Konstruktion af det reelle talsystem og kardinaliteten af talsystemer

Daniel Mose Thiilborg

Overordnet tema:

Matematisk analyse

Titel:

Konstruktion af det reelle talsystem og kardinalitet af talsystemer

Projekt periode:

Speciale
Forårssemestret 2016

Projekt afsluttet:

10.juni

Projektgruppe:

Daniel Mose Thiilborg

Vejleder:

Horia Cornean

Opslagstal:

4

Antal sider:

118

Synopsis:

Denne specialeafhandling viser konstruktionen af det reelle talsystem, med udgangspunkt i Peanos fem aksiomer for det naturlige talsystem. Derfor starter afhandlingen med at gennemgå konstruktionen af det naturlige talsystem, som i de efterfølgende kapitler bliver vist at det kan udvides til heltals systemet samt det rationelle talsystem. Slutteligt vises der to metode til at konstruere det reelle talsystem, ud fra det rationelle talsystem, dette er Dedekinds metode og Cantors metode. I det sidste kapitel introduceres kardinalitet, for at vise at det naturlige talsystem, heltals systemet og det rationelle talsystem har samme kardinalitet, mens det reelle talsystem har højere kardinalitet.

Forord

Denne rapport er udarbejdet af Daniel Mose Thiilborg som specialeafhandling matematikstudiets 10. semester på Aalborg Universitet. Projektet er udarbejdet i samarbejde med vejleder Horia Cornean og har titlen “Konstruktion af det reelle talsystem og kardinalitet af talsystemer”. Projektet er en udredning af relevant teori og begreber inden for matematisk analyse med fokus på talsystemer. Projektet henvender sig til alle med interesse for emnet, men læses bedst, hvis man har en matematisk forståelse svarende til 10. semester på matematikuddannelsen på på Aalborg Universitet med specialisering i analyse. Jeg vil gerne takke vejleder Horia Cornean for kyndig vejledning gennem projektet

Aalborg 10. juni

Daniel Mose Thiilborg

Læsevejledning

Der vil i løbet af rapporten forekomme kildehenvisninger, der henviser til en litteraturliste sidst i rapporten. Kildehenvisningerne er angivet efter Harvard metoden, sådan at der refereres ved [Efternavn, årstal, evt. sidetal m.m.]. Der er ikke anvendt citater i projektet, så kildehenvisningerne vil være fra kapitel til kapitel, hvor det figurer i slutningen af kapitlet.

Beviser vil blive afsluttet med ■. Referencer til sætninger undervejs i projektet vil være ved sætningens navn og eventuelt kapitel.

Indholdsfortegnelse

Indledning

I dette projekt ønskes det at vise, at det udfra Peanos aksiomer for det naturlige talsystem, er muligt at konstruerer et fuldstændigt ordnet og fuldstændigt Cauchy talsystem. Det viser sig at for at konstruere et talsystem, med disse egenskaber, skal man konstruerer det reelle talsystem.
For at kunne konstruerer det reelle talsystem, skal man først konstruere det naturlige talsystem ud fra Peanos aksiomer. I denne forbindelse vil der også blive udviklet binære operatorer samt en ordning mellem elementerne. At disse bliver bevist skyldes at, når systemet skal videreudvikles til heltals systemet, anvendes de binære operatorer og ordningen, til at udvikle og bevise de binære operatorer og ordning i det nye system.
Videre vil det førnævnte heltals system samt det rationelle talsystem blive konstrueret. Disse to talsystemer kan opfattes som mellemstadier inden konstruktionen af det reelle talsystem. Disse mellemstadier er dog nødvendige, da heltals systemet benyttes til at konstruere det rationelle talsystem og det binære operatorer samt ordning.
For det rationelle talsystem, kunne det se ud til at dække hele tallinjen, dette er dog ikke tilfældet, da der over hele tallinjen forekommer huller i form af de irrationelle tal. Af denne grund opfylder det rationelle talsystem ikke ordens og Cauchy fuldstændighed.
Projektet viser to metoder til at lokalisere og udfylde hullerne, i form af de irrationelle tal. Dedekinds metode, som benytter Dedekinds skæringer, som er en delmængde af de rationelle tal, hvor den øvre grænse for hver delmængde, definerer elementerne i det reelle talsystem. På denne måde fik Dedekind lokaliseret og udfyldt alle de irrationelle huller, og dermed skabt det reelle talsystem, som vises at opfylde både ordens og Cauchy fuldstændighed.
Den anden metode som projektet viser for at skabe det reelle talsystem, er Cantors metode. Denne benytter sig af Cauchy følger til at lokalisere og udfylde hullerne i det rationelle talsystem. Det vises at denne metode også konstruere det reelle talsystem, som endvidere er unikt, så denne metode skaber det samme system som Dedekinds metode, dermed opfylder dette også ordens og Cauchy fuldstændighed.
Slutteligt kigger projektet på de anvendte talsystemers kardinalitet. For alle systemerne gælder det at de indeholder uendeligt mange elementer. Det vil vise sig at det naturlige talsystem, heltals systemet og det rationelle talsystem har samme kardinalitet, tælleligt uendeligt. Dette er selvom det i projektet er vist at når man videre konstruerer talsystemerne, bibeholdes det oprindelige talsystems elementer samt der tilføjes nye. Det eneste talsystem som dette projekt beskæftiger sig med, som ej har kardinaliteten tælleligt uendelig, er det reelle talsystem, denne har nemlig kardinaliteten overtælleligt uendelig.

Kapitel 1 - Det naturlige talsystem

I dette kapitel vil det naturlige talsystem blive konstrueret ud fra Peanos fem definerende aksiomer. Efter konstruktionen af systemet, vises det at to givne naturlige talsystemer, vil være hinandens isomorfier, og at man dermed opfatter det naturlige talsystem som unikt.
Videre vil det blive vist at systemet kan håndtere de binære operatorer addition, multiplikation samt at tage eksponentialet.
Sidst vil der blive udviklet en ordning til systemet, for at vise at det naturlige talsystem er velordnet.

Peanos aksiomer

De fem aksiomer af Peano definere:
Vi antager, at der findes en mængde $\mathbb{N}$ med følgende egenskaber:
N(i): Der findes et element $1 \in \mathbb{N}$
N(ii): For hvert $n \in \mathbb{N}$, findes der et element $S(n) \in \mathbb{N}$ således at $\{(n,S(n))|n \in \mathbb{N}\}$ er en funktion.
N(iii): $1 \notin S(\mathbb{N})$
N(iv): S er injektiv.
N(v): Hvis P er en delmængde af $\mathbb{N}$ således at $1 \in P$ og $S(n) \in P\ \forall\ n \in P$ så $P=\mathbb{N}$.

N(i) fortæller at mængde indeholder mindst et element i mængden, dette element kaldes 1 og optræder som det kendte element, eller start elementet. N(ii) svarer til en induktiv proces. Fra N(i) haves det at mængden har elementet 1, N(ii) bruger elementet 1 til at generere S(1), som kaldes 2 og fra 2 genereres S(2), hvilket der fortsættes med. S kaldes for efterfølgerfunktionen da S(n) giver efterfølgeren til n. N(iii) sikre at elementet 1 ikke er efterfølger til et andet element i $\mathbb{N}$. N(iv) siger at S er injektiv, hvilket sikre at ethvert element har en og kun en efterfølger. N(v) er matematisk induktion, i stedet for at antage at P_k er sandt, og derefter vise sætningen for P_{k+1}, defineres en delmængde af $\mathbb{N}$, $P\{n \in \mathbb{N}|\ n \in P$ hvis og kun hvis n opfylder egenskaberne for $P_n\}$, hvis P opfylder N(v), garantere N(v) at $P=\mathbb{N}$, altså at udsagnet P_n er sandt for $\forall\ n \in \mathbb{N}$, i dette tilfælde forsøges det at bevise tingene på en aksiomatisk måde.
Systemer der opfylder aksiomerne betegnes $(\mathbb{N},1,S)$, $\mathbb{N}$ er navnet på mængden, 1 er navnet på elementet der opfylder N(iii) og S er navnet på funktionen fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$ som opfylder N(ii), N(iii) og N(iv). Fra aksiomet er det blot antaget at der findes mindst en mængde, der kan derfor godt eksistere andre systemer der opfylder de 5 aksiomer. Selv for den samme mængde $\mathbb{N}$, kan der eksistere ubegrænset mange efterfølger funktioner, derfor kan det ikke siges endnu at systemet er unikt.

Derfor introduceres begrebet isomorfi for naturlige talsystemer

Definition - Isomorfi mellem naturlige talsystemer

Lad (ℕ,1,S) og (ℕ',1',S') være to naturlige talsystemer der opfylder N(i) til N(v). ℕ og ℕ' er isomorfe hvis der findes en bijektiv funktion φ: ℕ → ℕ' sådan, at
(i) φ(1)=1'
(ii) φ∘S(n)=S'∘φ(n) ∀ n∈ℕ.

Hvad betyder det så at der er en isomorfi mellem to naturlige talsystemer? Tag et tilfældigt naturligt talsystem (ℕ,1,S) for eksempel. Dette system vil indeholde visse elementer som også er indeholdt i ℕ. Elementet 1 kommer fra begyndelsesbetingelsen, og efterfølger funktionen S bestemmer strukturen for systemet. Tages systemet (ℕ', 1', S') vil man kunne omdøbe 1 til at være 1' og S(1')=2, hvis ethvert element i systemet kan omdøbes til et element fra et andet system, så de har samme begyndelsesbetingelse og struktur, vil de to systemer kaldes for isomorfe. Dette kan siges ved at der eksistere en omdøberfunktion φ mellem ℕ til ℕ' som opfylder at:
(0) Den er injektiv og surjektiv
Dette følger fra definitionen af at den er bijektiv. Så ethvert element bliver matchet op med et og kun et element fra det andet system.
(i) φ(1)=1'
Dette sikre at begyndelsesbetingelsen fra det ene system matcher op med begyndelsesbetingelsen fra det andet system. Dette er en forudsætning for at (ii) kan overholdes.
(ii) φ∘S(n)=S'∘φ(n) ∀ n∈ℕ
Dette sikre at strukturen beholdes. S har en effekt på hvert element, n∈ℕ, så hvis n har m som efterfølger i (ℕ,1,S) så er m' efterfølger til n' i (ℕ',1',S')

Sætning - Iteration

Lad (ℕ,1,S) være et naturligt talsystem, og lad B være en ikke-tom mængde. Givet et b∈B og en funktion ψ:B→B, eksisterer der en unik funktion φ:ℕ→B sådan at φ(1)=b og φ(S(n))= ψ(φ(n)) ∀ n∈ℕ.

Bevis

For at bevise sætningen, skal det vises at der eksisterer en ikke-tom mængde E⊆ℕ×B, som opfylder følgende egenskaber.
(i) Hvis (n,m), (n,m')∈E, så er m=m'.
(ii) (1,b)∈E
(iii) Hvis (n,m)∈E, så er (S(n),ψ(m))∈E.
Til disse egenskaber bemærkes det at,
(ii) Eftersom 1∈ℕ og b∈B, haves det at (1,b)∈ℕ×B.

(iii) Bemærk at $(S(n),\psi(m))\in\mathbb{N}\times B\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ m\in B$, så (iii) er altid sand for $\mathbb{N}\times B$.
Lad nu F={delmængder af $\mathbb{N}\times B$| der opfylder egenskaberne (ii) og (iii)}. Fra bemærkningerne ovenfor, vides det at $\mathbb{N}\times B\in F$, dermed er F en ikke-tom. Lad nu E være fællesmængden for alle elementerne i F. Eftersom $(1, b)\in F_i\ \forall\ F_i\in F$, $(1, b)\in E$ altså har E egenskab (ii). Antag $(n,m)\in E$, derfor er $(n,m)\in F_i\ \forall\ F_i\in F$.
Egenskaben for F haves det at $(S(n),\psi(m))\in F_i\ \forall\ F_i\in F$. Derfor $(S(n),\psi(m))\in E$ altså har E egenskab (iii). Derfor $E\in F$.
Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|(n,m),(n,m')\in E\Rightarrow m=m'\}$. Det vides at $(1,b)\in E$. Antag at $(1, b_2)\in E$ og at $b\neq b_2$. Betragt mængden $E'=E/(1,b_2)$. Det er klart at E' opfylder egenskab (ii).
Da E opfylder egenskab (iii), opfylder E' også egenskab (iii) fordi det kun er $(1,b_2)$ som er fjernet fra E og siden 1 ikke er efterfølger til noget $n\in\mathbb{N}$. Derfor $E'\in F$.
Men da $E\subseteq F_i\ \forall\ F_i\in F$ sammenholdt med $E'\subseteq E$, må dette betyde at E = E', hvilket er en selvmodsigelse. Derfor $1\in P$.
Antag $n\in P$. Dermed $(n\ m), (n,m')\in E\Rightarrow m=m'$. Hvis $(S(n),l)$, $(S(n),l')\in E$ men $l\neq l'$, skal $\psi(m)=l$, $\psi(m)=l'$, dette er en modsigelse da ψ er en bijektiv funktion.
Betragt nu mængden $E''=E\backslash(S(n),l)$. E'' opfylder fortsat egenskab (ii). Hvis E'' opfylder (iii), ville $E''\in F$. Dette ville dog være en modstrid, da $E''\subseteq E$, og E er fællesmængden af mængderne som opfylder (ii) og (iii).
Derfor er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det så at $P=\mathbb{N}$, og så opfylder E også egenskab (i). Dermed eksisterer φ.
Antag nu at φ og φ' er to funktioner som opfylder (ii) og (iii). Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|\varphi(n)=\varphi'(n)\}$. Da funktionerne opfylder (ii) vil $1\in P$ siden $\varphi(1)=b=\varphi'(1)$.
Antag at $n\in P$. Så er

$$\begin{aligned}\varphi(S(n)) &= \psi(\varphi(n))\\ &= \psi(\varphi'(n)) \quad \text{(Da } \varphi(n)=\varphi(n')\text{)}\\ &= \varphi'(S(n)).\end{aligned}$$

Derfor $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og så φ er unik.

■

Sætning - Det naturlige talsystem er unikt.

Lad $(\mathbb{N},1,S)$ og $(\mathbb{N}',1',S')$ være to naturlige talsystemer. Så er $(\mathbb{N},1,S)$ en isomorfi for $(\mathbb{N}',1',S')$.

Bevis

For at bevise denne sætning anvendes Iterations sætningen, med $(\mathbb{N},1,S)$ som det naturlige talsystem. $B=\mathbb{N}'$, $b=1'$, $\psi=S'$ så eksisterer der en unik funktion $\varphi_1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$ sådan at $\varphi_1(1)=1'$ og $\varphi_1(S(n))=S'(\varphi_1(n))\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.
Tilsvarende eksisterer der en unik funktion $\varphi_2:\mathbb{N}'\to\mathbb{N}$ sådan at $\varphi_2(1')=1$ og $\varphi_2(S'(n'))=S(\varphi_2(n'))\ \forall\ n'\in\mathbb{N}'$. Bemærk at φ_1 opfylder (i) og (ii) fra definitionen på en isomorfi. Det behøves derfor blot at vises at det er en bijektiv funktion. Dette vises ved at vise $\varphi_1\circ\varphi_2=I_{\mathbb{N}'}$ og $\varphi_2\circ\varphi_1=I_{\mathbb{N}}$.
Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|\varphi_2\circ\varphi_1(n)=n\}$. Så er $1\in P$ da $\varphi_2\circ\varphi_1(1)=\varphi_2(1')=1$. Antag at $n\in P$, så er

$\varphi_2 \circ \varphi_1(S(n)) = \varphi_2(S'(\varphi_1(n))$
$= S(\varphi_2(\varphi 1(n)))$ (eftersom $\varphi_1(n) \in \mathbb{N}'$)
$= S(n)$ (eftersom $\varphi_2 \circ \varphi_1(n)=n$ for $n \in P$)
Dermed er $S(n) \in P$ når $n \in P$. Fra N(v) haves det at $P=\mathbb{N}$ og $\varphi_2 \circ \varphi_1 = I_{\mathbb{N}}$. Ved symmetri haves det at $\varphi_1 \circ \varphi_2 = I_{\mathbb{N}'}$ og dermed er φ_1 bijektiv.
Altså er $(\mathbb{N},1,S)$ og $(\mathbb{N}',1',S')$ isomorfe.

■

Iteration sætningen kan bruges til at sammenligne et naturligt talsystem, og andre vilkårlige enkelt funktion systemer. Eftersom alle naturlige talsystemer er isomorfe, og det er antaget at der findes mindst et, følger det at det naturlige talsystem er unikt, og ethvert andet system blot er omdømt fra det unikke system. Med en passende matchning, hvilket altid er muligt ifølge ovenstående sætning, er de to systemer umulige at skelne fra hinanden.
Derfor vil $(\mathbb{N},1,S)$ blive benyttet til at beskrive det unikke naturlige talsystem og $S(1)=2$ samt $S \circ S(1)=3$ osv..

Sætning og bevis - grundlæggende egenskaber for det naturlige talsystem

For et naturligt talsystem $(\mathbb{N},1,S)$ gælder der at; (Der startes med Peanos fem aksiomer)
N(i): Der findes et element $1 \in \mathbb{N}$
N(ii): For hvert $n \in \mathbb{N}$, findes der et element $S(n) \in \mathbb{N}$ således at $\{(n,S(n)) | n \in \mathbb{N}\}$ er en funktion.
N(iii): $1 \notin S(\mathbb{N})$
N(iv): S er injektiv.
N(v): Hvis P er en delmængde af $\mathbb{N}$ således at $1 \in P$ og $S(n) \in P$ $\forall$ $n \in P$ så $P=\mathbb{N}$.
N(vi): $\mathbb{N}$ er uendelig.
Fra N(iv) haves det er $\mathbb{N}$ er injektiv, og fra N(iii) haves det at $1 \notin S(\mathbb{N})$, så S er en ægte delmængde af $\mathbb{N}$ og dermed er $\mathbb{N}$ uendelig.
N(vii): $S(n) \neq n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$
Lad $P=\{n \in \mathbb{N} | S(n) \neq n\}$. Så er $1 \in P$ da det haves fra N(iii) at $1 \notin S(\mathbb{N})$. Antag at $n \in P$. Hvis $S(S(n))=S(n)$, så er $S(n)=n$ eftersom S er injektiv er dette en modstrid. Derfor er $S(n) \in P$ for ethvert $n \in P$. Fra N(v) haves det at $P=\mathbb{N}$, dermed følger det at $S(n) \neq n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.
N(viii): For ethvert $n \in \mathbb{N}/\{1\}$, $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ sådan at $n=S(m)$.
Lad $P=\{n \in \mathbb{N} | n=1$ eller $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ sådan at $n=S(m)\}$. Det ses at $1 \in P$. Antag at $n \in P$. Hvis $n=1$ så er $S(n)=S(1)$ og dermed tilhører denne også P da $1 \in \mathbb{N}$. Hvis $n \neq 1$, haves det at $S(n) \in P$ hvis $n \in \mathbb{N}$. Dermed $S(n) \in P$ når $n \in P$. Fra N(v) haves det at $P=\mathbb{N}$. Da $n \in P$ følger det at $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ sådan at $n=S(m)$.
N(ix): Hvis $n \in \mathbb{N}$, så er $n=1 \Leftrightarrow n \notin S(\mathbb{N})$.
For $n=1$ følger implikationen fra N(iii).
Hvis $n \notin S(\mathbb{N})$ følger implikationen fra følgende

(i) Fra N(iii) $1 \notin S(\mathbb{N})$
(ii) Fra N(viii) $n \in S(\mathbb{N})\ \forall\ n \in \mathbb{N}/\{1\}$
Dermed er $n=1 \Leftrightarrow n \notin S(\mathbb{N})$.

■

Binære operatorer på ℕ

Der vil i dette afsnit blive gennemgået sætninger som viser at enkelte binære operatore kan benyttes til at regne på ℕ. Der vil bliver gennemgået for addition, multiplikation samt at tage eksponenten af et naturligt tal.

Sætning - Addition

Der eksisterer en unik funktion $A:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ med følgende egenskaber
A(i) $A(n,1)=S(n)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
A(ii) $A(n,S(m))=S(A(n,m))\ \forall\ n, m \in\mathbb{N}$

Bevis

Givet $n\in\mathbb{N}$. Fra iteration sætningen med $\mathbb{N}=B$, $S(n)=b$, $\psi=S$, eksisterer der en unik funktion $A_n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sådan at $A_n(1)=S(n)$ og $A_n\circ S(m)=S\circ A_n(m)\ \forall\ m\in\mathbb{N}$.
Definer $A:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ved $A(n,m)=A_n(m)$. A opfylder nu egenskab A(i) eftersom $A(n,1)=A_n(1)=S(n)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. A opfylder ligeledes A(ii) for alle $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A(n,S(m)) &= A_n(S(m)) \\ &= S(A_n(m)) \\ &= S(A(n,m))\ \ \forall\ m\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dermed er $A(n,S(m))=S(A(n,m))\ \forall\ n, m\in\mathbb{N}$. Hvis A ikke er en funktion, så eksisterer der et $((n,m),l_1)$ og $((n,m),l_2) \in A$ sådan at $l_1\neq l_2$. Dette vil medfører at $A_n(m)=l_1\neq l_2=A_n(m)$, hvilket er i modstrid med at A_n var en funktion. Dermed eksisterer der en funktion $A:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, som opfylder A(i) og A(ii). Det skal nu bevises at denne er unik.
Lad nu A' være en anden funktion som opfylder A(i) og A(ii) for alle $n\in\mathbb{N}$. Lad $P=\{m\in\mathbb{N} | A(n,m)=A'(n,m)\}$. Så er $1\in P$ eftersom $A(n,1)=S(n)=A'(n,1)$. Antag at $m\in P$, så er

$$\begin{aligned} A(n,S(m)) &= S(A(n,m)) \\ &= S(A'(n,m)) && (\text{Da } m\in P \Rightarrow A(n,m)=A'(n,m)) \\ &= A'(n,S(m)) \end{aligned}$$

Dermed er $S(m)\in P$ når $m\in P$ og fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$. Derfor $A(n\ m)=A'(n,m)$ $\forall\ n, m\in\mathbb{N}$ og A er unik.

■

Herfra og fremad vil $A(n,m)$ blive skrevet som $n+m$.

Sætninger og beviser - Egenskaber ved Addition

A(i): $S(n)=n+1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

A(ii): $n+(m+1)=(n+m)+1\ \forall\ n, m \in \mathbb{N}$

A(iii): $1+n=n+1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|1+n=n+1\}$. Så er $1\in P$ da $1+1=1+1$. Hvis $n\in P$ så er

$1+S(n)$	$=1+(n+1)$	(fra A(i))
	$=(1+n)+1$	(fra A(ii))
	$=(n+1)+1$	(eftersom $n\in P$)
	$=S(n)+1$	

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og så er $1+n=n+1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

A(iv): $(m+1)+n=(m+n)+1\ \forall\ n, m\in\mathbb{N}$

For hvert $m\in\mathbb{N}$, defineres $P=\{n\in\mathbb{N}|(m+1)+n=(m+n)+1\}$. Så er $1\in P$ da $(m+1)+1=(m+1)+1$. Hvis $n\in P$ så er

$(m+1)+S(n)$	$=(m+1)+(n+1)$	
	$=((m+1)+n)+1$	(fra A(ii))
	$=((m+n)+1)+1$	(eftersom $n\in P$)
	$=(m+(n+1))+1$	(fra A(ii))
	$=(m+S(n))+1$	

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed er $(m+1)+n=(m+n)+1\ \forall\ n, m\in\mathbb{N}$

A(v): $m+n=n+m\ \forall\ n, m\in\mathbb{N}$, den kommutative lov for addition.

For hvert $m\in\mathbb{N}$ defineres $P=\{n\in\mathbb{N}|m+n=n+m\}$. Fra A(iii) haves det at $1\in P$. Hvis $n\in P$ så er

$m+S(n)$	$=m+(n+1)$	
	$=(m+n)+1$	(fra A(ii))
	$=(n+m)+1$	(eftersom $n\in P$)
	$=(n+1)+m$	(fra A(iv))
	$=S(n)+m$	

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder den kommutative lov for addition

A(vi): $(m+n)+k=m+(n+k)\ \forall\ n, m, k\in\mathbb{N}$, den associative lov for addition.

For hvert $n, m\in\mathbb{N}$, defineres $P=\{k\in\mathbb{N}|(m+n)+k=m+(n+k)\}$. Fra A(ii) følger der direkte at $1\in P$. Hvis $k\in P$ så er

$(m+n)+S(k)$	$=(m+n)+(k+1)$	
	$=((m+n)+k)+1$	(fra A(ii))
	$=(m+(n+k))+1$	(eftersom $k\in P$)
	$=m+((n+k)+1)$	(fra A(ii))
	$=m+(n+(k+1))$	(fra A(ii))
	$=m+(n+S(k))$	

Dermed er $S(k)\in P$ når $k\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder den associative lov for addition.

A(vii): $n\neq n+m\ \forall\ m, n \in\mathbb{N}$.

For hvert $m\in\mathbb{N}$, defineres $P=\{n\in\mathbb{N}|n\neq n+m\}$. Det ses at $1\neq S(m)=1+m$ ifølge N(iii). Dermed er $1\in P$.
Antag at $n\in P$. Så er $S(n)\neq S(n+m)$ (eftersom S er injektiv og $n\neq n+m$ når $n\in P$) men det haves at.

$$\begin{aligned} S(n+m) &= (n+m)+1 \\ &= (n+1)+m \\ &= S(n)+m \end{aligned}$$

Dermed er $S(n)\neq S(n)+m$ og altså $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed er $n\neq n+m$ $\forall$ $m, n\in\mathbb{N}$.

A(viii): $n+k=n+m \Rightarrow k=m$ $\forall$ $m, n, k\in \mathbb{N}$, fortrydelsesloven for addition.

Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|n+k=n+m \Rightarrow k=m \ \forall \ m, k\in\mathbb{N}\}$. Eftersom S er injektiv betyder $k \neq m \Rightarrow 1+k\neq 1+m$, modsat betyder $1+k=1+m \Rightarrow k=m$ $\forall$ $m, k \in\mathbb{N}$. Dermed er $1\in P$. Antag at $n\in P$. Så er

$$\begin{aligned} & S(n)+k=S(n)+m \\ \Rightarrow\quad & (n+k)+1=(n+m)+1 \\ \Rightarrow\quad & n+k=n+m && \text{(eftersom S er injektiv)} \\ \Rightarrow\quad & k=m && \forall\ m, k\in\mathbb{N} \text{ (eftersom } n\in P) \end{aligned}$$

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$, og dermed gælder fortrydelsesloven for addition.

■

Sætning - Multiplikation

Der eksisterer en unik funktion $M:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ med følgende egenskaber
M(i): $M(n,1)=n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$
M(ii) $M(n,S(m))=A(n,M(n,m))$ $\forall$ $n, m \in\mathbb{N}$

Bevis

Givet $n\in\mathbb{N}$. Fra iteration sætningen med $\mathbb{N}=B$, $n=b$, $\psi=A_n$, eksisterer der en unik funktion $M_n:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ sådan at $M_n(1)=n$ og $M_n\circ S(m)=A_n\circ M_n(m)$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}$.
Definer $M:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ ved $M(n,m)=M_n(m)$. M opfylder nu egenskab M(i) eftersom $M(n,1)=M_n(1)=n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$. M opfylder ligeledes M(ii) for alle $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M(n,S(m)) &= M_n(S(m)) \\ &= A_n(M_n(m)) \\ &= A_n(M(n,m)) && \forall\ m\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dermed $M(n,S(m))=A_n(M(n,m))$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$. Hvis M ikke er en funktion, så eksisterer der et $((n,m),l_1)$ og $((n,m),l_2) \in M$ sådan at $l_1\neq l_2$. Dette vil medfører at $M_n(m)=l_1\neq l_2=M_n(m)$, hvilket er i modstrid med at M_n var en funktion. Dermed eksisterer der en funktion $M:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, som opfylder M(i) og M(ii).
Lad nu M' være en anden funktion som opfylder M(i) og M(ii) for alle $n\in\mathbb{N}$, nu skal det vises at denne er unik. Lad $P=\{m\in\mathbb{N}|M(n,m)=M'(n,m)\}$. Så er $1\in P$ eftersom $M(n,1)=n=M'(n,1)$. Antag at $m\in P$, så er

$$M(n,S(m)) = A(n,M(n,m))$$

	$=A(n,M'(n,m))$	(Da $m\in P \Rightarrow M(n,m)=M'(n,m)$)
	$=M'(n,S(m))$	

Dermed er $S(m)\in P$ når $m\in P$ og fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$. Derfor $M(n,m)=M'(n,m)$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$ og M er unik.

■

Herfra og fremad vil M(n,m) blive skrevet som nm eller $n\cdot m$.

Sætning - Egenskaber ved multiplikation

M(i): $n1=n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

M(ii): $n(m+1)=nm+n$ $\forall$ $n, m \in\mathbb{N}$

M(iii): $n1=1n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Definer $P=\{n\in\mathbb{N}|n1=1n\}$ Så er $1\in P$ eftersom $(1)(1)=(1)(1)$. Antag at $n\in P$.Så er,

$S(n)1$	$=S(n)$	(fra M(i))
	$=n1+1$	(fra M(i))
	$=1n+1$	(eftersom $n\in P$)
	$=1(n+1)$	(fra M(ii))
	$=1S(n)$	

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed er $n1=1n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

M(iv): $(m+1)n=mn+n$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$.

For ethvert $m\in\mathbb{N}$, defineres $P=\{n\in\mathbb{N}|(m+1)n=mn+n\}$. Fra M(i) haves at $(m+1)1=m+1=m1+1$ så $1\in P$. Antag at $n\in P$. Så er

$(m+1)S(n)$	$=(m+1)(n+1)$	
	$=(m+1)n+(m+1)$	(fra M(ii))
	$=mn+n+m+1$	(eftersom $n\in P$)
	$=(mn+m)+(n+1)$	
	$=m(n+1)+(n+1)$	(fra M(ii))
	$=mS(n)+S(n)$	

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed er $(m+1)n=mn+n$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$.

M(v): $nm=mn$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$, den kommutative lovfor multiplikation.

For ethvert $m\in\mathbb{N}$, defineres $P=\{n\in\mathbb{N}|nm=mn\}$. Så følger det fra M(iii) at $1\in P$. Antag at $n\in P$. Så er

$S(n)m$	$=(n+1)m$	
	$=nm+m$	(fra M(iv))
	$=mn+m$	(eftersom $n\in P$)
	$=m(n+1)$	(fra M(ii))
	$=mS(n)$	

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder den kommutative lov for multiplikation.

M(vi): $m(n+k)=mn+mk$ $\forall$ $n, m, k\in\mathbb{N}$, den distributive lov for multiplikation.

For ethvert m, $n \in \mathbb{N}$, defineres $P=\{k \in \mathbb{N} | m(n+k)=mn+mk\}$. Det følger fra M(i) og M(ii) at $m(n+1)=mn+m=mn+m1$, dermed $1 \in P$. Antag at $k \in P$, så er

$$\begin{aligned}
m(n+S(k)) &= m((n+k)+1) \\
&= m(n+k)+m && \text{(fra M(ii))} \\
&= mn+mk+m && \text{(eftersom } k \in P\text{)} \\
&= mn+m(k+1) && \text{(fra M(ii))} \\
&= mn+mS(k)
\end{aligned}$$

Dermed er $S(k) \in P$ når $k \in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder den distributive lov for multiplikation

M(vii): $(nm)k=n(mk)$ $\forall$ n, m, $k \in \mathbb{N}$, den associative lov for multiplikation.

For ethvert n, $m \in \mathbb{N}$, defineres $P=\{k \in \mathbb{N} | (nm)k=n(mk)\}$ Fra M(i) haves det at $(nm)1=nm=n(m1)$ så derved er $1 \in P$. Antag at $k \in P$. Så er

$$\begin{aligned}
(nm)S(k) &= (nm)(k+1) \\
&= (nm)k+nm && \text{(fra M(ii))} \\
&= n(mk)+nm && \text{(eftersom } k \in P\text{)} \\
&= n((mk)+m) && \text{(fra M(vi))} \\
&= n(m(k+1)) && \text{(fra M(ii))} \\
&= n(mS(k))
\end{aligned}$$

Dermed er $S(k) \in P$ når $k \in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder den associative lov for multiplikation.

■

Sætning - Eksponential

Der eksisterer en unik funktion $E:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ med følgende egenskaber

E(i): $E(n,1)=n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

E(ii) $E(n,S(m))=M(n,E(n,m))$ $\forall$ n, m $\in \mathbb{N}$

Bevis

Givet $n \in \mathbb{N}$. Fra iteration sætningen med $\mathbb{N}=B$, $n=b$, $\psi=M_n$, eksisterer der en unik funktion $E_n:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ sådan at $E_n(1)=n$ og $E_n \circ S(m)=M_n \circ E_n(m)$ $\forall$ $m \in \mathbb{N}$.
Definer $E:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ ved $E(n,m)=E_n(m)$. E opfylder nu egenskab E(i) eftersom $E(n,1)=E_n(1)=n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. E opfylder ligeledes E(ii) for alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
E(n,S(m)) &= E_n(S(m)) \\
&= M_n(E_n(m)) \\
&= M(n,E(n,m)) && \forall\ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Dermed $E(n,S(m))=M(n,E(n,m))$ $\forall$ n, $m \in \mathbb{N}$. Hvis E ikke er en funktion, så eksisterer der et $((n,m),l_1)$ og $((n,m),l_2) \in E$ sådan at $l_1 \neq l_2$. Dette vil medfører at $E_n(m)=l_1 \neq l_2=E_n(m)$, hvilket er i modstrid med at E_n var en funktion. Dermed eksisterer der en funktion $E:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, som opfylder E(i) og E(ii).
Lad nu E' være en anden funktion som opfylder E(i) og E(ii) for alle $n \in \mathbb{N}$, nu mangler det at blive vist at E er unik. Lad $P=\{m \in \mathbb{N} | E(n,m)=E'(n,m)\}$. Så er $1 \in P$ eftersom $E(n,1)=n=E'(n,1)$. Antag at $m \in P$, så er

$$\begin{aligned}E(n,S(m)) &= M(n,E(n,m)) \\ &= M(n,E'(n,m)) && \text{(Da } m\in P \Rightarrow E(n,m)=E'(n,m)\text{)} \\ &= E'(n,S(m))\end{aligned}$$

Dermed er $S(m)\in P$ når $m\in P$ og fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$. Derfor $E(n,m)=E'(n,m)$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$ og E er unik.

■

Herfra og fremad vil $E(n,m)$ blive skrevet som n^m.

Sætning - Egenskaber ved eksponential

E(i): $n^1=n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

E(ii): $n^{s(m)}=n^m n$ $\forall$ $n, m\in\mathbb{N}$.

E(iii): $1^n=1$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Definer $P=\{n\in\mathbb{N}|1^n=1\}$. Så er $1\in P$ som følge af E(i). Antag at $n\in P$. så er,

$$\begin{aligned}1^{S(n)} &= 1^n 1 && \text{(fra E(ii))} \\ &= (1)(1) && \text{(eftersom } n\in P\text{)} \\ &= 1 && \text{(fra M(i))}\end{aligned}$$

Dermed er $S(n)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed er $1^n=1$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

E(iv): $n^m n^k=n^{m+k}$ $\forall$ $n, m, k\in\mathbb{N}$.

For ethvert $n, m\in\mathbb{N}$ defineres $P=\{k\in\mathbb{N}|n^m n^k=n^{m+k}\}$. Fra E(i) og E(ii) følger at, $n^m n^1 = n^m n = n^{m+1}$ så $1\in P$. Antag at $k\in P$. Så er,

$$\begin{aligned}n^m n^{S(k)} &= n^m n^k n && \text{(fra E(ii))} \\ &= n^{m+k} n && \text{(eftersom } n\in P\text{)} \\ &= n^{S(m+k)} && \text{(fra E(ii))} \\ &= n^{m+S(k)}\end{aligned}$$

Dermed er $S(k)\in P$ når $n\in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder $n^m n^k=n^{m+k}$ $\forall$ $n, m, k\in\mathbb{N}$.

E(v): $(n^m)^k = n^{mk}$ $\forall$ $n, m, k\in\mathbb{N}$.

For ethvert $n, m\in\mathbb{N}$ defineres $P=\{k\in\mathbb{N}|(n^m)^k=n^{mk}\}$. Så følger det fra E(i) at $1\in P$ eftersom, $(n^m)^1=n^m=n^{m1}$. Antag at $n\in P$. Så er

$$\begin{aligned}(n^m)^{S(k)} &= (n^m)^k(n^m)^1 && \text{(fra E(iv))} \\ &= n^{mk}n^m && \text{(eftersom } k\in P \text{ og fra E(i))} \\ &= n^{mk+m} && \text{(fra E(iv))} \\ &= n^{mS(k)}\end{aligned}$$

Dermed er $S(k)\in P$ når $k\in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder $(n^m)^k = n^{mk}$ $\forall$ $n, m, k\in\mathbb{N}$.

E(vi): $(nm)^k=n^k m^k$ $\forall$ $n, m, k\in\mathbb{N}$.

For ethvert $n, m\in\mathbb{N}$ defineres $P=\{k\in\mathbb{N}|(nm)^k=n^k m^k\}$. Så følger det fra E(i) at $1\in P$ da, $(nm)^1=nm=n^1m^1$. Antag at $k\in P$. Så er

$$\begin{aligned}(nm)^{S(k)} &= (nm)^k(nm)^1 && \text{(fra E(ii))} \\ &= n^k m^k nm && \text{(eftersom } k\in P \text{ og fra E(i))}\end{aligned}$$

$=n^k n\ m^k m$
$=n^{k+1} m^{k+1}$ (fra E(ii))
$=n^{S(k)} m^{S(k)}$

Dermed er S(k)∈P når k∈P. Fra N(v), vides det at P=ℕ og dermed gælder $(nm)^k = n^k m^k$ ∀ n, m, k∈ℕ.

■

Det kan bemærkes at for bevisførelsen for hver af de tre binære operatorer anvendes funktionen som er defineret i det foregående bevis. Dermed kan man også sige at benytte eksponentialfunktionen er blot at multiplicere et element med sig selv, ligesom at multiplicere blot er at addere et element med sig selv.

Orden på ℕ

For det naturlige talsystem er det nu bevist at man kan adderer, multiplicere og tage eksponentialet af de naturlige tal. En ting der dog mangler er at man kan vurdere hvilket tal der er det største. Hertil benyttes orden og ordensrelationer, som det kommende afsnit vil omhandle.
For at starte benyttes følgende definition.

Definition

n siges at være større end m, og skrives n>m, hvis der eksisterer et k∈ℕ sådan at n=m+k. n siges at være større eller lig med m, som skrives n≥m, hvis n=m eller n>m

Der ønskes en ordning så efterfølgeren til et element kommer efter elementet. Eftersom S(n) er defineret til at være n+1, ønskes denne naturligt at være efter elementet n. Fra definitionen følger det at
(i) S(n)>n
(ii) S(n)>1
(iii) n>1 hvis n≠1. (Det følger også fra (ii) og N(viii) at n≥1)
Dermed er de grundlæggende forudsætninger ikke i modstrid med hvordan den "korrekte ordening" vil se ud, men det skal nu tjekkes at definitionen har alle de ønskede egenskaber. Senere i projektet vil der blive benyttet infimum og supremum, som forudsætter at ordningen total eller partiel. Dertil bevises tredellings loven.

Sætning - Tredelings loven

Lad n, m∈ℕ, så er der en og kun en af følgende som gælder:
(i): n=m
(ii): n>m
(iii): n<m

Bevis

Først vises det at maksimalt en af de tre ovenstående udsagn kan være sande. Antag at (i) er sand. Hvis (ii) også skal sand, så skal der eksisterer et $k \in \mathbb{N}$ sådan at $n=m+k$. Dermed skal $n=n+k$ da (i) er sand, dette er dog i modstrid med A(vii). Af den samme grund kan (iii) ikke være sand sammen med (i), her skal n erstattes med m.
Antag at (ii) er sand. Så eksisterer der et $k \in \mathbb{N}$ så $n=m+k$. Fra A(vii) vides det at (i) ikke kan være sand. Hvis (iii) er sand, skal der eksisterer et $r \in \mathbb{N}$ så $n+r=m$. Dermed er $n=m+k=n+r+k$, hvilket er i modstrid med A(vii). Ved symmetri vises det at hvis (iii) er sand, kan (i) eller (ii) ikke være sande. Dermed er det vist at maksimalt et af udsagnene kan være sande. Nu skal det vises at mindst et af udsagnene er sande.
Tag et $n \in \mathbb{N}$ og definer $P=\{m \in \mathbb{N} |$ så mindst et af (i), (ii) eller (iii) er sande$\}$. Betragt $m=1$, hvis $n=1$ er (i) sand, hvis $n \neq 1$ er (ii) sand. Dermed er $1 \in P$. Antag at $m \in P$, så er mindst et af følgende sande
(i) $n=m$.
Så er $S(m)=n+1$, så er (iii) sand for $S(m)$, da $S(m)>n$.
(ii) $n>m$
Så eksisterer der et $k \in \mathbb{N}$ så $n=m+k$. Så er $n+1=S(m)+k$. Hvis $k=1$, fra A(viii) vides det så (i) er sand for $S(m)$, hvis $k \neq 1$, så eksisterer der et l så $k=l+1$. Så er $n+1=S(m)+l+1$ og fra A(viii) vides det så at $n=S(m)+l$ dermed er (ii) sand for $S(m)$
(iii) $n<m$
Så eksisterer der et $k \in \mathbb{N}$ så $n+k=m$. Derned er $n+(1+k)=S(m)$ og dermed er (iii) sand for $S(m)$.
Dermed er $S(m) \in P$ når $m \in P$. Fra N(v) vides det så at $\mathbb{N}=P$ og dermed gælder tredelings loven

■

Det skal nu vises at relationen $\geq$ er en total ordning for $\mathbb{N}$

Sætning - $\geq$ er en total ordning på $\mathbb{N}$

Relationen $\geq$ anvendt på $\mathbb{N}$ er en partiel ordning, som også er total.

Bevis

Refleksivitet er klart da $n=n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.
Antag at $m \leq n$ og at $n \leq m$. Hvis $n \neq m$, haves det at $m<n$ og at $n<m$ hvilket er forbudt ifølge tredelings loven. Dermed er $\leq$ anti-symmetrisk.
Antag at $n \leq m$ og $m \leq k$. Hvis $n \leq k$ ikke er sand, følger det fra tredelings loven at $n>k$. Dermed, $\exists \ p \in \mathbb{N}$ så $n=k+p$. Der er nu to udfald
(i) $m=k$, så er $n>m$ hvilket er i modstrid med tredelings loven.
(ii) $m<k$, så $\exists \ q \in \mathbb{N}$ så $m+q=k$. Dermed er $n=(m+q)+p$ hvilket med medfører at $m<n$, dette er igen en modstrid med tredelings loven. Derfor er $\leq$ transitiv.
Dermed er $\geq$ en partiel ordning.

Tag tilfældige n, m $\in\mathbb{N}$. Hvis n=m, så følger det at n$\leq$ m fra refleksivitet. Ellers kræver tredelings loven at n<m (Dermed n$\leq$m) eller n>m (Dermed m$\leq$ n). Dermed giver $\geq$ en total ordning.

■

Sætning - Egenskaber ved ordning

Der vil nu blive gennemgået og bevist nogle egenskaber ved ordning under forskellige binære operatorer.
For alle n, m, k, r$\in\mathbb{N}$ haves at:
(1): n<m og m<k $\Rightarrow$ n<k
Dette følger som en konsekvens af at $\leq$ er transitiv.
(2) n<n er aldrig sandt.
Dette følger direkte af A(vii)
Addition
(3) Hvis n$\neq$m, så er en og kun en af ligningerne x+m=n og x+n=m der har en løsning i $\mathbb{N}$og denne løsning er unik.
Fra tredelings loven følger det at kun en af ligningerne har en løsning, der skal derfor vises at denne løsning er unik.
Antag at ligningen x+p=q har en løsning i $\mathbb{N}$, lad x_1, $x_2\in\mathbb{N}$ være to forskellige løsninger. Så er x_1+p=q og x_2+p=q sådan at x_1+(p+q)=x_2+(p+q). Fra A(viii) have det så at x_1=x_2 og dermed er løsningen unik.
(4) n+m>n
Eftersom (n+m)=(n)+m følger uligheden.
(5) m>n $\Leftrightarrow$ m+k>n+k
Hvis m>n, så $\exists$ p$\in\mathbb{N}$ sådan at m=n+p. Dermed er (m+k)=(n+k)+p og så er m+k>n+k. Modsat hvis m+k>n+k, så $\exists$ p$\in\mathbb{N}$ sådan at m+k=n+k+p og fra A(viii) vides det at m=n+p og dermed er m>n.
(6) m>n og k>r $\Rightarrow$ m+k>n+r.
Fra ulighederne vides det at $\exists$ p, q$\in\mathbb{N}$ sådan at m=n+p og k=r+q. Dermed er, m+k=(n+r)+(p+q) og så er m+k>n+r.
(7) m<n+1 hvis og kun hvis m$\leq$n.
Lad m<n+1, og antag m>n. Så $\exists$ p, q$\in\mathbb{N}$ sådan at m+p=n+1 og m=n+q. Så er n+1+m=m+p+n+q og fra A(viii) følger det at, så skal 1=p+q, dette forudsætter at 1>p. Men 1$\leq$p hvilket er i modstrid med tredelings loven. Dermed følger det at, m<n+1 $\Rightarrow$ m$\leq$n.
Modsat hvis m$\leq$n, så er m+1$\leq$n+1 ifølge (5). De vides at, m<m+1. Hvis m+1=n+1, haves det at m<n+1. Ellers følger det fra (1) hvis m+1<n+1, at m<n+1.
Dermed er, m<n+1 $\Leftrightarrow$ m$\leq$n.
(8) Der eksisterer ikke et m$\in\mathbb{N}$ sådan at n<m<n+1.
Antag at et sådan m eksisterer. Fra (7) haves det at n<m$\leq$n. Dette er i modstrid med tredlings loven, så m kan ikke eksisterer.
Multiplikation

(9) $n<m$ hvis og kun hvis $nr<mr$.

Hvis $n<m$, så $\exists\ p\in\mathbb{N}$ sådan at $n+p=m$. Så haves det fra M(vi) at $nr+pr=mr$, og dermed er $nr<mr$. Modsat, hvis $nr<mr$, så er mulighederne

(i) $m = n$. Så haves det at $mr=nr$ hvilket er i modstrid med tredelings loven.

(ii) $n>m$. Så $\exists\ p\in\mathbb{N}$ sådan at $n=m+p$. Dermed er $nr=mr+pr$ så er $nr>mr$. Dette er også i modstrid tredelings loven. Dermed er $n<m \Leftrightarrow nr<mr$.

(10) $nm=nk \Rightarrow m=k$, fortrydelsesloven for multiplikation.

Hvis $nm=nk$ men $m\neq k$, så haves det enten at $m>k$ eller $m<k$. I begge tilfælde haves det fra (9) at $nm\neq nk$ hvilket er en modstrid. Dermed haves at $nm=nk \Rightarrow m=k$.

(11) $n<m$ og $k<r \Rightarrow nk<mr$.

Fra (9) haves det at $nk<mk$ og $mk<mr$. Så følger det af (1) at $nk<mr$.

(12) $nm\geq n$

Hvis $m=1$, så gælder ligheden. Hvis m kan skrives som $m=1+k$ for $k\in\mathbb{N}$. Så kan udsagnet reduceres til $n+nk\geq n$ hvilket følger fra (4).

Exponentiation

(13) $n<m$ hvis og kun hvis $n^k<m^k$

For ethvert $n, m\in\mathbb{N}$, defines $P=\{k\in\mathbb{N}|n<m$ hvis og kun hvis $n^k<m^k\}$. Det bemærkes at $1\in P$ da det følger fra E(i) at $n^1=n<m=m^1$. Antag at $k\in P$. Hvis $n<m$, så er $n^k<m^k$. Fra (11) vides det at $n^kn<m^km$ og dermed haves at $n<m \Rightarrow n^{k+1}<m^{k+1}$.

Modsat, hvis $n^{k+1}<m^{k+1}$, så haves to andre muligheder

(i) $n=m$. Da det kræves at $n^k<m^k$, som resultere i $n<m$ eftersom $k\in P$ og dermed i modstrid med tredelings loven.

(ii) $n>m$.

Fra (11), haves det at

$$
\begin{array}{lll}
 & mn^{k+1}<nm^{k+1} & \\
\Rightarrow & n^k<m^k & \text{(fra (9))} \\
\Rightarrow & n<m & \text{(eftersom } k\in P)
\end{array}
$$

Dette er også i modstrid med tredlings loven.

Dermed er $S(k)\in P$ når $k\in P$. Fra N(v), vides det nu at $P=\mathbb{N}$ og dermed er $n<m$ hvis og kun hvis $n^k<m^k$.

Ved at fastsætte $n=1$ bemærkes det at $1<m$ hvis og kun hvis $1<m^k$.

(14) $(n+1)^m\geq 1+nm$

Lad $P=\{m\in\mathbb{N}|(n+1)^m\geq 1+nm\}$.

Når $m=1$ gælder ligheden og dermed er $1\in P$. Antag at $m\in P$.

Antag også at $(n+1)^{m+1}<1+n(m+1)$, og dermed at $(n+1)^mn+(n+1)^m<1+nm+n$.

Det undersøges om to andre udfald kan finde sted:

(i) $(n+1)^m=1+nm$

Fra (5) haves det at

$$
\begin{array}{lll}
 & (n+1)^mn<n & \\
\Rightarrow & (n+1)^m<1 & \text{(fra (9))}
\end{array}
$$

Dette er dog ikke muligt.

(ii) $(n+1)^m > 1+nm$

Så er (n+1)m+n>1+nm+n. Fra (1) vides det at

$$(n+1)^m+n>(n+1)^m n+(n+1)^m$$

$\Rightarrow$ $\quad n > (n+1)^m n \quad$ (fra (5))

$\Rightarrow$ $\quad 1 > (n+1)^m \quad$ (fra (9))

Dette er igen ikke muligt.

Dermed er det ikke muligt at $(n+1)^{m+1}<1+n(m+1)$.

Dermed er $S(m)\in P$ når $m\in P$. Fra N(v) vides det så at $P=\mathbb{N}$ og dermed gælder det at $(n+1)^m \geq 1+nm$.

(15) $m^k \geq k+1$, for $m\neq 1$

Eftersom $m\neq 1$, så følger der fra N(viii), $\exists\ n\in\mathbb{N}$ sådan at $m=n+1$. Så er

$m^k \quad =(n+1)^k$

$\quad \geq 1+n^k \quad$ (fra (14))

$\quad \geq 1+k \quad$ (fra (5), (9) og eftersom $n\geq 1$)

Dermed er, $m^k \geq 1+k$, for $m\neq 1$.

■

Den næste sætning der vil blive bevist, giver egenskaben at man kan gøre et naturligt tal så højt som man ønsker ved at multiplicere med et tilstrækkeligt stort naturligt tal.

Sætning - Archimedes aksiom

Lad $m, n\in\mathbb{N}$. Så $\exists\ k\in\mathbb{N}$ sådan at $mk>n$.

Bevis

For ethvert $m, n\in\mathbb{N}$, tages $k=S(n)$. Så er

$mS(n) \quad =mn+m$

$\quad >mn \quad$ (fra (4))

$\quad \geq n \quad$ (fra (9) og eftersom $m\geq 1$)

Dermed gælder Archimedes aksiom.

■

Denne sætning var for multiplikation, men der findes en næsten magen til for eksponentialet, som bevises nu.

Sætning - Archimedes aksiom for eksponentialer

Lad $m, n\in\mathbb{N}$, $m\neq 1$. Så $\exists\ k\in\mathbb{N}$ sådan at $m^k > n$.

Bevis

For ethvert $m, n\in\mathbb{N}$, $m\neq 1$, tages $k=n$. Så er

$m^n \quad \geq n+1 \quad$ (Fra (15))

$\quad >n$

Dermed gælder Archimedes aksiom for eksponentialer

■

Matematisk induktion

I de ovenstående sætninger og beviser, hvor beviset benytter at det gælder for $\forall n \in \mathbb{N}$, men der findes sætninger og beviser som ikke gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, men hvor der er et endeligt antal situationer hvor det ikke gælder. I disse tilfælde vil man ikke umildbart kunne benytte N(v), da denne udtrykkeligt kræver at $n=1 \in P$. Dette afsnit vil blive brugt til hvordan sådan situationer kan løses, ved hjælp af induktion fra et vilkårligt $k \in \mathbb{N}$.

Sætning

Lad $A \subseteq \mathbb{N}$ sådan at
(a) $k \in A$
(b) $S(n) \in A$ når $n \in A$ $\forall$ $n \geq k$
Så er $n \in A$ $\forall$ $n \geq k$.

Bevis

Definer $P=\{n \in \mathbb{N} | n<k \text{ eller } n \in A\}$. Hvis $k=1$ er alle $n \in P$, og derfor kan man blot anvende N(v). Det antages derfor at $k \neq 1$. Nu er, $1 \in P$ eftersom $1<k$. Antag at $n \in P$. Enten er
(i) $n<k$
Dermed haves det at $S(n) \leq k$. Hvis $S(n)<k$, Så er $S(n) \in P$ grundet definition af P. Ellers ville, $S(n)=k$, også her ville $S(n) \in P$ eftersom $k \in A$ i følge (a).
(ii) $n \in A$
Det kan antages at $n \geq k$. Ellers kan (i) anvendes. Dermed er det klart fra (b) at $S(n) \in A$ dermed $S(n) \in P$.
Dermed er $S(n) \in P$ når $n \in P$. Fra N(v), vides det at $P=\mathbb{N}$. Dermed gælder sætningen for alle $n \geq k$.

■

Hvis man sætter $k=1$ i ovenstående sætning fås at $A=\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ er velordnet

Tidligere i kapitlet er det blevet vist at $\mathbb{N}$ er en uendelig mængde. Dette er en nyttig egenskab, men det er ikke noget som gør $\mathbb{N}$ speciel. Både de hele tal, de rationelle tal og de reelle tal har samme egenskab, dog er der en stor forskel på de naturlige tal og resten. Hvis man forestiller sig en tallinje hvor de fire systemer sammenlignes ses det tydeligt at de naturlige tal starter fra 1, mens de andre tre talsystemer går uendeligt langt mod minus, de har dermed ikke noget fysisk startpunkt, da minus uendeligt ikke er indeholdt i talsystemerne.
Men at de naturlige tal har et fysisk startpunkt, gør at man kan snakke om $\mathbb{N}$ som en velordnet mængde, dog skal det først bruges at intervaller er begrænset

Sætning

For ethvert $n \in \mathbb{N}$, er mængden $[1, n] := \{m \in \mathbb{N} | 1 \leq m \leq n\}$ er en endelig mængde.

Bevis

Definer $P = \{n \in \mathbb{N} | [1,n]$ er en endelig mængde$\}$. Det bemærkes at der eksisterer en og kun en injektiv funktion $F:\{1\} \to \{1\}$ og at denne også er surjektiv. Dermed er $1 \in P$. Antag at $n \in P$.
Det bemærkes at der ikke er nogen naturlige tal mellem n og $S(n)$, dermed er det sandt at $[1,S(n)] = [1,n] \cup \{S(n)\}$. Tag en vilkårlig injektiv funktion $F:[1,S(n)] \to [1,S(n)]$. Der er nu to mulige udsagn:
(i) $F[1,n] \subseteq [1,n]$
Dermed kan der defineres $F':[1,n] \to [1,n]$ ved $F'(m) = F(m)\ \forall\ m \in [1,n]$. Så er F' surjektiv på intervallet $[1,n]$ eftersom F' er injektiv og $n \in P$.
Dermed skal det vises at $S(n) \in F[1,S(n)]$. Det påstås at $F(S(n)) = S(n)$, hvis dette ikke er sandt, skal det haves at $F(S(n)) \in [1,n]$ og så $\exists\ k \in [1, n]$ sådan at $F(S(n)) = F(k)$. Men $k \neq S(n)$, vil være i modstrid med at F er injektiv. Dermed er F surjektiv på $[1,S(n)]$.
(ii) $F[1, n] \not\subseteq [1, n]$
Dermed eksisterer der et $k \in [1,n]$ sådan at $F(k) = S(n)$. Eftersom F er injektiv vides det at $F(m) \neq S(n)$ hvis $m \neq k$. Desuden vides det at, $F(S(n)) \neq S(n)$. F' defineres som $F':[1,n] \to [1,n]$ ved:
$F'(m) = F(m)$ hvis $m \in [1,n]$, $m \neq k$.
$F'(k) = F(S(n))$
Bemærk at F' stadig er injektiv eftersom $F'(m) \neq F(S(n))\ \forall\ m \in [1,n]/\{k\}$. Dermed er F' surjektiv på $[1,n]$, eftersom $n \in P$. Dermed er $F(k) = S(n)$ og for ethvert $m \in [1,n]$, $\exists\ l \in [1,S(n)]/\{k\}$ sådan at $F(l) = m$ og så F er surjektiv på $[1, S(n)]$.
Dermed er $S(n) \in P$ når $n \in P$. Fra N(v) vides det at $P = \mathbb{N}$ og dermed er et interval en endelig mængde.

■

Den sidste sætning der vil blive vist for de naturlige tal, beskriver sammenhængen mellem begrænsninger for delmængder og den uendelige mængde $\mathbb{N}$. Denne sætning gør at man kan konkludere at $\mathbb{N}$ er velordnet.

Sætning

Lad T være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$. Så gælder følgende:
(i): T er altid begrænset nedad. Endvidere InfT eksisterer og er indeholdt i T. Videre er InfT=1 hvis og kun hvis $1 \in T$.
(ii): Hvis T er begrænset opad, så eksisterer SupT og er indeholdt i T
(iii): T er uendelig hvis og kun hvis T ikke er begrænset opad.

Bevis

(i) Lad $L=\{n\in\mathbb{N}|n\leq t\ \forall\ t\in T\}$ mængden af nedre grænser. Det bemærkes at $1\in L$ og at er T altid begrænset nedad. Det bemærkes endvidere at hvis $t\in T$, så er $S(t)\notin L$ eftersom $S(t)>t$. Dermed kan det konkluderes at $L\neq\mathbb{N}$. Dermed eksisterer der et $l_0\in L$ sådan at $S(l_0)\notin L$, ellers ville det ifølge N(v) følge at $L=\mathbb{N}$. Antag at der eksisterer et $l_1\in L$ sådan at $l_1>l_0$. Eftersom der ikke er noget naturligt tal mellem et naturligt tal og dens efterfølger, må det haves at $l_1\geq S(l_0)$. Men hvis $S(l_0)\notin L$ så er $\exists$ $t_0\in T$ sådan at $S(l_0)>t_0$. Dermed er $l_1>t_0$ hvilket er i modstrid med at $l_1\in L$. Dermed er $l_0=\mathrm{Inf}T$ og så eksisterer InfT. Hvis $l_0\notin T$, haves det at $l_0<t\ \forall\ t\in T$. Dette kan ikke lade sig gøre, da det så haves at $l_0<t_0<S(l_0)$, hvilket er i modstrid med at der ikke kan være et naturligt tal mellem et naturligt tal og denne efterfølger. Dermed er $\mathrm{Inf}T\in T$. Hvis $\mathrm{Inf}T=1$, så er det vist ovenfor at $1\in T$. Modsat, hvis $1\in T$, så er 1 den eneste nedre grænse og må derfor være InfT.
(ii) Lad $U=\{n\in\mathbb{N}|n\geq t\forall\ t\in T\}$ mængden af øvre grænser. Da T er begrænset opad følger der at U en ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$ og fra (i) vides det at InfU eksisterer og er i U. Eftersom $\mathrm{Inf}U\in U$ og $\mathrm{Inf}U\leq n\ \forall\ n\in U$, så følger det at $\mathrm{Inf}U=\mathrm{Sup}T$ og dermed eksisterer SupT. Antag at $\mathrm{Sup}T\notin T$. Så er $t<\mathrm{Sup}T\ \forall\ t\in T$. Eftersom T er en ikke-tom delmængde, haves det at $\mathrm{Sup}T\neq 1$. Dermed, $\exists\ m\in\mathbb{N}$ sådan at $S(m)=\mathrm{Sup}T$. Eftersom der ikke er et naturligt tal mellem et naturligt tal og dets efterfølger, $t\leq m\ \forall\ t\in T$ og så er $m\in U$, men $m<S(m)$, modstrider at SupT er supremum for T. Dermed er $\mathrm{Sup}T\in T$, hvis T er begrænset opad.
(iii) Antag at T ikke er begrænset opad. For ethvert $n\in T$, lades $C_n=\{m\in T|m>n\}$. Så er C_n en ikke-tom mængde eftersom T ikke er begrænset opad. Fra (i), vides det at $\mathrm{Inf}C_n$ eksisterer og er i C_n. Eftersom $\mathrm{Inf}C_n\in C_n$, $\mathrm{Inf}C_n\geq n+1$ samt at, $\mathrm{Inf}C_n\in T$. Definer funktionen $f:T\rightarrow T$ ved $f(n)=\mathrm{Inf}C_n\ \forall\ n\in T$. Lad $\mathrm{Inf}C_n=\mathrm{Inf}C_n'$. Hvis $n < n'$, så er $n'\in C_n$ og så er $\mathrm{Inf}C_n\leq n'<n'+1\leq \mathrm{Inf}C_n'$ hvilket er en selvmodsigelse. Tilsvarende er $n>n'$ umuligt og dermed er $n=n'$. Dermed er f injektiv. Det haves også at $\mathrm{Inf}T\leq n<n+1\leq\mathrm{Inf}C_n\ \forall\ n\in T$. Dermed er $\mathrm{Inf}T\notin f(T)$ dog haves det fra (i), at $\mathrm{Inf}T\in T$ og dermed er $T \neq f(T)$. Dermed er f surjektiv på en ægte delmængde af T og dermed er T uendelig.
Antag nu at T er begrænset opad. Dermed eksisterer SupT ifølge (ii). Så er $T\subseteq[1,\mathrm{Sup}T]$. Eftersom $[1, \mathrm{Sup}T]$ er endelig, må T også være endelig.
Dermed er T uendelig hvis og kun hvis T ikke er begrænset opad

■

Det følger fra (i) at $\mathbb{N}$ er en velordnet mængde, da der for enhver delmængde T af $\mathbb{N}$ vil eksisterer InfT som også er indeholdt i T, dermed vil det også være MinT, som kræves for at være velordnet. Denne egenskab har de naturlige tal i kraft af at have et startpunkt samt at der ikke findes noget naturligt tal, mellem et naturligt tal og dets efterfølger, som kommer fra (8) fra Egenskaber ved ordning. Desuden følger det fra (i) og (ii) at $\mathbb{N}$ er fuldstændigt ordnet.

ℕ's utilstrækkelighed

Dette afsnit har ikke til formål at proklamere at ℕ ikke kan bruges, da det har egenskaber som virker, specifikt som optællingssystem, men ℕ har også sine mangler. Der er tidspunkter hvor det ikke er nok blot at tælle op. Eksempelvis hvis man holder styr på hvor mange æbler der er på ens træ, i denne situation kan der også blive taget nogle æbler eller æblerne kan falde ned. I dette system skulle man kunne benytte subtraktion, men man ville forblive i $\mathbb{N}\cup\{0\}$, da man aldrig vil kunne have et negativt antal æbler på et træ. Dog er der andre formål hvor det er nødvendigt med et andet talsystem. Eksempelvis hvis man holder regnskab med sine penge, her kan der også blive brugt nogen penge, samt man kan gå i underskud. Derfor er det ønskværdigt med et system som altid kan håndtere subtraktion.
Derfor er der brug for heltals systemet, som indeholder det naturlige talsystem kombineret med nye elementer, som også vil kunne håndtere subtraktion ved at addere med negative tal.

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette kapitel [Rana, 1998] og [Bartle, 2011]

Kapitel 2 - Heltals talsystemet.

Som argumenteret for i afslutningen af forrige kapitel, kunne det naturlige talsystem ikke håndtere subtraktion, da systemet startede, ved det mindste element, 1. Derfor bliver det naturlige talsystem i dette kapitel udviklet til heltals systemet, som indeholder det naturlige talsystems elementer som de positive heltal, samt at det indeholder 0 og de negative heltal.
For heltals systemet bliver det vist at dette kan håndtere de binære operatorer addition og multiplikation. Måden hvorpå systemet håndtere subtraktion, er ved addition med negative tal.
Der udvikles en ordning for heltals systemet, for at vise at heltals systemet er et ordnet integreret domæne, samt at systemet er unikt.

Netto Difference Systemet.

Der vil i dette afsnit forsøges at lave et nyt talsystem, hvor man både kan operere med positive og negative heltal. Her betragtes ordnede par af naturlige tal, som klassificeres i henhold til forskellen mellem den første værdi og den anden værdi. Systemet kaldes netto difference systemet Systemet består af elementer, som alle relatere sig til en uendelig mængde af par. Eksempelvis vil elementet [2] relatere til både (3,1), (5,3) og (99,97) samt uendeligt mange flere. Ligeledes kan der forekomme negative elementer såsom [-3] som relatere til parret (1,4) med flere.

Definition

For (n,m), (r,s)$\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, kaldes (n,m) ækvivalent til (r,s) og noteres som (n,m)~(r,s) hvis n+s=m+r.

Det vil nu blive bevist at dette er en ækvivalensrelation på $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, da dette vil betyde at enhver mængde af par vil blive repræsenteret af et og kun et heltal

Sætning

Relationen ~ er en ækvivalensrelation på $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Bevis

Eftersom det haves at n+m=m+n, bemærkes det at (n,m)~(n,m). Dermed er ~ refleksiv.
Eftersom det haves at n+s=m+r ⇔ r+m=s+n, haves det at (n,m)~(r,s) ⇔ (r,s)~(n,m). Dermed er ~ symmetrisk.
Lad (n,m)~(r,s) og (r,s)~(k,l). Så haves det at n+s=m+r og r+l=s+k. Dermed er,

$$(n+s)+(r+l) \quad =(m+r)+(s+k)$$

$\Rightarrow \quad n+l = m+k$

Dermed haves det at hvis $(n,m)\sim(r,s)$ og $(r,s)\sim(k,l)$ så er $(n,m)\sim(k,l)$. Dermed er $\sim$ transitiv.
Dermed er $\sim$ en ækvivalensrelation på $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

■

Herfra vil mængden $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ for netto difference systemet noteres med $\mathbb{Z}$. Et element $[(n,m)]$ i $\mathbb{Z}$ vil herfra blive noteret som $[n,m]$. Nu er der produceret elementerne i $\mathbb{Z}$, men dette er ikke nok for at det kan kaldes et system. Der mangler fortsat at blive defineret tilstrækkelige binære operatorer samt ordning, som det også blev gjort med $\mathbb{N}$. Først gennemgås dog denne fundamentale relation mellem elementerne i $\mathbb{Z}$:

Lemma

$[m,n]=[m+k,n+k]\ \forall\ n, m, k\in\mathbb{N}$

Bevis

$$[m, n]=[m+k, n+k] \Leftrightarrow m+(n+k)=n+(m+k)$$
$$\Leftrightarrow m+n+k=m+n+k$$

■

Binære operatorer på $\mathbb{Z}$

I dette afsnit vil addition og multiplikation på $\mathbb{Z}$ blive defineret.

Sætning Addition på $\mathbb{Z}$

Der eksisterer en veldefineret binær operator $\oplus$ på $\mathbb{Z}$ givet ved $[m,n]\oplus[k,r]=[m+k,n+r]\ \forall\ n, m, k, r\in\mathbb{N}$.

Bevis

For at vise at $\oplus$ er veldefineret, er man nødt til at vise at der for hvert $([m,n],[k,r])\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, haves et og kun et resultat under $\oplus$. Dermed lades $[m,n]=[m',n']$ og $[k,r]=[k',r']$. Så er
$[m,n]\oplus[k,r]=[m+k,n+r]$ og $[m',n']\oplus[k',r']=[m'+k',n'+r']$. nu haves at,
$[m,n]=[m',n'] \Rightarrow m+n'=n+m'$
$[k,r]=[k',r'] \Rightarrow k+r'=r+k'$
Dermed haves at,

$$(m+n')+(k+r')=(n+m')+(r+k')$$
$$\Rightarrow (m+k)+(n'+r')=(m'+k')+(n+r)$$
$$\Rightarrow [m+k,n+r]=[m'+k',n'+r']$$

Dermed er $\oplus$ veldefineret.

■

Sætning: Egenskaber for addition på $\mathbb{Z}$

For ethvert $\forall$ [m,n], [k,r], [p,q] $\in\mathbb{Z}$, haves det at:

$A_{\mathbb{Z}}$(i): $[m,n]\oplus[k, r]=[k, r]\oplus[m, n]$

$$[m, n]\oplus[k, r] =[m+k,n+r] =[k+m,r+n] =[k,r]\oplus[m,n]$$

$A_{\mathbb{Z}}$(ii): $([m, n]\oplus[k, r])\oplus[p, q]=[m,n]\oplus([k,r]\oplus[p,q])$

$$\begin{aligned}([m,n]\oplus[k,r])\oplus[p,q] &=[m+k,n+r]\oplus[p,q]\\ &=[(m+k)+p,(n+r)+q]\\ &=[m+(k+p),n+(r+q)]\\ &=[m,n]\oplus[k+p,r+q]\\ &=[m,n]\oplus([k,r]\oplus[p,q])\end{aligned}$$

$A_{\mathbb{Z}}$(iii): Identitetselementet eksisterer for $\oplus$ og er givet ved [1,1].

$$\begin{aligned}[m,n]\oplus[1,1] &=[m+1,n+1]\\ &=[m,n]\\ &=[1,1]\oplus[m,n] && (\text{fra } A_{\mathbb{Z}}(i))\end{aligned}$$

$A_{\mathbb{Z}}$(iv): For ethvert $[m,n]\in\mathbb{Z}$, eksisterer $\oplus$-inverselementet og er givet ved [n,m].

$$\begin{aligned}[m,n]\oplus[n,m] &=[m+n,n+m]\\ &=[m+n+1,m+n+1]\\ &=[1,1]\\ &=[n,m]\oplus[m,n] && (\text{fra } A_{\mathbb{Z}}(i))\end{aligned}$$

■

Det bemærkes at en konsekvens af ovenstående bevis er at $(\mathbb{Z},\oplus)$ er en kommutativ gruppe.

Sætning - Multiplikation på $\mathbb{Z}$

Der eksisterer en veldefineret operator $\odot$ på $\mathbb{Z}$ givet ved $[m,n]\odot[k,r]=[mk+nr,nk+mr]$ $\forall$ n, m, k, r $\in\mathbb{N}$.

Bevis

Lad $[m,n]=[m',n']$ og $[k,r]=[k',r']$. Så haves det at

$[m,n]=[m',n'] \Rightarrow m+n'=n+m'$

$[k,r]=[k',r'] \Rightarrow k+r'=r+k'$

Det haves nu at,

$$\begin{aligned}& [m,n]\odot[k,r]=[m',n']\odot[k',r']\\ \Leftrightarrow\quad & [mk+nr,nk+mr]=[m'k'+n'r',n'k'+m'r']\\ \Leftrightarrow\quad & (mk+nr)+(n'k'+m'r')=(nk+mr)+(m'k'+n'r')\\ \Leftrightarrow\quad & mk+nr+n'k'+m'r'+(n'k+m'r+nr'+mk')=\\ & nk+mr+m'k'+n'r'+(n'k+m'r+nr'+mk')\\ \Leftrightarrow\quad & (m+n')k+(m+n')k'+(m'+n)r'+(m'+n)r=n(r'+k)+m(r+k')+m'(r+k')+n'(r'+k)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad (m+n')(k+k'+r'+r)=(r+k')(n+m+m'+n')$

$\Leftrightarrow \quad (m+n')((r+k')+(k+r'))=(r+k')((m+n')+(n+m'))$

$\Leftrightarrow \quad (m+n')(2)(r+k')=(r+k')(2)(m+n')$

$\Leftrightarrow \quad 2(m+n')(r+k')=2(m+n')(r+k')$

Dermed er $\odot$ veldefineret.

■

Sætning - Egenskaber for multiplikation på $\mathbb{Z}$

For ethvert l, s, m, n, k, r $\in\mathbb{N}$ haves det at:

$M_{\mathbb{Z}}$(i): $[m,n]\odot[k,r]=[k,r]\odot[m,n]$

$[m,n]\odot[k,r] =[mk+nr,nk+mr]$

$=[km+rn,rm+kn]$

$=[k,r]\odot[m,n]$

$M_{\mathbb{Z}}$(ii): $([m,n]\odot[k\ r])\odot[l,s]=[m,n]\odot([k,r]\odot[l,s])$

$([m,n]\odot[k,r])\odot[l,s] =[mk+nr,nk+mr]\odot[l,s]$

$=[(mk+nr)l+(nk+mr)s,(nk+mr)l+(mk+nr)s]$

$=[mkl+nrl+nks+mrs,nkl+mrl+mks+nrs]$

$=[(mkl+mrs)+(nrl+nks),(nkl+nrs)+(mrl+mks)]$

$=[m(kl+rs)+n(rl+ks),n(kl+rs)+m(rl+ks)]$

$=[m,n]\odot([k,r]\odot[l,s])$

$M_{\mathbb{Z}}$(iii): Identitetselementet eksisterer for $\odot$ og er givet ved [2,1]

$[m,n]\odot[2,1] =[m2+n1,n2+m1]$

$=[m+m+n,n+n+m]$

$=[m+(m+n),n+(m+n)]$

$=[m,n]$

$=[2,1]\odot[m,n]$

$M_{\mathbb{Z}}$(iv): $[m,n]\odot([k,r]\oplus[l,s])=([m,n]\odot[k,r])\oplus([m,n]\odot[l,s])$

$[m,n]\odot([k,r]\oplus[l,s]) =[m,n]\odot[k+l,r+s]$

$=[m(k+l)+n(r+s),n(k+l)+m(r+s)]$

$([m,n]\odot[k,r])\oplus([m,n]\odot[l,s]) =[mk+nr,nk+mr]\oplus[ml+ns,nl+ms]$

$=[(mk+nr)+(ml+ns),(nk+mr)+(nl+ms)]$

$=[m(k+l)+n(r+s),n(k+l)+m(r+s)]$

$=[m,n]\odot([k,r]\oplus[l,s])$

$M_{\mathbb{Z}}$(v): $[m,n]\odot[k,r]=[1,1] \Rightarrow [m,n]=[1,1]$ eller $[k,r]=[1,1]$

Der tages udgangspunkt i at

$[m,n]\odot[k,r]=[1,1]$

$\Rightarrow \quad [mk+nr,nk+mr]=[1,1]$

$\Rightarrow \quad (mk+nr)+1=(nk+mr)+1$

$\Rightarrow \quad mk+nr=nk+mr$

Antag at $[m,n]\neq[1,1]$. Så er $m\neq n$.

Der betragtes nu to tilfælde.

(i): $m>n$

Dermed eksisterer der et $l \in \mathbb{N}$ sådan at $m=n+l$. Dermed haves det at

$$\begin{aligned} & mk+nr=nk+mr \\ \Rightarrow \quad & (n+l)k+nr=nk+(n+l)r \\ \Rightarrow \quad & nk+lk+nr=nk+nr+lr \\ \Rightarrow \quad & lk=lr \\ \Rightarrow \quad & k=r \\ \Rightarrow \quad & [k,r]=[1,1] \end{aligned}$$

(ii): $m<n$

Fra symmetri haves det at

$$\begin{aligned} & mk+nr=nk+mr \\ \Rightarrow \quad & k=r \\ \Rightarrow \quad & [k,r]=[1,1] \end{aligned}$$

Dermed er,

$[m,n]\odot[k,r]=[1,1] \Rightarrow [k,r]=[1,1]$ hvis $[m,n]\neq[1,1]$.

■

Med ovenstående sætning er det vist at $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ er et integreret domæne. Dette er et meget brugbart resultat, da man derved kan anvende de sætninger som er bevist i Appendiks 2 for integrerede domæner.

Orden på $\mathbb{Z}$

Efter at have defineret de to velkendte binære operatorer, som og indgik i Kapitel 1, på $\mathbb{Z}$, er det næste skridt i dette kapitel at lave en ordning på elementerne i $\mathbb{Z}$. Målet er definerer en orden på $\mathbb{Z}$, og derigennem vise at $\mathbb{Z}$ er et ordnet integreret domæne. Først vil det blive postuleret at $\mathbb{Z}$ har en delmængde, som fungerer som mængden de positive heltal, denne er intuitivt lig $\mathbb{N}$.

Definition

Delmængden $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ af $\mathbb{Z}$, defineres som $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}:=\{[n+1,1]\in\mathbb{Z} \mid n\in\mathbb{N}\}$

Sætning

For delmængden $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ gælder der at:
(i): $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\oplus)$ er en del-semi-gruppe af $(\mathbb{Z},\oplus)$
(ii) $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\odot)$ er en del-semi-gruppe af $(\mathbb{Z},\odot)$
(iii) $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\oplus)$ er en isomorfi til $(\mathbb{N},+)$ og $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\odot)$ er en isomorfi til $(\mathbb{N},\cdot)$, som semigrupper under den samme isomorfi.
(iv) For ethvert $x\in\mathbb{Z}$, eksisterer der et y, $z\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ sådan at $x=y\oplus(-z)$.

Bevis

Tag et tilfældigt $[n+1,1]$, $[m+1,1]\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$.

(i) $[n+1,1]\oplus[m+1,1] \quad =[n+m+1+1,1+1]$

$=[(n+m)+1,1] \quad (\in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}})$

Dermed er $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ lukket under $\oplus$, og $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\oplus)$ er det en del-semi-gruppe af $(\mathbb{Z},\oplus)$

(ii) $[n+1,1]\odot[m+1,1] \quad =[(n+1)(m+1)+(1)(1),(1)(m+1)+(n+1)(1)]$

$=[nm+n+m+1+1,m+1+n+1]$

$=[nm+1,1] \quad (\in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}})$

Dermed er $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ lukket under $\odot$, og $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\odot)$ er det en del-semi-gruppe af $(\mathbb{Z},\odot)$.

(iii) Definer $\varphi:\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{N}$ ved $\varphi([n+1,1])=n$

Det vises først at φ er veldefineret. Derfor lades

$[n'+1,1]=[n+1,1]$

$(n'+1,1)\sim(n+1,1) \quad \Leftrightarrow(n'+1)+1=1+(n+1)$

$\Leftrightarrow n'=n$

Dermed haves at $[n+1,1]=[n'+1,1] \Rightarrow \varphi([n+1,1])=\varphi([n'+1,1])$ dermed er φ veldefineret. Grundet biimplikationerne haves det også at φ er injektiv.

Fra definitionen af φ vides det at φ er surjektiv.

Nu tages for et givet $[n+1,1]$, $[m+1,1]\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$.

$\varphi([n+1,1]\oplus[m+1,1]) \quad =\varphi([(n+1)+(m+1),1+1])$

$=\varphi([(n+m)+1,1])$

$=n+m$

$=\varphi([n+1,1])+\varphi([m+1,1])$

Dermed er $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\oplus)\simeq(\mathbb{N},+)$.

$\varphi([n+1,1]\odot[m+1,1]) \quad =\varphi([(n+1)(m+1)+(1)(1),(1)(m+1)+(n+1)(1)])$

$=\varphi([nm+n+m+1+1, m+1+n+1])$

$=\varphi([nm+1,1])$

$=nm$

$=\varphi([n+1,1])\varphi([m+1,1])$

Dermed er $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}},\odot)\simeq(\mathbb{N},\cdot)$.

(iv) For ethvert $[n,m]\in\mathbb{Z}$, tages $[n+1,1]$, $[m+1,1]\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$. Så er

$[n+1,1]\oplus(-[m+1,1]) \quad =[n+1,1]\oplus[1,m+1]$

$=[(n+1)+1,1+(m+1)]$

$=[n,m]$

■

Det næste der defineres er de negative heltal.

Definition

Delmængden $-\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ af $\mathbb{Z}$ defineres ved $-\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}:=\{-[n,m] \mid [n,m]\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}\}$

Der vil nu blive vist en sætning som viser at $\mathbb{Z}$ kan deles ind i de disjunkte $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$, $-\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ og $\{[1,1]\}$.

Sætning

$\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}\cup(-\mathbb{N}_{\mathbb{Z}})\cup\{[1,1]\}=\mathbb{Z}$, hvor $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$, $-\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$, $\{[1,1]\}$ er disjunkte.

Bevis

Det er tydeligt at, $\mathbb{N}_\mathbb{Z}\cup(-\mathbb{N}_\mathbb{Z})\cup\{[1,1]\}\subseteq\mathbb{Z}$

Tages et tilfældigt $z\in\mathbb{Z}$. Så eksisterer der et x, $y\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ sådan at $z=x\oplus(-y)$. Lad φ være isomorfien fra $(\mathbb{N},+)$ til $(\mathbb{N}_\mathbb{Z},\oplus)$. Så er $\varphi(x')=x$, $\varphi(y')=y$ for et og kun et $x',y'\in\mathbb{N}$.

Der undersøges nu tre udfald,

(i) $x'= y'$

Eftersom φ er injektiv haves det at x=y. Dette betyder at $z=x\oplus(-x)=[1,1]$.

(ii) $x'>y'$

Så eksisterer der et $k'\in\mathbb{N}$ sådan at $x'=y'+k'$. Fra at φ er en isomorfi gælder der at, $\varphi(x')=\varphi(y')\oplus\varphi(k')$. Bemærk at $\varphi(k')=k$ for et $k\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$. Så haves det at $z=(y\oplus k)\oplus(-y)=k$ og dermed er $z\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$.

(iii) $y'>x'$

Så eksisterer der et $k'\in\mathbb{N}$ sådan at $y'=x'+k'$. Fra at φ er en isomorfi gælder der at, $\varphi(y')=\varphi(x')\oplus\varphi(k')$ hvor $\varphi(k')=k$ for et $k\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$. Så haves det at $z=x\oplus(-(x\oplus k))=x\oplus(-x)\oplus(-k)=-k$ og dermed er $z\in-\mathbb{N}_\mathbb{Z}$.

Dermed er $\mathbb{N}_\mathbb{Z}\cup(-\mathbb{N}_\mathbb{Z})\cup\{[1,1]\}\supseteq\mathbb{Z}$ og dermed $\mathbb{N}_\mathbb{Z}\cup(-\mathbb{N}_\mathbb{Z})\cup\{[1,1]\}=\mathbb{Z}$.

Fra definitionen af $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, haves det at hvis $[1,1]\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, så eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at k+1=1. Men denne kan ikke eksistere i $\mathbb{N}$. Hvis $[1,1]\in(-\mathbb{N}_\mathbb{Z})$, så er $[1,1]=-[1,1]\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, hvilket giver den samme modstrid. Sidst tages et $x\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}\cap(-\mathbb{N}_\mathbb{Z})$. Da det følger at $x\in-\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, så haves det at $-x\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, men eftersom $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ er lukket under $\oplus$, sammenholdt med at $[1,1]=x\oplus(-x)\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ giver dette samme modstrid.

Dermed er $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, $-\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, $\{[1,1]\}$ disjunkte.

■

Dermed kan der defineres en ordning på $\mathbb{Z}$.

Definition

Lad m, $n\in\mathbb{Z}$. Det siges at m er større end n, eller at n er mindre end m, og noteres $m\succ n$ hvis $m\oplus(-n)\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$. Det noteres $m\succcurlyeq n$ hvis m=n eller $m\succ n$.

Der vil nu blive vist en sætning som viser at $(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)$ er et ordnet integreret domæne, til dette vil der blive benyttet to tidligere sætninger.

Sætning

$(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)$ er et ordnet integreret domæne.

Bevis

Det skal vises at $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ opfylder

i) $\forall$ x, $y\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, $x\oplus y$, $x\odot y\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$. Dette er sandt da det er vist at $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ er lukket under $\oplus$ og $\odot$.

ii) $\forall$ $x\in\mathbb{Z}$, gælder en og kun en af følgende: $x\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, $x=[1,1]$, $-x\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$. Dette er sandt eftersom $\mathbb{Z}=\mathbb{N}_\mathbb{Z}\cup(-\mathbb{N}_\mathbb{Z})\cup\{[1,1]\}$ og at $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, $-\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ og $\{[1,1]\}$ er disjunkte.

Dermed er $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot, \succ)$ et ordnet integreret domæne.

■

Der vil ikke, som det blev gjort med $\mathbb{N}$, blive gennemgået egenskaber for mængden $\mathbb{Z}$. Dette skyldes, at dette findes i Appendiks 2 hvor der er blevet bevist egenskaber for ordnet integreret domæner, disse vil blive anvendt i de kommende afsnit.

Heltals talsystemet

Der er nu konstrueret et system, som modellere heltal. Det vil i resten af dette afsnit vises at heltal systemet er et ordnet integreret domæne.

Definition

Et ordnet integreret domæne $(X,\oplus,\odot,\succ)$ kaldes et heltals system hvis der eksisterer en delmængde $\mathbb{N}_X$ af X sådan at:
(i) Både $(\mathbb{N}_X,\oplus)$ og $(\mathbb{N}_X,\odot)$ er semigrupper under samme isomorfi $\varphi:\mathbb{N}_X\rightarrow\mathbb{N}$, så haves det at $(\mathbb{N}_X,\oplus)\simeq(\mathbb{N},+)$ og $(\mathbb{N}_X,\odot)\simeq(\mathbb{N},\cdot)$ er semigrupper. Endvidere, for ethvert x, y $\in\mathbb{N}_X$, haves det at $x\succ y \Rightarrow \varphi(x)>\varphi(y)$.
(ii) For ethvert $x\in X$, eksisterer et y, $z\in\mathbb{N}_X$ sådan at $x=y\oplus(-z)$.

Det vil nu blive vist at netto difference systemet er et heltals system, samt vil det blive vist at to heltals systemer er isomorfe, og man derfor kan opfatte det som at der kun eksisterer et heltals system.

Sætning - Eksistens og unikhed af heltals systemet.

Heltals systemet eksisterer og to heltals systemer vil være isomorfe.

Bevis

Det antages at $(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)$ er et heltals system. Betragt delmængde $\mathbb{N}_\mathbb{Z}$. Der er vist at $(\mathbb{N}_\mathbb{Z},\oplus)$ og $(\mathbb{N}_\mathbb{Z},\odot)$ er semigrupper og at de er isomorfe til henholdsvis $(\mathbb{N},+)$ og $(\mathbb{N},\cdot)$ under den samme isomorfi $\varphi:\mathbb{N}_\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}$ defineret ved $\varphi([n+1,1])=n$.
For ethvert $[n+1,1]$, $[m+1,1] \in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$, haves det at

$$
\begin{aligned}
[n+1,1]\succ[m+1,1] \quad &\Rightarrow [n+1,1]\oplus(-[m+1,1]) \in\mathbb{N}_\mathbb{Z}\\
&\Rightarrow [n+1,1]\oplus[1,m+1] \in\mathbb{N}_\mathbb{Z}\\
&\Rightarrow [(n+1)+1,1+(m+1)] \in\mathbb{N}_\mathbb{Z}\\
&\Rightarrow [n, m] \in\mathbb{N}_\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Dette betyder at $[n,m]=[k+1,1]$ for nogle $k\in\mathbb{N}$. Dermed er $(n,m)\sim(k+1,1)$ og så er $n+1=m+(k+1)$, da $n=m+k$ og dermed haves det at $n>m$. Dermed betyder $[n+1,1]\succ[m+1,1] \Rightarrow \varphi([n+1,1])>\varphi([m+1,1])$. Det er ligeledes vist at der for ethvert $x\in\mathbb{Z}$, eksisterer et y, $z\in\mathbb{N}_\mathbb{Z}$ sådan at $x=y\oplus(-z)$. Dermed kan det konkluderes at $(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)$ er et heltals system, og dermed eksisterer heltals systemet.

Lad $(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)$ og $(\mathbb{Z}',\oplus'\ \odot',\succ')$ være to heltals systemer. Grundet transitet ved isomorfier gennem $(\mathbb{N},+,\cdot,>)$ eksisterer der en isomorfi $\varphi:\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{N}_{\mathbb{Z}'}$ sådan at der for ethvert y, $z\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$,

$\varphi(y\oplus z)=\varphi(y)\oplus'\varphi(z)$

$\varphi(y\odot z)=\varphi(y)\odot'\varphi(z)$

$y\succ z\Rightarrow\varphi(y)\succ'\varphi(z)$

Ligeledes, for ethvert $x\in\mathbb{Z}$, eksisterer et y_x, $z_x\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ sådan at $x=y_x\oplus(-z_x)$. Definer $\psi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}'$ ved $\psi(x)=\varphi(y_x)\oplus'(-\varphi(z_x))$

For ethvert a, $b\in\mathbb{Z}$.

Antag at a=b. Så er

$$
\begin{aligned}
& y_a\oplus(-z_a)=y_b\oplus(-z_b)\\
\Leftrightarrow\quad & y_a\oplus z_b=y_b\oplus z_a\\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(y_a\oplus z_b)=\varphi(y_b\oplus z_a)\\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(y_a)\oplus'\varphi(z_b)=\varphi(y_b)\oplus'\varphi(z_a)\\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(y_a)\oplus'(-\varphi(z_a))=\varphi(y_b)\oplus'(-\varphi(z_b))\\
\Leftrightarrow\quad & \psi(a)=\psi(b)
\end{aligned}
$$

Dermed er ψ veldefineret og injektiv.

For et givet $x'\in\mathbb{Z}'$. Så er $x'=y_x'\oplus'(-z_x')$. Eftersom φ er surjektiv på $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}'}$, eksisterer der et y, $z\in\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$ sådan at $\varphi(y)=y_x'$, $\varphi(z)=z_x'$. For $x=y\oplus(-z)\in\mathbb{Z}$. Så er

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &=\psi(y\oplus(-z))\\
&=\varphi(y)\oplus'(-\varphi(z))\\
&=yx'\oplus'(-zx')\\
&=x'
\end{aligned}
$$

Dermed er ψ surjektiv.

Dermed er ψ en bijektiv funktion.

For ethvert a, $b\in\mathbb{Z}$, haves det at

$$
\begin{aligned}
\psi(a\oplus b) &=\psi((y_a\oplus(-z_a))\oplus(y_b\oplus(-z_b)))\\
&=\psi((y_a\oplus y_b)\oplus(-(z_a\oplus z_b)))\\
&=\varphi(y_a\oplus y_b)\oplus'(-\varphi(z_a\oplus z_b))\\
&=(\varphi(y_a)\oplus'\varphi(y_b))\oplus'(-(\varphi(z_a)\oplus'\varphi(z_b)))\\
&=\varphi(y_a)\oplus'\varphi(y_b)\oplus'(-\varphi(z_a))\oplus'(-\varphi(z_b))\\
&=(\varphi(y_a)\oplus'(-\varphi(z_a)))\oplus'(\varphi(y_b)\oplus'(-\varphi(z_b)))\\
&=\psi(a)\oplus'\psi(b)\\
\psi(a\odot b) &=\psi((y_a\oplus(-z_a))\odot(y_b\oplus(-z_b)))\\
&=\psi((y_a\odot y_b)\oplus(y_a\odot(-z_b))\oplus((-z_a)\odot y_b)\oplus((-z_a)\odot(-z_b)))\\
&=\psi(((y_a\odot y_b)\oplus(z_a\odot z_b))\oplus(-((y_a\odot z_b)\oplus(z_a\odot y_b))))\\
&=\varphi((y_a\odot y_b)\oplus(z_a\odot z_b))\oplus'(-\varphi((y_a\odot z_b)\oplus(z_a\odot y_b)))\\
&=(\varphi(y_a\odot y_b)\oplus'\varphi(z_a\odot z_b))\oplus'(-(\varphi(y_a\odot z_b)\oplus'\varphi(z_a\odot y_b)))\\
&=\varphi(y_a\odot y_b)\oplus'\varphi(z_a\odot z_b)\oplus'(-\varphi(y_a\odot z_b))\oplus'(-\varphi(z_a\odot y_b))\\
&=(\varphi(y_a)\odot'\varphi(y_b))\oplus'(\varphi(z_a)\odot'\varphi(z_b))\oplus'\\
&\qquad(\varphi(y_a)\odot'(-\varphi(z_b)))\oplus'((-\varphi(z_a))\odot'\varphi(y_b))
\end{aligned}
$$

$$=(\varphi(y_a)\odot'\varphi(y_b))\oplus'(\varphi(y_a)\odot'(-\varphi(z_b)))\oplus'$$
$$((-\varphi(z_a))\odot'\varphi(y_b))\oplus'((-\varphi(z_a))\odot'(-\varphi(z_b)))$$
$$=(\varphi(y_a)\oplus'(-\varphi(z_a)))\odot'(\varphi(y_b)\oplus'(-\varphi(z_b)))$$
$$=\psi(a)\odot'\psi(b)$$

$$
\begin{array}{ll}
a\succ b & \Rightarrow y_a\oplus(-z_a)\succ y_b\oplus(-z_b) \\
 & \Rightarrow y_a\oplus z_b\succ y_b\oplus z_a \\
 & \Rightarrow \varphi(y_a\oplus z_b)\succ'\varphi(y_b\oplus z_a) \\
 & \Rightarrow \varphi(y_a)\oplus'\varphi(z_b)\succ'\varphi(y_b)\oplus'\varphi(z_a) \\
 & \Rightarrow \varphi(y_a)\oplus'(-\varphi(z_a))\succ'\varphi(y_b)\oplus'(-\varphi(z_b)) \\
 & \Rightarrow \psi(a)\succ'\psi(b)
\end{array}
$$

Dermed er ψ en isomorfi fra $(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)$ til $(\mathbb{Z}',\oplus',\odot',\succ')$. Dermed er $(\mathbb{Z},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Z}',\oplus',\odot',\succ')$.

■

Fra dette punkt og fremad vil der ikke længere blive benyttet udtrykket netto difference systemet, men i stedet vil det generelle heltals system blive benyttet. Dette system betegnes herfra ved $(\mathbb{Z},+,\cdot,>)$, den del af $\mathbb{Z}$ som betegner de naturlige tal, vil fortsat blive betegnet som $\mathbb{N}$.

Traditionelle koncepter associeret med heltal

I dette afsnit vil der blive introduceret primtal, divisorer og største fælles divisorer, ligeledes bevises Aritmetikkens Fundamentalsætning. Dog startes der med at bevises at $\mathbb{Z}$ er diskret.

Sætning

For $n\in\mathbb{Z}$, $\nexists\ m\in\mathbb{Z}$ sådan at $n<m<n+1$.

Bevis

Først vises det for $n\in\mathbb{N}$, $\nexists\ m\in\mathbb{Z}$ sådan at $n<m<n+1$.
Grundet transitet ved isomorfi vides det at, $m\in\mathbb{N}$ hvis det skulle eksisterer. Men det er allerede vist for $\mathbb{N}$ at dette ikke kan opfyldes.
Antag nu at der eksisterer et sådant $m\in\mathbb{Z}$. Så er

$$
\begin{array}{ll}
 & n<m<n+1 \\
\Rightarrow & n+(-n+1)<m+(-n+1)<n+1+(-n+1) \\
\Rightarrow & 1<m-n+1<1+1
\end{array}
$$

Dette er ikke muligt da $1\in\mathbb{N}$. Dermed kan et sådant m ikke eksisterer, altså er sætningen sand.

■

Det blev vist i kapitel 1, om de naturlige tal, at intervaller i $\mathbb{N}$ er endelige. Det vil nu blive vist at dette også er sandt for intervaller i $-\mathbb{N}$.

Lemma

Intervallerne [-n,-1] er endelige for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bevis

Definer $f:[1,n] \to [-n,-1]$ ved $f(x)=-x \ \forall \ x \in [1,n]$.
Eftersom $1 \leq x \leq n \Leftrightarrow -n \leq -x \leq -1$ og at de negative tal er unikke, må f være en veldefineret bijektiv funktion. Dermed gælder der at hvis [1,n] er endelig, som tidligere vist, så er [-n,-1] også endelig

■

Sætning

For enhver ikke-tom delmængde E af $\mathbb{Z}$, gælder følgende:
(i) Hvis E er begrænset opad, så eksisterer SupE og $SupE \in E$.
(ii) Hvis E er begrænset nedad, så eksisterer InfE og $InfE \in E$.
(iii) E er endelig hvis og kun hvis E både er begrænset opad og nedad

Bevis

(i) Lad E være begrænset opad af k. Eftersom E er ikke-tom eksisterer der et $x_0 \in E$. Betragt mængden $A=\{n \in \mathbb{N} | x_0+n-1 \in E\}$. Så er A en ikke-tom mængde af $\mathbb{N}$ da $1 \in A$. A er begrænset opad af $k+1-x_0 \in \mathbb{N}$. Dermed vides det fra ordens fuldstændigheden af $\mathbb{N}$, at SupA eksisterer og at $SupA \in A$. Dette betyder at $x_0+SupA-1 \in E$ og, $x_0+SupA-1$ er en øvre grænse E. Dermed er $MaxE=x_0+SupA-1$ og udsagnet gælder.
(ii) Lad E være begrænset nedad af k. Betragt mængden $L\{x \in \mathbb{Z} | x$ er nedre grænse for $E\}$. L er en ikke-tom mængde eftersom $k \in L$. Da E er en ikke-tom mængde, eksisterer der et $y_0 \in E$ der begrænser L opad. Dermed vides det fra (i), at SupL eksisterer og er i L. Betragt nu SupL+1. Eftersom SupL+1>SupL er $SupL+1 \notin L$ og dermed eksisterer der et $y_1 \in E$ sådan at $y_1<SupL+1$. Dette betyder at $SupL \leq y_1 < SupL+1$. Eftersom det ikke kan haves at $SupL<y_1<SupL+1$, følger det at $SupL=y_1$. Dermed er MinE=SupL og udsagnet gælder.
(iii) Lad E være en endelig mængde. Så er mængderne $E \cap \mathbb{N}$, $E \cap (-\mathbb{N})$ også endelige. Hvis $E \cap \mathbb{N} = \emptyset$, så er 0 øvre grænse for E. Ellers er $E \cap \mathbb{N}$ begrænset opad af et $k \in \mathbb{N}$. Dette betyder at k er øvre grænse for E. Tilsvarende hvis $E \cap (-\mathbb{N}) = \emptyset$, så er 0 nedre grænse for E. Ellers er $E \cap (-\mathbb{N})$ begrænset nedad af et $l \in -\mathbb{N}$ og dermed er E begrænset nedad af l.
Antag at E er begrænset henholdsvis opad og nedad af k og l. Der betragtes nu tre udfald.
(a) $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Så er E en delmængde af den endelige mængde $[1,k] \cup \{0\}$, og så er E også en endelig mængde.
(b) $k, l \in (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$

Så er E en delmængde af den endelige mængde $[l, -1]\cup\{0\}$, og så er E også en endelig mængde.
(c) $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $l\in-\mathbb{N}\cup\{0\}$.
Så er E en delmængde af den endelige mængde $[l, -1]\cup\{0\}\cup[1, k]$, og så er E også en endelig mængde.

■

Udsagn (i) og (ii) af sætning giver at $\mathbb{Z}$ er fuldstændigt ordnet. Det vil senere blive vist at $\mathbb{Z}$ ikke er velordnet.

Sætning: Archimedes aksiom for heltal

Lad m, n $\in\mathbb{Z}$, m>0. Så eksisterer der et k$\in\mathbb{N}$ sådan at mk>n.

Bevis

Betragt de to udfald.
(i) $n>0$
Det følger nu direkte af Archimedes aksiom for de naturlige tal at sætningen gælder.
(ii) $n\leq 0$
Tag $k=1$ og $mk=m>0\geq n$. Dermed gælder Archimedes aksiom for heltal.

■

Sætning: Divisions algoritme

Lad m, n $\in\mathbb{Z}$, n>0. Så eksisterer der unikke heltal q og r sådan at $0\leq r<n$ og $m=nq+r$.

Bevis

Lad $A:=\{m+nq|q\in\mathbb{Z}, m+nq\geq 0\}$. Så er A en ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}\cup\{0\}$, da der ifølge Archimedes aksiom for heltal, eksisterer et $k\in\mathbb{Z}$ sådan at $nk>-m$, så er $m+nk>0$. Dermed, eftersom $\mathbb{N}$ er velordnet, er $\mathbb{N}\cup\{0\}$ også velordnet og så har A et minimum, r. Det haves så at $m+nq=r$ for nogle $q\in\mathbb{Z}$. Fra definitionen er, $r\geq 0$.
Antag at $r>n$. Eftersom $n, r\in\mathbb{N}$, så eksisterer der et $r_1\in\mathbb{N}$ sådan at $r=n+r_1$. Dette betyder også at r>r1. Det haves at $r_1=r–n=m+nq–n=m+(q–1)n$.
Det betyder at $r_1\in A$ hvilket er i modstrid med at r var minimum for A. Dermed eksisterer der et $q, r\in\mathbb{Z}$ sådan at $m=nq+r$ med $0\leq r<n$.
Antag at $nq+r=nq_1+r_1$ hvor $0\leq r<n$ og $0<r_1<n$.
Lad $r<r_1$.
Så er $0<r_1–r<n-r<n$ og $r_1–r=n(q-q_1)$. Så er $q-q_1>0$. Det haves også at $n(q-q_1)<n(1)$, altså er $0<q-q_1<1$ hvilket er umuligt. Fra symmetri er det ligeledes umuligt at, $r>r_1$.
Dermed er, $r=r_1$. Som et resultat er, $q=q_1$ og dermed er q og r unikke.

■

Definition

Et heltal $n \neq 0$ kaldes en divisor af et heltal m hvis der eksisterer et heltal q sådan at $m=nq$. Det noteres som $n|m$ hvis n dividere m.

Sætning

For m, n $\in \mathbb{Z}$, gælder følgende:
(i) Hvis $n|m$, så eksisterer der præcist et heltal q sådan at $m=nq$
(ii) Hvis $m \neq 0$, er m dividerbart af m, -m, 1 og -1.
(iii) Hvis $n|m$ og $m|k$, så vil $n|k$.
(iv) Hvis $n|m$ og $n|k$, så vil $n|(m+k)$ og $n|(m-k)$
(v) Hvis $n|(m+k)$ og $n|m$, så vil $n|k$
(vi) Hvis $n|m$, så vil $kn|km$, $k \neq 0$
(vii) Hvis $n|m$, så vil $n|mk$

Bevis

(i) Eftersom $n \neq 0$, haves det at $nq_1=nq_2 \Rightarrow q_1=q_2$, dermed er udsagnet sandt.
(ii) Udsagnet er sand som følge af ligheden $m=(m)(1)=(-m)(-1)$.
(iii) Der eksisterer et q_1, q_2 sådan at $m=nq_1$ og $k=mq_2$. Så er $k=n(q_1q_2)$ og dermed er $n|k$.
(iv) Der eksisterer et q_1, q_2 sådan at $m=nq_1$ og $k=nq_2$. Eftersom $m+k=n(q_1+q_2)$ og $m–k=n(q_1– q_2)$, haves det at $n|(m+k)$ og $n|(m–k)$.
(v) Udsagnet kan omskrives til $k=(m+k)–m$ og dermed følger sandheden af udsagnet fra (iv).
(vi) Der eksisterer et q sådan at $m=nq$. Dermed er $km=(kn)q$ og så haves det at $kn|km$.
(vii) Der eksisterer et q sådan at $m=nq$. Dermed er $km=(kq)n$ og så haves det at $n|mk$.

■

Det kan nu vises at $\mathbb{Z}$ ikke er velordnet ved at betragte de lige heltal.

Sætning: $\mathbb{Z}$ er ikke velordnet.

Mængden $A=\{n \in \mathbb{Z} | 2|n\}$ er ikke-tom, men MinA eksisterer ikke.

Bevis

Da $2 \in A$ er A en ikke-tom mængde. Antag at MinA eksisterer. Eftersom $2|2$ og $2|MinA$, haves det at $2|(MinA-2)$. Dette betyder at $MinA-2 \in A$ hvilket er en modstrid eftersom $MinA-2<MinA$. Dermed kan MinA ikke eksistere. Dermed er $\mathbb{Z}$ ikke velordnet.

■

Med konceptet en divisor, kan der nu præciseres hvad der menes med et primtal.

Definition

Et heltal $p>1$ kaldes et primtal hvis der for alle $q \in \mathbb{N}$, $q|p \Rightarrow q=1$ eller $q=p$. Et heltal $p>1$ som ikke er et primtal kaldes et sammensat tal.

Der fortsættes med et lemma som viser at ethvert positivt heltal større end 1 kan udtrykkes som produktet af primtal.

Lemma

Lad $n>1$. Så er n et sammensat tal hvis og kun hvis der eksisterer et $m, k \in \mathbb{N}$ sådan at $1<m<n$, $1<k<n$ og $n=mk$.

Bevis

Antag at n er et sammensat tal. Så eksisterer et $m \in \mathbb{N}$ sådan at $m|n$ hvor $m \neq 1$ og $m \neq n$. Så kan n skrives som $n=mk$ for nogle $k \in \mathbb{Z}$. Eftersom $m, n > 0$, haves det at $k>0$.
Hvis $k=1 \Rightarrow n=m$ og hvis $k=n \Rightarrow m=1$, begge udfald er modsigende i forhold til definitionen af m. Eftersom $m, k>1$, haves det at $m, k<n$. Dermed eksisterer et m, $k \in \mathbb{N}$ sådan at $1<m<n$, $1<k<n$ og $n=mk$.
Modsat, hvis sådanne m, k eksisterer, haves det at, $m \in \mathbb{N}$ og $m|n$ samt $m \neq 1$ og $m \neq n$. Dermed er n et sammensat tal.

■

Sætning: Primtalsfaktorisering.

Alle heltal $n>1$ kan udtrykkes som et produkt af primtal.

Bevis

Lad $P=\{n \in \mathbb{N} | n \text{ er et produkt af primtal eller } n=1\}$. Fra definitionen, haves det at $1 \in P$. Antag at $\{k \in \mathbb{N} | k \leq n\} \subseteq P$. Hvis $n+1$ er et primtal, så er $n+1 \in P$. Ellers eksisterer der et $p, q \in \mathbb{N}$ sådan at $n+1=pq$ og $1<p<n+1$, $1<q<n+1$. Dermed haves det at p, $q \in P$ som følge af induktion, da $n+1$ er produkt af p og q er $n+1$ også er produkt af primtal, og dermed er $n+1 \in P$. Dermed følger det at alle heltal $n>1$ kan udtrykkes som et produkt af primtal.

■

Definition

Lad $m, n \in \mathbb{Z}$. Et heltal $d \in \mathbb{Z}$ kaldes fælles divisor af n og m hvis $d|n$ og $d|m$. Her defineres den største fælles divisor af n og m ved g.c.d$(m, n) = \text{Sup}D_{m,n}$, hvor $D_{m,n}=\{k \in \mathbb{N} | k \text{ er fælles divisor af } n \text{ og } m\}$

Definition

Lad $n, m \in \mathbb{Z}$. Man kalder n og m for relative primtal hvis g.c.d$(n,m)=1$

Sætning: Aritmetikkens fundamentalsætning

Lad n>1 være et heltal. Så kan n blive udtrykt som et produkt af primtal, og denne primtalsfaktorisering er unik på nær for en mulig ændring i rækkefølgen af faktorer.

Bevis

Det er allerede vist at ethvert heltal n>1 kan blive udtrykt som er produkt af primtal.
Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|\text{primtalsfaktoriseringen for n er unik}\}$. Det ses at, $2\in P$ eftersom der åbenlyst kun er en primtalsfaktorisering nemlig 2=2. Antag at $\{n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}|n\leq k\}\subseteq P$. Hvis k+1 er et primtal, så er $k+1\in P$. Ellers, lades L_{k+1} og R_{k+1} være to primtalsfaktoriseringer for k+1. Tag ethvert primtal p som optræder i L_{k+1}. Så vil $p|R_{k+1}$ og så må p være divisor for et primtal q som optræder i R_{k+1}. Eftersom q er et primtal og p>1, følger det at p=q. Nu fjernes p fra L_{k+1} og danner L_{k+1}', samt q fjernes fra R_{k+1} og danner R_{k+1}'. Så er L_{k+1}' og R_{k+1}' begge primtalsfaktoriseringer for et heltal $1<m<k+1$. Dermed er $m\leq k$ og så er $m\in P$. Dermed er L_{k+1} og R_{k+1} altså den samme primtalsfaktorisering for k+1.
Dermed er $k+1\in P$ når $\{n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}|n\leq k\}\subseteq P$. Ved at benytte induktion er det bevist at $P=\mathbb{N}\backslash\{1\}$ og dermed er sætningen sand.

■

ℤ's utilstrækkelighed

Ligesom der blev i kapitlet for det naturlige talsystem, vil der også i dette kapitel blive motiveret for at det er nødvendigt at gå videre med konstruktionen af talsystemer, grundet mangler ved heltals systemet. Det er ikke svært at motivere for at heltals systemet ikke kan alt det man ønsker at en system, da man ikke kan dividere i ℤ, ligesom man ikke kunne bruge subtraktion i ℕ. Intuitivt er subtaktion blot den modsatte proces at addition, når man vil vide hvad 5 minus 3 er, spørger man efter det tal man skal have, for at når man lægger 3 til giver 5. Tilsvarende kan man forstå division som den modsatte proces af multiplikation, men her observeres det at ℤ ikke har elementer nok, da ikke alle elementer kan divideres så man opnår et element som fortsat er i ℤ. I det næste kapitel vil der laves et nyt system, med udgangspunkt i heltals systemet, som også kan håndtere division.

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette kapitel [Rana, 1998] og [Bartle, 2011]

Kapitel 3 - Det rationelle talsystem

I dette kapitel vil heltals systemet blive udviklet til også at indeholde brøker, som dannes ved division af heltal, på denne måde kan systemet også håndtere de heltals divisioner hvor der forekommer en rest. Det beskrevne system viser sig at være det rationelle talsystem.
Det vises at systemet kan håndtere de binære operatorer addition, og dermed også subtraktion, samt multiplikation, og dermed også division, hvor der multipliceres med en brøk.
Det bliver vist at med en ordning er systemet et ordnet legeme, samt at systemet er unik, men ikke velordnet som det naturlige talsystem.
Sidst i kapitlet vil det blive vist at systemet ikke opfylder de ønskede egenskaber, da det indeholder huller, i form af de irrationelle tal, samt at det ikke opfylder hverken at være fuldstændigt ordnet, eller fuldstændigt Cauchy.

Brøk systemet

Som det blev gjort med i forrige kapitel, for netto difference systemet, startes der med at genintroducere ækvivalensklasser, de skal bruges til at inddele par af ordnet heltal, hvor det første heltal bliver delt af det sidstnævnte. For det sidstnævnte heltal i parret, forbydes heltallet 0.

Definition

To elementer (m,n) og $(p,q)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ kaldes relateret og noteres $(m,n)\sim(p,q)$ hvis $mq=np$.

Sætning

Relationen $\sim$ er en ækvivalensrelation på $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

Bevis

Eftersom $mn=nm\ \forall\ n, m\in\mathbb{Z}$, så er $\sim$ refleksiv.
Lad $(m,n)\sim(p,q)$. Så er

$$mq=np \Rightarrow pn=qm \Rightarrow (p,q)\sim(m,n)$$

Dermed er $\sim$ symmetrisk.
Lad $(m,n)\sim(p,q)$ og $(p,q)\sim(k,l)$. Så er $mq=np$ og $pl=qk$. Det haves så at $mql=npl$ og $pln=qkn$ sådan at $mql=qkn$. Dermed er $ml=nk$ eftersom $q\neq0$ og så er $(m,n)\sim(k,l)$.
Dermed haves det at $\sim$ er transitiv.
Dermed er $\sim$ en ækvivalensrelation på $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.

■

Mængden $(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))/\sim$ kaldes for brøk systemet og noteres med $\mathbb{Q}$. Et element $[(n,m)]$ i $\mathbb{Q}$ vil blive noteret som $[n,m]$. For at kunne anvende systemet, konstrueres binære operatorer samt en ordning for systemet. Først vil der dog komme nogle grundlæggende egenskaber for $\mathbb{Q}$.

Sætning - Grundlæggende egenskabet for $\mathbb{Q}$

For $[n,m], [p,q]\in\mathbb{Q}$, gælder følgende:
(i) $[p,q]=[kp,kq]\ \forall\ k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$.
Eftersom $k\neq 0$ og $q\neq 0$, er $kq\neq 0$ og så er $[kp,kq]\in\mathbb{Q}$. Det ses at, $p(kq)=q(kp)$ og dermed er $[p,q]=[kp,kq]$.
(ii) Hvis $[n,m]=[p,q]$ og n og m er relative primtal, så er $p=nk$ og $q=mk$ for nogle $k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$.
Det haves at $nq=mp$. Hvis $n=0$, så er $0=nq=mp$. Eftersom $m\neq 0$, så er $p=0$. Tilsvarende vil $p=0 \Rightarrow n=0$. Dermed er $n=0\Leftrightarrow p=0$.
Betragt at $m|nq$. Eftersom m, n er relative primtal, følger det at $m|q$, så er $q=mk$ for nogle $k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$. Betragt nu de to udfald.
(1) $p=0, n=0$
Så er $0=p=nk$ og $q=mk$
(2) $p\neq 0, n\neq 0$.
Så er $nmk=mp$. Det betyder at $nk=p$ eftersom $n, m, k, p \neq 0$.
(iii) $[n,m]=[0,1]$ hvis og kun hvis $n=0$.
$[n,m]=[0,1]\Leftrightarrow n1=m0\Leftrightarrow n=0$.
(iv) $[n,m]=[1,1]$ hvis og kun hvis $n=m$
$[n,m]=[1,1] \Leftrightarrow n1=m1 \Leftrightarrow n=m$.

■

Binære operatorer på $\mathbb{Q}$

I dette afsnit vil addition og multiplikation blive defineret på mængden $\mathbb{Q}$.

Sætning - Addition på $\mathbb{Q}$

Der eksisterer en veldefineret binær operator $\oplus$ på $\mathbb{Q}$ givet ved $[n,m]\oplus[p,q]=[nq+mp,mq]\ \forall\ n, m, p, q\in\mathbb{Z}, m, q\neq 0$.

Bevis

Lad $[n_1,m_1]=[n_2,m_2]$ og $[p_1,q_1]=[p_2,q_2]$ hvor $m_1, m_2, q_1, q_2 \neq 0$. Så er $n_1m_2=m_1n_2$ og $p_1q_2=p_2q_1$. Dermed haves at

$$
\begin{aligned}
& [n_1,m_1]\oplus[p_1,q_1]=[n_2,m_2]\oplus[p_2,q_2] \\
\Leftrightarrow\quad & [n_1q_1+m_1p_1,m_1q_1]=[n_2q_2+m_2p_2,m_2q_2] \\
\Leftrightarrow\quad & (n_1q_1+m_1p_1)m_2q_2=m_1q_1(n_2q_2+m_2p_2) \\
\Leftrightarrow\quad & n_1q_1m_2q_2+m_1p_1m_2q_2=m_1q_1n_2q_2+m_1q_1m_2p_2 \\
\Leftrightarrow\quad & m_1n_2q_1q_2+p_2q_1m_1m_2=m_1n_2q_1q_2+p_2q_1m_1m_2
\end{aligned}
$$

(eftersom $n_1m_2=m_1n_2$, $p_1q_2=p_2q_1$)

Dermed er $\oplus$ veldefineret.

■

Sætning - Egenskaber for addition på $\mathbb{Q}$

For alle [n,m], [p,q], [k,l] $\in\mathbb{Q}$, haves det at:

$A_\mathbb{Q}$(i): $[n,m]\oplus[p,q]=[p,q]\oplus[n,m]$

$$\begin{aligned}[n,m]\oplus[p,q] &=[nq+mp,mq]\\ &=[pm+qn,qm]\\ &=[p,q]\oplus[n,m]\end{aligned}$$

$A_\mathbb{Q}$(ii): $([n,m]\oplus[p,q])\oplus[k,l]=[n,m]\oplus([p,q]\oplus[k,l])$

$$\begin{aligned}([n,m]\oplus[p,q])\oplus[k,l] &=[nq+mp,mq]\oplus[k,l]\\ &=[(nq+mp)l+(mq)k,(mq)l]\\ &=[nql+mpl+mqk,mql]\\ &=[n(ql)+m(pl+qk),m(ql)]\\ &=[n,m]\oplus([p,q]\oplus[k,l])\end{aligned}$$

$A_\mathbb{Q}$(iii): Identitetselementet eksisterer og er givet ved [0,1]

$$\begin{aligned}[m,n]\oplus[0,1] &=[m1+n0,n1]\\ &=[m,n]\\ &=[0,1]\oplus[m,n] && \text{(fra } A_\mathbb{Q}\text{(i))}\end{aligned}$$

$A_\mathbb{Q}$(iv): For ethvert [n,m], eksisterer den $\oplus$-inverse og er givet ved [-n,m]

$$\begin{aligned}[n,m]\oplus[-n,m] &=[nm+m(-n),mm]\\ &=[nm-nm,mm]\\ &=[0,mm]\\ &=[0,1]\\ &=[-n,m]\oplus[n,m] && \text{(fra } A_\mathbb{Q}\text{(i))}\end{aligned}$$

■

Dermed er $(\mathbb{Q},\oplus)$ en kommutativ gruppe.

Sætning . Multiplikation på $\mathbb{Q}$

Der eksisterer en veldefineret binær operator, $\odot$, på $\mathbb{Q}$ givet ved $[n,m]\odot[p,q]=[np,mq]$.

Bevis

Lad $[n_1,m_1]=[n_2,m_2]$ og $[p_1,q_1]=[p_2,q_2]$ hvor m_1, m_2, q_1, $q_2\neq0$. Så er $n_1m_2=m_1n_2$ og $p_1q_2=p_2q_1$. Dermed haves at

$$\begin{aligned}&[n_1,m_1]\odot[p_1,q_1]=[n_2,m_2]\odot[p_2,q_2]\\ \Leftrightarrow\quad &[n_1p_1,m_1q_1]=[n_2p_2,m_2q_2]\\ \Leftrightarrow\quad &(n_1p_1)(m_2q_2)=(m_1q_1)(n_2p_2)\\ \Leftrightarrow\quad &(n_1m_2)(p_1q_2)=(m_1n_2)(p_2q_1)\\ \Leftrightarrow\quad &(n_1m_2)(p_1q_2)=(n_1m_2)(p_1q_2)\end{aligned}$$

(Eftersom $n_1m_2=m_1n_2$ og $p_1p_2=p_2q_1$)

Dermed er $\odot$ veldefineret

■

Sætning - Egenskaber for multiplikation på $\mathbb{Q}$

For alle $[n,m], [p,q], [k,l] \in \mathbb{Q}$, haves det at

M$\mathbb{Q}$(i): $[n,m]\odot[p,q]=[p,q]\odot[n,m]$

$$\begin{aligned}[n,m]\odot[p,q] &=[np,mq]\\ &=[pn,qm]\\ &=[p,q]\odot[n,m]\end{aligned}$$

M$\mathbb{Q}$(ii): $([n,m]\odot[p,q])\odot[k,l]=[n,m]\odot([p,q]\odot[k,l])$

$$\begin{aligned}([n,m]\odot[p,q])\odot[k,l] &=[np,mq]\odot[k,l]\\ &=[(np)k,(mq)l]\\ &=[n(pk),m(ql)]\\ &=[n,m]\odot([p,q]\odot[k,l])\end{aligned}$$

M$\mathbb{Q}$(iii): Identitetselementet eksisterer og er givet ved $[1,1]$.

$$\begin{aligned}[n,m]\odot[1,1] &=[n1,m1]\\ &=[n,m]\\ &=[1,1]\odot[n,m] && \text{(Fra M}\mathbb{Q}\text{(i))}\end{aligned}$$

M$\mathbb{Q}$(iv): For ethvert element $[n,m]$, hvor $[n,m]\neq[0,1]$, eksisterer dets $\odot$-invers-element og er givet ved $[m, n]$.

$$\begin{aligned}[n,m]\odot[m,n] &=[nm,mn]\\ &=[nm(1),nm(1)]\\ &=[1,1] && \text{(}nm\neq0 \text{ da } n, m \neq0\text{)}\\ &=[m,n]\odot[n,m] && \text{(fra M}\mathbb{Q}\text{(i))}\end{aligned}$$

M$\mathbb{Q}$(v): $[n,m]\odot([p,q]\oplus[k,l])=([n,m]\odot[p,q])\oplus([n,m]\odot[k,l])$

$$\begin{aligned}[n,m]\odot([p,q]\oplus[k,l]) &=[n,m]\odot[pl+qk,ql]\\ &=[n(pl+qk),m(ql)]\\ &=[npl+nqk,mql]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([n,m]\odot[p,q])\oplus([n,m]\odot[k,l]) &=[np,mq]\oplus[nk,ml]\\ &=[npml+mqnk,mqml]\\ &=[m(npl+nqk),mmql]\\ &=[npl+nqk,mql] && \text{(da } m\neq0\text{)}\\ &=[n,m]\odot([p,q]\oplus[k,l])\end{aligned}$$

■

Dermed er det også bevist at $(\mathbb{Q}/[0,1],\odot)$ er en kommutativ gruppe. Da den distributive lov fortsat gælder, bemærkes det at $(\mathbb{Q},\oplus,\odot)$ er et legeme.

Orden på $\mathbb{Q}$

I det kommende afsnit vil der blive defineret en orden på $\mathbb{Q}$, for at vise at $\mathbb{Q}$ er et ordnet legeme.

Sætning

Delmængden $P_{\mathbb{Q}}$ af $\mathbb{Q}$, som defineres ved $P_{\mathbb{Q}}=\{[m,n]\in\mathbb{Q} \mid m, n>0$ eller $m, n<0\}$, er en veldefineret mængde.

Bevis

For at vise at $P_{\mathbb{Q}}$ er veldefineret, vises det at $[m,n]$ ikke både kan være i mængden og udenfor mængden. Dermed, lades $[m_1,n_1]=[m_2,n_2]$ og antag at $[m_1,n_1]\in P_{\mathbb{Q}}$. Så er $m_1n_2=m_2n_1$. Enten haves
(a) $m_1,n_1>0$
(i) $n_2>0$
Så er $m_2n_1=m_1n_2>0$. Eftersom $n_1>0$, haves det at $m_2>0$, dermed er også $[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$.
(ii) $n_2<0$
Så er $m_2n_1=m_1n_2<0$. Eftersom $n_1>0$, haves det at $m_2<0$, dermed er også $[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$.
(b) $m_1,n_1<0$
(i) $n_2>0$
Så er $m_2n_1=m_1n_2<0$. Eftersom $n_1<0$, haves det at $m_2>0$, dermed er også $[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$.
(ii) $n_2<0$
Så er $m_2n_1=m_1n_2>0$. Eftersom $n_1<0$, haves det at $m_2<0$, dermed er også $[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$.
Dermed er $P_{\mathbb{Q}}$ en veldefineret delmængde af $\mathbb{Q}$.

■

Sætning

Mængden $P_{\mathbb{Q}}$ er lukket under $\oplus$ og $\odot$ og for ethvert $[m, n]\in\mathbb{Q}$, er en og kun en af følgende sande: $[m,n]=[0,1]$, $[m,n]\in P\mathbb{Q}$, $[-m,n]\in P\mathbb{Q}$.

Bevis

Tag $[m_1,n_1]$, $[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$. Der undersøges nu 4 udfald:
(i) m_1, $n_1>0$, m_2, $n_2>0$
Så er m_1m_2, m_1n_2, n_1m_2, $n_1n_2>0$. Det betyder at $m_1n_2+n_1m_2$, $n_1n_2>0$ så er $[m_1,n_1]\oplus[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$. Samt, m_1m_2, $n_1n_2>0$ så er $[m_1,n_1]\odot[m_2,n_2]\in P\mathbb{Q}$.
(ii) m_1, $n_1>0$, m_2, $n_2<0$
Så er m_1m_2, n_1n_2, m_1n_2, $n_1m_2<0$. Det betyder at $m_1n_2+n_1m_2$, $n_1n_2<0$ så er $[m_1,n_1]\oplus[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$. Samt, m_1m_2, $n_1n_2<0$ så er $[m_1, n_1]\odot[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$.
(iii) $m_1,n_1<0$, $m_2,n_2>0$
Dette udfald er sandt som følge af symmetrien fra udfald (ii).
(iv) $m_1,n_1<0$, $m_2,n_2<0$
Så er m_1m_2, m_1n_2, n_1m_2, $n_1n_2>0$. Det betyder at $m_1n_2+n_1m_2$, $n_1n_2>0$ så er $[m_1,n_1]\oplus[m_2,n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$. Samt, m_1m_2, $n_1n_2>0$ så er $[m_1,n_1]\odot[m_2, n_2]\in P_{\mathbb{Q}}$.

Dermed er, $P_{\mathbb{Q}}$ lukket under $\oplus$ og $\odot$.
Tag et tilfældigt $[m,n]\in\mathbb{Q}$.
(i) m=0
Så er [m,n]=[0,1]
(ii) m>0
Hvis n>0 $[m,n]\in P\mathbb{Q}$, og hvis n<0 er $[-m,n]\in P\mathbb{Q}$.
(iii) m<0
Hvis n>0 er $[-m,n]\in P\mathbb{Q}$ og hvis n<0 er $[m,n]\in P\mathbb{Q}$.
Dermed er kun en af de tre tilfælde sande.

■

Definition

For ethvert x, $y\in\mathbb{Q}$, kaldes x for større end y, og noteres $x\succ y$ hvis $x\oplus(-y)\in P_{\mathbb{Q}}$.
Det noteres $x\succcurlyeq y$ hvis $x\succ y$ eller x=y
Dermed er $(\mathbb{Q},\oplus,\odot,\succ)$ et ordnet legeme.

Det rationelle talsystem

I dette afsnit vil det bevises at det konstruerede brøksystem faktisk er et rationelt talsystem, samt at de rationelle talsystemer er isomorfier til hinanden, og derfor kan der tales om entydighed at det rationelle talsystem. Derfor startes der med en definition af have et rationelt talsystem er.

Definition

Et ordnet legeme $(F,\oplus, \odot,\succ)$ kaldes for et rationelt talsystem hvis der eksistere et ordnet dellegeme $(F_{\mathbb{Z}},\oplus,\odot,\succ)$ sådan at
(i) $(F_{\mathbb{Z}},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Z}, +,\cdot,>)$
(ii) For ethvert $x\in F$, eksisterer der et y, $z\in F_{\mathbb{Z}}$ sådan at $x=y^{-1}\odot z$
Det vil nu vises at Brøk systemet er et rationelt talsystem, dette gøres ved at at vise at hvert to rationelle talsystemer er isomorfe, og dermed er der i virkeligheden kun et rationelt talsystem.

Sætning

Det rationelle talsystem eksisterer og er unikt.

Bevis

Det postuleres at$(\mathbb{Q},\oplus,\odot,\succ)$ er et rationelt talsystem. Betragt delmængden $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}=\{[n,1]\in\mathbb{Q}|n\in\mathbb{Z}\}$. Tag ethvert [n,1], $[m,1]\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned}[n,1]\oplus(-[m,1]) &=[n,1]\oplus[-m, 1]\\ &=[n(1)+(1)(-m),(1)(1)]\\ &=[n-m,1] \qquad (\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}})\end{aligned}$$

$[n,1]\odot[m,1] =[nm,(1)(1)]$

$=[nm,1]$ $(\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}})$

Det bemærkes at $\odot$-identitetselementet [1,1] er i $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. Dermed er $(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}},\oplus,\odot,\succ)$ et ordnet deldomæne.

(i) Betragt funktionen $\varphi:\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Z}$ givet ved

$\varphi([n,1])=n\ \forall\ [n,1]\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$.

Antag at [n,1]=[m,1]. Så er n(1)=(1)m, dermed have det at $\varphi([n,1])=\varphi([m,1])$, og dermed er φ en veldefineret funktion.

Da $\varphi([n,1])=\varphi([m,1]) \Rightarrow n=m \Rightarrow [n,1]=[m,1]$. Dermed er φ injektiv.

Ligeledes, for ethvert $n\in\mathbb{Z}$, tages $[n,1]\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ så det haves at $\varphi([n,1])=n$. Dermed er φ surjektiv. Altså er φ en bijektiv funktion.

Tag ethvert [n,1], $[m,1]\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, så haves det at

$$
\begin{aligned}
\varphi([n,1]\oplus[m,1]) &= \varphi([n+m,1]) \\
&= n+m \\
&= \varphi([n,1])+\varphi([m,1]) \\
\varphi([n,1]\odot[m,1]) &= \varphi([nm,1]) \\
&= nm \\
&= \varphi([n,1])\varphi([m,1]) \\
[n,1]\succ[m,1] &\Rightarrow [n,1]\oplus[-m,1]\in P_{\mathbb{Q}} \\
&\Rightarrow [n-m,1]\in P_{\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

Dermed medfører n>m, at $\varphi([n,1])>\varphi([m,1])$.

Dermed er φ en isomorfi fra $(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}},\oplus,\odot,\succ)$ til $(\mathbb{Z},+,\cdot,>)$.

(ii) For ethvert $[n,m]\in\mathbb{Q}$, betragt elementerne [m,1], $[n,1]\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$.

$$
\begin{aligned}
([m,1])^{-1}\odot[n,1] &= [1,m]\odot[n,1] \\
&= [1n,m1] \\
&= [n,m]
\end{aligned}
$$

Dermed, givet et $x\in\mathbb{Q}$, eksisterer der et y, $z\in\mathbb{Q}\mathbb{Z}$ sådan at $x=y^{-1}\odot z$.

Dermed er $(\mathbb{Q},\oplus,\odot,\succ)$ et rationelt talsystem, dermed er eksistensen af det rationelle talsystem bevist.

Lad nu $(\mathbb{Q}',\oplus'\ \odot',\succ')$ være endnu et rationelt talsystem. Eftersom $(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Z},+,\cdot,>)\simeq(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}',\oplus',\odot',\succ')$, eksisterer der en isomorfi $\varphi:\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}'$. Her defineres funktionen $\psi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}'$ ved

$\psi(a)=(\varphi(b))\text{-}1\odot'\varphi(c)\ \forall\ a\in\mathbb{Q}$, hvor $a=b^{-1}\odot c$ for nogle b, $c\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$.

Lad $a_1=b_1^{-1}\odot c_1=b_2^{-1}\odot c_2=a_2$ hvor b_1, b_2, c_1, $c_2\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. Så er

$$
\begin{aligned}
& a_1=a_2 \\
\Leftrightarrow\quad & b_1^{-1}\odot c_1=b_2^{-1}\odot c_2 \\
\Leftrightarrow\quad & b_2\odot c_1=b_1\odot c_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(b_2\odot c_1)=\varphi(b_1\odot c_2) \\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(b_2)\odot'\varphi(c_1)=\varphi(b_1)\odot'\varphi(c_2) \\
\Leftrightarrow\quad & (\varphi(b_1))^{-1}\odot'\varphi(c_1)=(\varphi(b_2))^{-1}\odot'\varphi(c_2) \\
\Leftrightarrow\quad & \psi(a_1)=\psi(a_2)
\end{aligned}
$$

Dermed er ψ en veldefineret og injektiv funktion.

Tag ethvert $a'\in\mathbb{Q}'$. Så eksisterer der et b', $c'\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}'$ sådan at $a'=b'^{-1}\odot' c'$. Eftersom φ er surjektiv, eksisterer der et $b, c\in\mathbb{Q}\mathbb{Z}$ sådan at $\varphi(b)=b'$, $\varphi(c)=c'$. Tag elementet $a=b^{-1}\odot c$ i $\mathbb{Q}$. Så er $\psi(a)=(\varphi(b))^{-1}\odot'\varphi(c)=b'^{-1}\odot' c'=a'$ og dermed er ψ surjektiv på $\mathbb{Q}'$. Altså er ψ en bijektiv funktion.

Tag ethvert $a_1,a_2\in\mathbb{Q}$ hvor $a_1=b_1^{-1}\odot c_1$, $a_2=b_2^{-1}\odot c_2$ for nogle b_1, b_2, c_1, $c_2\in\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned}
\psi(a_1\odot a_2) &= \psi((b_1^{-1}\odot c_1)\odot(b_2^{-1}\odot c_2))\\
&= \psi((b_2^{-1}\odot b_1^{-1})\odot(c_1\odot c_2))\\
&= \psi((b_1\odot b_2)^{-1}\odot(c_1\odot c_2))\\
&= (\varphi(b_1\odot b_2))^{-1}\odot'\varphi(c_1\odot c_2)\\
&= (\varphi(b_1)\odot'\varphi(b_2))^{-1}\odot'(\varphi(c_1)\odot'\varphi(c_2))\\
&= ((\varphi(b_2))^{-1}\odot'(\varphi(b_1))^{-1})\odot'(\varphi(c_1)\odot'\varphi(c_2))\\
&= ((\varphi(b_1))^{-1}\odot'\varphi(c_1))\odot'((\varphi(b_2))^{-1}\odot'\varphi(c_2))\\
&= \psi(a_1)\odot'\psi(a_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(a_1\oplus a_2) &= \psi((b_1^{-1}\odot c_1)\oplus(b_2^{-1}\odot c_2))\\
&= \psi((b_1^{-1}\odot b_2^{-1})\odot((b_2\odot c_1)\oplus(b_1\odot c_2)))\\
&= \psi((b_2\odot b_1)^{-1}\odot((b_2\odot c_1)\oplus(b_1\odot c_2)))\\
&= (\varphi(b_2\odot b_1))^{-1}\odot'\varphi((b_2\odot c_1)\oplus(b_1\odot c_2))\\
&= (\varphi(b_2)\odot'\varphi(b_1))^{-1}\odot'(\varphi(b_2\odot c_1)\oplus'\varphi(b_1\odot c_2))\\
&= ((\varphi(b_1))^{-1}\odot'(\varphi(b_2))^{-1})\odot'((\varphi(b_2)\odot'\varphi(c_1))\oplus'(\varphi(b_1)\odot'\varphi(c_2)))\\
&= (((\varphi(b_1))^{-1}\odot'(\varphi(b_2))^{-1})\odot'(\varphi(b_2)\odot'\varphi(c_1)))\oplus'\\
&\quad ((\varphi(b_1))^{-1}\odot'(\varphi(b_2))^{-1})\odot'(\varphi(b_1)\odot'\varphi(c_2)))\\
&= ((\varphi(b_1))^{-1}\odot'\varphi(c_1))\oplus'((\varphi(b_2))^{-1}\odot'\varphi(c_2))\\
&= \psi(a_1)\oplus'\psi(a_2)
\end{aligned}$$

$a_1\succ a_2 \Rightarrow b_1^{-1}\odot c_1\succ b_2^{-1}\odot c_2$.

Nu betragtes to udfald:

a) $b_1,b_2\succ 0$ eller $b_1,b_2\prec 0$, dermed er $b_1\odot b_2\succ 0$

Dette betyder at $\varphi(b_1),\varphi(b_2)\succ' 0'$ eller $\varphi(b_1),\varphi(b_2)\prec' 0'$, videre betyder dette at $(\varphi(b_1))^{-1}\odot'(\varphi(b_2))^{-1}\succ' 0'$. Så haves det at

$$\begin{aligned}
& b_1^{-1}\odot c_1\succ b_2^{-1}\odot c_2\\
\Rightarrow\quad & b_2\odot c_1\succ b_1\odot c_2\\
\Rightarrow\quad & \varphi(b_2\odot c_1)\succ'\varphi(b_1\odot c_2)\\
\Rightarrow\quad & \varphi(b_2)\odot'\varphi(c_1)\succ'\varphi(b_1)\odot'\varphi(c_2)\\
\Rightarrow\quad & (\varphi(b_1))^{-1}\odot'\varphi(c_1)\succ'(\varphi(b_2))^{-1}\odot'\varphi(c_2)\\
\Rightarrow\quad & \psi(a_1)\succ'\psi(a_2)
\end{aligned}$$

b) $(b_1\succ 0,\ b_2\prec 0)$ eller $(b_2\succ 0,\ b_1\prec 0)$, dermed er $b_1\odot b_2\prec 0$

Dette betyder at $(\varphi(b_1)\succ' 0',\ \varphi(b_2)\prec' 0')$ eller $(\varphi(b_2)\succ' 0',\ \varphi(b_1)\prec' 0')$ videre betyder dette at $(\varphi(b_1))^{-1}\odot'(\varphi(b_2))^{-1}\prec' 0'$. Så haves det at

$$\begin{aligned}
& b_1^{-1}\odot c_1\succ b_2^{-1}\odot c_2\\
\Rightarrow\quad & b_2\odot c_1\prec b_1\odot c_2\\
\Rightarrow\quad & \varphi(b_2\odot c_1)\prec'\varphi(b_1\odot c_2)\\
\Rightarrow\quad & \varphi(b_2)\odot'\varphi(c_1)\prec'\varphi(b_1)\odot'\varphi(c_2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (\varphi(b_1))^{-1}\odot'\varphi(c_1)\succ'(\varphi(b_2))^{-1}\odot'\varphi(c_2)$

$\Rightarrow \quad \psi(a_1)\succ'\psi(a_2)$

Dermed haves det at $a_1\succ a_2 \Rightarrow \psi(a_1)\succ'\psi(a_2)$. Dermed er ψ en isomorfi fra $(\mathbb{Q},\oplus,\odot,\succ)$ til $(\mathbb{Q}',\oplus',\odot',\succ')$ altså er $(\mathbb{Q},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Q}',\oplus',\odot',\succ')$

Dermed eksisterer det rationelle talsystem og det er unikt.

■

Som det blev gjort i kapitlet omkring heltalssystemet, vil brøksystemet blive omtalt som det rationelle talsystem, og notationen for den vil være $(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$. Det rationelle talsystem indeholder både det naturlige talsystem og heltalsystemet.

Specielle egenskaber ved $\mathbb{Q}$

I dette afsnit vil en række egenskaber for $\mathbb{Q}$ blive bevist. Egenskaberne er unikke for det rationelle talsystem, og netop derfor vil ofte være egenskaben (ii) for definitionen som blive afgørende for at bevise sætningerne. Den første sætning som vil blive bevist er dog en som går igen fra de tidligere kapitler, Arkimedes aksiom for rationelle tal.

Sætning - Arkimedes aksiom for $\mathbb{Q}$

For ethvert x, y∈$\mathbb{Q}$, x>0, eksisterer der et z∈$\mathbb{N}$ sådan at zx>y.

Bevis

Det antages at y>0, da man ellers kan vise sætningen med z=1∈$\mathbb{N}$. Eftersom x, y>0, kan man vælge m,n,p,q∈$\mathbb{N}$ sådan at x=m/n og y=p/q. Så er mq, np∈$\mathbb{N}$ og fra sætningen Arkimedes aksiom for $\mathbb{N}$, haves det at der eksisterer et z∈$\mathbb{N}$ sådan at zmq>np ⇒ z(m/n)>p/q.

Dermed gælder Arkimedes aksiom for $\mathbb{Q}$.

■

Sætning

For ethvert rationelt tal r, eksisterer der et unikt heltal n sådan at n≤r<n+1

Bevis

Lad A={n∈$\mathbb{Z}$ | n≤r}.Hvis r≥0, så ses det at 0∈A. Hvis r<0, så er –r>0. Fra Arkimedes aksiom for $\mathbb{Q}$,haves det at der eksisterer et $n_0\in\mathbb{N}$ og dermed også i $\mathbb{Z}$ sådan at $n_0>-r$, eller $r>-n_0$ og så er $-n_0\in A$. Dermed er A en ikke-tom delmængde af $\mathbb{Z}$ og eftersom den er begrænset opad af et element fra $\mathbb{Z}$, eksisterer n=MaxA. Dermed er, n≤ r< n+1. Fra tidligere beviser vides det at der ikke kan eksisterer et andet heltal, som også opfylder sætningen. Dermed er heltallet unikt.

■

Sætning - Tæthedssætning for $\mathbb{Q}$

For ethvert x, y∈$\mathbb{Q}$ hvor x<y, eksisterer der et z∈$\mathbb{Q}$ sådan at x<z<y

Bevis

Sæt $z=(1/2)(x+y) \in \mathbb{Q}$. Så haves det at

$$\begin{aligned} x<y \quad & \Rightarrow x+x<x+y,\ x+y<y+y \\ & \Rightarrow 2x<x+y,\ x+y<2y \\ & \Rightarrow x<(1/2)(x+y),\ (1/2)(x+y)<y, \end{aligned}$$

Altså eksisterer $x<z<y$

■

Ved at anvende Tæthedssætningen for $\mathbb{Q}$ igen på x og z, kan man finde et z' som ligger mellem x og z. Dermed kan man altid finde et ønsket antal rationelle tal mellem to forskellige rationelle. Den næste sætning giver at $\mathbb{Q}$ ikke er velordnet.

Sætning

$\mathbb{Q}$ er ikke velordnet

Bevis

Hvis $\mathbb{Q}$ skulle være velordnet, så skulle alle ikke-tomme delmængder af $\mathbb{Q}$ have et minimum. men da enhver delmængde af $\mathbb{Z}$ også er en delmængde af $\mathbb{Q}$, er det tidligere blevet bevist at $\mathbb{Z}$ ikke var velordnet, dermed kan $\mathbb{Q}$ heller ikke være det.

■

$\mathbb{Q}$'s utilstrækelighed

For de fleste praktiske formål, kan man fint benytte det rationelle talsystem, men i dette afsnit vises hvorfor dette talsystem ikke altid er nok. Hvis det rationelle talsystem, skulle være et ideelt talsystem, bør man være i stand til at dække en hel nummeret linje kun med rationelle tal. Hvis ikke det kan opnås, må der altså være mindst et punkt på linjen, som ikke kan dækkes af et rationelt tal. Først vises det at der eksisterer sådanne punkter.

Sætning

Der eksisterer ikke noget rationelt r sådan at $r^2=2$.

Bevis

Antag at der eksisterer et sådant rationelt tal r. Det vides at r er forskellig fra 0, og betragter $r>0$ eller $-r>0$. Så eksisterer der et $m, n \in \mathbb{Z}$ sådan at $r=m/n$ og g.c.d(m,n)=1. Så er
$(m/n)^2=2$, altså vil $m^2=2n^2$.
Dette betyder at m^2 er et lige tal og dermed er m et lige heltal. Dermed kan m skrives som $m=2k$ for nogle $k \in \mathbb{N}$, så haves det at
$(2k)^2=2n^2$, altså vil $2k^2=n^2$
Dette betyder at n^2 er et lige tal, og dermed også n. Dermed er 2 en fælles divisor for m og n, hvilket er i modstrid med præmissen g.c.d(m,n)=1.

■

Dette resultat kan udvides til, at der ikke findes et rationelt tal $r \in \mathbb{Q}$ sådan at $r^2=p$, hvor p er et primtal. Dette udvides til ligningen $m^2=pn^2$, da det tidligere er vist at ethvert tal kan skabes som en faktorisering af primtal. For at det skal kunne give det samme skal det indeholde lige mange primtal i faktoriseringen. Da m^2 indeholder dobbelt så mange primtal som m, haves det at m^2 vil indeholde et lige antal primtal. Det samme gælder for n^2, som indeholder dobbelt så mange primtal som n og dermed også er et lige antal primtal. Dertil lægges p som blot indeholder et primtal og dermed giver et ulige antal af primtal på højre side af ligheden, og dermed kan det ikke lade sig gøre. Dermed gælder kan sætningen udvides til tal som har en primtalsfaktorisering med et ulige antal primtal for eksempel 8 og 30. Dermed indeholder tallinjen for de rationelle tal altså flere huller, som gerne ses undgået. Dette kunne være motivation nok til at gå videre til at konstruere det reelle talsystem, men inden da vil der blive bevist to sætninger, som giver videre motivation for at skabe det rationelle talsystem.

Sætning

$\mathbb{Q}$ har ikke nogen mindste øvre grænse værdi for enhver begrænset delmængde. Derfor er $\mathbb{Q}$ ikke fuldstændigt ordnet.

Bevis

Betragt mængden $A=\{r \in \mathbb{Q} \mid r>0 \text{ og } r^2<2\}$. Da $4/3 \in A$ er A en ikke-tom mængde. A har en begrænset opad af 2, eftersom $r>2 \Rightarrow r^2>4\geq 2$, derfor haves det at $r \in A \Rightarrow r\leq 2$. Antag at $u=\text{Sup}A$ eksisterer. Da $4/3 \in A$, undersøges kun $u \geq 4/3>1$, derfor undersøges tre udfald.

(i) $u^2=2$

Som vist i en tidligere sætning kan dette u ikke eksisterer i $\mathbb{Q}$.

(ii) $u^2<2$ (så er $u \in A$)

For $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+1/n)^2<2 \quad \Leftrightarrow u^2+2(u)(1/n)+(1/n)^2<2$$
$$\Leftrightarrow 2(u)(1/n)+(1/n)^2<2-u^2$$

Eftersom $u\leq 2$, da 2 er en øvre grænse, og $(1/n)^2 \leq 1/n$. Det haves at

$$2(u)(1/n)+(1/n)^2 \leq 2(2)(1/n)+1/n$$
$$= 5/n$$

Eftersom 5 og $2-u^2>0$, haves det at der eksisterer et $n_0 \in \mathbb{N}$ sådan at $n_0(2-u^2)>5$, dermed er $2(u)(1/n_0)+(1/n_0)2\leq 5/n_0<2-u^2$. Med andre ord vil $(u+1/n_0)^2<2$ og $u+1/n_0 \in A$.

Dette er i modstrid med at u skulle være supremum for A. Dermed er u ikke i denne gruppe.

(iii) $u^2>2$

For $n \in \mathbb{N}$ kan $u-1/n$ ikke være en øvre grænse for A, og der eksisterer et $r \in A$ sådan at $r>u-1/n$.

Så er $(u-1/n)^2<r^2<2$ og

$(u-1/n)^2 \quad = u^2-2(u)(1/n)+(1/n)^2$
$\quad\quad\quad\quad > u^2-2(u)(1/n)$

Eftersom 2u og $u^2-2>0$ så eksisterer der et $n_0 \in \mathbb{N}$ sådan at

$n_0(u2-2)>2u \quad \Leftrightarrow u^2-2>2u(1/n_0)$
$\quad\quad\quad\quad \Leftrightarrow u^2-2u(1/n_0)>2$

Men dette betyder at

$2>(u-1/n_0)^2>u^2-2(u)(1/n_0)>2$, hvilket er en modstrid, og dermed er det ikke mulig at et SupA kan eksisterer, og dermed er $\mathbb{Q}$ ikke fuldstændigt ordnet.

■

Det er huller som dette som eksistere over hele den rationelle tallinje som Dedekind anvender definere ved hjælp af Dedekinds skæringer, for at skabe det reelle talsystem. Mere om dette i næste kapitel

Sætning

$\mathbb{Q}$ er ikke fuldstændigt Cauchy

Bevis

Betragt følgen (r_n), som er defineret ved
$r_1=3/2$
$r_{n+1}=r_n/2+1/r_n$
Først laves følgende observationer:
(i) Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|r_n>0\}$. Da $3/2>0$ er $1\in P$. Antag at $n\in P$. Så er $r_n>0$, så er $r_n/2$ og $1/r_n>0$ og ligeledes $r_{n+1}=r_n/2+1/r_n>0$. Dermed er $n+1\in P$ når $n\in P$ og fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$. Dermed er $r_n>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.
(ii) Lad $P=\{n\in\mathbb{N}|\ r_n^2>2\}$. Da $(3/2)^2=9/4>2$ er $1\in P$. Antag at $n\in P$. Så er $r_n^2-2>0$, og $(r_n^2-2)^2>0$. Dermed er

$0 \quad <(r_n^2-2)^2$
$\quad\quad =r_n^4-4r_n^2+4$
$\quad\quad =r_n^2(r_n^2-4+4/r_n^2)$

Dermed må det haves at $r_n^2-4+4/r_n^2>0$. Men så er

$r_{n+1}^2-2 \quad =(r_n/2+1/r_n)^2-2$
$\quad\quad =r_n^2/4+1+1/r_n^2-2$
$\quad\quad =r_n^2/4+1/r_n^2-1$
$\quad\quad =(1/4)(r_n^2+4/r_n^2-4)$
$\quad\quad >0 \quad\quad$ (Eftersom r_n^2+4/r_n^2-4, $1/4>0$)

Altså er $r_{n+1}^2>2$. Dermed er $n+1\in P$ når $n\in P$ og fra N(v) vides det at $P=\mathbb{N}$. Dermed er $r_n^2>2\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.
Samt det haves at,

$r_{n+1}^2-2 \quad =(1/4)(r_n^2+4/r_n^2-4)$
$\quad\quad =(r_n^4+4-4r_n^2)/(4r_n^2)$
$\quad\quad =(r_n^2-2)^2/(4r_n^2)$
$\quad\quad <(1/8)(r_n^2-2)^2$

Ved at gentage ovenstående relation, fås det at

$$\begin{aligned} r_{n+1}^2-2 &< (1/8)(r_n^2-2)^2 \\ &< (1/8)((1/8)(r_{n-1}^2-2)^2)^2 \\ &= (1/8)^3(r_{n-1}^2-2)^4 \\ &< (1/8)^3((1/8)(r_{n-2}^2-2)^2)^4 \\ &= (1/8)^7(r_{n-2}^2-2)^8 \\ &\vdots \\ &< (1/8)^m(r_1^2-2)^{m'} \end{aligned}$$

Hvor $m=\Sigma 2^i$, summationen taget fra $0 \le i \le n-1$ og $m'=2n$.

Bemærk at både m og m' $\in \mathbb{N}$. Samt at $r_1^2-2=9/4-2=1/4<1$. Dette betyder at $0<(r_1^2-2)^{m'}<1$. Dermed haves det at $r_{n+1}^2-2<1/8^m$.

Lad nu $\varepsilon>0$ være givet. Fra Arkimedes aksiom for $\mathbb{Q}$, følger det at der eksisterer et $k' \in \mathbb{N}$ sådan at $1<k'\varepsilon$. Fra Arkimedes aksiom for eksponentialer i $\mathbb{N}$, følger det at der eksisterer et $k \in \mathbb{N}$ sådan at $k'<8^k$, så er $1<\varepsilon 8^k$. Dermed er

$$\begin{aligned} |r_{n+1}^2-2| &= r_{n+1}^2-2 && (\text{da } r_{n+1}^2>2) \\ &< 1/8m \\ &< 1/8\ (n-1) && (\text{da } m \ge n-1) \\ &< \varepsilon && \forall\ n \ge k+1 \end{aligned}$$

Dermed haves det at $(r_{n+1}^2) \to 2$, og $(r_n^2) \to 2$. Dermed må (r_n^2) være en Cauchy følge da den er konvergent.

Eftersom $r_n>0$ og $r_n^2>2$, må det haves at $r_n>1$.

Lad nu $\varepsilon>0$ være givet. Så eksisterer der et $k \in \mathbb{N}$ sådan at $|r_n^2-r_m^2|<\varepsilon\ \forall\ n, m \ge k$, men

$$\begin{aligned} |r_n-r_m| &< |r_n-r_m|(r_n+r_m) && (\text{da rn + rm >1}) \\ &= |r_n-r_m||r_n+r_m| \\ &= |r_n^2-r_m^2| \\ &< \varepsilon && \forall\ n, m \ge k \end{aligned}$$

Dermed er (r_n) også en Cauchy følge. Hvis grænseværdien for (r_n), r eksisterer, så må den være $r \ge 1$, eftersom $r_n>1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dermed er, $(1/r_n)$ også konvergent og det haves at

$$\begin{aligned} r=\lim r_{n+1} &= \lim (r_n/2+1/r_n) \\ &= (1/2)\lim r_n + \lim 1/r_n \\ &= r/2+1/r \end{aligned}$$

Så er $r/2=1/r$ hvilket betyder at $r^2=2$. Men det er bevist at dette r ikke kan optræde i $\mathbb{Q}$ og så kan (r_n) ikke være konvergent. Dermed er $\mathbb{Q}$ ikke fuldstændig Cauchy.

■

Tilsvarende med Dedekind ovenfor, er dette metoden Cantor anvendte for at finde hullerne i den rationelle tidslinje, som defineres for at konstruere det reelle talsystem.

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette kapitel [Rana, 1998] og [Bartle, 2011]

Kapitel 4 - Det reelle talsystem

I dette kapitel gives der en beskrivelse af to metoder at skabe det reelle talsystem. Den første er udtænkt af Richard Dedekind (1821-1916) og benytter sig af Dedekinds skæringer, som der kommer mere om. Dette reelle talsystem er skabt for at skabe et system med ordens fuldstændighed. Det andet reelle talsystem er udtænkt af Georg Cantor (1845-1918), hvor til der benyttes Cauchy følger til at vise at systemet er fuldstændigt Cauchy. Når begge systemer er blevet konstrueret, vil det vises at det er to måder at konstruere det samme system.

Dedekinds reelle talsystem

Dedekinds skæringer

Definition

En delmængde α af $\mathbb{Q}$ kaldes for en skæring, hvis den opfylder følgende egenskaber:
$\mathbb{R}$(i) $\alpha\neq\emptyset$ og $\alpha\neq\mathbb{Q}$.
$\mathbb{R}$(ii) For ethvert $r\in\alpha$ og $s\in\mathbb{Q}\backslash\alpha$, $r < s$
$\mathbb{R}$(iii) Maxα eksisterer ikke.

En skæring er altså en delmængde som er begrænset opad til af et s, som deler de rationelle tal op i flere delmængder. Man betegner mængden af alle skæringer som $\mathbb{R}$.

Sætning

Lad $\alpha\in\mathbb{R}$. Så eksisterer der for ethvert rationelt $\varepsilon>0$, et $r\in\alpha$ og $s\notin\alpha$ sådan at $s-r<\varepsilon$.

Bevis

Lad et rationelt $\varepsilon>0$ være givet. Fra $\mathbb{R}$(i), haves det at der eksistere et $r'\in\alpha$ og et $s'\notin\alpha$. Fra $\mathbb{R}$(ii), haves det at $r' < s'$. Det vides nu fra Arkimedes aksiom for $\mathbb{Q}$, at der eksisterer et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $(s'-r')/k<\varepsilon$. Betragt nu mængden $A=\{n\in\mathbb{N}|r'+(n/k)(s'-r')\notin\alpha\}$. $k\in A$ så A er en ikke-tom mængde. Eftersom $\mathbb{N}$ er velordnet, må $k'=\text{Min}A$ eksisterer. Hvis $k'\neq1$, så haves det at $k'-1\notin A$. Hvis $k'=1$, fås det at $r'\notin\alpha$, da $k'-1=0$ hvilket er i modstrid med definition, og dermed ikke kan lade sig gøre. Dermed kan de antages at $k'-1\notin A$. Definer

$r=r'+((k'-1)/k)(s'-r')$ $\quad\in\alpha$
$s=r'+(k'/k)(s'-r')$ $\quad\notin\alpha$

Så er s-r=(s′-r′)/k<ε. Dermed haves det at r+ε>s, og $s \notin \alpha$, så haves det fra $\mathbb{R}$(ii) at $r+\varepsilon \notin \alpha$

■

Denne sætning viser at der for ethvert irrationelt punkt, kan findes to rationelle punkter, et på hver side af det irrationelle punkt, som fortsat er så tætte på hinanden som det ønskes, dermed er hullerne i den rationelle tallinje uendeligt små, hvilke bekræfter at der er tale om punkter.

Specielle skæringer

I dette afsnit, vil der blive introduceret to specielle typer af skæringer, som repræsenterer forskellige typer af reelle tal. Der vil senere blive introduceret endnu en type, men hertil skal multiplikation for reelle tal først vises.

Sætning - Rationelle skæringer

Hvis $r \in \mathbb{Q}$, så er mængden
$\alpha_r=\{x \in \mathbb{Q} | x<r\}$
skæringer. α_r kaldes rationelle skæringer. Videre gælder der at,
(i) $\alpha_r=\alpha_s$ hvis og kun hvis r=s
(ii) α er en rationelt skæring hvis og kun hvis $\mathrm{Min}(\mathbb{Q} \setminus \alpha)=r$ eksisterer. I dette tilfælde $\alpha=\alpha_r$.

Bevis

Først vises det at α_r overholder kravene for at være en skæring. Eftersom $r \notin \alpha_r$ og $r-1 \in \alpha_r$, gælder $\mathbb{R}$(i) for α_r. For ethvert $x \in \alpha_r$ og $y \notin \alpha_r$, haves det at $x<r\leq y$ og dermed gælder $\mathbb{R}$(ii) for α_r. Hvis $\mathrm{Max}\alpha_r$ eksisterer, haves der fra Tæthedssætningen for $\mathbb{Q}$, at der eksisterer et $x \in \mathbb{Q}$ sådan at $\mathrm{Max}\alpha_r<x<r$. Dette betyder at $x \in \alpha_r$ hvilket er i modstrid med at der er et maksimum. Dermed er $\mathbb{R}$(iii) også sand for α_r. Dermed er α_r en skæring.
(i) Hvis r=s, så er $x \in \alpha_r \Leftrightarrow x<r=s \Leftrightarrow x \in \alpha_s$. Antag at $\alpha_r=\alpha_s$. Hvis r<s, så er $r \in \alpha_s$ men $r \notin \alpha_r$, hvilket er en modstrid. Ved symmetri kan ej heller r>s lade sig gøre, dermed må r=s.
(ii) Lad α_r være en rationel skæring. Så haves der for alle $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha_r$, at $y\geq r$. Eftersom $r \notin \alpha_r$, er $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha_r$, haves det at $\mathrm{Min}(\mathbb{Q} \setminus \alpha_r)=r$. Antag nu at $\mathrm{Min}(\mathbb{Q} \setminus \alpha)=r$ eksisterer. Så postuleres det at $\alpha_r=\alpha$.
Now,

$x \in \alpha_r$	$\Rightarrow x<r$	$x \in \alpha$	$\Rightarrow x<r$
	$\Rightarrow x \notin \mathbb{Q} \setminus \alpha$		$\Rightarrow x \in \alpha_r$
	$\Rightarrow x \in \alpha$		

Dermed er $\alpha=\alpha_r$.

■

Mængden af rationelle skæringer repræsenterer de rationelle tal. Derfor notere mængden af alle rationelle skæringer som $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

Sætning - Negative skæringer

For ethvert $\alpha\in\mathbb{R}$, så er mængden defineret ved
$-\alpha=\{-s\in\mathbb{Q} \mid s\notin\alpha, s\neq Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)\}$
også en skæring.
Denne er kaldet den negative skæring af α.

Bevis

Eftersom $\alpha\neq\mathbb{Q}$, så eksisterer der et $s\notin\alpha$, så $s+1\notin\alpha$ og $s+1\neq min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$. Dermed er $-(s+1)\in-\alpha$ og så er $-\alpha\neq\emptyset$. Eftersom $\alpha\neq\emptyset$, eksisterer der et $s\in\alpha$. Så haves det fra definitionen at, $-s\notin-\alpha$ og dermed er $-\alpha\neq\mathbb{Q}$. Dermed gælder $\mathbb{R}$(i) for -α.
Lad $r\in-\alpha$ og $s\in\mathbb{Q}\backslash(-\alpha)$ være sådan at $r\geq s$. Så er $-r\leq -s$. Det må haves at $-r\notin\alpha$ fra definitionen $r\in-\alpha$, og det må haves at en af følgende er sande:
(i) $-s\in\alpha$
Men dette er i modstrid med $\mathbb{R}$(ii) og derfor umuligt.
(ii) $-s=Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$.
Så er $-s\leq -r$, som medfører at $-s=-r$, samt $s=r$ hvilket ikke kan lade sig gøre da $(-\alpha)\cap(\mathbb{Q}\backslash(-\alpha))=\emptyset$. Dermed gælder $\mathbb{R}$(ii) for -α.
Antag at Max(-α) eksisterer. Så er $-Max(-\alpha)\notin\alpha$ og $-Max(-\alpha)\neq Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$. Betragt nu de to udfald:
(i) $Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$ eksisterer ikke.
Så eksisterer der et $s\in\mathbb{Q}\backslash\alpha$ som enten er $s<-Max(-\alpha)$, eller $s\geq -Max(-\alpha)$ $\forall$ $s\in\mathbb{Q}\backslash\alpha$. Eftersom $-Max(-\alpha)\in\mathbb{Q}\backslash\alpha$, haves det at $-Max(-\alpha)=Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$, hvilket er i modstrid med antagelsen.
Ellers er $-s\in-\alpha$ og $-s>Max(-\alpha)$, hvilket også er en modstrid.
(ii) $Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$ eksisterer.
Fra Tæthedssætningen for $\mathbb{Q}$, haves det at der eksisterer et $s\in\mathbb{Q}$ sådan at $Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)<s<-Max(-\alpha)$. Da $Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha)\in\mathbb{Q}\backslash\alpha$, må det haves at $s\in\mathbb{Q}\backslash\alpha$ fra $\mathbb{R}$(ii). Så er $-s\in-\alpha$ og $-s>Max(-\alpha)$, dette giver igen en modstrid. Dermed gælder $\mathbb{R}$(iii) for -α.
Dermed er -α en skæring

■

Lemma

Den negative skæring af α_r er α_{-r}.

Bevis

$$
\begin{aligned}
x\in-\alpha_r \quad &\Leftrightarrow -x\notin\alpha_r \wedge -x\neq Min(\mathbb{Q}\backslash\alpha r)\\
&\Leftrightarrow -x\geq r \wedge -x\neq r\\
&\Leftrightarrow -x>r\\
&\Leftrightarrow x<-r
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow x\in\alpha_{-r}$.

■

Binære operatore på ℝ

I dette afsnit vil addition og multiplikation på ℝ blive defineret. Dette gøres med henblik på at vise at under disse to binære operatore, bibeholdes at ℝ er et legeme.

Sætning - Addition på ℝ

Der eksisterer en veldefineret binær operator ⊕ på ℝ givet ved $\alpha\oplus\beta=\{r+s|r\in\alpha,\ s\in\beta\}\ \forall\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Bevis

Først vises det at ⊕ er lukket. Eftersom α, β≠∅, have det åbenlyst at $\alpha\oplus\beta\neq\emptyset$. Samt, for $\varepsilon=½$, eksisterer der et $r'\in\alpha$, $s'\in\beta$ sådan at $r'+½\notin\alpha$ og $s'+½\notin\beta$. Så for alle $r\in\alpha$, $s\in\beta$, haves det ifølge ℝ(ii) at, $r+s<(r'+½)+(s'+½)=r'+s'+1$. Hvis $r'+s'+1\in\alpha\oplus\beta$ fås det at $r'+s'+1<r'+s'+1$, hvilket er en modstrid. Dermed er $\alpha\oplus\beta\neq\mathbb{Q}$, og så gælder ℝ(i) fortsat.
For ethvert $r\in\alpha$, $s\in\beta$, antages det at der eksisterer et $x\in\mathbb{Q}\backslash(\alpha\oplus\beta)$ sådan at $r+s\geq x$. Så er $r\geq x-s$ og fra ℝ(ii), haves det at $x-s=r'$ for nogle $r'\in\alpha$. Dermed er, $x=r'+s$, så er $x\in\alpha\oplus\beta$, hvilket er en modstrid. Dermed gælder ℝ(ii).
For ethvert $r\in\alpha$, $s\in\beta$, følger det fra ℝ(iii), at der eksisterer et $r'\in\alpha$, $s'\in\beta$ sådan at $r'>r$, $s'>s$, så er $r'+s'>r+s$ og så kan $\mathrm{Max}(\alpha\oplus\beta)$ ikke eksisterer. Dermed gælder ℝ(iii).
Dermed er $\alpha\oplus\beta$ en skæring og så er ⊕ lukket.
Hvis $\alpha=\alpha'$ og $\beta=\beta'$, så er $\alpha\oplus\beta=\{r+s\mid r\in\alpha,\ s\in\beta\}=\{r+s\mid r\in\alpha',\ s\in\beta'\}=\alpha'\oplus\beta'$.
Dermed er ⊕ en veldefineret binær operator på ℝ.

■

Sætning - Egenskaber ved addition på ℝ

For α, β, γ∈ℝ, gælder følgende:
$A_{\mathbb{R}}$(i) $\alpha\oplus\beta = \beta\oplus\alpha$

$$\begin{aligned}\alpha\oplus\beta &=\{r+s\mid r\in\alpha,\ s\in\beta\}\\ &=\{s+r\mid s\in\beta,\ r\in\alpha\}\\ &=\beta\oplus\alpha\end{aligned}$$

$A_{\mathbb{R}}$(ii) $(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma = \alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma &=\{r+s\mid r\in\alpha,\ s\in\beta\}\oplus\gamma\\ &=\{(r+s)+t\mid r\in\alpha,\ s\in\beta,\ t\in\gamma\}\\ &=\{r+(s+t)\mid r\in\alpha,\ s\in\beta,\ t\in\gamma\}\\ &=\alpha\oplus\{s+t\mid s\in\beta,\ t\in\gamma\}\\ &=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)\end{aligned}$$

$A_{\mathbb{R}}$(iii) Identitetselementet for $\oplus$ eksisterer og er givet ved α_0.
Hvis $r+s\in\alpha\oplus\alpha_0$, så eftersom $s<0$, haves det at $r+s<r$ sådan at $r+s\in\alpha$. Dermed er $\alpha\oplus\alpha_0\subseteq\alpha$.
Modsat, tag $r\in\alpha$. Fra $\mathbb{R}$(iii) haves det at der eksisterer et $r'\in\alpha$ sådan at $r'>r$. Så er $r-r'<0$, idet $r-r'\in\alpha_0$ og eftersom $r=r'+(r-r')$, haves det at $r\in\alpha\oplus\alpha_0$ og så er $\alpha\oplus\alpha_0\supseteq\alpha$. Dette sammenholdt med $A_{\mathbb{R}}$(i), giver at $\alpha\oplus\alpha_0=\alpha=\alpha_0\oplus\alpha$
$A_{\mathbb{R}}$(iv) For $\alpha\in\mathbb{R}$, eksisterer dets $\oplus$-inverselement og er givet ved $-\alpha$.
Antag at $\text{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$ ikke eksisterer. Hvis $x\in\alpha_0$, så er $x<0$. Sæt $\varepsilon=-x$. Så eksisterer der et $y\in\alpha$ sådan at $y-x\notin\alpha$, samt at $x-y\in-\alpha$. Dermed er $x=y+(x-y)$ og så er $x\in\alpha\oplus(-\alpha)$. Hvis $x+y\in\alpha\oplus(-\alpha)$, så er $-y\notin\alpha$ og fra $\mathbb{R}$(ii) haves det at, $-y>x$, så $x+y<0$ og dermed i α_0.
Antag at $\text{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)=r$ eksisterer. Så er $\alpha=\alpha_r$ og $-\alpha=\alpha_{-r}$. Dermed er, $x+y\in\alpha\oplus(-\alpha) \Rightarrow x<r,\ y<-r \Rightarrow x+y<0 \Rightarrow x+y\in\alpha_0$. For ethvert $x\in\alpha_0$, $x<0$. Dermed er $p=r+(x/2)\in\alpha_r$ og $q=-r+(x/2)\in\alpha_{-r}$ og så er $x=p+q\in\alpha\oplus(-\alpha)$. Dette sammenholdt med $A_{\mathbb{R}}$(i), giver at $\alpha\oplus(-\alpha)=\alpha_0=(-\alpha)\oplus\alpha$.

■

Dermed er $(\mathbb{R},\oplus)$ er kommutativ gruppe. Før multiplikation kan introduceres, kræves det at man introducere mængde af positive elementer $P_{\mathbb{R}}$.

Definition

Delmængden $P_{\mathbb{R}}$ af $\mathbb{R}$ defineres ved
$P_{\mathbb{R}}=\{\alpha\in\mathbb{R} \mid 0<\alpha\}$

Sætning

For ethvert $\alpha\in\mathbb{R}$, er en og kun en af følgende sande: $\alpha\in P_{\mathbb{R}}$, $-\alpha\in P_{\mathbb{R}}$, $\alpha=\alpha_0$.

Bevis

Det vises først at mindst en af udsagnene er sande. Hvis $\alpha\notin P_{\mathbb{R}}$, så er $0\geq\alpha$.
Hvis det haves at $0\neq\text{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$, Så er $0=-0\in-\alpha$. Ellers er $0=\text{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$ og dermed er $\alpha=\alpha_0$.
Lad nu $\alpha\in P_{\mathbb{R}}$. Da $\alpha>0$, kan $0\notin\alpha_0$ så $\alpha\neq\alpha_0$. Hvis $0\in-\alpha$, så skal $-0=0\notin\alpha$, hvilket ikke kan lade sig gøre. Dermed er $-\alpha\notin P_{\mathbb{R}}$. Hvis $-\alpha\in P_{\mathbb{R}}$, så haves det at $\alpha=-(-\alpha)\notin P_{\mathbb{R}}$ og $-\alpha\neq\alpha_0$, så $\alpha\neq\alpha_0$. Endeligt hvis $\alpha=\alpha_0$, så haves det, eftersom $\alpha=\alpha_0=-\alpha$, at $\alpha\in P_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow -\alpha\in P_{\mathbb{R}}$ hvilket er i modstrid med de tidligere resultater, og derfor ikke kan lade sig gøre.
Dermed er sætningen sand.

■

Nu kan der gives en definition af multiplikation.

Sætning - Multiplikation på $\mathbb{R}$

Der eksisterer en veldefineret binær operator $\odot$ på $\mathbb{R}$ defineret ved
For α, $\beta\in P_{\mathbb{R}}$,

$\alpha\odot\beta=\{r\in\mathbb{Q}\mid r\leq 0\}\cup\{r=st\mid s\in\alpha, t\in\beta, s>0, t>0\}$ M(a)
I øvrige tilfælde, lad
$\alpha\odot\beta=\alpha_0$ hvis $\alpha=\alpha_0$ eller $\beta=\beta_0$ M(b)
$(\alpha)\odot(\beta)$ hvis $\alpha, \beta\notin P_{\mathbb{R}}\cup\{\alpha_0\}$ M(c)
$-((\alpha)\odot\beta)$ hvis $\alpha\notin P_{\mathbb{R}}\cup\{\alpha_0\}, \beta\in P_{\mathbb{R}}$ M(d)
$-(\alpha\odot(\beta))$ hvis $\alpha\in P_{\mathbb{R}}, \beta\notin P_{\mathbb{R}}\cup\{\alpha_0\}$ M(e)

Bevis

Først betragtes hvor elementerne er indeholdt i $P_{\mathbb{R}}$. For ethvert $\alpha, \beta\in P_{\mathbb{R}}$, haves det at $0\in\{r\in\mathbb{Q}|r\leq 0\}\subseteq\alpha\odot\beta$ så $\alpha\odot\beta\neq\emptyset$. Fra $\mathbb{R}$(iii), og eftersom $0\in\alpha, \beta$, eksisterer der et $s_1\in\alpha$, $t_1\in\beta$ sådan at $s_1, t_1>0$. Samt der eksisterer et $s_2\in\alpha$, $t_2\in\beta$ sådan at $s_2+1\notin\alpha$, $t_2+1\notin\beta$. Sæt $s=\text{Max}(s_1,s_2)$, $t=\text{Max}(t_1,t_2)$ og så er $s\in\alpha$, $t\in\beta$, $s, t >0$ men $s+1\notin\alpha$, $t+1\notin\beta$. Det påståes at $st+s+t+1\notin\alpha\odot\beta$. Det er tydeligt at $st+s+t+1\notin\{r\in\mathbb{Q}|r\leq 0\}$. Dermed skal der, hvis $st+s+t+1\in\alpha\odot\beta$, eksisterer et $s'\in\alpha$, $t'\in\beta$, $s',t' >0$ sådan at $s't' =st+s+t+1$. Men $\mathbb{R}$(ii) kræver at $s'<s+1$, $t'<t+1$, for at være i α og β, men dette medfører at $s't'<st+s+t+1$, hvilket er en modstrid, og dermed gælder $\mathbb{R}$(i) under multiplikation.
Tag et tilfældigt $r\in\alpha\odot\beta$ og $s\notin\alpha\odot\beta$ og antag at $r\geq s$. Det kan ikke ske at $r\neq s$ da et ikke punkt ikke både være indeholdt og udelukket fra samme mængde. At $s\notin\alpha\odot\beta \Rightarrow s>0$, altså er $r>s>0$. Lad $t=r/s>1$ og så er $st=r$. Eftersom $r\in\alpha\odot\beta$ og $r\notin\{r\in\mathbb{Q}|r\leq 0\}$, eksisterer der et $s'\in\alpha$, $t'\in\beta$, $s', t' >0$ sådan at $r=s't'$. Dermed er $st =s't'$, altså er $s=(s't')/t$, men $s'/t<s'$, så $s'/t\in\alpha$. Eftersom $t'\in\beta$ og $s'/t, t'>0$, dermed må det haves at $s\in\alpha\odot\beta$, hvilket er en modstrid. Dermed gælder $\mathbb{R}$(ii) under multiplikation.
Tag et tilfældigt $r\in\alpha\odot\beta$. Det antages at $r=st$ for nogen $s\in\alpha$, $t\in\beta$, $s,t >0$, så haves det fra $\mathbb{R}$(iii) at der eksisterer et $s'\in\alpha$ sådan at $s'>s>0$, samt et $t'\in\beta$ sådan at $t'>t>0$ og så er $s't'>st=r$. Dermed gælder $\mathbb{R}$(iii) under multiplikation. Dermed er $\alpha\odot\beta$ også en skæring for $\alpha, \beta\in P_{\mathbb{R}}$.
Lad nu $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ hvor $\alpha, \beta\in P_{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}\alpha\odot\beta &=\{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\} \cup \{r=st \mid s\in\alpha, t\in\beta, s>0, t>0\}\\ &=\{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\} \cup \{r=st \mid s\in\alpha', t\in\beta', s>0, t>0\}\\ &=\alpha'\odot\beta'\end{aligned}$$

Dermed er $\odot$ veldefineret for elementer begrænset til $P_{\mathbb{R}}$.
Observer at der for de andre tilfælde er $\alpha\odot\beta$ defineret som α_0, en operation af $\odot$ på elementer i $P_{\mathbb{R}}$ eller ved at tage den negative skæring. Dermed beholder $\alpha\odot\beta$ sine egenskaber som en skæring. Eftersom det er vist at $\odot$ er en funktion på $P_{\mathbb{R}}X\, P_{\mathbb{R}}$ og de negative er unike, vil $\odot$ være en funktion som begrænser sig til hvert udfald, og da udfaldene er disjunkte og dækker hele $\mathbb{R}$, vil $\odot$ være en funktion på $\mathbb{R}X\mathbb{R}$.
Dermed er $\odot$ veldefineret på $\mathbb{R}$.

■

Lemma

For ethvert α, $\beta\in\mathbb{R}$, haves det at
$-(\alpha\odot\beta)=(-\alpha)\odot\beta=\alpha\odot(-\beta)$

Bevis

M(a):
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(\alpha\odot(-(-\beta)))$
$=\alpha\odot(-\beta)$
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-((-(-\alpha))\odot\beta)$
$=-(\alpha)\odot\beta$
M(b):
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(\alpha_0)$
$=\alpha_0$
$=(-\alpha)\odot\beta$
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(\alpha_0)$
$=\alpha_0$
$=\alpha\odot(-\beta)$
M(c):
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-((-\alpha)\odot(-\beta))$
$=(-\alpha)\odot\beta$
$-(\alpha\odot\beta)=-((-\alpha)\odot(-\beta))$
$=\alpha\odot(-\beta)$
M(d):
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(-((-\alpha)\odot\beta))$
$=(-\alpha)\odot\beta$
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(-((-\alpha)\odot\beta))$
$=(-\alpha)\odot\beta$
$=\alpha\odot(-\beta)$
M(e):
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(-(\alpha\odot(-\beta)))$
$=\alpha\odot(-\beta)$
$-(\alpha\odot\beta) \quad =-(-(\alpha\odot(-\beta)))$
$=\alpha\odot(-\beta)$
Dermed er $-(\alpha\odot\beta)=(-\alpha)\odot\beta=\alpha\odot(-\beta)$.

■

Nu have egenskaberne til at indføre endnu en type af skæringer, nemlig den reciprokke skæring af en positiv skæring.

Sætning - Den reciprokke skæring

For ethvert $\alpha\in P_{\mathbb{R}}$, er mængden defineret ved

α^{-1}={r∈ℚ | r≤0}∪{r=1/s | s∉α, s>0 og s≠Min(ℚ\α)}
en skæring. Denne skæring kaldes den reciprokke skæring af α.

Bevis

Eftersom 0∈α^{-1}, er α^{-1}≠∅. Videre haves det at der eksisterer et s>0 sådan at s∈α, dermed er 1/s>0 og så er 1/s∉α^{-1}. Dermed er α^{-1}≠ℚ. Dermed gælder ℝ(i) for α^{-1}.
Lad r∈α^{-1} og t∉α^{-1}. Hvis r≤0, følger det trivielt at r≤0<t. Hvis r>0 haves det at 1/r∉α, 1/r>0 og 1/r≠Min(ℚ\α). Eftersom t∉α^{-1}, t>0 så er 1/t>0. Hvis 1/t=Min(ℚ\α), så er 1/r∉α og 1/r≠Min(ℚ\α), så haves det at 1/t<1/r, samt at r<t. Hvis 1/t≠Min(ℚ\α), så må det haves at 1/t∈α, ellers er t∈α^{-1}. Dermed gælder følger det fra ℝ(ii), at 1/t<1/r, som giver at r<t. Dermed gælder ℝ(ii) for α^{-1}.
Tag et tilfældigt r∈α^{-1}. Så eksisterer der et s∉α ifølge ℝ(i). Fra ℝ(ii) haves det at s+1>s>0. Dermed, hvis r≤0, haves det at 1/(s+1)∈α^{-1} og r≤0<1/(s+1). Nu betragtes kun r>0. Det må haves at 1/r∉α, 1/r>0 og 1/r≠Min(ℚ\α). Eftersom 1/r≠Min(ℚ\α), eksisterer der et s∉α sådan at 1/r>s. Fra tæthedssætningen følger det at der eksisterer et t sådan at 1/r>t>s. Så er t∉α, t>0 og t≠Min(ℚ\α). Og 1/t>r samt 1/t∈α^{-1}. Dermed gælder ℝ(iii) for α^{-1}.
Dermed er α^{-1} en skæring.

■

Som det blev gjort med de negative skæringer, viser følgende lemma hvordan den reciprokke skæring kan beskrives som en rationel skæring.

Lemma

For ethvert α_r∈$P_{\mathbb{R}}$, er dens reciprokke skæring $\alpha_{1/r}$.

Bevis

Tag et tilfældigt x∈$(\alpha_r)^{-1}$. Hvis x≤0, så er x≤0<1/r og så er x∈$\alpha_{1/r}$. Modsat hvis 1/x>0, 1/x∉α_r, 1/x≠Min(ℚ\α_r)=r. Så er 1/x>r, samt x<1/r og så er x∈$\alpha_{1/r}$.
Tag et tilfældigt x∈$\alpha_{1/r}$. Hvis x≤0, så følger det trivielt at x∈$(\alpha_r)^{-1}$. Dermed betragtes 0<x<1/r. Det haves at 0<r<1/x. Dermed er 1/x>0, 1/x∉α_r og 1/x≠r=Min(ℚ\α_r). Det betyder at x=1/(1/x)∈$(\alpha_r)^{-1}$. Dermed er $(\alpha_r)^{-1}$=$\alpha_{1/r}$.

■

Sætning - Egenskaber ved multiplikation på ℝ

For alle α, β, γ∈$P_{\mathbb{R}}$, haves det at
$m_{\mathbb{R}}$(i) α⨀β = β⨀α

α⨀β ={r∈ℚ | r≤0} ∪ {r=st | s∈α, t∈β, s>0, t>0}
={r∈ℚ | r≤0} ∪ {r=ts | t∈β, s∈α, t>0, s>0}
=β⨀α

$m_{\mathbb{R}}$(ii) (α⨀β)⨀γ = α⨀(β⨀γ)

(α⨀β)⨀γ={r∈ℚ | r≤0} ∪ {r=uv | u∈α⨀β, v∈γ, u>0, v>0}
α⨀(β⨀γ)={r∈ℚ | r≤0} ∪ {r=uv | u∈α, v∈β⨀γ, u>0, v>0}

Det skal blot vises at

$\{r=uv \mid u\in\alpha\odot\beta, v\in\gamma, u, v>0\} = \{r=uv \mid u\in\alpha, v\in\beta\odot\gamma, u>0, v>0\}$

Tag $uv\in\{r=uv \mid u\in\alpha\odot\beta, v\in\gamma, u, v>0\}$. Eftersom $u>0$, eksisterer der et s', $t'>0$ sådan at $s'\in\alpha$, $t'\in\beta$ og $s't'=u$. Bemærk at $t'v>0$. Dermed er $uv=(s't')v=s'(t'v)\in\{r=uv \mid u\in\alpha, v\in\beta\odot\gamma, u>0, v>0\}$.

Tag $uv\in\{r=uv \mid u\in\alpha, v\in\beta\odot\gamma, u>0, v>0\}$. Eftersom $v>0$, eksisterer der et s', $t'>0$ sådan at $s'\in\beta$, $t'\in\gamma$ og $s't'=v$. Bemærk at $us'>0$. Dermed er $uv=u(s't')=(us')t'\in\{r=uv \mid u\in\alpha\odot\beta, v\in\gamma, u, v>0\}$.

Dermed er $(\alpha\odot\beta)\odot\gamma=\alpha\odot(\beta\odot\gamma)$

$m_{\mathbb{R}}$(iii) Identitetselsmentet eksisterer og er givet ved α_1.

Bemærk først at da $0<1$ er $0\in\alpha_1$, så er $\alpha_1\in P_{\mathbb{R}}$. Nu er

$$\begin{aligned}\alpha\odot\alpha_1 &= \{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\} \cup \{r=st \mid s\in\alpha, t\in\alpha_1, s>0, t>0\}\\ &= \{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\} \cup \{r=st \mid s\in\alpha, s>0, 1>t>0\}\end{aligned}$$

Tag $r\in\alpha\odot\alpha1$. Hvis $r\leq 0$, så er $r\in\alpha$ ifølge $\mathbb{R}$(ii), eftersom $0\in\alpha$. Ellers eksisterer der et $s\in\alpha$, $0<t<1$ sådan at $st=r$. Dermed er $r=st<s$ og fra $\mathbb{R}$(ii) haves det at $r\in\alpha$. Tag nu $s\in\alpha$. Hvis $s\leq 0$, haves det at $s\in\{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\}$ og dermed er i $\alpha\odot\alpha_1$. Ellers have det fra $\mathbb{R}$(iii) at der eksisterer et $s'\in\alpha$ sådan at $s'>s>0$. Lad nu $t=s/s'$ så haves det at $0<t<1$ og så er $s=s't\in\alpha\odot\alpha_1$. Dermed haves det, sammenholdt med $m_{\mathbb{R}}$(i) at $\alpha\odot\alpha_1=\alpha=\alpha_1\odot\alpha$.

$m_{\mathbb{R}}$(iv) For ethvert $\alpha\in P_{\mathbb{R}}$, eksisterer dets $\odot$-inverselement og er givet ved α^{-1}.

$\alpha\odot\alpha^{-1}=\{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\} \cup \{r=st \mid s\in\alpha, t\in\alpha^{-1}, s>0, t>0\}$

Tag $r\in\alpha\odot\alpha^{-1}$. Hvis $r\leq 0$, så er det klart at $r\in\alpha_1$. Ellers eksisterer der et $s\in\alpha$, $t\in\alpha^{-1}$, $s, t>0$ sådan at $r=st$. Da $t>0$, haves det at $1/t\notin\alpha$, $1/t>0$ og $1/t\neq\mathrm{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$. Det vides fra $\mathbb{R}$(ii) at $1/t>s$, så er $1>st=r$ og dermed er $r\in\alpha_1$.

Tag et tilfældigt $r\in\alpha_1$, sådan at $r<1$. Hvis $r\leq 0$ betyder dette at $r\in\alpha\odot\alpha^{-1}$, derfor betragtes $0<r<1$. Eftersom $0\in\alpha$, eksisterer der ifølge $\mathbb{R}$(iii) et $s_1\in\alpha$, $s_1>0$. Det haves for $\varepsilon=(s_1(1-r))/r>0$, så eksisterer der et $s_2\in\alpha$ sådan at $s_2+\varepsilon\notin\alpha$. Det antages at $s_2+\varepsilon\neq\mathrm{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$ for ellers kan man ifølge $\mathbb{R}$(iii) finde et $s_3\in\alpha$ sådan at $s_3>s_2$ og dermed er $s_3+\varepsilon>s_2+\varepsilon$, så $s_3+\varepsilon\neq\mathrm{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$ og så tage den som opfylder den ønskede egenskab. Sæt $s=\mathrm{Max}(s_1, s_2, s_3)$. Så er $s+\varepsilon>0$, $s+\varepsilon\notin\alpha$ og $s+\varepsilon\neq\mathrm{Min}(\mathbb{Q}\backslash\alpha)$. Dermed er $1/(s+\varepsilon)\in\alpha^{-1}$. Dermed er $s/(s+\varepsilon)\in\alpha\odot\alpha^{-1}$, men

$$\begin{aligned}s/(s+\varepsilon) &= s/(s+(s_1(1-r))/r)\\ &\geq s/(s+(s(1-r))/r) \qquad \text{(Da } s\geq s1\text{)}\\ &= r\end{aligned}$$

Ifølge $\mathbb{R}$(ii) betyder dette at $r\in\alpha\odot\alpha^{-1}$. Dermed haves det, sammenholdt med $m_{\mathbb{R}}$(i), at $\alpha\odot\alpha^{-1}=\alpha_1=\alpha^{-1}\odot\alpha$.

$m_{\mathbb{R}}$(v) $\alpha\odot(\beta\oplus\gamma) = (\alpha\odot\beta)\oplus(\alpha\odot\gamma)$

$\alpha\odot(\beta\oplus\gamma)=\{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\} \cup \{r=st \mid s\in\alpha, t\in\beta\oplus\gamma, s>0, t>0\}$

$(\alpha\odot\beta)\oplus(\alpha\odot\gamma)=\{s+t \mid s\in\alpha\odot\beta, t\in\alpha\odot\gamma\}$.

Tag et tilfældigt $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$. Hvis $r \leq 0$, så er $r \in \alpha \odot \beta$ og da, $0 \in \alpha \odot \gamma$ så er $r = r+0 \in (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$. Dermed betragtes $r>0$. Så er $r=s(t+k)$ hvor $s \in \alpha$, $t \in \beta$, $k \in \gamma$, og s, $t+k > 0$. Eftersom $t+k>0$, haves en af følgende udfald:
(i) $t \leq 0$, $k>0$
Dermed er, $st \leq 0$, så $st \in \alpha \odot \beta$, og $s \in \alpha$, $k \in \gamma$ samt s, $k > 0$ så $sk \in \alpha \odot \gamma$. Dermed er $r = st+sk \in (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$.
(ii) $t>0$, $k \leq 0$
Dermed er, $sk \leq 0$, så $sk \in \alpha \odot \gamma$, og $s \in \alpha$, $t \in \beta$ samt s, $t > 0$ så $st \in \alpha \odot \beta$. Dermed er $r = st+sk \in (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$.
(iii) $t>0$, $k>0$
Så er $s \in \alpha$, $t \in \beta$, s, $t > 0$, $st \in (\alpha \odot \beta)$. Tilsvarende, $s \in \alpha$, $k \in \gamma$, s, $k > 0$, $sk \in \alpha \odot \gamma$.
Dermed er $r = st+sk \in (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$.
Dermed er $r \in (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$.
Tag et tilfældigt $r \in (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$. Hvis $r \leq 0$, Så er det klart at $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$.
Dermed betragtes $r>0$. Så eksisterer der et $s \in (\alpha \odot \beta)$, $t \in (\alpha \odot \gamma)$ sådan at $r=s+t$.
Eftersom $s+t>0$, haves en af følgende udfald:
(i) $s>0$, $t>0$
Så eksisterer der et p, $p' \in \alpha$, $q \in \beta$, $u \in \gamma$, p, p', q, $u > 0$ sådan at $s=pq$ og $t=p'u$. Hvis $p=p'$, Så er $r=p(q+u) \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$. Dermed betragtes $p'<p$, så $p'/p<1$. Så er $r=pq+p'u=p(q+(p'/p)u)$. Men $(p'/p)u<u \in \gamma$,og så er $(p'/p)u \in \gamma$. Dermed er $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$. Tilsvarende hvis $p<p'$, betragtes $r=p'((p/p')q+u)$ og så er $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$.
(ii) $s \leq 0$, $t>0$
Så eksisterer der et $p \in \alpha$, $q \in \gamma$, p, $q > 0$ sådan at $t=pq=p(0+q) \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$. Så er $r=s+t \leq t$ og så er $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$.
(iii) $s>0$, $t \leq 0$
Så eksisterer der et $p \in \alpha$, $q \in \beta$ sådan at $s=pq=p(q+0) \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$. Så er $r=s+t \leq s$ og så er $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$.
Dermed er $r \in \alpha \odot (\beta \oplus \gamma)$.
Dermed er $\alpha \odot (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$.

■

Nu da $m_{\mathbb{R}}$(i) til $m_{\mathbb{R}}$(v) er vist, kan det vises at sætningen faktisk gælder for hele $\mathbb{R}$.
Med relationen $-(\alpha \odot \beta) = (-\alpha) \odot \beta = \alpha \odot (-\beta)$, kan man flytte minus symbolerne og herefter anvende den ønskede $m_{\mathbb{R}}$ for herefter igen at flytte minus symbolerne tilbage.
De andre mulige udfald fra sætningen multiplikation på $\mathbb{R}$, kan skabes udfra denne metode og derved også anvende egenskaberne for multiplikation. Det skal dog bemærkes at der for $\alpha \notin P_{\mathbb{R}} \cup \{\alpha_0\}$, er dets inverselement givet ved $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$.
Dermed gælder $M_{\mathbb{R}}$(i) til $M_{\mathbb{R}}$(v) for hele $\mathbb{R}$.

Dermed er det vist at $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ er et legeme. Derfor gås der videre med at ordne dette legeme.

Orden på $\mathbb{R}$

I dette afsnit vil vores system blive ordnet for at man senere kan undersøge for ordens fuldstændighed. Det mangler at vises at $P_{\mathbb{R}}$, er lukket under addition og multiplikation, så det startes der med.

Sætning

Delmængden $P_{\mathbb{R}}$ er lukket under $\oplus$ og $\odot$.

Bevis

Tag et tilfældigt $\alpha, \beta \in P_{\mathbb{R}}$. Eftersom $0\in\alpha, \beta$, haves det at $0=0+0\in\alpha\oplus\beta$ og så er $\alpha\oplus\beta\in P_{\mathbb{R}}$. Ligeledes er $0\in\{r\in\mathbb{Q} \mid r\leq 0\}\subseteq\alpha\odot\beta$ og så er $\alpha\odot\beta\in P_{\mathbb{R}}$. Dermed er$P_{\mathbb{R}}$ lukket under $\oplus$ og $\odot$.

■

Dertil er det tidligere vist at for et $\alpha\in\mathbb{R}$ er der kun en af følgende der er sand $\alpha=\alpha_0$, $\alpha\in P_{\mathbb{R}}$, $-\alpha\in P_{\mathbb{R}}$. Herefter følger den naturlige definition på orden

Definition

For ethvert $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, siges α at være større end β og noteres $\alpha\succ\beta$ hvis $\alpha\oplus(-\beta)\in P_{\mathbb{R}}$. Samt noteres $\alpha\succcurlyeq\beta$ hvis $\alpha\succ\beta$ eller $\alpha=\beta$.

Denne definition gør $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$ til et ordnet legeme.

Sætning

$\alpha\succ\beta$ hvis og kun hvis $\alpha\supset\beta$.

Bevis

Antag at $\alpha\succ\beta$. Så er $\alpha\oplus(-\beta)\in P_{\mathbb{R}}$. Tag et tilfældigt $r\in\beta$. Så kan det ikke haves at $-r\in-\beta$. Eftersom $0\in\alpha\oplus(-\beta)$, eksisterer der et $s\in\alpha$, $t\in-\beta$ sådan at $s+t=0$, så $s=-t$. Fra $\mathbb{R}$(ii) haves det at $-r>t$, så. $r<-t=s$ og så følger det at $r\in\alpha$. Dermed er $\alpha\supseteq\beta$. Hvis $\alpha=\beta$, så haves det at $\alpha\oplus(-\beta)=\alpha\oplus(-\alpha)=\alpha_0(\notin P_{\mathbb{R}})$, hvilket er en modstrid. Derfor er $\alpha\supset\beta$.
Antag nu at $\alpha\supset\beta$. Det betyder at der eksisterer et $r\in\alpha$ men $r\notin\beta$. Fra $\mathbb{R}$(iii) følger det at der eksisterer et $r'\in\alpha$ $r'>r$. Fra $\mathbb{R}$(ii) følger det at $r'\notin\beta$. Dermed er $r'\notin\beta$, $r'\neq\mathrm{Min}(\mathbb{Q}\backslash\beta)$ og så er $-r'\in-\beta$. Det betyder at $0=r'+(-r')\in\alpha\oplus(-\beta)$ så er $\alpha\oplus(-\beta)\in P_{\mathbb{R}}$, altså er $\alpha\succ\beta$.
Dermed er $\alpha\succ\beta$ hvis og kun hvis $\alpha\supset\beta$. Trivielt følger det at $\alpha\succcurlyeq\beta$ hvis og kun hvis $\alpha\supseteq\beta$.

■

Dedekinds reelle talsystem

Ethvert reelt talsystem, skal indeholde en kopi af det rationelle talsystem, i dette afsnit vil det derfor vises at Dedekinds reelle talsystem indeholde det rationelle talsystem.

Lemma

For rationelle skæringer α_x, α_y, gælder der at
(a) $\alpha_x \oplus \alpha_y = \alpha_{x+y}$
(b) $\alpha_x \odot \alpha_y = \alpha_{xy}$

Bevis

(a) Tag et tilfældigt $r+s \in \alpha_x \oplus \alpha_y$. Så et $r<x$, $s<y$ så er $r+s<x+y$, så $r+s \in \alpha_{x+y}$. Tag nu et $z \in \alpha_{x+y}$. Så er $z<x+y$, så $z-x<y$. Fra tæthedssætningen for $\mathbb{Q}$, eksisterer der et z' sådan at $z-x<z'<y$. Så er $z' \in \alpha_y$ og lad $\varepsilon = z'-(z-x)>0$. Nu er $x-\varepsilon<x$ sådan at $x-\varepsilon \in \alpha_x$.
Dermed er, $z=z'+(x-\varepsilon) \in \alpha_x \oplus \alpha_y$.
Dermed er $\alpha_x \oplus \alpha_y = \alpha_{x+y}$.
(b) Først betragtes α_x, $\alpha_y \in P_{\mathbb{R}}$. Tag $r \in \alpha_x \odot \alpha_y$. Hvis $r \leq 0$, eftersom x, $y>0$, så er $xy>0\geq r$ og så er $r \in \alpha_{xy}$. Derfor betragtes $r>0$ så at $r=st$ hvor $0<s<x$, $0<t<y$. Det betyder at $r=st<xy$ og så er $r \in \alpha_{xy}$.
Tag nu et $r \in \alpha_{xy}$. Hvis $r \leq 0$, haves trivielt at $r \in \alpha_x \odot \alpha_y$. Dermed betragtes $0<r<xy$. Så er $0<(xy-r)/y$. Fra tæthedssætningen, haves det at der eksisterer et $0<\varepsilon_1<(xy-r)/y$. Tilsvarende eksistere der et $0<\varepsilon_2<x$. Sæt nu $\varepsilon = \mathrm{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

$$\begin{aligned} r/(x-\varepsilon) &< r/(x-((xy-r)/y)) \\ &\leq y \end{aligned}$$

Det ses at, $0<x-\varepsilon<x$. Dermed er $r=(x-\varepsilon)(r/(x-\varepsilon)) \in \alpha_x \odot \alpha_y$. Hence, $\alpha_x \odot \alpha_y = \alpha_{xy}$.
For at se at resultatet gælder for alle rationelle skæringer, kan man enten bruge at $-(\alpha \odot \beta)=(-\alpha)\odot\beta=\alpha\odot(-\beta)$ eller mere simpelt benytte et tidligere lemma som siger at $-\alpha_r=\alpha_{-r}$, dermed gælder sætningen for alle rationelle skæringer.

■

Sætning

$(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)$ er et dellegeme af $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$. Videre er $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)$ en isomorfi til $(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$.

Bevis

Tag et tilfældigt α_x, $\alpha_y \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$,

$$\begin{aligned} \alpha_x \oplus (-\alpha_y) &= \alpha_x \oplus \alpha_{-y} \\ &= \alpha_{x-y} && (\in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}) \\ \alpha_x \odot (\alpha_y)^{-1} &= \alpha_x \odot \alpha_{1/y} && (\forall\ \alpha_y \neq \alpha_0) \\ &= \alpha_{x/y} && (\in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

Det bemærkes at $\alpha_1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Dermed er $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)$ et dellegeme af $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$.

Betragt funktionen $\varphi:\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}\rightarrow\mathbb{Q}$ givet ved $\varphi(\alpha_r)=r\ \forall\ \alpha_r\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Det er tidligere vist at $\alpha_r=\alpha_s \Rightarrow r=s$. Dermed er φ en veldefineret funktion. Det er vist at $r=s \Rightarrow \alpha_r=\alpha_s$, dermed er φ injektiv.

For ethvert $r\in\mathbb{Q}$, tages $\alpha_r\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sådan at $\varphi(\alpha_r)=r$, dermed er φ surjektiv.

Altså er φ en bijektiv funktion.

Tag et tilfældigt α_r, $\alpha_s\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_r\oplus\alpha_s) &=\varphi(\alpha_{r+s})\\
&=r+s\\
&=\varphi(\alpha_r)+\varphi(\alpha_s)\\
\varphi(\alpha_r\odot\alpha_s) &=\varphi(\alpha_{rs})\\
&=rs\\
&=\varphi(\alpha_r)\varphi(\alpha_s)\\
\alpha_r\succ\alpha_s &\Rightarrow\alpha_r\oplus\alpha_{-s}\in P_{\mathbb{R}}\\
&\Rightarrow\alpha_{r-s}\in P_{\mathbb{R}}\\
&\Rightarrow 0\in\alpha_{r-s}\\
&\Rightarrow 0<r-s\\
&\Rightarrow s<r\\
&\Rightarrow\varphi(\alpha_r)>\varphi(\alpha_s)
\end{aligned}$$

Dermed er $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$.

■

Den næste sætning viser at Dedekind har formået af udvide de rationelle tal til et fuldstændig ordnet legeme.

Sætning

$(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$ er fuldstændig ordnet.

Bevis

Tag en ikke-tom delmængde A af $\mathbb{R}$, som er begrænset opad af et $\beta\in\mathbb{R}$, så det haves at $\alpha\preccurlyeq\beta\ \forall\alpha\in A$. Definer $y=\{r\in\mathbb{Q}\mid r\in\alpha \text{ for nogle } \alpha\in A\}$.

Først vises at $y\in\mathbb{R}$.

Eftersom $A\neq\emptyset$, eksisterer der et $\alpha_0\in A$. Fra $\mathbb{R}$(i) vides det at $\alpha_0\neq\emptyset$. Eftersom $\alpha_0\subseteq y$ og $y\neq\emptyset$. Det vides nu fra $\mathbb{R}$(i) at $\beta\neq\mathbb{Q}$. Det haves at $\alpha\preccurlyeq\beta$, så $\alpha\subseteq\beta\ \forall\alpha\in A$. Dermed må det haves at $y\subseteq\beta$ så $y\neq\mathbb{Q}$. Dermed gælder $\mathbb{R}$(i) for y.

Lad $r\in y$ og $s\notin y$. Så er $r\in\alpha$ for nogle $\alpha\in A$. Eftersom $s\notin y$, så er $s\notin\alpha$. Fra $\mathbb{R}$(ii) haves det at $r<s$. Dermed gælder $\mathbb{R}$(ii) for y.

Antag at Max(y) eksisterer. Så er $\text{Max}(y)\in\alpha$ for nogle $\alpha\in A$. Specifikt betyder det at, eftersom $r\in\alpha \Rightarrow r\in y \Rightarrow r\leq\text{Max}(y)$, derfor må $\text{Max}(y)=\text{Max}(\alpha)$, hvilket er i modstrid med $\mathbb{R}$(iii). Dermed gælder $\mathbb{R}$(iii) for y.

Dermed er y en skæring, så $y\in\mathbb{R}$.

Det haves at, $\alpha \subseteq y$, så $\alpha \preccurlyeq y$ $\forall$ $\alpha \in A$. Dermed er y en øvre grænse for A. Samt det haves at $y \subseteq \beta$, så $y \preccurlyeq \beta$. Eftersom β er en vilkårlig øvre grænse for A kan man konkludere at y=SupA.
Dermed har $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$ en mindste øvre grænse, så den er fuldstændig ordnet.

■

Definition

Et ordnet legeme $(\mathbb{R}_D,\oplus,\odot,\succ)$ kaldes Dedekind reelle talsystem, hvis
(i) Der eksisterer et dellegeme $(\mathbb{Q}_D,\oplus,\odot,\succ)$ som er en isomorfi til $(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$.
(ii) $(\mathbb{R}_D,\oplus,\odot,\succ)$ er fuldstændig ordnet.

Denne definition giver os at der eksisterer et Dedekind reelle talsystem, men den fortæller ikke om hvorvidt dette er unik, som det ønskes for at mene at denne definition beskrive de reelle tal på en god og ønsket måde. Derfor bruges resten af dette kapitel på at vise at, det er tilfældet at Dedekind reelle talsystem repræsentere de reelle tal på en unik måde. Derfor anvendes der fra nu af notationen $(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ for Dedekind reelle talsystem, men de naturlige tal, heltal og rationelle tal noteres med henholdsvis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$.

Egenskaber for Dedekinds reelle talsystem

I dette afsnit bevises nogen egenskaber for Dedekind reelle talsystem, som munder ud i at vises at denne er en unik repræsentation af de reelle tal. Først startes dog med at vises Arkemedes aksiom, som i beviset benytter sig af at Dedekind reelle talsystem er fuldstændig ordnet.

Sætning - Arkimedes aksiom

Lad x, y $\in\mathbb{R}$, x>0. Så eksisterer der et $n\in\mathbb{N}$ sådan at nx>y.

Bevis

Lad A={nx| $n\in\mathbb{N}$}. Antag at udsagnet er falsk, så er A begrænset opad af y. Fra at $\mathbb{R}$ er fuldstændig ordnet, vides det at SupA eksisterer. Eftersom x>0 er SupA-x<SupA og dermed er SupA-x ikke en øvre grænse for A. Dermed eksisterer der et $m\in\mathbb{N}$ sådan at SupA-x<mx, så SupA<(m+1)x. Men (m+1)x$\in$A og dette er i modstrid med at SupA er en øvre grænse for A. Eftersom antagelsen af at udsagnet var falsk fører til en modstrid, må udsagnet være sandt.

■

Følgende Lemma viser nogen egenskaber som Arkimedes aksiom giver, de vises her, så de nemmere kan henvises til når de bliver brugt i fremtidige beviser.

Lemma

Lad x, y $\in\mathbb{R}$. Så gælder følgende:
(i) Der eksisterer et $n\in\mathbb{N}$ sådan at n>y

(ii) Hvis $x>0$, så eksisterer der et $n\in\mathbb{N}$ sådan at $x>1/n$
(iii) Hvis $y\geq 0$, så eksisterer der et $n\in\mathbb{N}$ sådan at $n-1\leq y<n$

Bevis

(i) Dette er blot et særligt tilfælde af Arkimedes aksiom, hvor $x=1>0$
(ii) Fra Arkimedes aksiom vides, hvor $y=1$, eksisterer der et $n\in\mathbb{N}$ sådan at $nx>1$ så er $x>1/n$.
(iii) Betragt mængden $A=\{m\in\mathbb{N} \mid y<m\}$. Punkt (i) giver at A ikke er den tomme mængde. Dermed, eftersom $\mathbb{N}$ er velordnet, så eksisterer $\mathrm{Min}A=n$. Så er $n-1\notin A$. Betragt nu to udfald:
a) $n-1\in\mathbb{N}$
Så haves det at $n-1\leq y<n$ fra definitionen af A.
b) $n-1\notin\mathbb{N}$
Så er $n-1=0$. Dermed er $n-1=0\leq y<n$.

■

Inden tæthedsstningen vises for $\mathbb{R}$, skal det vises at der eksisterer mindst et irrationelt punkt i $\mathbb{R}$

Lemma

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ er ikke-tom.

Bevis

Antag at $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ er tom. Eftersom $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, haves det så at $\mathbb{Q}=\mathbb{R}$. Dermed er $(\mathbb{Q},+,\cdot,>)=(\mathbb{R},+,\cdot,>)$, hvor $(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ er fuldstændig ordnet, mens $(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$ ikke er fuldstændig ordnet. Dermed må $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ være ikke-tom, og elementer i $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ kaldes irrationelle punkter

■

Nu kan tæthedssætningen bevises, som giver at både de rationelle og irrationelle punkter er tætte på en tallinje.

Sætning - Tæthedssætningen.

Lad $x, y \in\mathbb{R}$ være sådan at $x<y$. Så eksisterer der et $r\in\mathbb{Q}$, $z\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sådan at $x<r$, $z<y$.

Bevis

Først vises det at der findes et sådant $r\in\mathbb{Q}$. Antag at $x>0$. Eftersom $1/(y-x)>0$, haves der fra Arkimedes aksiom at der eksisterer et $n\in\mathbb{N}$ sådan at $n>1/(y-x)$. Dermed er $ny-nx>1$. Eftersom $nx>0$, følger det fra Arkimedes aksiom at der eksisterer et $m\in\mathbb{N}$ sådan at $m-1\leq nx<m$. Så er $m\leq nx+1<ny$, så $nx<m<ny$. Dermed er, $x<m/n<y$ og $r=m/n\in\mathbb{Q}$. Hvis $x=0$, så er $y>0$ og fra Arkimedes aksiom eksisterer der et $n\in\mathbb{N}$ sådan at $x=0<1/n<y$, og så sættes $r=1/n\in\mathbb{Q}$. Hvis $x<0$ og $y>0$, så

sættes $r=0\in\mathbb{Q}$. Sidst, hvis $x<y\leq 0$,så er $-x>-y\geq 0$ og så er det vist at der eksisterer et $r'\in\mathbb{Q}$ sådan at $-x>r'>-y$, så $x<-r'<y$ og så sættes $r=-r'\in\mathbb{Q}$.
Eftersom $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ er ikke-tom, så eksisterer der et $z'\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. For ovenstående resultat at, eksisterer der et $r\in\mathbb{Q}$ sådan at $x+z'<r<y+z'$, så $x<r-z'<y$. Det påståes at $z=r-z'\notin\mathbb{Q}$.
Antag at dog at $r-z'\in\mathbb{Q}$. Så eksisterer der et $r'\in\mathbb{Q}$ sådan at $r-z'=r'$, så er $z'=r-r'\in\mathbb{Q}$, hvilket er en modstrid.

■

I næste kapitel bliver de rationelle tal udvidet til at det er fuldstændigt Cauchy legeme. Derfor vises det at Dedekind reelle tal er Cauchy fuldstændigt, for senere at gøre det nemmere at vise at de to fremgangsmåder faktisk viser sig at skabe det samme talsystem.

Sætning - Cauchy fuldstændighed af $\mathbb{R}$

Lad (x_n) være en tilfældig følge i $\mathbb{R}$. Så gælder følgende:
(i) Hvis (x_n) er monotont voksende og begrænset af M, så er (x_n) konvergent.
(ii) Hvis (x_n) er monotont faldende og begrænset af M, så er (x_n) konvergent.
(iii) Hvis (x_n) er Cauchy og har en delfølge som konvergerer mod x, så vil $(x_n)\rightarrow x$.
(iv) Hvis (x_n) er begrænset, så eksisterer der en konvergent delfølge (Bolzano-Weierstrass)
(v) Hvis (x_n) er Cauchy, så er den også konvergent (Cauchy fuldstændighed).

Bevis

(i) Eftersom $|x_n|\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}$, er mængden $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ begrænset opad af M. Det følger trivielt at $x_1\in A$ så $A\neq\emptyset$. Dermed, fra ordens fuldstændighed , følger det at, $x=\text{Sup}A$ eksisterer. Lad $\varepsilon>0$ være givet. Så eksisterer der et $x_k\in A$ sådan at $x_k>\text{Sup}A-\varepsilon$. Eftersom (x_n) er voksende, haves det at $x_n\geq x_k\ \forall\ n\geq k$. Dermed gælder der for alle $n\geq k$, at $\text{Sup}A-\varepsilon<x_k\leq x_n\leq\text{Sup}A<\text{Sup}A+\varepsilon$ så $|x_n-\text{Sup}A|<\varepsilon$. Dermed $(x_n)\rightarrow\text{Sup}A$.
(ii) Eftersom $|x_n|\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}$, er mængden $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ begrænset nedad af -M. Det følger trivielt at, $x_1\in A$ så $A\neq\emptyset$. Så er $-A=\{-x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\neq\emptyset$ begrænset opad, og eftersom $(-x_n)$ er voksende, haves det at $(-x_n)\rightarrow\text{Sup}(-A)$. Men $\text{Inf}A=-\text{Sup}(-A)$.
Eftersom $\lim(-x_n)$ eksisterer, haves det at

$$\begin{aligned}\lim x_n &=\lim((-1)(-x_n))\\ &=-\lim(-x_n)\\ &=-\text{Sup}(-A)\\ &=-(-\text{Inf}A)\\ &=\text{Inf}A\end{aligned}$$

Dermed er $(x_n)\rightarrow\text{Inf}A$.

(iii) Lad en delfølge $(x_{n(k)})\to x$. Lad $\varepsilon>0$ være givet. Eftersom (x_n) er Cauchy, eksisterer der et $N\in\mathbb{N}$ sådan at

$|x_n-x_m|<\varepsilon/2 \quad \forall\, n, m\geq N$.

Eftersom $(x_{n(k)})\to x$, eksisterer der et $T\in\mathbb{N}$ sådan at

$|x_{n(k)}-x|<\varepsilon/2 \quad \forall\, k\geq T$.

Sæt S=Max(N,T). Dermed er,

$$\begin{aligned}|x_n-x| &= |(x_n-x_{n(S)})+(x_{n(S)}-x)| \\ &\leq |x_n-x_{n(S)}|+|x_{n(S)}-x| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \qquad \forall\, n\geq N \\ &= \varepsilon \qquad \forall\, n\geq N\end{aligned}$$

Dermed er $(x_n)\to x$.

(iv) Der eksisterer en delfølge af (x_n) som er monoton. Eftersom (x_n) er begrænset, er denne delfølge også begrænset. Dermed følge det fra (i) og (ii), at denne delfølge er konvergent.

(v) Fra (iv) følger det at (x_n) har en konvergent delfølge. Eftersom (x_n) er Cauchy, følger det fra (iii), at (x_n) også er konvergent.

■

Inden det vises at Dedekind reelle talsystem er unikt, bevises endnu en sætning, som bliver anvendelig i beviset af unikhed.

Sætning

For ethvert $x, y \in\mathbb{R}$, gælder der at:

(i) $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x+y\} = \{s+t \mid s, t\in\mathbb{Q}, s<x, t<y\}$

(ii) $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<xy\} = \{st \mid s, t\in\mathbb{Q}, 0<s <x, 0<t<y\}$, $x, y>0$

(iii) $\mathrm{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\} = \mathrm{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<x\}$, $x>0$

Bevis

(i) Hvis $s+t\in\{s+t \mid s, t\in\mathbb{Q}, s<x, t<y\}$, Så haves det trivielt at $s+t\in\mathbb{Q}$ og $s+t<x+y$. Dermed er $\{s+t \mid s,t\in\mathbb{Q}, s<x, t<y\} \subseteq \{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x+y\}$. Tag nu $r\in\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x+y\}$. Så er $r-x<y$. Fra tæthedssætningen, eksisterer der et $r'\in\mathbb{Q}$ sådan at $r-x<r'<y$. Så er $r-r'<x$. Bemærk at $r-r'\in\mathbb{Q}$ eftersom $r, r'\in\mathbb{Q}$. Dermed er

$r=(r-r')+r'\in\{s+t \mid s, t\in\mathbb{Q}, s<x, t<y\}$.

Dermed er $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x+y\} \subseteq \{s+t \mid s, t\in\mathbb{Q}, s<x, t<y\}$. Så følger det at

$\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x+y\} = \{s+t \mid s,t\in\mathbb{Q}, s<x, t<y\}$.

(ii) Tag et tilfældigt $st\in\{st \mid s, t\in\mathbb{Q}, 0<s<x, 0<t<y\}$. Så haves det trivielt at $st\in\mathbb{Q}$ og $0<st<xy$. Dermed er $\{st \mid s, t\in\mathbb{Q}, 0<s< x, 0<t<y\} \subseteq \{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<xy\}$.

Tag nu $r\in\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<xy\}$. Så er $0<r/x<y$. Fra tæthedssætningen følger det at der eksisterer et $r'\in\mathbb{Q}$ sådan at $0<r/x<r'<y$, så $0<r/r'<x$. Bemærk at $r/ r'\in\mathbb{Q}$ eftersom $r, r'\in\mathbb{Q}$.

Dermed er $r=(r/ r')r'\in\{s+t \mid s, t\in\mathbb{Q}, 0<s<x, 0<t<y\}$. Så følger det at

$\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<xy\} \subseteq \{st \mid s, t\in\mathbb{Q}, 0<s<x, 0<t<y\}$.

Dermed er $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<xy\} = \{st \mid s, t\in\mathbb{Q}, 0<s<x, 0<t<y\}$.

(iii) Bemærk at begge mængder er begrænset opad af x, så derer supremum eksisterer. Eftersom $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r< x\} \subseteq \{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\}$, haves det at
$\text{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<x\} \leq \text{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\}$,
så $\text{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\}$ er en øvre grænse for $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<x\}$.
For ethvert $z\in\mathbb{R}$ hvor $z<\text{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\}$, eksisterer der et $r'\in\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\}$ sådan at $z<r'$. Hvis $r'>0$, så tages $r=r'\in\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<x\}$. Ellers følger der fra tæthedssætningen at der eksisterer at $r\in\mathbb{Q}$ sådan at $0<r<x$ og det haves fortsat at $z<r'\leq 0<r$.
Dermed er $\text{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, 0<r<x\} = \text{Sup}\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\}$.

■

Slutteligt på dette kapitel kan det bevises at Dedekind reelle talsystem er unik.

Sætning

Dedekind reelle talsystem er unikt.

Bevis

Antag at $(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ og $(\mathbb{R}',+',\cdot',>')$ repræsenterer to Dedekind reelle talsystemer. Fra transitet af isomorfier, haves det at, $(\mathbb{Q},+,\cdot,>)\simeq(\mathbb{Q}',+',\cdot',>')$, lad $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}'$ beskrive denne isomorfi. Definer funktionen $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}'$ ved
$\psi(x)=\text{Sup}A_x \;\; \forall\, x\in\mathbb{R}$. hvor $A_x=\{\varphi(r) \mid r<x, r\in\mathbb{Q}\}$
Først vises at ψ er veldefineret. For ethvert $x\in\mathbb{R}$, følger det fra Arkimedes aksiom at der eksisterer at $n\in\mathbb{N}$ (Dermed også i $\mathbb{Q}$) sådan at $n>x$. Dermed er $\varphi(r)\in A_x \Rightarrow r<x<n \Rightarrow \varphi(r)<'\varphi(n)$. Dermed er A_x begrænset opad af $\varphi(n)$, og fra orden fuldstændighed af $\mathbb{R}'$, haves det at $\text{Sup}A_x$ eksisterer, så $\psi(x)\in\mathbb{R}'$. For ethvert x, $y\in\mathbb{R}$ hvor $x=y$, haves at

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \text{Sup}\{\varphi(r) \mid r<x, r\in\mathbb{Q}\} \\ &= \text{Sup}\{\varphi(r) \mid r<x=y, r\in\mathbb{Q}\} && \text{(Da supremum er unikt)} \\ &= \psi(y)\end{aligned}$$

Dermed er ψ veldefineret.
Antag nu at der eksisterer et x, $y\in\mathbb{R}$ sådan at $\psi(x)=\psi(y)$ men at $x\neq y$. Uden tab af generalitet antages det at $x<y$. Fra tæthedssætningen for $\mathbb{R}$, haves det at der eksisterer et $r_1\in\mathbb{Q}$ sådan at $x<r_1<y$. Ved at anvende tæthedssætningen, endnu engang, på r_1 og y, findes $r_2\in\mathbb{Q}$ sådan at $x<r_1<r_2<y$. Fra egenskaberne ved en isomorfi haves det at
$\varphi(r)\in A_x \Rightarrow r<x<r_1<r_2 \Rightarrow \varphi(r)<'\varphi(r_1)<'\varphi(r_2)$.
Dermed er både $\varphi(r_1)$ og $\varphi(r_2)$ er øvre grænser for A_x. Eftersom $\varphi(r_1)<'\varphi(r_2)$, kan man ikke have at $\varphi(r_2)=\text{Sup}A_x$ og dermed er $\psi(x)<'\varphi(r_2)$. Men da $\varphi(r_2)\in A_y$, så er $\psi(x)<'\varphi(r_2)\leq'\psi(y)$, hvilket er i modstrid med antagelsen om at $\psi(x)=\psi(y)$. Dermed må ψ være injektiv.
Tag nu et tilfældigt $x'\in\mathbb{R}'$. Betragt elementet $x=\text{Sup}\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$. Det påstås at x eksisterer så $x\in\mathbb{R}$. Fra Arkimedes aksiom for $\mathbb{R}'$, haves det at der eksisterer et $n'\in\mathbb{N}'$ (dermed også i $\mathbb{Q}'$) sådan at $n'>'x'$. Da φ er surjektiv, eksisterer der et $n\in\mathbb{Q}$

sådan at $n'=\varphi(n)$. Så haves at $\varphi(r)<'x' \Rightarrow \varphi(r)<'x'<'\varphi(n) \Rightarrow r<n$. Dermed er n en øvre grænse for $\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$ og som følge af ordens fuldstændighed af $\mathbb{R}$, eksisterer x.
Det påstås nu at $\mathrm{Sup}A_x=x'$. Hvis x' ikke er en øvre grænse for A_x, må der eksisterer et $\varphi(r)\in A_x$ sådan at $\varphi(r)>'x'$. Så er $r\notin\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$. Eftersom $r<x$, er r ikke en øvre grænse for $\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$ og så eksisterer der et $r_1\in\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$ sådan at $r<r_1$. Fra egenskaberne ved en isomorfi følger det at, $\varphi(r)<'\varphi(r_1)$, så $\varphi(r)<'\varphi(r_1)<'x'$ og så er $r\in\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$, hvilket er en modstrid. Dermed er x' en øvre grænse for A_x. Tag nu et tilfældigt $y'\in\mathbb{R}'$ sådan at $y'<'x'$. Så følger det fra tæthedssætningen for $\mathbb{R}'$, at der eksisterer et $r_1'\in\mathbb{Q}'$ sådan at $y'<'r_1'<'x'$. Ved at anvende tæthedssætningen på r_1' og x', findes et $r_2'\in\mathbb{Q}'$ sådan at $y'<'r_1'<'r_2'<'x'$. Eftersom φ er surjektiv, eksisterer der et r_1, $r_2\in\mathbb{Q}$ sådan at $\varphi(r_1)=r_1'$, $\varphi(r_2)=r_2'$, så r_1, $r_2\in\{r\in\mathbb{Q} \mid \varphi(r)<'x'\}$ og så r_1, $r_2 \leq x$. Fra egenskaberne af at være en isomorfi, haves at, $\varphi(r_1)<'\varphi(r_2)\Rightarrow r_1<r_2$ og så haves det at $r_1<x$. Så er $r_1'=\varphi(r_1)\in A_x$ og $y'<'r_1'<'x'$. Dermed er $x'=\mathrm{Sup}A_x$, så $\psi(x)=x'$.
Dermed er ψ surjektiv.
Tag et tilfældigt x, $y\in\mathbb{R}$.

(i)
$$\begin{aligned}\psi(x+y) &=\mathrm{Sup}\{\varphi(r) \mid r<x+y,\ r\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s+t) \mid s<x,\ t<y,\ s,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s)+'\varphi(t) \mid s<x,\ t<y,\ s,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s) \mid s<x,\ s\in\mathbb{Q}\}+'\mathrm{Sup}\{\varphi(t) \mid t<y,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\psi(x)+'\psi(y).\end{aligned}$$

(ii) Antag at x, y >0. Så er
$$\begin{aligned}\psi(x\cdot y) &=\mathrm{Sup}\{\varphi(r) \mid r<x\cdot y,\ r\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(r) \mid 0<r<x\cdot y,\ r\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s\cdot t) \mid 0<s<x,\ 0<t<y,\ s,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s)\cdot'\varphi(t) \mid 0<s<x,\ 0<t<y,\ s,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s) \mid 0<s<x,\ s\in\mathbb{Q}\}\cdot'\mathrm{Sup}\{\varphi(t) \mid 0<t<y,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\mathrm{Sup}\{\varphi(s) \mid s<x,\ s\in\mathbb{Q}\}\cdot'\mathrm{Sup}\{\varphi(t) \mid t<y,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=\psi(x)\cdot'\psi(y)\end{aligned}$$

Før de andre udfald betragtes, findes to resultater. Det påstås at $\psi(0)=0'$. For $r\in\mathbb{Q}$, $r<0 \Rightarrow \varphi(r)<'\varphi(0)$. Dermed er $\varphi(0)$ en øvre grænse for A_0. Lad $z'\in\mathbb{R}'$ være sådan at $z'<'\varphi(0)$. Fra tæthedssætningen for $\mathbb{R}'$, haves det at der eksisterer et $r'\in\mathbb{Q}'$ sådan at $z'<'r'<'\varphi(0)$. Fra at φ er surjektiv haves at der eksisterer et $r\in\mathbb{Q}$ sådan at $\varphi(r)=r'$. Fra egenskaberne for en isomorfi haves det at $r<0$ så er $\varphi(r)\in A_0$ og $\varphi(r)<'\varphi(0)$. Dermed er $\varphi(0)=\mathrm{Sup}A_0=\psi(0)$. At det er en isomorfi giver at $\varphi(0)=0'$ og så er $\psi(0)=0'$.
Det påstås også at $\psi(-x)=-\psi(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Det haves at
$$\begin{aligned}0'=\psi(0) &=\psi(x+(-x))\\ &=\psi(x)+'\psi(-x)\end{aligned}$$
Så er $\psi(-x)=-\psi(x)$.

(a) En af x, y er nul.
Uden tab af generalitet antages det at x=0. Så er

$$\begin{aligned}
\psi(x\cdot y) &= \psi(0\cdot y)\\
&= \psi(0)\\
&= 0'\\
&= 0'\cdot'\psi(y)\\
&= \psi(x)\cdot'\psi(y)
\end{aligned}$$

(b) x, y <0.

$$\begin{aligned}
\psi(x\cdot y) &= \psi((-x)\cdot(-y))\\
&= \psi(-x)\cdot'\psi(-y) \qquad \text{(da } -x, -y > 0\text{)}\\
&= (-\psi(x))\cdot'(-\psi(y))\\
&= \psi(x)\cdot'\psi(y)
\end{aligned}$$

(c) x>0, y<0.

$$\begin{aligned}
-\psi(x\cdot y) &= \psi(-(x\cdot y))\\
&= \psi(x\cdot(-y))\\
&= \psi(x)\cdot'\psi(-y) \text{ (da } x, -y > 0\text{)}\\
&= \psi(x)\cdot'(-\psi(y))\\
&= -(\psi(x)\cdot'\psi(y))
\end{aligned}$$

Så er $\psi(x\cdot y)=\psi(x)\cdot'\psi(y)$
(d) x<0, y>0.
Fra symmetri, grundet kommutativiteten, følger det fra (c) at $\psi(x\cdot y)=\psi(x)\cdot'\psi(y)$.
(iii) Antag at $x<y$. Så følger det fra tæthedssætningen for $\mathbb{R}$ at der eksisterer et $r_1\in\mathbb{Q}$ sådan at $x<r_1<y$. Ved at anvende tæthedssætningen for $\mathbb{R}$ på r_1 og y, findes $r_2\in\mathbb{Q}$ sådan at $x<r_1<r_2<y$. Nu haves der for $r\in\mathbb{Q}$, $r<x \Rightarrow r<r_1<r_2 \Rightarrow \varphi(r)<'\varphi(r_1)<'\varphi(r_2)$. Dermed er både $\varphi(r_1)$ og $\varphi(r_2)$ øvre grænser for A_x. Det vides at $\varphi(r_2)\neq \mathrm{Sup}A_x$, eftersom $\varphi(r_1)<'\varphi(r_2)$. Dermed er $\mathrm{Sup}A_x<'\varphi(r_2)$. Det haves også at $\varphi(r_2)\in A_y$ så $\varphi(r_2)\leq'\mathrm{Sup}A_y$. Dermed er $\mathrm{Sup}A_x<'\varphi(r_2)\leq'\mathrm{Sup}A_y$, så $\psi(x)<'\psi(y)$.
Dermed er ψ en isomorfi fra $(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ til $(\mathbb{R}',+',\cdot',>')$ så $(\mathbb{R},+,\cdot,>)\simeq(\mathbb{R}',+',\cdot',>')$.
Dermed betragtes Dedekind reelle talsystem som unikt.

■

Cantors reelle talsystem

Cantors tilgang

Definition

Lad C beskrive mængden af alle Cauchy følger i $\mathbb{Q}$. (r_n), $(s_n)\in C$ siges at være ækvivalente og noteres $(r_n)\sim(s_n)$ hvis givet et rationelt $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $|r_n-s_n|<\varepsilon\ \forall n\geq k$.
Cantor mente,at på den reelle tallinje, bør enhver Cauchy følge konvergere til en punkt. Han kunne dog ikke anvende reelle Cauchy følger, så han benyttede rationelle Cauchy følger, C. Det vides at der for alle reelle tal findes en rationel følge som konvergere mod dette punkt. Da en konvergent følge er Cauchy, vides det at Cantors tilgang vil lokalisere alle huller i den rationelle tallinje. Den ovenstående definition, siger at hvis to følger er vilkårligt tæt på hinanden, forventes de at konvergere mod det samme punkt, om det er rationelt eller et hul. Følgende sætning viser at der er tale om en ækvivalensrelation

Sætning

Relationen $\sim$ er en ækvivalensrelation på C.

Bevis

Tag et tilfældigt $(r_n)\in C$. Givet et $\varepsilon>0$, tages $1\in\mathbb{N}$. Så er
$|r_n-r_n|=0<\varepsilon\ \forall\ n\geq 1$
Dermed er $(r_n)\sim(r_n)$. Dermed er $\sim$ refleksiv.
Tag et tilfældigt (r_n), $(s_n)\in C$ sådan at $(r_n)\sim(s_n)$. Givet et $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $|r_n-s_n|<\varepsilon\ \forall\ n\geq k$ så $|s_n-r_n|=|r_n-s_n|<\varepsilon\ \forall\ n\geq k$.
Dermed er $(s_n)\sim(r_n)$. Dermed er $\sim$ symmerisk.
Tag et tilfældigt (r_n), (s_n), $(t_n)\in C$ sådan at $(r_n)\sim(s_n)$ og $(s_n)\sim(t_n)$. Givet et $\varepsilon>0$, eksisterer der et k_1, $k_2\in\mathbb{N}$ sådan at
$|r_n-s_n|<\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k_1$
$|s_n-t_n|<\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k_2$.
Sæt $k=\text{Max}(k_1, k_2)$. Så er
$|r_n-s_n|<\varepsilon/2$, $|s_n-t_n|<\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k$. Men

$$
\begin{aligned}
|r_n-t_n| &= |(r_n-s_n)+(s_n-t_n)| \\
&\leq |r_n-s_n|+|s_n-t_n| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 && \forall\ n\geq k \\
&= \varepsilon && \forall\ n\geq k
\end{aligned}
$$

Dermed er $(r_n)\sim(t_n)$. Dermed er $\sim$ transitiv.
Dermed er $\sim$ en ækvivalensrelation på C

■

Herfra vil $C/\sim$ blive noteret med $\mathbb{R}$, og et element $x\in\mathbb{R}$ vil blive kaldt et x-konvergenspunkt.
Den næste sætning giver bevis for at hver ækvivalensklasse repræsentere det samme punkt for konvergens, i hvert fald for rationelle punkter.

Sætning - Rationelle konvergenspunkter

Lad $(r_n)\in C$ være sådan at $(r_n)\to r\in\mathbb{Q}$. Så er $(r_n)\sim(s_n)$ hvis og kun hvis $(s_n)\to r$. $[(r_n)]$ kaldes et rationelt konvergenspunkt. I dette tilfælde noteres $[(r_n)]$ blot som $[r]$.

Bevis

Antag at $(r_n)\sim(s_n)$. Lad $\varepsilon>0$ være givet. Så eksisterer der et $k_1\in\mathbb{N}$ sådan at
$|r_n-s_n|<\varepsilon/2 \ \forall \ n\geq k_1$.
Eftersom $(r_n)\to r$, eksisterer der et $k_2\in\mathbb{N}$ sådan at
$|r_n-r|<\varepsilon/2 \ \forall \ n\geq k_2$.
Sæt $k=\text{Max}(k_1, k_2)$ og så haves det at
$|r_n-s_n|<\varepsilon/2$, $|r_n-r|<\varepsilon/2 \ \forall \ n\geq k$. Dermed haves det at

$$
\begin{aligned}
|s_n-r| &= |(s_n-r_n)+(r_n-r)| \\
&\leq |s_n-r_n|+|r_n-r| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 && \forall \ n\geq k \\
&= \varepsilon && \forall \ n\geq k.
\end{aligned}
$$

Dermed $(s_n)\to r$.
Antag nu at $(s_n)\to r$. Bemærk at dette betyder at $(s_n)\in C$. Givet et $\varepsilon>0$ eksisterer der et $k_1\in\mathbb{N}$ sådan at
$|s_n-r|<\varepsilon/2 \quad \forall \ n\geq k_1$.
Eftersom $(r_n)\to r$, eksisterer der et $k_2\in\mathbb{N}$ sådan at
$|r_n-r|<\varepsilon/2 \quad \forall \ n\geq k_2$
Sæt $k=\text{Max}(k_1, k_2)$ og det haves at
$|r_n-r|<\varepsilon/2$, $|s_n-r|<\varepsilon/2 \ \forall \ n\geq k$. Dermed haves det at

$$
\begin{aligned}
|r_n-s_n| &= |(r_n-r)+(r-s_n)| \\
&\leq |r_n-r|+|r-s_n| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 && \forall \ n\geq k \\
&= \varepsilon && \forall \ n\geq k.
\end{aligned}
$$

Dermed er $(r_n)\sim(s_n)$.

■

For ethvert $r\in\mathbb{Q}$, haves en konstant følge $r_n=r \ \forall \ n\in\mathbb{N}$ som hører til ækvivalensklassen $[r]$. Denne konstante følge noteres som (r). Mængden af alle rationelle konvergenspunkter noteres som $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, eftersom denne mængde vil repræsentere en kopi af det rationelle talsystem i det reelle talsystem.

Binære operatore på $\mathbb{R}$

Nu defineres de binære operatore på det nye system, med henblik på at vise at det er et legeme.

Sætning - Addition på $\mathbb{R}$

Der eksisterer en veldefineret binær operator $\oplus$ på $\mathbb{R}$ givet ved $[(r_n)]\oplus[(s_n)]=[(r_n+s_n)]\ \forall\ [(r_n)], [(s_n)]\in\mathbb{R}$.

Bevis

Bemærk først at $(r_n), (s_n)\in C \Rightarrow (r_n+s_n)\in C$. Dermed er $[(r_n+s_n)]\in\mathbb{R}$.
Lad $[(r_n)]=[(r_n')]$ og $[(s_n)]=[(s_n')]$. Så er $(r_n)\sim(r_n')$ og $(s_n)\sim(s_n')$. Givet er $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k_1, k_2\in\mathbb{N}$ sådan at
$|r_n-r_n'|<\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k_1$
$|s_n-s_n'|<\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k_2$.
Sæt $k=\text{Max}(k_1, k_2)$, og så haves det at
$|r_n-r_n'|<\varepsilon/2$, $|s_n-s_n'|<\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k$. Dermed haves det at

$$\begin{aligned}|(r_n+s_n)-(r_n'+s_n')| &=|(r_n-r_n')+(s_n-s_n')|\\ &\leq|r_n-r_n'|+|s_n-s_n'|\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2 && \forall\ n\geq k\\ &=\varepsilon && \forall\ n\geq k\end{aligned}$$

Så er $(r_n+s_n)\sim(r_n'+s_n')$.
Dermed er $[(r_n)]\oplus[(s_n)]=[(r_n')]\oplus[(s_n')]$. Dermed er $\oplus$ veldefineret

■

Sætning - Egenskaber ved addition på $\mathbb{R}$

For ethvert $[(r_n)], [(s_n)], [(t_n)]\in\mathbb{R}$, gælder der at:

$A_{\mathbb{R}}$(i): $[(r_n)]\oplus[(s_n)]=[(s_n)]\oplus[(r_n)]$

$$\begin{aligned}[(r_n)]\oplus[(s_n)] &=[(r_n+s_n)]\\ &=[(s_n+r_n)]\\ &=[(s_n)]\oplus[(r_n)]\end{aligned}$$

$A_{\mathbb{R}}$(ii): $([(r_n)]\oplus[(s_n)])\oplus[(t_n)]=[(r_n)]\oplus([(s_n)]\oplus[(t_n)])$

$$\begin{aligned}([(r_n)]\oplus[(s_n)])\oplus[(t_n)] &=[(r_n+s_n)]\oplus[(t_n)]\\ &=[((r_n+s_n)+t_n)]\\ &=[(r_n+(s_n+t_n))]\\ &=[(r_n)]\oplus[(s_n+t_n)]\\ &=[(r_n)]\oplus([(s_n)]\oplus[(t_n)])\end{aligned}$$

$A_{\mathbb{R}}$(iii): $\oplus$-identitetselementet er givet ved [0].

$$\begin{aligned}[(r_n)]\oplus[0] &=[(r_n)]\oplus[(0)]\\ &=[(r_n+0)]\\ &=[(r_n)]\end{aligned}$$

Dette sammenholdt med $A_{\mathbb{R}}$(i), giver at $[(r_n)]\oplus[0]=[(r_n)]=[0]\oplus[(r_n)]$

$A_{\mathbb{R}}$(iv): For ethvert $[(r_n)]$, eksisterer dets ⊕-inverselement og er givet ved $[(-r_n)]$

$$
\begin{aligned}
[(r_n)]\oplus[(-r_n)] &= [(r_n+(-r_n))] \\
&= [(0)] \\
&= [0]
\end{aligned}
$$

Dette sammenholdt med $A_{\mathbb{R}}$(i), giver at $[(r_n)]\oplus[(-r_n)]=[0]=[(-r_n)]\oplus[(r_n)]$

■

Dette gør $(\mathbb{R},\oplus)$ til en kommutativ gruppe.

Sætning - Multiplikation på $\mathbb{R}$

Der eksisterer en veldefineret binær operator ⊙ på $\mathbb{R}$, som er givet ved $[(r_n)]\odot[(s_n)]=[(r_ns_n)]\ \forall\ [(r_n)], [(s_n)]\in\mathbb{R}$.

Bevis

Bemærk først at $(r_n), (s_n)\in C \Rightarrow (r_ns_n)\in C$. Dermed er $[(r_ns_n)]\in\mathbb{R}$.
Lad $[(r_n)]=[(r_n')]$ og $[(s_n)]=[(s_n')]$. Så er $(r_n)\sim(r_n')$ og $(s_n)\sim(s_n')$. Bemærk at eftersom (r_n) og (s_n') er Cauchy er de begrænset af henholdsvis R og S′. Givet et $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k_1, k_2\in\mathbb{N}$ sådan at

$|r_n-r_n'|<\varepsilon/(2S')\quad \forall\ n\geq k_1$

$|s_n-s_n'|<\varepsilon/(2R)\ \forall\ n\geq k_2$

Sæt $k=\mathrm{Max}(k_1, k_2)$, og så haves det at
$|r_n-r_n'|<\varepsilon/(2S')$, $|s_n-s_n'|<\varepsilon/(2R)\ \forall\ n\geq k$. Dermed haves det at

$$
\begin{aligned}
|r_ns_n-r_n's_n'| &= |(r_ns_n-r_ns_n')+(r_ns_n'-r_n's_n')| \\
&\leq |r_ns_n-r_ns_n'|+|r_ns_n'-r_n's_n'| \\
&= |r_n||s_n-s_n'|+|s_n'||r_n-r_n'| \\
&\leq R|s_n-s_n'|+S'|r_n-r_n'| \\
&< R(\varepsilon/(2R))+S'(\varepsilon/(2S')) && \forall\ n\geq k \\
&= \varepsilon && \forall\ n\geq k
\end{aligned}
$$

Dermed er $(r_ns_n)\sim(r_n's_n')$. Dermed er $[(r_n)]\odot[(s_n)]=[(r_n')]\odot[(s_n')]$. Dermed er ⊙ veldefineret

■

Sætning - Egenskaber ved muliplikation på $\mathbb{R}$

$M_{\mathbb{R}}$(i) $[(r_n)]\odot[(s_n)]=[(s_n)]\odot[(r_n)]$

$$
\begin{aligned}
[(r_n)]\odot[(s_n)] &= [(r_ns_n)] \\
&= [(s_nr_n)] \\
&= [(s_n)]\odot[(r_n)]
\end{aligned}
$$

$M_{\mathbb{R}}$(ii) $([(r_n)]\odot[(s_n)])\odot[(t_n)]=[(r_n)]\odot([(s_n)]\odot[(t_n)])$

$$
\begin{aligned}
([(r_n)]\odot[(s_n)])\odot[(t_n)] &= [(r_ns_n)]\odot[(t_n)] \\
&= [((r_ns_n)t_n)] \\
&= [(r_n(s_nt_n))] \\
&= [(r_n)]\odot[(s_nt_n)]
\end{aligned}
$$

$=[(r_n)]\odot([(s_n)]\odot[(t_n)])$

$M_{\mathbb{R}}$(iii) Identitetselementet eksisterer og er givet ved [1].

$$
\begin{aligned}
[(r_n)]\odot[1] &= [(r_n)]\odot[(1)] \\
&= [(r_n 1)] \\
&= [(r_n)]
\end{aligned}
$$

Denne sammenholdt med $M_{\mathbb{R}}$(i), giver at $[(r_n)]\odot[1]=[(r_n)]=[1]\odot[(r_n)]$

$M_{\mathbb{R}}$(iv) Hvis $[(r_n)]\neq[0]$, så eksisterer $\odot$-inverselementet.

Eftersom $[(r_n)]\neq[0]$, kan det ikke haves at $(r_n)\to 0$. Dermed eksisterer der en k-hale af (r_n), som (r_{n+k-1}), sådan at $(1/r_{n+k-1})$ er veldefineret (altså at $r_{n+k-1}\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$) og Cauchy. Definer følgen (s_n) ved

$$
s_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n<k \\ 1/r_n & \text{hvis } n\geq k \end{cases}
$$

Definer også følgen (t_n) ved

$$
t_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n<k \\ 1 & \text{hvis } n\geq k \end{cases}
$$

Da $(t_n)\to 1$, haves det at $(t_n)\sim(1)$. Eftersom k-halen af (s_n) er følgen $(1/r_{n+k-1})$ som er Cauchy, haves det også at (s_n) er Cauchy og dermed er $[(s_n)]\in\mathbb{R}$. Nu haves det at,

$$
\begin{aligned}
[(r_n)]\odot[(s_n)] &= [(r_n s_n)] \\
&= [(t_n)] \\
&= [1]
\end{aligned}
$$

Dette sammenholdt med $M_{\mathbb{R}}$(i), giver at $[(r_n)]\odot[(s_n)]=[1]=[(s_n)]\odot[(r_n)]$.

$M_{\mathbb{R}}$(v) $[(r_n)]\odot([(s_n)]\oplus[(t_n)])=([(r_n)]\odot[(s_n)])\oplus([(r_n)]\odot[(t_n)])$

$$
\begin{aligned}
[(r_n)]\odot([(s_n)]\oplus[(t_n)]) &= [(r_n)]\odot[(s_n+t_n)] \\
&= [(r_n(s_n+t_n))] \\
&= [(r_n s_n + r_n t_n)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
([(r_n)]\odot[(s_n)])\oplus([(r_n)]\odot[(t_n)]) &= [(r_n s_n)]\oplus[(r_n t_n)] \\
&= [(r_n s_n + r_n t_n)] \\
&= [(r_n)]\odot([(s_n)]\oplus[(t_n)])
\end{aligned}
$$

■

Dette gør at $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ er et legeme. Derfor gås der videre med at definere en passende orden på systemet, så dette bliver fuldstændigt.

Orden på $\mathbb{R}$

Før definitionen på positive elementer, bringes først hvad en positiv følge er.

Definition

For ethvert $(r_n)\in C$, siges (r_n) at være en positiv følge, hvis der eksisterer et rationelt $r>0$ og et $k\in\mathbb{N}$ så $r_n>r\ \forall\ n\geq k$

Grunden til at definitionen ser sådan ud, skyldes at hvis der var skrevet $r_n>0\ \forall\ n\geq k$, ville følgen konvergere mod nul, dette er forhindret med denne definition, som altså kun giver de følger som konvergere mod et positivt tal. Derfor ønskes det at $P_{\mathbb{R}}$ defineres som følger.

Definition

Delmængden $P_{\mathbb{R}}$ af $\mathbb{R}$ er givet ved $P_{\mathbb{R}}=\{[(r_n)]\in\mathbb{R} \mid (r_n)$ er en positiv følge$\}$

Sætning

Mængden $P_{\mathbb{R}}$ er veldefineret.

Bevis

Lad $[(r_n)]\in P_{\mathbb{R}}$. Det skal vises at hvis $(s_n)\sim(r_n)$, så er $[(s_n)]\in P_{\mathbb{R}}$. Eftersom (r_n) er en positiv følge, eksisterer der et rationalt $r>0$ og et $k_1\in\mathbb{N}$ sådan at $r_n>r\ \forall\ n\geq k_1$. Samt da $(s_n)\sim(r_n)$, for $\varepsilon=r/2>0$, eksisterer der et $k_2\in\mathbb{N}$ sådan at $|r_n-s_n|<r/2\ \forall\ n\geq k_2$. Sæt $k=\mathrm{Max}(k_1,k_2)$. Så der $\forall\ n\geq k$, haves at

	$\lvert r_n-s_n\rvert<r/2$,		$r_n>r$
$\Rightarrow$	$r_n-s_n<r/2$,		$r_n>r$
$\Rightarrow$	$r-r/2<r_n-r/2<s_n$	$\Rightarrow$	$0<r/2<s_n$

Dermed er (s_n) også en positiv følge og $(s_n)\in P_{\mathbb{R}}$. Dermed er $P_{\mathbb{R}}$ en veldefineret mængde.

■

Sætning

For ethvert $[(r_n)]\in\mathbb{R}$, er en og kun af følgende sandt: $[(r_n)]=[0]$, $[(r_n)]\in P_{\mathbb{R}}$, $-[(r_n)]\in P_{\mathbb{R}}$.
Endvidere er $P_{\mathbb{R}}$ lukket under $\oplus$ og $\odot$.

Bevis

Tag et tilfældigt $[(r_n)]\in\mathbb{R}$.
Først vises det at mindst et af udsagnene må være sandt. Hvis $[(r_n)]\neq[0]$, så kan det ikke haves at $(r_n)\to 0$. Dermed eksisterer der et rationalt $r>0$ og et $k_1\in\mathbb{N}$ sådan at $|r_n|\geq r$, $\forall\ n\geq k_1$. For $\varepsilon=r/2>0$, eksisterer der et $k_2\in\mathbb{N}$ sådan at $|r_n-r_m|<r/2\ \forall\ n, m\geq k_2$. Sæt $k=\mathrm{Max}(k_1, k_2)$. Så haves det at
$|r_n|\geq r$ $\quad\quad$ $|r_n-r_m|<r/2\ \forall\ n, m\geq k$.
Dermed haves der for alle $n\geq k$, at
$-(r/2)<r_n-r_k<r/2$
$r_k-r/2<r_n<r_k+r/2$
Eftersom $|r_k|\geq r$, er der to udfald der skal undersøges:
(a) $r_k\geq r$
Så er $r/2=r-r/2\leq r_k-r/2<r_n$
Dette betyder at $r_n>r/2\ \forall\ n\geq k$ og så er (r_n) en positiv følge så $[(r_n)]\in P_{\mathbb{R}}$.

(b) $r_k \leq -r$

Så er $r_n < r_k + r/2 \leq -r + r/2 = -(r/2)$

Dette betyder at $-r_n > r/2$ $\forall$ $n \geq k$ og så er $(-r_n)$ en positiv følge. Dermed er, $-[(r_n)] = [(-r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$.

Dermed er mindst et af udfaldene sande.

Hvis $[(r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$, så eksisterer der et $r>0$, $k \in \mathbb{N}$ sådan at $r_n > r$ $\forall$ $n \geq k$ så er $-r_n < -r < 0$ $\forall$ $n \geq k$ og dermed er det umuligt at $-[(r_n)] = [(-r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$. Fra symmetri, haves det at $[(r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$ og $-[(r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$ aldrig kan være sande sammen. Hvis $[(r_n)] = [0]$, så er $(r_n) \rightarrow 0$. Derfor haves det for et givet rationalt $r>0$, at der eksisterer et $k \in \mathbb{N}$ sådan at $|r_n| < r$ $\forall$ $n \geq k$ så $r_n \leq |r_n| < r$ $\forall$ $n \geq k$ og dermed er det umuligt at $[(r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$. Dermed kan $[(r_n)] = [0]$ og $[(r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$ aldrig være sande sammen. Eftersom $[(r_n)] = [0] \Leftrightarrow -[(r_n)] = [0]$, kan det heller ikke ske at $[(r_n)] = [0]$ og $-[(r_n)] \in P_{\mathbb{R}}$ er sande sammen.

Dermed haves det at en og kun en af udfaldene er sande.

Tag et tilfældigt $[(r_n)]$, $[(s_n)] \in P_{\mathbb{R}}$. Så eksisterer der er rationalt r, $s > 0$ sådan at der eksisterer et k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$ så

$r_n > r > 0$ $\forall$ $n \geq k_1$,

$s_n > s > 0$ $\forall$ $n \geq k_2$.

Sæt $k = \mathrm{Max}(k_1, k_2)$ og det haves at $r_n > r > 0$, $s_n > s > 0$ $\forall$ $n \geq k$ så

$r_n + s_n > r + s > 0$, $r_n s_n > rs > 0$ $\forall$ $n \geq k$

Dermed er, $(r_n + s_n)$, $(r_n s_n)$ er begge positive følger. Så er $[(r_n)] \oplus [(s_n)] = [(r_n + s_n)] \in P_{\mathbb{R}}$. $[(r_n)] \odot [(s_n)] = [(r_n s_n)] \in P_{\mathbb{R}}$. Dermed er $P_{\mathbb{R}}$ lukket under $\oplus$ og $\odot$.

■

Definition

$[(r_n)]$ siges at være større end $[(s_n)]$ og noteres $[(r_n)] \succ [(s_n)]$ hvis $[(r_n)] \oplus (-[(s_n)]) \in P_{\mathbb{R}}$. Det noteres $[(r_n)] \succcurlyeq [(s_n)]$ hvis $[(r_n)] \succ [(s_n)]$ eller $[(r_n)] = [(s_n)]$.

Dermed er, $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \succ)$ et ordnet legeme.

Sætning

$[(r_n)] \succ [(s_n)]$ hvis og kun hvis $(r_n - s_n)$ er en positiv følge.

Bevis

Det haves at

$$\begin{aligned}[(r_n)] \succ [(s_n)] &\Leftrightarrow [(r_n)] \oplus (-[(s_n)]) \in P_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow [(r_n - s_n)] \in P_{\mathbb{R}}. \\ &\Leftrightarrow (r_n - s_n) \text{ er en positiv følge}\end{aligned}$$

■

Cantors reelle talsystem

I dette afsnit vil det vises at vores konstruerede system er et Cantors reelle talsystem, samt at dette system opfylder de samme egenskaber som Dedekinds reelle talsystem, og dermed, grundet unikhed af Dedekinds system, er det samme system.

Sætning

$(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)$ er et dellegeme af $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$. Endvidere er $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$.

Bevis

Tag et tilfældigt $[r], [s]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Så er

$$
\begin{aligned}
[r]\oplus(-[s]) &= [(r)]\oplus(-[(s)]) \\
&= [(r)]\oplus[(-s)] \\
&= [(r-s)] \\
&= [r-s] && (\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}) \\
[r]\odot([s])^{-1} &= [(r)]\odot([(s)])^{-1} \\
&= [(r)]\odot[(1/s)] && \forall\ [s]\neq[0] \\
&= [(r/s)] \\
&= [r/s] && (\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})
\end{aligned}
$$

Da $[1]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, er $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},\oplus,\odot,\succ)$ et dellegeme af $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$. Betragt funktionen $\varphi:\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}$ givet ved $\varphi([r])=r\ \forall\ [r]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. $[r_1]=[r_2] \Rightarrow \lim(r_1)=\lim(r_2) \Rightarrow r_1=r_2$. Dermed er φ veldefineret.
Lad $r_1=r_2$. Så er $\lim(r_1)=\lim(r_2)$ og så er $(r_1)\sim(r_2)$, så $[r_1]=[r_2]$. Dermed er φ injektiv.
For ethvert $r\in\mathbb{Q}$, tages $[r]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ og så haves det at $\varphi([r])=r$. Dermed er φ surjektiv.
Altså er φ bijektiv.
For ethvert $[r], [s]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$,

$$
\begin{aligned}
\varphi([r]\oplus[s]) &= \varphi([(r)]\oplus[(s)]) \\
&= \varphi([(r+s)]) \\
&= \varphi([r+s]) \\
&= r+s \\
&= \varphi([r])+\varphi([s]) \\
\varphi([r]\odot[s]) &= \varphi([(r)]\odot[(s)]) \\
&= \varphi([(r\cdot s)]) \\
&= \varphi([r\cdot s]) \\
&= r\cdot s \\
&= \varphi([r])\cdot\varphi([s]) \\
[r]\succ[s] &\Rightarrow [(r)]\succ[(s)] \\
&\Rightarrow (r-s) \text{ er en positiv følge} \\
&\Rightarrow r_n-s_n>t && \forall\ n\geq k \text{ for nogle } t\in\mathbb{Q},\ t>0,\ k\in\mathbb{N} \\
&\Rightarrow r-s>t && \text{eftersom } r_n=r,\ s_n=s\ \forall\ n\in\mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow r>t+s$,

$\Rightarrow r>s$ eftersom $t>0$

Dermed er φ en isomorfi fra $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ til $\mathbb{Q}$ og så er $(\mathbb{R}_\mathbb{Q},\oplus,\odot,\succ)\simeq(\mathbb{Q},+,\cdot,>)$.

■

Den næste sætning er en svækkelse af tæthedssætningen fra forrige kapitel, men det er tilstrækelig for resten af resultaterne som bevises i dette kapitel.

Sætning - Tæthedssætningen for rationelle tal

Lad $[(s_n)], [(t_n)]\in\mathbb{R}$ være sådan at $[(s_n)]\prec[(t_n)]$. Så eksisterer der et $[r]\in\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ sådan at $[(s_n)]\prec[r]\prec[(t_n)]$.

Bevis

Eftersom $[(s_n)]\prec[(t_m)]$, er $(t_n–s_n)$ en positiv følge, og så eksisterer der et rationelt $r'>0$ og et $k_1\in\mathbb{N}$ sådan at $t_n–s_n>r'$ $\forall$ $n\geq k_1$. Da (s_n), (t_n) er Cauchy, eksisterer der et k_2, $k_3\in\mathbb{N}$ sådan at

$|t_n–t_m|<r'/3$ $\forall$ $n, m\geq k_2$

$|s_n–s_m|<r'/3$ $\forall$ $n, m\geq k_3$.

Sæt $k=Max(k_1, k_2, k_3)$ og så haves det at, $\forall$ $n\geq k$,

$|t_n–t_k|<r'/3$

$|s_n–s_k|<r'/3$

$t_n–s_n>r'$

Så er

$t_k–r'/3<t_n<t_k+r'/3$

$s_k–r'/3<s_n<s_k+r'/3$

$t_n–s_n>r'$

Nu haves det så at

$(t_k+s_k)/2–s_n$ $=½((t_k–s_n)+(s_k–s_n))$

$>½((t_k–s_k–r'/3)– r'/3)$

$>½(r'–r'/3 – r'/3)$

$=r'/6t_n–(t_k+s_k)/2$

$=½((t_n–t_k)+(t_n–s_k))$

$>½(-r'/3+(t_k-r'/3-s_k))$

$>½(-r'/3+(-r'/3+r'))$

$=r'/6$

Lad $r=(t_k+s_k)/2$. Så er både $(r–s_n)$ og $(t_n–r)$ positive følger, altså er $[r]\succ[(s_n)]$ og $[(t_n)]\succ[r]$.

Dermed er $[(s_n)]\prec[r]\prec[(t_n)]$ for nogle $[r]\in\mathbb{R}_\mathbb{Q}$.

■

Følgende sætning er en række af forhold som gør sig gældende mellem den gamle struktur og den tilsvarende følge i det nye system.

Sætning

Lad r_n, $r \in \mathbb{Q}$. Så gælder følgende:
(i) $|[r]|=[|r|]$
(ii) $([r_n])$ er Cauchy hvis og kun hvis (r_n) er Cauchy.
(iii) $([r_n])\rightarrow[r]$ hvis og kun hvis $(r_n)\rightarrow r$
(iv) $(r_n)\in[r]$ hvis og kun hvis $([r_n])\rightarrow[r]$
(v) Lad $\alpha\in\mathbb{R}$ og $(r_n)\in\alpha$. Så er $([r_n])$ Cauchy og endvidere $([r_n])\rightarrow\alpha$.

Bevis

(i) Fra egenskaberne for en isomorfi haves det at, hvis
$[r]\succ[0] \Rightarrow r>0$, så er $|r|=r$
$[r]\prec[0] \Rightarrow r<0$, så er $|r|=-r$
$[r]=[0] \Rightarrow r=0$, så er $|r|=r$
Dermed er,

$|[r]|$	$=[r]$	$=[|r|]$		hvis $[r]\succcurlyeq[0]$
	$=-[r]$	$=[-r]$	$=[|r|]$	hvis $[r]\prec[0]$

Dermed er $|[r]|=[|r|]$.
(ii) Antag at $([r_n])$ er Cauchy. Givet et rationelt $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $\forall$ n, m $\geq$k, haves det at

$$
\begin{aligned}
& |[r_n]\oplus(-[r_m])|\prec[\varepsilon] \\
\Rightarrow\quad & |[r_n-r_m]|\prec[\varepsilon] \\
\Rightarrow\quad & [|r_n-r_m|]\prec[\varepsilon] \\
\Rightarrow\quad & |r_n-r_m|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

Dermed er (r_n) også Cauchy.
Antag nu at (r_n) er Cauchy. Givet et reelt $\varepsilon\succ[0]$, haves der fra tæthedssætningen for rationelle tal at der eksisterer et $[\varepsilon]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sådan at $[0]\prec[\varepsilon]\prec\varepsilon$. Så eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $\forall$ n, m $\geq$k, så

$$
\begin{aligned}
& |r_n-r_m|<\varepsilon \\
\Rightarrow\quad & [|r_n-r_m|]\prec[\varepsilon] \\
\Rightarrow\quad & |[r_n-r_m]|\prec[\varepsilon]\prec\varepsilon \\
\Rightarrow\quad & |[r_n]\oplus(-[r_m])|\prec\varepsilon
\end{aligned}
$$

Dermed er, $[r_n]$ også Cauchy.
(iii) Antag at$[r_n]\rightarrow[r]$. Så givet et rationelt $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $\forall$ n$\geq$k, haves det at

$$
\begin{aligned}
& |[r_n]\oplus(-[r])|\prec[\varepsilon] \\
\Rightarrow\quad & [|r_n-r|]\prec[\varepsilon] \\
\Rightarrow\quad & |r_n-r|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

Dermed $(r_n)\rightarrow r$.
Antag at $(r_n)\rightarrow r$. For et givet reelt $\varepsilon\succ[0]$, fra tæthedssætningen for rationelle tal følger det at der eksistereret $[\varepsilon]\in\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sådan at $[0]\prec[\varepsilon]\prec\varepsilon$. Så eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $\forall$ n$\geq$k, haves det at

$|r_n – r| < ε$

$⇒ \quad [|r_n – r|] \prec [ε] \prec ε$

$⇒ \quad |[r_n] \oplus (-[r])| \prec ε$

Dermed er, $([r_n]) \to [r]$.

(iv) $(r_n) \in [r] \quad \Leftrightarrow (r_n) \to r$

$\Leftrightarrow ([r_n]) \to [r]$ (fra (iii))

(v) Eftersom (r_n) er Cauchy, følger det fra (ii) at $([r_n])$ også er Cauchy.
Lad nu et reelt $ε \succ [0]$ være givet. Fra tæthedssætningen for rationelle tal følger det at der eksisterer et $[ε] \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sådan at $[0] \prec [ε] \prec ε$. Så eksisterer der et $k \in \mathbb{N}$ sådan at $\forall$ n, m ≥k, haves at

$|r_n – r_m| < ε/2$

$⇒ \quad -ε/2 < r_n – r_m < ε/2$

Dermed haves der for et fastsat n sådan at n≥k, at

$ε/2 < r_m – r_n + ε \ \forall\ m \geq k$

Så er $(r_m – r_n + ε)$ en positiv følge og så er $[(r_m + ε)] \succ [r_n]$, så $α \oplus [ε] \succ [r_n]$. Samt det haves at

$r_n – r_m + ε > ε/2 \ \forall\ m \geq k$,

så $(r_n – r_m + ε)$ er en positiv følge og så er $[(r_n + ε)] \succ [r_m]$, så $[r_n] \oplus [ε] \succ α$.

Dermed haves det at, $\forall$ n ≥ k, er

$[r_n] \oplus (-α) \prec [ε] \qquad -[ε] \prec [r_n] \oplus (-α)$

så $|[r_n] \oplus (-α)| \prec [ε] \prec ε$

Dermed $([r_n]) \to α$.

■

Den næste sætning giver at Cantor’s tilgang ender ud med at $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \succ)$ er et fuldstændigt Cauchy ordnet legeme, som det Cantor ønskede at vise.

Sætning

$(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \succ)$ er fuldstændigt Cauchy.

Bevis

Lad $(α_n)$ være en tilfældig Cauchy følge i $\mathbb{R}$. Nu følger det fra Tæthedssætningen for rationelle tal at for ethvert $n \in \mathbb{N}$, eksisterer der en $[r_n] \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sådan at $α_n \oplus (-[1/n]) \prec [r_n] \prec α_n \oplus [1/n]$, så $|[r_n] \oplus (-α_n)| \prec [1/n]$. Lad et reelt $ε \succ [0]$ være givet. Eftersom $(α_n)$ er Cauchy, eksisterer der et $k_1 \in \mathbb{N}$ sådan at $|α_n \oplus (-α_m)| \prec ε/3\ \forall\ n \geq k$. Fra Tæthedssætningen for rationelle tal følger det at der eksisterer et $[ε] \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sådan at $[0] \prec [ε] \prec ε/3$. Fra Arkimedes aksiom for rationelle tal følger det at der eksisterer et $k_2 \in \mathbb{N}$ sådan at $1/k_2 < ε$, dermed er $1/n < ε\ \forall\ n \geq k_2$. Fra egenskaberne ved en isomorfi følger det at $[1/n] \prec [ε] \prec ε/3\ \forall\ n \geq k_2$.

Sæt $k = \mathrm{Max}(k_1, k_2)$. Så er

$|[r_n] \oplus (-[r_m])| = |([r_n] \oplus (-α_n)) \oplus (α_n \oplus (-α_m)) \oplus (α_m \oplus (-[r_m]))|$

$\preccurlyeq |[r_n] \oplus (-α_n)| \oplus |α_n \oplus (-α_m)| \oplus |α_m \oplus (-[r_m])|$

$\prec[1/n]\oplus|\alpha_n\oplus(-\alpha_m)|\oplus[1/m]$
$\prec\varepsilon/3\oplus\varepsilon/3\oplus\varepsilon/3 \quad \forall$ n, m ≥k
$=\varepsilon \quad \forall$ n, m ≥k

Det betyder at ($[r_n]$) også er en Cauchy følge. Dermed er (r_n) også en Cauchy følge i $\mathbb{Q}$. Dermed vil $\alpha=[(r_n)]$ være i $\mathbb{R}$. Dermed haves det at $([r_n])\rightarrow\alpha$.
Lad nu et reelt $\varepsilon\succ[0]$ være givet. Så eksisterer der et $k_1\in\mathbb{N}$ sådan at $|[r_n]\oplus(-\alpha)|\prec\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k_1$. Tilsvarende til ovenfor, følger det fra Tæthedssætningen for rationelle tal og Arkimedes Aksiom for rationelle tal at der eksisterer et $k_2\in\mathbb{N}$ sådan at $[1/n]\prec\varepsilon/2\ \forall\ n\geq k_2$.
Sæt $k=\mathrm{Max}(k_1, k_2)$, dermed haves det at

$|\alpha_n\oplus(-\alpha)| \quad =|(\alpha_n\oplus(-[r_n]))\oplus([r_n]\oplus(-\alpha))|$
$\preccurlyeq|\alpha_n\oplus(-[r_n])|\oplus|[r_n]\oplus(-\alpha)|$
$\prec[1/n]\oplus|[r_n]\oplus(-\alpha)|$
$\prec\varepsilon/2\oplus\varepsilon/2 \quad \forall\ n\geq k$
$=\varepsilon \quad \forall\ n\geq k$

Dermed $(\alpha_n)\rightarrow\alpha$.
Dermed er $(\mathbb{R},\oplus,\odot,\succ)$ fuldstændigt Cauchy.

■

For det nye system gælder Arkimedes Aksiom også, som vises nedenfor. Først defineres dog hvad $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ betyder.

Definition

$\mathbb{R}_\mathbb{N}$ defineres ved at være $\mathbb{R}_\mathbb{N}=\{[n]\in\mathbb{R}_\mathbb{Q}\ |\ n\in\mathbb{N}\}$.

Sætning - Arkimedes Aksiom for reelle tal

For ethvert $[(r_n)]$, $[(s_n)]\in\mathbb{R}$ hvor $[(r_n)]\succ[0]$, eksisterer der et $[n]\in\mathbb{R}_\mathbb{N}$ sådan at $[n]\odot[(r_n)]\succ[(s_n)]$.

Bevis

Hvis $[(r_n)]\succ[(s_n)]$, så eftersom $[1]\in\mathbb{R}_\mathbb{N}$, er der ikke noget at bevise.
Dermed antages det at $[(s_n)]\succcurlyeq[(r_n)]\succ[0]$. Fra Tæthedssætningen for rationelle tal, eksisterer der et $[r]$, $[s]\in\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ sådan at
$[(s_n)]\oplus[1]\succ[s]\succ[(s_n)]\succcurlyeq[(r_n)]\succ[r]\succ[0]$.
Grundet isomorfien mellem $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Q}$, vides det fra Arkimedes Aksiom for $\mathbb{Q}$ at der eksisterer et $[n]\in\mathbb{R}_\mathbb{N}$ sådan at
$[n]\odot[r]\succ[s]$.
Så haves det at
$[n]\odot[(r_n)]\succ[n]\odot[r]\succ[s]\succ[(s_n)]$
Så
$[n]\odot[(r_n)]\succ[(s_n)]$.
Dermed gælder Arkimedes Aksiom.

■

Dermed kan der gives en definition for Cantors reelle talsystem.

Definition

Et ordnet legeme ($\mathbb{R}_C$,$\oplus$,$\odot$,$\succ$), siges at være et Cantors reelle talsystem hvis
(i) Der eksisterer et dellegeme ($\mathbb{Q}_C$,$\oplus$,$\odot$,$\succ$) der er en isomorfi til ($\mathbb{Q}$,+,·,>).
(ii) ($\mathbb{R}_C$,$\oplus$,$\odot$,$\succ$) er fuldstændigt Cauchy.
(iii) For ($\mathbb{R}_C$,$\oplus$,$\odot$,$\succ$) gælder Arkimedes Aksiom.

Det konstruerede talsystem er dermed et Cantors reelle talsystem, og dermed eksisterer disse. Herfra og fremadrettet vil Cantors reelle talsystem blive noteret ved ($\mathbb{R}$,+,·,>). De forskellige delmængder som beskriver de naturlige tal, heltal og rationelle tal vil blive noteret med henholdsvis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$. I forrige kapitel blev det vist at Dedekinds reelle talsystemer også er fuldstændigt Cauchy samt at Arkimedes Aksiom gælder, dermed er Dedekinds reelle talsystem også et Cantors reelle talsystem. Følgende sætning viser at det modsatte også er tilfældet.

Sætning

($\mathbb{R}$,+,·,>) er fuldstændigt ordnet.

Bevis

Tag en tilfældigt ikke-tom delmængde A af $\mathbb{R}$, som er begrænset opad af et u_0.
Lad $U=\{u\in\mathbb{R} \mid u \text{ er en øvre grænse for } A\}$. Eftersom $A\neq\emptyset$, eksisterer der et $a_0\in A$.
Fra Arkimedes Aksiom eksisterer der et $m\in\mathbb{N}$ sådan at $m>-a_0$, så $a_0>-m$, derfor er $-m\notin U$. Definer to følger (x_n), (y_n) som:
$x_1=-m$ ($\notin U$)
$y_1=u_0$ ($\in U$)
Antag at $x_n\notin U$ og $y_n\in U$. Definer

x_{n+1}	$=½(x_n+y_n)$	Hvis $½(x_n+y_n)\notin U$
	$=x_n$	Ellers
y_{n+1}	$=½(x_n+y_n)$	Hvis $½(x_n+y_n)\in U$
	$=y_n$	Ellers

Fra definitionerne bemærkes det at $x_n\notin U$, $y_n\in U$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.
Dermed følger der for alle n, at der eksisterer et $a_n\in A$ sådan at $x_n<a_n\leq y_n$, så $x_n<y_n$.
Lad $N=y_1–x_1>0$. Dermed kan det observeres at:
Hvis $½(x_n+y_n)\in U$, så er $y_{n+1}–x_{n+1}=½(x_n+y_n)–x_n=½(y_n–x_n)$
Hvis $½(x_n+y_n)\notin U$, så er $y_{n+1}–x_{n+1}=y_n–½(x_n+y_n)=½(y_n–x_n)$
Dermed er $y_{n+1}–x_{n+1}=½(x_n+y_n)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.
Dermed er $y_n–x_n$ $=½(x_{n-1}+y_{n-1})$
$=½(½(x_{n-2}+y_{n-2}))$
$=N/2^{n-1}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

For ethvert $n\in\mathbb{N}$, er $y_n=y_{n+1}$ eller

$$\begin{aligned} y_n-y_{n+1} &= y_n-\tfrac{1}{2}(x_n+y_n) \\ &= \tfrac{1}{2}(y_n-x_n) \\ &= N/2^n \\ &> 0 \end{aligned}$$

så $y_{n+1}\leq y_n$, og så er (y_n) faldende.

For ethvert $n\in\mathbb{N}$, er $x_n=x_{n+1}$ eller

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \tfrac{1}{2}(x_n+y_n)-x_n \\ &= \tfrac{1}{2}(y_n-x_n) \\ &= N/2^n \\ &> 0 \end{aligned}$$

så $x_{n+1}\geq x_n$, og så er (x_n) stigende.

Hvis $m, n\in\mathbb{N}$ hvor $m<n$, så haves det at

$$\begin{aligned} 0<y_m-y_n &< y_m-x_n && \text{(Da } y_n>x_n\text{)} \\ &< y_m-x_m && \text{(Da } x_n>x_m\text{)} \\ &= N/2^{m-1} \end{aligned}$$

så $|y_m-y_n|<N/2^{m-1}$.

Lad $\varepsilon>0$ være givet. Fra Arkimedes Aksiom, eksisterer der et $k'\in\mathbb{N}$ sådan at $N<k'\varepsilon$.

Fra den eksponentielle version af Arkimedes Aksiom for $\mathbb{N}$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $2^k>k'$

Dermed haves det for $\forall\ n\geq k$, at $2^n\geq 2^k>k'$, så $\varepsilon 2^n\geq\varepsilon 2^k>\varepsilon k'>N$, så $N/2^n<\varepsilon$.

Dermed

$$\begin{aligned} |y_m-y_n| &< N/2^{m-1} && \text{(Fra symmetri kan det antages at } n\geq m\text{)} \\ &< \varepsilon && \forall\ n, m\geq k+1 \end{aligned}$$

Dermed er det vist at (y_n) er Cauchy. Fra Cauchy fuldstændighed, haves det at (y_n) konvergerer mod et $y\in\mathbb{R}$.

Antag at $y\notin U$. Så eksisterer der et $a\in A$ sådan at $a>y$. Fra Tæthedssætningen eksisterer der et $z\in\mathbb{R}$ sådan at $a-y>z>0$. Eftersom det haves at $y_n\geq a$, haves det også at $y_n-y\geq a-y>z>0$. Men da $(y_n)\to y$, så haves det at for $\varepsilon=z/2$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at

$|y_n-y|<z/2\ \forall\ n\geq k$.

Dermed fås en modstrid da, man får at, $y_k-y\leq|y_n-y|<z/2<z<y_k-y$

Dermed er $y\in U$.

Antag nu at der eksisterer et $u\in U$ sådan at $u<y$. Som før følger det fra Arkimedes Aksiom og den eksponentielle version for $\mathbb{N}$, at givet et $\varepsilon>0$, eksisterer der et $k\in\mathbb{N}$ sådan at $N/2^n<\varepsilon\ \forall\ n\geq k$, så

$$\begin{aligned} |(y_n-x_n)-0| &= y_n-x_n && \text{(da } y_n-x_n>0\text{)} \\ &= N/2^{n-1} \\ &< \varepsilon && \forall\ n\geq k+1 \end{aligned}$$

Så $(y_n-x_n)\to 0$.

Hvis der eksisterer et y_k sådan at $y_k<y$, så haves det at $y_n \leq y_k < y \ \forall \ n \geq k$ da (y_n) er faldende. Men $(y_n) \to y$ så for $\varepsilon = y - y_k > 0$, eksisterer der et $N \in \mathbb{N}$ sådan at $|y_n - y| < y - y_k \ \forall \ n \geq N$.

Sæt $N' = \mathrm{Max}(k, N)$, så haves det at

$$|y_{N'} - y| = -(y_{N'} - y) \text{ og } |y_{N'} - y| < y - y_k$$
$$\Rightarrow \quad -(y_{N'} - y) < y - y_k$$
$$\Rightarrow \quad y_{N'} > y_k,$$

Hvilket er en modstrid da (y_n) er faldende.

Dermed haves det altid at $y_n - y \geq 0$.

Eftersom $(y_n - x_n) \to 0$, eksisterer der, for $\varepsilon = y - u > 0$, et $k \in \mathbb{N}$ sådan at $y_n - x_n = |y_n - x_n| < y - u$, så $y_n - y < x_n - u \ \forall \ n \geq k$.

Derfor haves det at, $0 \leq y_k - y < x_k - u$, så $x_k > u$. Men dette betyder at $x_k > u \geq a \ \forall \ a \in A$, som gør at x_k er en øvre grænse, hvilket er en modstrid.

Dermed er, $y \leq u \ \forall \ u \in U$ og så eksisterer $\mathrm{Sup}A = y$.

Dermed haves det at $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$, eftersom en delmængde har en mindste øvre grænse, er fuldstændigt ordnet.

■

Dermed er Cantors reelle talsystem også et Dedekinds reelle talsystem. Da entydigheden er vist for Dedekinds reelle talsystem er det, det samme talsystem som er blevet konstrueret på to forskellige måder. Dermed giver det heller ikke mening at bevise egenskaber for Cantors reelle talsystem, da disse allerede er bevist i forrige kapitel.

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette kapitel [Rana, 1998], [Bartle, 2011] samt [Cornean, 2015]

Kapitel 5 - Kardinaliteten af talsystemer

I dette kapitel findes kardinaliteten af de konstruerede talsystemer.
For at snakke om kardinaliteten af talsystemerne, bringes først en definition om kardinalitet

Definition

Et kardinaltal angiver hvor mange elementer som er i en mængde. Kardinaliteten af mængden X noteres ved Card(X)

Definition

To mængder siges at have samme kardinalitet, hvis der findes en bijektiv funktion mellem de to mængder. En mængde A siges at have en lavere eller lige kardinalitet som mængden B hvis der findes en injektiv afbildning fra A til B.

Først kigges der på kardinaliteten af det mindste af de gennemgåede talsystemer, det naturlige talsystem.

Sætning

Kardinaliteten af de naturlige tal er uendelig.

Bevis

Det er vist i Kapitel 1 (**N(vi)**) at det naturlige talsystem indeholder uendeligt mange elementer, dermed er kardinaliteten uendelig.

■

Definition

En mængde X siges at være tællelig uendeligt, hvis $X \sim \mathbb{N}$.

Sætning

Kardinaliteten for $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ er den samme og dermed tællelig uendeligt.

Bevis

(i) Kardinaliteten af $\mathbb{N}$ er tællelig uendelig
At der findes en bijektiv funktion mellem $\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}$ så $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, giver sig selv ved f(n)=n for alle $n \in \mathbb{N}$
(ii) Kardinaliteten af $\mathbb{Z}$ er tællelig uendelig
Ved at opstille mængden $\mathbb{Z}$, ved $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,5,-5,6,-6,7,-7,8,-8,\ldots\}$.
På samme måde kan man opstille
$\mathbb{N}=\{1,2,3,5,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,...\}$

Derved kan det ses at man kan lave en bijektiv funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, som er givet ved

f(n)	=n/2	hvis n er lige
	=-(n-1)/2	hvis n er ulige

(iii) Kardinaliteten af $\mathbb{Q}$ er tællelig uendelig
For at finde en måde at opstille $\mathbb{Q}$'s elementer på, er herunder illustreret $\mathbb{Q}^+$. For at få en rækkefølge på hvilket element tages først, benyttes følgende:
Her startes øverst fra venstre, og gå diagonalt fra højre mod venstre nedad, når man når den yderste kolonne, fortsættes i toppen af næste ubenyttede kolonne. Elementerne farvet med rødt, er allerede brugt, da de er i ækvivalensklasse med et tidligere element, og springes derfor over.

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6
1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7

Dermed fås det at man kan opstille $\mathbb{Q}^+$ ved
$\mathbb{Q}^+=\{1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},4,3/2,\frac{2}{3},\frac{1}{4},5,\frac{1}{5},6,5/2,4/3,\frac{3}{4},\frac{2}{5},\frac{1}{6},...\}$.
Derved kan hele $\mathbb{Q}$ repræsenteres ved
$\mathbb{Q}=\{0,1,-1,2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3,-3,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},4,-4,3/2,-3/2,\frac{2}{3},-\frac{2}{3},...\}$
Da man kan opstille elementerne i $\mathbb{Q}$ på listeform, og der er uendelig mange elementer, følger det at der er en bijektiv funktion mellem $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Q}$.

■

Definition

Hvis X har en højere kardinalitet end de naturlige tal, sige det at mængden er overtælleligt uendeligt.

Sætning

Kardinaliteten af de reelle tal $\mathbb{R}$ er større end den naturlige tal $\mathbb{N}$. Dermed er kardinaliteten af $\mathbb{R}$ overtælleligt uendeligt.

Bevis

Da det er vist at $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$, haves det at $\text{Card}(\mathbb{N})\leq\text{Card}(\mathbb{R})$. Sætningen bevises dermed ved at vise at $\text{Card}(\mathbb{N})=\text{Card}(\mathbb{R})$ ikke er sandt.
Antag at $\text{Card}(\mathbb{N})=\text{Card}(\mathbb{R})$. Dermed er enhver delmængde af $\mathbb{R}$ endelig eller tællelig. Her defineres delmængden $D\subset\mathbb{R}$ ved $D=\{r\in\mathbb{R} \mid 0\leq r\leq 1\}$. Da mængden D må være endelige eller tællelig, eksisterer der en bijektiv (som minimum injektiv) funktion mellem D og $\mathbb{N}$. Dermed kan elementerne i D nummereres, om man kan

opstille dem som $D=\{a_1,a_2,a_3,a_4,...,a_n\}$ hvor hvert element a_n er et element i D som er uendeligt antal decimaler. Dermed kan alle elementerne opstilles ved:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0,d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ d_{14}\ d_{15} \dots d_{1n} \dots \\
a_2 &= 0,d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ d_{24}\ d_{25} \dots d_{2n} \dots \\
a_3 &= 0,d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ d_{34}\ d_{35} \dots d_{3n} \dots \\
a_4 &= 0,d_{41}\ d_{42}\ d_{43}\ d_{44}\ d_{45} \dots d_{4n} \dots \\
&: \\
a_n &= 0,d_{n1}\ d_{n2}\ d_{n3}\ d_{n4}\ d_{n5} \dots d_{nn} \dots \\
&:
\end{aligned}
$$

Hvor d_{ij} angive den j'te decimal i det i'te element. Ifølge forudsætningen er alle elementer i D angivet som et a_n. Hvis det kan vises at der findes et tal b, som ikke kan være angivet i overstående mængde, er antagelsen modbevist. Tallet b defineres på følgende måde

$$
b = \begin{cases} 1 & \text{hvis } d_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{hvis } d_{ii} = 1 \end{cases}
$$

Dermed vil b være forskellig fra alle elementerne i D angivet ved a_k, da k'te decimal er forskellig fra a_k for alle $k \in \mathbb{N}$. Dog opfylder b at være et reelt tal samt at $0 \leq b \leq 1$, så b tilhører D. Dermed har $\mathbb{R}$ er større end $\mathbb{N}$, og dermed er kardinaliteten af $\mathbb{R}$ overtælleligt uendeligt.

■

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette kapitel [Bentzen]

Afrunding

I denne specialeafhandling er det blevet vist at man ud fra Peanos aksiomer, kan konstruere et fuldstændigt ordnet og fuldstændigt Cauchy talsystem, som viser sig at være det reelle talsystem.
Som hovedresultater i projektet er det vist at for ethvert gennemgået talsystem, vil en talsystem af denne type, altid være en isomorfi til et talsystem af samme type, dermed kan hvert talsystem anses som unikt.
Det naturlige talsystem er velordnet og fuldstændigt ordnet, da der for enhver begrænset ikke tom mængde eksistere et supremum og infimum. Ligeledes er det vist at heltals systemet er fuldstændigt ordnet, da det også opfylder at der for enhver begrænset mængde, eksisterer et supremum og infimum. Videre er det vist for heltals systemet at det er et ordnet integreret domæne, samt at alle dens elementer kan udtrykkes som et produkt af primtal. Det er vist at det rationelle talsystem er et ordnet legeme, men at det ikke opfylder at være fuldstændig ordnet, ej heller fuldstændigt Cauchy.
Det er vist at Dedekinds metode, med Dedekinds skæringer, konstruere et ordnet legeme, som er det reelle talsystem. Ligeledes konstruere Cantors metode, med Cauchy følger, et ordnet legeme, som også viser sig at være det reelle talsystem. Som tidligere nævnt er det vist at de derfor må være isomorfier for hinanden, og dermed kan betragtes som det samme system. Det er vist at det reelle talsystem er fuldstændigt ordnet, samt fuldstændigt Cauchy.
Sidst i projektet er det vist at det naturlige talsystem, heltal systemet og det rationelle talsystem har samme kardinalitet, nemlig tælleligt uendelig, selvom der intuitivt er tydeligt flere elementer i $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Z}$ end i $\mathbb{N}$, da $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}$. Kardinaliteten af det reelle talsystem er højere, nemlig overtælleligt uendelig.

Litteraturliste

[Rana, 1998] Rana, Inder K.
From Numbers To Analysis
World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd
ISBN: 978-981-02-3304-4
1998

[Bartle, 2011] Bartle, Robert G. og Sherbert, Donald R
Introduction To Real Analysis 4th edition
John Wiley & Sons, Inc.
ISBN:978-0-471-43331-6
2011

[Cornean, 2015] Cornean, Horia
Notes for Analyse 1 and Analyse 2
Tilgængelig på
http://people.math.aau.dk/~cornean/analyse2_F15/noter-analyse1og2-9-04-2015.pdf
2015
Tjekket den 8/6-2016

[Bentzen] Bentzen, Steen
Uendelighed og kardinalitet - mængder og de reelle tal.
Tilgængelig på
http://uvmat.dk/bentzen/Uendelighed_og_kardinalitet.pdf
Tjekket den 8/6-2016

Appendiks 1 - Definitioner

I dette appendiks vil der blive gennemgået forskellige definitioner som er antaget kendskab til i projektet

Mængde

I dette appendiks vil der ikke blive gennemgået de 10 aksiomer for mængdelære. I stedet vil disse aksiomer være antaget som åbenlyse sandheder.
Der antages dog kendskab til og eksistens af den tomme mængde, at der kan dannes en foreningsmængde, fællesmængde og komplementærmængde, samt at man kan vise at to mængder er ens.
Som startpunkt for dette projekt antages det at der findes en mængde, som kaldes de naturlige tal, som opfylder Peanos fem aksiomer. Indenfor aksiomisk mængde teori kan det bevises at denne mængde eksistere, dette involverer konstruktionen fra mere elementærer mængder samt arbejde med de ti mængdelærens aksiomer, dette projekt vil dog ikke komme ind på dette.

Relation

Givet to ikke-tomme mængder A og B, er en relation **R**, fra A til B en delmængde $A \times B$. Hvis $(a,b) \in \mathbf{R}$, skrives dette som $a\mathbf{R}b$. Mængden $\{a \in A | (a,b) \in \mathbf{R}$ for nogen $b \in B\}$ noteres **D(R)**, kaldes for definitionsmængden af **R**, mængden $\{b \in B | (a,b) \in \mathbf{R}$ for nogen $a \in A\}$ noteres **R(R)**, kaldes for værdimængden. I det tilfælde at relationen er fra A til A, kan det undersøges om **R** opfylder følgende egenskaber:
(i) Refleksiv: $a\mathbf{R}a \ \forall \ a \in A$
(ii) Symmetrisk: $a_1\mathbf{R}a_2 \Rightarrow a_2\mathbf{R}a_1 \ \forall \ a_1, a_2 \in A$
(iii) Transitiv: $a_1\mathbf{R}a_2$ og $a_2\mathbf{R}a_3 \Rightarrow a_1\mathbf{R}a_3 \ \forall \ a_1, a_2, a_3 \in A$
(iv) Anti-symmetrisk: $a_1\mathbf{R}a_2$ og $a_2\mathbf{R}a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 \ \forall \ a_1, a_2 \in A$

Ækvivalensrelation

Hvis **R** opfylder egenskaberne (i),(ii) og (iii), kaldes **R** for en ækvivalensrelation på A.
Det ses at en ækvivalensrelation på en ikke-tom mængde egentlig blot er en opdeling af mængden. Delmængderne som mængden opdeles i kaldes ækvivalensklasser.

Partiel Ordning

Vi siger, at **R** er en partiel ordning på A, hvis **R** besidder egenskaber (i), (iii) og (iv).En partiel ordning er ligesom en kø-maskiner

En partiel ordning på A noteres ved (A, ≥). Hertil skal det bemærkes at ved en partiel ordning, er det muligt for to elementer at dele den samme plads i køen. Hvis man ønsker at undgå denne situation, kan vi bestemme at R desuden skal opfylde

(v) **Totalitet**

$\forall$ a, b$\in$A, enten a**R**b eller b**R**a

I dette tilfælde kaldes **R** for en total ordning. Grunden til at denne egenskab er vigtig er at, under den partielle ordning, kunne to elementer som har samme plads undgå at være relateret, dette gøres umuligt med den totale ordning

Infimum og Supremum

Lad (A, ≥) være en partielt ordnet mængde, og lad B være en hvilken som helst ikke-tom delmængde af A. Et element x$\in$A kaldes den øvre grænse for B hvis x ≥ y $\forall$ y$\in$B. Tilsvarende er et element z$\in$A kaldes en nedre grænse for B, hvis y ≥ z $\forall$ y$\in$B.

I projektet lades U(B) og L(B) betegne mængden af henholdsvis øvre og nedre grænser af B. Vi siger, at x er et supremum for B, noteres som SupB, hvis x$\in$U (B) og y ≥ x $\forall$ y$\in$U(B). Tilsvarende er z kaldes et infimum for B, noteret som InfB, hvis z$\in$L(B) og z ≥ y $\forall$ y$\in$L (B).

I næste del af appendikset bevises det at InfB og SupB er unikke, såfremt de eksistere.

Et element x$\in$B kaldes et maksimum for B, noteret MaxB, hvis x ≥ y $\forall$ y$\in$B. Tilsvarende er et element z$\in$B kaldes et minimum for B, noteret MinB, hvis y ≥ z $\forall$ y$\in$B.

Det ses at hvis der eksistere et MaxB eller MinB, vil dette også være henholdsvis SupB eller InfB. Derfor vil maksimum og minimum for B også være unikke, såfremt de eksistere.

Velordnet mængde

En partielt ordnet mængde (A, ≥) siges at være velordnet, hvis der for enhver ikke-tom delmængde B af A eksisterer et MinB.

Ordnet fuldstændighed

Lad (A, ≥) være en partiel ordnet mængde. Det siges at (A, ≥) har en mindste øvre grænse værdi, hvis der for enhver ikke-tom delmængde B af A, eksisterer SupB når B er afgrænset opad. Ligeledes siger vi at (A, ≥) har en største nedre grænse værdi, hvis der for enhver delmængde eksisterer InfB når B er afgrænset nedad.

Hvis (A, ≥) har både den mindste øvre grænse værdi og den største nedre grænse værdi, kaldes (A, ≥) fuldstændigt ordnet.

Funktioner

En funktion er en relation, med den begrænsning, at ethvert element i sit definitionsmængde har en og kun en værdi i værdimængden. Formelt defineres en funktion fra A til B som:
(i) **F** er en relation fra A til B
(ii) Når (a,b_1), (a,b_2) $\in$**F** så er $b_1=b_2$
Til funktioner benyttes notationen **F**(a)=b. En funktion kaldes injektiv, hvis der ikke kan findes to elementer i **D(F)** som deler samme værdi i værdimængden, altså at $(a_1,b),(a_2,b)\in$**F** hvis og kun hvis $a_1=a_2$. **F** kaldes surjektiv, hvis værdimængden dækker hele B, det vil sige at der til ethvert b∈B eksistere et a∈**D(F)**, således at (a,b)∈**F**. Hvis **F** både er injektiv og surjektiv, kaldes **F** for bijektiv. Identitetsfunktionen $\mathbf{I_A}$, fra A til A, er defineret ved (a,a) $\in\mathbf{I_A}$ for alle a∈A.Det vil sige at identitetsfunktionen afbilder ethvert element tilbage i sig selv, dermed har den også samme definitions- og værdimængde.

Uendelighed

En ikke-tom mængde, A, siges at være uendelig, hvis der findes en ægte delmængde B⊂A og en bijektiv funktion **F**:A→B.
Der findes tællelige eller overtællelige mængder, her er en tællelig mængde defineret til at have samme kardinalitet som de naturlige tal, mens overtællelige mængder har kardinalitet højere end de naturlige tal.

Binære operationer

Lad A være en ikke-tom mængde. En funktion φ: A × A → A kaldes en binær operation på A. For en binær operation gælder at D(φ)=A × A og at R(φ)⊆A, det bemærkes også at intet element i A × A kan afbildes til mere end en værdi i værdimængden. For binære operationer findes der følgende begreber som vil blive brugt:
(i) φ er associativ hvis
$\varphi(\varphi(x,y),z) = \varphi(x,\varphi(y,z))\ \forall\ x, y, z\in A$
(ii) φ er kommutativ hvis
$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)\ \forall\ x, y\in A$
(iii) Et element e∈A siges at være et identitetselement for φ hvis
$\varphi(x,e) = x = \varphi(e,x)\ \forall\ x\in A$
(iv) Ved antagelse af at et identitetselement, e, eksistere for φ. Kaldes elementet $x^{-1}\in A$ for φ-inverse af x∈A
$\varphi(x,x^{-1}) = e = \varphi(x^{-1},x)$
(v) Lad φ og ψ være to binære operatorer på A. Vi siger at ψ er højre distributiv over φ hvis
$\psi(\varphi(x,y),z) = \varphi(\psi(x,z),\psi(y,z))\ \forall\ x, y, z\in A$

Tilsvarende er ψ er venstre distributiv over φ hvis
$\psi(z,\varphi(x,y)) = \varphi(\psi(z,x),\psi(z,y))\ \forall\ x, y, z\in A$
For at lette notationen vil der i resten af projektet blive brugt symbolet *, vi skríver der med $\varphi(x,y) = x*y$.

Grupper og semigrupper

En semi-gruppe er en ikke-tom mængde, G, med en binær operator *, som endvidere er associativ. Semi-gruppen betegnes ved (G,*). En semi-gruppe kaldes for en gruppe hvis den også opfylder:
(i) et identitetselemt, e, findes for (G,*)
(ii) For ethvert $x\in G$ eksistere x^{-1}.
Bemærk at for en gruppe (eller semigruppe) har den binære operator afgørende betydning. Den samme mængde, G, vil blive vidt forskellige gruppe afhængig af den binære operator.
En delmængde G' for G kaldes en undergruppe (semi-gruppe) af (G,*) hvis (G',*) selv er en gruppe (semi-gruppe)

Isomorfi

Isomorfi betegner ligheden mellem to objekter/strukturer. Dog skal vi for at kunne snakke mere om en isomorfi vide hvilken struktur og dermed dens karakter der er tale om. Derfor vil isomorfi blive gennemgået for hver struktur i de følgende afsnit.

Isomorfi for semigrupper

Vi siger at en semi-gruppe (G,*) er en isomorfi til en semi-gruppe (G',*') hvis der eksistere en bijektiv funktion $\varphi:G\rightarrow G$ sådan at
$\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)*'\varphi(y)\ \forall\ x, y\in G$.
Vi skriver $(G,*) \simeq (G',*')$ hvis (G,*) er isomorf til (G',*').
Denne definition gælder også for grupper, da gruppe også er semi-grupper.

Ringe

Lad R være en mængde med to binære operatorer, som betegnes med + og ·, på R. Vi siger at (R,+,·) er en ring hvis:
(i) (R,+) er en kommutativ gruppe
(ii) (R,·) er en semi-gruppe
(iii) · er distributiv over +
Her følger nogle særlige ring typer, som blive vigtige i konstruktionen af talsystemerne:
(A): (R.+,·) er en kommutativ ring hvis (R,·) er en kommutativ semi-gruppe

(B): $(R,+,\cdot)$ er en ring med enhed, hvis $\exists\ 1 \in R$, $1 \neq 0$ sådan at 1 er identitetselement for $(R,\cdot)$
(C): Lad $(R,+,\cdot)$ være en ring med enhed. Hvis
$ab=0 \Rightarrow a=0$ eller $b=0 \ \ \forall\ a, b \in R$
så siges $(R,+,\cdot)$ at være et integreret domæne
(D): Lad $(R,+,\cdot)$ være et integreret domæne. Hvis der for $\forall\ a \in R \setminus \{0\}$, eksisterer $a^{-1,}$ kaldes $(R,+,\cdot)$ for et legeme.

Isomorfi for ringe

Vi siger at en ring $(R,+,\cdot)$ er en isomorfi til en ring $(R',+',\cdot')$ hvis der eksisterer en bijektiv funktion $\varphi: R \rightarrow R'$ således at $\forall\ x, y \in R$,
(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) +' \varphi(y)$
(ii) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$
Det noteres som $(R,+,\cdot) \simeq (R', +', \cdot')$.

Ordnet integreret domæne

Lad $(R,+,\cdot)$ være et integreret domæne. Antag at der eksisterer en delmængde P af R, således at
(a): $\forall x, y \in P$, $x+y$ og $xy \in P$
(b): $\forall x \in R$, er en og kun en af følgende gældende: $x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$
Definer relationen $>$ ved $x>y$ hvis og kun hvis $x-y \in P$. Vi siger så at $(R,+,\cdot,>)$ er et ordnet integreret domæne. For det ordnet integreret domæne $(R,+,\cdot,>)$, defineres nu relationen $\geq$ ved $\forall x, y \in R$, $x \geq y$ hvis og kun hvis $x>y$ eller $x=y$.

Isomorfi for ordnet integreret domæner

Et ordnet integreret domæne $(R,+,\cdot,>)$ er en isomorfi til et ordnet integreret domæne $(R',+',\cdot',>')$ hvis der eksisterer en bijektiv funktion $\varphi: R \rightarrow R'$ sådan at $\forall\ x, y \in R$
(i): $\varphi(x+y) = \varphi(x) +' \varphi(y)$
(ii) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$
(iii) $x>y \Rightarrow \varphi(x) >' \varphi(y)$
Det noteres $(R,+,\cdot,>) \simeq (R',+',\cdot',>')$. Denne definition gælder også for særlige typer af ordnet integreret domæner eksempelvis ordnet legeme.

Absolut Værdi

Lad $(F,+,\cdot,>)$ være et ordnet legeme. For ethvert $x \in F$, defineres den absolutte værdi af x ved:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

Følge

Lad (F, +,·,>) være et ordnet legeme. Der defineres en følge til at være en funktion $f:\mathbb{N}\rightarrow F$ sådan at $f(n)=x_n$. Elementet x_n kaldes n'te element i følgen. En følge kan ses som en ordnet mængde af elementer i F, eller som en måde at repræsentere en kø på

{1	2	3	4	5	…	n}
{x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…	x_n}

Man kan danne en delfølge af elementer fra en følge. Formelt siges det at (y_n) er en delfølge af (x_n), hvis der for ethvert $n\in\mathbb{N}$ haves

$y_n=x_k$ for nogle $k\in\mathbb{N}$, og

$y_{n+1}=x_i$ for nogle $i\in\mathbb{N}$ og $i>k$.

Eksempelvis er

{x_2,	x_3,	x_5,	x_6}

En delfølge af

{x_1,	x_2,	x_3,	x_4,	x_5,	x_6,	...}

Der eksisterer en særlig type delfølge, kaldet k-halen af følgen (x_n) som er defineret ved $y_n=x_{n+k-1}\forall\ n\in\mathbb{N}$. Det ses at 1-halen af en følge er følgen selv. En følge kaldes stigende hvis $x_{n+1} \geq x_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Tilsvarende er følgen faldende hvis $x_{n+1}\leq x_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Følgen kaldes monoton hvis den enten er stigende eller faldende over alle elementerne i følgen.

Grænseværdi for konvergente følger

Følgen (x_n) har en grænseværdi $x\in F$ hvis, givet et $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in F$, $\exists\ k\in\mathbb{N}$ sådan at $|x_n-x|<\varepsilon\ \forall\ n \geq k$. Hvis (x_n) har en grænseværdi x, så skriv vi $\lim x_n=x$ eller blot $(x_n)\rightarrow x$. Det vises i Appendiks 2 at en følge maksimalt har en grænseværdi.

Cauchyfølger

En følge (x_n) kaldes en Cauchy følge, hvis givet et $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in F$, $\exists\ k\in\mathbb{N}$ sådan at $|x_n-x_m|<\varepsilon\ \forall\ n, m\geq k$. Definitionen betyder at to vilkårlige elementer fra følgen, efter et givent element, aldrig vil kunne være længere væk fra hinanden end ε. Hvis en Cauchyfølge også er konvergent, kaldes det fuldstændigt Cauchy.

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette afsnit [Rana, 1998], [Bartle, 2011] samt [Cornean, 2015]

Appendiks 2 - Generelle beviser

I dette Appendiks vil der blive gennemgået og bevist sætninger som projektet anvender som kendte resultater.

Sætning

Lad $A \subseteq B$. Så er B uendelig hvis A er uendelig.

Bevis

Eftersom $A \subseteq B$, kan man skrive $B = A \cup E$ hvor $A \cap E = ø$ for nogle mængder E.Da A er uendelig, eksisterer der en injektiv funktion $f: A \to A$, som afbilder hele den ægte delmængde A' af A. Definer funktionen $f': B \to B$ ved

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } x \in A \\ x & \text{hvis } x \in E \end{cases}$$

Det følger nu at f' er injektiv, eftersom f er injektiv, identitetsfunktionen er injektiv og $A \cap E = \emptyset$. $R(f') = A' \cup E$, som er en ægte delmængde af B, dermed er B også uendelig.

■

Sætning

Lad A og B være to tilfældige mængder. Antag at der eksisterer en bijektiv funktion $f: A \to B$.Så er A uendelig hvis og kun hvis B er uendelig.

Bevis

Antag B er uendelig. Så eksisterer der en bijektiv funktion $g: B \to B'$, hvor B' er en ægte delmængde af B. Specifikt findes der et $b_0 \notin B'$. Da f er bijektiv, er $f^{-1}: B \to A$ og bijektiv. Nu tages den sammensatte funktion $f^{-1} \circ g \circ f: A \to A$. $f^{-1} \circ g \circ f$ er injektiv da alle den usammesatte funktioner er injektiv. Betragt nu elementet $a_0 = f^{-1}(b_0) \in A$. Eftersom f^{-1} er injektiv, vil $f^{-1}(b) \neq a_0 \ \forall \ b \neq b_0$, samt for alle $a \in A$, $g \circ f(a) \neq b_0$ eftersom g afbilder hele B',dermed også $f^{-1} \circ g \circ f \neq a_0$. Dermed afbilder $f^{-1} \circ g \circ f$ hele den ægte delmængde A' af A, altså er $f^{-1} \circ g \circ f: A \to A'$ en bijektiv funktion. Altså er A uendelig. Den dobbelte implikation følger fra symmetri, hvor man tager udgangspunkt i den bijektive $f^{-1}: B \to A$

■

Sætning

Lad $(A, \geq)$ være en partiel ordnet mængde og T en ikke-tom delmængde af A. Så gælder at
(i) Hvis SupT eksisterer, er denne unik

(ii) Hvis InfT eksisterer, er denne unik
(iii) Hvis MaxT eksisterer er SupT=MaxT
(iv) Hvis MinT eksisterer er InfT=MinT

Bevis

(i): Lad x_1 og x_2 ∈A være to supremum for T. Betragt x_1 som supremum og x_2 som en øvre grænse, da haves det at $x_2 \geq x_1$. Tilsvarende $x_1 \geq x_2$, når rollerne byttes, dermed $x_1=x_2$ som følge af anti-symmetri, og så er SupT unik når den eksisterer.
(ii): Lad x_1 og x_2 ∈A være to infimum for T. Betragt x_1 som infimum og x_2 som en nedre grænse, da haves det at $x_2 \geq x_1$. Tilsvarende $x_1 \geq x_2$, når rollerne byttes, dermed $x_1=x_2$ som følge af anti-symmetri, og så er InfT unik når den eksisterer.
(iii): MaxT er en øvre grænse for T. Da MaxT∈T må x≥MaxT hvis x er en øvre grænse for T. Derfor SupT=MaxT , såfremt MaxT eksisterer
(iv): MinT er en nedre grænse for T. Da MinT∈T må MinT≥x hvis x er en nedre grænse for T. Derfor InfT=MinT , såfremt MinT eksisterer

■

Sætning

Lad (G,*) være en gruppe. For ∀x, y, z∈G gælder følgende
(i) Fortrydelsesloven gælder
(ii) Identitetselementet e er unikt
(iii) Inverselementet til x er unikt
(iv) Inverselementet til x^{-1} er x
(v) Inverselementet til e er e, e^{-1}=e.
(vi) $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$

Bevis

(i) $x*y=x*z \Rightarrow x^{-1}*(x*y)=x^{-1}*(x*z)$
$\Rightarrow (x^{-1}*x)*y=(x^{-1}*x)*z$
$\Rightarrow e*y=e*z$
$\Rightarrow y=z$

Tilsvarende for $y*x=z*x \Rightarrow y=z$
Altså gælder fortrydelsesloven.
(ii) Lad e og e’ være to identitetselementer. Det haves at e*e’=e’, fordi e er identitetselement, samt e*e’=e, da e’ er identitetselement. Altså er e=e*e’=e’ og identitetselementet er unikt.
(iii) Lad x^{-1} og $x^{-1\prime}$ være to inverselementer for x. Så haves at
$x^{-1}*x=e=x^{-1\prime}*x$
$x^{-1}=x^{-1\prime}$
Altså er inverselementet for x unikt

(iv) Det haves at $x*x^{-1}=e=x^{-1}*x$. Denne ligning viser at $(x^{-1})^{-1}=x$
(v) Det følger fra ligningen $e*e=e$ at inverselementet for e er e.
(vi) Det haves at

$$\begin{aligned}(x*y)*(y^{-1}*x^{-1}) &= ((x*y)*y^{-1})*x^{-1} && \text{(associativitet)}\\ &= (x*(y*y^{-1}))*x^{-1} && \text{(associativitet)}\\ &= (x*e)*x^{-1}\\ &= x*x^{-1}\\ &= e\end{aligned}$$

Tilsvarende er, $(y^{-1}*x^{-1})*(x*y)=e$
Derfor, $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$

■

Sætning

Lad (R,+,·) være et integreret domæne. Så gælder følgende:
Eftersom (R,+) er en kommutativ gruppe, haves at:
(a) $x+y=y+x$
(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$
(c) $x+0=x$
(d) $x-x=0$
(e) $-(-x)=x$
(f) $-0=0$
(g) $-(x+y) = -x-y$
(h) $x+y=x+z \Leftrightarrow y=z$
(i) $-(x-y)=y-x$
(j) $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
Eftersom (R,·) er en kommutativ semigruppe, haves det at:
(k) $x\cdot y=y\cdot x$
(l) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
(m) $1\cdot x=x$
(n) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$
(o) $x\cdot y=0 \Leftrightarrow x=0$ **eller** $y=0$
(p) $-(x\cdot y)=(-x)\cdot y$
(q) $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$
(r) $z\cdot(x-y)=z\cdot x-z\cdot y$
(s) $(-1)\cdot x=-x$

■

Sætning

Lad (X,+,·,>) være et ordnet integreret domæne. Så gælder følgende:
(a) $x, y >0 \Rightarrow x+y>0$ **og** $x\cdot y>0$
(b) $\forall\, x, y \in X$ **gælder præcis en af følgende ligheder** $x>y$, $x=y$ **eller** $x<y$
(c) $x>x$ **kan aldrig være sandt**

(d) $x>y$ og $y>z \Rightarrow x>z$
(e) $x>y \Leftrightarrow x+z>y+z$
(f) $x>0 \Leftrightarrow -x<0$ tilsvarende $x<0 \Leftrightarrow -x>0$
(g) Hvis $x\neq 0 \Leftrightarrow x\cdot x>0$
(h) $-1<0<1$
(i) $x,y<0 \Rightarrow x+y<0,\ x\cdot y>0$
(j) $x\cdot y>0 \Leftrightarrow$ x og y har samme fortegn
(k) $x>y$ og $z>u \Rightarrow x+z>y+u$
(l) Hvis $z>0$ så er $x+z>x$
(m) Hvis $x>y$
  (1) $x\cdot z>y\cdot z$ hvis $z>0$
  (2) $x\cdot z<y\cdot z$ hvis $z<0$
(n) Hvis $z>0$ og $x\cdot z>y\cdot z \Rightarrow x>y$
(o) Hvis $z<0$ og $x\cdot z>y\cdot z \Rightarrow x<y$
(p) $x>0 \Leftrightarrow x^{-1}>0$
(q) $x>1 \Leftrightarrow 0<x^{-1}<1$
(r) For $x>0$ gælder
  1) Hvis $x>1\Rightarrow x\cdot x>x$
  2) Hvis $x<1\Rightarrow x\cdot x<x$

■

Sætning

Ordning ≥ på et ordnet integreret domæne (X,+,·,>) giver en total ordning.

Bevis

For ethvert $m\in X$, $m=m$ og dermed $m\geq m$. Dermed er ≥ refleksiv.
Antag at $m\geq n$ og $n\geq m$. Hvis $n\neq m$, skal $m>n$ og $n>m$. Hvilket modsiger tredelingsloven for (X,+,·,>). Dermed er ≥ antisymmetrisk.
Antag at $l\geq m$ og $m\geq n$. Hvis $l=m$ eller $m=n$, så følger det at $l\geq n$. Dermed observeres $l>m$ og $m>n$, her vil transitiviteten for (X,+,·,>) gøre at $l>n$. Dermed er ≥ transitiv, og ≥ er en partiel ordning.
For ethvert $m, n \in X$, gælder et af følgende udsagn: $m>n$ (dermed $m\geq n$), $m=n$ (dermed $m\geq n$) eller $m<n$ (dermed $n\geq m$). Dermed er ≥ en total ordning

■

Sætning

Lad (X,+,·,>) være et ordnet integreret domæne. Hvis (X’, +, ·) er et dellegeme af (X, +, ·), så er (X’, +, ·, >) også et ordnet integreret domæne

Bevis

Eftersom $(X, +, \cdot, >)$ er et ordnet integreret domæne, eksistere der en delmængde P af X sådan at:

(a) For alle $x, y \in P$ så er $x+y, x\cdot y \in P$

(b) $\forall x \in X$, gælder et og kun et af følgende udsagn; $x\in P$, $x=0$ eller $-x\in P$.

Definer $P'=P\cap X'$. Så gælder der for $\forall x, y \in P'$ at $x+y, x\cdot y\in X'$, da X' er et integreret domæne. Ifølge (a) gælder også $x+y, x\cdot y\in P$. Dermed er $x+y, x\cdot y\in P'$. For ethvert $x\in X'$ haves det at x, 0, $-x \in X'$ eftersom X' er et integreret domæne. Fra (b) haves det at kun et udsagn passer $x\in P$, $x=0$ eller $-x\in P$. Altså vil der kun gælde en af følgende $x\in P'$, $x=0$ eller $-x\in P'$. Dermed er $(X', +, \cdot, >)$ et ordnet integreret domæne.

Sætning

Isomorfien ≃ på mængden af ordnede integreret domæner er en ækvivalensrelation.

Bevis

(i) Først vises det at ≃ er refleksiv: Tag et tilfældigt integreret domæne $(X, +, \cdot, >)$. Definer $\psi:X\rightarrow X$ ved $\psi=I_X$. Det ses at ψ er bijektiv. For ethvert $x, y\in X$ gælder der nu at:

$$\begin{aligned}\psi(x+y) &= x+y \\ &= \psi(x)+\psi(y) \\ \psi(x\cdot y) &= x\cdot y \\ &= \psi(x)\cdot\psi(y)\end{aligned}$$

$x>y \Rightarrow \psi(x)>\psi(y)$

Altså er ψ en isomorfi fra $(X, +, \cdot, >)$ til $(X, +, \cdot, >)$, så $(X, +, \cdot, >) \simeq (X, +, \cdot, >)$, dermed er ≃ refleksiv

(ii) Nu vises det at ≃ er symmetrisk: Lad $(X, +, \cdot, >) \simeq (X', +', \cdot', >')$ og lad $\varphi:X\rightarrow X'$ være denne isomorfi. Definer $\psi:X'\rightarrow X$ ved $\psi=\varphi^{-1}$. Da φ er bijektiv vil også ψ være bijektiv. For ethvert $x', y'\in X'$ $\exists$ $x, y\in X$ sådan at $\varphi(x)=x'$, $\varphi(y)=y'$.

$$\begin{aligned}\psi(x'+'y') &= \varphi^{-1}(\varphi(x+y)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x)+'\varphi(y)) \\ &= I_X(x+y) \\ &= x+y \\ &= \varphi^{-1}(x')+\varphi^{-1}(y') \\ &= \psi(x')+\psi(y') \\ \psi(x'\cdot'y') &= \varphi^{-1}(\varphi(x\cdot y)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot'\varphi(y)) \\ &= I_X(x\cdot y) \\ &= x\cdot y \\ &= \varphi^{-1}(x')\cdot\varphi^{-1}(y')\end{aligned}$$

$=\psi(x')\cdot\psi(y')$

$x'>'y' \quad \Rightarrow \varphi(x)>'\varphi(y)$

$\Rightarrow x>y$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(x')>\varphi^{-1}(y')$

$\Rightarrow \psi(x')>\psi(y')$

Dermed er ψ en isomorfi fra (X', +', ·', >') til (X, +, ·, >), så (X, +, ·, >) ≃ (X', +', ·', >') ⇒ (X', +', ·', >') ≃ (X, +, ·, >). Dermed er ≃ symmetrisk.

(iii) Sidst vises det at ≃ er transitiv: Lad (X, +, ·, >) ≃ (X', +', ·', >') og (X', +', ·', >') ≃ (X'', +'', ·'', >''), og lad φ_1: X →X′, φ_2: X′→X″ være de to isomorfier.

Definer ψ:X→X″ ved $\psi = \varphi_2\circ\varphi_1$. Da både φ_1 og φ_2 er bijektive er ψ ligeledes bijektiv. For ethvert tilfældigt x, y∈X gælder der at:

$\psi(x+y) \quad = \varphi_2(\varphi_1(x+y))$

$= \varphi_2(\varphi_1(x)+'\varphi_1(y))$

$= \varphi_2(\varphi_1(x))+''\varphi_2(\varphi_1(y))$

$= \psi(x)+''\psi(y)$

$\psi(x\cdot y) \quad = \varphi_2(\varphi_1(x\cdot y))$

$= \varphi_2(\varphi_1(x)\cdot'\varphi_1(y))$

$= \varphi_2(\varphi_1(x))\cdot''\varphi_2(\varphi_1(y))$

$= \psi(x)\cdot''\psi(y)$

$x>y \quad \Rightarrow \varphi_1(x)>'\varphi_1(y)$

$\Rightarrow \varphi_2(\varphi_1(x))>''\varphi_2(\varphi_1(y))$

$\Rightarrow \psi(x)>''\psi(y)$

Dermed er ψ en isomorfi fra (X, +, ·, >) til (X'', +'', ·'', >''). Så det nu haves at (X, +, ·, >) ≃ (X', +', ·', >'), (X', +', ·', >') ≃ (X'', +'', ·'', >'') og (X, +, ·, >) ≃ (X'', +'', ·'', >''). Altså er ≃ transitiv.

Dermed er ≃ en ækvivalensrelation på mængden af ordnet integreret domæner.

■

Sætning

Lad φ være et givet isomorfi fra (G,*) til (G',*'), så gælder følgende:

(i) φ(e)=e'

Eftersom φ er surjektiv, haves der for ethvert x'∈G′, ∃ x∈G sådan at φ(x)=x′.

$\varphi(e)*' x' \quad =\varphi(e)*'\varphi(x)$

$=\varphi(e*x)$

$=\varphi(x)$

$=x'$

Tilsvarende $x'*'\varphi(e)= x'$ og dermed er $\varphi(e)=e'$

(ii) $\varphi(x^{-1})= (\varphi(x))^{-1} \quad \forall\, x \in G$

$\varphi(x^{-1}) *'\varphi(x) =\varphi(x^{-1}*x)$

$=\varphi(e)$

$=e'$

Tilsvarenden $\varphi(x)*'\varphi(x^{-1})=e'$ og dermed er $\varphi(x^{-1})=(\varphi(x))^{-1}$

■

Sætning

Lad $(X,+,\cdot)$ være en kommutativ ring med identitet. Så er $(X,+,\cdot)$ et integreret domæne hvis og kun hvis, $\forall$ x, y, $z\in X$, $x \neq 0$, $x\cdot y = x\cdot z \Rightarrow y=z$.

Bevis

Antag at $(X,+,\cdot)$ er et integreret domæne. Så

$$\begin{aligned} x\cdot y=x\cdot z \quad &\Rightarrow x\cdot y-x\cdot z=0 \\ &\Rightarrow x\cdot(y-z)=0 \\ &\Rightarrow x=0 \text{ eller } y-z=0 \end{aligned}$$

Eftersom $x\neq 0$, må det være $y-z=0$ som medfører at $y=z$

Antag nu at $\forall$ x, y, $z\in X$, $x\neq 0$, $x\cdot y=x\cdot z \Rightarrow y=z$. Lad $x\cdot y=0$. Fra antagelsen har vi at $x\neq 0$. Nu kan regnestykket opstilles som $x\cdot y=x\cdot 0$, udfra ovenstående må $y=0$. Dermed er $(X,+,\cdot)$ et integreret domæne.

■

Sætning

Antag at:
(i) $(F,+)$ er en kommutativ gruppe.
(ii) $(F\backslash\{0\},\cdot)$ er en kommutativ gruppe
(iii) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ $\forall$ x, y, z $\in$ F
Så er $(F,+,\cdot)$ et legeme

Bevis

Det tjekkes at $(F,\cdot)$ er en semigruppe, dermed tjekkes der at den er lukket under multiplikation, samt at den er associativ.
Lukket under multiplikation: Fra (ii) følger denne egenskab, med undtagelse af når enten x, y =0, det vil dog altid forårsage $x\cdot y=0\in F$, altså er F lukket under $\cdot$.
Associativitet: Denne egenskab følger ligeledes fra (ii), med undtagelse af når enten x, y eller z=0. Dette vil dog altid forårsage $(x\cdot y)\cdot z=0=x\cdot(y\cdot z)$, altså er $(F,\cdot)$ associativ. Dermed er $(F,\cdot)$ en semigruppe.
At $(F,\cdot)$ er en semigruppe kombineret med (i) og (iii), viser at $(F,+,\cdot)$ er en ring. Hvis enten x eller y er 0, vil dette medfører at $x\cdot y=0=y\cdot x$, så $\cdot$ er kommutativ og $(F,+,\cdot)$ er en kommutativ ring.
Eksistensen af elementet $1\in F$, kommer fra (ii) da 1 er identitetselementet. Grundet at $(F\backslash\{0\},\cdot)$ er en gruppe, medfører lukket under multiplikation at hvis $x\cdot y=0$ så er en af x eller y lig 0. Dermed er $(F,+,\cdot)$ et integreret domæne. At $(F\backslash\{0\},\cdot)$ er en kommutativ gruppe medfører at der for ethvert element $x\in F\backslash\{0\}$ eksistere et x^{-1}, derfor er $(F,+,\cdot)$ et legeme.

■

Sætning og Bevis

Lad (F,+,·,>) være et ordnet legeme. For alle x, y ∈F gælder der at:

(i) $|x|\geq 0$

Hvis $x\geq 0$, er $|x|=x\geq 0$. Hvis $x<0$, er $|x|=-x>0\geq 0$.

(ii) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

Hvis $x=0$ så er $|x|=x=0$. Hvis $|x|=0$ så er enten $x=|x|=0$ eller $-x=|x|=0$. Altså er udsagnet sandt

(iii) $|x|=|-x|$

Hvis $x=0$ så er $-x=0$ så følger det fra (ii) $|x|=0=|-x|$. Hvis $x>0$ så er $-x<0$ således fås $|x|=x=-(-x)=|-x|$, ved symmetri findes det sandt for $x<0$

(iv) $|x|\geq x\geq -|x|$

Hvis $x\geq 0$, så er $|x|=x$. Fra (i) følger det at $0\geq -|x|$. Altså må $|x|=x\geq 0\geq -|x|$.

For $x<0$, så er $|x|=-x \Leftrightarrow x=-|x|$ her er $|x|\geq 0>x=-|x|$.

Dermed haves det at $|x|\geq x\geq -|x|$

(v) $|x|\leq y \Leftrightarrow -y\leq x\leq y$

Lad $|x|\leq y$. Så følger det at $0\leq |x|\leq y$,hvis $x\geq 0$ så er $-y\leq 0\leq x=|x|\leq y$.

Hvis $x<0$, så er $-x>0$, eftersom $|-x|=|x|\leq y$, haves det at $-y\leq -x\leq y$.

Lad nu $-y\leq x\leq y$. Hvis $x\geq 0$, så er $|x|=x\leq y$.

Hvis $x<0$, så er $|x|=-x\leq -(-y)=y$.

Dermed er $|x|\leq y \Leftrightarrow -y\leq x\leq y$

(vi) $|x+y|\leq |x|+|y|$ - trekantsuligheden

Fra (iv) haves det at $-|x|\leq x\leq |x|$ og $-|y|\leq y\leq |y|$, dette medfører at $-(|x|+|y|)\leq x+y\leq |x|+|y|$. Fra (v) haves det nu at $|x+y|\leq |x|+|y|$

(vii) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

Hvis $x\geq 0$ og $y\geq 0$, så er $x\cdot y\geq 0$. Her vil $|x\cdot y|=x\cdot y=|x|\cdot|y|$.

Hvis $x<0$ og $y<0$, så er $x\cdot y\geq 0$. Her vil $|x\cdot y|=x\cdot y=(-x)\cdot(-y)=|x|\cdot|y|$.

Hvis $x<0$ og $y\geq 0$, så er $x\cdot y\leq 0$. Her vil $|x\cdot y|=-(x\cdot y)=(-x)\cdot y=|x|\cdot|y|$

Grundet symmetri er det ens for $x\geq 0$ og $y<0$

(viii) $||x|-|y||\leq |x-y|$

Fra (vi) haves det at

$|x|=|x-y+y|\leq |x-y|+|y|$, dermed gælder det at $|x|-|y|\leq |x-y|$

$|y|=|y-x+x|\leq |y-x|+|x|$, dermed gælder det at $|y|-|x|\leq |y-x|=|x-y|$

Hvis $x\geq y$ haves det at $||x|-|y||=|x|-|y|\leq |x-y|$

Hvis $y>x$ haves det at $||x|-|y||=-(|x|-|y|)=|y|-|x|\leq |x-y|$

(ix) $|x-y|\leq |x|+|y|$

$|x-y|\leq |x|+|-y|=|x|+|y|$

(x) Hvis $y\geq 0$ og $|x|\geq y \Leftrightarrow x\geq y$ eller $x\leq -y$

Fra (v) vides det at $|x|>y\Leftrightarrow x>y$ eller $x<-y$, samt at $|x|=y\Leftrightarrow x=y$ eller $-x=y$.

Altså $|x|\geq y \Leftrightarrow x\geq y$ eller $x\leq -y$

■

I de følgende sætninger om følger vil der tages udgangspunkt i et ordnet legeme $(F,+,\cdot,>)$.

Sætning

Hvis der eksisterer en grænseværdi for en følge er denne unik.

Bevis

Lad x og x' være to forskellige grænseværdier for en givet følge. Det antages at $x<x'$, så $\varepsilon=(x'-x)/2>0$.
Eftersom $x_n\to x$, $\exists\ k_1\in\mathbb{N}$ sådan at $|x_n-x|<\varepsilon\ \forall\ n\geq k_1$.
Eftersom $x_n\to x'$, $\exists\ k_2\in\mathbb{N}$ sådan at $|x_n-x'|<\varepsilon\ \forall\ n\geq k_2$.
Nu tages $k=\max\{k_1,k_2\}$. Så gælder der for $\forall\ n\geq k$ at
$|x_n-x|<\varepsilon$ og $|x_n-x'|<\varepsilon$

$$\begin{aligned} |x-x'| &= |x-x_n+x_n-x'| \\ &\leq |x-x_n|+|x_n-x'| \\ &< \varepsilon+\varepsilon \\ &= x-x' \end{aligned}$$

Dette er en modsætning, og dermed må grænseværdien være unik.

■

Sætning

Hvis $(x_n)\to x$, så vil enhver delfølge af (x_n) også konvergere mod x. Ligeledes (x_n) konvergere mod x, hvis og kun hvis dens k-hale konvergere mod x for nogle k.

Bevis

Lad (y_n) være en givet delfølge af (x_n). For et givet $\varepsilon>0$, $\exists\ N\in\mathbb{N}$ sådan at $|x_n-x|<\varepsilon\ \forall\ n\geq N$.
$y_n=x_i$ for nogle $i\geq n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, så dermed må $|y_n-x|<\varepsilon\ \forall\ n\geq N$. Dermed $(y_n)\to x$.
Hvis $(x_n)\to x$, så må enhver k-hale, eftersom det er delfølger, konvergere mod x.
Hvis nogle k-haler (y_n) konvergere mod x, vil der givet et $\varepsilon>0$, $\exists\ N\in\mathbb{N}$ sådan at
$|y_n-x|<\varepsilon\ \forall\ n\geq N$.
$|x_{n+k-1}-x|<\varepsilon\ \forall\ n\geq N$.
$|x_n-x|<\varepsilon\ \forall\ n\geq N+k-1$.
Altså $(x_n)\to x$

■

Sætning

Enhver konvergent følge er begrænset.

Bevis

Lad $(x_n) \to x$. For et givet $\varepsilon>0$ $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ sådan at

$|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall$ $n \geq k$

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < \varepsilon + |x| \quad \forall\ n \geq k$$

Sæt nu $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n-1}|, \varepsilon + |x|\}$. Dermed haves det at $|x_n| \leq M$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, og alle konvergente følger er dermed begrænset.

■

Sætning

For to tilfældige følger (x_n), (y_n) gælder følgende:

(i) Hvis $(x_n) \to x \Rightarrow (|x_n|) \to |x|$. Samt hvis $(|x_n|) \to 0 \Rightarrow (x_n) \to 0$.

(ii) Hvis $x_n = c$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, så $(x_n) \to c$. Kaldes (x_n) en konstant følge.

(iii) Lad $x_n \leq y_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. Hvis $(x_n) \to x$ og $(y_n) \to y$, så $x \leq y$

(iv)Hvis $(x_n) \to x$ og M begrænser (x_n), så er $|x| \leq M$

Bevis

(i) Givet et $\varepsilon>0$, $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ sådan at

$|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall$ $n \geq k$

Det haves fra tidligere beviser at

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\ n \geq k$$

Dermed er $(|x_n|) \to |x|$ hvis $(x_n) \to x$

Hvis $(|x_n|) \to 0$, vil der, givet et $\varepsilon > 0$, $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ sådan at

$|x_n| - |0| < \varepsilon$ $\forall$ $n \geq k$.

Dermed haves det at

$$|x_n - 0| = |x_n| = |x_n| - |0| < \varepsilon \quad \forall\ n \geq k.$$

Dermed $(|x_n|) \to 0 \Rightarrow (x_n) \to 0$.

(ii) Givet $\varepsilon>0$, anvend $k=1$. Så er

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall\ n \geq k$$

Dermed $(x_n) \to c$.

(iii) Antag at $x>y$, definer nu $\varepsilon = (x-y)/2 > 0$. Så eksistere der et $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ sådan at

$|x_n - x| < (x-y)/2$ $\forall$ $n \geq k_1$.

$|y_n - y| < (x-y)/2$ $\forall$ $n \geq k_2$.

Tag nu $k = \max\{k_1, k_2\}$. Så haves det for $\forall$ $n \geq k$ at

$$|x_n - x| < (x-y)/2 \qquad |y_n - y| < (x-y)/2$$

$\Rightarrow$	$y-x<2x_n-2x<x-y$	$y-x<2y_n-2y<x-y$
$\Rightarrow$	$y+x<2x_n<3x-y$	$3y-x<2y_n<x+y$
$\Rightarrow$	$2y_n<x+y<2x_n$	
$\Rightarrow$	$y_n<x_n$	

Hvilket er i modstrid med betingelsen i sætningen, dermed er $x\leq y$.
(iv) Fra (i) haves det at $(|x_n|)\to |x|$. Hvis følgen y_n defineres til at være $y_n=M\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, haves det fra (ii) at den konvergere mod M. Eftersom $|x_n|\leq M=y_n$ haves det fra (iii) at $|x|\leq M$

■

Sætning

Lad (x_n), (y_n) være to konvergente følger sådan at $(x_n)\to x$, $(y_n)\to y$. Så gælder følgende:
(i) $(x_n+y_n)\to x+y$
(ii)$(x_n\cdot y_n)\to x\cdot y$
(iii) Hvis $y\neq 0$, så er følgen (x_n/y_n) defineret for alle $n\geq n_1$, for nogle $n_1\in\mathbb{N}$ og $(x_n/y_n)\to x/y$

Bevis

(i) Givet et $\varepsilon>0$. Så $\exists\ k_1, k_2\in\mathbb{N}$ sådan at
$|x_n-x| < \varepsilon/2\ \ \forall\ n \geq k_1$
$|y_n-y| < \varepsilon/2\ \ \forall\ n \geq k_2$
Definer $k=\max\{k_1, k_2\}$ og det haves at
$|x_n-x|<\varepsilon/2,\quad |y_n-y|<\varepsilon/2\quad \forall\ n \geq k.$
Dermed er

$$\begin{aligned} |(x_n+y_n)-(x+y)| &= |(x_n-x)+(y_n-y)| \\ &\leq |x_n-x|+|y_n-y| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 && \forall\ n\geq k. \\ &= \varepsilon && \forall\ n\geq k. \end{aligned}$$

Altså $(x_n+y_n)\to x+y$.
(ii) Eftersom (x_n), (y_n) er konvergente, er de også begge begrænset af et M_x, $M_y\neq 0$. Givet et $\varepsilon>0$, så $\exists\ k_1, k_2\in\mathbb{N}$ sådan at
$|x_n-x|<\varepsilon/(2M_y)\ \forall\ n\geq k_1.$
$|y_n-y|<\varepsilon/(2M_x)\ \forall\ n\geq k_2.$
Definer $k=\max\{k_1, k_2\}$. Så
$|x_n-x|<\varepsilon/(2M_y),\qquad |y_n-y|<\varepsilon/(2M_x)\qquad \forall\ n \geq k.$
Altså er,

$$\begin{aligned} |x_n\cdot y_n-x\cdot y| &= |x_n\cdot y_n-x\cdot y_n+x\cdot y_n-x\cdot y| \\ &\leq |x_n\cdot y_n-x\cdot y_n|+|x\cdot y_n-x\cdot y| \\ &= |y_n|\cdot|x_n-x|+|x|\cdot|y_n-y| \\ &\leq M_y\cdot|x_n-x|+M_x\cdot|y_n-y| \end{aligned}$$

$<M_y\cdot(\varepsilon/(2\cdot M_y))+M_x\cdot(\varepsilon/(2\cdot M_x))$ $\quad\forall\ n \geq k.$

$=\varepsilon$ $\quad\forall\ n \geq k.$

Altså $(x_n\cdot y_n)\rightarrow x\cdot y$.

(iii) Eftersom $y\neq 0$, $\varepsilon=|y|>0$. Så $\exists\ n_1\in\mathbb{N}$ sådan at

$|y_n-y|<|y| \quad \forall\ n\geq n_1$

Hvis $y_n=0$ for nogle $n\geq n_1$, får man $|y|=|0-y|<|y|$, hvilket er en modstrid.

Dermed er (x_n/y_n) veldefineret $\forall\ n\geq n_1$. (x_n) er begrænset af $X\neq 0$

Givet $\varepsilon>0$. Eftersom $|y|\neq 0$, $\exists\ k_1, k_2\in\mathbb{N}$ sådan at

$|y_n-y|<(\varepsilon\cdot|y|^2)/(4\cdot X) \quad \forall\ n\geq k_1$

$|x_n-x|<(\varepsilon\cdot|y|)/4 \quad \forall\ n\geq k_2$

Ligeledes, $\exists\ k_3\in\mathbb{N}$ sådan at

$|y_n-y|<|y|/2 \quad \forall\ n\geq k_3$

Dermed haves at

$$
\begin{aligned}
|y| &=|y-y_n+y_n| \\
&\leq|y-y_n|+|y_n| \\
&<|y|/2+|y_n| \qquad \forall\ n\geq k_3
\end{aligned}
$$

Dermed haves det at $|y_n|>|y|/2$, så

$1/|y_n| \quad <2/|y| \qquad \forall\ n\geq k_3$

Tag $k=\max\{k_1, k_2, k_3, n_1\}$. Så haves

$|y_n-y|<(\varepsilon\cdot|y|^2)/(4\cdot X)$, $\quad |x_n-x|<(\varepsilon\cdot|y|)/4$, $\quad 1/|y_n|<2/|y| \qquad \forall\ n \geq k$

Og

$$
\begin{aligned}
|x_n/y_n-x/y| &=|(x_n\cdot y-x\cdot y_n)/(y\cdot y_n)| \\
&=(1/|y\cdot y_n|)\cdot|(x_n\cdot y-x\cdot y)+(x\cdot y-x\cdot y_n)| \\
&\leq(1/|y\cdot y_n|)\cdot(|x_n\cdot y-x\cdot y|+|x\cdot y-x\cdot y_n|) \\
&=(1/(|y|\cdot|y_n|))\cdot(|y|\cdot|x_n-x|+|x|\cdot|y_n-y|) \\
&\leq(1/|y_n|)\cdot(|x_n-x|+(X/|y|)\cdot|y_n-y|) \\
&<(2/|y|)\cdot((\varepsilon\cdot|y|)/4+(X/|y|)\cdot((\varepsilon\cdot|y|2)/(4\cdot x))) \qquad \forall\ n \geq k \\
&\leq(2/|y|)\cdot((\varepsilon\cdot|y|)/4+(\varepsilon\cdot|y|)/4) \\
&=\varepsilon
\end{aligned}
$$

Dermed er $(x_n/y_n)\rightarrow x/y$.

■

Sætning

Lad $(x_n)\rightarrow s$, $(z_n)\rightarrow s$ og lad (y_n) være en følge sådan at $x_n\leq y_n\leq z_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Så vil (y_n) være konvergent, og dens grænseværdi vil være s.

Bevis

Givet $\varepsilon>0$. Så $\exists\ k\in\mathbb{N}$ sådan at

$|x_n-s|<\varepsilon$, $\quad |z_n-s|<\varepsilon \qquad \forall\ n\geq k.$

Det betyder at

$s-\varepsilon<x_n<s+\varepsilon$, $s-\varepsilon<z_n<s+\varepsilon \qquad \forall\ n\geq k.$

Dermed, $\forall\ n \geq k$,
$s-\varepsilon<x_n\leq y_n\leq z_n<s+\varepsilon$
$-\varepsilon<y_n-s<\varepsilon$
Det betyder at
$|y_n-s|<\varepsilon$
Altså er $(y_n)\rightarrow s$.

■

Sætning

Enhver følge (x_n) har en monoton delfølge.

Bevis

Betragt mængden $A=\{n\in\mathbb{N} \mid x_n\geq x_m\ \forall\ m\geq n\}$. Der findes to scenarier:
(i) A er ikke begrænset opad. Dermed er A en ikke-tom mængde og så $\exists\ a_1\in A$. Definer (y_n) sådan at $y_1=x_{a(1)}$. Antag $y_n=x_{a(n)}$ for nogle $a_{(n)}\in A$. Eftersom A ikke er begrænset opad, $\exists\ a_{(n+1)}\in A$ sådan at $a_{(n+1)}>a_{(n)}$. Lad $y_{n+1}=x_{a(n+1)}$. Dermed er (y_n) en delfølge af (x_n) og fra definitionen af A, vil (y_n) være en faldende følge.
(ii) A er begrænset opad af k. Så er $n\notin A$ $n>k$. Definer (y_n) sådan at $y_1=x_{k+1}$. Antag at $y_n=x_m$ for nogle $m>k$. Eftersom $m\notin A$, $\exists\ t>m>k$ sådan at $x_t>x_m$. Lad $y_{n+1}=x_t$. Dermed er (y_n) en delfølge af (x_n), og det vides at (y_n) er voksende.
Dermed har enhver følge, en monoton delfølge

■

Sætning

Enhver konvergent følge er også Cauchy

Bevis

Lad $(x_n)\rightarrow x$. Givet $\varepsilon>0$. Så $\exists\ k\in\mathbb{N}$ sådan at $|x_n-x|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n\geq k$. For ethvert $n, m\geq k$, haves det at:

$$\begin{aligned}|x_n-x_m| &=|(x_n-x)+(x-x_m)|\\ &\leq|x_n-x|+|x-x_m|\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2\\ &=\varepsilon\end{aligned}$$

Dermed er (x_n) også Cauchy

■

Sætning

Enhver Cauchyfølge er begrænset

Bevis

Lad (x_n) være en Cauchyfølge. For et fastsat ε, her vælges ε=1 ∃ k∈ℕ sådan at $|x_n–x_m|<1$ ∀ n, m ≥ k. Dermed haves det for n ≥ k, at

$$
\begin{aligned}
|x_n| &= |x_n – x_k + x_k| \\
&\le |x_n – x_k| + |x_k| \\
&< 1 + |x_k|
\end{aligned}
$$

Fastsæt $M=\max\{ |x_1|, |x_2|, ..., |x_k-1|, 1+|x_k|\}$. Dermed kan $|x_n|\le M$ ∀ n∈ℕ, og dermed er (x_n) begrænset

■

Sætning

Hvis (x_n) er Cauchy, så er enhver delfølge af (x_n) også Cauchy. Ligeledes, (x_n) er Cauchy hvis og kun hvis dens k-hale er Cauchy for nogle k

Bevis

Lad (y_n) være en tilfældig delfølge af (x_n). Givet et ε>0, ∃ N∈ℕ sådan at $|x_n–x_m|<ε$ ∀ n, m≥N. Dermed må der gælde at for $y_n=x_i$ for nogle i≥n ∀ n∈ℕ, at $|y_n-y_m|<ε$ ∀ n, m≥N. Derfor vil (y_n) konvergere mod x, og som tidligere vist vil den være Cauchy.
Hvis (x_n) er Cauchy, vil enhver k-hale også være Cauchy, eftersom en k-hale er en delfølge.
Hvis nogle af (x_n)'s k-haler er Cauchy, vil der for et givet ε > 0, ∃ N∈ℕ sådan at:
$|y_n–y_m|<ε$ ∀ n, m ≥ N
$|x_{n+k-1}–x_{m+k-1}|<ε$ ∀ n, m ≥ N
$|x_n–x_m|<ε$ ∀ n, m ≥ N + k – 1
Dermed er (x_n) også Cauchy

■

Sætning

Lad (x_n) være en Cauchyfølge sådan at den ikke konvergere mod 0. Så eksistere der et M>0 sådan at ∃ n_1∈ℕ så $|x_n|\ge M$ ∀ $n\ge n_1$

Bevis

Antag at der ikke eksistere et M>0 som opfylder at $|x_n|\ge M$ ∀ $n\ge n_1$. For ethvert givet ε>0, ∃ k∈ℕ sådan at $|x_n–x_m|<ε/2$ ∀ n, m ≥ k. Specifikt ∃ t > k sådan at $|x_t|<ε/2$ (Hvis dette ikke er tilfældet vil M=ε/2 opfylde sætningen.) Dermed haves at

$$
\begin{aligned}
|x_n-0| &= |x_n-x_t+x_t| \\
&\le |x_n–x_t| + |x_t| \\
&< |x_n–x_t| + ε/2 \\
&< ε/2 + ε/2 \qquad \forall\ n\ge t \\
&= ε
\end{aligned}
$$

Dermed er (x_n) konvergent mod 0, som er modsigelse og dermed må der eksisterer et M.

■

Sætning

Lad (x_n) og (y_n) være to Cauchyfølger. Så gælder følgende:
(i) (x_n+y_n) er Cauchy
(ii) $(x_n \cdot y_n)$ er Cauchy
(iii) Hvis (y_n) ikke konvergere mod 0, så er (x_n/y_n) veldefineret og Cauchy

Bevis

(i) Givet $\varepsilon>0$ så $\exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ sådan at
$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \quad \forall\ n \geq k_1$
$|y_n - y_m| < \varepsilon/2 \quad \forall\ n \geq k_2$
Definer $k = \max\{k_1, k_2\}$. Så er
$|x_n - x_m| < \varepsilon/2,\ |y_n - y_m| < \varepsilon/2 \quad \forall\ n \geq k.$
Det haves at

$$
\begin{aligned}
|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)| &= |(x_n-x_m)+(y_n-y_m)| \\
&\leq |x_n-x_m|+|y_n-y_m| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 && \forall\ n \geq k. \\
&= \varepsilon && \forall\ n \geq k.
\end{aligned}
$$

Dermed er (x_n+y_n) Cauchy
(ii) Eftersom (x_n) og (y_n) er Cauchy, er de begrænset af et X, Y $\neq 0$. Givet $\varepsilon > 0$, så $\exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ sådan at
$|x_n - x_m| < \varepsilon/(2Y) \quad \forall\ n, m \geq k_1$
$|y_n - y_m| < \varepsilon/(2X) \quad \forall\ n, m \geq k_2$
Definer $k=\max\{k_1, k_2\}$. Så
$|x_n - x_m| < \varepsilon/(2Y)$
$|y_n - y_m| < \varepsilon/(2X) \quad \forall\ n, m \geq k$
Dermed er

$$
\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| &= |(x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_n)+(x_m \cdot y_n - x_m \cdot y_m)| \\
&\leq |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_n|+|x_m \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \\
&= |y_n| \cdot |x_n - x_m|+|x_m| \cdot |y_n - y_m| \\
&\leq Y \cdot |x_n - x_m|+X \cdot |y_n - y_m| \\
&< Y \cdot (\varepsilon/(2 \cdot Y))+X \cdot (\varepsilon/(2 \cdot X)) && \forall\ n, m \geq k \\
&= \varepsilon && \forall\ n, m \geq k
\end{aligned}
$$

Dermed er $(x_n \cdot y_n)$ er Cauchy.
(iii) Eftersom $(y_n) \rightarrow 0$ ikke er sandt, $\exists$ M>0 sådan at $\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ så $|y_n| \geq M\ \forall\ n \geq n_1$.
Dermed eksisterer følgen (x_n/y_n) og er veldefineret for n_1-halen. Da (x_n) og (y_n) er Cauchy er de også begrænset af henholdsvis X, Y. Givet et $\varepsilon>0$, $\exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ sådan at

$|x_n–x_m|<(M\cdot 2\cdot ε)/(2\cdot Y)$ $\forall$ n, m ≥ k_1
$|y_n–y_m|<(M\cdot 2\cdot ε)/(2\cdot X)$ $\forall$ n, m ≥ k_2
Definer k = max{k_1, k_2, n_1} så haves det at
$|x_n–x_m|<(M\cdot 2\cdot ε)/(2\cdot Y)$,
$|y_n–y_m|<(M\cdot 2\cdot ε)/(2\cdot X)$ $\forall$ n, m ≥ k
Så

$$
\begin{aligned}
|x_n/y_n–x_m/y_m| &= |(x_n\cdot y_m–x_m\cdot y_n)/(y_n\cdot y_m)| \\
&= (1/(|y_n|\cdot|y_m|))\cdot(|(x_n\cdot y_m–y_m\cdot x_m)+(y_m\cdot x_m–x_m\cdot y_n)|) \\
&\leq (1/(|y_n|\cdot|y_m|))\cdot(|x_n\cdot y_m–y_m\cdot x_m|+|y_m\cdot x_m–x_m\cdot y_n|) \\
&= (1/(|y_n|\cdot|y_m|))\cdot(|y_m|\cdot|x_n–x_m|+|x_m|\cdot|y_m–y_n|) \\
&\leq (1/M\cdot 2)\cdot(Y\cdot|x_n–x_m|+X\cdot|y_m–y_n|) \\
&< (1/M\cdot 2)\cdot(Y\cdot((M\cdot 2\cdot ε)/(2\cdot Y))+X\cdot((M\cdot 2\cdot ε)/(2\cdot X))) && \forall\ n, m \geq k \\
&= ε && \forall\ n, m \geq k
\end{aligned}
$$

Dermed er (x_n/y_n) Cauchy.

■

Sætning

Lad (F,+,·,>) være et ordnet legeme. Lad A være en ikke-tom delmængde af F, og u være øvre grænse for A. Så er følgende ækvivalente:
(i) u=SupA
(ii) For hvert ε>0, ε∈F, ∃ x∈A sådan at u–ε<x.
(iii) For hvert x∈F hvor x<u, ∃ y∈A sådan at x<y.

Bevis

Antag at (i) gælder. Givet et ε>0, u–ε<u=SupA. Dermed ∃ x∈A sådan at u–ε<x, ellers ville x≤u–ε ∀ x∈A hvilket vil betyde u–ε er en øvre grænse for A, hvilket er i modstrid med at u=SupA. Dermed passer (ii).
Antag at (ii) gælder. For ethvert x∈F hvor der gælder x<u, kan tages ε=u–x>0. Dermed ∃ y∈A sådan at u–ε<y, altså er x=u–(u–x)<y. Dermed passer (iii).
Antag at (iii) gælder. Antag at der eksisterer en øvre grænse u' for A hvorom der gælder at u'<u. Så ∃ x∈A sådan at u′<x. Dette er i modstrid med at u' er øvre grænse. Dermed u≤u′ for alle øvre grænser u', dermed er u=SupA, altså passer (i). Dermed er de tre udsagn ækvivalente.

■

Sætning

Lad (F,+,·,>) være et ordnet legeme. Lad A være en ikke-tom delmængde af F, og l være nedre grænse for A. Så er følgende ækvivalente:
(i) l=InfA
(ii) For hvert ε>0, ε∈F, ∃ x∈A sådan at l+ε>x.
(iii) For hvert x∈F hvor x>l, ∃ y∈A sådan at x>y.

Bevis

Antag at (i) gælder. Givet et $\varepsilon>0$, $l+\varepsilon>l=\text{Inf}A$. Dermed $\exists\ x\in A$ sådan at $l+\varepsilon>x$, ellers ville $x\geq l+\varepsilon\ \forall\ x\in A$ hvilket vil betyde $l+\varepsilon$ er en nedre grænse for A, hvilket er i modstrid med at $l=\text{Inf}A$. Dermed passer (ii).
Antag at (ii) gælder. For ethvert $x\in F$ hvor der gælder $x>l$, kan tages $\varepsilon=x-l>0$. Dermed $\exists\ y\in A$ sådan at $\varepsilon+l>y$, altså er $x=l+(x-l)>y$. Dermed passer (iii).
Antag at (iii) gælder. Antag at der eksisterer en nedre grænse l' for A hvorom der gælder at $l'>l$. Så $\exists\ x\in A$ sådan at $l'>x$. Dette er i modstrid med at l' er nedre grænse. Dermed $l\geq l'$ for alle nedre grænser l', dermed er $l=\text{Inf}A$, altså passer (i).
Dermed er de tre udsagn ækvivalente.

■

Kilder brugt til udarbejdelsen af dette afsnit [Rana, 1998] og [Bartle, 2011].

Abstract

This thesis deals with mathematical analysis, in particular the construction of the real number system. The project will start with Peano's five axioms, which will be used to construct the natural number system, where it will be proven that this system is order complete and well-ordered.
From the natural numbers system I will construct the integer system, which also will be proven is order complete, further it will proven that the integer system is an ordered integral domain, and that the elements of the integer system can be created from a factorization of primes.
From the integer system I will construct the rational numbers system, which is an ordered field, for this system it will be proven that it is not order complete nor Cauchy complete. Ultimately the real numbers system will be constructed using two methods, Dedekind's method using Dedekind's cuts, and Cantor's method using Cauchy sequences. These two real numbers systems, will be proven to be the same system, constructed in different ways.
As the last thing in this thesis, it will be proven that the natural number, the integers and the rationals have the same number of elements or the same cardinality, while the real numbers have a higher cardinality.