbetingelsen. Stikprøvegennemsnit på teststørrelsen T kan defineres på følgende måde:

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t(\theta) = E_T[u_t(\theta)] = E_T[m_{t+1}(\theta)R_{t+1} - p_t] \quad (35)$$

$g_T(\theta)$ er stikprøvegennemsnittet af prisfejlene, hvor E_T , for stikprøvegennemsnittet udtrykkes således:

$$E_T(\cdot) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\cdot)$$

GMM vælger parametre til at minimere en vægtet sum af kvadrerede prisfejl. Momenterne er dermed:

$$g_T(\theta) = E_T[m_{t+1}(\theta)R_{t+1}] - E_T[p_t] \quad (36)$$

Dermed bliver hvert moment forskellen i mellem faktiske ($E_T(p)$) og forudsagte ($E_T(mx)$) pris, hvilket er tilsvarende prisfejlene. Når man anvender forventede afkast, er momenterne $g_T(\theta)$ forskellen i mellem faktiske og forudsagte afkast. Nogle aktivafkast kan have mere varians end andre, hvorfor det kan være en fordel at tildele aktiver med forskellige vægte. Aktiver med lav varians gives typisk mere vægt frem for aktiver med en høj varians, da aktiver med lav varians almindeligvis er de aktiver, som man har mere tiltro til. Ved at give mere vægt til aktiver med lav varians opnås et bedre estimat, da stikprøvegennemsnittet for disse aktiver er bedre end for aktiver med en høj varians (Cochrane, 2000, s. 182). Hvis man i stedet anvender identitetsmatricen tildeles alle aktiver altså lige stor vægt, hvilket ofte ikke er at foretrække ved CCAPM.

3.1.6 Heteroskedasticitet og seriel korrelation

Udtrykket for S varierer, afhængig af om der er seriel korrelation og/eller om der er heteroskedastiske fejllid tilstede for momentbetingelserne. Selvom det ikke er et krav, at der skal være homoskedastiske fejllid og ingen seriel korrelation tilstede i fejllidene, har dette altså en betydning for, hvordan S udtrykkes. Heteroskedasticitet er ensbetydende med, at der ikke er konstant varians tilstede i fejllidene (Heij, et. al, 2004, s. 320). I tilfældet, hvor der er homoskedastiske fejllid og ingen seriel korrelation, kan S udtrykkes på følgende måde:

$$S \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} E[u_t(\theta)u_{t-j}(\theta)'] \quad (37)$$

Ovenstående er en konsistent og unbiased estimator for kovariansmatricen for fejllidene. Hvis der i stedet er heteroskedastiske fejllid men ingen seriel korrelation til stede, kan S i stedet udtrykkes på følgende måde (Arnold & Crack, 1999, s. 12):

$$S \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\infty} E[u_t(\theta)u_{t-j}(\theta)'] \quad (38)$$

Hvis der både er heteroskedastiske fejlled samt seriel korrelation til stede, estimeres S i stedet på følgende måde (Arnold & Crack, 1999, s. 12):

$$S \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\infty} E[u_t(\theta)u_{t-j}(\theta)'] + \sum_{j=1}^{\infty} \{E[u_t(\theta)u_{t-j}(\theta)'] + E[u_t(\theta)u_{t-j}(\theta)']\} \quad (39)$$

Om der er heteroskedastiske fejlled og/eller seriel korrelation i fejllødet har altså en betydning for vægtningen af de valgte aktiver i estimeringen. Derfor vil der på det valgte datasæt testes for, hvorvidt der er heteroskedasticitet samt seriel korrelation til stede. Hvis der er heteroskedasticitet til stede, vil dette blive betegnet ved at anvende HC estimatoren i estimeringen, og hvis der både er heteroskedasticitet og seriel korrelation til stede, vil dette blive betegnet ved at anvende HAC estimatoren i estimeringen. Hvis det er tilfældet, at ingen af de to ovenstående tilstande er til stede, vil der i stedet blive anvendt "IID", som er betegnelsen for uafhængige og identisk fordelte momenter (Nielsen, 2005, s. 21).

4 Estimering af standardmodellen

I dette afsnit vil den forbrugsbaserede CAPM med power nytte (standardmodellen) blive estimeret. Indledningsvist vil det valgte datasæt blive beskrevet, hvorefter der efterfølgende vil blive opstillet relevante momentbetingelser, som senere skal bruges i estimeringen af modellen. Dernæst vil der blive lavet deskriptiv statistik på datasættet for at give indblik i de forskellige tidsserier, der anvendes. Efterfølgende vil modellen blive estimeret, og resultaterne blive analyseret og fortolket. Hernæst vil analysens resultater blive sammenlignet med andres empiriske resultater for estimeringen af modellen, hvor der er anvendt andre datasæt og andre instrumenter til at estimere modellen. Slutteligt vil equity premium puzzle og risk-free rate puzzle blive belyst i kontekst af standardmodellen, og mulige løsningsforslag til de nævnte puzzles vil blive præsenteret.

4.1 Databeskrivelse

Til at estimere modellen anvendes et datasæt med årlige observationer for perioden 1950 til 2008 for USA. Datasættet er stillet til rådighed fra Robert J. Shillers hjemmeside, hvorfra der er udvalgt observationer med relevans for projektets problemstilling. Der anvendes afkast for tre forskellige aktiver i analysen. Der anvendes afkast for tre måneders Treasury Bills, som værende et proxy for det risikofrie aktiv. Endvidere anvendes der afkast for langsigtede 10 årige amerikanske statsobligationer, som værende et aktiv, hvor der er mere risiko forbundet med, da løbetiden herpå er længere. Ydermere anvendes der afkast for aktier, som værende det mest risikofyldte aktiv. Aktieafkast konstrueres ud fra Standard & Poor's 500 index, som er baseret på de 500 største virksomheder i USA. S&P 500 er et værdi-vægtet index, hvilket er ensbetydende med, at hvert firmas aktiepris får tildelt en vægt lig med dens totale markedsværdi, hvorfor større virksomheder dermed er mere vigtige i S&P 500 (Cecchetti & Schoenholtz, 2015, s. 196). Dataserien for forbrugsvækst er konstrueret ud fra forbrug per indbygger på ikkevarige varer og serviceydelser angivet i dollars. Årsagen til, at der anvendes tal for ikkevarige varer og serviceydelser frem for halv-varige og varige varer og serviceydelser, er, at ved sidstnævnte kan nytten strække sig ud over den periode, hvor varen er købt. Forbrugsvækst er konstrueret som forbrugsratioen på tidspunkt t , hvor forbruget for næste år (C_{t+1}) er divideret med forbruget i indeværende år (C_t).

4.2 Indledende analyse af statistiske egenskaber

Nedenfor er der lavet en tabel, der viser deskriptiv statistik for de tre tidsserier for henholdsvis 3 måneders obligationer, 10-årige statsobligationer samt aktier.

Tabel 1: Dataoverblik

(Alle værdier er angivet i procent)

	<i>Minimum</i>	<i>Middelværdi</i>	<i>Maksimum</i>	<i>Standardafvigelse</i>
<i>3 mdr. obligation</i>	0.00030	0.04900	0.15490	0.02874392
<i>10-årig obligation</i>	0.02240	0.06275	0.13340	0.02638159
<i>Aktier</i>	-0.4310	0.06252	0.38500	0.1640199

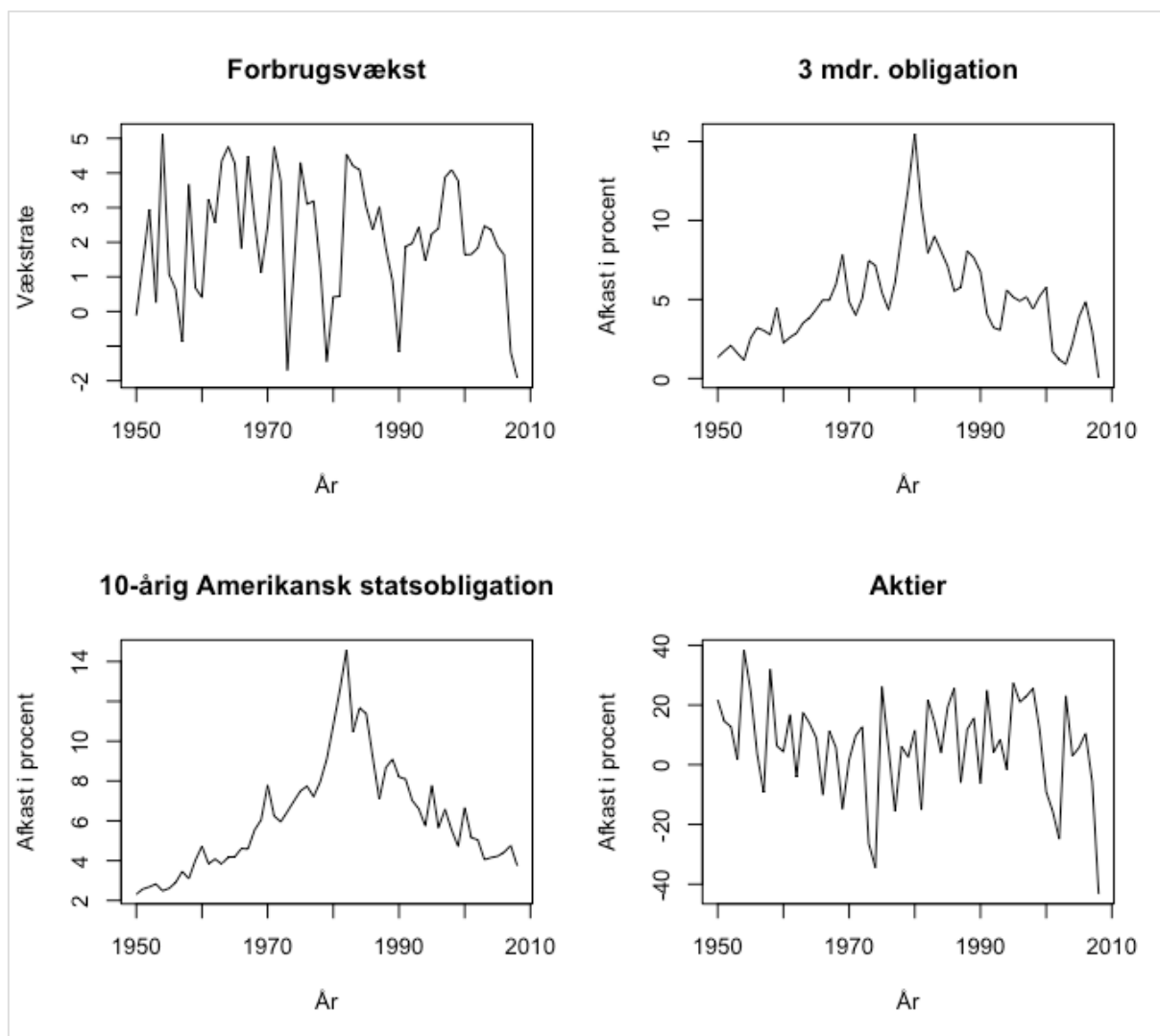
Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra ovenstående ses det, at det gennemsnitlige afkast for perioden er på 4,9%, 6,275% og 6,252% for henholdsvis 3 mdr. statsobligationer, 10-årige statsobligationer og aktier. Som forventet er afkastene på 10-årige statsobligationer og aktier større end afkastet for 3 måneders statsobligationer, hvilket er i fin overensstemmelse med det teoretiske grundlag om, at aktiver, der er mere risikofyldte, ligeledes generer et højere afkast. Aktierne har den største standardafvigelse på 16,4% hvilket forklarer de store minimumafkast og maksimumafkast, som er observeret. Det stemmer dog ikke i overensstemmelse med det teoretiske grundlag, at afkastet for 10-årige statsobligationer er det højeste for perioden, men har en mindre standardafvigelse på blot 2,638% i forhold til aktiernes standardafvigelse på de 16,4%. Dermed giver datasættet en fornemmelse af, at man kan opnå et højere afkast ved de 10-årige statsobligationer frem for aktier, og at der samtidig er en mindre risiko forbundet hertil, da de 10-årige statsobligationer er mindre volatile end aktierne. En mulig forklaring på dette kan være, at der anvendes et datasæt for perioden 1950-2008, som er et relativt langt datasæt. De observerede afkast for aktierne er dermed de mest volatile af de tre tidsserier. Det gennemsnitlige afkast for 3 måneders obligationerne er relativt højt med sine 4,9% men det høje afkast kan også skyldes den lange data periode, der er anvendt, da afkastet for de 3 måneders obligationer de seneste mange år har været relativt lavt og stabil, hvorfor det anvendes som et proxy for den risikofrie rente.

4.2.1 Stationaritet

Som tidligere nævnt jævnfør afsnit 3.1.3 er der ved anvendelse af GMM et krav om, at variablene skal være stationære. Dette undersøges indledningsvist ved at studere de grafiske plots for de fire tidsrækker.

Figur 1: Grafiske plots af forbrugsvækst samt afkast på obligationer og aktier



Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra ovenstående plots bemærkes det, at afkast for både 3 måneders statsobligationer samt de 10-årige statsobligationer er høje i perioden fra midt 70'erne til midt 80'erne, hvilket er årsagen til, at det gennemsnitlige afkast for disse to tidsserier dermed er så høje. Det bemærkes ligeledes, at tidsserierne de mange seneste år begge har ligget på et relativt lavt og mere stabilt niveau, hvilket stemmer i overensstemmelse med det teoretiske grundlag. Volatiliteten er meget lavere for de to tidsserier end for aktierne, når man kigger på perioden fra midt 80'erne og frem til slutningen af perioden i 2008. Ud fra de grafiske illustrationer ser det ud til, at tidsserierne for henholdsvis forbrugsvækst og aktieafkast er stationære i modsætning til tidsserierne for obligationer. Dette var også forventet, da forbrug er tæt på en random walk proces, og aktieafkast oftest er stationære. Da det ikke er nok at undersøge for stationaritet ved at studere grafiske plots, anvendes en Augmented Dickey Fuller test, hvor der medtages 2 lags for at undersøge, hvorvidt de fire tidsserier er stationære. Resultatet af denne ses i nedenstående tabel:

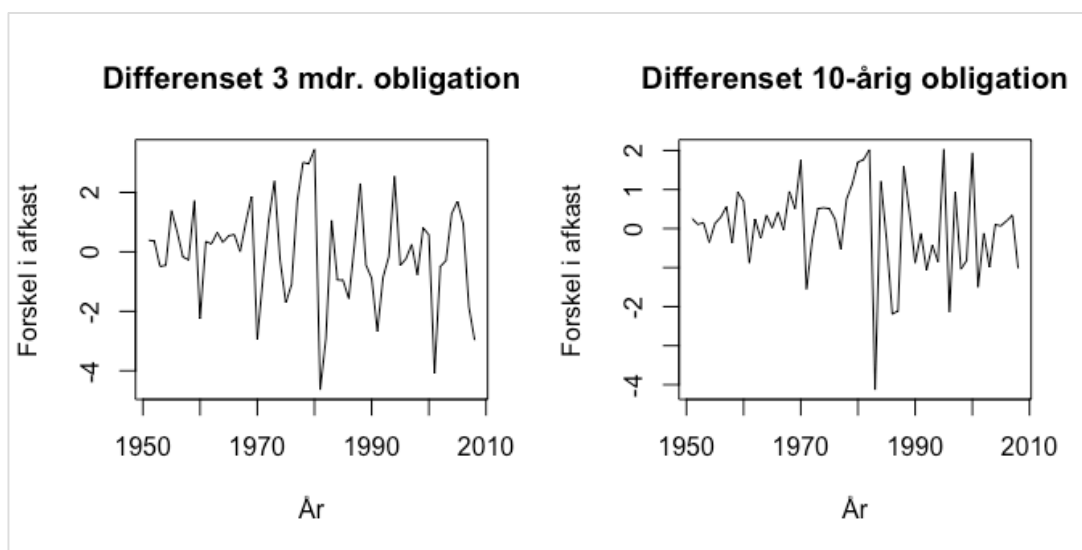
Tabel 2: Augmentet Dickey-Fuller test

	<i>Dickey-Fuller</i>	<i>P-værdi</i>	<i>Stationær?</i>
<i>Forbrugsvækst</i>	-3.8635	0.02174	Ja
<i>3 mdr. obligation</i>	-1.7997	0.6557	Nej
<i>10-årig obligation</i>	-0.986	0.9326	Nej
<i>Aktier</i>	-3.4715	0.05323	Ja

Kilde: Egen tilvirkning

Ved at anvende et signifikansniveau på 10% ses det ud fra ovenstående tabel, at som forventet, så er tidsserierne for henholdsvis forbrugsvækst og aktieafkast stationære. Problemet med ikke stationaritet kan løses ved at anvende metoden, hvor man tager differenser til serierne. Ved afkast er det ofte nok blot at tage differenser en enkelt gang. Derfor tages der differenser til de to tidsserier for obligationer og der laves nye grafiske plots af tidsserierne.

Figur 2: Plots af nye tidsserier



Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra ovenstående plots ser det ud til, at det var nok blot at tage differenser til tidsserierne en enkelt gang. For at være sikker laves der en ny Augmented Dickey-Fuller test med 2 lags for at undersøge, om de nye tidsserier er stationære. Resultatet fremgår af tabellen nedenfor:

Tabel 3: Augmented Dickey-Fuller test for differensede tidsserier

	Dickey-Fuller	P-værdi	Stationær
3 mdr. obligation	-6.1124	0.01	Ja
10-årig obligation	-4.6399	0.01	Ja

Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra tabel 3 ses det nu, at ved et signifikansniveau på 1% vil H_0 -hypotesen om, at tidsserierne ikke er stationære, blive forkastet og alternativ hypotesen om, at tidsserierne er stationære accepteres i stedet for.

4.2.2 Korrelationstest

Ud fra det teoretiske afsæt forventes det, at de aktiver, der er mest risikofyldte vil være positivt korreleret med forbrugsvæksten, men negativt korreleret med den stokastiske diskonteringsfaktor.

Dette undersøges, hvor den stokastiske diskonteringsfaktor er beregnet med $\delta = 1$ og $\gamma = 5$. Resultatet af de forskellige korrelationstests ses i tabellen nedenfor:

Tabel 4: Korrelationstest

(P-værdier er angivet i parentes)

	Forbrugsvækst	Stokastisk diskonteringsfaktor
3 mdr. obligation	-0.08737325 (0.5105)	0.1618703 (0.2206)
10-årig obligation	0.0567376 (0.6695)	0.1996237 (0.1296)
Aktier	0.5410975 (0.00965)	-0.1260642 (0.3414)

Kilde: Egen tilvirkning

Anførte resultater er i overensstemmelse med det teoretiske grundlag, da det ses, at både de 10-årige statsobligationer samt aktier er positivt korreleret med forbrugsvækst. Ligeledes bemærkes det, at aktier er det afkast, der er mest positivt korreleret med forbrugsvækst. Det bemærkes ligeledes, at aktier er det eneste afkast, som er negativt korreleret med den stokastiske diskonteringsfaktor, hvilket passer med teorien, da aktierne er det mest risikofyldte aktiv jævnfør tabel 1. At afkastet for 3 måneders statsobligationer er negativt korreleret med forbrugsvæksten passer med, at denne er forbrugsudjævnende, og derfor antages som værende et risikofrit aktiv. Ved at undersøge p-værdierne bemærkes det dog, at det kun er korrelationen i mellem aktier og forbrugsvækst, der er signifikant. Det kan derfor ikke afvises, at korrelationen er nul for de andre variable. Da der i afsnit 4.2.1 blev påvist, at ingen af de 2 serier for obligationer var stationære, laves der ligeledes korrelationstest på de nye tidsserier. Resultatet af dette ses i tabellen nedenfor:

Tabel 5: Korrelationstest på de nye tidsserier

(P-værdier er angivet i parentes)

	Forbrugsvækst	Stokastisk diskonteringsfaktor
3 mdr. obligation	0.3341292 (0.01037)	-0.03419827 (0.7988)
10-årig obligation	0.02768921 (0.8365)	-0.06334579 (0.6366)

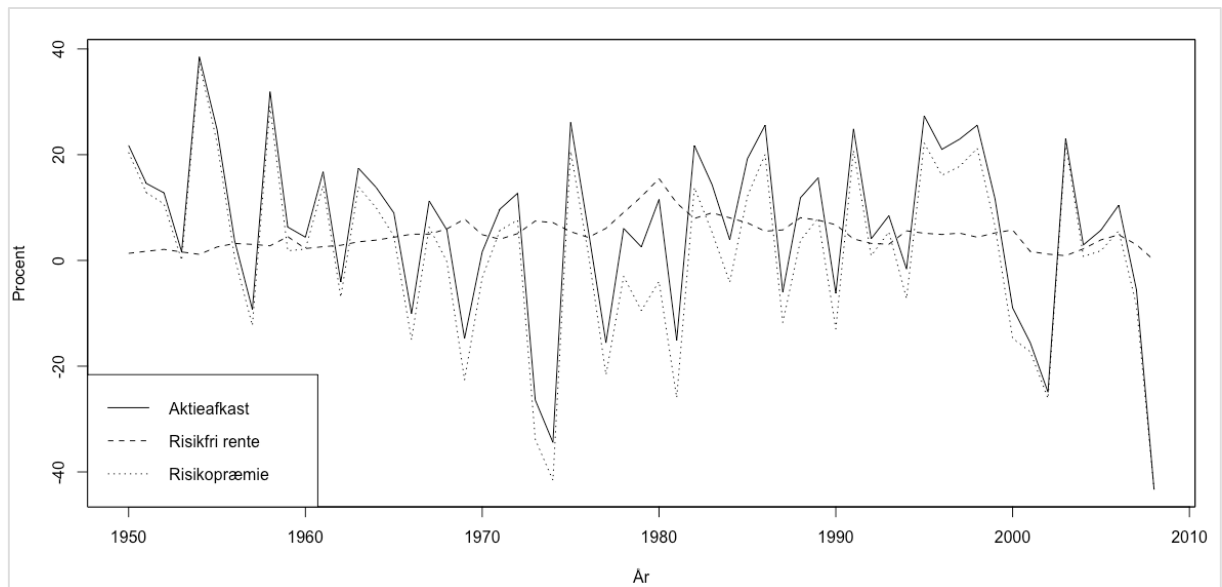
Kilde: Egen tilvirkning

Ovenstående resultater stemmer ikke længere overens med det teoretiske grundlag, da begge tidsserier nu er negativt korreleret med den stokastiske diskonteringsfaktor, og begge positivt korreleret med forbrugsvækst. Resultaterne stemmer dermed ikke længere overens med resultaterne fra

de rene serier. Det bemærkes ligeledes, at det blot er korrelationen i mellem 3 måneders obligationer og forbrugsvækst, der er signifikant ved et 5% signifikansniveau.

4.2.3 Risikopræmie

Figur 3: Plot af aktieafkast, den risikofri rente & risikopræmie



Kilde: Egen tilvirkning

Figur 3 viser udviklingen og dermed sammenhængen i mellem aktieafkast, den risikofri rente og risikopræmien. Det bemærkes, at aktieafkast og risikopræmien følger hinanden tæt, og dette understreges yderligere ved at beregne korrelationen i mellem de to, hvor korrelationen er på 0,9853. Den tætte sammenhæng i mellem de to tidsserier skyldes, at der ikke er store udsving i den risikofri rente på nær omkring 1980'erne, hvor den stiger. Den gennemsnitlige risikopræmie for perioden er blot på 1,35%, hvilket ikke er i overensstemmelse med den historiske empirisk observerede risikopræmie. Dette kan skyldes de store udsving i aktieafkastet samt en forholdsvis høj årlig risikofri rente, for den valgte dataperiode. Hvis man kigger på perioden 1950-1980 ses den historisk høje observerede risikopræmie i efterkrigsperioden på hele 8%. Men når de resterende 28 år tilføjes til perioden falder risikopræmien en del. Den undersøgte risikopræmie i perioden 1950-2008 er meget svingende med en standardafvigelse på 16,8 %, og det kan dermed diskuteres, hvorvidt den er statistisk signifikant. Der er dermed stor usikkerhed forbundet med risikopræmien, og det kan derfor ikke afvises, at den gennemsnitlige risikopræmie i virkeligheden er 0.

4.2.4 Heteroskedasticitet & autokorrelation

Selvom der ved anvendelse af GMM ikke er krav om, at fejlleddene ikke må være heteroskedastiske og/eller serielt korreleret, skal der alligevel testes for, hvorvidt de førnævnte tilstande er til stede. Årsagen til dette er, at estimatoren for fejlleddenes kovariansmatrice, S , udtrykkes på en anden måde ved tilstedeværelse af heteroskedasticitet og serielkorrelation jævnfør afsnit 3.1.6 Heteroskedasticitet testes ved at anvende Goldfeld-Quandt testen og seriel korrelation i fejlleddene testes ved at anvende Ljung-Box testen. Ved Goldfeld-Quandt testen er H_0 hypotesen, at variansen er konstant for alle observationer, og alternativ hypotesen er, at variansen er stigende. Ved anvendelse af Ljung-Box, som tester hvorvidt der er seriel korrelation til stede, er H_0 hypotesen, at der ikke er seriel korrelation til stede og alternativ hypotesen er, at der er seriel korrelation til stede. Resultatet af Goldfeld-Quandt testen og Ljung-Box testen er, at det tyder på, at der både er heteroskedasticitet samt seriel korrelation til stede. Derfor vil der ved estimering af modellen anvendes HAC estimatoren.

4.3 Opstilling af momentbetingelser

Da det i projektet ønskes at estimere den subjektive diskonteringsfaktor samt risikoaversionen, bliver parametervektoren en 2×1 vektor, som udtrykkes på følgende måde: $\theta = (\delta, \gamma)'$. Den første momentbetingelse, som opstilles for modellen, findes ved at anvende nedenstående formel:

$$E_t \left[\delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}^f) \right] = 1$$

Ovenstående udtrykker, at den forventede tilbagediskonteret værdi af afkastet for det risikofrie aktiv skal være lig 1. Momentbetingelsen fås ved at fratrække 1 på begge sider

$$E_t \left[\delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}^f) - 1 \right] = 0$$

Ligeledes skal der ved anvendelse af GMM være opfyldt kravet om ortogonalitetsbetingelsen, hvor korrelationen mellem fejllid og den anvendte instrumentvektor Z_t skal være 0. Analysen er inspireret af et eksempel af Veerbek, hvor han anvender aktivernes merafkast som værende instrumentvariablene. Dette vil sige, at aktivernes afkast for aktier og de 10 årige statsobligationer fratrukket afkastet for det risikofrie aktiv anvendes som instrumenter. Dermed bliver der i alt 3 momentbetingelser for modellen, som kan udtrykkes på følgende måde:

$$E_t = \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}^f) - 1 \\ \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (R_{10\text{år},t+1} - r_{t+1}^f) \\ \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (R_{AKTIER,t+1} - r_{t+1}^f) \end{bmatrix} = 0$$

Dermed vil modellen med to parametre, som skal estimeres være overidentificeret med en enkelt momentbetingelse og en enkelt frihedsgrad.

4.4 Afhandlingens resultater

I dette afsnit præsenteres afhandlingens resultater for estimeringen af standardmodellen med power nytte. Estimeringen er foretaget i R – Se appendiks C for en specificering af R koden. Inspiration til selve R koden er fundet hos Chaussés: ”*Computing GEL and GMM with R (2009)*”. Modellen estimeres ved at anvende den *iterative* metode med den optimale vægtmatrice, da denne metode skulle være den mest effiente at anvende ved små stikprøver. Der anvendes startværdier, som er $\delta = 1$ og $\gamma = 5$, hvilket er inspireret af Veerbek (2004). Nedenstående tabel viser afhandlingens resultater:

Tabel 6: Afhandlingens resultater ved GMM estimering

	Estimat	Standardafvigelse
δ	1.06560	1.36582
γ	172.61799	118.84629
J-test	0.85119	(p=0.35622)

Kilde: Egen tilvirkning

Resultatet for estimeringen er følgende: Risikoaversion γ på 172, samt en diskonteringsfaktor δ på lidt over 1. En forholdsvis lav diskonteringsfaktor er ensbetydende med, at forbrugerne anses for at være relativt nutidsorienterede. Modellens estimat for den subjektive diskonteringsfaktor ligger en smule over 1, hvilket teoretisk er ulogisk, da dette er ensbetydende med, at investor har en negativ tidspræference, og dermed påskønner fremtidig forbrug frem for forbrug i dag. Det bemærkes dog, at diskonteringsfaktoren kun er lidt over 1. Det kan diskuteres, hvad en økonomisk plausibel risikoaversionen skal ligge på. Mehra og Prescott (1985) argumenterede, at en realistisk værdi for risikoaversionen ikke bør overstige 10. Lucas (1994) argumenterede derimod, at en realistisk risikoaversion ikke bør overstige 2,5. Uanset, hvilket af ovenstående man vælger at tage udgangspunkt i, så er en risikoaversion på 172 alt for høj, og på ingen måde økonomisk plausibel.

Hansens J-test anvendes for at teste, hvorvidt modellen er fejlspecificeret. Teststørrelsen vurderes i en χ^2 fordeling med en enkelt frihedsgrad. Ud fra p-værdien konstateres det, at H_0 -hypotesen afvises, og at modellen dermed er korrekt specificeret og derfor heller ikke kan afvises statistisk set. Det bemærkes dog, at der ikke fås efficiente estimater for hverken diskonteringsfaktoren eller risikoaversionen, og det kan derfor diskuteres, hvor økonomisk relevant modellen er, eftersom estimaterne ikke stemmer overens med det teoretiske ræsonnement, som ligger bag modellen. Selvom modellen ikke afvises af J-testen, kan det være, at de anvendte momentbetingelser ikke er tilstrækkelige. Da Hansens J-test blot tester de momentbetingelser, som er anvendt i modellen, vil modellens resultater dermed ikke være relevante, hvis momentbetingelserne ikke er relevante for modellen.

4.5 Sammenligning med andre resultater

Ovenstående resultater vil blive sammenlignet med Veerbeks (2004) estimering af standardmodellen med power nytte, hvor han anvender et månedligt datasæt for USA i perioden februar 1959 til november 1993. Datasættet er tilgængelig på hans hjemmeside. Datasættet består af ti porteføljer med aktier. Disse porteføljer er størrelsesbaseret, hvilket er ensbetydende med, at portefølje 1 indeholder de 10% mindste firmaer listet på New York Stock Exchange, hvor portefølje 10 indeholder de 10% største firmaer. Det risikofrie aktiv er afkastet for 3 måneders Treasury Bills, hvilket er det samme som der blev anvendt i estimeringen ovenfor. Han anvender ligeledes merafkastet som instrumentvariable, og det er dermed en model bestående af 11 momentbetingelser og to parametre, som skal estimeres, hvilket giver 9 antal frihedsgrader. Ud fra det givne datasæt er

modellen blevet reestimeret i R, og resultatet ses i tabellen nedenfor. Ved reestimeringen er der ligeså anvendt den iterative GMM metode med optimal vægtmatrice.

Tabel 7: Reestimering af standardmodellen med Veerbeks datasæt

*** angiver signifikans på 1% signifikansniveau

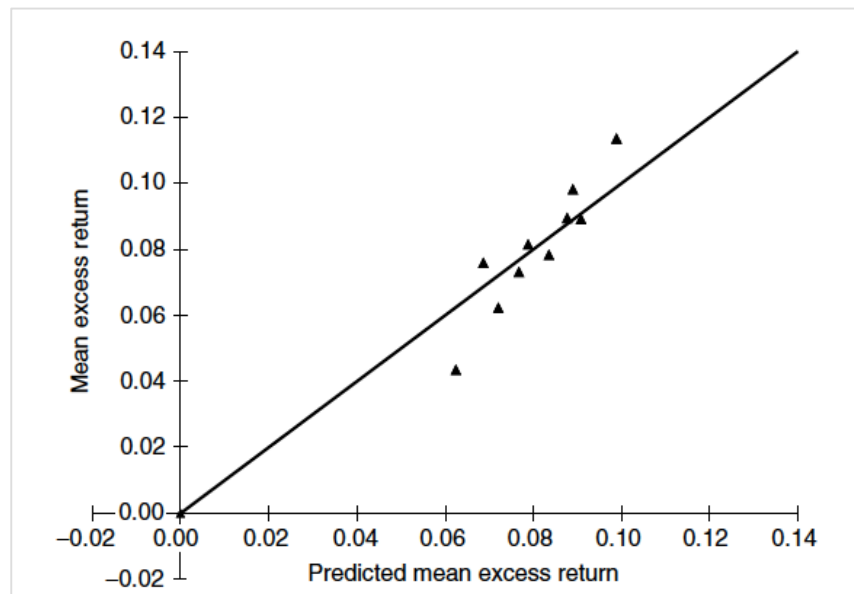
	<i>Estimat</i>	<i>Standardafvigelse</i>
δ	0.84417***	0.11408
γ	53.933	34.844
<i>J-test</i>	6.55046	(p=0.68381)

Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra ovenstående resultater ses det, at den estimerede koefficient for risikoaversion på 53,9 er meget højere end hvad der anses for økonomisk plausibelt men en del mindre end den risikoaversion, der opnås i afsnit 4.4. Begge resultater illustrerer det såkaldte ”equity premium puzzle”, som afspejler, at den høje risikopræmie på risikofyldte aktiver kun kan forklares i denne model, hvis agenterne er ekstremt risikoaverse. Dette vil blive uddybet nærmere i afsnit 4.6.1. Forskellen i mellem resultaterne for denne estimering og den i afsnit 4.4 kan skyldes, at der i dette datasæt kun medtages porteføljer med aktier, og der dermed ikke anvendes data for obligationer ud over det anvendte risikofrie aktiv samt, at der anvendes månedlig data frem for årlig data, som der anvendes i afsnit 4.4. Det bemærkes ligeledes, at standardafvigelsen for risikoaversion er betydeligt større i afsnit 4.4 end ved estimeringen her, hvilket skyldes det høje estimat for risikoaversion. Ligeledes er der ved denne estimering et estimat, som er signifikant nemlig estimatet for diskonteringsfaktoren, hvilket ikke var tilfældet for nogle af de to estimater i det andet eksempel i afsnit 4.4. Veerbek opnår altså en signifikant diskonteringsfaktor på under 1, hvilket er i bedre overensstemmelse med det teoretiske ræsonnement, at folk er mere nutidsorienterede, når det kommer til forbrug. En diskonteringsfaktor på over 1, som ved estimeringen i afsnit 4.4 bevirker til, at et ”risk-free rate puzzle” opstår. Dette vil blive uddybet nærmere i afsnit 4.6.2. Ud fra testen om overidentificerende restriktioner ses det, at modellen heller ikke her afviser den fælles gyldighed for de pålagte momentbetingelser. Dette er ensbetydende med, at standardmodellen statistisk set ikke bliver afvist af datasættet. Dette resultat fremkommer udelukkende på baggrund af de meget upræcise estimater. Selvom modellen ikke bliver afvist, er det blot en statistisk tilfredshed, der bliver opfyldt, og ikke noget, der antyder, at modellen er økonomisk værdifuld. Som tidligere

nævnt, kan det være en god ide, at man i stedet kigger nærmere på modellens såkaldte prisfejl, når man vurderer, hvor god modellen er frem for at anvende J-testen. I figuren nedenfor er de faktiske gennemsnitlige merafkast og forudsagte gennemsnitlige merafkast plottet, samt plottet en 45° linje.

Figur 4: Faktiske vs. forudsagte merafkast.



Kilde: Veerbek, 2004, s. 157

Ved at undersøge figur 4 ses modellens faktiske og forudsagte merafkast. 45° linjen indikerer, at den gennemsnitlige prisfejl er 0. Hvis punktet ligger over linjen indikerer dette, at afkastet for dette aktiv er underforudsagt af modellen. Figuren giver et indtryk af, at den økonomiske performance for modellen er skuffende. Det er ikke muligt for modellen fuldt ud at fange variationen i forventet merafkast.

4.6 Modelkritik

på baggrund af ovenstående resultater kan modellen kritiseres, da resultaterne for de estimerede værdier for henholdsvis den stokastiske diskonteringsfaktor samt risikoaversionen giver anledning til to såkaldte puzzles, nemlig "equity premium puzzle" og "risk-free rate puzzle". Puzzles er ikke tests, men nyttifulde diagnoser for, hvorfor tests fejler. Med ovenstående In Mente afdækkes

ovenfornævnte puzzles i det følgende, og dernæst vil mulige løsninger på kritikpunkterne blive præsenteret.

4.6.1 Equity premium puzzle

Mehra og Prescott argumenterede i deres research paper ”THE EQUITY PREMIUM – A Puzzle” fra 1985, at den gennemsnitlige risikopræmie på det amerikanske aktiemarked – den såkaldte equity premium – er for stor til, at den nemt kan blive forklaret af standard prisfastsættelses modeller. Dette argument fremkommer de med på baggrund af en estimeret forbrugsbaseret CAPM i deres research paper fra 1985. Mehra og Prescott (1985) navngav ”the puzzle” og lancerede litteraturen, der er dedikeret til at forklare dette puzzle. De pointerer, at det gennemsnitlige aktiemerafkast i denne kalibrerede økonomi er alt for lav, medmindre risikoaversionen øges til en betydelig usandsynlig værdi (i deres model 55) (Cochrane, 2007, s. 261). Det gennemsnitlige afkast på aktier er dermed for højt i forhold til den lave risikoaversion, som empirisk er observeret. Aktiemarkedet kovarierer rent faktisk positivt med forbrugsvækst, således at markedet burde give en positiv risikopræmie. Problemet er, at risikopræmien er kvantitativt for stor til at blive forklaret givet følsom risikoaversion samt givet den observerede volatilitet i forbrugsvækst (Cochrane, 2006, s. 260). I 1980’erne fandt flere studier, at en høj risikoaversion poppede frem i estimater for forbrugsbaserede modeller. Mehra og Prescott (1985) påstår, at høj risikoaversion er robust og et uundgåeligt element i enhver metode, hvor man matcher modellen til data. De argumenterer ligeledes at ovenfornævnte puzzle er vigtigt fordi det vil kræve fundamentale ændringer i makroøkonomisk modellering (Cochrane, 2006, s. 265).

4.6.2 Risk-free rate puzzle

Som et modspil til equity premium puzzle kan man overveje større værdier for den relative risikoaversionens koefficient γ . Dog vil en tilladelse af dette medføre, at et andet puzzle opstår – ”Risk-free rate puzzle”. Dette puzzle siger, at hvis investorer er ekstremt risikoaverse, altså at γ er stor, så vil der, når man anvender power nytte, også være en høj risikofri rente, hvilket er i konflikt med de historiske observationer i USA. Et andet element er, at tidspræferencen skal være negativ. Ved en negativ tidspræference vil forbrug i fremtiden være at foretrække frem for forbrug i nutiden. Dette er i direkte modstrid med antagelserne bag CCAPM. Intuitionen er, at, hvis investorer er meget risikoaverse vil de ligeså være ekstremt uvillige over for intertemporal substitution, hvilket vil sige, at de har lave præferencer over for at substituere fremtidigt forbrug og nutidigt for-

brug (Campbell et. al., 1997, s. 310). Dette vil give bevæggrund for en høj rente, da dette vil give investorer incitament til at opspare frem for at forbruge. Givet positiv gennemsnitlig forbrugs-vækst, en lav risikofri rente, og en positiv tidspræference rate, vil investorer have et stærkt ønske om at låne fra fremtiden. En lav risikofri rente (som historien har vist, at den er) er kun mulig, hvis investorer derimod har en negativ tidspræference, som reducerer deres ønske om at låne fra fremtiden (Cochrane, 2000, s. 416).

4.6.3 Løsninger på puzzles

Dette afsnit har til formål at give en kort introduktion til udvidelser af CCAPM, med henblik på blandt andet at løse standardmodellens manglende egenskab, til at forklare risikopræmien på det amerikanske aktiemarked. Afsnittet tager primært udgangspunkt i en survey af Campbell, Lo & MacKinlay (1997), og afsnittet er på ingen måde udtømmende, men blot en kort introduktion til løsninger på de nævnte puzzles. I afsnit 5 udvælges en af de nyere forbrugsbaserede modeller, som vil blive præsenteret mere i dybden. Da standardmodellen støder på problemerne med equity premium puzzle og risk-free rate puzzle, har økonomer præsenteret flere forskellige bud på, hvorfor netop ovenstående puzzle fremkommer. Derfor har økonomer i særdeleshed undersøgt to mulige research veje. En af dem er, at markedsfriktioner ugyldiggør standardmodellen. De målte afkast, som anvendes til at teste modellen, er muligvis ikke tilgængelige for investorer, som i stedet mødes med transaktionsomkostninger samt begrænsninger, når det kommer til deres mulighed for at låne likviditet eller gå kort i deres aktiver. Ovenstående medfører, at investorers mulighed for at drage fordel af en høj risikopræmie kompliceres. Markedsfriktioner kan ligeså medføre, at aggregeret forbrug er et utilstrækkeligt proxy for aktiemarkeds investorers forbrug. En anden mulighed er, at investorer muligvis har mere komplicerede præferencer end den simple power nytte specifikation, som anvendes i standardmodellen.

At standardmodellen bliver afvist kan derfor skyldes, at det er besværligt at måle aggregeret forbrug. Standardmodellen bør påføres forbrug målt på et bestemt tidspunkt ligesom afkast på aktiver, men det tilgængelige forbrugsdata er i stedet målt som et flow i løbet af en periode, og det er dermed tidsaggregeret og målt med fejl. Melino og Shiller (1987) har blandt andet testet modellen, ved at tillade tidsaggregering samt målefejl. Ovenstående problemer med data kan medføre, at aktivafkast, som er vægtet med marginal nytte af forbrug, hvilket er givet ved $(1 + R_{t+1}^i)\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$, kan blive forecastet blot på kort sigt og ikke på lang sigt. For at imødekomme et sådan

problem, kan man vælge at lagge ens instrumentvariable mere end en periode, når man tester modellen. Ved at gøre dette kan man mindske modgangen i mod standardmodellen, men modellen bliver stadig statistisk forkastet ved det sædvanlige signifikansniveau, medmindre man anvender meget lange lags. På grund af ovenfornævnte dataproblemer bliver opgørelsen af korrelationen mellem forbrug og afkast på aktiver besværliggjort, som resultat af problemer med timingen, og ligeledes vil standardafvigelsen af forbrug blive undervurderet. Campbell og Cochrane (2000) argumenterer, at årsagen til at equity premium puzzle opstår til delvis kan tillægges tidsaggregering af forbrug.

Et andet mere radikalt forslag er, at aggregeret forbrug ikke er et tilstrækkeligt proxy for aktiemarkeds investorer, sågar heller ikke på lang sigt. En simpel forklaring på dette er, at økonomien kan inddeles i to typer af agenter. Der præsenteres en constrained agent, som er forhindret i at handle på forskellige aktivmarkeder, og forbruger sin arbejdsindkomst hver periode, og en unconstrained agent. Forbruget for førstnævnte constrained agent er irrelevant, når det kommer til bestemmelse af aktivpriser, men det kan udgøre en betragtelig andel af det aggregerede forbrug. Det er blandt andet blevet vist af Mankiw og Zeldes (1991), at aktionærers forbrug er mere volatil og mere højt korreleret med aktiemarkedet end ikke-aktionærers forbrug. Constrained agenter som ovenfornævnte påvirker ikke direkte aktivpriser, fordi de antageligvis ikke har eller handler med finansielle aktiver. En anden gren af litteraturen argumenterer, at der muligvis er nogle investorer, som køber og sælger aktier af eksogene, eksempelvis psykologiske årsager. Denne type, som kan betegnes noise traders, kan påvirke aktiepriser på grund af, at andre investorer, som i stedet er rationelle nyttemaksimererere bliver tvunget til at indrette sig efter deres skift i efterspørgsel. Hvis nyttemaksimerende investorer er risikoaverse, vil de kun købe aktier fra noise traders, som ønsker at sælge, hvis aktiepriser falder og forventet aktieafkast stiger, og omvendt, så vil de kun sælge aktier til noise traders, som ønsker at købe, hvis aktiepriser stiger og forventede aktieafkast falder. Eksempelvis udviklede Campbell og Kyle (1993) samt Shiller (1984) blandt andre denne model i detaljer. Simplificeret så antyder modellen, at rationelle investorer ikke holder markedsporteføljen, men i stedet så bevæger de sig ind og ud på aktiemarkedet som respons på ændret efterspørgsel fra noise traders, og forbruger dermed ikke aggregeret forbrug, da en del af forbrug er forklaret af noise traders. Dette medfører, at modellen er svær at teste, uden at have detaljeret information omkring investeringsstrategier fra forskellige markedsdeltagere.

Endvidere er der ligeså blevet udviklet nye modeller, hvor nyttemaksimerende aktiemarkeds investorer er heterogene og oplever individuel risiko. Hvis investorer er udsat for stor individuel risiko i deres arbejdsindkomst og kun kan flytte denne risiko, ved indirekte at handle med få aktiver såsom aktier og Treasury bills, vil deres individuelle forbrugssti være meget mere volatil end hvad det aggregeret forbrug er. Nylig research er begyndt at undersøge den empiriske relevans af imperfekt risikodeling for aktivpriser. Heaton og Lucas (1996) finder, at idiosynkratisk indkomstvariationer er meget kortvarige. De finder, at investorer kan minimere dets effekter på deres forbrug ved at låne og udlåne. Dog finder de blot begrænset effekter på aktivpriser medmindre de indskrænker låntagning eller antager tilstedeværelse af store transaktionsomkostninger, således, at risikopræmien kun kan forklares i modellen, hvis der er store transaktionsomkostninger tilstede. Endvidere konstruerer Constantinides og Duffie (1996) en teoretisk model, hvor individuelle choks har permanente effekter på indkomst. De viser, at denne type af indkomstrisiko kan have store effekter på aktivpriser. For, at der i modellen fremkommer overensstemmelse med risikopræmien, skal den individuelle risiko være høj.

I 1990'erne skiftede en del af den akademiske diskussion sig væk fra økonomiske analyser af tids-serier for priser, dividender samt indtjening, og i stedet skiftede fokus hen i mod at udvikle modeller med menneskelig psykologi, som der relateres til finansielle markeder (Shiller, 2003, s. 90). Forskningsområdet for behavioral finance fremkom herfra. Psykologer og eksperimentelle økonomer har fundet, at inden for eksperimentelle rammer, at folk tager forskellige beslutninger, som afviger på flere forskellige måder fra standardmodellen for forventet nytte. Som respons til de fund, er der blevet foreslået uortodokse psykologiske modeller for præferencer, og nylige undersøgelser er begyndt at påføre sådanne modeller til prisfastsættelse af finansielle aktiver. Den mest velkendte psykologiske model om beslutningstagning er højst sandsynlig "Prospect Theory" af Kahneman og Tversky (1979 & 1992). Fremfor at definere præferencer over forbrug er præferencer i stedet defineret over gevinster og tab relativt til et benchmark udfald. Et hovedelement i teorien er, at tab gives større vægt end gevinster. Når "Prospect" teori skal påføres prisfastsættelse af aktier er spørgsmålet, hvordan benchmark udfaldet, som definerer gevinster og tab, udvikler sig over tid. Benartzi og Thaler (1995) antager, at investorer har præferencer defineret over afkast, hvor et nulafkast markerer grænsen mellem gevinst og tab. Afkast kan måles over forskellige horisonter. Eksempelvis vil et K-måneder afkast være relevant, hvis investorer opdaterer deres benchmark udfald hver K måneder. Benartzi og Thaler betragter værdier for K , som rangerer mellem 1 til 18. De viser, at tabsaversion kombineret med en kort horisont kan rationalisere investors

uvillighed over for at holde aktier selv på trods af en stor risikopræmie. Når der i modellen antages, at investor vælger at vurdere sin portefølje en gang om året, er modellen i stand til at begrunde equity premium puzzle.

Som tidligere nævnt har investorer muligvis mere komplicerede præferencer end den simple power nytte specifikation, der anvendes i standardmodellen. Derfor er der i litteraturen blevet undersøgt nye nyttefunktioner, som adskiller den tætte forbindelse, der er mellem risikoaversion og intertemporal substitution. Måden, hvorpå dette kan gøres, er ved at gøre nytte i dag afhængig af andre variable, således at nyttefunktionen bliver ikke-separabel. Epstein, Zin og Weil bygger på fremgangsmåden af Kreps og Perteus (1978) for at udvikle en mere fleksibel version af standardmodellen med power nytte. Sidstnævnte model er restriktiv på den måde, at den gør elasticiteten af den intertemporale substitution ψ til reciprokke af koefficienten for den relative risikoaversion γ . Det er dog ikke klart, om de to koncepter bør linkes så tæt. Risikoaversionen beskriver som tidligere nævnt forbrugers tilbageholdenhed, når det omhandler at substituere forbrug mellem forskellige tilstande, hvor elasticiteten for den intertemporale substitution beskriver forbrugers villighed til at substituere forbrug over tid. Epstein-Zin-Weil modellen beholder mange attraktive træk ved power nytte, men adskiller linket mellem parametrene γ og ψ , ved at gøre således, at nyttefunktionen bliver ikke-separabel over tilstande for økonomien. Som resultat af ovenstående behøver risikoaversionen ikke længere at være høj for, at den er i overensstemmelse med risikopræmien.

En anden type model, som er fremkommet er modeller med habit formation, som ligeledes adskiller risikoaversion og den intertemporale substitution fra hinanden. Mens førnævnte nyttefunktion er ikke-separabel over tilstande, er modeller med habit formation i stedet modeller, som er ikke-separabel over tid, hvilket forstås på den måde, at i dags nytte af forbrug afhænger af forbrugsniveauet for tidligere perioder. Denne type modeller anses for at være førende mellem nyudviklede modeller, da de med stigende overbevisning kan forklare prisfastsættelse på aktiemarkedet i USA. Et eksempel på denne type model er Campbell-Cochrane modellen, som vil blive gennemgået afsnit 5.

5 Campbell-Cochrane modellen

Givet problemer med standardmodellen, er det naturligt at stille spørgsmålstejn ved den valgte nyttefunktion, nemlig power nytte, der anvendes i modellen. Det kan være muligt, at den marginale forbrugsnyttes kan afhænge af andre variable end blot i dags forbrugsniveau. Campbell og Cochrane fandt ud af, at mange af disse puzzles inden for det finansielle område kan forstås ved at lave en simpel modificering af den basale forbrugsbaseret prisfastsættelses model med en repræsentativ agent, hvorfor deres udvidelse af modellen vil blive forklaret i afsnit 5.1 nedenfor. Herefter vil der i afsnit 5.2 blive præsenteret de resultater, som Campbell og Cochrane opnår ved at teste modellen og deres resultater vil efterfølgende blive analyseret. Disse resultater vil blive fortolket og sammenlignet med de empiriske resultater, der fremkom ved estimeringen af standardmodellen. I afsnit 5.3 vil Stig V. Møllers resultater blive præsenteret og analyseret. Han tester Campbell-Cochrane modellen på det amerikanske marked ved at anvende GMM.

5.1 Campbell-Cochrane modellen

Denne model introducerer habit formation, som adskiller sig fra standardmodellen i det omfang, at den nyttefunktion, der anvendes er tidsafhængig, hvilket også kaldes ikke-separabel over tid. Dette er ensbetydende med, at nytte på tidspunkt t ikke blot afhænger af forbrug på tidspunkt t , men ligeså af forbrug på tidligere tidspunkter, i modsætning til standardnyttefunktionen, hvor investor ikke sammenligner forbrug i dag med tidligere forbrugsperioder (Campbell & Cochrane, 1999, s. 207). Den type nyttefunktion med habit formation betegnes som $U(C_t, X_t)$, som reflekterer, at nytten nu afhænger af både forbrug C_t og ligeledes af habit X_t . Habit udtrykker, hvorledes tidligere perioders forbrug påvirker nytten af forbrug i dag. Der er forskellige type nyttefunktioner, som inddrager habit formation, og de er forskellige på tre overordnede områder (Campbell, 2003, s. 864). Der skelnes i mellem ratiomodeller i forhold til differencemodeller. Forskellen er, at ratiomodeller beskæftiger sig med nytten bestemt ud fra forholdet mellem forbrug og habit, C_t/X_t , hvor differencemodeller i stedet beskæftiger sig med nytten bestemt ud fra forskellen i mellem forbrug og habit, $C_t - X_t$. Ratiomodeller har altid en veldefineret nyttefunktion, og ratiomodeller har ligesom standardmodellen en risikoaversion, som er en konstant relativ nyttefunktion. Ved differencemodeller derimod kan forbruget bevæge sig under habit, hvilket medfører, at nytte-værdien bliver negativ, og risikoaversion er tidsvarierende og kontracyklisk. Med kontracyklisk menes der, at risikoaversionen er konjunkturmedløbende i det omfang, at den bevæger sig modsat de økonomiske konjunkturer. Et andet område, hvor nyttefunktionerne afskiller sig, er ved den

måde habit specificeres på, hvor der skelnes i mellem intern habit og ekstern habit. Når der anvendes intern habit, vil investors habit afhænge af sit eget tidligere forbrugsniveau. Ved anvendelse af ekstern habit afhænger investors habit derimod af det samlede aggregerede forbrug, hvor investor dermed er mere optaget af andre investorers forbrug, og af at opnå det samme forbrug som dem, frem for interesseret i sit eget forbrugsniveau. Sidstnævnte ekstern habit simplificerer en analyse, da investors habit ikke blive påvirket af eget forbrug (Campbell, 2003, s. 864). Det sidstnævnte område, hvor habit modeller adskiller sig, er ved, hvorledes habit tilpasser sig i forhold til forbrug. Der skelnes i mellem to typer, hvor modeller enten anvender en gradvis tilpasning til forbrug, eller modeller, hvor habit blot afhænger af forrige periodes forbrug.

Habit formation kan forklare, hvorfor forbrugers rapporteret fornemmelse af velbefindende ofte ses mere relateret til friske ændringer i forbrug, frem for det absolutte niveau af forbrug. Cochrane pointerer, at, når man kigger på makroøkonomi, kan habit være med til at forklare, hvorfor en recession psykologisk er så frygtet, på trods af, at deres effekter på output er lille relativt til få års økonomisk vækst (Campbell & Cochrane, 1999, s. 208). Hvis investor har vænnet sig til i en år-række at have et højt forbrug, vil det føles utilfredsstillende at opleve et fald i sit forbrug. Ligeledes kan det samme forbrugsniveau faktisk virke tilfredsstillende, hvis det fremkommer efter en periode med dårlige tider. Den basale ide ved denne type nyttefunktion er, netop at folk er vane-mennesker, som bliver vant til et bestemt forbrugsniveau, og dermed forsøger at bibeholde dette forbrugsniveau. Dermed vil den nytte, man opnår ved forbrug på tidspunkt t være højere, hvis den tidligere forbrugsperiode var lav, frem for hvis den tidligere forbrugsperiode havde været høj. Der antages i Campbell-Cochrane modellen, at identiske agenter maksimerer følgende nyttefunktion:

$$U(C_t, X_t) = \frac{(C_t - X_t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad C_t > X_t \quad (40)$$

X_t defineres som det eksterne habitniveau, som afhænger af tidligere perioders forbrug. $C_t - X_t$ giver forskellen mellem det nuværende forbrug og vaneforbruget på tidspunkt t . Campbell-Cochrane modellen er dermed en model, der anvender ekstern habit. Det er ligeledes en differencemodel, som anvender en kontracyklisk og tidsvarierende risikoaversion. Relationen mellem C_t og X_t kan udtrykkes som overskudsforbrugsratioen S_t , som defineres ud fra, hvor meget større forbruget er i forhold til vaneforbruget. Campbell-Cochrane modellen udtrykker, at risikoaversio-

nen er tidsvarierende og kontracyklisk med udgangspunkt i overskudsforbrugsratioen, hvilket udtrykkes på følgende måde:

$$S_t = \frac{C_t - X_t}{C_t}, \quad (41)$$

Forbrugsoverskuddet stiger med forbrug. Hvis $S_t = 0$ vil det være ensbetydende med en dårlig tilstand i økonomien, hvor forbruget er det samme som vaneforbruget. S_t nærmer sig 1, når forbrug stiger relativt til habit. Jo højere S_t , jo bedre er tilstanden i økonomien. Når nytten defineres på denne måde, kan risikoaversion dermed ændres over tid. Når S_t er lav som konsekvens af, at det går dårligt i økonomien, vil investor være mere risikoavers end i gode tider, hvor S_t er høj. På den måde kan equity premium undgås, da risikoaversionen er knyttet til forbruget, og den ændres i takt med, at udviklingen i økonomien ændrer sig (Campbell & Cochrane, 1999, s. 209). Ligesom ved standardmodellen kan den absolutte risikoaversion og relative risikoaversion bestemmes jævnfør afsnit 2.3.4. Den absolutte risikoaversion kan udtrykkes på følgende måde:

$$-\frac{-\gamma(C_t - X_t)^{-(1+\gamma)}}{(C_t - X_t)^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{C_t S_t} \quad (42)$$

Den relative risikoaversion fastsættes til:

$$-C_t \frac{-\gamma(C_t - X_t)^{-(1+\gamma)}}{(C_t - X_t)^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{S_t} \quad (43)$$

I Campbell-Cochrane modellen er γ ikke længere et udtryk for konstant relativ risikoaversion, som det er udtrykt ved standardmodellen. En høj overskudsforbrugsratio bliver af investor opfattet som gode tider, da forbruget dermed er højt i forhold til habit. Investor vil i gode økonomiske tider have en lav risikoaversion, og den krævede risikopræmie for investering i aktier er dermed ligeledes lav. Hvis økonomien i stedet er i et dårligt stadie, vil investor ikke være villig til at påta-

ge sig risiko, og den krævede risikopræmie vil i stedet være høj. I Campbell-Cochrane modellen vil γ betegnes som nyttekurveparameteren og γ/S_t vil i stedet være et udtryk for risikoaversionen. Den stokastiske diskonteringsfaktor i Campbell-Cochrane modellen kan udtrykkes på nedenstående måde:

$$M_{t+1} = \delta \frac{u_c(C_{t+1}, X_{t+1})}{u_c(C_t, X_t)} = \delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \quad (44)$$

Forskellen på denne stokastiske diskonteringsfaktor frem for den i standardmodellen er, at for faste værdier for henholdsvis den subjektive diskonteringsfaktor og nyttekurveparameteren, afhænger den stokastiske diskonteringsfaktor af både overskudsforbrugsratioen S_{t+1}/S_t , og forbrugsvæksten C_{t+1}/C_t , hvor det i standardmodellen blot var forbrugsvæksten, der skaber variationen. Ifølge Campbell og Cochrane er det i deres model primært overskudsforbrugsratioen, der skaber variationen, på trods af, at begge led indgår symmetrisk. Dette skyldes primært, at forbrugsvæksten varierer meget lidt. Forholdet i mellem den subjektive diskonteringsfaktor og overskudsforbrugsratioen er, at en høj diskonteringsfaktor primært er medført af en lav overskudsforbrugsratio og omvendt. Dermed kan prisligningen for Campbell-Cochrane modellen udtrykkes på følgende måde:

$$E_t \left[\delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} R_{t+1} - 1 \right] = 0 \quad (45)$$

Den stokastiske diskonteringsfaktor afhænger ikke længere blot af forbrugsvækst som i tilfældet med standardmodellen, men ligeså af væksten i overskudsforbrugsratioen S_t . Ud fra ligning (45) kan det forventede afkast udtrykkes på følgende måde:

$$E_t[R_{t+1}] = \frac{1 - \text{Cov}_t E_t \left[R_{t+1}, \delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right]}{E_t \left[\delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right]} \quad (46)$$

Dermed bliver det forventede afkast en funktion af kovariansen mellem afkast og forbrugsvækst multipliceret med væksten i overskudsforbrugsratioen. Men ligesom det var tilfældet ved den subjektive diskonteringsfaktor, så er det ligeledes sådan her, at det forventede afkast primært bliver påvirket af kovariansen mellem væksten i overskudsforbrugsratioen og afkastet, da forbrugsvækst er forholdsvis stabilt. Hvis, der i perioder med lav overskudsforbrugsratio, ligeledes er et lavt afkast, bliver kovariansen negativ. En sådan negativ kovarians i mellem den stokastiske diskonteringsfaktor og afkastet bevirker til et højt forventet afkast. I Campbell-Cochrane modellen er det en lav overskudsforbrugsratio, der anvendes, som mål for dårlige tider for investor, og marginalnyttens af forbrug er dermed høj. I disse perioder, hvor det er mest tiltrængt, får investor ikke høje afkast, og dermed anses aktivet for værende mere risikabelt, hvorfor investor vil kræve et højt forventet afkast. De to modeller repræsenterer således to forskellige syn på, hvorledes investor anser risiko på et aktiv. Som nævnt i afsnit 2.1 anser investor i standardmodellen, at et aktiv er risikofyldt, såfremt det giver et lavt afkast i perioder, hvor forbruget i forvejen er lavt. I Campbell-Cochrane modellen, er det i stedet overskudsforbrugsratioen, som der kigges på, når det angår risiko. Et aktiv er dermed risikofyldt, hvis det giver et lavt afkast i de perioder, hvor overskudsforbrugsratioen er lav. Det er muligt, at overskudsforbrugsratioen er lav på trods af, at forbruget er højt, hvilket skyldes, at habit ligeledes er højt. Når tilpasningen af habit til forbrug skal specificeres, tages der i Campbell-Cochrane modellen udgangspunkt i log-overskudsforbrugsratio $s_t = \log(S_t)$, som er en stationær førsteordens autoregressiv proces, der modelleres på følgende måde:

$$s_{t+1} = (1 - \phi)\bar{s} + \phi s_t + \lambda(s_t)v_{t+1} \quad (47)$$

hvor ϕ er persistensparameteren som er mellem $0 < \phi < 1$. $\bar{s}$ er steady state niveauet for s_t , og $\lambda(s_t)$ repræsenterer en følsomhedsfunktion. Forbrugsstød v_{t+1} er modelleret til at have en direkte påvirkning på overskudsforbrugsratioen, og for en ϕ tæt på 1, vil habit reagere langsomt til disse stød. Forbrugsstød fremkommer fra log-forbrugsvæksten, som er givet ved:

$$\Delta c_{t+1} = g + v_{t+1}, \quad v_{t+1} \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (48)$$

hvor $c_t = \log(C_t)$. g er den gennemsnitlige forbrugsvækstrate, og log-forbruget følger en random walk. Ved, at der i Campbell-Cochrane modellen tages logaritmen til overskudsforbrugsratioen tilpasser habit sig ikke lineært til forbrug. Dermed vil alle værdier af s_t medføre en positiv værdi for S_t . Dette er med til at sikre, at $C_t > X_t$ (Campbell, 2003, s. 866).

5.1.1 Følsomhedsfunktionen

I Campbell-Cochrane modellen introduceres en følsomhedsfunktion, som er defineret således, at den medfører, at habit er prædetermineret i steady state og i nærheden af steady state, og således, at den risikofrie rente er konstant. Formålet med, at habit er prædetermineret i steady state og i nærheden af steady state, er, at der på den måde undgås, at et positivt forbrugsstød vil medføre et fald i habit, og det undgås ligeledes, at et negativt forbrugsstød vil medføre en stigning i habit. Der er flere årsager til, hvorfor en konstant risikofri rente ønskes. Empirisk har historien vist, at den risikofrie rente ikke har varieret meget. En anden årsag er, at Campbell og Cochrane ønsker en model, hvor der fokuseres på, hvorledes risikopræmien varierer, og ikke hvordan den risikofrie rente udvikler sig. Følsomhedsfunktionen i Campbell-Cochrane modellen $\lambda(s_t)$ er defineret på følgende måde:

$$\lambda(s_t) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{S}} \sqrt{1 - 2(s_t - \bar{s})} - 1, & s_t \leq s_{max} \\ 0, & s_t \geq s_{max} \end{cases} \quad (49)$$

hvor steady state for overskudsforbrugsratioen $\bar{S}$ defineres på følgende måde:

$$\bar{S} = \sigma \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \phi}}, \quad (50)$$

s_{max} defineres som værende en øvre grænse for s_t :

$$s_{max} \equiv \bar{s} + \frac{1}{2}(1 - \bar{s}^2), \quad (51)$$

Ved at indføre den øvre grænse sikres det, at følsomhedsfunktionen ikke kan blive negativ. Når dette er tilfældet sikres det således, at overskudsforbrugsratioen ikke kan falde ved et positivt forbrugsstød, og ligeledes sikres det, at den ikke kan stige, hvis et negativt forbrugsstød fremkommer.

5.1.2 Den risikofrie rente

Logaritmen til den risikofrie rente udledes for at undersøge, hvilke forhold, der påvirker den risikofrie rente, og den kan i Campbell-Cochrane modellen udtrykkes på følgende måde (Campbell, 2003, s. 868):

$$r_{t+1}^f = -\log(\delta) + \gamma g - \gamma(1 - \phi)(s_t - \bar{s}) - \frac{\gamma^2 \sigma_v^2}{2}(\lambda(s_t) + 1)^2 \quad (52)$$

Se appendiks B for udledning af logaritmen til den risikofrie rente i Campbell-Cochrane modellen. Ud fra ovenstående ligning (52), bemærkes det, at det første led i ligningen har samme fortolkning som i standardmodellen. Som tidligere nævnt, er γ ikke risikoaversionen i denne model, da risikoaversionen defineres ved γ/S_t . Der bliver dermed en mindre følsom tilknytning mellem den forventede forbrugsvækst g og renten. Dette muliggør, at en høj risikoaversion kan være til stede uden at give anledning til, at et risk free rate puzzle vil opstå, hvilket ikke var en mulighed i standardmodellen. Det tredje led udtrykker intertemporal substitution (Campbell, 2003, s. 868). Hvis det antages, at overskudsforbrugsratioen oprindeligt er i steady state, vil det ved fremkomst af et negativt forbrugsstød medføre, at overskudsforbrugsratioen vil bevæge sig under steady state. Dette vil medføre, at marginalnyttens af forbrug i dag er høj, hvilket presser renten op, da investor dermed vil låne penge til at øge sit forbrugsniveau i dag. Habit vil på sigt tilpasse sig det lavere

forbrug som resultat af, at der ikke er fremkommet yderligere forbrugsstød, og overskudsforbrugsratioen vil dermed stige mod steady state. Som førnævnt vil der efter et negativ forbrugsstød være en høj marginalnytte på forbrug, men i takt med, at overskudsforbrugsratioen konvergere hen mod steady state, vil marginalnyttten falde igen og som resultat heraf, vil det opadgående pres på renten reduceres (Campbell, 2003, s. 868).

Det sidste led i ligningen repræsenterer investors ønske om sikkerhedsopsparing. Dette er ligesom med standardmodellen, hvor der ved tilstedeværelse af stor usikkerhed medfører, at investorer vil øge sin opsparing. Men der er forskel i de to modeller, ift. hvor usikkerheden stammer fra. I den basale forbrugsbaseret model er årsagen til usikkerhed, at der er konstant volatilitet i forbrug, hvor der i Campbell-Cochrane modellen er en tidsvarierende usikkerhed. Årsagen til dette er, at i Campbell-Cochrane modellen bliver den konstante volatilitet af forbrug multipliceret med følsomhedsfunktionen, som altså ikke er tilstede i standardmodellen med power nytte. Følsomhedsfunktionen er positiv og aftagende i s_t . En lav s_t medfører, at følsomhedsfunktionen og usikkerheden er høj. Når usikkerheden er høj, vil investor dermed øge sikkerhedsopsparingen, hvilket resulterer i, at renten presses ned (Campbell, 2003, s. 870). Ud fra ovenstående bemærkes det, at overskudsforbrugsratioen har to modsatrettede påvirkninger af renten. En lav overskudsforbrugsratio giver en høj rente grundet den intertemporale substitutionseffekt, og ligeledes giver en lav overskudsforbrugsratio en øget sikkerhedsopsparing, hvilket dermed giver en lav rente. Dermed opnås der i Campbell-Cochrane modellen en konstant risikofri rente, da de to ovenstående effekter udligner hinanden. Ved at specificere følsomhedsfunktionen jævnfør ligning (49), kan den logaritmiske risikofri rente udtrykkes på nedenstående måde ved at substituere ligning (49) ind i ligning (52) for den risikofrie rente,

$$r_{t+1}^f = -\log(\delta) + \gamma g - \frac{\gamma^2 \sigma_v^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{S}} \right)^2 \quad (53)$$

Ud fra ovenstående ligning (53), ses det, at der ikke fremkommer nogle tidsvarierende variable, og dermed er den risikofri rente konstant over tid. Det skyldes som tidligere nævnt, at forsigtighedsopsparing og intertemporal substitution, som har modsatte effekter på den risikofri rente, ophæver hinanden. Modellens funktionelle form og parametre vælges således, at den risikofrie

rente er konstant, hvilket er ensbetydende med, at modellen skal kunne forklare, hvorledes aktie-markedet opfører sig på baggrund af variationen i risikopræmien, og dermed uden bevægelse i den risikofri rente (Campbell & Cochrane, 1999, s. 207).

5.2 Resultater for Campbell-Cochrane modellen

I dette afsnit vil Campbells og Cochranes egne overordnede resultater for modellen blive præsenteret. De anvender to datasæts, hvor det første består af afkast fra New York Stock Exchange i perioden 1947-1995. Ligeledes anvendes der data for tre måneders Treasury Bills samt forbrugsdata for ikke varige varer og tjenesteydelser. I det andet datasæt anvendes der årligt data fra Standard and Poors 500 indeks for aktieafkast og afkast for kortfristet gældspapirer (CP) i perioden 1871-1993 samt per indbygger forbrug i perioden 1889-1992 (Campbell-Cochrane, 1999, s.218).

5.2.1 Valg af parametre i Campbell-Cochrane modellen

Campbell og Cochrane vælger parametrene i modellen ved at kalibrere det således, at det passer med efterkrigs- kvartårlig U.S data. I nedenstående tabel 8 fremgår de parametervalg som Campbell og Cochrane anvender til simulering af deres model.

Tabel 8: Valg af parametre i Campbell-Cochrane modellen

Parameter	Variable	Værdi
<i>Antaget:</i>		
Gennemsnitlig forbrugsvækst (%)	g	1.89
Standardafvigelse for forbrugsvækst	σ	1.50
Log risikofri rente	r^f	0.94
Persistenskoeficient	ϕ	0.87
Nyttekurv parameter	γ	2.00
Standardafvigelse for dividende vækst (%)	σ_w	11.2
Korrelation i mellem Δc og Δd	ρ	0.2
<i>Implicit:</i>		
Subjektive diskonteringsfaktor	δ	0.89
Steady-state overskudsforbrugsratio	$\bar{S}$	0.057
Maksimal overskudsforbrugsratio	S_{max}	0.094

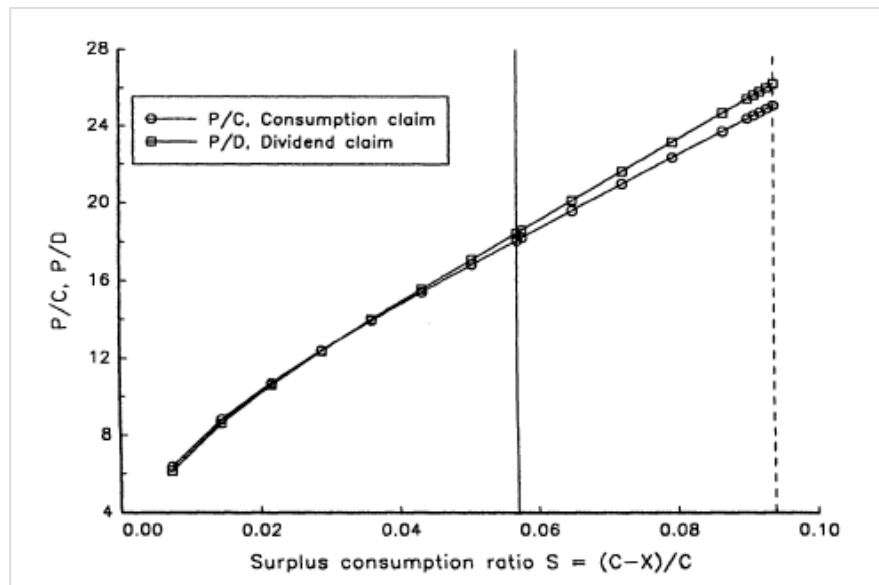
Kilde: Campbell & Cochrane, 1999, s. 218

De tager middelværdien og standardafvigelsen af log-forbrugsvækst på det valgte data. De anvender numeriske metoder for at finde pris/dividende ratioen for aktiemarkedet, som er en funktion af tilstandsvariablen s_t . De sætter persistenskoefficienten ϕ for tilstandsvariablen lig 0.87 per år således, at den matcher persistens for log pris/dividende ratioen. De tager ligeledes standardafvigelsen for dividende vækst σ_w . Korrelationen i mellem dividende vækst og forbrugsvækst er mere besværlig at fastsætte, og derfor vælger Campbell og Cochrane at give ρ en baseline værdi på 0.2, for at vise, at modellen stadig virker godt på trods af en lav korrelation i mellem dividende vækst og forbrugsvækst. γ fastsættes til 2.00. Ovenstående parametervalg antyder dermed, at ved steady state vil overskudsforbrugsration $\bar{S} = 0.057$, således, at habit er 94% af forbrug. Slutteligt vælges den subjektive diskonteringsfaktor således, at det passer med den risikofri rente med det gennemsnitlige realafkast for Treasury Bills. De vælger diskonteringsfaktoren til $\delta = 0.89$, for på den måde at opnå en risikofri realrente på lige under 1% per år. Campbell og Cochrane følger fremgangsmåden af Mehra og Prescott (1985), hvor det antages, at aktiemarkedet betaler en dividende lig forbrug. Endvidere betragter de en mere realistisk model, hvor dividende er en random walk, hvis innovationer er korreleret med forbrugsvækst. Førstnævnte vil fremadrettet i afhandlingen benævnes "*consumption claim return*" og sidstnævnte vil fremadrettet benævnes "*dividend claim return*".

5.2.2 Løsning og resultater for modellen

Campbell og Cochrane løser modellen numerisk samt karakteriserer dens opførsel. Derefter simulerer de data, og de viser derefter, hvorledes det simulerede data replikerer mange interessante statistiske fund i det faktiske datasæt. Slutteligt tilføjer de modellen med historiske forbrugsstød for at undersøge, hvad det siger om historiske bevægelser i aktiepriser. I denne sektion vil de primære resultater fra deres analyse blive fremhævet. Figur 5 præsenterer henholdsvis pris/dividende ratioen og pris/forbrugs ratioen af consumption claim og dividend claim som funktion af overskudsforbrugsratioen. Ovenfor nævnte er de mest centrale variable i deres simuleringer, da alle andre variable er beregnet ud fra pris/dividende ratioen.

Figur 5: Pris/dividende ratio som funktion af overskudsforbrugsratio



Kilde: Campbell & Cochrane, 1999, s. 220)

Pris/dividende ratioen stiger med overskudsforbrugsratioen. Når forbruget er lavt relativt til habit i en recession, er krumningen på nyttefunktionen høj, og priser er svækket relativt til dividender. Ud fra figur 5 bemærkes det, at pris/dividende ratioen af dividend claim næsten er det samme som pris/dividende ratioen for consumption claim på trods af den meget lave (0.2) korrelation i mellem dividende vækst og forbrugsvækst. Campbell og Cochrane fremhæver dog, at dividende vækst er lidt mere volatil end forbrugsvækst. De prisfastsatte komponenter af de to aktiver er tilsvarende hinanden, og derfor er deres priser ligeledes tilsvarende. Tabel 9 præsenterer regressio-
ner af log merafkast for aktier for det simulerede og historiske data. Campbell og Cochrane an-
vender merafkast på aktier for at fremhæve, at risikopræmie frem for risikofri rente varierer over
tid.

Tabel 9: Lang tidshorisont for afkast regressioner i Campbell-Cochrane modellen

	<i>Consumption claim</i>		<i>Dividend claim</i>		<i>Postwar sample</i>		<i>Long sample</i>	
<i>Horisont (år)</i>	Koefficient	R^2	Koefficient	R^2	Koefficient	R^2	Koefficient	R^2
1	-2.0	0.13	-1.9	0.08	-2.6	0.18	-1.3	0.04
2	-3.7	0.23	-3.6	0.14	-4.3	0.27	-2.8	0.08
3	-5.1	0.32	-5.0	0.19	-5.4	0.37	-3.5	0.09
5	-7.5	0.46	-7.3	0.26	-9.0	0.55	-6.0	0.18
7	-9.4	0.55	-9.2	0.30	-12.1	0.65	-7.5	0.23

Kilde: Campbell & Cochrane, 1999, s. 228

Ud fra ovenstående tabel ses det klassiske mønster, som blandt andet ligeledes er dokumenteret af Campbell og Shiller (1988b) samt Fama og French (1988a), at regressions koefficienterne er negative. Dette er ensbetydende med, at høje priser medfører lave forventede afkast. Det bemærkes endvidere, at i begyndelsen stiger koefficienterne lineært med tidshorisonten, og derefter mindre hurtigt. R^2 starter lav, men stiger efterfølgende. Modellens forudsigelser for consumption claim matcher tæt data for deres efterkrigsdata. Det samme kan ligeledes konstateres om koefficienterne for dividend claim, men R^2 stiger ikke ligeså hurtigt.

Campbell og Cochrane undersøger ligeså korrelationen mellem forbrugsvækst og aktieafkast. De fremfører, at der inden for ligevægts forbrugsbaserede modeller ofte er en antagelse om, at forbrugsvækst og aktieafkast er højt, hvis ikke perfekt korreleret med hinanden. De angiver, at dette ofte er det teoretiske fundament bagved mange finansielle modeller, men, at det sjældent bliver testet, af den årsag, at det simpelthen er forkert. I deres eget data finder de meget lav korrelation i mellem forbrugsvækst og afkast. Det bemærkes dog, at afkast er negativt korreleret med tidligere forbrugsvækst, og positivt korreleret med efterfølgende forbrugsvækst. Den højeste korrelation fremkommer mellem afkast og næste års forbrugsvækst for efterkrigsdata på 0.37 og 0.49 i langsigtet data. Hernæst undersøger Campbell og Cochrane korrelationen mellem den stokastiske diskonteringsfaktor og henholdsvis forbrugsvækst, consumption claim return og dividend claim return. Resultatet ses i figur 10.

Tabel 10: Korrelationstest med diskonteringsfaktor

	<i>Forbrugsvækst</i>	<i>Consumption return</i>	<i>Dividend claim return</i>
<i>Månedlig</i>	0.90	0.99	0.83
<i>Årlig</i>	0.45	0.99	0.80

Kilde: Campbell & Cochrane, 2009, s. 234

Ud fra ovenstående tabel 10 fremkommer det, at ved månedlig data er consumption claim return bedre korreleret med diskonteringsfaktoren end forbrugsvækst er. Selvom diskonteringsfaktoren er betinget perfekt korreleret med forbrugsvækst, er den ubetingede korrelation lav, fordi overskudsforbrugsratioen varierer. Aktieafkast bevæger sig, når overskudsforbrugsratioen ændrer sig, og dermed viser det mere om bevægelser i diskonteringsfaktoren. Man kan forvente, at den forbrugsbaseret models præstation forringes endnu mere ved at kigge på længere sigt. På længere sigt er der mere bevægelse i overskudsforbrugsratioen uafhængigt af forbrugsvækst, og denne bevægelse bliver afsløret ved, at aktieafkast varierer, da aktiepriser falder, når overskudsforbrugsratioen falder. Tabel 10 bekræfter ovenstående. Korrelationen i mellem diskonteringsfaktoren og forbrugsvækst falder til 0.45, hvor korrelation med consumption claim return stadig er 0.99. Ved at kigge på den månedlige horisont, er dividend claim et endnu dårligere proxy end forbrugsvækst, fordi dividendevækst indeholder støj, som ikke er korreleret med diskonteringsfaktoren. Men når man kigger på den længere horisont og introducerer tidsaggregering i forbrug, bliver selv dividend claim return et bedre proxy for diskonteringsfaktoren end forbrugsvækst.

I stedet for blot at tilføje modellen med simulering af kunstig data tilføjer Campbell og Cochrane dernæst rigtig forbrugsdata for ikkevarige varer og serviceydelser per indbygger. Her finder de, at habit reagerer jævnt til ændringer i forbrug, hvor habit strækker sig opad i højvækst perioden i 1960'erne, og vokser mere langsomt i 1970'erne. Cykliske dyk i forbrug medfører, at forbrug nærmer sig habit. Campbells og Cochranes model forudsiger lave priser/dividende ratioer og høje forventede afkast for disse perioder. Campbell og Cochrane argumenterer ligeledes, at deres model bidrager med en spændende forklaring af cykliske samt langsigtede fluktuationer i aktiepriser. Når forbrug falder flere år i træk, og dermed nærmer sig deres konstrueret habit, falder aktiepriser. Modellens samt faktiske pris/dividende ratioer falder i den skarpe recession i slutningen af det 19. århundrede og starten af det 20. århundrede. Ligeledes opfanger modellen den langsigtede stigning og derefter fald fra 1890 til 1915. Endvidere redegør modellen for det lange boom, som

fremkom i 1920'erne. Under den store depression i 1930'erne er faldet i forbruget så stort, at modellen forudsiger endnu større fald i aktiepriserne end, hvad der faktisk fremkom i perioden. Modellen sporer ligeledes restitutionen efter 2. Verdenskrig, forbrugs- samt aktieboom i 1960'erne, samt den cykliske nedgang i 1970'erne, og igen et boom i forbrug og aktiepriserne i 1980'erne. Der, hvor modellen performer dårligst, er i 1990'erne, hvor forbrugsvæksten for ikkevarige varer og serviceydelser er overraskende langsom, hvilket resulterer i, at forbrug nærmer sig habit niveauet, hvilket medfører, at modellen forudsiger et fald i pris/dividende ratioer frem for den stigning, som empirisk fremkommer i datasættet.

Ligning (44) for diskonteringsfaktoren understreger, at Campbell-Cochrane modellen medfører en fundamental ændring i, hvordan risikopræmien skal forstås. I modellen frygter investor aktier primært, fordi det er sandsynligt, at aktier klarer sig dårligt i en recession, tidspunkter, hvor overskudsforbrugsratioen er lav. Som tidligere nævnt jævnfør afsnit 5.1 indgår $(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$ og $(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma}$ symmetrisk i formlen, men da volatiliteten i $(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$ er så lav, gælder det, at den essentielt ikke udgør noget i risikopræmien. Volatiliteten i $(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma}$ er meget større og udgør stort set hele risikopræmien. Variationen i forventet afkast for forskellige afkast er primært drevet af kovariansen mellem variationen mellem forskellige aktiver og recessioner frem for kovariansen mellem forskellige aktiver og forbrugsvækst. På kort sigt bevæger S_t og C_t sig sammen, således, at sondring mellem variable for recession tilstand og forbrugsrisiko er minimal. På længere sigt bliver S_{t+k} dog mindre betinget korreleret med C_{t+k} . S_{t+k} afhænger af C_{t+k} relativt til dens nylig fortid, men det overordnede forbrugsniveau kan både være højt og lavt. Derfor frygter investor aktier, grundet, at aktier klarer sig dårligt i dybe recessioner, hvilket ikke er relateret til den risiko, der er forbundet med langsigtet gennemsnitlig forbrugsvækst.

5.2.3 Evaluering af Campbell-Cochrane modellen

I dette afsnit vil nogle af de store indsigelser mod modellen blive evalueret. Det er følgende, at modellen ikke tillader heterogenitet blandt forbrugerne, at den antager usandsynlig høj risikoaversion samt, at den bygger på ekstern habit frem for den mere normalt anvendte intern habit specifikation. Campbells og Cochranes mål er at finde præferencer for en repræsentativ agent, som forklarer den fælles adfærd for aggregeret forbrug og aktieafkast. Disse præferencer kan tage den samme form som de underliggende præferencer for individuelle agenter, men de kan også fremkomme fra aggregering af heterogene forbrugere med forskellige præferencer. Ikke desto mindre

finder Campbell og Cochrane ekstern habit formation tiltalende som forklaring af individuelle præferencer, og modellen med en repræsentativ agent er også mere overbevisende, hvis dens præferencer fremkommer som resultat af aggregering af individer med lignende præferencer (Campbell & Cochrane, 1999, s. 242). Deres model, hvor de anvender parameterværdier således, at habit er omkring 5 procent under forbrug, forekommer i begyndelsen at være i uoverensstemmelse med variationen i velstand og forbrug. Hvis alle har det samme habit niveau, vil fattige personer, som har et forbrug på mere end 5 procent under gennemsnittet, have forbrug under habit, hvilket ikke giver nogen mening i den specificeret model. En løsning på ovenstående kan være, at bibeholde identisk vækst i marginal nytte, alt i mens, der tillades noget heterogenitet blandt individers niveau inden for forbrug, nytte eller marginal nytte. Man kan tillade flere forskellige referencegrupper med forskellige velstandsniveauer, ved at lade hver agents habit blive bestemt af det gennemsnitlige forbrugsniveau for hans referencegruppe frem for det gennemsnitlige forbrugsniveau for hele økonomien. Dermed vil individer med lavt forbrugsniveau have samme overskudsforbrugsratio som individer med højt forbrugsniveau, da deres referencegruppe ligeledes har lavt forbrugsniveau. Hver agent har stadig en identisk power nyttefunktion af forskellen mellem sit forbrug og sin habit. Med identiske overskudsforbrugsratioer og forbrugsvækstrater forbliver marginal nytte uændret på trods af, at der er heterogenitet i gruppers forbrugsniveau (Campbell & Cochrane, 1999, s. 242).

En kritik af Campbell-Cochrane modellen kan være, at modellen tillader usandsynlige høje værdier for risikoaversionen. Høj risikoaversion er uønsket i modeller med power nytte, da det medfører uvirkelige forudsigelser for renter og forbrugsvækst, men Campbell-Cochrane modellen løser dette problem. Men mange mennesker er egentlig i mod høj risikoaversion, selvom, at det kan være i overensstemmelse med data på aktivpriser. Agenterne i Campbell-Cochrane modellen udviser høj risikoaversion, men det kan argumenteres, at det er umuligt at undgå høj risikoaversion (eller det er i hvert fald ikke blevet undgået indtil videre) i modeller med identiske agenter, som er i overensstemmelse med fakta for equity premium på både kortsigt og langsigt. Campbell og Cochrane beregner deres risikoaversion for modellen til at være omkring 80 i steady state. Risikoaversion stiger til over 100, når der er lav overskudsforbrugsratio, og selv ved den maksimale overskudsforbrugsratio har de en høj risikoaversion på 60.

Som tidligere nævnt anvender Campbell og Cochrane ekstern habit, hvor habit er bestemt ud fra alle andres forbrug. Men det kan ligeledes være fordelagtigt at beregne marginal nytte og aktivpriser under den antagelse, at habit er internt frem for ekstern. Det er eksempelvis interessant at undersøge, hvorvidt den anvendte ekstern habit specifikation er essentiel for resultaterne, eller om det blot er en bekvem simplificering. Det er muligt, at ekstern habit frem for intern habit blot medfører en lille forskel på aggregeret forbrug og prisfastsættelse af aktiver. Ved intern habit vil forbrug i dag medføre en stigning i fremtidig habit, hvilket overordnet mindsker marginal nytte af forbrug i dag. Men aktivpriser er bestemt af marginal nytteratioer. Hvis intern habit mindsker marginal nytte på alle tidspunkter med den samme proportion, så vil et skift fra anvendelse af ekstern habit til anvendelse af intern habit ikke have nogen effekt på allokering og aktivpriser (Campbell & Cochrane, 1999, s. 247).

Ved at gennemføre deres analyse en gang til, hvor der i stedet anvendes intern habit specifikation, finder Campbell og Cochrane, at mange tidligere træk ved forudsigelse af aktivpriser er bibeholdt. Det gennemsnitlige merafkast er ikke meget påvirket, og pris/dividende ratioer og forventede afkast varierer med variablen S omkring det samme som før. Dog har den lille afvigelse fra proportionalitet af marginal nytte signifikante effekter på andre forudsigelser. Mest vigtigt, så medfører versionen med intern habit, at modellen genererer risikofri renter, som er højere og varierer med variablen S , således at merafkast er en mindre følsom funktion af variablen S og er mindre forudsigelig (Campbell & Cochrane, 1999, s. 250).

5.2.4 Delkonklusion

Ud fra ovenstående analyse kan det kort opsummeres, at der er dokumenteret flere empiriske succeser for Campbells og Cochranes forbrugsbaserede model med ekstern habit formation. Deres model genererer langsigtede forudsigelser for merafkast for aktier og obligationer fra dividende/pris ratioen. Modellen generer høje aktiepriser og afkast volatilitet på trods af jævn og uforudsigelige dividende bevægelser. Alle ovenfor nævnte bevægelser linkes til økonomiske fluktuationer. Når forbrug falder, vil forventede afkast, afkast volatilitet samt prisen på risiko stige, og pris/dividende ratioer falde. Modellen forudsiger ligeledes mange af de puzzles, som standardmodellen ligeså oplever, som equity premium og risk-free rate puzzles samt den lave ubetingede korrelation mellem forbrugsvækst og aktieafkast. Når Campbell og Cochrane giver deres model faktiske forbrugsdata, er modellen i stand til at opfange de store konjunkturforløbs udsving i aktiepriser over det sidste århundrede. Resultaterne er stort set uændret, uanset om der anvendes con-

sumption claim eller den mere volatile dividend claim, som er meget dårligt korreleret med forbrug. Campbell og Cochrane finder, at individer frygter aktier primært på grund af at aktier klarer sig dårligt i recessioner, altså perioder, hvor overskudsforbrugsratioen er lav, og ikke fordi aktieafkast er korreleret med fald i velstand eller forbrug. Parameterværdierne i deres kalibrerede model antyder, at habit i gennemsnittet blot ligger 5 procent under forbrug. Denne grad af habit formation virker ekstrem, men det er denne kalibrering, som giver det mest jævne forbrug og højeste equity premium. Modellen giver håb til, at det finansielle forskningsområde produktivt kan søge efter fundamentale risikofaktorer, som i det mindste forklarer den tidsmæssige opførsel af aggregerede aktieafkast frem for blot at relatere nogle aktivafkast til andre aktivafkast. Deres model antyder ligeledes, at habit formation eller et andet instrument, som kan generere tidsvarierende kontracyklisk risikopræmie samtidig med en relativ konstant risikofri rente, er et vigtigt element, hvis man skal producere makroøkonomiske modeller med realistiske produktionssektorer, som opfanger bevægelser i aktivpriser.

5.3 GMM estimering af Campbell-Cochrane modellen

Da Campbell og Cochrane analyserer deres model udelukkende ved kalibrering og simulering, er det relevant at inddrage en analyse, hvor der i stedet anvendes økonometrisk estimering og testning af modellen. Derfor præsenteres Stig V. Møller og hans bidrag til litteraturen, hvor han tester Campbell-Cochrane modellen på det amerikanske marked ved at anvende Generalized Method of Moments. Begrundelsen for at vælge netop hans analyse af modellen er, at han anvender den iterative GMM metode, som er blevet gennemgået tidligere i afhandlingens afsnit 3. Han tester modellen på det amerikanske aktiemarked i perioden 1947-2007. Modellen estimeres ved at anvende de 25 Fama og French value og size porteføljer, hvilket Møller argumenterer ikke er blevet gjort før. Endvidere tilføjer han 10 industri porteføljer.

5.3.1 Tilføjelse til modellen

Den stokastiske diskonteringsfaktor kan ud fra ligning (44) omskrives på følgende måde:

$$M_{t+1} = \delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} = \delta e^{-\gamma \{g + (\phi-1)(s_t - \bar{s}) + [1 + \lambda(s_t)]v_{t+1}\}} \quad (54)$$

Og den risikofri rente kan jævnfør ligning (52) ligeledes omskrives på følgende måde:

$$r_{t+1}^f = \log \left[\frac{1}{E_t[M_{t+1}]} \right] = -\log(\delta) + \gamma g - \frac{\gamma(1 - \phi) - B}{2} - B(s_t - \bar{s}) \quad (55)$$

Parameteren B styrer både den cykliske risikofri rente og hældningen for den reale rentekurve. Hvis B har en positiv værdi, er det ensbetydende med en kontracyklisk real risikofri rente og en opadgående rentekurve. Hvis B har negative værdier er det ensbetydende med procykliske real risikofri rente og en nedadgående rentekurve. Med procyklisk menes der, at renten er konjunkturmedløbende. Hvis B=0 svarer det til baseline versionen af Campbell-Cochrane modellen med en konstant real risikofri rente og en flad rentestruktur, som blev analyseret i afhandlingens foregående afsnit. Møller undersøger, hvorvidt modellen er i stand til at forklare de gennemsnitlige værdier for den risikofrie realrente og det reale rentespænd. På den måde vil GMM estimeringen af modelparametrene være baseret på både data for aktier og obligationer. Da der i analysen inddrages den reale rentekurve, udledes nedenstående for det to-perioders reale rentespænd:

$$\gamma_{2,t} - \gamma_{1,t} = -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} -0.5(\gamma(1 - \phi) - B \\ +(\gamma(1 - \phi) + B(\phi - 2))(s_t - \bar{s}) \\ +0.5\sigma_c^2[B\lambda(s_t) - \gamma - \gamma\lambda(s_t)]^2 \end{array} \right] \quad (56)$$

5.3.2 Opstilling af momentbetingelser

Momentbetingelserne vælges således, at de kan anvendes til at undersøge, hvorledes modellen simultant kan forklare tværnsnitsvariationen i aktieafkast, tidsvarierende forventede aktieafkast samt de gennemsnitlige værdier for den reale risikofri rente og det reale rentespænd. Dermed bliver de valgte momentbetingelser følgende:

$$E[R_{t+1}\delta e^{-\gamma\{g+(\phi-1)(s_t-\bar{s})+[1+\lambda(s_t)v_{t+1}]\}} - 1] = 0_{N \times 1}$$

$$E[(r_{t+1} - r_{t+1}^f - \alpha - \beta s_{t-1})(1s_{t-1})'] = 0_{2 \times 1}$$

$$E\left[r_{t+1}^f + \log(\delta) - \gamma g + \frac{\gamma(1-\phi) - B}{2} + B(s_t - \bar{s})\right] = 0$$

$$E\left[\gamma_{2,t} - \gamma_{1,t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0.5(\gamma(1-\phi) - B) \\ +(\gamma(1-\phi) + B(\phi - 2))(s_t - \bar{s}) \\ +0.5\sigma_c^2[B\lambda(s_t) - \gamma - \gamma\lambda(s_t)]^2 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$E[\Delta c_{t+1} - g] = 0$$

$$E[(\Delta c_{t+1} - g)^2 - \sigma_c^2] = 0$$

Formålet med den første momentbetingelse, hvor R_{t+1} indeholder det reale bruttoafkast for en vektor af N aktiver, er at undersøge, hvorvidt modellen kan forklare tværnsnitsvariation i gennemsnitlige aktieafkast for porteføljer sorteret efter size, book-to-market og industri. Den anden momentbetingelse anvendes til at undersøge, om modellen opfanger tidsvariation i forventede aktieafkast. Derfor undersøges det lineære forhold mellem overskudsforbrugsrationen s_{t-1} og det fremtidige merafkast på det aggregerede aktiemarked $r_{t+1} - r_{t+1}^f$. Parametrene α og β er skærings- og hældningskoefficienter. Den tredje og fjerde momentbetingelse anvendes til at undersøge modellens formåen i at forklare gennemsnitlige værdier for den reale risikofri rente og det reale rentespænd, hvorfor GMM dermed estimerer modellens parametre baseret på både aktie- og obligations markedssdata. Momentbetingelserne fremkommer ved at anvende specifikationen for den reale risikofri rente og den to-perioders reale rentespænd. Slutteligt estimeres middelværdien for forbrugsvækstraten og dens volatilitet baseret på de to sidste momentbetingelser. Estimering af

Campbell-Cochrane modellen kan være kompliceret, da overskudsforbrugsratioen ikke er observerbar på samme måde, som afkast og forbrug er. For at observere s_t processen anvender Møller $s_0 = \bar{s}$ som startværdi for s_t på tidspunkt $t = 0$. Derefter vælges der foreløbige model parameter-værdier, hvorfra s_t processen kan blive konstrueret ved at anvende ligning (45). Ved at definere $g_t(\theta)$ som stikprøvens momentbetingelser baseret på T observationer estimeres parametervektoren $\theta = (\delta, \gamma, B, g, \sigma_c, \alpha, \beta)'$ ved at minimere den kvadratiske kriteriefunktion,

$$g_T(\theta)'Wg_T(\theta)$$

5.3.3 Estimeringsresultater

Campbell-Cochrane modellen bliver testet på fire forskellige porteføljesæt. FF25110 består af de 25 Fama og French porteføljer sorteret efter book-to-market og størrelse samt 10 industri porteføljer. FF615 er de 6 Fama og French porteføljer, som er underliggende Fama og French (1993) faktorerne SMB og HML samt 5 industri porteføljer. S1015 består af 10 decil porteføljer sorteret efter størrelse samt 5 industri porteføljer. BM1015 er 10 decil porteføljer sorteret efter book-to-market samt 5 industri porteføljer. Den øverste del af tabellen angiver parameterestimererne med standardfejl i parentes. Den sidste del af tabellen ved model fit angiver forskellige måder, hvorpå modellen fit kan måles. Her anvendes Hansen J_T test med p-værdier i parentes. Endvidere anvendes RMSE, som er kvadratroden af middelværdien af de kvadrerede prisfejl for N aktiver. RMSE er givet ved:

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{R}_{t+1}^i - E(R_{t+1}^i)]^2} \quad (57)$$

hvor $\bar{R}_{t+1}^i$ er det gennemsnitlige afkast for aktiv i, og $E(R_{t+1}^i) = \frac{1 - \text{cov}(R_{i,t}M_t)}{E(M_t)}$, er modellens forudsagte gennemsnitlige afkast for aktiv i.

Slutteligt anvendes R^2 som et mål for overskudsforbrugsratioens forecastevne. R^2 er givet ved:

$$R^2 = \frac{\text{var}(\beta s_{t-1})}{\text{var}(r_{t+1} - r_{t+1}^f)} \quad (58)$$

Resultaterne for GMM estimeringen ses i tabellen nedenfor.

Tabel 11: GMM estimering af Campbell-Cochrane modellen

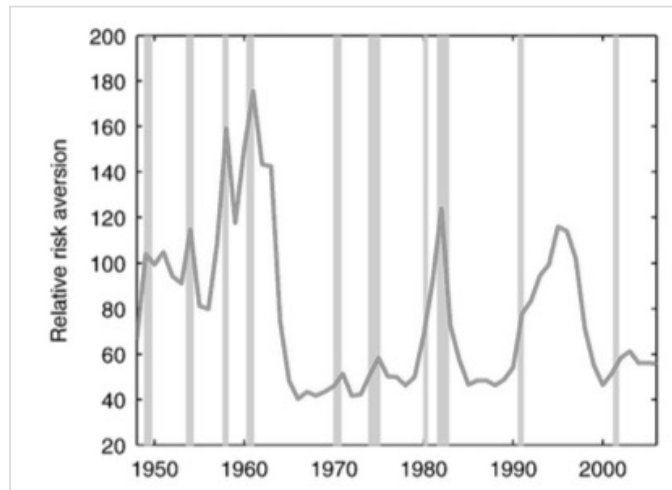
	<i>FF25I10</i>	<i>FF6I5</i>	<i>SI0I5</i>	<i>BM10I5</i>
<i>Parameter estimer</i>				
δ	0.791 (0.120)	0.827 (0.153)	0.895 (0.130)	0.855 (0.093)
γ	3.406 (1.378)	4.295 (2.565)	4.568 (2.684)	3.950 (1.740)
ϕ	0.852 (0.174)	0.886 (0.244)	0.963 (0.262)	0.919 (0.238)
B	− 0.069 (0.632)	− 0.042 (1.036)	− 0.211 (1.202)	− 0.121 (0.985)
g	0.023 (0.002)	0.023 (0.002)	0.023 (0.002)	0.023 (0.002)
σ_c	0.011 (0.001)	0.011 (0.001)	0.011 (0.001)	0.011 (0.001)
α	− 0.328 (0.155)	− 0.349 (0.168)	− 0.205 (0.142)	− 0.275 (0.153)
β	− 0.128 (0.051)	− 0.150 (0.062)	− 0.108 (0.058)	− 0.123 (0.057)
<i>Model fit</i>				
R^2	10.70	10.15	5.84	8.46
$RMSE$	2.16	1.84	1.03	1.39
J_T	56.28 (0.007)	21.19 (0.012)	10.73 (0.634)	27.14 (0.012)

Kilde: Møller, 2009, s. 529

Ud fra ovenstående tabel ses det, at parameterestimererne er økonomisk plausible og ret robuste på tværs af de forskellige porteføljesæt. Estimererne for nyttekurveparameteren γ er statistisk signifikant og spænder fra 3.406 til 4.568.

Figuren nedenfor plotter den relative risikoaversion, som er defineret ved γ/S_t . Det skraverede grå område repræsenterer NBER recessions datoer.

Figur 6: Relativ risikoaversion



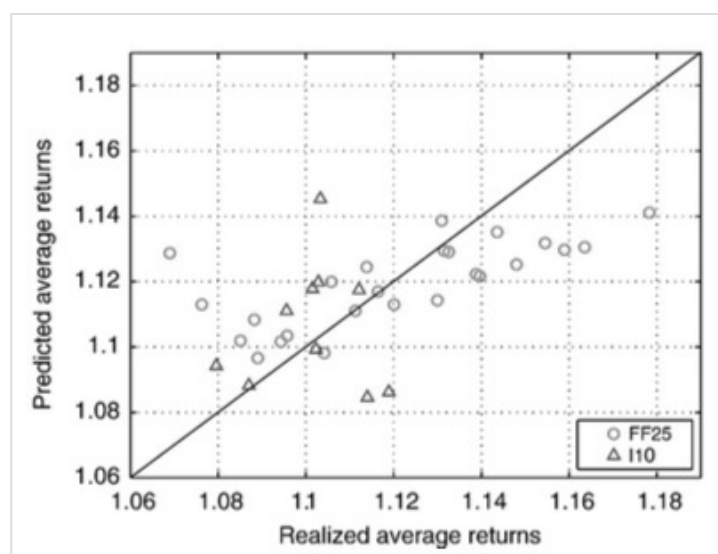
Kilde: Møller, 2009, s. 529

Ovenstående figur 6 er konsistent med det Campbell og Cochrane finder jævnfør afsnit 5.2, hvor risikoaversionen i steady state har en høj værdi på 66, og i perioder med recession, hvor der er en lav overskudsforbrugsratio, er den relative risikoaversion endnu højere. Figuren viser tydelig kontracyklisk grad af tidsvariation i risikoaversion. Den relative risikoaversion har en tendens til at stige ved recessioner og når dens højeste niveau nær slutningen herpå. Estimerne for δ er statistisk signifikante og rangerer fra 0.791 til 0.895. Hvad der er vigtigt er, at δ tager en værdi, som er mindre end 1, hvilket antyder, at Campbell-Cochrane modellen har evnen til at forklare equity premium puzzle uden, at det skaber et risk-free rate puzzle, hvilket ikke var tilfældet med standardmodellen. På trods af høj risikoaversion giver modellen et rimeligt fit af den gennemsnitlige værdi for den reale risikofri rente, og den gør dette, mens den holder utålmodighedsparameteren δ under 1. Møller finder, at modellen er i stand til at forklare den gennemsnitlige værdi af den risikofrie rente, men fejler, når det kommer til forklaring af fluktuationer i den reale risikofri rente. Korrelationen mellem den realiserede og modellens antydede reale risikofri rente er blot på 0.01 jævnfør tabel 11. Renteparameteren B er negativ, hvilket antyder en procyklisk real risikofri rente og en nedadgående rentekurve. Men estimerne for B er ret upræcise og statistisk ikke signifikante. Det negative fortegn for B har modsatrettet betydning for hældningen på rentekurven. Den

gennemsnitlige værdi for modellens antydede 2-årige reale rentespænd rangerer fra -0.82% til -0.26%, hvor den empiriske modpart har en positiv værdi på 0.42%. Endvidere antyder det negative fortegn for B en procyklisk real risikofri rente, således, at høje niveauer af overskudsforbrugsrationen stemmer overens med høje niveauer af den reale risikofri rente. Andre studier har ligeledes fundet en procyklisk real risikofri rente, men der har ligeså været studier, som har fundet det modsatte (Møller, 2009, s. 531). Men kan dermed argumentere, at givet de forskellige resultater for svingninger for den reale risikofri rente, at det ikke er overraskende, at estimerne for B ikke er statistisk signifikante. Estimerne for persistensparameteren ϕ er statistisk signifikant og rangerer fra 0.852 til 0.963. Denne høje grad af persistens antyder, at habit bevæger sig langsomt til bevægelser i forbrug.

For at undersøge modellens tværsnits fit udleder Møller RMSE for de 25 Fama og French porteføljer samt 10 industri porteføljer, hvor han får en forholdsvis høj værdi på 2.16%. For at illustrere det tværsnitsdimensionelle fit yderligere laver Møller et plot med realiserede gennemsnitlige afkast i forhold til modellens forudsagte gennemsnitlige afkast, ligesom der bliver gjort i afhandlingens afsnit 4 for standardmodellen. Som tidligere nævnt kræver et perfekt fit, at alle porteføljer ligger på 45 graders linjen.

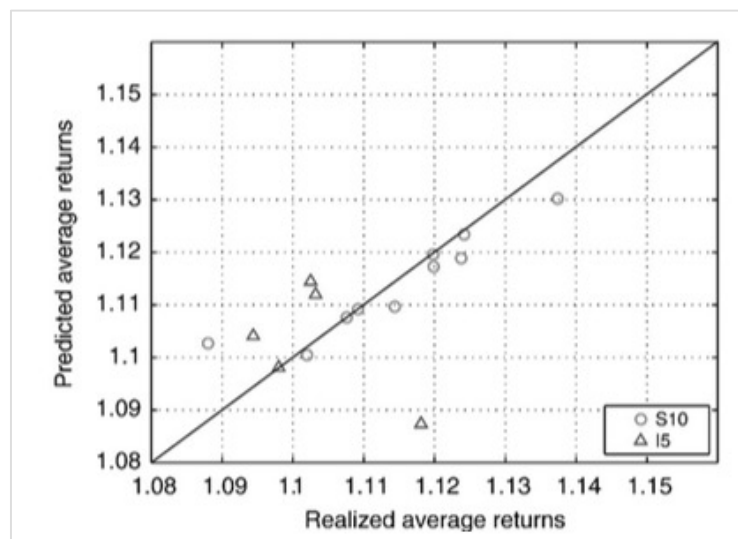
Figur 7: Realiserede gennemsnitlige afkast & modellens forudsagte gennemsnitlige afkast



Kilde: Møller, 2009, s. 530

Ud fra ovenstående figur 7, ses det, at modellen fanger noget af tværsnitsvariation, som der er i afkastene, men prisfejlene virker økonomisk store. Derfor er det heller ikke overraskende, når man ser på J-testen, at den antyder, at prisfejlene er statistisk signifikante forskellige fra 0. Hvis man i stedet kigger på resultaterne for de 6 Fama og French porteføljer samt 5 industri porteføljer, har RMSE stadig en høj værdi på 1.84% og J-testen afviser ligeledes stadig modellen. For at undersøge, hvorledes fejlen i prisfastsættelsen skyldes size dimensionen eller value dimensionen estimerer Møller modellen på henholdsvis 10 size porteføljer samt 5 industri porteføljer og 10 book-to-market porteføljer samt 5 industri porteføljer. Ved den førstnævnte er RMSE blot 1.03% og J-testen afviser ikke længere modellen. For at illustrere dette medtages nedenstående figur 8.

Figur 8: Realiserede gennemsnitlige afkast & modellens forudsagte gennemsnitlige afkast



Kilde: Møller, 2009, s. 531

Figur 8 Illustrerer, at modellen fejler i prisfastsættelsen ved en af industri porteføljerne, men at den ellers giver et godt fit for size premium porteføljerne. Intuitionen bag dette er, at små aktier opnår højere afkast end større aktier, da de har lave payoff i recessioner, hvor forbrug er tæt på habit. RMSE for de 10 book-to-market porteføljer og 5 industri porteføljer er 1.39% og J-testen afviser ligeledes modellen, som tilfældet var i de to førstnævnte portefølje sammensætning. Det ser derfor ud til, at Campbell-Cochrane modellen klarer sig godt, når det kommer til size porteføl-

jer, men fejler i prisfastsættelsen, når det kommer til value porteføljer. Som tidligere nævnt jævnfør afsnit 5.1 har Campbell-Cochrane modellen den implikation, at forventede aktieafkast varierer kontracykliske over konjunkturcyklus, således, at investorer kræver højere forventede afkast i recessionstider, hvor forbrug er tæt på habit. Denne del af modellen undersøger Møller ved at anvende overskudsforbrugsratioen som en forudsigende variabel af fremtidige merafkast på aktier.

Hældningsestimatet β , som ses i tabel 11, er statistisk signifikant negativ, hvilket er ensbetydende med, at lav overskudsforbrugsratio forudsiger høje fremtidige merafkast for aktier. Eksempelvis så er forventede merafkast på aktier høje ved en lavkonjunkturcyklus når forbrug er tæt på habit og lav ved en højkonjunkturcyklus, hvor forbrug er en del over habit. Parametrene α og β er i flest tilfælde statistisk signifikante, hvilket antyder, at overskudsforbrugsration opfanger tidsvariationen i forventede merafkast for aktier. Som det ses i tabel 11 Varierer R^2 statistikken alt efter porteføljesæt fra 5.84% til 10.70%. Når overskudsforbrugsratioen bliver for jævn til at opfange forskelligheden i fremtidige merafkast på aktier, falder R^2 statistikken.

5.3.4 Delkonklusion:

Estimeringen af modellen viser, at modellen har problemer med at forklare value premium, men giver et godt fit, når det kommer til at forklare size premium. Modellens manglende evne til at forklare value premium skyldes den negative korrelation mellem ændringer i forbrug og prisen på risiko, og derfor vil Campbell-Cochrane modellen højst sandsynlig generere en vækst premium frem for en value premium, hvilket relaterer til tidligere arbejde udledt af Vachter (2007) samt Santos og Veronesi (2008). Modellen har vanskeligheder med at forklare cross-sectional variation i forventede aktieafkast, men modellen har evnen til at forklare tidsvariationen i forventede aktieafkast. Modellen antyder, at relativ risikoaversion og forventede aktieafkast er tidsvarierende og kontracykliske. Dette skyldes, at når forbrug er tæt på habit i recessionstider vil den relative risikoaversion være høj og investorer kræver højere forventede risikopræmie for at investere i aktier. Derfor kan det argumenteres, at modellen giver en direkte forbindelse mellem tidsvarierende forventede aktieafkast og konjunktursvingninger.

6 Perspektivering

Med afsæt i afhandlingens analyse af, hvilke implikationer forbrugsvækst har for afkastet på finansielle aktiver, synes det umiddelbart plausibelt, at der fortsat vil være en stigning i udbredelsen af Consumption-based Capital Asset Pricing modeller inden for det finansielle forskningsområde. Dette synspunkt understøttes endvidere af Claus Munk (2013), som argumenterer for, at der fornylig er fremkommet flere udvidelser af standardmodellen som løsningsmuligheder på de tidligere nævnte puzzle og han konkluderer, at: "The consumption-based asset pricing framework is alive and kicking" (Claus Munk, 2013, s. 362). Hvor længe førømtalte udvikling vil gøre sig gældende kan kun fremtiden vise, men da CCAPM er unik i sin evne til at forklare begrebet "risikopræmie på aktier" og tilstedeværelsen af reelle substitutter er fraværende synes det sandsynligt, at CCAPM fortsat vil have en naturlig afsmittende effekt på tilrettelæggelsen af det finansielle forskningsområde. Med førnævnte In Mente er den historiske udvikling af equity premium puzzle et interessant casestudie af, hvorledes ideer formes, indfanges og udvikles inden for det økonomiske og finansielle forskningsområde. I det følgende foretages et kort historisk tilbageblik på udviklingen af CCAP-modellen i henhold til at vurdere fremtidens udviklingsveje angående relationen mellem forbrugsvækst og afkast på finansielle aktiver.

6.1 Historisk tilbageblik på udviklingen af CCAPM modellen

Et naturligt sted at starte, hvad angår den historiske udvikling af CCAPM modellen, er Hansen og Singleton's (1982, 1984) klassiske undersøgelse af standardmodellen, og deres afgørende afvisning af modellen. Blandt andet finder de et "equity premium puzzle", hvor modellen ikke er i stand til at forklare spredningen mellem henholdsvis aktieafkast og obligationsafkast med lave renter. De efterfølgende 20 år har set store anstrengelser sigtet mod den forbrugsbaserede model, hvor flere forskellige problemstillinger har set dagens lys. Disse problemstillinger omfatter bl.a., men ikke udelukkende hvilken nyttefunktion, der bør anvendes, hvorledes tidsaggregering og forbrugsdata bør behandles, og hvorledes anvendelsen af flere varer bør behandles. Endvidere har der opstået spørgsmål om, hvilke aktivafkast og instrumenter, der anses for at være informative. Det empiriske arbejde inden for prisfastsættelse af aktiver har bevæget sig fra industri eller beta porteføljer samt laggede afkast og forbrugsvækst som instrumenter, til i stedet at anvende size, book-to-market og momentum porteføljer samt dividende/pris ratioer, rentespredning og andre mere indflydelsesrige instrumenter.

Med ovennævnte tilbageblik In Mente er det interessant at se nærmere på, hvorledes den forbrugsbaserede model har tacklet ovennævnte problemstillinger/udfordringer Cochrane (2006) argumenterer bl.a. for, at CCAPM historisk set har gennemløbet en 10-årlig periode med deprime-rende afvisninger efterfulgt af en periode med stigende succes og udbredelse. På et eller andet punkt bør den forbrugsbaserede model være korrekt, hvis økonomer skal have noget håb om at kunne beskrive aktiemarkeder. Den økonomiske forståelse af aktiemarkedet skal være baseret på ideen, at folk frygter aktier, da folk frygter, at aktieafkast falder i dårlige økonomiske tider. Der-med fravælger individer at købe flere aktier på trods af attraktive afkast. Cochrane argumenterer, at på et eller andet tidspunkt vil ”dårlige tider” blive afspejlet i en beslutning om at mindske for-brug (Cochrane, 2007, s.267).

Historisk set efterlades et indtryk af en forbrugsbaseret model, hvis anvendelighed blev vurderet utilstrækkelig, men ud fra ovenstående korte redegørelse af Cochranes (2007) synspunkt kan det modsatte argumenteres. På trods af 30 år med empiriske tests, er den forbrugsbaseret model og dens varianter knap nok blevet afprøvet. Feltet for empiriske undersøgelser har ændret sig siden de klassiske undersøgelser af den forbrugsbaseret model og dens udvidelser til ikke-separable nyttefunktioner. I dag bliver enhver model rutinemæssigt undersøgt for size og book-to-market (og i stigende grad momentum) tværsnit frem for industri og beta porteføljer, da forhenværende viser meget mere variation i gennemsnitlige afkast. Når der i dag anvendes instrumenter, bruges få lags af stærke instrumenter, som er kendt for at forecaste afkast, frem for mange lags af afkast eller forbrugsvækst, som er kendt for at være svage instrumenter. Ligeledes er der i dag mere fo-kus på prisfejl frem for p-værdier i sær med plots af faktiske gennemsnitlige afkast mod forudsag-te gennemsnitlige afkast. Fokus ligger derfor hovedsageligt på, at modeller opfanger *nogle* mo-menter ganske godt, selvom de måske fejler, når det kommer til andre momenter. Ligeledes er-kendes det, at simulerings modeller, hvor kunstig data udviser mange mønstre af real data, er inte-ressant, selvom denne type modeller muligvis overser andre mønstre i data, som er nemt forkastet af formelle statistiske tests.

Cochrane (2007) anfører, at det forholder sig således, at vi blot er ved at begynde at forstå, hvor-dan den forbrugsbaserede model og dens udvidelser til ikke-separabel hen over tid, varer og til-stande opfører sig i det moderne undersøgelsesområde. Der er stadig meget, der skal gøres for at forstå, hvor den forbrugsbaserede model virker, hvor den ikke virker, og i hvilket omfang den kan

optimeres og forbedres. Nærværende afhandling har belyst de begrænsninger samt specialiseringer, der på nuværende tidspunkt er for modellen, samt fokuseret på, hvilke momenter, der fordres en nærmere gennemgang af og hvilke der skal ignoreres. Det må derfor stå klart, at der for den enkelte interessent oparbejdes værdifuld viden med indsigt i, hvilke aktiver, horisonter, specifikationer samt instrumenter, der virker, og det må ydermere siges at være tilfredsstillende at være velvidende om, at der på trods af ovenfor nævnte problemstillinger til stadighed eksisterer modeller, der tilnærmelsesvist kan forklare relationen mellem forbrugsvækst og afkast på finansielle aktiver.

6.2 Fremtiden for CCAPM

Finansielle økonomer har endnu ikke produceret en generelt accepteret model for den stokastiske diskonteringsfaktor. Ikke desto mindre er betydelige fremskridt inden for førnævnte område opnået og i dag er det alment kendt og accepteret, at den stokastiske diskonteringsfaktor skal være ekstremt volatil, hvis den skal kunne forklare tværsnitsmønstre for afkast på aktiver. Ligeledes er det nødvendigt, at den betingede forventning af den stokastiske diskonteringsfaktor skal være forholdsvis stabil, for at være i stand til at forklare stabiliteten af den risikofri reale rente (Cochrane, 2007, s. 268).

Ovenfor nævnte krav til egenskaber medfører strenge restriktioner på, hvilke slags modeller med prisfastsættelse af aktiver, som fremadrettet kan blive overvejet (Campbell et. all, 1997, s. 334). De seneste år har der været en stigende interesse for ideen om, at risikoaversion kan variere over tid med den økonomiske tilstand. Tidsvarierende risikoaversion kan forklare den store bunke af beviser om, at merafkast for aktier og andre risikofyldte aktiver er forudsigelige. En mekanisme, som kan producere tidsvarierende risikoaversion er habit formation i nyttefunktionen for en repræsentativ agent. Men det er ligeledes muligt, at investor forekommer at have tidsvarierende risikoaversion, eftersom de handler på basis af irrationelle forventninger, eller at tidsvarierende risikoaversion fremkommer fra interaktioner mellem heterogene agenter. Grossman og Zhou (1996) præsenterer eksempelvis en model, hvor to agenter med forskellige risikoaversions koefficienter handler med hinanden. Den ene af agenterne har en eksogen nedre grænse for formue, og den resulterende ligevægt har en tidsvarierende pris på risiko. Campbell argumenterer, at ovenstående sandsynligvis vil blive et aktivt fremtidigt undersøgelsesområde (Campbell et. all, 1997, s. 335).

Cochrane (2007) argumenterer for, at undersøgelser, som forklarer "the equity premium puzzle" med tiden vil dø ud. På nuværende tidspunkt er der flere præferencer konsistente med risikopræmien og risikofri-renter inklusiv tidligere nævnte habit- og Epstein-Zin præferencer. Ovenfor nævnte præferencer bryder linket mellem risikoaversion og intertemporal substitution, således, at der ingen forbindelse er til "risk-free rate puzzle" længere, og det er nu muligt sammenhængende at beskrive data med høj risikoaversion. På nuværende tidspunkt har det ikke været muligt for en model at forklare risikopræmien med lav risikoaversion og Campbell og Cochrane (1999) argumenterer for nogle årsager til, at dette sandsynligt heller aldrig vil fremkomme. Derfor kan man være nødsaget til fremadrettet at acceptere høj risikoaversion, i hvert fald for at forene aggregeret forbrug med markedsafkast i denne type modeller (Cochrane, 2007, s.266).

Ligeledes er mange økonomers overbevisning om størrelsen på risikopræmien faldende fra 8 procent postwar gennemsnittet, forbi de 6 procent i gennemsnit i længere stikprøver, ned til 2-3 procent eller mindre. Den amerikanske økonomi og andre med høj stikprøve risikopræmie har muligvis blot været heldige. Cochrane (2007) stiller spørgsmålstegn ved, om folk i 1947 virkelig troede, at aktiemarkedet ville opnå afkast på 8 procent per år mere end obligationer, og selv på trods af denne viden om gennemsnittet, vælge ikke at købe flere aktier på grund af en årlig standardafvigelse for aktieafkast på 16 procent fordi aktier på grund af denne virkede til at være for risikofyldte? Eller kan det muligvis tænkes, at det 8 procent store gennemsnit i virkeligheden var en stor overraskelse? På grund af ovenstående årsager bevæger forskningsfokus sig hen i mod at forstå aktieafkasts dynamikker og tværsnit, og dermed enten ignorere risikopræmien eller simpelthen tillade høj risikoaversion for at forklare det. Cochrane antyder, at selvom man aldrig kan vide, hvornår ny indsigt vil fremkomme, er han sikker på, at nye drejninger inden for standardrammerne tiltrækker mindre opmærksomhed (Cochrane, 2007, s. 266).

7 Konklusion

Afhandlingen har haft til hensigt at besvare følgende problemformulering:

”Hvilken implikation har forbrugsvækst for afkastet på finansielle aktiver i USA?”

For at besvare ovenstående problemformulering, er der i afhandlingen blevet undersøgt forskellige udgaver af den forbrugsbaserede CAPM på det amerikanske aktivmarked. Til at starte med undersøges, hvad der i afhandlingen betegnes som standardmodellen med power nytte. Denne model er valgt, da modellen forbinder afkast på finansielle aktiver til makroøkonomien, og relationen mellem det finansielle område og det makroøkonomiske område er helt essentielt, når det kommer til forståelse af sand markedsdynamik. CCAPM prisfastsætter finansielle aktiver under hensyntagen til forbrug, og det er dermed en model, som relaterer den finansielle sektor til realøkonomien. Det teoretiske ræsonnement bag modellen er, at agenterne ønsker at udjævne forbruget. Dette indebærer, at agenter efterspørger højere afkast på investeringer i perioder, hvor der i forvejen er lavt forbrug, og marginalnyttens på forbrug derfor er højt, for på den måde at udjævne forbruget i alle perioder. Dette er ensbetydende med, at aktiver bliver prisfastsat efter deres evne til at udjævne forbrug, hvorfor der i modellen fokuseres på korrelationen mellem forbrug og aktivernes afkast, for på den måde at vurdere, hvilken risiko, der er forbundet med hvert enkelt aktiv. Hvis et aktiv ikke er i stand til at udjævne forbruget anses det som værende risikofyldt, hvorfor investor vil kræve et højere afkast for at holde dette aktiv. I modellen introduceres begrebet ”risikokorrektion”, som bestemmes ved kovariansen mellem den stokastiske diskonteringsfaktor og de anvendte afkast i modellen. Hvis kovariansen er negativ mellem de to variable vil afkastet ikke være i stand til at udjævne forbruget, og det anses dermed for at være risikofyldt. Omvendt sammenhæng er ligeledes gældende, hvor en negativ kovarians er ensbetydende med, at aktivet kan være forbrugsudjævnende, da denne giver et relativt højt afkast i perioder, hvor forbruget i forvejen er relativt lavt.

Ved GMM estimering af standardmodellen findes der i afhandlingen en subjektiv diskonteringsfaktor på lidt over 1, hvilket er ulogisk, da dette er ensbetydende med, at forbrugere har en negativ tidspræference, og dermed påskønner fremtidig forbrug frem for forbrug i dag. I modellen fås en risikoaversion på 172, hvilket er alt for højt, og på ingen måde økonomisk plausibel. Det bemær-

kes endvidere, at hverken den subjektive diskonteringsfaktor eller risikoaversionen er signifikant. Ovenstående resultater er konsistente med tidligere amerikanske undersøgelser af standardmodellen, hvor resultaterne er ensbetydende med, at equity premium puzzle og risk-free rate puzzle opstår. Den primære konklusion på afhandlingens problemformulering set fra standardmodellens evner er derfor, at forbrugsvækst empirisk set ikke har en signifikant påvirkning på variationer i finansielle aktivers afkast. Selvom der i afhandlingen findes korrelationer mellem aktiverne og henholdsvis forbrugsvækst og den stokastiske diskonteringsfaktor, der er i overensstemmelse med de fortegn og i den størrelsesorden som forventet, er korrelationer ikke signifikante. Modellen bliver ikke forkastet af J-testen, men estimerne er ikke i overensstemmelse med de empirisk observerede værdier, og afhandlingen søger derfor at finde en udvidelse af modellen, hvis forklaringskraft er bedre empirisk set.

I afhandlingen undersøges der herefter modeller med habit formation, begrundet i, at investor muligvis har mere komplicerede præferencer end den simple power nytte specifikation, som anvendes i standardmodellen. I modeller med habit formation adskilles den tætte forbindelse, der er mellem risikoaversion og intertemporal substitution, hvor nyttefunktionen er ikke-separabel over tid, hvilket forstås på den måde, at i dags nytte af forbrug afhænger af forbrugsniveauet for tidligere perioder. Afhandlingen undersøger Campbell-Cochrane modellen, som er en model med habit formation. Campbell-Cochrane modellens anvendelighed vurderes ved Campbells og Cochranes egen analyse af modellen, hvor der anvendes kalibreret data og simulering. Slutteligt introduceres Stig V. Møllers GMM estimering af modellen.

Parameterværdierne i deres kalibrerede model antyder, at habit i gennemsnittet blot ligger 5 procent under forbrug. Denne grad af habit formation virker ekstrem, men det er denne kalibrering, som giver det mest jævne forbrug og højeste risikopræmie. Campbell og Cochrane argumenterer, at det ikke kan udelukkes, at investorer har en høj risikoaversion, men en egenskab i netop Campbell-Cochrane modellen er, at den tillader høj risikoaversion uden, at det medfører, at et risk-free rate puzzle opstår. Når Campbell og Cochrane giver deres model faktiske forbrugsdata, er modellen i stand til at opfange de store konjunkturforløbs udsving i aktiepriser over det sidste århundrede. Campbell og Cochrane finder, at individer frygter aktier primært på grund af, at aktier klarer sig dårligt i recessioner, altså perioder, hvor overskudsforbrugsratioen er lav, og ikke fordi aktieafkast er korreleret med fald i velstand eller forbrug. Deres model antyder ligeledes, at habit for-

mation eller et andet instrument, som kan generere tidsvarierende kontracyklisk risikopræmie samtidig med en relativ konstant risikofri rente, er et vigtigt element, hvis man skal producere makroøkonomiske modeller med realistiske produktionssektorer, som opfanger bevægelser i aktivpriser.

Stig V. Møller estimerer i stedet modellen ved at anvende Generalized Method of Moments metoden. Han estimerer modellen ved at anvende de 25 Fama og French porteføljer samt 10 industri porteføljer. Estimeringen af modellen viser, at modellen har problemer med at forklare value premium, men giver et godt fit, når det kommer til at forklare size premium. Modellens manglende evne til at forklare value premium skyldes den negative korrelation mellem ændringer i forbrug og prisen på risiko, og derfor vil Campbell-Cochrane modellen højst sandsynlig generere en vækst premium frem for en value premium. Det kan dermed konkluderes ud fra analysen, at modellen har vanskeligheder med at forklare tværsnitsvariation i forventede aktieafkast, men modellen har evnen til at forklare tidsvariationen i forventede aktieafkast. Modellen antyder, at relativ risikoaversion og forventede aktieafkast er tidsvarierende og kontracykliske. Dette skyldes, at når forbrug er tæt på habit i recessionstider, vil den relative risikoaversion være høj og investorerne kræve højere forventet risikopræmie for at investere i aktier. Derfor kan det argumenteres, at modellen giver en direkte forbindelse mellem tidsvarierende forventede aktieafkast og konjunktursvingninger. Slutteligt kan det på baggrund af analysen konkluderes, at Campbell-Cochrane modellen har evnen til at forudsige aktieafkast i USA, eftersom den kontracykliske risikoaversion i modellen opfanger tidsvarierende forventede afkast. Ovenstående er afledt af, at når forbrug falder mod habit medfører dette, at risikoaversion stiger og ligeledes vil det forventede afkast stige. Omvendt vil risikoaversionen falde, dersom forbrug stiger relativt til habit. Ud fra analysen konkluderes det dermed, at der er dokumenteret flere empiriske succeser for Campbells og Cochranes forbrugsbaserede model med ekstern habit formation. Deres model genererer langsigtede forudsigelser for merafkast for aktier og obligationer med udgangspunkt i dividende/pris ratioen. Alle ovenfor nævnte bevægelser linkes til økonomiske fluktuationer. Når forbrug falder, vil forventede afkast, afkast volatilitet samt prisen på risiko stige, og pris/dividende ratioer falde. Det kan dermed konkluderes, at Campbell-Cochrane modellen er i stand til at forklare sammenhængen i mellem forbrugsvækst og afkast på finansielle aktiver i kontekst til det data, som empirisk er blevet analyseret i afhandlingen.

8. Referencer

Bøger, artikler & rapporter:

Arnold, T., & Crack, T. F. (1999): "*A Practical Guide to GMM.*" s. 1-35.

Benartzi, S., & Thaler, R. (1995): "*Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle.*" Quarterly Journal of Economics, 110, s. 73-92.

Breeden, D. T. (1979): "*An Intertemporal Asset Pricing Model with stochastic Consumption and Investment Opportunities.*" Journal of Financial Economics, 7, s. 265-296.

Campbell, J. Y. (2003): "*Consumption-Based Asset Pricing.*" Handbook of the Economics of Finance, s. 803-997.

Campbell, J. U., & Cochrane, J. H. (1999): "*By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior.*" The Journal of Political Economy, 107, s. 205-251.

Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997): "*Intertemporal Equilibrium Models.*" The Econometrics of Financial Markets, New Jersey: Princeton University Press, s. 291-338

Cecchetti, S. G. & Schoenholtz, K. L. (2015): "*Money, Banking and Financial Markets.*" McGraw-Hill. Fourth Edition, s. 189-208.

Chaussé, P. (2009): "*Computing GEL and GMM with R.*" Journal of Statistical Software, s. 1-37.

Cochrane, J. H. (2000): "*Asset Pricing*." Chicago, s. 1-245.

Cochrane, J. H. (2007): "*Financial Markets and the Real Economy*." In R. Mehra, *Handbook of the Equity Risk Premium*, Amsterdam: Elsevier B.V., s. 237-330.

Constantinides, G. & Duffie, D. (1996): "*Asset Pricing with Heterogeneous Consumers*." *Journal of Political Economy* 104, s. 200-240

Fama, E. F. & French, K. (1989): "*Business Conditions and Expected Returns on Stocks and Bonds*." *Journal of Financial Economics* 25, s. 1-49.

Garcia, R. E & Semenov, A. (2005): "*A Consumption CAPM with a Reference Level*." Working paper, York University.

Grossman, S., Melino, A. & Shiller, R. (1987): "*Estimating the Continuous Time Consumption Based Asset Pricing Model*." *Journal of Business and Economic Statistics* 5, s. 300-328.

Hansen, L. P., & Singleton, K. J. (1982): "*Generalized Instrumental Variables Estimation of Non-linear Rational Expectations Models*." *Econometrica*, Vol. 50, No. 5., s. 1269-1286.

Heij, C., Boer, P. d., Franses, P. H., Kloek, T., & Dijk, H. K. (2004): "*Econometric Methods with Applications in Business and Economics*." Oxford University Press.

Lucas, D. (1994): "*Asset Pricing with Undiversifiable Risk and Short Sales Constraints*." *Journal of Monetary Economics* 34, s. 300-350.

Mankiw, N. G. & Zeldes, S. (1991): "*The Consumption of Stockholders and Non-Stockholder.*" Journal of Financial Economics 29, s. 97-112.

Mehra, R & C. Prescott, E. (1985): "*The Equity Premium – A Puzzle.*" Journal of Monetary Economics 15.

Munk, C. (2013): "*Financial Asset Pricing Theory.*"

Møller, S. V. (2008): "*Habit persistence, consumption based asset pricing, and time-varying expected returns.*" Aarhus C: School of Economics and Management University of Aarhus.

Møller, S. V. (2009): "*Habit persistence: Explaining cross-sectional variation in returns and time-varying expected returns.*" Journal of Empirical Finance 16, s. 525–536.

Nielsen, H. B. (2005): "*Generalized Method of Moments Estimation.*" Econometrics 2, s. 1-28.

Economic Sciences Prize Committee (2013): "*Understanding Asset Prices.*" s. 1-56.

Shiller, R. J. (2003): "*From Efficient Markets Theory to Behavioral Finance.*" Journal of Economic Perspectives, s. 83-104.

Shiller, R. J. (1984): "*Stock Prices and Social Dynamics.*" Cowles Foundation Paper 616, s. 457-510.

Verbeek, M. (2002): "*Endogeneity, Instrument Variables and GMM.*" In M. Verbeek, *A Guide to Modern Econometrics*, Erasmus University Rotterdam: John Wiley & Sons, Ltd., s. 121-161.

Datamateriale:

Shiller, R: <http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>

Hentet d. 1.4-2016

Verbeek, M: <http://eu.wiley.com/legacy/wileychi/verbeek2ed/datasets.html>

Hentet d. 1.4-2016

Statistisk software:

Chausse, P. (2010): "*Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R.*" Journal of Statistical Software, 34(11), 1-35. URL <http://www.jstatsoft.org/v34/i11/>.

Henningsen, A. & Toomet, O. (2011): "*maxLik: A package for maximum likelihood estimation in R.*" Computational Statistics 26(3), 443-458. DOI 10.1007/s00180-010-0217-1.

Kleiber, C & Zeileis, A. (2008): "*Applied Econometrics with R.*" New York: Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-77316-2. URL <http://CRAN.R-project.org/package=AER>

Trapletti, A & Hornik, K (2016): "*tseries: Time Series Analysis and Computational Finance.*" R package version 0.10-35.

Zeileis, A. & Hothorn, T. (2002): "*Diagnostic Checking in Regression Relationships*". R News 2(3), 7-10. URL <http://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>

Appendiks A

Udledning af logaritmen til den risikofrie rente i standardmodellen.

Appendiks A tager udgangspunkt i Campbell (2003), hvor han udleder logaritmen til den risikofrie rente. Der antages, at forbrug og aktivafkast er betinget log-normalfordelt og homoskedastisk. Der tages udgangspunkt i følgende regneregler:

Såfremt, at en stokastisk variabel X er betinget log-normalfordelt, vil følgende være gældende:

$$\log(E_t[x]) = E_t[\log(X)] + \frac{1}{2}Var_t[\log(X)] \quad (\text{a.1})$$

hvor

$$Var_t[\log(x)] = E_t[(\log(X) - E_t[\log(X)])^2] \quad (\text{a.2})$$

Hvis det samtidig er gældende, at X er betinget homoskedastisk kan (a.2) omformuleres til:

$$\begin{aligned} Var_t[\log(X)] &= E[(\log(X) - E_t[\log(X)])^2] \\ Var_t[\log(X)] &= Var[(\log(X) - E_t[\log(X)])] \end{aligned} \quad (\text{a.3})$$

Endvidere anvendes følgende logaritmeregneregler:

$$\log(A * B * C) = \log(A) + \log(B) + \log(c) \quad (\text{a.4})$$

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log(A) - \log(B) \quad (\text{a.5})$$

$$\log(A^x) = x * \log(A) \quad (\text{a.6})$$

Varians beregnes ved følgende formel:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{COV}(X, Y) \quad (\text{a.7})$$

For at finde logaritmen til den risikofrie rente, tages der udgangspunkt i eulerligningen i standardmodellen, hvor logaritmen hertil:

$$0 = \log\left(E_t\left[(1 + R_{t+1}^i)\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right]\right) \quad (\text{a.8})$$

Ved at benytte (a.1), (a.4), (a.5) samt (a.6) kan (a.8) omskrives til følgende:

$$0 = E_t[r_{t+1}^i + \log(\delta) - \gamma\Delta c_{t+1}] + \frac{1}{2}\text{Var}_t[r_{t+1}^i + \log(\delta) - \gamma\Delta c_{t+1}] \quad (\text{a.9})$$

$$\text{hvor } r_{t+1}^i = (1 + R_{t+1}^i) \text{ og } \Delta c_{t+1} = \log(C_{t+1}) - \log(C_t)$$

Jævnfør Campbell (2003) vil det være således, at hvis man tager forventningen til en konstant er det lig konstanten selv. Hvis man tager variansen til en konstant, er variansen lig 0. Da δ og γ er konstanter kan ligning (a.9) reduceres til følgende:

$$0 = E_t[r_{t+1}^i] + \log(\delta) - \gamma E_t[\Delta c_{t+1}] + \frac{1}{2} Var_t[r_{t+1}^i - \gamma \Delta c_{t+1}] \quad (\text{a.10})$$

Afkastet på aktiv i r_{t+1}^i og forbrugsvæksten Δc_{t+1} er ikke uafhængige og derfor kan (a.3) udnyttes. Hvis der samtidig anvendes formelen for varians (a.7) og det forventede afkast for aktiv i isoleres kan det udtrykkes på følgende måde:

$$E_t[r_{t+1}^i] = -\log(\delta) + \gamma E_t[\Delta c_{t+1}] - \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma \sigma_{ic}) \quad (\text{a.11})$$

$Var[r_{t+1}^i - E_t[r_{t+1}^i]]$ betegnes som den ubetinget varians af innovationer i afkastet for aktiv i og som kan betegnes på følgende måde, σ_i^2 . $Var[\Delta c_{t+1} - E_t[\Delta c_{t+1}]] = Var[c_{t+1} - E_t[c_{t+1}]]$ er den ubetingede varians af innovationer i forbruget og betegnes som σ_c^2 . Den ubetingede kovarians i innovationer mellem afkast og forbrug er givet ved $Cov[r_{t+1}^i - E_t[r_{t+1}^i], c_{t+1} - E_t[c_{t+1}]]$ og dette betegnes σ_{ic} . Ovenstående ligning (a.11) er gældende for alle aktiver. Da det er logaritmen til den risikofrie rente der ønskes at blive fundet gælder det, at variansen af afkastet σ_i^2 for et risikofrit afkast er lig 0. Ligeledes er kovariansen mellem afkast og forbrug σ_{ic} lig 0. Dermed kan ovenstående ligning reduceres til følgende:

$$r_{t+1}^f = -\log(\delta) + \gamma E_t[\Delta c_{t+1}] - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2} \quad (\text{a.12})$$

Appendiks B

Udledning af logaritmen til den risikofrie rente i Campbell-Cochrane modellen.

Den risikofrie rente i Campbell-Cochrane modellen udregnes som reciprokke til den betingede forventede stokastiske diskonteringsfaktor. Dermed kan logaritmen til den risikofrie rente udtrykkes på følgende måde:

$$\begin{aligned} r_{t+1}^f &= \log \left(\frac{1}{E_t[M_{t+1}]} \right) \\ r_{t+1}^f &= -\log(E_t[M_{t+1}]) \end{aligned} \tag{b.1}$$

Campbell og Cochrane antager, at den stokastiske diskonteringsfaktor er log-normalfordelt. Derfor kan samme regneregler som i appendiks A, angående en stokastisk variabel som er log-normalfordelt, anvendes. Logaritmen til den stokastiske diskonteringsfaktor i Campbell-Cochrane modellen udtrykkes på følgende måde:

$$m_{t+1} = \log \left(\delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right) \tag{b.2}$$

Ovenstående kan omskrives til følgende ved at anvende logaritmeregnereglerne fra appendiks A:

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \log(\delta) - \gamma(s_{t+1} - s_t) - \gamma(c_{t+1} - c_t) \\ \text{hvor } s_t &= \log(S_t), \text{ og } c_t = \log(C_t) \end{aligned} \tag{b.3}$$

Campbell og Cochrane specificerer $\Delta c_{t+1} = g + v_{t+1}$ og dermed kan ovenstående ligning omformuleres til:

$$m_{t+1} = \log(\delta) - \gamma(s_{t+1} - s_t) - \gamma(g + v_{t+1}) \tag{b.4}$$

Endvidere specificerer Campbell og Cochrane at logaritmen til overskudsforbrugsratioen betegnes på følgende måde:

$$s_{t+1} = (1 - \phi)\bar{s} + \phi s_t + \lambda(s_t)v_{t+1} \quad (\text{b.5})$$

Indsættes ligning (b.5) i ligning (b.4), fås:

$$m_{t+1} = \log(\delta) - \gamma((1 - \phi)\bar{s} + \phi s_t + \lambda(s_t)v_{t+1} - s_t) - \gamma(g + v_{t+1}) \quad (\text{b.6})$$

Ovenstående ligning (b.6) kan reduceres til følgende:

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \log(\delta) - \gamma((1 - \phi)\bar{s} + \phi s_t + \lambda(s_t)v_{t+1} - s_t) - \gamma g - \gamma v_{t+1} \\ m_{t+1} &= \log(\delta) - \gamma g - \gamma((1 - \phi)\bar{s} + (\phi - 1)s_t) - \gamma \lambda(s_t)v_{t+1} - \gamma v_{t+1} \\ m_{t+1} &= \log(\delta) - \gamma g - \gamma(1 - \phi)(\bar{s} - s_t) - \gamma(\lambda(s_t) + 1)v_{t+1} \\ m_{t+1} &= \log(\delta) - \gamma g + \gamma(1 - \phi)(s_t - \bar{s}) - \gamma(\lambda(s_t) + 1)v_{t+1} \end{aligned} \quad (\text{b.7})$$

Som tidligere nævnt antages den stokastiske diskonteringsfaktor for at være log-normalfordelt og dermed kan ligning (b.1) omformuleres på følgende måde:

$$\begin{aligned} r_{t+1}^f &= -E_t[\log(M_{t+1})] - \frac{1}{2}Var_t[\log(M_{t+1})] \\ r_{t+1}^f &= -E_t[M_{t+1}] - \frac{1}{2}Var_t[M_{t+1}] \end{aligned} \quad (\text{b.8})$$

Ved at substituere (b.7) ind i (b.8) fås følgende udtryk for logaritmen til den risikofrie rente:

$$\begin{aligned} r_{t+1}^f = & -E_t[\log(\delta) - \gamma g + \gamma(1 - \phi)(s_t - \bar{s}) - \gamma(\lambda(s_t) + 1)v_{t+1}] \\ & - \frac{1}{2} \text{Var}_t[\log(\delta) - \gamma g + \gamma(1 - \phi)(s_t - \bar{s}) \\ & - \gamma(\lambda(s_t) + 1)v_{t+1}] \end{aligned} \quad (\text{b.9})$$

Da v_{t+1} er den eneste stokastiske variabel på tidspunkt t kan ovenstående ligning omformuleres til:

$$\begin{aligned} r_{t+1}^f = & -\log(\delta) + \gamma g - \gamma(1 - \phi)(s_t - \bar{s}) + \gamma(\lambda(s_t) + 1)E_t[v_{t+1}] \\ & - \frac{\gamma^2}{2} (\lambda(s_t) + 1)^2 \text{Var}_t[v_{t+1}] \end{aligned} \quad (\text{b.10})$$

Den forventede værdi af v_{t+1} er lig 0 og variansen af v_{t+1} er σ_v^2 kan ovenstående udtryk reduceres til følgende:

$$r_{t+1}^f = -\log(\delta) + \gamma g - \gamma(1 - \phi)(s_t - \bar{s}) - \frac{\gamma^2 \sigma_v^2}{2} (\lambda(s_t) + 1)^2 \quad (\text{b.11})$$

Ovenstående ligning (b.11) er dermed logaritmen til den risikofrie rente i Campbell-Cochrane modellen.

Appendiks C

R kode til GMM estimering af standardmodellen på eget datasæt.

```
# En GMM estimering af CCAPM med power nytte

# Installerer pakker

library(gmm)

library(tseries)

library(AER)

library(sem)

library(lmtest)

library(maxLik)

library(gdata)


# Laver tidsserier for de 4 variable

Forbrug <- ts (Data [1:59,2], start=c(1950,1), frequency=1)

Risikofri <- ts (Data [1:59,3], start=c(1950,1), frequency=1)

Obligationer <- ts (Data [1:59,4], start=c(1950,1), frequency=1)

Aktier <- ts (Data [1:59,5], start=c(1950,1), frequency=1)


# Laver plots af de forskellige tidsserier for grafisk at undersøge om serierne er stationære

par(mfrow=c(2,2))

plot.ts(Forbrug, main = "Forbrugsvækst", xlab="År", ylab="Vækstrate")

plot.ts(Risikofri, main = "3 mdr. obligation", xlab="År", ylab="Afkast i procent")
```

```
plot.ts(Obligationer, main = "10-årig Amerikansk statsobligation", xlab="År", ylab="Afkast i procent")
```

```
plot.ts(Aktier, main = "Aktier", xlab="År", ylab="Afkast i procent")
```

```
# Data overblik, som skal anvendes til deskriptiv statistik
```

```
summary(Aktier)
```

```
summary(Forbrug)
```

```
summary(Risikofri)
```

```
summary(Obligationer)
```

```
sd(Aktier)
```

```
sd(Forbrug)
```

```
sd(Risikofri)
```

```
sd(Obligationer)
```

```
# Dickey Fuller test for at undersøge, hvorvidt variablene er stationære
```

```
adf.test(Aktier, k=2)
```

```
adf.test(Forbrug, k=2)
```

```
adf.test(Risikofri, k=2)
```

```
adf.test(Obligationer, k=2)
```

```
# Differenser tidsserier for de variable, som ikke er stationære
```

```
dRisikofri<-diff(Risikofri,differences=1)
```

```
dObligationer<-diff(Obligationer,differences=1)
```

```
# Ny adf test på differensede serier for at se om de nu er stationære
```

```
adf.test(dRisikofri)
```

```
adf.test(dObligationer)
```

```
# Nye plots af de stationære tidsserier
```

```
par(mfrow=c(2,2))
```

```
plot.ts(dRisikofri, main="Differenset 3 mdr. obligation", xlab="År", ylab="Forskel i afkast")
```

```
plot.ts(dObligationer, main="Differenset 10-årig obligation", xlab="År", ylab="Forskel i afkast")
```

```
# Korrelationstest med forbrugsvækst
```

```
# Risikofri & forbrug
```

```
cor.test(Data[,3],Data[,2], use="complete.obs")
```

```
# Obligationer & forbrug
```

```
cor.test(Data[,4],Data[,2], use="complete.obs")
```

```
# Aktier & forbrug
```

```
cor.test(Data[,5],Data[,2], use="complete.obs")
```

```
# Laver diskonteringsfaktoren med startværdier (1,5)
```

```
Diskonteringsfaktor = 1*Data[,2]^(-5)
```

```
sdf.mat = as.matrix(Diskonteringsfaktor)
```

```
# Laver korrelationstest med diskonteringsfaktoren
```

```
# Risikofri & diskonteringsfaktor
```

```
cor.test(Data[,3],sdf.mat[,1], use="complete.obs")
```



```
# Obligationer & diskonteringsfaktor
```

```
cor.test(Data[,4],sdf.mat[,1], use="complete.obs")
```

```
# Aktier & diskonteringsfaktor
```

```
cor.test(Data[,5],sdf.mat[,1], use="complete.obs")
```

```
# Laver matrice med de nye tidsserier
```

```
dRF <- as.matrix(dRisikofri)
```

```
dTen <- as.matrix(dObligationer)
```

```
diff.matrice <- cbind(dRF, dTen)
```

```
# Korrelationstest af de differensede serier med forbrug og diskonteringsfaktoren
```

```
# Bliver nødt til at fjerne en række, da diff-serien er en række mindre
```

```
NYGMM = Data[-59,]
```

```
cor.test(diff.matrice[,1],NYGMM[,2], use="complete.obs")
```

```
cor.test(diff.matrice[,2],NYGMM[,2], use="complete.obs")
```

```
NYDFAKTOR = as.matrix(sdf.mat[-59,])
```

```
cor.test(diff.matrice[,1],NYDFAKTOR[,1], use="complete.obs")
```

```
cor.test(diff.matrice[,2],NYDFAKTOR[,1], use="complete.obs")
```

```
cor.test(diff.matrice[,3],NYDFAKTOR[,1], use="complete.obs")
```

```
# Beskærer datasættet således, at det passer med diff-serierne & matricerne kan forbindes
```

```
GMM = Data
```

```
GMM.df = GMM[-59,]
```

```
Tidsserier = as.matrix(cbind(dRF, dTen, GMM.df)) # Laver matrix

# Klargør instrumentvariable - Beregner merafkastet for aktier og obligationer

ExcessAktier<-Aktier-dRisikofri

ExcessBonds<-dObligationer-dRisikofri


# Beregning af risikopræmie

riskpremium<-Aktier-Risikofri

summary(riskpremium)

sd(riskpremium)

cor.test(Aktier,riskpremium)


# Plot med aktieafkast, risikopræmie & risikofri rente

par(mfrow=c(1,1))

plot.zoo(cbind(Aktier,Risikofri,riskpremium),

        xlab="År", ylab="Procent",

        lty = c(1:3),

        legend("bottomleft", c("Aktieafkast", "Risikofri rente", "Risikopræmie"),lty = c(1:3)))


# Klargør matrice med data til GMM estimeringen

GMMdata.mat = cbind(Tidsserier[,9],1+Tidsserier[,1],ExcessAktier,ExcessBonds)

colnames(GMMdata.mat) = c("Forbrugsratio","1+risikofri","ExcessAktier","ExcessBonds")


# Opstiller momentbetingelser m1, m2 & m3, herunder definition af sdf
```

```
# Definerer funktion med momentbetingelser med tomme input parametre og x

Momentbetingelser <- function(parm,x=NULL) {

  delta<-parm[1] # parameter for diskonteringsfaktor

  gamma<-parm[2] # parameter for relativ risikoaversion

  # data = (Forbrugsratio, 1+drf, Merafkast)

  sdf = delta*x[,1]^(-gamma)

  m1 = sdf*x[,2] - 1

  m2 = sdf*x[,3]

  m3 = sdf*x[,4]

  return(cbind(m1,m2,m3))

}

# Får indblik i momentbetingelserne - Viser de første rækker af euler.mom

start.vals = c(1,5) # Startværdierne er inspireret af andre artikler

names(start.vals) = c("delta","gamma")

euler.mom = Momentbetingelser(start.vals,GMMdata.mat) # Invoker funktion med inputs

head(euler.mom)

colMeans(euler.mom)

# GMM estimering - Metode: ITERATIV med den optimale vægtmatrice

start.vals = c(1,5)

names(start.vals) = c("delta","gamma")

GMM.Resultat = gmm(g=Momentbetingelser, x=GMMdata.mat,

  t0=start.vals, type="iterative",
```

```
vcov="HAC", optfct="optim")

summary(GMM.Resultat)

# Residualer

res <- gmm(euler.mom~GMMdata.mat, GMMdata.mat)

resi <- residuals(res)

# Goldfeld-Quandt test af residualer

gqtest(resi~euler.mom)

# Ljung-Box test af residualer

Box.test(resi[,1], lag = 1, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 0)

Box.test(resi[,2], lag = 1, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 0)

Box.test(resi[,3], lag = 1, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 0)
```