ELEMENTÆR MÅLTEORI

SØREN NAUNDRUP

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Masterprojekt udarbejdet af Søren Naundrup
Vejleder Steen Andersson

Dato 19. december 2014.

Indholdsfortegnelse

1. Indledning 3
2. σ-algebraer og deres egenskaber 3
2.1. Om σ-algebraer. 3
2.2. Borel σ-algebraen 5
3. Mål. 7
3.1. Mål. 7
4. Målelige afbidninger of funktioner. 9
4.1. Målelige afbildninger. 9
4.2. Målelige funktioner. 10
5. Integration. 12
5.1. Simple målelige funktioner 12
5.2. Egenskaber af integralet for ikke-negative målelige funktioner. 15
5.3. Integralet af målelige funktioner. 21
6. Litteraturliste 26
26

Abstract. In this thesis the background for probability theory is described. First subsets of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$ are investigated and the concept of the Borel σ-algebra is developed, which ensures that the subsets are "well behaved" under common set operations. This is then used to define a measure, which is a mapping from a σ-algebra on a given set onto the real positive numbers including zero. This leads to the development of measurable functions and the connection between a measure and the integral is established. During the development of the measure theory an alternative version of the Riemann-integral is encountered, namely the Lebesgue integral, and some of its properties are investigated.

1. Indledning

I forbindelse med sandsynlighedsregning indgår ofte integraler, hvor Riemanns definition af integralet anvendes[2] på indledende niveauer. Denne definition har dog visse begrænsninger. Eksempelvis vil man gerne kunne ombytte sum og integraltegn på følgende måde.[2]

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Imidlertid vil Dirichlet funktionen, som er defineret på følgende måde,

$$f_q(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x = q \\ 0 \text{ for x} \neq \text{q} \end{cases}$$

for ethvert $q \in \mathbb{Q}, 0 < q \leq 1$, og funktionen, $f_q :]0;1] \to [0;\infty[$, give forskellige værdier om man anvender en undersum eller en oversum på funktionen, henholdsvis 1 og 0. Derfor introduceres Lebesgue integralet, som er robust over for netop disse ombytninger af sum og integraltegn. En yderlige fordel ved denne definition er, at den indeholder grundlaget for sandsynlighedsregning.
Da delmængderne af $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^n$ kan være "vilde", introduceres begrebet Borel-σ-algebraen, som har nogle passende egenskaber med hensyn til eksempelvis foreningsmængdedannelse.

2. σ-algebraer og deres egenskaber

2.1. Om σ-algebraer.

Definition 1. ***Potensmængder*** [3]
Lad X være en mængde. Ved potensmængden af X forstås mængden $\mathcal{D}(X)$ af alle delmængder af X, dvs.

$$\mathcal{D}(X) := \{E | E \subseteq X\}$$

□

Definition 2. ***σ-algebra*** [3]
Lad X være en ikke tom mængde. En delmængde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}(X)$ kaldes en σ-algebra, hvis følgende betingelser er opfyldt.

i) $X \in \mathcal{A}$,
ii) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^C \in \mathcal{A}$,
iii) $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$. □

Her betegner E^C komplementærmængden til $E \subseteq X$ og $\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}$.

Den største og mindste σ-algebra over X er $\mathcal{D}(X)$ og $\{\emptyset, X\}$, henholdsvis.
Det ses at de ovenstående betingelser i definitionen af σ-algebra medfører nedenstående egenskaber.

a) $\emptyset \in A$
b) $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$
c) $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$
d) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \backslash E_2 \in \mathcal{A}$
e) $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$

Egenskab a) følger af i) og ii).
Egenskab b) følger af iii) og a) idet man sætter $E_k = \emptyset$ for $k > n$.
Egenskab c) følger af ii) og b) ved anvendelse af DeMorgans love [4]
Egenskab d) følger af ii) og c) idet $E_1 \backslash E_2 = E_1 \cap E_2^C$.
Egenskab d) følger af iii) og b) igen ved anvendelse af DeMorgans love [4].

Man kan således kort og lidt upræcist sige, at en σ-algebra er lukket overfor endelige og numerable mængeoperationer.

Sætning 2.1. ***Fællesmængden af σ-algebraer***
Lad X være en mængde og lad $(\mathcal{A}_k)_{k\in M}$ være en samling af σ-algebraer på mængden X indiceret ved en mængde M. Da vil

$$\mathcal{A} = \bigcap_{k\in M} \mathcal{A}_k$$

også være en σ-algebra på X.

Bevis. Man undersøger de ovenstående tre betingelser i definition 2, af en σ-algebra en ad gangen, og hvis alle tre betingelser er opfyldt er sætningen bevist.
Da alle $\mathcal{A}_k$ er σ-algebraer vil $X \in \mathcal{A}_k,\ \forall\ k \in M$. Derfor vil $X \in \mathcal{A}$. Dermed er betingelse i) i definition 2 bevist.
Lad $E \in \mathcal{A}$. Da vil $E \in \mathcal{A}_k,\ \forall\ k \in M$. Da alle $\mathcal{A}_k$ er en σ-algebraer, gælder der også for $\forall\ k \in M$ at, $E^C \in \mathcal{A}_k$. Dette viser $E^C \in \mathcal{A}$ og dermed ii) i definition 2.
Lad $(E_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ være en numerabel samling af elementer i $\mathcal{A}$. Så er det også en numerabel samling af elementer i $A_k,\ \forall\ k \in M$. Da alle A_k er σ-algebraer, vil $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu \in \mathcal{A}_k,\ \forall\ k \in M$. Dette viser $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu \in \mathcal{A}$ og dermed iii) i definition 2.
Dermed er det vist at alle fællesmængder af σ-algebraer på en mængde X også er σ-algebraer på mængden X. □

Det er således muligt at tage fællesmængden af vilkårligt mange σ-algebraer på X og stadigt få en σ-algebra på X.

Eksempel 2.1. ***Eksempler på σ-algebraer***[3]
Hvis man tager udgangspunkt i en mængde X={1,2,3}, hvor potensmængden så bliver
$\mathcal{D}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$*, så er det muligt at lave følgende eksempler på σ-algebraer over $\mathcal{D}(X)$.*
$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$,
$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\} = \mathcal{D}(X)$,
$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$. □

Det ses let at betingelserne i definition 2 er opfyldt for alle tre eksempler. Her betegnes $\mathcal{A}_1$, der kun indeholder $\emptyset$ og hele X for den *trivielle* σ-algebra. $\mathcal{A}_2$ er derimod den største mulige mængde, som indeholder alle delmængder af X.

Sætning 2.2. ***Frembragte σ-algebraer***
Lad $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}(X)$ være en vilkårlig ikke tom mængde af delmængder af X. Da er

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \cap\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ er en } \sigma - algebra,\ \mathcal{F} \subseteq\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}(X)\},$$

den mindste σ-algebra $\mathcal{A}$ med $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Denne kaldes den af $\mathcal{F}$ frembragte σ-algebra.

Bevis: Antag at $\mathcal{A}$ er mindre end $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, dvs. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ og $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$. Da vil $\mathcal{A}$ indgå i fællesmængden, der definerer $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, dvs $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Dette er i modstrid med at $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. □

Bemærkning 2.1. *Hvis $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{D}(X)$ så vil $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}$.*
Hvis yderligere $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{F}_1}$ må $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}$, thi $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}$ er jo den mindste σ-algebra der indeholder $\mathcal{F}_2$, så derfor må $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1} \supseteq \mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}$, der da giver lighedstegnet. □

Som et eksempel på en σ-algebra frembragt af en delmængde ses $\mathcal{A}_3$ i Eksempel 2.1 , som er frembragt af mængden $\{1\}$.

2.2. **Borel σ-algebraen.**

Definition 3. ***Metriske rum.*** [4]
Et metrisk rum er en ikke tom mængde, S, udstyret med en metrik, dvs. en afbildning $d : S \times S \to [0; \infty[$, der opfylder de tre nedenstående betingelser.

(1) $d(x, y)) = d(y, x),\ \forall\ x, y \in S$
(2) $d(x, y) = 0\ \Leftrightarrow\ x = y,\ \forall\ x, y \in S$
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),\ \forall\ x, y, z \in S$

□

Her vil blive fokuseret på $\mathbb{R}^n$ med den sædvanlige metrik $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dvs. $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, hvor $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$.

Definition 4. ***Borel*** *σ-algebra.*
Lad (X, d) være et metrisk rum. Borel σ-algebraen på X, betegnet $\mathcal{B}_{(X,d)}$, $\mathcal{B}(X)$, eller blot $\mathcal{B}$, er defineret som σ-algebraen frembragt af de åbne mængder $\mathcal{O}$ af X, Dvs $\mathcal{B}_{(X,d)} := \mathcal{A}_{\mathcal{O}}$.

$\square$

Særligt vil der blive fokuseret på *Borel* σ-algebraer på $\mathbb{R}$ og mere generelt på $\mathbb{R}^n$.
Det vides fra analyse[4], at hvis X er et metrisk rum, så vil en enhver forening af åbne delmænger af X også være åben.
Borel σ-algebraen $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ på $\mathbb{R}$ indeholder trivielt alle de åbne intervaller, dvs alle intervaller af formen $]a, b[$ hvor $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, da de jo specielt er åbne delmængder.
Ifølge definition 2 ii) indeholder $\mathcal{B}$ også alle afsluttede delmængder af $\mathbb{R}$ og dermed også alle lukkede intervaller dvs. alle intervaller af formen $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$, af formen $]-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, og af formen $[a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.
Da $]a, b] =]-\infty, b] \setminus]-\infty, a]$, $-\infty \leq a < b < \infty$ og $[a, b[= [a, \infty[\setminus [b, \infty[$, $-\infty < a < b \leq \infty$ følger det af d) ovenfor, at $\mathcal{B}$ indeholder alle halvåbne intervaller, dvs alle intervaller af formen $]a, b] =]-\infty, b] \setminus]-\infty, a]$, $-\infty \leq a < b < \infty$ og alle intervaller af formen $[a, b[= [a, \infty[\setminus [b, \infty[$, $-\infty < a < b \leq \infty$.
Dvs $\mathcal{B}$ indeholder alle intervaller I. Intervallerne af formen $]-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$ betegnes med $I_]$.
Vi vil nu godtgøre at σ-algebraen $\mathcal{B}_{I_]}$ frembragt af intervallerne af formen $]-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, netop er Borel σ-algebraen $\mathcal{B}$.
Det er klart fra første halvdel af bemærkning 2.1 at $\mathcal{B}_{I_]} \subseteq \mathcal{B}$.
Ifølge den anden halvdel af bemærkning 2.1 er det nok at etablere at enhver åben delmængde af $\mathbb{R}$ tilhører $\mathcal{B}_{I_]}$.
Det bemærkes derfor først at enhver åben delmængde af $\mathbb{R}$ kan fås som en forening af åbne intervaller med rationale endepunkter. Dette resultat er kendt fra analysen og beviset herfor overspringes under alle omstændigheder. Denne forening må da være numerabel. Et åbent interval $]a, b[$ (med rationale endepunkter) kan opnås ved mængdedifferensen $]-\infty, b[\setminus]-\infty, a]$. Da yderligere $]-\infty, b[= \cup_{n=1}^{\infty}]-\infty, b - \frac{1}{n}]$ viser ovenstående at enhver åben delmængde af $\mathbb{R}$ kan fås som endelige eller numerable mængde operationer med intervaller af formen $]-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$ (endda med b rational). Dvs enhver åben delmænge af $\mathbb{R}$ tilhører $\mathcal{B}_{I_]}$.
Således er $\mathcal{B}_{I_]} = \mathcal{B}$.

På lignende måde kan man etablere at σ-algebraerne frembragt af alle intervaller, frembragt af de åbne intervaller, frembragt af de lukkede intervaller, frembragt af de halvåbne intervaller, frembragt af intervallerne af formen $]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$, frembragt af intervallerne af formen $[a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$, og frembragt af intervallerne af formen $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alle er identiske med Borel σ-algebraen $\mathcal{B}$ på $\mathbb{R}$. Dette gælder endda når vi yderligere kræver at endepunkter, der ikke er $\pm\infty$, er rationale tal.

Tilsvarende kan man udvide ovenstående til at gælde ikke bare for $\mathbb{R}$ til også for $\mathbb{R}^n$.

3. Mål.

3.1. **Mål.** Lad $(X, \mathcal{A})$ være *målelige rum*, dvs. $\mathcal{A}$ er σ-algebra på mængden X.

Definition 5. *En afbildning $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ kaldes et mål på det målelige rum $(X, \mathcal{A})$ hvis det opfylder følgende to betingelser:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) For enhver følge $E_1, E_2, \cdots$ af parvis disjunkte delmængder af X med $E_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, vil

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Betingelsen (ii) kaldes σ-additivitet.
Hvis yderligere $\mu(X) = 1$ kaldes μ også for et sandsynlighedsmål på $(X, \mathcal{A})$.
Når σ-algebraen $\mathcal{A}$ er underforstået siges blot at μ er et mål (sandsynlighedsmål) på X. □

Simple egenskaber forbundet med mål specielt sandsynlighedsmål:

a) $\mu(E_1 \cup ... \cup E_n) = \mu(E_1) + ... + \mu(E_n)$, når $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$ og mængderne er parvise disjunkte
b) $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$, når $E_1 \subseteq E_2$ og $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$
c) $\mu(E_2 \backslash E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1), E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ og $E_1 \subset E_2$ samt $\mu(E_1) < \infty$.

Disse simple egenskaber nævnt overfor bevises ved hjælp af definition 5: Sættes $E_k = \emptyset$ for $k > n$ i (ii) i definition 5 sikres egenskab a). Egenskaben i a) refereres til som *endelig additivitet.*
Egenskab b) kan bevises ved at skrive $E_2 = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)$. Her vil E_2 og $(E_2 \backslash E_1)$ være disjunkte. Derfor er $\mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2 \backslash E_1) \geq \mu(E_1)$.
Med udgangspunkt i det ovenstående kan man trække $\mu(E_1)$ fra på begge sider for at få egenskab c).

I forbindelse med mål defineres begreberne *kontinuitet* henholdsvis *opad* og *nedad.*

Sætning 3.1. ***Kontinuitet for mål***
Kontinuitet opad. *Lad μ være et mål på $(X, \mathcal{A})$. Hvis $E_1, ..., E_n, \cdots \in \mathcal{A}$ opfylder at $E_1 \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq \cdots$, så gælder der at,*

$$\mu(E_n) \to \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \ for \ n \to \infty.$$

Kontinuitet nedad. *Lad μ være et mål på $(X, \mathcal{A})$. Hvis $E_1, ..., E_n, \cdots \in \mathcal{A}$ opfylder at $E_1 \supseteq ... \supseteq E_n \supseteq \cdots$, og hvis $\mu(E_n) < \infty$ for mindst et n, så gælder der at,*

$$\mu(E_n) \to \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \ for \ n \to \infty$$

Bevis. Kun kontinuitet opad bevises, da kontinuitet nedad kan bevises helt analogt. Først opstilles følgende mængder,

$$F_1 = E_1, F_2 = E_2 \backslash E_1, F_3 = E_3 \backslash E_2, ..., F_n = E_n \backslash E_{n-1}, \cdots$$

Alle F mængderne udgør en disjunkt følge af $\mathcal{A}$-mængder, og $E_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$. Endelig additivitet giver for $n \to \infty$ at,

$$\mu(E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

□

Endelig kan Booles ulighed opstilles, som ligner (ii) fra definitionen 5, men hvor man arbejder med vilkårlige delmængder af σ-algebraen og ikke nødvendigvis parvis disjunkte delmængder.

Sætning 3.2. ***Booles ulighed***
Lad μ være et mål på $(X, \mathcal{A})$. For mængder $E_1, ..., E_n, \cdots \in \mathcal{A}$ gælder der at,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Bevis. Sæt $F_1 = E_1$ og $F_n = E_n \backslash (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)$ for i=1,2,3,...
Dermed ses det at alle F-mængderne udgør en disjunkt følge af $\mathcal{A}$-mængder, og $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Da $F_n \subseteq E_n$, vil $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$ og

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Dermed er Booles ulighed vist. □

Definition 6. ***μ-nulmængde***
Lad μ være et mål på $(X, \mathcal{A})$. En delmængde N af X kaldes en μ-nulmængde, hvis der findes en mængde $E \in \mathcal{A}$ således at,

$$N \subseteq E \text{ og } \mu(E) = 0$$

□

Bemærkning 3.1. *Hvis N er en μ-nulmængde* **OG** *$N \in \mathcal{A}$ så er $\mu(N) = 0$. I dette tilfælde kaldes N en målelig μ-nulmængde ellel blot en nulmængde.* □

Der gælder følgende sætning for μ-nulmængder, at en numerabel forening af nulmængder igen er en nulmængde.

Sætning 3.3. ***Forening af numerabel mange μ-nulmængder***
Hvis $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en følge af μ-nulmængder, så er $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, igen er en μ-nulmængde.

Bevis. For et hvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi vælge en mængde $E_n \in \mathcal{A}$, således at $N_n \subseteq E_n$ og sådan at $\mu(E_n) = 0$. Det følger så fra sætning 3.2 at,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}, \text{ og at } \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

□

4. Målelige afbidninger of funktioner.

4.1. Målelige afbildninger. Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være *målelige rum.*

Definition 7. ***Definitionen på målelig afbilding***
En afbildning $f : X \to Y$ siges at være målelig hvis $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ for ethvert $B \in \mathcal{B}$. Dette kan skrives kort som $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$. □

Bemærkning 4.1. ***Afbildninger bevarer mængdeoperationer.***
Givet en afbildning $f : X \to Y$, hvor X og Y blot er mængder. Da gælder følgende:
a) $f^{-1}(E^C) = f^{-1}(E)^C$,
b) $f^{-1}(\bigcup_{\nu \in M} E_\nu) = \bigcup_{\nu \in M} f^{-1}(E_\nu)$,
c) $f^{-1}(E_1 \backslash E_2) = f^{-1}(E_1) \backslash f^{-1}(E_2)$,
d) $f^{-1}(\bigcap_{\mu \in M} E_\mu) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(E_\mu)$,
for alle delmængder $E \subseteq Y$, $E_1 \subseteq Y$, $E_2 \subseteq Y$, og alle familier $(E_\mu)_{\mu \in M}$ af delmængder af Y, indiceret ved en mængde M.
Beviset for a), b), c), og d) ligger i den almene mængdelære, og vises derfor ikke her.

Sætning 4.1. ***Frembragte σ-algebraer og målelige afbildninger***
Hvis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{F}$ er σ-algebraen frembragt af $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}(Y)$, så er $f : X \to Y$ en målelig afbildning hvis og kun hvis $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}, \forall F \in \mathcal{F}$.

Bevis. "kun hvis" er trivielt. Vedrørende "hvis": Mængden $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}(Y)$ defineret ved,

$$\mathcal{M} := \{F \in \mathcal{D}(Y) | f^{-1}(F) \in \mathcal{A}\}$$

er en σ-algebra over Y. Per antagelse er $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}$ og derfor er $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}_\mathcal{F} = \mathcal{B}$, hvilket viser at f er målelig. □

Bemærkning 4.2. ***Indikatorfunktionen***
Lad $(X, \mathcal{A})$ være et måleligt rum. For en enhver delmængde A af X er indikatorfunktionen defineret som $1_A : X \to \mathbb{R}$,

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{hvis } x \in A^C \end{cases}.$$

Hvis $A \in \mathcal{A}$ så er indikatorfunktionen 1_A målelig, da

$$1_A^{-1}(B) = \begin{cases} X & \text{hvis } 0, 1 \in B \\ A & \text{hvis } 1 \in B \text{ og } 0 \notin B \\ A^C & \text{hvis } 0 \in B \text{ og } 1 \notin B \\ \emptyset & \text{hvis } 0, 1 \notin B \end{cases}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Det ses dermed at $1_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, for alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, som definition 7 kræver. □

Bemærkning 4.3. ***Den identiske afbildning***
Lad $(X, \mathcal{A})$ være et målbart rum. Den identiske afbildning fra X ind i X betegnet Id_X er givet ved

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_X : X &\to X\\ x &\mapsto x\end{aligned}$$

Denne afbildning er trivielt målelig, idet $\mathrm{Id}_X^{-1}(A) = A \in \mathcal{A}$ for alle $A \in \mathcal{A}$.

□

Sætning 4.2. ***Sammensætning af målelige funktioner***
Hvis $(Z,\mathcal{C})$, $(Y,\mathcal{B})$ og $(X,\mathcal{A})$ er målelige rum og afbildningerne $f : X \to Y$, og $g : Y \to Z$ er målelige, så vil $g \circ f : X \to Z$, også være målelig.

Bevis. For $C \in \mathcal{C}$ gælder

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A},$$

da $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. □

4.2. **Målelige funktioner.** Når Y er et metrisk rum, specielt $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$ er det underforstået at σ-algebraen $\mathcal{B}$ er Borel σ-algebraen. Når $Y = \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ kaldes σ-algebraen $\overline{\mathcal{B}}$ frembragt af $\mathcal{F} = \mathcal{B} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$, hvor $\mathcal{B}$ er Borel σ-algebraen på $\mathbb{R}$, for Borel σ-algebraen på $\overline{\mathbb{R}}$ og denne er også underforstået når $Y = \overline{\mathbb{R}}$.
Lad $(X, \mathcal{A})$ være et måleligt rum. Når $Y = \overline{\mathbb{R}}$ kaldes en målelig afbildning $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ også for en *målelig funktion.*
Mængden af målelige funktioner defineret på X betegnes med $\mathcal{M}(X)$. Mængden af ikke negative målelige funktioner defineret på X betegnes med $\mathcal{M}_+(X)$.
Regneregler for udtryk, der indeholder uendelig, division med 0, er per konvention givet i $\overline{\mathbb{R}}$ som:

$$\begin{aligned}
0 \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \cdot 0 = 0\\
a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \cdot a = \pm\infty, 0 < a < \infty\\
a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \cdot a = \mp\infty, -\infty < a < 0\\
\infty \cdot \infty &= \infty\\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0, a \in \mathbb{R}\\
|\frac{a}{0}| &= \infty, a \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}
\end{aligned}$$

Udtryk, der ikke er defineret, er eksempelvis; $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{0}{0}$ samt $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Målbare funktioner defineret på X kan alternativt defineres mere simpelt.

Sætning 4.3. *Hvis $(X, \mathcal{A})$ er et målbart rum, så er $f : X \to \mathbb{R}$ målelige, hvis og kun hvis en af de fire nedenstående betingelser er opfyldt.*

i) $\{x \in X | f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathbb{R}$
ii) $\{x \in X | f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathbb{R}$
iii) $\{x \in X | f(x) > a\} \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$
iv) $\{x \in X | f(x) \geq b\} \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$

Bevis. Beviser kun i), da resten kan bevises tilsvarende. "Kun hvis" er trivielt da $]-\infty, b[\in \mathcal{B}$. Da $\{x \in X | f(x) < b\} \in \mathcal{A}$ kan skrives som $f^{-1}(]-\infty; b[)$ følger det fra definition 4 og sætning 4.1, at f er en målelig funktion. □

Sætning 4.4. ***Regneregler for målelige funktioner***
Givet at $f, g \in \mathcal{M}(X)$, så gælder følgende regneregler,

i) $f + g \in \mathcal{M}(X)$
ii) $c \cdot f \in \mathcal{M}(X), c \in \mathbb{R}$
iii) $f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$
iv) $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(X), g \neq 0$

underforstået at udtrykket er defineret.

Bevis. Beviserne bygger på sætning 4.3. Beviser i).

$$\{x \in X | f(x) + g(x) < b\} = \bigcup_{\substack{q+r<b \\ q,r \in \mathbb{Q}}} \{x \in X | f(x) < q\} \cap \{x \in X | g(x) < r\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Hvilket medfører at f+g er målelig.
Beviser ii) Hvis $c > 0$ så vil $\{x \in X | c \cdot f(x) < b\} = \{x \in X | f(x) < \frac{b}{c}\}$, hvilket viser at $c \cdot f$ er målelig. Tilvarende kan det vises hvis $c < 0$ eller $c = 0$.
For at vise iii) er det nødvendig først at vise, at en målelig funktion ganget med sig selv også er målelig. Antager at $b > 0$, hvilket medfører at $\{x \in X | f(x)^2 < b\} = \{-\sqrt{b} < f(x) < \sqrt{b}\}$. Herefter kan det vises at $f \cdot g$ ligeledes er en målelig funktion, da $f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$. Dermed $f \cdot g$ også måleligt, under anvendelse af i) og at en målelig funktion opløftet i anden også er målelig.
Igen for at bevise iv), er det nødvendigt at vise $\frac{1}{g}, g \neq 0$, er målelig.

$$\{x \in X | \frac{1}{g(x)} < b\} = \begin{cases} \{x \in X | \frac{1}{b} < g(x) < 0\} & \text{hvis } b < 0 \\ \{x \in X | -\infty < g(x) < 0\} & \text{hvis } b = 0 \\ \{x \in X | -\infty \leq g(x) < 0\} \cup \{x \in X | \frac{1}{b} < g(x) \leq \infty\} & \text{hvis } b > 0 \end{cases}$$

Da $\frac{1}{g}$ er målelig, må $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ også være målelig □
Her gælder det at funktionerne skal overholde konventionen nævnt ovenfor med udtryk, der indeholder ∞.

Sætning 4.5. ***Funktionsfølger***
Hvis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en følge af målelige funktioner, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, så vil,

$$sup_{n \in \mathbb{N}} \ f_n, \ inf_{n \in \mathbb{N}} \ f_n, \ \limsup_{n \to \infty} \ f_n, \ \liminf_{n \to \infty} \ f_n$$

også være målelige funktioner på X.

Bevis. For ethvert $b \in \mathbb{R}$ gælder der at,

$$\{x \in X | \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X | f_n(x) \leq b\}$$

$$\{x \in X | \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X | f_n(x) < b\}$$

Hvilket viser at supremum og infimum af en målelig funktionsfølge også er målelige funktioner, derudover kan henholdsvis limes supremum og limes infimum også vises at være målelige funktioner, ved følgende omskrivninger,

$$\limsup_{n\to\infty} \ f_n = inf_{n\in\mathbb{N}} sup_{k\leq n} \ f_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} \ f_n = sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\leq n} \ f_k.$$

Med anvendelse af sætning 4.3, er det vist at de ovenstående funktioner er målelige.
□

Definition 8. ***Punktvis konvergens for funktionsfølger***
En følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af funktioner $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergerer punktvist til en funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, hvis $f_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$, for alle $x \in X$.

Sætning 4.6. ***Konvergente funktionsfølger***
Hvis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af målelige funktioner, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, og $f_n \to f$ punktvis for $n \to \infty$, så er $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ måleligt.

Bevis. Hvis $f_n \to f$ så,

$$f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

Under anvendelse af sætning 4.5, ses det at sætningen er vist. □

5. Integration.

5.1. **Simple målelige funktioner.**

Definition 9. ***Definition af en simpel målelig funktion***
Lad $(X, \mathcal{A})$ være et måleligt rum. En målelig funktion $s : X \to \mathbb{R}$ kaldes simpel, hvis den kun antager endelig mange værdier. Mængden af simple funktioner defineret på X betegnes med $\mathcal{SM}(X)$. Mængden af ikke-negative simple funktioner på X betegnes med $\mathcal{SM}(X)_+$.
Når mængden X er underforstået forkortes betegnelserne til $\mathcal{SM}$ og $\mathcal{SM}_+$, henholdsvis.

De simple funktioner kan alle på entydig måde skrives som $s = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, hvor $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ er de endelig mange **forskelige** værdier af s, og $A_i := \{x \in X | s(x) = a_i\} \in \mathcal{A}$. Vi bemærker at $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ derved er en klasseinddeling af X, dvs $A_1, \cdots, A_n$ er parvis disjunkte. De ikke-negative simple funktioner alle kan skrives på ovennævnte form med $a_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$.

Definition 10. ***Definition af μ-integralet for ikke-negative simple funktioner***
Hvis s er en ikke-negativ simpel funktion givet på den ovenævnte entydige form,

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot 1_{A_j},$$

hvor $a_1, ...a_n \geq 0$, vil definitionen af μ-integralet $I_\mu(s)$ af s være,

$$I_\mu(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) \in [0; \infty[$$

□

Vi noterer os følgende: Hvis en ikke negativ funktion har formen $t = \sum_{h=1}^{k} b_h \cdot 1_{B_h}$, hvor $b_h \in [0, \infty[$, $B_h \in \mathcal{A}$, for $h = 1, 2, \cdots, k$, $X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ og $B_1, \cdots, B_k$ er parvis disjunkte, så er t en ikke-negativ simpel målelig funktion og $I_\mu(t) = \sum_{h=1}^{k} b_h \mu(B_h)$. Bemærk at vi ikke kræver at b_h'erne er forskellige og at $B_h \neq \emptyset$, $h = 1, \cdots, k$. Dette indses ved først at udelade alle led med $B_h = \emptyset$ og derefter samle led der har fælles b_h.

Sætning 5.1. ***Egenskaber for μ-integralet for simple funktioner***
μ-integralet for ikke-negative simple funktioner har følgende egenskaber,

i) $I_\mu(1_A) = \mu(A), A \in \mathcal{A}$
ii) $I_\mu(a \cdot s) = a \cdot I_\mu(s), a \in [0; \infty[$
iii) $I_\mu(s + t) = I_\mu(s) + I_\mu(t)$, *s og t begge ikke-negative simple funktioner*
iv) $I_\mu(s) \leq I_\mu(t)$, *s og t begge ikke-negative simple funktioner og* $s \leq t$

Bevis. Egenskab i) og ii) følger direkte af definitionen 10. Beviser iii) ved at opskrive de to simple målelige funktioner s og t.

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot 1_{A_j}, \text{ og } t = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot 1_{B_k},$$

hvor $a_1, ...a_n, b_1, ..., b_m \geq 0$. Tilsvarende da $A_1, ..., A_j$ og $B_1, ...B_m$ udgør disjunke delmængder af X kan indikatorfunktionen skrives som,

$$1_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} 1_{A_j \cap B_k}, \text{ og } 1_{B_k} = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j \cap B_k},$$

Derfor kan man omskrive s og t ved anvendelse af det ovenstående og ende med følgende sum af s og t.

$$s + t = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \cdot 1_{A_j \cap B_k} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot 1_{A_j \cap B_k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \cdot 1_{A_j \cap B_k}.$$

Det følger så at μ-integralet for summen s+t kan skrives som,

$$\begin{aligned}
I_\mu(s+t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\cdot\mu(A_j\cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m}\mu(A_j\cap B_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n}\mu(A_j\cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\cdot 1_{A_j} + \sum_{k=1}^{m} b_j\cdot 1_{B_k} \\
&= I_\mu(s)+I_\mu(t)
\end{aligned}$$

Hvilket viser det ønskede. For at vise iv) anvendes ovenstående under antagelse af $s \leq t$, så vil t-s igen være en ikke-negativ simpel målelig funktion og man kan derfor skrive,

$$I_\mu(t) = I_\mu(s+(t-s)) = I_\mu(s)+I_\mu(t-s) \geq I_\mu(s)$$

Hvilket viser egenskab iv). □

Lad $\mathcal{M}_+(X)$ betegne mængden af de ikke-negative målelige funktioner på X. Når X er undeforforstået bruges også betegnelsen $\mathcal{M}_+$.

Definition 11. ***μ-integralet for ikke-negative målelige funktioner***
Hvis f er en ikke-negativ målelig funktion, da defineres μ-integralet af f, betegnet $\int f\,\mathrm{d}\mu$ af f ved,

$$\int f\,\mathrm{d}\mu := \sup(\{I_\mu(s) | s \in \mathcal{SM}_+ \wedge s \leq f\}) \in [0;\infty]$$

□

Man bruger også betegnelsen $\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ for μ-integralet af f.
Hvis $\int f\mathrm{d}\mu < \infty$ siges f at være *μ-integrabel* med integral $\int f\mathrm{d}\mu$.
Hvis $\int f\mathrm{d}\mu = \infty$ siges f at være *udvidet μ-integrabel* med integral ∞.

Sætning 5.2. *For en enhver funktion $s \in \mathcal{SM}_+$ gælder følgende,*

$$\int s\,\mathrm{d}\mu = I_\mu(s)$$

Bevis. Lad s være en ikke-negative simpel funktion. Da er $I_\mu(s)$ selv et element i den mængde, der tages supremum over i definition 11, og derfor ses det at,

$$I_\mu(s) \leq \int s\,\mathrm{d}\mu$$

Omvendt, hvis t ligeledes er en ikke-negative simpel funktion, således at $t \leq s$, da vil $I_\mu(t) \leq I_\mu(s)$, og det følger igen fra definition 11 at,

$$\int s\,\mathrm{d}\mu \leq I_\mu(s)$$

Dermed ses det, at der må gælde at venstresiden er lig højresiden. □

Lemma 5.1. *Lad $f \in \mathcal{M}_+(X)$.*
(i) Da findes en voksende følge
$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$ *af ikke-negative simple funktion således at* $\lim_{n\to\infty} s_n = f$.
(ii) For ensådan følge gælder da, at $\lim_{n\to\infty}\int s_n\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu$.

Bevis. Kun (i) vises medens (ii) overspringes. Lad $f \in \mathcal{M}_+(X)$. Da vælges for hvert $n \in \mathbb{N}$ den målelige ikke negative funktion $s_n : X \to [0, \infty[$ givet ved

$$s_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq f(x) < \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} & \text{for} \quad \frac{1}{2^n} \leq f(x) < \frac{2}{2^n} \\ \frac{2}{2^n} & \text{for} \quad \frac{2}{2^n} \leq f(x) < \frac{3}{2^n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{k}{2^n} & \text{for} \quad \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{n2^n-1}{2^n} & \text{for} \quad \frac{n2^n-1}{2^n} \leq f(x) < n \\ n & \text{for} \quad n \leq f(x) \leq \infty \end{cases}, \quad x \in X.$$

Man ser da at $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$ og at $s_n \to f$ for $n \to \infty$. □

5.2. **Egenskaber af integralet for ikke-negative målelige funktioner.**

Sætning 5.3. ***Simple egenskaber ved integraler for ikke-negative målelige funktioner***
Følgende egenskaber gælder for integralet, når f og $g \in \mathcal{M}_+$.

i) $\int 1_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$, *for enhver mængder $A \in \mathcal{A}$*
ii) $\int c \cdot f \,\mathrm{d}\mu = c \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu$, $c \in [0; \infty]$
iii) $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$
iv) $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$, *hvis $f \leq g$*

Bevis. Beviset for i) følger af definition 10 og sætning 5.2.
Egenskab ii) for $c < \infty$ bevises ved at vælge en følge (s_n) sådan, at $s_n \uparrow f\ for\ n \to \infty$ og s_n er en ikke-negativ simpel funktion. Dermed gælder der at for ethvert n, at $c \cdot s_n$ igen er en ikke-negativ simpel funktion og at $c \cdot s_n \uparrow c \cdot f\ for\ n \to \infty$. Der gælder derfor,

$$\int c \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} I_\mu(c \cdot s_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n) = c \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Når $c = \infty$ kan ii) verificeres direkte.
For at vise iii) vælges analogt til ovenstående igen to følger af funktioner som tilhører de ikke-negative simple målelige funktioner, sådan at $s_n \uparrow f$ og $t_n \uparrow g$ for $n \to \infty$. Dermed bliver det igen til,

$$\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} (I_\mu(s_n) + I_\mu(t_n)) = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$$

Egenskaben iv) vises som egenskab iv) i sætning 5.1. □

Sætning 5.4. ***Monoton konvergens***
Hvis (f_n) er en følge af funktioner fra $\mathcal{M}_+$, således at, $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Da vil funktionen, $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$, igen tilhøre $\mathcal{M}_+$, og der gælder yderligere,

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \equiv \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Bevis. Da f_n er en voksende følge ses det at $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$, og den følge vil igen være et element i $\mathcal{M}_+$. Det ses yderligere at, $\int f_n \,\mathrm{d}\mu$ er voksende for n, og der gælder at, $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int f \,\mathrm{d}\mu$ for alle n. Dermed ses det at,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int f \,\mathrm{d}\mu$$

Der gælder yderligere lighedstegn mellem de sidste to led, men dette vises ikke. □

Sætningerne,bemærkningerne og eksemplerne i resten af afsnittet er hovedsagligt baseret på [1].

Sætning 5.5. ***Karakterisering af integralet af ikke-negative målelige funktioner***
Lad μ være et mål på $(X, \mathcal{A})$. Integralet mht. til μ af de ikke-negative målelige funktioner kan karakteriseres som den entydige afbildning $I_\mu \equiv I : \mathcal{M}_+ \to [0;\infty]$, der opfylder følgende fire egenskaber.

i) $I(1_A) = \mu(A),\ A \in \mathcal{A}$
ii) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2),\ f_1, f_2 \in \mathcal{M}_+$
iii) $I(c \cdot f) = c \cdot I(f),\ c \in [0;\infty], f \in \mathcal{M}_+$
iv) $\lim_{n\to\infty}(I(f_n)) = I(\lim_{n\to\infty} f_n)$,

for en enhver voksende følge $f_1 \leq f_2 \leq ...$ af funktioner fra $\mathcal{M}_+$. □

Bevis. I dette bevis vises kun at en sådan afbildning er entydig. Beviset for at der eksisterer en afbildning overspringes. Hvis $s = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}$ er simpel, målelig, og ikke-negativ, $(a_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, n)$ så må ifølge ii), iii), og i)

$$I(s) = I(\sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n I(a_i \cdot 1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot I(1_{A_i}).$$

Dette viser at I er entydig på de målelige, og ikke-negative simple funktioner. Ifølge lemma 5.1 er enhver funktion $f \in \mathcal{M}_+$ grænseværdi for en stigende følge, $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$, af simple, målelige, og ikke-negative funktioner, dvs. $f = \lim_{n\to\infty} s_n$. Således må ifølge iv)

$$I(f) = I(\lim_{n\to\infty} s_n) = \lim_{n\to\infty} I(s_n),$$

der viser at I må være entydig på $\mathcal{M}_+$. □

Bemærkning 5.1. ***Sammenhæng mellem sætning 5.5 og integralet***
Afbildningen som opfylder sætning 5.5 er specifikt givet ved,

$$I_\mu(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{M}_+$$

□

Det er muligt at anvende summmer på samme måde som grænseværdierne, som følgende bemærkning viser.

Bemærkning 5.2. ***Alternativ til egenskab iv).***
Lad $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}_+$. Da vil

$$I_\mu(\sum_{n=1}^\infty f_n) = \sum_{n=1}^\infty I_\mu(f_n)$$

Bevis. Følger af egenskab ii) og af at $f_1, f_1 + f_2, \cdots, \sum_{i=1}^n f_i, \cdots$ er en stigende følge af ikke-negative målelige funktioner med grænsefunktion $\sum_{i=1}^\infty f_i$. □

Bemærkning 5.3. *Lad $f, g \in \mathcal{M}_+$ med $g \geq f$. Da vil $\int g d\mu \geq \int f d\mu$, thi $g = f + (g - f)$ hvis vi definerer $g(x) - f(x) = 0$ når $g(x) = f(x)$. Da vil $g - f \in \mathcal{M}_+$ og ifølge sætning 5.5 (ii) vil da $\int g d\mu = \int (f + (g - f)) d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f d\mu$.* □

Bemærkning 5.4. ***Endelig afbildning***
Lad $f \in \mathcal{M}_+$. Følgende ulighed er gældende,

$$f \geq \infty \cdot 1_{\{x \in X | f(x) = \infty\}}.$$

Hvilket viser at $\int f d\mu \geq \int \infty \cdot 1_{\{x \in X | f(x) = \infty\}} = \infty \cdot \mu(\{x \in X | f(x) = \infty\})$. Således må $\mu(\{x \in X | f(x) = \infty\}) = 0$, dvs $\{x \in X | f(x) = \infty\}$ er en nulmængde, hvis $\int f d\mu < \infty$. □

Bemærkning 5.5. *Da $1_{\{x \in X | 0 < f(x)\}} \leq \infty \cdot f$ vil $\mu(\{x \in X | 0 < f(x)\}) \leq \infty \int f d\mu$. Dette viser at $\int f d\mu = 0$ medf orer at $\mu(\{x \in X | 0 < f(x)\}) = 0$. Omvendt: Da $f \leq \infty \cdot 1_{\{x \in X | 0 < f(x)\}}$ er også $\int f d\mu \leq \infty \mu(\{x \in X | 0 < f(x)\})$. Dette viser at $\mu(\{x \in X | 0 < f(x)\}) = 0$ medfører at $\int f d\mu = 0$. Alt i alt har vi at $\int f d\mu = 0$ hvis og kun hvis $\mu(\{x \in X | 0 < f(x)\}) = 0$.* □

Bemærkning 5.6. *Ifølge bemærkning 5.5 kan bemærning 5.3 tilføjes: Hvis $g \geq f$ og $\int g d\mu = \int f d\mu$ så må $\{x \in X | g(x) = f(x)\}$ være en μ-nulmængde.* □

Fra sætning 5.5 iv) og bemærkning 5.3 følger *Fatous lemma*:

Lemma 5.2. ***Fatous lemma***
For en hver følge (f_n) af funktioner fra $\mathcal{M}_+$ gælder, der at $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$, og at,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Bevis.

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu = \int (\lim_{n\to\infty} (\inf_{k:n\leq k} f_k)) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\inf_{k:n\leq k} f_k) d\mu \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k:n\leq k} \int f_k d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

□

Sætning 5.6. ***Afbildninger mellem to målelige rum***
Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være målelige rum, μ et mål på $(X, \mathcal{A})$, og lad $H : \mathcal{M}_+(Y) \to \mathcal{M}_+(X)$ være en afbildning fra de ikke-negative målelige funktioner på Y ind i de ikke-negative målelige funktioner på X med følgen tre egenskaber

i) $H(c \cdot f) = c \cdot H(f),\ c \in [0; \infty],\ f \in \mathcal{M}_+(Y)$
ii) $H(f + g) = H(f) + H(g),\ \ f, g \in \mathcal{M}_+(Y)$
iii) $H(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} H(f_n)$

for enhver voksende følge af funktioner, $f_1 \leq f_2 \leq ...$, af funktioner fra $\mathcal{M}_+(Y)$. Ved

$$\nu(B) = \int H(1_B) d\mu \equiv I_\mu(H(1_B)), B \in \mathcal{B},$$

defineres et mål på $(Y, \mathcal{B})$, og,

$$\int f d\nu = \int H(f) d\mu, f \in \mathcal{M}_+(Y).$$

Bevis. Som før ses det at hvis $f \leq g$, $f, g \in \mathcal{M}_+(Y)$, vil det medføre at, $H(f) \leq H(g)$ og at man analogt til sætning 5.5 og bemærkning 5.2 kan erstatte egenskaben iii) i ovenstående med, $H(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} H(f_n)$, for en enhver følge af funktioner fra $\mathcal{M}_+(Y)$. Hvis $B_1, B_2, ...$ er er en følge af parvis disjunke mængder fra $\mathcal{B}$ og $B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, er indikatorfunktionen $1_{B_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}$. Dette medfører følgende omskrivning,

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = I_\mu(H(1_{B_0})) = I_\mu(H(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}))$$
$$= I_\mu(\sum_{n=1}^{\infty} H(1_{B_n})) = \sum_{n=1}^{\infty} I_\mu(H(1_{B_n})) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n)$$

Dermed er det vist at ν er et mål på $(X, \mathcal{A})$. □

Den sidste påstand følger idet højresiden $\int H(f) d\mu$ opfylder egenskaberne i sætning 5.5 for integralet mht. ν.

Eksempel 5.1, Eksempel 5.2, og Eksempel 5.3 er alle vigtige specialtilfælde af Sætning 5.6, der alle spiller en fremtrædende rolle i sandsynlighedrefning og statistik.

Eksempel 5.1. ***Mål med tæthed***
Lad μ være et mål på $(X, \mathcal{A})$ og lad $f_0 \in \mathcal{M}_+(X)$. Afbildningen $H : \mathcal{M}_+(X) \to \mathcal{M}_+(X)$ givet ved

$$H : \mathcal{M}_+(X) \to \mathcal{M}_+(X)$$
$$f \mapsto f_0 \cdot f$$

opfylder klart de tre egenskaber i sætning 5.6: Først godtgøres i).

$$H(c \cdot f) = f_0 \cdot c \cdot f = c \cdot f_0 \cdot f = c \cdot H(f).$$

Tilsvarende vises ii)

$$H(f + g) = f_0(f + g) = f_0 \cdot f + f_0 \cdot g = H(f) + H(g).$$

Endelig vises den sidste egenskab iii). Antag at, $f_1 \leq f_2 \subseteq ... \leq f_n \leq ... \in \mathcal{M}_+(X)$.

$$H(\lim_{n\to\infty} f_n) = f_0 \cdot \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_0 \cdot f_n = \lim_{n\to\infty} H(f_n).$$

Således er $\nu(A) := \int 1_A f_0 d\mu$ et mål på $(X, \mathcal{A})$ der betegnes $\nu =: f_0\mu$ og

$$\int f d\nu \equiv \int f d f_0 \mu = \int f f_0 d\mu.$$

Skrevet på integralform bliver det til,

$$\int f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) = \int f_0(x) \cdot f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

Målet ν siges at have tæthed f_0 mht. μ

□

Eksempel 5.2. ***Transformation af mål***
Lad $t : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ *være en målelig afbildning og lad* μ *være et mål på* $(X, \mathcal{A})$. *Afbildningen* $H : \mathcal{M}_+(Y) \to \mathcal{M}_+(X)$ *givet ved*

$$\begin{aligned} H : \mathcal{M}_+(Y) &\to \mathcal{M}_+(X) \\ f &\mapsto f \circ t \end{aligned}$$

opfylder klart de tre egenskaber i sætning 5.6: Først godtgøres i).

$$H(c \cdot f) = (c \cdot f) \circ t = c \cdot (f \circ t) = c \cdot H(f).$$

Tilsvarende vises ii)

$$H(f + g) = (f + g) \circ t = (f \circ t) + (g \circ t) = H(f) + H(g).$$

Endelig vises den sidste egenskab iii). Antag at, $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq ... \in \mathcal{M}_+(Y)$.

$$H(\lim_{n\to\infty} f_n) = (\lim_{n\to\infty} f_n) \circ t = \lim_{n\to\infty} (f_n \circ t) = \lim_{n\to\infty} H(f_n).$$

Således er det nye mål ν *på* $(Y, \mathcal{B})$ *givet ved*

$$\nu(B) = \int (1_B \circ t) d\mu = \int 1_{t^{-1}(B)} d\mu = \mu(t^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Målet ν *betegnes* $t(\mu)$ *og kaldes det ved* t *transformerede mål af* μ. *Integrationsformlen er givet ved,*

$$\int f d\nu \equiv \int f \,\mathrm{d}t(\mu) = \int (f \circ t) \,\mathrm{d}\mu$$

Eksempel 5.3. ***Linearkombinationer af mål***
Lad $E = \{1, 2, ..., n\}$ *og* $\mathcal{A} = \mathcal{D}(X)$. *Lad målet* μ *på* X *være givet ved punktmasserne* $\mu(\{i\}) = \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n..$ *Lad* $\nu_i, i = 1, 2, ..., n$, *alle være et mål på* $(Y, \mathcal{B})$. *Afbildningen,*

$$\begin{aligned} H : \mathcal{M}_+(Y) &\to \mathcal{M}\{1, 2, ..., n\} \\ f &\to (i \to \int f d\nu_i). \end{aligned}$$

ses at opfylde betingelserne i sætning 5.6: Dette følger af egenskaberne ved integralerne mht ν_i, $i = 1, 2, ..., n$. *Det nye mål på* ν *på* Y *er givet ved at,*

$$\nu(B) = \int H(1_B) \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} H(1_B)(i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (\int 1_B d\nu_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i(B), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Dette mål ν *kaldes linearkombinationen af målene* $\nu_i, \nu_2, ..., \nu_n$ *med vægte* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *og betegnes* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i$. *Integrationsformlerne er da,*

$$\int f d\nu \equiv \int f \,\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\int f \,\mathrm{d}(\nu_i)), \quad f \in \mathcal{M}_+(Y)$$

Særligt er $\int f \,\mathrm{d}(\nu_1 + \nu_2) = \int f \,\mathrm{d}\nu_1 + \int f \,\mathrm{d}\nu_2$.

□

Eksempel 5.4. ***Tællemålet***
Tællemålet på en vilkårlig mængde X er defineret på σ-algebraen $\mathcal{D}(X)$, ved $\mu(X) = |X|$, hvor $|X|$ er mængdens kardinaltal. Vi viser nu at,

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\boldsymbol{A} \textbf{\textit{ endelig}}} (\sum_{x \in A} f(x)) =: \sum_{x \in X} f(x) \tag{1}$$

for enhver ikke-negativ funktion, $f : X \to [0; \infty]$. Hvilket betyder at integrationen af en **ikke-negative** *funktion med hensyn til tællemålet er summation. For A endelig er $f \geq \sum_{x\in A} f(x) \cdot 1_{\{x\}}$, og derfor er $\int f d\mu \geq \sum_{x\in A} f(x) \int 1_{\{x\}} d\mu = \sum_{x\in A} f(x)\mu(\{x\}) = \sum_{x\in A} f(x)$. Dette viser $\geq$ i (1). Hvis højre side af (1) er ∞ er der således lighedstegn idet $\leq$ trivielt gælder. For nu at vise lighedstegnet kan man antage at*
$\sup_{\boldsymbol{A} \textbf{\textit{ endelig}}}(\sum_{x\in A} f(x)) < \infty$. Da vil $S = \{x \in X | 0 < f(x)\}$ være tællelig. Af ligheden $f = \sum_{x\in S} f(x) \cdot 1_{\{x\}}$ følger det, at $\int f d\mu = \int \sum_{x\in S} f(x) \cdot 1_{\{x\}} d\mu = \sum_{x\in S} f(x) \cdot \int 1_{\{x\}} d\mu = \sum_{x\in S} f(x) = \sup_{\boldsymbol{A} \textbf{\textit{ endelig}}}(\sum_{x\in A} f(x))$. $\square$

Eksempel 5.5. ***Lebesguemålet***
Lebesguemålet, λ, på $\mathbb{R}$ er målet på Borel-algebraen, $\mathcal{B}$, givet ved at $\lambda([a; b]) = b - a$ for $-\infty < a \leq b < \infty$, eller med andre ord er Lebesguemålet af et endeligt interval blot intervallængden. Et sådant mål er entydigt og eksisterer. Bevises for dette overspringes.
For en kontinuert funktion, $f : [a; b] \to [0; \infty[$, der er defineret på et endeligt og afsluttet interval, vises der nu at,

$$\int 1_{[a;b]} \cdot f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x,$$

hvor højresiden er det klassiske Riemann integral, som en bestemt som en grænseværdi for en følge af undersummer, eksempelvis,

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{i,n},$$

hvor $c_{i,n} = \inf\{f(x) | x \in I_{i,n}\}$ og $I_{i,n} = [a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)], i = 1, 2, ..., n, n = 1, 2, ...$. Sæt $f_n = \sum_{n=1}^{n} c_{i,n} \cdot 1_{I_{i,n}}$. Da vil

$$I_\lambda(f_n) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n} \cdot I_\lambda(1_{I_{i,n}}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n} \cdot \lambda(I_{i,n}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}.$$

Idet følgen $f_1, f_2, ..., f_{2^k}, ...$ er voksende, hvilket svarer til at man betragter en finere og finere inddeling, med grænsefunktionen $1_{[a;b]} \cdot f$ er,

$$I_\lambda(1_{[a;b]} \cdot f) = \lim_{k\to\infty} I_\lambda(f_{2^k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} c_{i,2^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}.$$

Hvilket viser det ønskede. Tilsvarende kan man bestemme integralet af kontinuerte funktioner der er defineret på ikke-afsluttede intervaller og\eller uendelige intervaller. Eksempelvis er,

$$\begin{aligned} I_\lambda(1_{]a;b]} \cdot f) &= \lim_{n\to\infty} I_\lambda(1_{[a+\frac{1}{n};b]} \cdot f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \\ I_\lambda(1_{[a;\infty]} \cdot f) &= \lim_{n\to\infty} I_\lambda(1_{[a;n]} \cdot f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \\ I_\lambda(f) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^n f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Endelig kan man gå videre med,

$$\begin{aligned} I_\lambda(f) &= I_\lambda(1_{]-\infty;a]} \cdot f + 1_{[a;a]} \cdot f + 1_{[a;\infty[} \cdot f) \\ &= I_\lambda(1_{]-\infty;a]} \cdot f) + I_\lambda(1_{[a;a]} \cdot f) + I_\lambda(1_{[a;\infty[} \cdot f). \end{aligned}$$

Da

$$I_\lambda(1_{[a;a]} \cdot f) = I_\lambda(1_{\{a\}} \cdot f(a)) = f(a) \cdot \lambda(\{a\}) = 0 = I_\lambda(1_{]-\infty;a[} \cdot f) + I_\lambda(1_{]a;\infty} \cdot f),$$

kan man bestemme integralet af en stykvis kontinuert funktion ved at opdele i intervaller, hvor funktionen er kontinuert.

□

5.3. **Integralet af målelige funktioner.**
Hvis den målelige funktion f ikke nødvendigvis er ikke-negativ, dvs $f \in \mathcal{M}(X)$, deler man funktionen op i dens positiv del, defineret som, $f^+ = maks(f, 0) \in \mathcal{M}_+(X)$ og dens negativ del, $f^- = maks(-f, 0) \in \mathcal{M}_+(X)$. Dermed ses det at, $f = f^+ - f^-$, idet $f^+(x) - f^-(x)$ altid er defineret idet de to tal $f^+(x)$ og $f^-(x)$ ikke begge kan være ∞, $x \in X$. Resten af afsnittet er hovedsagligt baseret på [2].

Definition 12. ***Integration af generelle funktioner***
Givet et måleligt rum $(X, \mathcal{A})$ med et mål μ på dette rum, så vil integrationen af en målelig funktion f, der både kan antage positive og negative værdier, $f \in \mathcal{M}(X)$, formelt være givet ved følgende definition,

$$\int f\,\mathrm{d}\mu := \int f^+\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\,\mathrm{d}\mu.$$

Funktionen f siges da at være μ-integrabel hvis både $\int f^+\,\mathrm{d}\mu$ og $\int f^-\,\mathrm{d}\mu$ er endelige og μ-integralet defineres som angivet ovenfor.
I tilfældet hvor $\int f^+\,\mathrm{d}\mu = \int f^-\,\mathrm{d}\mu = \infty$, er det jævnfør konventionen om regning i $\overline{\mathbb{R}}$, se side 10, ikke muligt at tildele integralet en værdi, og f er da ikke integrabel.
I det tilfælde at kun et af integralerne $\int f^+\,\mathrm{d}\mu = \infty$ eller $\int f^-\,\mathrm{d}\mu = \infty$, siges integralet at være udvidet integrabel, og det ses at $\int f\,\mathrm{d}\mu$ enten antager værdien ∞ eller $-\infty$.

□

Ovenstående definition er i overensstemmelse med tidligere definitioner af integralet af ikke-negative målelige funktioner.

Sætning 5.7. *En funktion $f \in \mathcal{M}$ er μ-integrabel hvis og kun hvis $|f|$ er μ-integrabel og i dette tilfælde gælder at*

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$$

Bevis. Da $|f| = f^+ + f^-$ vil $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$. Således er $\int f^+ d\mu < \infty$ og $\int f^- d\mu < \infty$ hvis og kun hvis $\int |f| d\mu < \infty$. Dette viser hvis og kun hvis delen af sætningen.
Endvidere er $|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$. □

Vi undersørger nu i hvilken forstand egenskaberne ii), iii) og iv) i sætning 5.3 kan udvides til også at gælde for udvidelsen af integralet til de ikke nødvendigvis ikke negative målelige funktioner.
Vi begynder med egenskaben ii). Hvis $c = 0$, er beviset trivielt. For tilfældet, hvor $c > 0$ er $(cf)^+ = cf^+$ og $(cf)^- = cf^-$. Derfor er
$\int c \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int (c \cdot f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (c \cdot f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int c \cdot f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int c \cdot f^- \,\mathrm{d}\mu =$
$c \cdot \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - c \cdot \int f^- \,\mathrm{d}\mu = c \cdot (\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu) = c \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu$.
For tilfælde, hvor $c < 0$ behøver vi derfor kun at betragte tilfældet $c = -1$. Her gælder følgende, $(-f)^+ = f^-$, og tilsvarende $(-f)^- = f^+$. Derfor er
$\int (-f) \,\mathrm{d}\mu = \int (-f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int f^- \,\mathrm{d}\mu - \int f^+ \,\mathrm{d}\mu =$
$-(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu) = -\int f \,\mathrm{d}\mu$.
For målelige funktioner på X gælder således følgende version af ii):

Sætning 5.8. *Hvis $f \in \mathcal{M}$ er μ-integrabel så er cf også μ-integrabel, $c \in \mathbb{R}$, og*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

Den tilsvarende version af iii) tager formen:

Sætning 5.9. *Hvis $f, g \in \mathcal{M}$ begge er μ-integrable så er $f + g$ også μ-integrabel og*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \tag{2}$$

[Her forudsættes det selvfølgelig at $f + g$ er defineret, dvs at $f(x)$ og $g(x)$ ikke er ∞ med modsat fortegn.]

Bevis. Da f og g begge er integrable, dvs $\int |f| d\mu < \infty$ og $\int |g| d\mu < \infty$, se sætning 5.7. Da $|f + g| \leq |f| + |g|$ vil $\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu$. Derfor vil $\int |f + g| d\mu < \infty$. Igen ifølge sætning 5.7 vil $f + g$ således være integrabel.
For nemheds skyld antages nu at f og g ikke antager værdierne $\pm\infty$. Af ligheden $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ føger da ligheden $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. Da de tre funktioner på begge sider alle er målelige og ikke-negative vil

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Da alle led er endelige er dette ensbetydende med

$$\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = (\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu) + (\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu),$$

der jo netop er (2). □

Sætning 5.10. *Lad $f, g \in \mathcal{M}$ begge være μ-integrable. Hvis $f \leq g$ så er*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu. \tag{3}$$

Lighedstegnet i (3) gælder hvis og kun hvis $\{x \in X | f(x) < g(x)\}$ er en μ-nulmængde.

Bevis. Funktionen $g - f \in \mathcal{M}_+$, idet vi sætter $g(x) - f(x) = 0$ når $f(x) = g(x) = \pm\infty$. Da $|g - f| \leq |g| + |f|$ er den definerede funktion $g - f$ integrabel og $g = f + (g - f)$. Da $g - f \in \mathcal{M}_+$ er $\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f d\mu$. Der er lighedstegn hvis og kun hvis $\int (g - f) d\mu = 0$. Sætningens sidste påstand følger nu af bemærkning 5.5. □

Der gælder følgende betragtninger for funktioner der tilhører $\mathcal{M}$.

Hvis f er integrabel $\Rightarrow \{x \in X | f(x) = \pm\infty\}$ er en μ-nulmængde.

Hvilket betyder at integralet, der er defineret i definition 12, at følgende mængder også er en μ-nulmængder.

$$\{x \in X | f^+(x) = \infty\}$$
$$\{x \in X | f^-(x) = \infty\}$$
$$\{x \in X | f^+(x) = -\infty\}$$
$$\{x \in X | f^-(x) = -\infty\}$$

Der gælder tilsvarende grænsesætninger for funktioner, der tilhører $\mathcal{M}$, som også gælder for funktioner, der tilhører $\mathcal{M}_+$.

Her vises først sætningen om monoton konvergens, der svarer til sætning 5.5, punkt iv).

Lemma 5.3. *Lad $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n \geq \cdots$ være dalende følge af ikke-negative μ-integrable funktioner. Da vil $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$. Da vil $\lim_{n\to\infty} f_n$ være μ-integrabel og*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{4}$$

Bevis. Som sædvanlig defineres $f_1 - f_n \in \mathcal{M}_+$, hvor vi sætter $f_1(x) - f_n(x) = 0$ når $f_1(x) = f_n(x) = \infty$, $n = 1, 2, \cdots$. Da vil $f_1 = f_n + (f_1 - f_n)$. Derfor er $\int f_1 d\mu = \int f_n d\mu + \int (f_1 - f_n) d\mu$. Således er $\int (f_1 - f_n) d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_n d\mu$. Da også $\lim_{n\to\infty} f_n \leq f_1$ vil $\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu < \infty$.

Den definere funktionsfølgen $(f_1 - f_n)$ er voksende. Der gælder også at $\lim_{n\to\infty}(f_1 - f_n) = f_1 - \lim_{n\to\infty} f_n$. Ifølge egenskaben for **voksende** funktionsfølger er $\int f_1 d\mu - \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int (f_1 - \lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \int \lim_{n\to\infty}(f_1 - f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_1 - f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty}(\int f_1 d\mu - \int f_n d\mu) = \int f_1 d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$, der jo er ensbetydende med (4). □

Sætning 5.11. ***Monoton konvergens for funktioner, der tilhører $\mathcal{M}$.***
Lad $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq ... \in \mathcal{M}$ være en voksende funktionsfølge af μ-integrable funktioner. Da vil $\lim_{n\to\infty} f_n$ være μ-integrabel hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$ og i dette tilfælde er

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{5}$$

Bevis. Der gælder, at $f_n = f_n^+ - f_n^-$, $f_n^+, f_n^- \in \mathcal{M}_+$, og det ses at (f_n^+) er en stigende funktionsfølge, og (f_n^-) er en dalende funktionsfølge fra $\mathcal{M}_+$ samt at $(\lim_{n\to\infty} f_n)^+ = \lim_{n\to\infty} f_n^+$ og at $(\lim_{n\to\infty} f_n)^- = \lim_{n\to\infty} f_n^-$. Alle funktioner f_n^+ og f_n^- er således antaget at være μ-integrable. Ifølge lemma 5.3 vil $\lim_{n\to\infty} f_n^-$ være μ-integrabel og $(\int \lim_{n\to\infty} f_n)^- d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n^- d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n^- d\mu < \infty$.
For den voksende følge (f_n^+) gælder altid at $\int \lim_{n\to\infty} f_n^+ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\mu$ med mulighed for $+\infty$ på begge sider af lighedstegnet.
Antag nu først at $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$. Da $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}(\int f_n^+ d\mu - \int f_n^- d\mu)$ og $\lim_{n\to\infty} \int f_n^- d\mu < \infty$ følger det at også at $\lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\mu < \infty$. Dvs $\infty > \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n^+ d\mu = \int (\lim_{n\to\infty} f_n)^+ d\mu$. Således er $\lim_{n\to\infty} f_n$ μ-integrabel og (5) holder.
Antag herefter at $\lim_{n\to\infty} f_n$ er μ-integrabel, dvs $\infty > \int (\lim_{n\to\infty} f_n)^+ d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n^+ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\mu$ og $\infty > \int (\lim_{n\to\infty} f_n)^- d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n^- d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n^- d\mu$. Der viser at $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n^- d\mu < \infty$. □

Den monotone grænsesætning for voksende følger har selvfølgelig også en tilsvarende sætning for dalende følger:

Sætning 5.12. *Lad $f_1 \geq f_2 \geq ... \geq f_n \geq ... \in \mathcal{M}$ være en dalende funktionsfølge af μ-integrable funktioner. Da vil $\lim_{n\to\infty} f_n$ være μ-integrabel hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu > -\infty$ og i dette tilfælde er*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{6}$$

Bevis. Anvendes sætning 5.11 på den voksende funktionsfølge $(-f_n)$ fås resultatet. □

Sætning 5.13. ***Majoriseret konvergens for funktioner, der tilhører $\mathcal{M}$.*** *Lad $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ være en følge af funktioner med grænsefunktion $\lim_{n\to\infty} f_n$. Antag at følgen er majoriseret af en μ-integrabel funktion $h \in \mathcal{M}_+$, dvs $|f_n| \leq h$ og $\int h d\mu < \infty$. Da er $\lim_{n\to\infty} f_n$ μ-integrabel og*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{7}$$

Bevis. Da $0 \leq \int |f_n| d\mu \leq \int h d\mu < \infty$ er alle f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-integrable. Da yderligere $|\lim_{n\to\infty} f_n| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leq h$ er også $\lim_{n\to\infty} f_n$ μ-integrabel. Vi mangler således kun at godtgøre (7). Vi skal nu antage at $h(x) < \infty$ for alle $x \in X$. (Hvis ikke kan alle funktioner sættes til 0 på nulmængden $\{x \in X | h(x) = \infty\}$ uden at integralerne ændres.) Da $|f_n| \leq h$ er $-h \leq f_n \leq h$. Således er $h + f_n, h - f_n \in \mathcal{M}_+$.
Først anvender vi $h + f_n$: Ifølge Fatous Lemma, lemma 5.2 anvendt på følgen $(h + f_n)$ får vi

$$\liminf_{n\to\infty} \int (h + f_n) d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} (h + f_n) d\mu.$$

Da venstre side er lig med

$$\liminf_{n\to\infty} (\int h d\mu + \int f_n d\mu) = \int h d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

og højre side er lig med

$$\int (h + \lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \int h d\mu + \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

fås

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{8}$$

På ganske analog måde fås ved at anvende Fatous lemma på følgen $(h - f_n)$ at

$$\liminf_{n\to\infty} \int (h - f_n) d\mu \ge \int \liminf_{n\to\infty} (h - f_n) d\mu.$$

Venstre side er lig med

$$\liminf_{n\to\infty}(\int h d\mu - \int f_n d\mu) = \int h d\mu + \liminf_{n\to\infty}(-\int f_n d\mu) = \int h d\mu - \limsup_{n\to\infty}(\int f_n d\mu)$$

og højre side er lig med

$$\int (h - \lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \int h d\mu - \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Dette giver uligheden

$$\limsup_{n\to\infty}(\int f_n d\mu) \le \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu. \tag{9}$$

Kombineres ulighederne (8) og (9) fås

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty}(\int f_n d\mu) \le \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu,$$

der giver ædrer de tre $\le$ til lihedstegn. Dvs. (7) holder. □

Sætning 5.6 kan udvides fra $\mathcal{M}_+$ til $\mathcal{M}$ på følgende måde:

Sætning 5.14. *Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være målelige rum, μ et mål på $(X, \mathcal{A})$, og lad $H : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ være en afbildning fra de målelige funktioner på Y ind i de målelige funktioner på X med følgen fire egenskaber*

i) $H(c \cdot f) = c \cdot H(f), \; c \in [0, \infty], \; f \in \mathcal{M}_+(Y)$
ii) $H(f + g) = H(f) + H(g), \;\; f, g \in \mathcal{M}_+(Y)$
iii) $H(f^+) = H(f)^+$ *og* $H(f^-) = H(f)^-, \; f \in \mathcal{M}(Y)$
iv) $H(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} H(f_n)$

for enhver voksende følge af funktioner, $f_1 \le f_2 \le \ldots$, af funktioner fra $\mathcal{M}_+(Y)$. Ved

$$\nu(B) = \int H(1_B) d\mu \equiv I_\mu(H(1_B)), B \in \mathcal{B},$$

defineres et mål på $(Y, \mathcal{B})$, og,

$$\int f d\nu = \int H(f) d\mu, f \in \mathcal{M}(Y). \tag{10}$$

Bevis. Som i beviset for sætning 5.6 ser man at ν et mål og at (10) holder for $f \in \mathcal{M}_+(Y)$. For $f \in \mathcal{M}(Y)$ har vi således at $\int f^+ d\nu = \int H(f^+) d\mu = \int H(f)^+ d\mu$ og at $\int f^- d\nu = \int H(f^-) d\mu = \int H(f)^- d\mu$. Dette viser at f er integrabel mht. μ hvis og kun hvis $H(f)$ er integrabel mht μ og at (10) holder i dette tilfælde. Ydermere ses det også at f er udvidet integrabel mht ν hvis og kun hvis $H(f)$ er udvidet integrabel mht μ og at (10) også holder i dette tilfælde. □

De to eksempler, eksempel 5.2 og eksempel 5.2, kan således udvides fra $\mathcal{M}_+$ til $\mathcal{M}$.

6. Litteraturliste

[1] Andersson, Steen
Undervisningsnote, Københavns Universitet.

[2] Christian Berg, Tage Gutmann Madsen
Målog integralteori, 2001
Undervisningsnote Københavns Universitet.

[3] Rudin, Walter
Real and Complex Analysis, Third Edition, 1987
cGraw-Hill International Editions
ISBN 0-07-100276-6.

[4] Wade, William R.
An Introduction to Analysis, Fourth Edition, 2010
Pearson Prentice Hall
ISBN 0-13-615370-4.