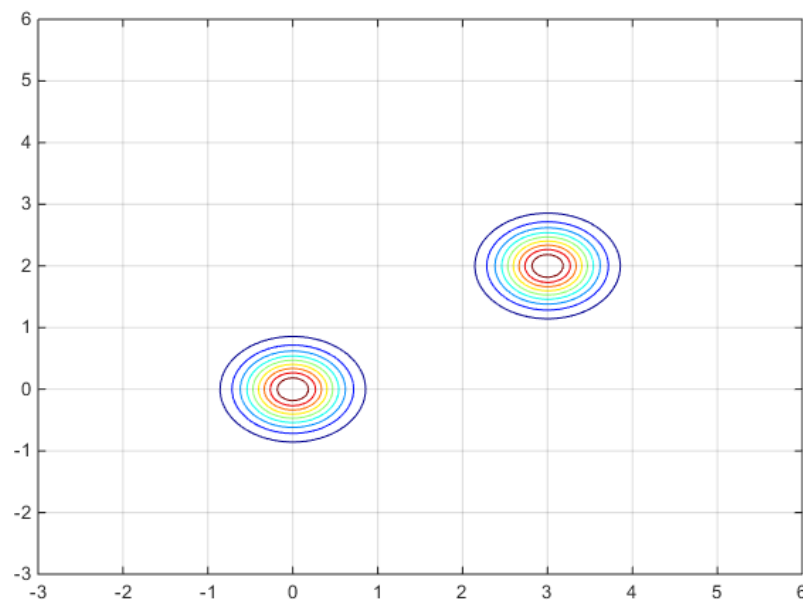


Tids-frekvens analyse

GABOR REPRÆSENTATIONER AF MUSIKSIGNALER



OVERORDNET TEMA:

Tids-frekvens analyse

TITEL:

Gabor repræsentationer af musiksignaler

PROJEKTPERIODE:

Speciale,
Efterårssemesteret 2014

PROJEKT AFSLUTTET:

19/12/2014

PROJEKTGRUPPE:

Emil Solsbæk Ottosen

VEJLEDER:

Morten Nielsen

OPLAGSTAL: 4

ANTAL SIDER: 123

SYNOPSIS:

Denne rapport omhandler tids-frekvens analyse af musiksignaler med særlig fokus på anvendelse af multiple Gabor frames. Rapporten starter med en generel beskrivelse af Hilbertrum, og der bliver introduceret forskellige operatorer på Hilbertrummet $L^2(\mathbb{R})$.

Kapitel 3 giver en grundlæggende forståelse af tids-frekvens analyse, og der redegøres for Heisenberg-Pauli-Weyl uligheden, kort-tids Fourier transformationen og spektrogrammet. Der gives også eksempler på tids-frekvens repræsentationer af simple computergenererede signaler og et mere komplekst musiksignal.

Kapitel 4 indeholder frame-teori, og der forklares principperne bag traditionel Gabor analyse.

Kapitel 5 indeholder en tilgang til multiple Gabor frames baseret på Zak transformationen, og Kapitel 6 beskriver reducerede multiple Gabor frames og ikke-stationære Gabor systemer.

Kapitel 7 indeholder en sammenligning af de forskellige tids-frekvens repræsentationer, idet der ses på forskellige musikstykker indspillet på akustisk flygel.

FORORD

Denne rapport er udarbejdet af Emil Solsbæk Ottosen som specialeafhandling på matematikstudiets 10. semester på Aalborg Universitet. Projektet er udarbejdet i samarbejde med vejleder Morten Nielsen og har titlen "Gabor repræsentationer af musiksignaler". Projektet omhandler Gabor teori i forbindelse med tids-frekvens analyse af musiksignaler.

Projektet henvender sig til alle interesserede, men det forventes, at læseren har en matematisk forståelse svarende til 10. semester på matematikuddannelsen på Aalborg Universitet med specialisering i analyse.

Jeg vil gerne takke vejleder Morten Nielsen for det gode samarbejde i forbindelse med projektet.

Aalborg, den 19/12 2014

Emil Solsbæk Ottosen

Læsevejledning

Der vil i løbet af rapporten forekomme kildehenvisninger, der henviser til en litteraturliste sidst i rapporten. Kildehenvisningerne er angivet efter Havard metoden, sådan at der refereres ved [Efternavn, årstal, evt. sidetal m.m.].

Beviser vil blive afsluttet med ■ og eksempler med ◇. Referencer til ligninger undervejs i projektet vil eksempelvis være på formen "ligning (4.3)", der i dette tilfælde henviser til den tredje ligning i kapitel fire. Referencer til sætninger, beviser, eksempler osv. foregår på samme måde.

Alle computerbaserede udregninger er lavet i Matlab R2014b, og de anvendte koder er vedlagt som bilag bagerst i rapporten.

For at lette notationen er Bessel følger, baser og frames indekseret med de naturlige tal, selvom de viste resultater gælder for vilkårlige tællelige indeksemængder. Der vil være anvendt notationen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ for de naturlige tal.

INDHOLDSFORTEGNELSE

Kapitel 1	Indledning	1
1.1	Problemformulering	2
1.2	Projektopbygning	2
Kapitel 2	Hilbertrum	5
2.1	Operatorer på Hilbertrum	6
2.1.1	Fourier transformationen	9
2.2	Bessel-følge	11
2.3	Ortonormal basis	13
Kapitel 3	Tids-frekvens analyse	17
3.1	Usikkerhed	20
3.2	Kort-tids Fourier transformationen	21
3.2.1	Inversionsformlen	23
3.3	Spektrogram	25
3.4	Tids-frekvens analyse af musiksignaler	28
Kapitel 4	Frames i Hilbertrum	33
4.1	Dual framen	34
4.2	Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$	39
4.2.1	Dual framen til en Gabor frame	42
4.2.2	Gabor frames i forbindelse med tids-frekvens analyse	44
Kapitel 5	Zak transformationen	53
5.1	Den stykvisse Zak transformation	57
5.2	Multiple Gabor frames i forbindelse med den SZT	59
5.2.1	Undersampling og kritisk sampling	63
5.2.2	Oversampling	65
5.2.3	Dual framen	66
5.2.4	Forskellige translations- og modulationsparametre	69
Kapitel 6	Multiple Gabor Frames for $L^2(\mathbb{R})$	73
6.1	Tilladelig overdækning og BTIE	73
6.2	Eksistens af reducerede multiple Gabor frames	76
6.3	Ikke-stationære Gabor systemer	79
6.3.1	Ikke-stationære Gabor systemer i forbindelse med musiksignaler	86
Kapitel 7	Eksempler	89

Kapitel 8 Konklusion	95
Litteratur	97
A Ekstramateriale	99
A.1 Normerede rum	99
A.2 Skalarprodukt og ortogonalkomplement	100
A.2.1 Pythagoras' sætning	101
A.3 Positiv operator	103
A.4 Riesz baser	104
A.5 Kort-tids Fourier transformationen	107
A.6 Eksempel på Balian-Low's sætning	109
B Matlab kode	111
C Abstract	115

KAPITEL 1

INDLEDNING

I tids-frekvens analyse forsøger man at analysere signaler i både tid og frekvens samtidigt. I stedet for at analysere et signal i tids- og frekvens-domænet separat, så konstruerer man en såkaldt tids-frekvens repræsentation af signalet. Denne fremgangsmåde har vist sig særlig anvendelig i forbindelse med musiksignaler, hvor det ofte er nyttigt at vide, hvilke frekvenser der forekommer til givne tidspunkter. Det kunne f.eks. være i forbindelse med transskribering, hvor man ønsker at nedskrive et musikstykke på noder. Et nodeark kan til en vis grad forstås som en tids-frekvens repræsentation, idet første-aksen repræsenterer tid, og anden-aksen repræsenterer tonehøjde. Denne sammenhæng mellem musik og matematik er ikke tilfældig, eftersom udviklingen af det kartesiske koordinatsystem var inspireret af modeller fra musiknotation [Dörfler, 2004]. Analogien mellem noder og tids-frekvens repræsentationer er imidlertid kun en tilnærmelse, idet et nodeark også anvender forskellige tegn til at bestemme egenskaber som f.eks. tempo og lydstyrke. Desuden svarer én musiktone ikke til én frekvens, men er derimod sammensat af en grundtone, med en grundfrekvens, og overtoner med frekvenser, der er multiplum af grundfrekvensen.

Hvis $s(t)$ beskriver udsvinget af et musikstykke til tiden t , så kan vi antage, at s er kontinuert, antager reelle værdier og har endelig energi, hvilket vil sige, at $s \in L^2(\mathbb{R})$. Vi kan måske bestemme noget af musikkens rytmiske mønster ved at se på grafen for $s(t)$, men vi har ingen information om toneart eller melodi. Information om frekvenserne er indeholdt i den Fourier transformerede $\hat{s}(\omega)$, og ved at se på denne funktion kan vi måske udtale os om tonearten af stykket, men vi har her ingen information om rytmikken og kan dermed stadig ikke udtale os om stykkets melodi. Dette illustrerer, at vi må konstruere tids-frekvens repræsentationer, der både indeholder information om $s(t)$ og $\hat{s}(t)$ for at kunne visualisere det, som vores hjerne i sidste ende forstår som musik.

Den ideelle løsning er at efterligne nodearket og konstruere en repræsentation, der eksplicit kan fortælle hvilke frekvenser, der forekommer til et vilkårligt tidspunkt. Forskellige matematiske uligheder umuliggør imidlertid denne opgave og medfører i praksis, at der er en grænse for, hvor god "samlet opløsning" i tid og frekvens, der kan opnås. Det betyder imidlertid ikke, at det er umuligt at konstruere nyttige repræsentationer, og det er denne opgave, som tids-frekvens analyse beskæftiger sig med. Begrebet "nyttig" dækker i denne sammenhæng ikke kun over, at repræsentationerne skal kunne gengive signalets tids-frekvens indhold på en fornuftig måde. Det dækker også over, at det skal være muligt at implementere teorien i praksis, og at det er muligt at rekonstruere signalet ud fra dets tids-frekvens repræsentation. Sidstnævnte kriterie muliggør, at man kan manipulere signalet og bagefter rekonstruere det, som det f.eks. sker ved

komprimering.

En klassisk tilgang til tids-frekvens analyse er at udregne kort-tids Fourier transformationen $V_g s(t, \omega)$ af et signal $s(t)$. Her anvender man en såkaldt vinduefunktion g til at danne et udsnit af signalet, og så anvender man Fouriertransformationen på dette udsnit. Herefter lader man vinduefunktionen "glide" hen over tids-aksen og opnår på denne måde en beskrivelse af signalets frekvenser som funktion af tiden. Man kan grafisk gengive denne tids-frekvens repræsentation ved at plotte størrelsen $|V_g s(t, \omega)|^2$ i tids-frekvens planen.

En mere nuanceret tilgang til problemet kan findes i Gabor analyse, der er baseret på frame teori. Her laver man en udvikling af signalet på formen:

$$s = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} M_{mb} T_{na} \gamma,$$

hvor M_{mb} og T_{na} er modulations- og translationsoperatorer på $L^2(\mathbb{R})$, og γ er en vinduefunktion. Hvis denne udvikling er konstrueret rigtigt, vil konstanterne $c_{m,n}$ indeholde information om signalets tids-frekvens indhold til tiden na og frekvensen mb . Hvor man ved anvendelse af kort-tids Fourier transformationen opdeler tids-frekvens planen i lodrette "skiver", så inddeler man her planen i "kasser" og udregner tids-frekvens indholdet i hver kasse. Dette kan være en fordel i forbindelse med at bestemme, hvor det essentielle tids-frekvens indhold af signalet befinder sig. En anden fordel ved denne tilgang er, at frame teori giver en god struktur at arbejde med, hvor der er hurtig implementering og mulighed for rekonstruktion.

Ved musiksignaler er der imidlertid nogle frekvensområder, der er mere "vigtige" end andre og nogle tidspunkter, der er mere vigtige end andre. Det kunne f.eks. være, at man gerne ville have god opløsning i frekvens ved de dybe frekvenser, da det ofte er her, at det harmoniske grundlag bestemmes, og god opløsning i tid ved de lysere frekvenser for at bestemme de forskellige anslag. For at opnå dette er det nødvendigt at anvende forskellige vinduefunktioner til at konstruere tids-frekvens repræsentationen. Det er dette problem, som denne rapport omhandler.

1.1 Problemformulering

Der ønskes en beskrivelse af grundlæggende teorier og teknikker indenfor traditionel tids-frekvens analyse samt en gennemgang af Gabor tilgangen til problemet. Yderligere ønskes en beskrivelse af forskellige tilgange til konstruktion af multiple Gabor frames og en sammenligning af de forskellige tids-frekvens repræsentationer.

1.2 Projektopbygning

I dette afsnit vil rapportens opbygning kort blive gennemgået. Rapporten starter med et kapitel, der omhandler generel teori omkring Hilbertrum, men hvor de inddragede eksempler fokuserer på Hilbertrummet $L^2(\mathbb{R})$. Dette rum er af central betydning i forbindelse med tids-frekvens analyse og danner udgangspunktet for den efterfølgende teori. Kapitlet introducerer forskellige operatorer på $L^2(\mathbb{R})$, der benyttes i tids-frekvens analyse, og inddrager sætninger, der benyttes i forbindelse med frame teori. Formålet med kapitlet er at give en gennemgang af

den matematik, der ligger til grund for teorien bag tids-frekvens analyse.

Efter dette indledende kapitel præsenteres den traditionelle tilgang til tids-frekvens analyse. Her gennemgås det klassiske usikkerhedsprincip, kort-tids Fourier transformationen og spektrogrammet. Kapitlet indeholder forskellige eksempler på simple computergenererede signaler og et enkelt mere kompliceret musiksignal. Til det inddragede musiksignal er der vedlagt noter, der er udformet i nodeprogrammet Sibelius 6. Alle inddragede musiksignaler i projektet er indspillet på akustisk flygel, hvorefter den tilhørende lydfil er blevet importeret i Matlab. Dette medfører et mere realistisk signal med (lav) baggrundsstøj og tempo-variationer i modsætning til computergenererede signaler.

Der bringes herefter et kapitel omhandlende generel frame teori med fokus på Gabor frames. Der inddrages teori omkring frame operatoren og dual framen, og der forklares sammenhænge mellem frames og ortonormale baser. Denne teori sættes i forbindelse med tids-frekvens analyse, og der ses som eksempel på en Gabor repræsentation af et tidligere anvendt signal. Herefter sammenlignes Gabor repræsentationen af signalet og repræsentationen baseret på kort-tids fourier transformationen. På den måde gives der løbende i projektet konkrete eksempler på fordele og ulemper ved de forskellige tilgange.

Resten af rapporten omhandler forskellige indgangsvinkler til konstruktion af multiple Gabor frames. Først præsenteres en tilgang udviklet af Meir Zibulski og Yehoshua Y. Zeevi, herefter en tilgang udviklet af Monika Dörfler og til sidst en tilgang udviklet af Peter Balazs, Monika Dörfler, Nicki Holighaus, Florent Jaillet, og Gino Angelo Velasco. Sidstnævnte tilgang vil blive anvendt i forbindelse med indspillede klaverstykker, og de tilhørende spektrogrammer vil blive sammenlignet med spektrogrammer baseret på kort-tids Fourier transformationen og spektrogrammer baseret på Gabor udviklinger.

KAPITEL 2

HILBERTRUM

En konvergent følge i et normeret rum er altid en Cauchy-følge, og hvis det omvendte også er tilfældet, så siges rummet at være et *Banachrum* (se Bilag A Afsnit A.1 side 99 for en kort gennemgang af normerede rum). I dette projekt vil der blive set på en speciel type Banachrum - de såkaldte *Hilbertrum*.

Definition 2.1 (Hilbertrum)

Et vektorrum med et tilhørende skalarprodukt, der er et Banachrum mht. den inducerede norm, kaldes et Hilbertrum. Der anvendes notationen $\mathcal{H}$ for et Hilbertrum.

Der henvises til Bilag A Afsnit A.2 side 100 for en beskrivelse af skalarprodukt og induceret norm. I det følgende eksempel vil der blive set på Hilbertrummet $L^2(\mathbb{R})$, der kommer til at have central betydning gennem hele rapporten.

Eksempel 2.2:

Vektorrummet $L^2(\mathbb{R})$ er defineret ved:

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ er målelig og } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

hvor integration foretages mht. Lebesgue målet, og hvor elementerne er samlet i ækvivalensklasser, sådan at $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ næsten overalt. For at vise at der rent faktisk er tale om et vektorrum, skal det vises, at for $\alpha \in \mathbb{C}$ og $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, da er $\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$ og $f + g \in L^2(\mathbb{R})$. Ifølge [Berg og Madsen, 2001][Sætning 2.10 side 29] er funktionerne αf og $f + g$ målelige, og yderligere gælder der, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha f(x)|^2 dx = |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

og

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^2 dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x)| + |g(x)|)^2 dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \max(|f(x)|, |g(x)|) \right)^2 dx \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \max(|f(x)|^2, |g(x)|^2) dx \\ &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) dx \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + 4 \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Der kan på dette vektorrum defineres et skalarprodukt givet ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Det ses af det følgende, at det første punkt i definitionen af et skalarprodukt (se Definition A.2 side 100) er opfyldt

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \geq 0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

hvor der gælder lighedstegn, hvis og kun hvis f er nulfunktionen. Punkt (ii) vises ved:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{f(x)} dx} = \overline{\langle g, f \rangle}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Det tredje og sidste punkt ses ved det følgende

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \overline{h(x)} dx \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{h(x)} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{h(x)} dx \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \quad \forall f, g, h \in L^2(\mathbb{R}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

På vektorrummet $L^2(\mathbb{R})$ kan der dermed indføres den inducerede norm givet ved

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dermed siges en følge $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ at konvergere mod $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvis der til ethvert givet $\varepsilon > 0$ eksisterer $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\|f_n - f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \text{når } n \geq N_\varepsilon.$$

Ifølge [Lieb og Loss, 2000][side 71] kan det vises, at enhver Cauchy-følge i $L^2(\mathbb{R})$ også er en konvergent følge, og dermed at $L^2(\mathbb{R})$ er et Hilbertrum. Cauchy-Schwarz' ulighed (se ligning (A.1) side 100) giver, at

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad \diamond$$

2.1 Operatorer på Hilbertrum

En afbildning mellem to Hilbertrum $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$ kaldes en *operator*, og hvis specielt $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$, så kaldes afbildningen et *funktional*. I forbindelse med operatorer er følgende definition central.

Definition 2.3 (Lineære og begrænsede operatorer)

En operator $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ kaldes *lineær*, hvis den opfylder

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_1, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

og *begrænset*, hvis der eksisterer et reelt tal $C \geq 0$, sådan at

$$\|T f\|_{\mathcal{H}_2} \leq C \|f\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1.$$

Der bruges følgende notation

$$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) := \left\{ T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2 \mid T \text{ er lineær og begrænset} \right\},$$

hvor der specielt sættes $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = B(\mathcal{H})$.

Der gælder ifølge [Lax, 2010][side 160], at en lineær operator er begrænset, hvis og kun hvis den er kontinuert. Dermed gælder der for $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, at hvis $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{H}_1$ konvergerer mod $f \in \mathcal{H}_1$, så konvergerer følgen $\{T f_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{H}_2$ mod $T f \in \mathcal{H}_2$. Ved at indføre normen

$$\|T\|_* := \inf \left\{ C \geq 0 \mid \|T f\|_{\mathcal{H}_2} \leq C \|f\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 \right\}, \quad (2.1)$$

kan det ifølge [Lax, 2010][Theorem 3 side 161] vises, at $(B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \|\cdot\|_*)$ er et Banachrum. Ifølge definitionen af operatornormen gælder der, at

$$\|T f\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\|_* \|f\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1. \quad (2.2)$$

Der gælder ifølge [Christensen, 2003][Lemma A.6.1 side 408] følgende sætning for lineære og begrænsede operatorer mellem Hilbertrum.

Sætning 2.4

Lad $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$ være Hilbertrum og lad $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Da eksisterer en unik operator $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, sådan at

$$\langle T f, g \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, T^* g \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1, \forall g \in \mathcal{H}_2.$$

Yderligere gælder $\|T\|_* = \|T^*\|_*$.

Da vi kan skrive

$$\langle T^* g, f \rangle_{\mathcal{H}_1} = \overline{\langle f, T^* g \rangle_{\mathcal{H}_1}} = \overline{\langle T f, g \rangle_{\mathcal{H}_2}} = \langle g, T f \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall g \in \mathcal{H}_2, \forall f \in \mathcal{H}_1,$$

så følger det, at $(T^*)^* = T$. Operatoren T^* kaldes den *adjungerede operator*, og hvis der specielt gælder, at $T^* = T$, så kaldes T *selvadjungeret*.

En operator $T \in B(\mathcal{H})$ kaldes *unitær*, hvis $T T^* = T^* T = I$, hvor I er identitetsoperatoren. En unitær operator er altså invertibel med $T^{-1} = T^*$. For en unitær operator gælder der, at

$$\langle T f, T g \rangle = \langle f, T^* T g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{H}. \quad (2.3)$$

Specielt har vi, at

$$\|Tf\| = \sqrt{\langle Tf, Tf \rangle} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|, \quad f \in \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

og dermed er en unitær operator en isometri.

Eksempel 2.5:

Der ses her på tre klasser af operatorer på $L^2(\mathbb{R})$:

(i) *Translation* med $a \in \mathbb{R}$ er operatoren $T_a \in B(L^2(\mathbb{R}))$ givet ved:

$$T_a f(x) = f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

(ii) *Modulation* med $b \in \mathbb{R}$ er operatoren $M_b \in B(L^2(\mathbb{R}))$ givet ved:

$$M_b f(x) = e^{2\pi i b x} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

(iii) *Dilation* med $c \neq 0$ er operatoren $D_c \in B(L^2(\mathbb{R}))$ givet ved:

$$D_c f(x) = \frac{1}{\sqrt{|c|}} f\left(\frac{x}{c}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

At translationsoperatoren er lineær følger af, at der for $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gælder, at

$$T_a(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x - a) + \beta g(x - a) = \alpha T_a f(x) + \beta T_a g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Linearitet af modulations- og dilationsoperatoren vises på samme måde. For disse operatorer gælder følgende lemma.

Lemma 2.6

Operatorerne T_a , M_b og D_c er unitære for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og $c \neq 0$.

Bevis:

Først vises at translationsoperatoren er unitær. For $f, g \in B(L^2(\mathbb{R}))$ har vi, at

$$\langle T_a f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x + a)} dx = \langle f, T_{-a} g \rangle.$$

Det vil sige, at $T_a^* = T_{-a}$. Da T_a er invertibel med $T_a^{-1} = T_{-a}$, har vi dermed, at $T_a^* = T_a^{-1}$, hvilket vil sige, at T_a er unitær. For at vise at M_b er unitær, ser vi at

$$\langle M_b f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i b x} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{e^{-2\pi i b x} g(x)} dx = \langle f, M_{-b} g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dermed har vi, at $M_b^* = M_{-b} = M_b^{-1}$, hvilket vil sige, at M_b er unitær. For dilationsoperatoren ser vi, at

$$\begin{aligned}
\langle D_c f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|c|}} f\left(\frac{x}{c}\right) \overline{g(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|c|}} f(t) \overline{g(ct)} |c| dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|c|}}{|c|} f(t) \overline{g(ct)} |c| dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|c|} f(t) \overline{g(ct)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|c^{-1}|}} \overline{g\left(\frac{t}{c^{-1}}\right)} dt \\
&= \langle f, D_{c^{-1}} g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Dermed har vi, at $D_c^* = D_{c^{-1}} = D_c^{-1}$, hvilket medfører, at D_c er unitær. ■

Ved at sammensætte translations- og modulationsoperatorerne fås

$$\begin{aligned}
T_a M_b f(x) &= e^{2\pi i b(x-a)} f(x-a), \\
M_b T_a f(x) &= e^{2\pi i b x} f(x-a).
\end{aligned}$$

Operatorer på formen $T_a M_b$ eller $M_b T_a$ kaldes *tids-frekvens skift* og spiller en vigtig rolle indenfor tids-frekvens analyse. Vi bemærker yderligere, at der gælder følgende sammenhæng:

$$\begin{aligned}
T_a M_b f(x) &= e^{2\pi i b(x-a)} f(x-a) \\
&= e^{-2\pi i b a} e^{2\pi i b x} f(x-a) \\
&= e^{-2\pi i b a} M_b T_a f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Heraf ses det, at $T_a M_b = M_b T_a$, hvis og kun hvis $ab \in \mathbb{Z}$. Ved at sammensætte dilationsoperatoren med translations- og modulationsoperatorerne har vi til sidst, at

$$T_a D_c f(x) = \frac{1}{\sqrt{|c|}} f\left(\frac{x-a}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{|c|}} f\left(\frac{x}{c} - \frac{a}{c}\right) = D_c T_{\frac{a}{c}} f(x), \tag{2.8}$$

og

$$D_c M_b f(x) = \frac{1}{\sqrt{|c|}} e^{2\pi i b \frac{x}{c}} f\left(\frac{x}{c}\right) = e^{2\pi i \frac{b}{c} x} \frac{1}{\sqrt{|c|}} f\left(\frac{x}{c}\right) = M_{\frac{b}{c}} D_c f(x). \tag{2.9}$$

◇

2.1.1 Fourier transformationen

På samme måde som med $L^2(\mathbb{R})$ kan vektorrummet $L^1(\mathbb{R})$ defineres ved

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ er målelig og } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\},$$

hvor $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ næsten overalt, og der kan indføres en norm på dette rum givet ved

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

For $f \in L^1(\mathbb{R})$ er $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ defineret ved

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Funktionen $\hat{f}$ kaldes den *Fourier transformerede* af f , og afbildningen $\mathcal{F}: f \rightarrow \hat{f}$ kaldes *Fourier transformationen*. Det ses, at $\hat{f}$ er veldefineret, da

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-2\pi i x \omega}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Yderligere ses det, at $\mathcal{F}$ er lineær, da der for $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gælder, at

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-2\pi i x \omega} dx \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\ &= \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ifølge [Christensen, 2003][side 40] gælder der, at hvis $f \in L^1(\mathbb{R})$, så er $\hat{f}$ kontinuert, og yderligere haves *Fouriers inversionsformel*.

Sætning 2.7 (Fouriers inversionsformel)

Hvis både f og $\hat{f}$ tilhører $L^1(\mathbb{R})$, så gælder der, at

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \omega} d\omega, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hvis $(L^1 \cap L^2)(\mathbb{R})$ er udstyret med $L^2(\mathbb{R})$ -normen, så er Fourier transformationen ifølge [Christensen, 2003][side 40] en isometri fra $(L^1 \cap L^2)(\mathbb{R})$ ind i $L^2(\mathbb{R})$, hvilket vil sige, at når $f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R})$, så er $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ og $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Yderligere gælder, at hvis $f \in L^2(\mathbb{R})$, og $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R})$ er en følge af funktioner, der konvergerer mod f i forhold til L^2 -normen, så er følgen $\{\hat{f}_n\}_{n \geq 1}$ konvergent i $L^2(\mathbb{R})$ med en grænse, der er uafhængig af valget af følgen. Ved at definere

$$\hat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n$$

kan man dermed udvide Fourier transformationen til en surjektiv operator $\mathcal{F} \in B(L^2(\mathbb{R}))$. En surjektiv isometri er unitær, og dermed haves, at $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. Da $\mathcal{F}$ er en unitær operator, så gælder der ifølge ligning (2.3) og (2.4) side 8, at

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{og} \\ \|\hat{f}\| &= \|f\|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Disse ligninger kaldes *Plancherel's ligninger*. Der gælder følgende sammenhænge mellem modulation og translation i forbindelse med Fourier transformationen:

$$\begin{aligned}
(T_a f)^\wedge(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i (x+a) \omega} dx \\
&= e^{-2\pi i a \omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= e^{-2\pi i a \omega} \hat{f}(\omega) = M_{-a} \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

og

$$\begin{aligned}
(M_b f)^\wedge(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i b x} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x (\omega-b)} dx \\
&= T_b \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ved at anvende ligning (2.12), (2.11) og (2.7) kan vi dermed skrive

$$\begin{aligned}
(M_b T_a f)^\wedge(\omega) &= T_b (T_a f)^\wedge(\omega) \\
&= T_b M_{-a} \hat{f}(\omega) \\
&= e^{2\pi i b a} M_{-a} T_b \hat{f}(\omega).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Eksempel 2.8:

Gauss funktionen med parameter $a > 0$ er givet ved:

$$\varphi_a(x) := e^{-\frac{\pi}{a} x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ifølge [Gröchenig, 2000][Lemma 1.5.1 side 17] er den Fourier transformerede givet ved

$$\widehat{\varphi_a}(\omega) = \sqrt{a} \varphi_{\frac{1}{a}}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Specielt gælder, at

$$\widehat{\varphi_1}(\omega) = \varphi_1(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

◇

2.2 Bessel-følge

I dette afsnit defineres begrebet *Bessel-følge*, som anvendes i forbindelse med ortonormale baser og frames. Før dette kan gøres skal begrebet *ubetinget konvergens* af en *uendelig række* imidlertid først defineres.

Definition 2.9 (Ubetinget konvergens)

Lad $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ være en følge af vektorer og $\{c_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{C}$ være en følge af skalarer. Da siges den uendelig række $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ at være konvergent med sum $f \in \mathcal{H}$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k - f \right\| < \varepsilon \text{ når } n \geq N_\varepsilon.$$

Hvis den uendelige række konvergerer uanset, hvilken rækkefølge leddene forekommer i, så siges rækken at konvergere *ubetinget*.

Det ses, at Definition 2.9 stemmer overens med definitionen af en konvergent følge, hvis man sætter $f_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$. I det følgende anvendes der yderligere det komplekse vektorrum $\ell^2(\mathbb{N})$ givet ved

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ c = \{c_k\}_{k \geq 1}, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad \left| \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \right. \right\} \quad (2.14)$$

Ifølge [Lax, 2010][Example 2 side 54] er dette rum et Hilbertrum mht. til skalarproduktet:

$$\langle c, d \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c, d \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Vi kan nu definere en Bessel-følge.

Definition 2.10 (Bessel-følge)

Hvis en følge $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ opfylder, at der eksisterer $0 < B < \infty$, sådan at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (2.15)$$

så kaldes følgen for en Bessel-følge. Ethvert B , der opfylder uligheden, kaldes en *Bessel-grænse*, og det mindste B , der opfylder den, kaldes den *optimale Bessel-grænse*.

Der gælder ifølge [Christensen, 2003][Lemma 3.2.1 side 51 og Theorem 3.2.3 side 52] følgende sætning for Bessel-følger:

Sætning 2.11

En følge $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en Bessel-følge med Bessel-grænse B , hvis og kun hvis operatoren $T: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ givet ved

$$Tc := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \quad \forall c \in \ell^2(\mathbb{N})$$

er en veldefineret operator, der tilhører $B(\ell^2(\mathbb{N}), \mathcal{H})$ og $\|T\|_* \leq \sqrt{B}$. I dette tilfælde er den adjungerede operator $T^*: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ givet ved

$$T^*f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k \geq 1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Hvis rækkefølgen af elementerne i en Bessel-følge $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ ændres, så ændrer det ikke ved, at følgen stadig opfylder ligning (2.15). Dermed gælder følgende korollar til Sætning 2.11:

Korollar 2.12

Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en Bessel-følge, så konvergerer den uendelige række $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ ubetinget for alle $c \in \ell^2(\mathbb{N})$.

2.3 Ortonormal basis

En vigtig egenskab ved Hilbertrum findes i forbindelse med baser, hvilket der vil blive set nærmere på i dette afsnit.

Definition 2.13 (Ortonormal basis)

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum. En følge af vektorer $\{e_k\}_{k \geq 1} \subseteq H$ kaldes en *basis* for $\mathcal{H}$, hvis der til ethvert $f \in \mathcal{H}$ eksisterer unikke skalar koefficienter $\{c_k\}_{k \geq 1}$, sådan at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Følgen kaldes en *ortonormal basis* for $\mathcal{H}$, hvis der yderligere gælder, at $\{e_k\}_{k \geq 1}$ udgør en *ortonormal mængde*. Det vil sige, hvis

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \text{for } i \neq j, \quad \text{og} \quad \|e_k\| = 1, \quad \forall k \geq 1.$$

For en følge af vektorer $\{e_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ noteres mængden af alle *endelige* linearkombinationer med $\text{span}\{e_k\}_{k \geq 1}$. Hvis der gælder, at $\overline{\text{span}\{e_k\}_{k \geq 1}} = \mathcal{H}$, så siges følgen at være *fuldstændig*. En basis er ifølge Definition 2.13 nødvendigvis fuldstændig. Der gælder følgende vigtige sætning for ortonormale baser.

Sætning 2.14

Lad $\{e_k\}_{k \geq 1}$ være en ortonormal basis for $\mathcal{H}$. Da gælder, at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Denne række konvergerer ubetinget.

Bevis:

Da $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en basis, gælder der ifølge Definition 2.13, at der eksisterer unikke konstanter $\{c_k\}_{k \geq 1}$, sådan at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Eftersom $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en ortonormal basis, og skalarproduktet er kontinuert, gælder der yderligere for alle $j \in \mathbb{N}$, at

$$\langle f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle e_k, e_j \rangle = c_j, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Samlet set giver disse to udregninger, at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Vi mangler nu blot at vise, at rækken konvergerer ubetinget. Dette gøres ved at vise, at $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en Bessel-følge, da resultatet så følger af Korollar 2.12. Dette vises ved det følgende:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \overline{\langle f, e_k \rangle} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, f \right\rangle \\ &= \langle f, f \rangle = \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Heraf ses det, at $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en Bessel-følge med Bessel-grænse $B = 1$, hvilket beviser sætningen. ■

Ligning (2.16) er ofte nyttig og kaldes *Parsevals ligning*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad \forall f \in H. \tag{2.17}$$

Eksempel 2.15:

I dette eksempel konstrueres en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$. Vi lader først $b \in \mathbb{N}$ og starter med at vise, at følgen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq L^2(0, \frac{1}{b})$ givet ved

$$e_k(x) = \sqrt{b} e^{2\pi i k b x}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{b}\right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

udgør en ortonormal basis for $L^2(0, \frac{1}{b})$. For at vise, at $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ udgør en ortonormal mængde, ser vi, at

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_l \rangle &= \int_0^{\frac{1}{b}} \sqrt{b} e^{2\pi i j b x} \overline{\sqrt{b} e^{2\pi i l b x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{b}} \sqrt{b} e^{2\pi i j b x} \sqrt{b} e^{-2\pi i l b x} dx \\ &= b \int_0^{\frac{1}{b}} e^{2\pi i b x (j-l)} dx.\end{aligned}$$

Hvis $j = l$ fås dermed, at

$$\langle e_j, e_l \rangle = b \int_0^{\frac{1}{b}} e^0 dx = b \int_0^{\frac{1}{b}} 1 dx = 1,$$

og hvis $j \neq l$ fås

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_l \rangle &= b \left[\frac{e^{2\pi i b x (j-l)}}{2\pi i b (j-l)} \right]_0^{\frac{1}{b}} \\ &= \frac{b}{2\pi i b (j-l)} \left(e^{2\pi i b \frac{1}{b} (j-l)} - e^{2\pi i b \cdot 0 (j-l)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i (j-l)} \left(e^{2\pi i (j-l)} - e^0 \right) = 0,\end{aligned}$$

da den komplekse eksponentialfunktion er periodisk med perioden $2\pi i$. Det skal nu vises, at

$$\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = L^2\left(0, \frac{1}{b}\right). \quad (2.18)$$

Ifølge [Pedersen, 2000][Theorem 2.8 side 18] gælder der, at mængden af glatte funktioner defineret på $[0, \frac{1}{b}]$ er tæt i $L^2(0, \frac{1}{b})$. En funktion er glat, hvis den kan differentieres vilkårligt mange gange. Det vil sige, at givet $f \in L^2(0, \frac{1}{b})$, så eksisterer der en følge af glatte funktioner $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq L^2(0, \frac{1}{b})$, sådan at $f_k \rightarrow f$ når $k \rightarrow \infty$. Givet $\varepsilon > 0$ eksisterer der dermed $k' \in \mathbb{Z}$, sådan at

$$\|f - f_{k'}\| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ethvert element fra $\text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ kan skrives som en endelig linearkombination på formen

$$\sum c_k e^{2\pi i k x}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Per definition kaldes en funktion på denne form et *trigonometrisk polynomium*. Der gælder ifølge Weierstrass' approksimations sætning (se [Katnelson, 1976][Corollary side 15]), at de kontinuerte, og dermed også de glatte, funktioner i $L^2(0, \frac{1}{b})$ kan approksimeres vilkårlig godt med trigonometriske polynomier. Dermed eksisterer en følge af trigonometriske polynomier $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, sådan at $g_k \rightarrow f_{k'}$ når $k \rightarrow \infty$. Dermed eksisterer $k'' \in \mathbb{Z}$, sådan at

$$\|f_{k'} - g_{k''}\| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Trekantsuligheden giver nu, at

$$\begin{aligned}\|f - g_{k''}\| &= \|f - f_{k'} + f_{k'} - g_{k''}\| \\ &\leq \|f - f_{k'}\| + \|f_{k'} - g_{k''}\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dermed har vi vist ligning (2.18), og dermed at $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ udgør en ortonormal basis for $L^2(0, \frac{1}{b})$. Ifølge Sætning 2.14 kan ethvert $f \in L^2(0, \frac{1}{b})$ dermed skrives på formen

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k, \quad (2.19)$$

hvor

$$c_k = \langle f, e_k \rangle = \sqrt{b} \langle f, e^{2\pi i k b x} \rangle = \sqrt{b} \int_0^{\frac{1}{b}} f(x) e^{-2\pi i k b x} dx = \sqrt{b} \hat{f}(kb).$$

Den uendelige række i ligning (2.19) kaldes f 's *Fourierrække*, og konstanterne $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ kaldes f 's *Fourier koefficienter*. Vi husker, at ligning (2.19) betyder, at

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k(x), \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hvis specielt $b = 1$ haves, at følgen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq L^2(0, 1)$ givet ved

$$e_k(x) = e^{2\pi i k x}, \quad x \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

er en ortonormal basis for $L^2(0, 1)$. Ved at lade $\chi_{[0,1]}$ betegne indikatorfunktionen på intervallet $[0, 1]$ har vi dermed, at $\{e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ udgør en ortonormal basis for $L^2(0, 1)$. Ved translation ses det, at rummet $L^2(n, n+1)$ har en ortonormal basis givet ved:

$$\left\{ e^{2\pi i k(x-n)} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad x \in [n, n+1]$$

hvor ligheden følger af, at den komplekse eksponentialfunktion er periodisk med perioden $2\pi i$. Ved at sætte disse baser sammen ses det, at $L^2(\mathbb{R})$ har en ortonormal basis $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ givet ved

$$\left\{ e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Det ses, at basen $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ består af translationer af $\chi_{[0,1]}$, der er blevet moduleret. Ved at anvende ligning (2.5) og (2.6) side 8 kan basen dermed skrives som

$$\{e_{k,n}(x)\}_{k,n \in \mathbb{Z}} = \left\{ e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}} = \{M_k T_n g(x)\}_{k,n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

hvor $g = \chi_{[0,1]}$. Baser der kan skrives på formen (2.20) kaldes *Gabor baser*. $\diamond$

Den inddragede teori fra dette kapitel danner grundlaget for resten af projektet og specielt rummet $L^2(\mathbb{R})$, Fourier transformationen og de tre klasser af operatorer fra Eksempel 2.5 er centrale elementer i tids-frekvens analyse.

KAPITEL 3

TIDS-FREKVENNS ANALYSE

I dette kapitel forklares den grundlæggende teori bag tids-frekvens analyse, og der ses på, hvordan teorien fra det foregående kapitel kan anvendes til at give en matematisk beskrivelse af frekvenserne i et musikstykke. Kapitlet er baseret på [Gröchenig, 2000].

Hvis vi lader t beskrive tiden og $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ være en funktion, sådan at $s(t)$ beskriver udviklingen af et fysisk fænomen til tiden t , så kaldes s for et *signal*. For et musikstykke kunne signalet være en funktion for lufttrykket til tiden t . Vi kan antage, at musiksignaler er kontinuerne, antager reelle værdier og har *endelig energi*. At et signal $s(t)$ har endelig energi betyder, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

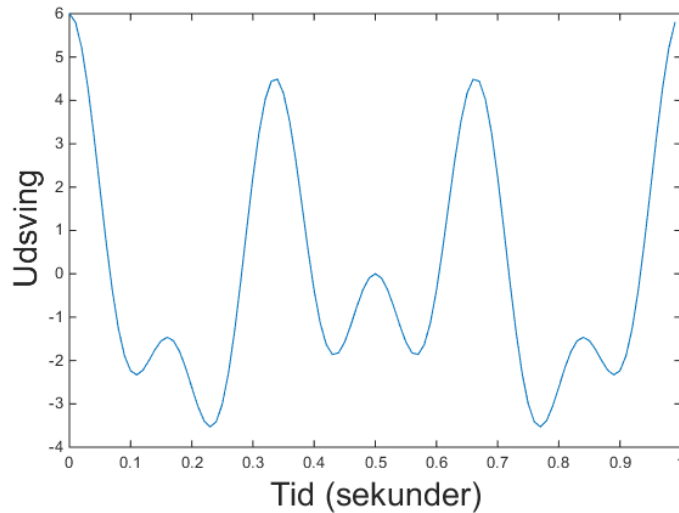
Da kontinuerne funktioner er målelige, har vi dermed, at $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Der vil nu blive givet et eksempel, der illustrerer, hvordan man kan analysere frekvenserne i et simpelt signal. Til dette formål betragter vi signalet $s(t) \in L^2(0, 1)$ givet ved

$$s(t) = 1 \cos(2\pi \cdot 2t) + 3 \cos(2\pi \cdot 3t) + 2 \cos(2\pi \cdot 6t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

hvor tiden måles i sekunder. I signalanalyse kaldes graferne for $\cos(t)$ og $\sin(t)$ under et for *sinusbølger*, da grafen for $\cos(t)$ blot er en forskydning af grafen for $\sin(t)$. Signalet $s(t)$ er dermed sammensat af tre sinusbølger med amplituderne 1, 3 og 2, og frekvenserne 2, 3 og 6. Da tiden måles i sekunder, så er frekvenserne antallet af svingninger per sekund, og derfor har de enheden Hertz (Hz).

Signalet er blevet implementeret i Matlab ved brug af koden fra Bilag B Matlab-kode B.1 side 111. I denne kode er den kontinuerne funktion $s(t)$ blevet approksimeret med en diskret funktion, der er defineret i 100 punkter med indbyrdes afstand $\frac{1}{100}$ i intervallet $[0, 1]$. Grafen for signalet ses i Figur 3.1.



Figur 3.1: Grafen for signalet $s(t)$

Ifølge Eksempel 2.15 side 14 er følgen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq L^2(0, 1)$, givet ved

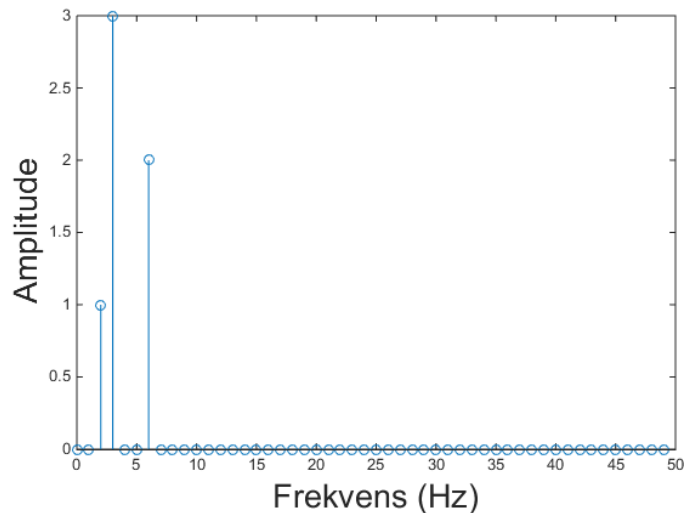
$$e_k(t) = e^{2\pi i k t}, \quad t \in [0, 1],$$

en ortonormal basis for $L^2(0, 1)$. Vi kan dermed ifølge Sætning 2.14 side 14 skrive signalets Fourier række som

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle s, e_k \rangle e_k(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 s(t) e^{-2\pi i k t} dt \cdot e_k(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) e_k(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

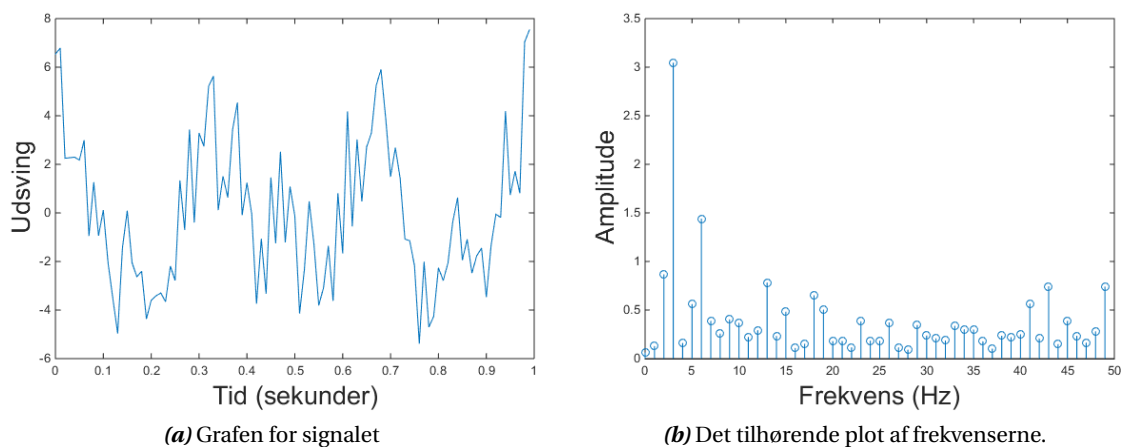
Det ses heraf, at frekvenserne i signalet nødvendigvis må være indeholdt i Fourier koefficienterne $\hat{s}(k)$. Erfaringer har da også vist, at den Fourier transformerede er et nyttigt redskab til at bestemme, hvor kraftigt forskellige frekvenser er repræsenterede i et givet signal. Fourier transformationen antager som udgangspunkt komplekse værdier, og det er derfor almindeligt at betragte $|\hat{s}(k)|^2$ for at opnå positive reelle værdier, når man skal repræsentere styrken af de forskellige frekvenser.

Til beregning af $\hat{s}$ bruges den *hurtige Fourier transformation*, som er en implementeret algoritme i Matlab, der udregner den *diskrete Fourier transformation* af et signal. Der er en del matematik involveret i disse udregninger, men det vil der ikke blive set nærmere på her, da det ligger for langt fra projektets fokus. I Figur 3.2 ses amplituderne af $s(t)$ som funktion af frekvenserne (se Bilag B Matlab-kode B.2 side 111 for Matlab koden).



Figur 3.2: Fourier transformationen ændrer tidsaksen til frekvensaksen

Vi kan direkte af Figur 3.2 se, at de eneste frekvenser, der er aktivitet indenfor, er frekvenserne 2, 3 og 6, og de tilhørende amplituder kan aflæses til hhv. 1, 3 og 2, hvilket stemmer overens med, hvordan vi konstruerede signalet (se ligning (3.1)). Den eneste grund til, at det blev så pænt, er imidlertid, at signalet blev konstrueret præcis som en sammensat sinusbølge. I Figur 3.3 er signalet $s(t)$ blevet tilføjet tilfældig støj trukket fra en standard normalfordeling, og de tilhørende plots er vist.



Figur 3.3: Plots af signalet $s(t)$ med tilføjet støj.

Det er her betydeligt sværere at se, hvilke frekvenser og amplituder signalet oprindeligt var sammensat af.

Vi har i det ovenstående set, hvordan det ved hjælp af Fourier transformationen er muligt at udtale sig om tid og frekvens af et signal *hver for sig*. I tids-frekvens analyse ønsker man imidlertid en samtidig beskrivelse af både tid og frekvens og ideelt set en funktion, der kan beskrive hvilke frekvenser, der forekommer til et givent tidspunkt. Forskellige matematiske uligheder, kaldet *usikkerhedsprincipper*, medfører imidlertid, at dette ikke er muligt. I det næste afsnit vil der blive set nærmere på dette problem.

3.1 Usikkerhed

Følgende sætning indeholder det klassiske usikkerhedsprincip, og uligheden kaldes *Heisenberg-Pauli-Weyl uligheden*. Et bevis for denne sætning kan findes i [Gröchenig, 2000][Theorem 2.2.1 side 26].

Sætning 3.1

Hvis $f \in L^2(\mathbb{R})$ og $a, b \in \mathbb{R}$, så gælder der, at

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|^2.$$

Der gælder lighed, hvis og kun hvis der eksisterer $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ og $c > 0$, sådan at

$$f(x) = k T_a M_b \varphi_c(x) = k \cdot e^{2\pi i b(x-a)} \cdot e^{-\frac{\pi}{c}(x-a)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hvis venstresiden i uligheden ikke antager en endelig værdi, så er det fordi et af integralerne ikke er endelige. For naturligt forekommende signaler kan dette dog ikke forekomme, og det vil derfor i det følgende være antaget, at begge integraler antager endelig værdi. Yderligere vil det være antaget, at f er forskellig fra nulfunktionen. For $f \in L^2(\mathbb{R})$ indføres nu

$$\Delta_f x = \frac{1}{\|f\|} \cdot \min_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ved at sætte $n(x) = \frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}$ har vi, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2} dx = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1.$$

Da også $n(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så er $n(x)$ en tæthedsfunktion for tiden x betragtet som stokastisk variabel. Vi har, at $\Delta_f x$ er minimeret ved det a , der minimerer funktionen

$$\begin{aligned} p(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + a^2 - 2ax) |f(x)|^2 dx \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx - 2a \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \\ &= a^2 \|f\|^2 - 2a \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

For at finde toppunktet af denne parabel sættes den afledte lig nul:

$$\begin{aligned} p'(a) &= 2a \|f\|^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx = 0 \\ &\Downarrow \\ a &= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x n(x) dx. \end{aligned}$$

Dermed er $\Delta_f x$ minimeret ved middelværdien af x , der er givet ved $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x n(x) dx$. Variansen af x er givet ved

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 n(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2} dx \\ &= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \\ &= (\Delta_f x)^2. \end{aligned}$$

Dermed er $\Delta_f x$ et mål for signalets varighed centreret omkring $\bar{x}$. Ved at indføre

$$\Delta_f \omega = \frac{1}{\|f\|} \cdot \min_{b \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}},$$

kan det tilsvarende vises, at $\Delta_f \omega$ er et mål for det essentielle frekvensbånd centreret omkring

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Vi kan nu skrive usikkerhedsprincippet som

$$\Delta_f x \cdot \Delta_f \omega \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (3.2)$$

Eksempel 3.2:

I forhold til tids-frekvens analyse, så medfører usikkerhedsprincippet, at ideen om samtidig information om tid og frekvens er umulig. For at se dette antager vi, at vi ønsker at bestemme det "præcise billede af tid og frekvens" af signalet f til tiden t baseret på viden om signalet i intervallet $I = [t - \delta, t]$ for et lille $\delta > 0$. Det antages, at f er forskellig fra nulvektoren på dette interval.

Til dette tager vi Fourier transformationen af funktionen $f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}$, hvor $\chi_{[t-\delta, t]}$ er indikatorfunktionen på intervallet $[t - \delta, t]$. Da $\Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} x$ er et mål for signalets varighed, har vi dermed, at $\Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} x \approx \delta$, hvilket ifølge ligning (3.2) medfører, at

$$\begin{aligned} \Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} x \cdot \Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} \omega &\approx \delta \cdot \Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} \omega \geq \frac{1}{4\pi} \\ &\Downarrow \\ \Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} \omega &\geq \frac{1}{4\pi\delta}. \end{aligned}$$

Det vil sige, at for lille δ bliver $\Delta_{f \cdot \chi_{[t-\delta, t]}} \omega$ stor, og dermed bliver det essentielle frekvensbånd stort, og omvendt hvis frekvensbåndet skal være lille, så medfører dette, at δ bliver nødt til at være stor. Dette problem er centralt i tids-frekvens analyse: Hvis man ønsker bedre præcision i tid, så medfører det dårligere præcision i frekvens og omvendt. $\diamond$

3.2 Kort-tids Fourier transformationen

Selvom ideen om en præcis samtidig beskrivelse af tid og frekvens ikke er opnåelig, så betyder det ikke, at man ikke kan give brugbare beskrivelser. Ideen i det følgende er, at man anvender

en funktion til at begrænse signalet f til et interval, og så tager man Fourier transformationen af funktionen på dette interval.

Definition 3.3 (Kort-tids Fourier transformation)

Antag at $g \in L^2(\mathbb{R})$. Da er kort-tids Fourier transformationen (KTFT'en) af $f \in L^2(\mathbb{R})$ med hensyn til g givet ved

$$V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

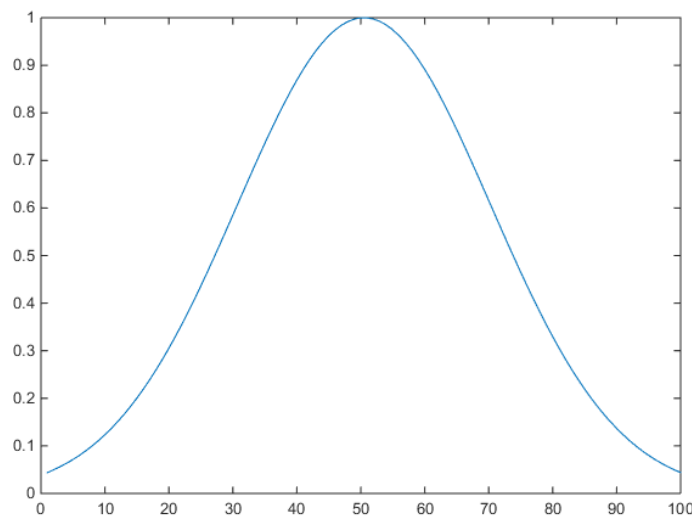
Det følger af Cauchy-Schwarz' ulighed (se ligning (A.1) side 100), at KTFT'en er veldefineret:

$$|V_g f(x, \omega)| = |\langle f, M_\omega T_x g \rangle| \leq \|f\| \|M_\omega T_x g\|, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Funktion g kaldes en *vinduefunktion*, og i tids-frekvens analyse kaldes $\mathbb{R}^2$ for *tids-frekvens planen*. Vi vil antage, at g er en fast funktion, og betragte $V_g f$ som en lineær afbildning, der afbilder funktioner defineret på $\mathbb{R}$ til funktioner defineret på $\mathbb{R}^2$. At afbildningen er lineær følger af, at der for $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gælder, at

$$\begin{aligned} V_g(\alpha f_1 + \beta f_2)(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1 + \beta f_2)(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt \\ &= \alpha V_g f_1(x, \omega) + \beta V_g f_2(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hvis g er en glat funktion med kompakt støtte centreret omkring origo, så er $V_g f(x, \cdot)$ Fourier transformationen af et udsnit af f centreret omkring x . Når x varierer, så *glider* vinduet langs x -aksen. Man kan også anvende en vinduefunktion uden kompakt støtte, hvis blot funktionen aftager tilstrækkeligt hurtigt. Feks. kan man anvende en Gauss funktion, hvis graf ser ud som på Figur 3.4, som vinduefunktion.



Figur 3.4: Graf for en Gauss funktion

Ifølge det klassiske usikkerhedsprincip er Gauss funktionen den vinduefunktion, der har den mindste samlede udstrækning i tids-frekvens planen. I Bilag A Afsnit A.5 side 107 er der samlet forskellige egenskaber ved KTFT'en, og der er givet et bevis for den følgende sætning.

Sætning 3.4

Hvis $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$, så gælder at $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$ for $j = 1, 2$, og

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

Der haves følgende korollar til Sætning 3.4.

Korollar 3.5

Hvis $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, så gælder at $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, og

$$\|V_g f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\| \|g\|.$$

Hvis specielt $\|g\| = 1$ haves, at

$$\|V_g f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|,$$

og dermed er KTFT'en i dette tilfælde en isometri fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(\mathbb{R}^2)$.

3.2.1 Inversionsformlen

For at kunne formulere inversionsformlen for KTFT'en skal der først indføres notation for operatorer, der er givet ved integraler. Til dette antages, at j er en funktion fra $\mathbb{R}^d$ til et Hilbertrum $\mathcal{H}$, sådan at $j(x) \in \mathcal{H}$ for alle $x \in \mathbb{R}^d$. Der indføres nu notationen $f = \int_{\mathbb{R}^d} j(x) dx$, hvormed der menes, at

$$\langle f, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle j(x), h \rangle dx,$$

for alle $h \in \mathcal{H}$. Ifølge [Gröchenig, 2000] [Side 43] gælder der, at hvis afbildningen $l(h) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \langle j(x), h \rangle dx$ er et begrænset funktional defineret på $\mathcal{H}$, så definerer l et unikt element $f \in \mathcal{H}$.

Hvis $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ og $g \in L^2(\mathbb{R})$, og vi sætter $j(x, \omega) = F(x, \omega) \cdot M_\omega T_x g$, har vi dermed, at $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ og

$$\begin{aligned} l(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(x, \omega) \cdot M_\omega T_x g, h \rangle d\omega dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) \langle M_\omega T_x g, h \rangle d\omega dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) \overline{\langle h, M_\omega T_x g \rangle} d\omega dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) \cdot \overline{V_g h(x, \omega)} d\omega dx \\ &= \langle F, V_g h \rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz' ulighed (se ligning (A.1) side 100) og Korollar 3.5 giver nu, at

$$|l(h)| = |\langle F, V_g h \rangle| \leq \|F\| \|V_g h\| = \|F\| \|h\| \|g\|, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}).$$

Heraf ses det, at l er et begrænset funktional defineret på $L^2(\mathbb{R})$, og dermed definerer l en unik funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ givet ved

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x g d\omega dx. \quad (3.3)$$

For denne funktion gælder, at $l(h) = \langle f, h \rangle$ for alle $h \in L^2(\mathbb{R})$ og

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle = |l(f)| \leq \|F\| \|f\| \|g\| \\ &\Downarrow \\ \|f\| &\leq \|F\| \|g\|. \end{aligned}$$

Vi kan nu opskrive inversionsformlen for KTFT'en.

Sætning 3.6 (Inversionsformel for KTFT'en)

Antag at $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R})$ og $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$. Så gælder for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, at

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_g f(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x \gamma d\omega dx.$$

Bevis:

Ifølge Korollar 3.5 er $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, og vi har derfor, at

$$\tilde{f} = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_g f(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x \gamma d\omega dx.$$

er en veldefineret funktion, der tilhører $L^2(\mathbb{R})$ (jvf. de indledende udregninger til denne sætning). Sætning 3.4 giver nu, at

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, h \rangle &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_g f(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x \gamma, h \rangle d\omega dx \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_g f(x, \omega) \langle M_{\omega} T_x \gamma, h \rangle d\omega dx \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_g f(x, \omega) \overline{\langle h, M_{\omega} T_x \gamma \rangle} d\omega dx \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \langle V_g f, V_{\gamma} h \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \langle f, h \rangle \overline{\langle g, \gamma \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \langle f, h \rangle \langle \gamma, g \rangle = \langle f, h \rangle, \quad h \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ifølge de udregninger, der ledte op til sætningen, følger der nu, at $\tilde{f} = f$. ■

Når man laver tids-frekvens analyse af et signal, består processen overordnet af tre dele:

- (i) *Analyse*: Givet et signal $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, så udregnes dens KTFT $V_g s$ med hensyn til en passende vinduefunktion g , og $V_g s$ betragtes som en sammenhæng mellem tid og frekvens.
- (ii) *Behandling*: Her transformeres $V_g s(x, \omega)$ til en ny funktion $F(x, \omega)$, der f.eks. er en begrænsning af $V_g s(x, \omega)$ til et særligt interessant område. Det er i behandlingsdelen, at man f.eks. splitter signalet op i forskellige dele eller komprimerer det.
- (iii) *Syntese*: Det behandlede signal rekonstrueres nu via den modificerede inversionsformel (se ligning (3.3))

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) \cdot M_{\omega} T_x \gamma d\omega dx$$

med hensyn til et passende *syntesevindue* γ . Man kan altid anvende g som syntesevindue, men i visse tilfælde kan det være en fordel at anvende forskellige vinduer til analyse og syntese.

3.3 Spektrogram

I dette afsnit defineres begrebet *spektrogram*, der er centralt i forbindelse med tids-frekvens analyse, når man rent grafisk skal gengive en tids-frekvens repræsentation.

Definition 3.7 (Spektrogram)

Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ være en vinduefunktion. Spektrogrammet af $f \in L^2(\mathbb{R})$ med hensyn til g er defineret som

$$\text{SPEC}_g f(x, \omega) = |V_g f(x, \omega)|^2, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

I det følgende lemma er der opstillet flere egenskaber ved spektrogrammet.

Lemma 3.8

Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ være en vinduefunktion og $f \in L^2(\mathbb{R})$. Da gælder

- (i) $\text{SPEC}_g f(x, \omega) \geq 0$, for alle $x, \omega \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\text{SPEC}_g(T_u M_{\eta} f)(x, \omega) = \text{SPEC}_g f(x - u, \omega - \eta)$ for alle $x, \omega, u, \eta \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{SPEC}_g f(x, \omega) dx d\omega = \|f\|^2 \|g\|^2$.

Bevis:

Det første punkt følger af definitionen af spektrogrammet. For at vise punkt (ii) ser vi, at

$$\begin{aligned}
 V_g(T_u M_\eta f)(x, \omega) &= \langle T_u M_\eta f, M_\omega T_x g \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \eta(t-u)} f(t-u) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \eta t} f(t) \overline{g(t-x+u)} e^{-2\pi i \omega(t+u)} dt \\
 &= e^{-2\pi i u \omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t-(x-u))} e^{-2\pi i t(\omega-\eta)} dt \\
 &= e^{-2\pi i u \omega} V_g f(x-u, \omega-\eta), \quad \forall x, \omega, u, \eta \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Dermed har vi, at

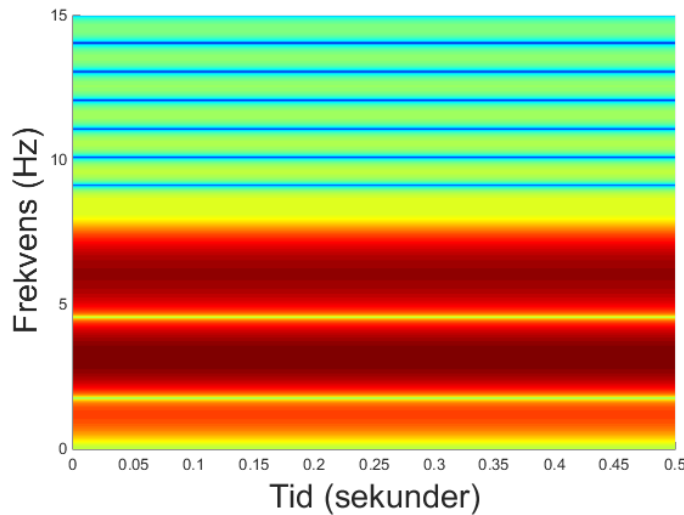
$$\begin{aligned}
 \text{SPEC}_g(T_u M_\eta f)(x, \omega) &= |V_g(T_u M_\eta f)(x, \omega)|^2 \\
 &= |e^{-2\pi i u \omega} V_g f(x-u, \omega-\eta)|^2 \\
 &= |V_g f(x-u, \omega-\eta)|^2 \\
 &= \text{SPEC}_g f(x-u, \omega-\eta), \quad \forall x, \omega, u, \eta \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Det tredje og sidste punkt vises ved

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{SPEC}_g f(x, \omega) dx d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega \\
 &= \|V_g f\|^2 = \|f\|^2 \|g\|^2,
 \end{aligned}$$

hvor vi undervejs anvender Korollar 3.5. ■

KTFT'en vil nu blive anvendt til at konstruere et spektrogram af signalet $s(t)$ defineret i ligning (3.1) side 17. Et sådan spektrogram ses i Figur 3.5 (se Bilag B Matlab-kode B.3 side 112 for Matlab koden).

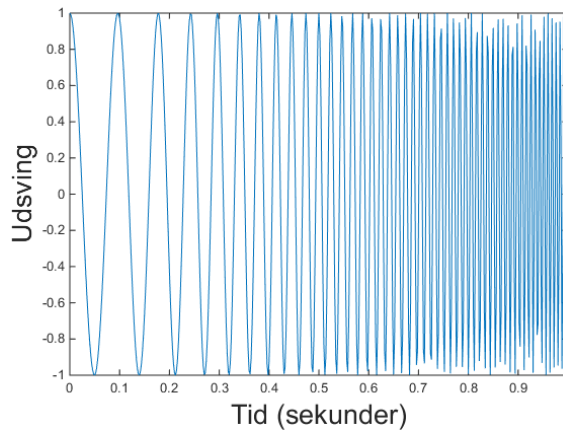


Figur 3.5: Spektrogram af signalet $s(t)$

Farverne på spektrogrammet indikerer, hvor kraftigt frekvenserne forekommer. Jo rødere farven er, desto kraftigere er frekvensen repræsenteret i signalet til det givne tidspunkt.

Det ses, at farverne er rødest i frekvensområdet 2 – 8, der indeholder frekvenserne 2, 3 og 6, som signalet er opbygget af. Frekvenserne 3 og 6 ser ud til at have de rødeste farver, mens frekvensen 2 har en lysere farve, hvilket bl.a. skyldes, at frekvenserne 3 og 6 har amplituderne 3 og 2, mens frekvensen 2 kun har amplituden 1. Dette illustrerer, at spektrogrammet er brugbart, men ikke giver præcis information. Det ses yderligere se af spektrogrammet, at frekvenserne ikke varierer med tiden, hvilket stemmer overens med konstruktionen af $s(t)$.

Der vil nu blive set på et signal $s(t)$, hvis frekvenser varierer med tiden som illustreret på Figur 3.6.

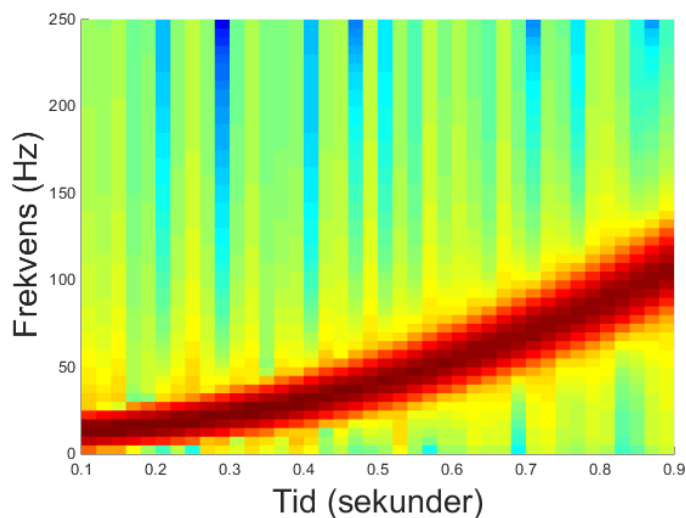


Figur 3.6: Grafen for en chirp

Dette signal er en *chirp*, hvor frekvenserne varierer kvadratisk med hensyn til tiden, sådan at

$$f(t) = f_0 + a \cdot t^2,$$

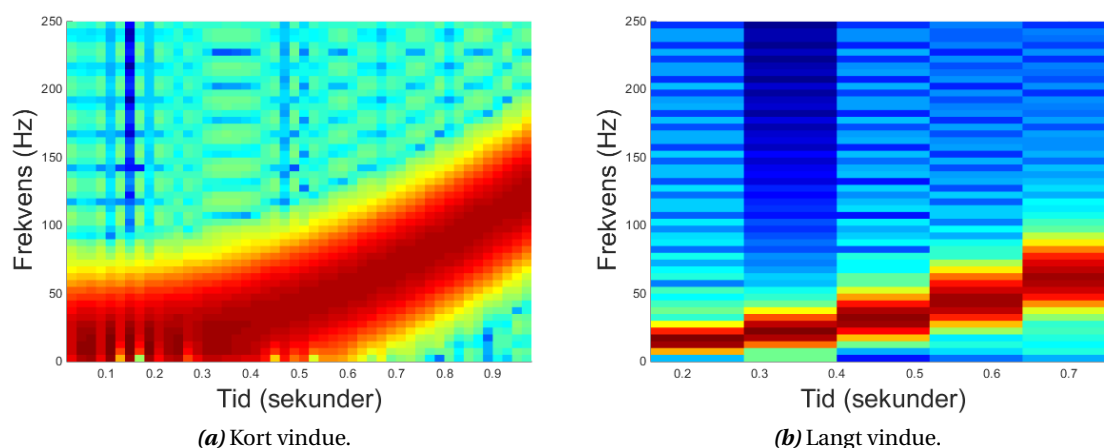
hvor $f(t)$ er frekvensen til tiden t , og f_0 er begyndelsesfrekvensen. Der er i dette tilfælde defineret, at $f(0) = 10$ og $f(0.5) = 40$. Spektrogrammet for chirpen er vist i Figur 3.7 (den tilhørende kode findes i Bilag B Matlab-kode B.4 side 112).



Figur 3.7: Spektrogram af chirp

Det ses her, hvordan frekvenserne stiger med tiden, og det passer udmærket, at begyndelsesfrekvensen er 10 Hz, og at frekvensen efter 0.5 sekund er 40 Hz. Ved at følge den mørkerøde farve kan det lade sig gøre nogenlunde at aflæse frekvenserne til forskellige tidspunkter, men det bliver ikke særlig præcist.

Ved at ændre på vinduet er det muligt at opnå bedre opløsning i tid *eller* frekvens. Et kortere vindue giver bedre opløsning i tid, mens et længere vindue giver bedre opløsning i frekvens. Dette er illustreret i Figur 3.8.



Figur 3.8: Forskel på anvendelse af kort og langt vindue i spektrogrammet.

Det ses af de to figurer, hvordan en bedre opløsning i tid bliver på bekostning af en dårlige opløsning i frekvens og omvendt. Disse figurer er dermed eksempler på, hvilke konsekvenser usikkerhedsprincippet har for tids-frekvens analyse.

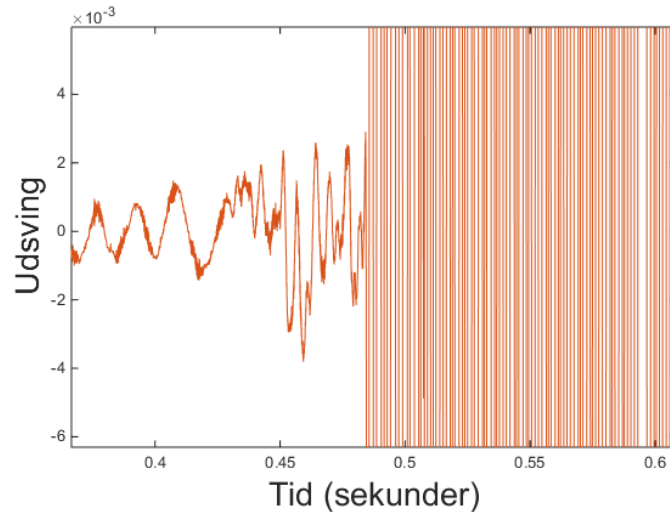
3.4 Tids-frekvens analyse af musiksignaler

Når man skal analysere frekvenser i et musiksignal, bliver situationen hurtigt mere kompliceret, end vi har set i de forrige eksempler. For det første vil der til ethvert tidspunkt være mange forskellige frekvenser til stede - også selvom instrumentet kun slår én tone an af gangen.

En *ren tone* er en tone, der består af én bestemt *frekvens*, og som derfor har form som en sinusbølge. En ren tone er monoton og kedelig at høre på, og musikinstrumenter er derfor konstruerede til at frembringe *sammensatte toner*, der hver især består af en *grundtone* og en række *overtoner*. Grundtonen er den rene tone med laveste frekvens, *grundfrekvensen*, og overtonerne er de rene toner, hvis frekvenser er heltal multipliceret med grundfrekvensen. Hvis den anslåede tone f.eks. er kammertonen, der har en grundfrekvens på 440 Hz, så har den første overtone en frekvens på 880 Hz, anden overtone har en frekvens på 1320 Hz osv. Det er lydstyrken af de forskellige overtoner, der afgør instrumentets klang.

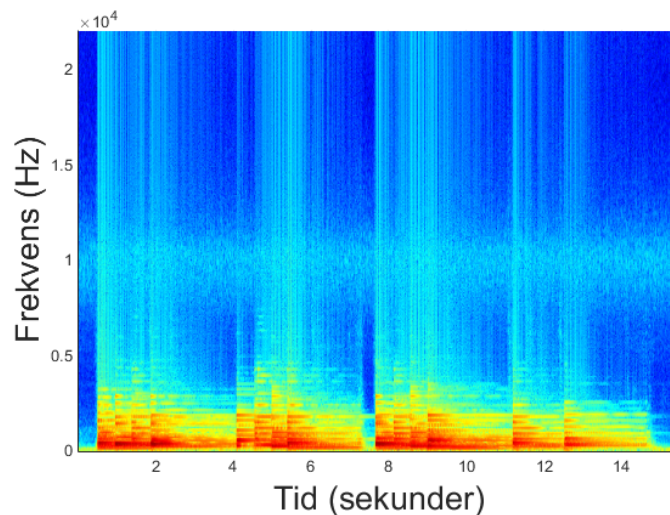
Indenfor musikkens verden arbejder man med noder, der kan forstås som en slags tids-frekvens repræsentation. Den horisontale akse repræsenterer tiden, og den vertikale akse repræsenterer tonehøjder. Et eksempel på et nodeark er givet i Figur 3.9.

mer overens med lange nodeværdier. Yderligere ses det, at pausen i midten af plottet svarer til pausen sidst i takt to. Det er generelt tydeligt at se, hvor hver af de fire takter starter. Nogle af anslagene medfører større udsving end andre, hvilket skyldes to ting: For det første, at der er forskel på hvor mange nye toner, der slås an, og for det andet, at pianisten varierer lydstyrken. I Figur 3.11 er der zoomet ind på det første anslag.



Figur 3.11: Udsnit af indspilningen, hvor kun det første anslag ses.

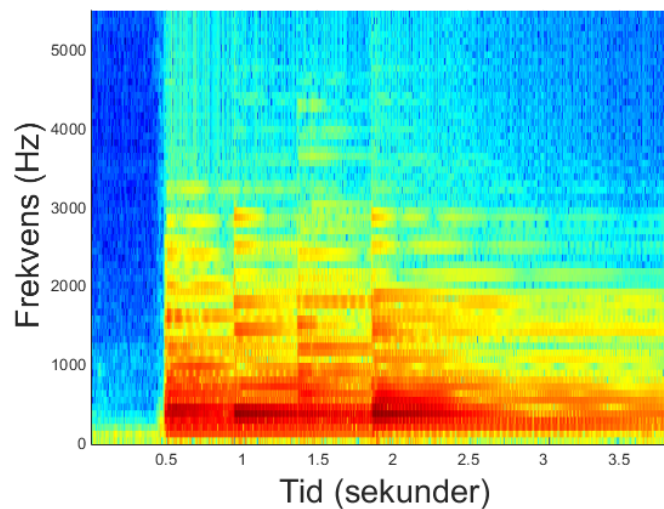
Det er her nemmere at se, at der rent faktisk er tale om udsving og ikke bare "blokke" af lyd. De små svingninger, der ses, inden det første anslag indtræffer, stammer fra (meget lav) baggrundsstøj i indspilningslokalet. Et spektrogram af lydsignalet er vist i Figur 3.12 (se Bilag B Matlab-kode B.6 side 112 for Matlab koden).



Figur 3.12: Spektrogram af de fire takters klavermusik

Det ses, hvordan spektrogrammet gengiver, at stykket kan inddeles i fire dele, der hver stemmer overens med en takt. Yderligere ses det, at den største frekvensaktivitet forekommer i området 0-5000 Hz, men at der også er frekvenser på over 20000 Hz, hvilket skyldes forekomsten af overtoner. For at se nærmere på frekvenserne ser vi nu kun på den første takt, hvilket er vist

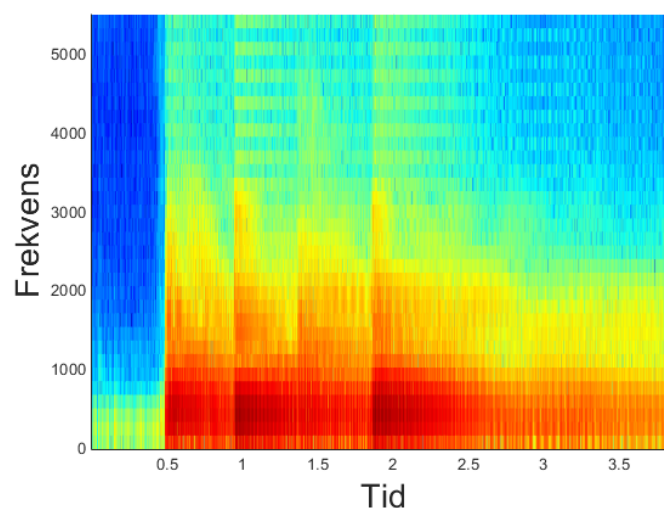
i Figur 3.13.



Figur 3.13: Spektrogram af den første takt af klavermusikken

Det ses her, at frekvenserne omkring 200-700 Hz er stærkest repræsenteret, hvilket passer med, at stemmerne er fordelt omkring nøglehuls c'et, der har en grundfrekvens på 261 Hz. Man kan også se, at der skiftes toner 4 gange i takten, og at den sidste tone er længere end de første tre. Det er til gengæld svært at se sammenhængen mellem frekvenserne og toneskift. De tre første toner udgør f.eks. en nedadgående frase, hvilket er svært at se af spektrogrammet.

Der er til spektrogrammet i Figur 3.13 anvendt et langt vindue, hvilket medfører en dårlig opløsningen i tid. I Figur 3.14 er spektrogrammet af den første takt igen gengivet, men denne gang er der anvendt et kortere vindue.



Figur 3.14: Spektrogram af den første takt med brug af et kortere vindue

Det ses, hvordan der med et kort vindue er opnået en bedre opløsning i tid på bekostning af en dårligere opløsning i frekvens. Af dette spektrogram er det f.eks. sværere at se, at de forskellige grundfrekvenser ligger i området 200-700 Hz. I det næste kapitel vil der blive beskrevet

en anden tilgang til konstruktion af spektrogrammer, der kan forbedre opløsning i både tid og frekvens i forhold til den inddragede teori fra dette kapitel.

FRAMES I HILBERTRUM

Dette kapitel er baseret på [Christensen, 2003].

En af de vigtigste egenskaber ved en basis $\{e_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er, at ethvert element $f \in \mathcal{H}$ kan skrives på formen

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

hvor koefficienterne c_k er unikke. En frame $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en følge, der ligeledes har den egenskab, at alle $f \in \mathcal{H}$ kan skrives på formen

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \tag{4.1}$$

men hvor koefficienterne ikke nødvendigvis er unikke. En frame er dermed ikke nødvendigvis en basis. Den præcise definition er følgende.

Definition 4.1 (Frame)

En følge $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame for $\mathcal{H}$, hvis der eksisterer konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Konstanterne A og B i Definition 4.1 kaldes *frame-grænser* og er ikke unikke. Den størst mulige værdi for A og den mindst mulige værdi for B kaldes de *optimale frame-grænser*. En frame er nødvendigvis en Bessel-følge jvf. Definition 2.10 side 12. Af det følgende ses, at hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame for $\mathcal{H}$, så er $\{f_k\}_{k \geq 1}$ fuldstændig. Det vil sige, at

$$\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \geq 1} = \mathcal{H}. \tag{4.2}$$

Da $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \geq 1}$ er et lukket underrum, gælder der ifølge pkt. (ii) i Sætning A.5 side 101, at hvis $f \notin \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \geq 1}$, så er $f \in (\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \geq 1})^\perp$, hvilket medfører, at

$$\langle f, f_k \rangle = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Dette medfører ifølge Definition 4.1, at $A \|f\|^2 \leq 0$, og dermed at f er nulvektoren, hvilket er i modstrid med, at f ikke tilhører $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \geq 1}$. Dermed har vi vist ligning (4.2), hvilket vil sige, at hvis $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame for $\mathcal{H}$, så kan alle $f \in \mathcal{H}$ skrives på formen i ligning (4.1).

Definition 4.2 (Tight frame og exact frame)

En frame kaldes *tight*, hvis der kan vælges $A = B$ som frame-grænser. Hvis en frame mister sin egenskab som frame, når der fjernes et tilfældigt element, så kaldes den en *exact* frame.

Når der tales om frame-grænser for en tight frame, så menes der altid den værdi A , der på samme tid både er en øvre og nedre frame-grænse.

Eksempel 4.3:

Lad $\{e_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ være en ortonormal basis for $\mathcal{H}$.

(i) Ifølge Parsevals ligning (se ligning (2.17) side 14) gælder der, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

og dermed er $\{e_k\}_{k \geq 1}$ en tight frame med $A = 1$. Hvis et tilfældigt element fjernes fra $\{e_k\}_{k \geq 1}$, så udspænder den resterende mængde ikke længere $\mathcal{H}$ og kan dermed ikke være en frame. Dermed er $\{e_k\}_{k \geq 1}$ en exact frame.

(ii) Vi betragter nu følgen

$$\{f_k\}_{k \geq 1} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}.$$

Der må i dette tilfælde gælde, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \|f\|^2 \geq \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Samtidig gælder også, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 + \|f\|^2 = 2\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Det er nu vist, at

$$\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq 2\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

og dermed, at $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame med frame-grænserne $A = 1$ og $B = 2$. ◇

4.1 Dual framen

Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame, så kaldes operatoren $T: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ givet ved

$$Tc := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \quad \forall c \in \ell^2(\mathbb{N})$$

for *syntese operatoren*. Da en frame også er en Bessel-følge, så følger det af Sætning 2.11 side 13, at $T \in B(\ell^2(\mathbb{N}), \mathcal{H})$. Den adjungerede operator $T^* \in B(\mathcal{H}, \ell^2(\mathbb{N}))$ er ifølge samme sætning givet ved

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k \geq 1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Denne operator kaldes *analyse operatoren*. Ved at sammensætte T og T^* fås *frame operatoren* $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ givet ved

$$Sf = TT^*f = T(\{\langle f, f_k \rangle\}_{k \geq 1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (4.3)$$

Da $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en Bessel-følge og $\{\langle f, f_k \rangle\}_{k \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$, så følger det af Korollar 2.12 side 13, at den uendelige række i ligning (4.3) konvergerer ubetinget. Frame operatoren har ifølge [Christensen, 2003] [Lemma 5.1.5 side 90] følgende egenskaber (se Bilag A Afsnit A.3 side 103 for definitionen af en positiv operator).

Lemma 4.4

Lad $\{f_k\}_{k \geq 1} \in \mathcal{H}$ være en frame med frame operator S og frame-grænser A og B . Da gælder, at

- (i) S er begrænset, invertibel, selvadjungeret og positiv.
- (ii) Følgen $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame med frame-grænser A^{-1} og B^{-1} . Hvis A og B er optimale frame-grænser for $\{f_k\}_{k \geq 1}$, så er A^{-1} og B^{-1} optimale frame-grænser for $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$. Frame operatoren for $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ er S^{-1} .

Vi bemærker, at Lemma 4.4 medfører, at S^{-1} ligeledes er begrænset, invertibel, selvadjungeret og positiv.

Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \in \mathcal{H}$ er en frame, så kaldes $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ den *kanoniske dual frame* eller kort *dual framen*. Da frame operatoren for $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ er S^{-1} , så følger det, at den kanoniske dual frame til $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ er givet ved

$$\{(S^{-1})^{-1}S^{-1}f_k\}_{k \geq 1} = \{SS^{-1}f_k\}_{k \geq 1} = \{f_k\}_{k \geq 1}.$$

Dermed er $\{f_k\}_{k \geq 1}$ og $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ hinandens kanoniske dual frames.

Der gælder følgende vigtige sætning for frames, som er baggrunden for, at man kan betragte dem som en slags "generaliserede baser".

Sætning 4.5

Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame med frame operator S , så gælder der, at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Denne række konvergerer ubetinget for alle $f \in \mathcal{H}$.

Bevis:

Da S^{-1} er selvadjungeret, kan vi ifølge definitionen af frame operatoren (se ligning (4.3)) skrive

$$\begin{aligned} f &= SS^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vi har også fra Lemma 4.4, at $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame for $\mathcal{H}$ med øvre frame grænse B^{-1} , hvilket medfører, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 \leq B^{-1} \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Dermed er $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$ for alle $f \in H$ (se ligning (2.14) side 12 for definitionen af rummet $\ell^2(\mathbb{N})$). Da $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame, og dermed en Bessel-følge, så giver Korollar 2.12 side 13 nu, at rækken i ligning (4.4) konvergerer ubetinget. ■

Tilsvarende gælder, at

$$\begin{aligned} f &= S^{-1}Sf = S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

og med samme argumenter, som blev anvendt i beviset for Sætning 4.5, ses det, at denne række konvergerer ubetinget.

Sætning 4.5 medfører, at alt information om et givet $f \in H$ er indeholdt i følgen $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k \geq 1}$. Tallene $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ kaldes *frame-koefficienter*. Af ligning (4.5) ses det, at tallene $\langle f, f_k \rangle$ er frame-koefficienter for den kanoniske dual frame $\{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$.

For en positiv operator $U \in B(\mathcal{H})$ har vi ifølge [Christensen, 2003][Lemma A.6.7 side 410] følgende resultat for eksistensen af en *kvadratrod*, dvs. en operator $W \in B(\mathcal{H})$, der opfylder, at $W^2 = U$.

Lemma 4.6

Enhver positiv operator $U \in B(\mathcal{H})$ har en unik kvadratrod $W \in B(\mathcal{H})$, der også er en positiv operator. Hvis U er selvadjungeret, så er W selvadjungeret, og hvis U er invertibel, så er W invertibel. Yderligere gælder, at U og W kommuterer, og at der eksisterer en følge af polynomier i U , $\{p_n(U)\}_{n \geq 1}$, sådan at der for alle $f \in \mathcal{H}$ gælder, at

$$p_n(U)f \rightarrow Wf.$$

Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame med frame operator S , så ved vi, at $S^{-1} \in B(H)$ er en positiv, selvadjungeret og invertibel operator. Lemma 4.6 giver nu, at der eksisterer en unik kvadratrod, $S^{-\frac{1}{2}} \in B(H)$, der også er positiv, selvadjungeret og invertibel, og som opfylder, at $S^{-\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}} = S^{-1}$.

Vi kan nu opskrive følgende sætning, der giver en sammenhæng mellem frames og ortonormale baser.

Sætning 4.7

- (i) Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en tight frame med frame-grænser $A = B = 1$, og $\|f_k\| = 1$ for alle $k \geq 1$, så er $\{f_k\}_{k \geq 1}$ en ortonormal basis.
- (ii) Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame med frame operator S , så er $\{S^{-\frac{1}{2}} f_k\}_{k \geq 1}$ en tight frame med frame-grænser $A = B = 1$.

Bevis:

- (i) Ifølge antagelserne har vi, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = 1, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad \text{og} \quad \|f_k\| = 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Dermed kan vi for ethvert $j \geq 1$ skrive

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_j, f_k \rangle|^2 = |\langle f_j, f_j \rangle|^2 + \sum_{k \neq j} |\langle f_j, f_k \rangle|^2 = 1 + \sum_{k \neq j} |\langle f_j, f_k \rangle|^2.$$

Det vil sige, at

$$\langle f_j, f_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{hvis } j = k \\ 0 & \text{hvis } j \neq k \end{cases}$$

Da $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame kan vi for alle $f \in \mathcal{H}$ skrive

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k,$$

og vi mangler nu blot at vise, at koefficienterne c_k er unikke for, at $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en ortonormal basis. Dette ses ved det følgende:

$$\langle f, f_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, f_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle f_k, f_j \rangle = c_j.$$

- (ii) Ifølge Lemma 4.6 kommuterer S^{-1} og $S^{-\frac{1}{2}}$, hvilket medfører, at

$$S^{-1} S^{-\frac{1}{2}} = S^{-\frac{1}{2}} S^{-1} \Leftrightarrow S^{-\frac{1}{2}} S = S S^{-\frac{1}{2}}.$$

Ved at anvende definitionen af frame operatoren (se ligning (4.3) side 35), og at $S^{-\frac{1}{2}}$ er begrænset og selvadjungeret, kan vi nu skrive

$$\begin{aligned} f &= S S^{-1} f = S S^{-\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}} f = S^{-\frac{1}{2}} S S^{-\frac{1}{2}} f \\ &= S^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-\frac{1}{2}} f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-\frac{1}{2}} f, f_k \rangle S^{-\frac{1}{2}} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle S^{-\frac{1}{2}} f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Dermed har vi, at

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \left\langle f, \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle S^{-\frac{1}{2}} f_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle \right|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Vi kan dermed skrive

$$\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle \right|^2 \leq \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

og dermed er $\{f_k\}_{k \geq 1}$ en tight frame med frame-grænser $A = B = 1$. ■

Følgen $\{S^{-\frac{1}{2}} f_k\}_{k \geq 1}$ kaldes den *kanoniske tight dual frame*. Vi bemærker, at vektorerne $S^{-\frac{1}{2}} f_k$ ikke nødvendigvis opfylder, at $\|S^{-\frac{1}{2}} f_k\| = 1$, og derfor behøves $\{S^{-\frac{1}{2}} f_k\}_{k \geq 1}$ ikke udgøre en ortonormal basis.

Der gælder ifølge [Christensen, 2003][Theorem 6.1.1 side 124] følgende sætning for frames.

Sætning 4.8

Lad $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ være en frame for $\mathcal{H}$. Da er følgende udsagn ækvivalente:

- (i) $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en Riesz basis for $\mathcal{H}$.
- (ii) $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en exact frame.
- (iii) $\{f_k\}_{k \geq 1}$ og $\{S^{-1} f_k\}_{k \geq 1}$ er biortogonale.
- (iv) Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ for $\{c_k\}_{k \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$, så er $c_k = 0$ for alle $k \geq 1$.
- (v) $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en basis for $\mathcal{H}$.

For en gennemgang af Riesz baser henvises der til Bilag A Afsnit A.4 side 104. At $\{f_k\}_{k \geq 1}$ og $\{S^{-1} f_k\}_{k \geq 1}$ er biortogonale betyder, at

$$\langle f_i, S^{-1} f_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{hvis } i \neq j \\ 1, & \text{hvis } i = j \end{cases}.$$

En frame, der ikke er en Riesz basis, kaldes *redundant*. Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en redundant frame, så følger der af Sætning 4.8, at der eksisterer $\{d_k\}_{k \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$, sådan at

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k = 0.$$

Da $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en frame, så gælder der ifølge Sætning 4.5 for alle $f \in \mathcal{H}$, at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k.$$

Vi kan dermed skrive

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, S^{-1} f_k \rangle + d_k) f_k, \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k f_k. \end{aligned}$$

Dermed eksisterer der flere forskellige koefficienter $\{c_k\}_{k \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$, der opfylder

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k. \quad (4.6)$$

4.2 Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$

I Eksempel 2.15 side 14 blev der konstrueret en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$ givet ved

$$\left\{ e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}} = \{M_k T_n g(x)\}_{k,n \in \mathbb{Z}},$$

hvor $g = \chi_{[0,1]}$. Denne basis er et eksempel på en såkaldt *Gabor frame* for $L^2(\mathbb{R})$.

Definition 4.9 (Gabor frame)

Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ være en fast funktion og $a, b > 0$. Da kaldes mængden af tids-frekvens skift

$$\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

for et *Gabor system*. Hvis $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så kaldes den en Gabor frame.

Frames på denne form kaldes også *Weyl-Heisenberg frames*. Konstanterne a og b kaldes *tids-frekvens skift parametre*. Gabor Frames kan karakteriseres ved hjælp af Sætning 4.10, men inden vi kan opskrive denne sætning, må vi foretage nogle indledende udregninger. Først defineres vektorrummet $\ell^2(\mathbb{Z})$, der er givet ved

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ c = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad \left| \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \right. \right\}$$

Dette rum er altså defineret på samme måde som $L^2(\mathbb{R})$, men hvor integration foretages med hensyn til tællemalet i stedet for Lebesgue målet. Dermed er $\ell^2(\mathbb{Z})$ et Hilbertrum med hensyn til skalarproduktet

$$\langle c, d \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c, d \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Givet $g \in L^2(\mathbb{R})$, så betragter vi funktionen

$$H(x) := \left(g \left(x - na - \frac{m}{b} \right) \right)_{m,n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Det vil sige, at for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, så er $H(x)$ en veldefineret matrix, hvis indgang i den m 'te række og n 'te kolonne er givet ved

$$H_{m,n}(x) = g\left(x - na - \frac{m}{b}\right).$$

Vi lader nu $H(x)^*$ betegne den konjugerede transponerede af $H(x)$, hvis indgang i den m 'te række og n 'te kolonne er givet ved

$$H_{m,n}(x)^* = \overline{H_{n,m}(x)}.$$

For $x \in \mathbb{R}$ betragter vi nu matrix produktet $G(x) = H(x)H(x)^*$, hvis indgang i den m 'te række og k 'te kolonne er givet ved

$$\begin{aligned} G_{m,k}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{m,n}(x) H_{n,k}(x)^* \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{m,n}(x) \overline{H_{k,n}(x)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g\left(x - na - \frac{m}{b}\right) \overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}. \end{aligned}$$

Ifølge [Christensen, 2003][side 173] konvergerer den uendelige række, der definerer $G_{m,k}(x)$, for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, og der gælder yderligere, at det er nødvendigt, at $G(x) \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, for at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ kan være en Gabor frame. Hvis $G(x) \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ har vi for $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$, at

$$(G(x)c)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g\left(x - na - \frac{m}{b}\right) \overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)} c_k.$$

Dermed har vi, at

$$\begin{aligned} \langle G(x)c, c \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g\left(x - na - \frac{m}{b}\right) \overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)} c_k \overline{c_m} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g\left(x - na - \frac{k}{b}\right) \overline{g\left(x - na - \frac{m}{b}\right)} c_k \overline{c_m} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(x - na - \frac{k}{b}\right) c_k \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{g\left(x - na - \frac{m}{b}\right)} c_m \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(x - na - \frac{k}{b}\right) c_k \right|^2 \geq 0, \quad \forall c \in \ell^2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Det vil sige, at $G(x)$ er en positiv operator på $\ell^2(\mathbb{Z})$, når $G(x) \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Der gælder ifølge [Christensen, 2003][Theorem 8.2.3 side 173] følgende sætning, der karakteriserer alle Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$.

Sætning 4.10

Lad $A, B > 0$ og Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ være givet. Da er $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame-grænser A og B , hvis og kun hvis der for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\langle bA I c, c \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \langle G(x)c, c \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \langle bB I c, c \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}, \quad \forall c \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

hvor I er identitetsoperatoren på $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Vi har yderligere ifølge [Christensen, 2003][Theorem 8.3.1 side 174] følgende sætning, der spiller en vigtig rolle i forbindelse med tids-frekvens analyse.

Sætning 4.11

Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og $a, b > 0$ være givet. Da gælder, at

(i) Hvis $ab > 1$, så er $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ ikke en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Hvis $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$, så gælder, at

$$ab = 1 \Leftrightarrow \{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \text{ er en Riesz basis.}$$

Det er altså en nødvendig betingelse, at $ab \leq 1$, for at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ kan være en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$. Det er imidlertid ikke en tilstrækkelig betingelse, og det er derfor muligt, at $ab \leq 1$ uden at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Eksempel 4.12:

Hvis vinduefunktionen g er givet som Gauss funktionen

$$g(x) := \varphi_\pi(x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2} = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

så gælder der ifølge [Christensen, 2003][Theorem 8.6.1 side 190], at Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvis og kun hvis $ab < 1$. Det vil nu blive vist, at dette resultat medfører, at $\{M_{mb}T_{na}\varphi_c\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ for $c > 0$, hvis og kun hvis $ab < 1$.

At $\{M_{mb}T_{na}\varphi_\pi\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ betyder, at der eksisterer frame-grænser A og B , sådan at

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}\varphi_\pi \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (4.7)$$

Givet $c > 0$ kan vi skrive

$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= e^{-\frac{\pi}{c}x^2} \\ &= \left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}} e^{-\left(\frac{x}{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2} \\ &= \left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} D_{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-x^2} \\ &= \left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} D_{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \varphi_\pi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ifølge Lemma 2.6 side 8 er dilationsoperatoren unitær, og vi har dermed, at

$$\left(D_{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^* = \left(D_{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} = D_{\left(\frac{c}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}. \quad (4.9)$$

Vi indfører nu størrelserne

$$p = a \left(\frac{c}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{og} \quad q = b \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dermed har vi, at $ab < 1$ hvis og kun hvis $pq < 1$. Da en unitær operator er en isometri, kan vi dermed for $ab < 1$ ifølge ligning (4.7) skrive

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} A \|f\|^2 &= \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} A \left\| D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}} f \right\|^2 \\ &\leq \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}} f, M_{mq} T_{np} \varphi_{\pi} \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} B \left\| D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}} f \right\|^2 \\ &= \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} B \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ifølge ligning (4.8) og (4.9), samt ligningerne (2.8) og (2.9) fra side 9, har vi imidlertid, at

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}} f, M_{mq} T_{np} \varphi_{\pi} \right\rangle \right|^2 &= \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f, D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}} M_{mq} T_{np} \varphi_{\pi} \right\rangle \right|^2 \\ &= \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f, M_{mb} D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}} T_{np} \varphi_{\pi} \right\rangle \right|^2 \\ &= \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f, M_{mb} T_{na} D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}} \varphi_{\pi} \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f, M_{mb} T_{na} \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} D_{\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}} \varphi_{\pi} \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb} T_{na} \varphi_c \rangle|^2. \end{aligned}$$

Ovenstående indsat i ligning (4.10) giver nu, at

$$\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb} T_{na} \varphi_c \rangle|^2 \leq \left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} B \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Altså kan tallene $\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} A$ og $\left(\frac{c}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} B$ bruges som frame-grænser for $\{M_{mb} T_{na} \varphi_c\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$. Dermed har vi vist, at $\{M_{mb} T_{na} \varphi_c\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ for $c > 0$, hvis og kun hvis $ab < 1$. $\diamond$

4.2.1 Dual framen til en Gabor frame

I dette afsnit ses der på, hvordan dual framen til en Gabor frame kan bestemmes. Vi starter med følgende lemma.

Lemma 4.13

Lad $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ være en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame operator S . Da gælder, at

$$SM_{mb} T_{na} = M_{mb} T_{na} S, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Bevis:

For $f \in L^2(\mathbb{R})$ har vi ifølge definitionen af S (se ligning (4.3) side 35), at

$$\begin{aligned}
(M_{mb}T_{na})^{-1}SM_{mb}T_{na}f &= (M_{mb}T_{na})^{-1}\sum_{k,j}\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle M_{kb}T_{ja}g \\
&= \sum_{k,j}\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle (M_{mb}T_{na})^{-1}M_{kb}T_{ja}g \\
&= \sum_{k,j}\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle T_{-na}M_{-mb}M_{kb}T_{ja}g \\
&= \sum_{k,j}\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle T_{-na}M_{b(k-m)}T_{ja}g.
\end{aligned}$$

Ifølge ligning (2.7) side 9 gælder der, at

$$T_{-na}M_{b(k-m)} = e^{-2\pi ib(k-m)(-na)}M_{b(k-m)}T_{-na} = e^{2\pi ib(k-m)na}M_{b(k-m)}T_{-na}.$$

Dermed har vi, at

$$\begin{aligned}
(M_{mb}T_{na})^{-1}SM_{mb}T_{na}f &= \sum_{k,j}\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle e^{2\pi ib(k-m)na}M_{b(k-m)}T_{-na}T_{ja}g \\
&= \sum_{k,j}\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle e^{2\pi ib(k-m)na}M_{b(k-m)}T_{a(j-n)}g.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Vi kan skrive skalarproduktet som

$$\begin{aligned}
\langle M_{mb}T_{na}f, M_{kb}T_{ja}g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} M_{mb}T_{na}f(x) \overline{M_{kb}T_{ja}g(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi imbx} f(x-na) e^{-2\pi ikbx} \overline{g(x-ja)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-na) e^{-2\pi ib(k-m)x} \overline{g(x-ja)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ib(k-m)(x+na)} \overline{g(x-ja+na)} dx \\
&= e^{-2\pi ib(k-m)na} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ib(k-m)x} \overline{g(x-a(j-n))} dx \\
&= e^{-2\pi ib(k-m)na} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{M_{b(k-m)}T_{a(j-n)}g(x)} dx \\
&= e^{-2\pi ib(k-m)na} \langle f, M_{b(k-m)}T_{a(j-n)}g \rangle.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ved at anvende ligning (4.11) og (4.12) kan vi nu skrive

$$(M_{mb}T_{na})^{-1}SM_{mb}T_{na}f = \sum_{k,j}\langle f, M_{b(k-m)}T_{a(j-n)}g\rangle M_{b(k-m)}T_{a(j-n)}g = Sf$$

efter at have ændret indeksene. Dette beviser lemmaet. ■

Vi kan nu vise følgende sætning.

Sætning 4.14

Lad $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ være en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame operator S . Da er den kanoniske dual frame givet ved $\{M_{mb}T_{na}S^{-1}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, og den kanoniske tight dual frame er givet ved $\{M_{mb}T_{na}S^{-\frac{1}{2}}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$.

Bevis:

Lemma 4.13 medfører, at

$$SM_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S \Leftrightarrow M_{mb}T_{na}S^{-1} = S^{-1}M_{mb}T_{na}. \quad (4.13)$$

Da dual framen for $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er defineret til

$$\{S^{-1}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{M_{mb}T_{na}S^{-1}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

har vi dermed vist den første del af sætningen. For at vise den anden del af sætningen ser vi først, at Lemma 4.6 side 36 giver, at $S^{-\frac{1}{2}}$ er grænsen af en følge af polynomier i S^{-1} . Da translation og modulation er lineære og kontinuerte operatorer, medfører dette, at også $S^{-\frac{1}{2}}$ kommuterer med $M_{mb}T_{na}$. Dermed har vi, at den kanoniske tight dual frame er givet ved

$$\{S^{-\frac{1}{2}}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{M_{mb}T_{na}S^{-\frac{1}{2}}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}.$$

Dette beviser sætningen. ■

Ved at sætte $\gamma = S^{-1}g$ har vi ifølge Sætning 4.14, at hvis $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ og $\{M_{mb}T_{na}\gamma\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ hinandens kanoniske dual frame. Derfor siges γ og g at være hinandens *dual vinduer*. I det næsten afsnit vil vi se på, hvordan teorien om Gabor frames kan anvendes i forbindelse med tids-frekvens analyse.

4.2.2 Gabor frames i forbindelse med tids-frekvens analyse

Der vil i dette afsnit blive set på, hvilke fordele det giver at arbejde med Gabor frames i forbindelse med tids-frekvens analyse. Der antages til dette, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$ for $g \in L^2(\mathbb{R})$ og $a, b > 0$. Der benyttes følgende notationen

$$\{g_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}} := \{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}.$$

Ifølge Sætning 4.5 side 35 kan vi for ethvert $f \in L^2(\mathbb{R})$ skrive

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}g_{m,n} \rangle g_{m,n}, \quad (4.14)$$

hvor S er frame operatoren tilhørende $\{g_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$. For en operator $U \in B(L^2(\mathbb{R}))$ kan vi dermed skrive

$$Uf = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}g_{m,n} \rangle Ug_{m,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Det vil sige, at det er nok at vide, hvordan operatoren indvirker på frame-elementerne for at vide, hvordan den virker på et vilkårligt $f \in L^2(\mathbb{R})$. Hvis f.eks. U er Fourier transformationen har vi, at

$$\hat{f} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}g_{m,n} \rangle \hat{g}_{m,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

For $f \in L^2(\mathbb{R})$ kan dens KTFT ligeledes bestemmes ved

$$\begin{aligned} V_g f(x, \omega) &= \langle f, M_\omega T_x g \rangle \\ &= \left\langle \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}g_{m,n} \rangle g_{m,n}, M_\omega T_x g \right\rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, M_\omega T_x g \rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}g_{m,n} \rangle V_g g_{m,n}(x, \omega), \quad \forall x, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Frames giver altså en god struktur at arbejde med. Denne struktur medfører også beregningsmæssige fordele, når et signal skal rekonstrueres fra dens KTFT. I dette tilfælde har vi nemlig et syntesevindue γ , der medfører en diskret formel til rekonstruktion af signalet.

Sætning 4.15

Lad $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ være en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame operator S . Da opfylder dual vinduet $\gamma = S^{-1}g$, at

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} V_g f(na, mb) M_{mb}T_{na}\gamma, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Denne række konvergerer ubetinget.

Bevis:

Da $\{g_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame, kan vi ifølge ligning (4.5) side 36 skrive

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n} \rangle S^{-1}g_{m,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

hvor rækken konvergerer ubetinget. Ifølge definitionen af KTFT'en (se Definition 3.3 side 22) har vi dermed, at

$$\begin{aligned} f &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n} \rangle S^{-1}g_{m,n} \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle S^{-1}M_{mb}T_{na}g \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} V_g f(na, mb) S^{-1}M_{mb}T_{na}g, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ifølge ligning (4.13) gælder der, at $S^{-1}M_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S^{-1}$, hvilket medfører, at

$$\begin{aligned} f &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} V_g f(na, mb) M_{mb}T_{na}S^{-1}g \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} V_g f(na, mb) M_{mb}T_{na}\gamma, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dette beviser sætningen. ■

Vi kan ifølge Sætning 4.15 skrive

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} M_{mb}T_{na}\gamma, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (4.15)$$

hvor $c_{m,n} = V_g f(na, mb)$. Dette kaldes en *Gabor udvikling* eller en *Gabor repræsentation* af f og tallene $c_{m,n}$ kaldes f 's *Gabor koefficienter*.

Vi antager nu, at γ har sin essentielle tids-frekvens støtte i en mængde $E \subseteq \mathbb{R}^2$ i tids-frekvens planen. Dermed tilhører den essentielle tids-frekvens støtte af $M_{mb}T_{na}\gamma$, ifølge Sætning 3.8 side 25, mængden $E + (na, mb)$. Vi kan altså forstå et signals Gabor udvikling som en vægtet sum af bidrag fra tids-frekvens planen, hvor Gabor koefficienterne $c_{m,n}$ fortæller, hvor meget tids-frekvens indhold vinduefunktionen bidrager med til tiden na og frekvensen mb . Hvis områderne $E + (na, mb)$ ikke har for meget overlap, så er Gabor koefficienterne dermed et mål for,

hvor meget tids-frekvens indhold signalet har i de forskellige områder. Man kalder af denne grund de forskellige tids-frekvens skift $M_{mb}T_{na}\gamma$ for signalets *byggesten*. Ved at variere værdierne af tids-frekvens skift parametrene a og b kan man enten opnå bedre opløsning i tid eller frekvens (forudsat systemet forbliver en frame). Et mindre a giver bedre opløsning i tid, og et mindre b giver bedre opløsning i frekvens. Der gælder imidlertid, at jo mindre produktet ab bliver, desto mere redundans indeholder systemet. Der vil blive set nærmere på dette problem senere i kapitlet.

Eksempel 4.16:

Vi antager nu, at γ er Gauss funktionen φ_1 givet ved

$$\varphi_1(x) = e^{-\frac{\pi}{1}x^2} = e^{-\pi x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

For at danne et billede af, hvordan støtten af φ_1 er fordelt i tids-frekvens planen betragter vi for $i, j \in \mathbb{Z}$ funktionen

$$G_{i,j}(x, \omega) = M_i T_j \varphi_1(x) \cdot (M_i T_j \varphi_1)^\wedge(\omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Det ses, at denne funktion indeholder information om, hvor $M_i T_j \varphi_1$ har sin støtte i både tid og frekvens. Ifølge Eksempel 2.8 side 11 har vi, at

$$\widehat{\varphi_1}(\omega) = \varphi_1(\omega) = e^{-\pi \omega^2}. \quad (4.16)$$

Dette giver, at

$$\begin{aligned} G_{0,0}(x, \omega) &= \varphi_1(x) \cdot \widehat{\varphi_1}(\omega) \\ &= e^{-\pi x^2} e^{-\pi \omega^2} \\ &= e^{-\pi(x^2 + \omega^2)}, \quad x, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Et tids-frekvens skift af vinduefunktionen kunne f.eks. være givet ved

$$\begin{aligned} M_2 T_3 \varphi_1(x) &= e^{2\pi i 2x} e^{-\pi(x-3)^2} \\ &= e^{4\pi i x - \pi(x-3)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

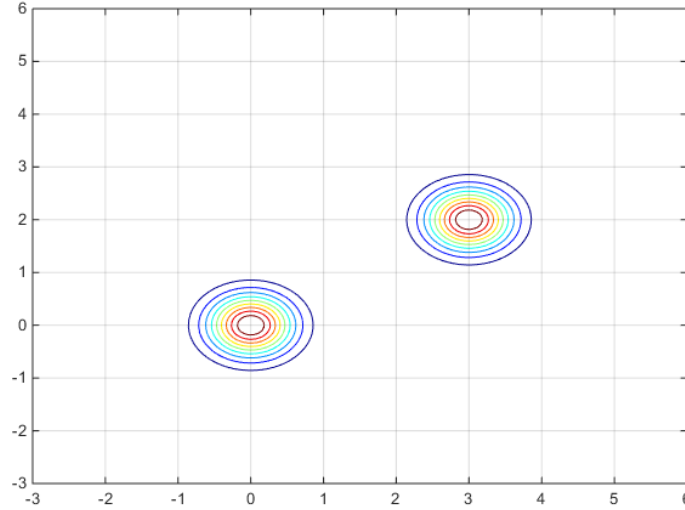
Den Fourier transformerede er ifølge ligning (2.13) side 11 givet ved

$$\begin{aligned} (M_2 T_3 \varphi_1)^\wedge(\omega) &= e^{2\pi i 2 \cdot 3} M_{-3} T_2 \widehat{\varphi_1}(\omega) \\ &= e^{12\pi i} e^{2\pi i (-3)\omega} e^{-\pi(\omega-2)^2} \\ &= e^{12\pi i - 6\pi i \omega - \pi(\omega-2)^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

For at se, hvordan støtten af dette tids-frekvens skift er fordelt i tids-frekvens planen betragter vi funktionen

$$\begin{aligned} G_{3,2}(x, \omega) &= e^{4\pi i x - \pi(x-3)^2} \cdot e^{12\pi i - 6\pi i \omega - \pi(\omega-2)^2} \\ &= e^{12\pi i + 4\pi i x - \pi(x-3)^2 - 6\pi i \omega - \pi(\omega-2)^2}, \quad x, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I Figur 4.1 ses konturplots af $G_{0,0}$ og $G_{3,2}$ (se Bilag B Matlab-kode B.7 side 113 for Matlab koden).



Figur 4.1: Tids-frekvens skift af en vinduefunktion.

Det ses her, hvordan støtten af vinduefunktionen flytter sig fra at være centreret omkring $(0, 0)$ til at være centreret omkring $(3, 2)$. $\diamond$

4.2.2.1 Gabor frames i forhold til Gabor baser

Man kan nu spørge sig selv, hvilke fordele frames har i forhold til ortonormale baser. Ifølge Eksempel 2.15 side 14 har $L^2(\mathbb{R})$ en ortonormal basis $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ givet ved

$$\left\{ e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}} = \{M_k T_n g(x)\}_{k,n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

hvor $g = \chi_{[0,1]}$. Ifølge Eksempel 4.3 side 34 er en ortonormal basis automatisk en tight exact frame med frame-grænser $A = B = 1$, og vi kan se, at $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ i dette tilfælde yderligere er en Gabor frame. Da $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis kan vi ifølge Sætning 2.14 side 14 skrive

$$f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_{k,n} \rangle e_{k,n}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

der er en mere simpel udvidelse, end den vi har for frames. Ulempen ved at anvende en ortonormal basis er indeholdt i den følgende sætning, der medfører, at vinduefunktionen g ikke kan være godt lokaliseret i både tid og sted, hvis $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$ [Christensen, 2003][Theorem 4.1.1 side 82].

Sætning 4.17 (Balian-Low's sætning)

Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$. Hvis $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en Riesz basis for $L^2(\mathbb{R})$, så gælder, at

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) = \infty.$$

Hvis $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en Riesz basis, så medfører Balian-Low's sætning, at der ikke kan eksistere $C \in \mathbb{R}$, sådan at

$$|g(x)| \leq \frac{C}{1+x^2} \quad \text{og} \quad |\hat{g}(\omega)| \leq \frac{C}{1+\omega^2}, \quad \forall x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Hvis et sådan C eksisterede ville der nemlig gælde, at

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{C}{1+x^2} \right)^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left(\frac{C}{1+\omega^2} \right)^2 d\omega \right) \\ &= C^4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{1+\omega^2} \right)^2 d\omega \right) \\ &= C^4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = C^4 \pi < \infty, \end{aligned}$$

hvilket er i modstrid med Balian-Low's sætning. Dermed er g dårligt lokaliseret i enten tid eller frekvens.

Vi har fra pkt. (ii) i Sætning 4.11 side 41, at $\{M_{mb}T_{na}g\}$ er en Riesz basis, hvis og kun hvis $ab = 1$. Det vil sige, at hvis $\{M_{mb}T_{na}g\}$ er en Riesz basis, så er $\{M_{mb}T_{na}\gamma\}$ også en Riesz basis, og dermed er dual vinduet også dårligt lokaliseret i tid eller frekvens ifølge Balian-Low's sætning. Det vil sige, at f 's byggesten $M_{mb}T_{na}\gamma$ har masser af overlap, og dermed kan vi ikke anvende Gabor koefficienterne til at beskrive f 's udbredelse i tids-frekvens planen.

Eksempel 4.18:

Vi betragter igen den ortonormale basis $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$. Vinduefunktionen $g = \chi_{[0,1]}$ medfører god lokalisering i tid, men samtidig en dårlig lokalisering i frekvens, da

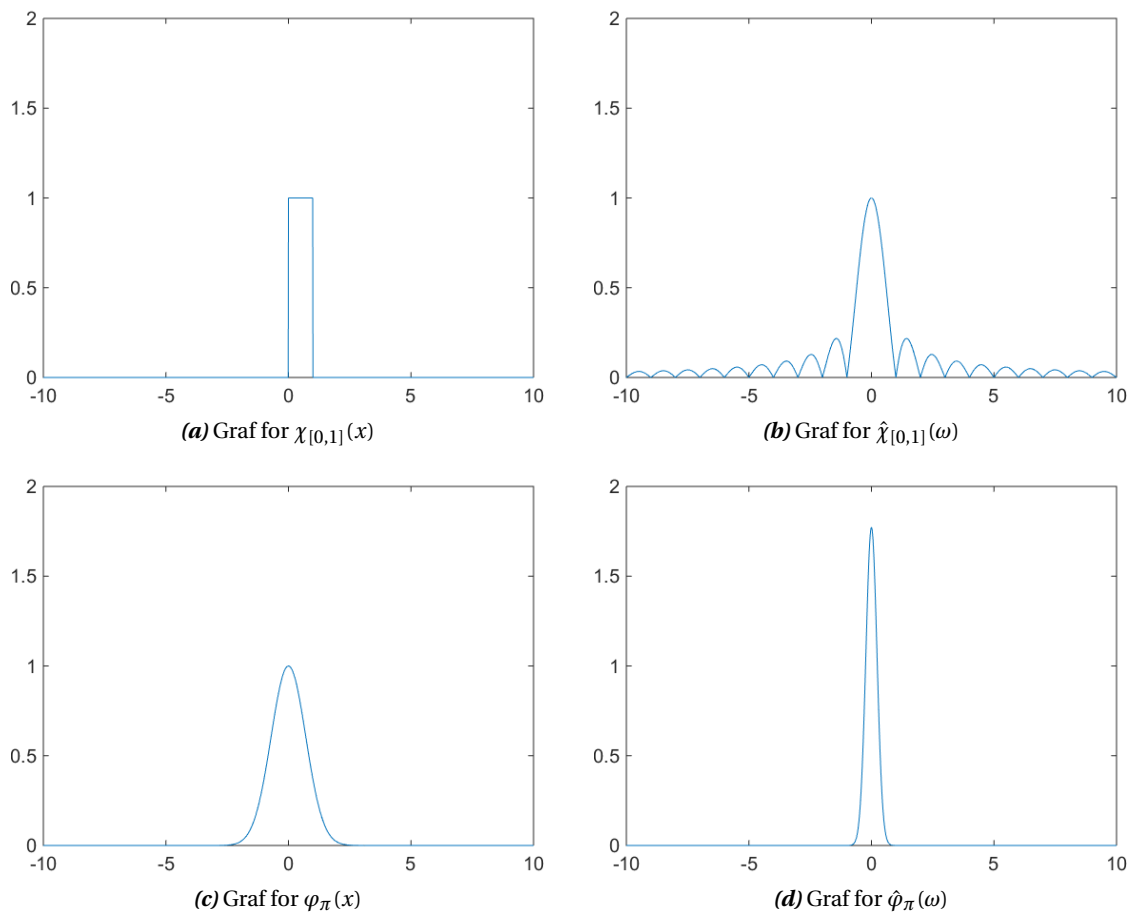
$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{\chi}_{[0,1]}(\omega)|^2 d\omega = \infty.$$

Udregningerne, der viser dette, kan findes i Bilag A Afsnit A.6 side 109. Et eksempel på en funktion, der er godt lokaliseret i både tid og frekvens er Gauss funktionen, der ifølge det klassiske usikkerhedsprincip (se Sætning 3.1 side 20) har den mindst mulige udstrækning i tids-frekvens planen. I Figur 4.2 er der plottet graferne for $\chi_{[0,1]}$ og Gauss funktionen $\varphi_{\pi}(x) = e^{-x^2}$, samt deres Fourier transformationer. Det ses her, at det kun er Gauss funktionen, der opfylder, at både funktionen og dens Fourier transformerede aftager hurtigt. Det er derfor, at Gauss funktionen er egnet som vinduefunktion i modsætning til indikatorfunktionen $\chi_{[0,1]}$. $\diamond$

For en given vinduefunktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ inddeles de mulige Gabor systemer $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ i tre tilfælde:

- (i) Undersampling: $ab > 1$.
- (ii) Kritisk sampling: $ab = 1$.
- (iii) Oversampling: $ab < 1$.

I tilfældet med undersampling ved vi ifølge Sætning 4.11 side 41, at det ikke er muligt, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame, og i tilfældet med kritisk sampling ved vi, at det ikke er muligt for syntesevinduet γ at være godt lokaliseret i både tid og frekvens. Oversampling er dermed en nødvendighed for, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ kan udgøre en frame for $L^2(\mathbb{R})$ samtidig med, at γ er godt lokaliseret i både tid og frekvens. I dette tilfælde kan $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ ikke være en Riesz basis ifølge Sætning 4.11 side 41.



Figur 4.2: Sammenligning af indikatorfunktion og Gauss funktion.

Ved oversampling gælder der dermed, at hvis $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en frame, så må den nødvendigvis være redundant, og dermed er Gabor koefficienterne $c_{m,n}$ i Gabor udviklingen:

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} M_{mb} T_{na} \gamma, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

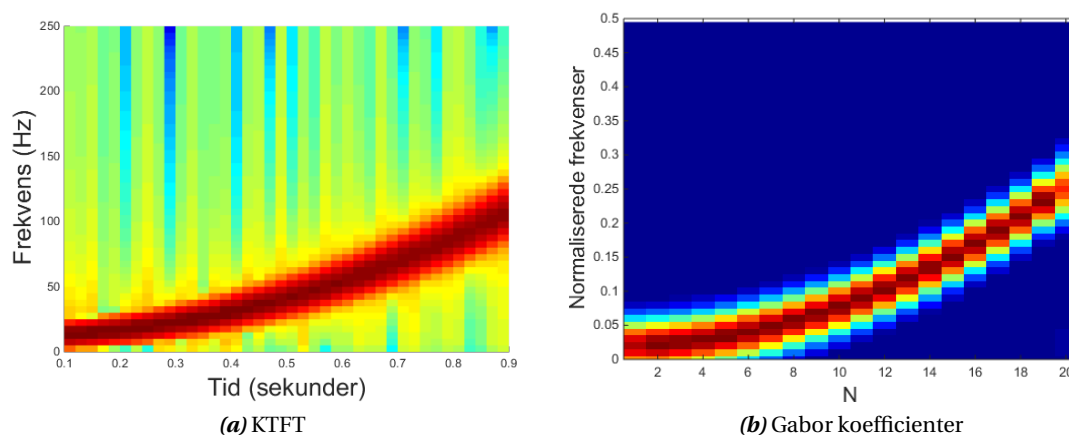
ikke unikke (jvf. udregningerne, der ledte op til ligning (4.6) side 39). Vi må altså acceptere, at Gabor repræsentationen af signalet indeholder en mængde overflødig information for, at vi kan lave en fornuftig tids-frekvens repræsentation.

Eksempel 4.19:

I dette eksempel anvendes igen chirpen $s(t)$ fra Afsnit 3.3 side 25. Ved at lade γ være en Gauss funktion, kan vi skrive chirpens Gabor udvikling som

$$s = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} M_{mb} T_{na} \gamma,$$

hvor $ab < 1$. I Figur 4.3 er et spektrogram baseret på kort-tids fourier transformationen og et spektrogram baseret på den kvadrerede modulus af Gabor koefficienterne, $|c_{m,n}|^2$, vist.



Figur 4.3: Spektrogrammer baseret på KTFT'en og Gabor koefficienter

Matlab-koden til udregning af spektrogrammet i Figur 4.3 (b) kan findes i Bilag B Matlab-kode B.8 side 113. For at forstå akserne på figuren er det imidlertid nødvendigt at kende lidt til den anvendte kode. Gabor koefficienterne er udregnet i et rektangel i tids-frekvens planen, der er underdelt i $N \cdot M$ mindre rektangler, hvor N er inddelingen på tidsaksen og M er inddelingen på frekvensaksen. Det vil sige, at et større N giver bedre opløsning i tid, og et større M giver bedre opløsning i frekvens. Her skal N og M skal opfylde, at

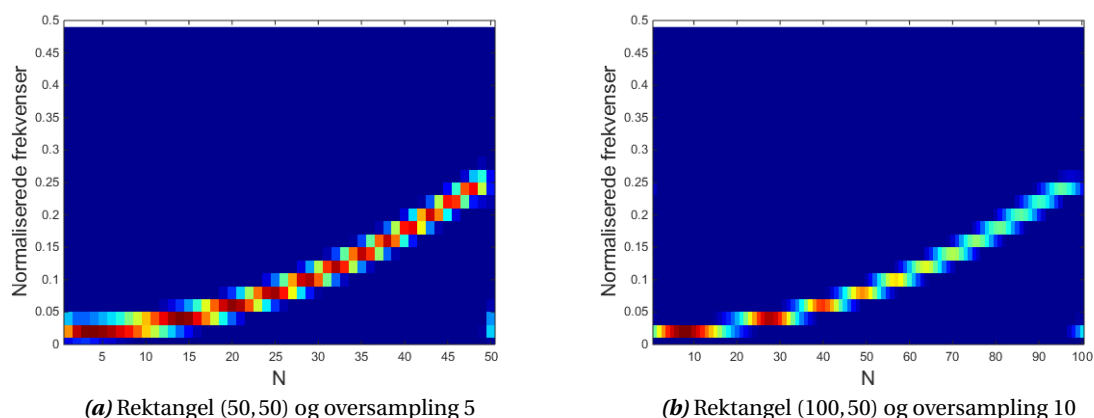
$$N1 = \frac{N \cdot M}{Q}, \quad (4.17)$$

hvor $N1$ er længden af signalet og Q er graden af oversampling. Af ligning (4.17) ses det, at værdien af Q bestemmer, hvor mange gange flere Gabor koefficienter, der udregnes, end der er samples i signalet.

I Figur 4.3 (b) er $N = 20$, $M = 100$ og $Q = 4$, hvilket er grunden til, at førsteaksen går fra 0 til 20. Frekvenserne er normaliserede, hvilket medfører, at enhederne på andenaksen også er ændret i forhold til Figur 4.3 (a). Signalets længde er i dette tilfælde 500, og der udregnes derfor $500 \cdot Q = 2000$ Gabor koefficienter.

Det ses, hvordan spektrogrammet i Figur 4.3 (b) er bedre til at afgrænse området i tids-frekvens planen, hvor der er aktivitet i signalet, end spektrogrammet i Figur 4.3 (a). Dette skyldes, at der anvendes rektangulære vinduer, hvilket både laver en afgrænsning i tid og frekvens. I modsætning hertil anvendes der kun en afgrænsning i tid i Figur 4.3 (a), og derved afgrænses frekvensområdet ikke på samme måde.

I Figur 4.4 er Gabor koefficienterne udregnet ud fra andre rektangler og grader af oversampling.



Figur 4.4: Spektrogrammer baseret på forskellige Gabor repræsentationer

Vi bemærker, at ligning (4.17) er opfyldt i begge tilfælde, da

$$500 = \frac{50 \cdot 50}{5} = \frac{100 \cdot 50}{10}.$$

Det ses af Figur 4.4 (a), at frekvensbåndet er blevet mindre i forhold til Figur 4.3 (b) og opløsningen i tid er blevet bedre. Til gengæld er opløsningen i frekvens blevet dårligere, og specielt i starten er det svært at se, at frekvenserne overhovedet stiger.

I Figur 4.4 (b) er dette endnu mere ekstremt. Vi har her fået et endnu tyndere frekvensbånd og en bedre opløsning i tid, men til gengæld er opløsningen i frekvens meget dårlig og specielt i de overlap, der er mellem hvert "trappetrin", er det svært at se, hvilke frekvenser signalet indeholder. $\diamond$

Resten af denne rapport vil være dedikeret til at arbejde med *multiple Gabor frames*, der anvender flere forskellige vinduefunktioner til at konstruere en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$.

ZAK TRANSFORMATIONEN

Dette kapitel er baseret på Christensen [2003] og [Zibulski og Zeevi, 1997].

I dette afsnit vil der blive set på *Zak transformationen*, der er et nyttigt redskab i forbindelse med multiple Gabor frames, der vil blive defineret senere i kapitlet.

Definition 5.1 (Zak transformationen)

For en fast parameter $\alpha > 0$ definerer vi Zak transformationen $Z^\alpha f$ af $f \in L^2(\mathbb{R})$ ved

$$(Z^\alpha f)(x, \omega) = \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x + k)) e^{-2\pi i \omega k}, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Det ses, at Zak transformationen er en lineær afbildning. Vi indfører nu mængden $Q = [0, 1[\times [0, 1[$. Ifølge Eksempel 2.15 side 14 har $L^2([0, 1])$ en ortonormal basis givet ved $\{e^{2\pi i k x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, og der følger nu af [Reed og Simon, 1980][Proposition 2 side 50], at

$$\left\{ e^{2\pi i k_1 x} e^{2\pi i k_2 \omega} \right\}_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (5.1)$$

er en ortonormal basis for $L^2(Q)$. Vi har følgende lemma for Zak transformationen.

Sætning 5.2

Givet $\alpha > 0$, så er Zak transformationen Z^α en unitær operator fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(Q)$.

Bevis:

Vi betragter først tilfældet, hvor $\alpha = 1$, og lader $f \in L^2(\mathbb{R})$ være givet. For at vise, at $Z^1 f$ er en veldefineret funktion i $L^2(Q)$ betragter vi funktionerne

$$G_k(x, \omega) = f(x + k) e^{-2\pi i \omega k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (x, \omega) \in Q.$$

Disse funktioner tilhører $L^2(Q)$ eftersom der for alle $k \in \mathbb{Z}$ gælder, at

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |G_k(x, \omega)|^2 d\omega dx &= \int_0^1 \int_0^1 |f(x+k)e^{-2\pi i \omega k}|^2 d\omega dx \\ &= \int_0^1 |e^{-2\pi i k \omega}|^2 d\omega \int_0^1 |f(x+k)|^2 dx \\ &= \int_0^1 1 d\omega \int_0^1 |f(x+k)|^2 dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Vi har, at

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G_k\|_{L^2(Q)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \int_0^1 |f(x+k)e^{-2\pi i \omega k}|^2 d\omega dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+k)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

For $k \neq j$ har vi yderligere, at

$$\begin{aligned} \langle G_k, G_j \rangle_{L^2(Q)} &= \int_0^1 \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi i \omega k} \overline{f(x+j)e^{-2\pi i \omega j}} d\omega dx \\ &= \int_0^1 f(x+k) \overline{f(x+j)} \left(\int_0^1 e^{-2\pi i \omega (k-j)} d\omega \right) dx. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Eftersom

$$\int_0^1 e^{-2\pi i \omega (k-j)} d\omega = \left[\frac{-e^{2\pi i \omega (k-j)}}{-2\pi i (k-j)} \right]_0^1 = 0,$$

så medfører ligning (5.3), at

$$\langle G_k, G_j \rangle_{L^2(Q)} = 0.$$

Dermed er G_k og G_j ortogonale for $k \neq j$, og Sætning A.6 side 102 giver nu, at

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \right\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G_k\|_{L^2(Q)}^2. \tag{5.4}$$

Ved at anvende ligning (5.4) og (5.2) kan vi nu skrive

$$\|Z^1 f\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \right\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G_k\|_{L^2(Q)}^2 = \|f\|^2.$$

Dermed er $Z^1 f$ en veldefineret isometri fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(Q)$. Ifølge Eksempel 2.15 side 14 har $L^2(\mathbb{R})$ en ortonormal basis $\{e_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ givet ved

$$\{M_m T_n \chi_{[0,1]}\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \left\{ e^{2\pi i m x} \chi_{[0,1]}(x-n) \right\}_{m,n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

For $(x, \omega) \in Q$ har vi, at

$$\begin{aligned}
(Z^1 M_m T_n \chi_{[0,1]})(x, \omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m(x+k)} \chi_{[0,1]}(x+k-n) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= e^{2\pi i m x} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1]}(x-(n-k)) e^{2\pi i k(m-\omega)} \\
&= e^{2\pi i m x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1]}(x-j) e^{2\pi i(n-j)(m-\omega)} \\
&= e^{2\pi i m x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1]}(x-j) e^{2\pi i(nm-n\omega-jm+j\omega)} \\
&= e^{2\pi i m x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1]}(x-j) e^{2\pi i(-n\omega+j\omega)} \\
&= e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n \omega} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1]}(x-j) e^{2\pi i j \omega}.
\end{aligned}$$

Da $x \in [0, 1]$, så er det eneste led i summen, der er forskellig fra nul, når $j = 0$. Dermed har vi, at

$$(Z^1 M_m T_n \chi_{[0,1]})(x, \omega) = e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n \omega}, \quad (x, \omega) \in Q. \quad (5.5)$$

Det vil altså sige, at Z^1 afbilder den ortonormale basis $\{M_m T_n \chi_{[0,1]}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$ til den ortonormale basis $\{e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n \omega}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ for $L^2(Q)$ (jvf. ligning (5.1)). Da Z^1 er en lineær og begrænset operator fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(Q)$, kan vi derfor for et vilkårligt $g \in L^2(Q)$ skrive

$$\begin{aligned}
g(x, \omega) &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n \omega} \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} (Z^1 M_m T_n \chi_{[0,1]})(x, \omega) \\
&= \left(Z^1 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} M_m T_n \chi_{[0,1]} \right)(x, \omega), \quad (x, \omega) \in Q.
\end{aligned}$$

Det vil sige, at Z^1 er surjektiv på $L^2(Q)$, og dermed har vi vist, at Z^1 er en unitær operator fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(Q)$.

For et generelt $\alpha > 0$ kan vi skrive

$$\begin{aligned}
(Z^\alpha f)(x, \omega) &= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+k)) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{|\alpha^{-1}|}} f\left(\frac{x+k}{\alpha^{-1}}\right) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{\alpha^{-1}} f(x+k) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= (Z^1 D_{\alpha^{-1}} f)(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R},
\end{aligned} \quad (5.6)$$

hvor $D_{\alpha^{-1}}$ er dilationsoperatoren fra Eksempel 2.5 side 8. Denne operator er unitær ifølge Lemma 2.6 side 8. Dermed er $Z^\alpha f$ sammensat af to unitære operatorer ifølge ligning (5.6), og derfor er den selv en unitær operator. ■

Zak transformationen har følgende egenskaber:

$$\begin{aligned}
(Z^\alpha f)(x+1, \omega) &= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+1+k)) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+j)) e^{-2\pi i \omega(j-1)} \\
&= e^{2\pi i \omega} \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+j)) e^{-2\pi i \omega j} \\
&= e^{2\pi i \omega} (Z^\alpha f)(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

og

$$\begin{aligned}
(Z^\alpha f)(x, \omega+1) &= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+k)) e^{-2\pi i(\omega+1)k} \\
&= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+k)) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= (Z^\alpha f)(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Tilsvarende gælder der, at

$$\begin{aligned}
(Z^\alpha f)(x-1, \omega) &= e^{-2\pi i \omega} (Z^\alpha f)(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}, \\
(Z^\alpha f)(x, \omega-1) &= (Z^\alpha f)(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Dermed er $Z^\alpha f(x, \omega)$ defineret næsten overalt i $\mathbb{R}^2$, men fuldstændig bestemt ved dens værdier på Q . I forhold til translation og modulation opfylder Zak transformationen, at

$$\begin{aligned}
(Z^\alpha T_a f)(x, \omega) &= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+k) - a) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\alpha\left(\left(x - \frac{a}{\alpha}\right) + k\right)\right) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= (Z^\alpha f)\left(x - \frac{a}{\alpha}, \omega\right), \quad x, \omega \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

og

$$\begin{aligned}
(Z^\alpha M_b f)(x, \omega) &= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i b(\alpha(x+k))} f(\alpha(x+k)) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= e^{2\pi i b \alpha x} \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha(x+k)) e^{-2\pi i(\omega - b\alpha)k} \\
&= e^{2\pi i b \alpha x} (Z^\alpha f)(x, \omega - b\alpha), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Eksempel 5.3:

Zak transformation af Gauss funktionen $\varphi_\pi = e^{-x^2}$ er givet ved

$$\begin{aligned}
Z^\alpha \varphi_\pi(x, \omega) &= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\pi(\alpha(x+k)) e^{-2\pi i \omega k} \\
&= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(\alpha(x+k))^2} e^{-2\pi i \omega k} \\
&= \alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha^2(x+k)^2 - 2\pi i \omega k}, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \quad \diamond$$

5.1 Den stykvisse Zak transformation

Der vil i dette afsnit blive defineret den *stykvisse Zak transformation* (SZT), og vist forskellige egenskaber ved denne operator.

Definition 5.4 (Stykvisse Zak transformation)

Givet $\alpha > 0$ og $p \in \mathbb{N}$, da er den SZT af længde p , $F(x, \omega)$, defineret ved

$$F(x, \omega) = [F_0(x, \omega), F_1(x, \omega), \dots, F_{p-1}(x, \omega)]^T, \quad x, \omega \in \mathbb{R}$$

hvor

$$F_j(x, \omega) = Z^\alpha f\left(x, \omega + \frac{j}{p}\right), \quad 0 \leq j \leq p-1, \quad j \in \mathbb{Z},$$

for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Da Zak transformationen er lineær, så følger det af definitionen, at den SZT også er lineær. Ved at indføre mængden $O = \left[0, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{p}\right]$, gælder der ifølge Eksempel 2.15 side 14, at

$$\left\{ e^{2\pi i k_1 x} \sqrt{p} e^{2\pi i k_2 \omega} \right\}_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (5.12)$$

udgør en ortonormal basis for $L^2(O)$. I det følgende anvendes rummet $L^2(O; \mathbb{C}^p)$, der er defineret ved

$$L^2(O; \mathbb{C}^p) := \left\{ F : O \rightarrow \mathbb{C}^p \mid F \text{ er målelig og } \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} |F_j(x, \omega)|^2 d\omega dx < \infty \right\}.$$

Det ses, at hvis $F \in L^2(O; \mathbb{C}^p)$, så gælder der for alle k , hvor $0 \leq k \leq p-1$, at

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} |F_k(x, \omega)|^2 d\omega dx \leq \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} |F_j(x, \omega)|^2 d\omega dx < \infty.$$

Det vil sige, at $F_k \in L^2(O)$ for alle k , hvor $0 \leq k \leq p-1$. Ifølge [Zibulski og Zeevi, 1997][side 192] er $L^2(O; \mathbb{C}^p)$ et Hilbertrum med hensyn til det indre produkt

$$\langle F, G \rangle_{L^2(O; \mathbb{C}^p)} = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} F_j(x, \omega) \overline{G_j(x, \omega)} d\omega dx, \quad \forall F, G \in L^2(O; \mathbb{C}^p).$$

Vi kan nu opskrive følgende sætning for den SZT.

Sætning 5.5

Givet $\alpha > 0$, så er den SZT en unitær operator fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(O; \mathbb{C}^p)$.

Bevis:

Givet $f \in L^2(\mathbb{R})$ har vi ifølge Sætning 5.2 side 53, at $Z^\alpha f \in L^2(Q)$. Dermed kan vi skrive

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} |F_j(x, \omega)|^2 d\omega dx &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \left| Z^\alpha f \left(x, \omega + \frac{j}{p} \right) \right|^2 d\omega dx \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |Z^\alpha f(x, \omega)|^2 d\omega dx < \infty. \end{aligned}$$

Det vil sige, at $F_j \in L^2(O)$ for alle $0 \leq j \leq p-1$, $j \in \mathbb{Z}$. Tornellis sætning (se [Berg og Madsen, 2001] [Sætning 6.11 side 130]) giver nu, at

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} |F_j(x, \omega)|^2 d\omega dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} |F_j(x, \omega)|^2 d\omega dx < \infty.$$

Dermed har vi, at $F \in L^2(O; \mathbb{C}^p)$. Af det følgende ses det, at den SZT er en isometri fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(O; \mathbb{C}^p)$:

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2(O; \mathbb{C}^p)}^2 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} |F_j(x, \omega)|^2 d\omega dx \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \left| Z^\alpha f \left(x, \omega + \frac{j}{p} \right) \right|^2 d\omega dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |Z^\alpha f(x, \omega)|^2 d\omega dx \\ &= \|Z^\alpha f\|_{L^2(Q)}^2 = \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Vi mangler nu at vise, at den SZT er en surjektiv afbildning fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(O; \mathbb{C}^p)$. Givet $G \in L^2(O; \mathbb{C}^p)$ kan vi skrive

$$G(x, \omega) = \begin{bmatrix} G_0(x, \omega) \\ G_1(x, \omega) \\ \vdots \\ G_{p-1}(x, \omega) \end{bmatrix}, \quad (x, \omega) \in O,$$

hvor $G_j \in L^2(O)$ for alle j , hvor $0 \leq j \leq p-1$. Vi danner nu funktionen $\tilde{G}: Q \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{G}(x, \omega) = \begin{cases} G_0 \left(x, \omega - \frac{0}{p} \right), & \text{hvis } \omega \in \left[0, \frac{1}{p} \right[\\ G_1 \left(x, \omega - \frac{1}{p} \right), & \text{hvis } \omega \in \left[\frac{1}{p}, \frac{2}{p} \right[\\ \vdots \\ G_{p-1} \left(x, \omega - \frac{p-1}{p} \right), & \text{hvis } \omega \in \left[\frac{p-1}{p}, 1 \right[\end{cases}$$

Da $G_j \in L^2(O)$ for alle j , så har vi, at

$$\int_0^1 \int_0^1 |\tilde{G}(x, \omega)|^2 d\omega dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} |G_j(x, \omega)|^2 d\omega dx < \infty.$$

Det vil sige, at $\tilde{G} \in L^2(Q)$. Ifølge Sætning 5.2 side 53 eksisterer der dermed $g \in L^2(\mathbb{R})$, sådan at

$$Z^\alpha g(x, \omega) = \tilde{G}(x, \omega), \quad (x, \omega) \in Q.$$

Vi kan dermed skrive

$$G(x, \omega) = \begin{bmatrix} G_0(x, \omega) \\ G_1(x, \omega) \\ \vdots \\ G_{p-1}(x, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}(x, \omega + \frac{0}{p}) \\ \tilde{G}(x, \omega + \frac{1}{p}) \\ \vdots \\ \tilde{G}(x, \omega + \frac{p-1}{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^\alpha g\left(x, \omega + \frac{0}{p}\right) \\ Z^\alpha g\left(x, \omega + \frac{1}{p}\right) \\ \vdots \\ Z^\alpha g\left(x, \omega + \frac{p-1}{p}\right) \end{bmatrix}, \quad (x, \omega) \in O.$$

Det vil sige, at G ligger i billedmængden af den SZT. Dermed er det vist, at den SZT er en surjektiv afbildning fra $L^2(\mathbb{R})$ til $L^2(O; \mathbb{C}^p)$. Dette beviser sætningen. ■

Ifølge Sætning 5.2 side 53 og Sætning 5.5 gælder der, at

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle Z^\alpha f, Z^\alpha g \rangle_{L^2(Q)} = \langle F, G \rangle_{L^2(O; \mathbb{C}^p)}. \quad (5.13)$$

I eksplicit form giver dette, at

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_0^1 \int_0^1 Z^\alpha f(x, \omega) \overline{Z^\alpha g(x, \omega)} d\omega dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} F_j(x, \omega) \overline{G_j(x, \omega)} d\omega dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.2 Multiple Gabor frames i forbindelse med den SZT

I dette afsnit vil der blive set på muligheden for at anvende R forskellige vinduefunktioner til at konstruere en frame for $L^2(\mathbb{R})$. Ideen bag dette er, at det kan være en fordel at anvende forskellige vinduefunktioner til forskellige områder i tids-frekvens planen for at give en bedre beskrivelse af et givet signal. I forbindelse med musik kan det f.eks. give mening at anvende en vinduefunktion med god opløsning i frekvens til at beskrive områderne i tids-frekvens planen med lave frekvenser, da det harmoniske grundlag ofte bestemmes ved bastonerne. Ved de høje frekvenser kan man så anvende en vinduefunktion med god opløsning i tid for at få information om anslagene.

For $r \in \mathcal{R} = \{0, 1, \dots, R-1\}$ anvendes notationen $g_{m,n}^r$ for tids-frekvens skift af vinduefunktionen g_r . Det vil sige

$$g_{m,n}^r(x) = M_{mb_r} T_{na_r} g_r(x) = e^{2\pi i m b_r x} g_r(x - n a_r), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hvor $a_r, b_r > 0$ er tids-frekvens skift parametrene, der hører til vinduefunktionen g_r .

Definition 5.6 (Multibel Gabor frame)

Antag at $a_r, b_r > 0$ og $g^r \in L^2(\mathbb{R})$ for $r \in \mathcal{R} = \{0, 1, \dots, R-1\}$, hvor $R \in \mathbb{N}$. Hvis Gabor systemet $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så kaldes systemet en *multibel Gabor frame*.

For at analysere et Gabor system $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ betragter vi operatoren

$$Sf = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle g_{m,n}^r, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (5.15)$$

Hvis $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er S frame operatoren (se ligning (4.3) side 35 for definitionen af frame operatoren). Vi vil imidlertid også benævne S som frame operatoren, selvom $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ ikke udgør en frame.

I det følgende vil det være antaget, at alle vinduefunktionerne har samme translations- og modulationsparametre a og b , der opfylder, at $ab \in \mathbb{Q}$. Under disse antagelser viser det sig nemlig, at den SZT kan anvendes til at analysere Gabor systemer. Yderligere vil det være antaget, at Zak transformationen har parameteren $\alpha = \frac{1}{b}$, hvis ikke andet er defineret. Vi har følgende vigtige resultat for sammenhængen mellem den SZT og frame operatoren.

Sætning 5.7

Lad $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ være et Gabor system, hvor $ab = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, og lad S_z være operatoren, der afbilder den SZT af $f \in L^2(\mathbb{R})$ til den SZT af Sf . Da er S_z givet ved

$$(S_z F)(x, \omega) = \mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega), \quad (x, \omega) \in O, \quad (5.16)$$

hvor $\mathcal{S}(x, \omega)$ er en $p \times p$ matrix, hvis $(j, k)'te$ indgang er givet ved

$$\mathcal{S}_{j,k}(x, \omega) = \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} Zg_r \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right) \overline{Zg_r \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p} \right)}, \quad j, k = 0, \dots, p-1,$$

og hvor $F \in L^2(O; \mathbb{C}^p)$ er den SZT af f .

Bevis:

Ifølge ligning (5.10), (5.11) og (5.8) side 56 har vi, at

$$\begin{aligned} (Zg_{m,n}^r)(x, \omega) &= (ZM_{mb}T_{na}g_r)(x, \omega) \\ &= (ZM_{mb}g_r) \left(x - \frac{na}{\alpha}, \omega \right) \\ &= e^{2\pi i m b \alpha x} (Zg_r) \left(x - \frac{na}{\alpha}, \omega - m b \alpha \right) \\ &= e^{2\pi i m x} (Zg_r) (x - n a b, \omega - m) \\ &= e^{2\pi i m x} (Zg_r) \left(x - n \cdot \frac{p}{q}, \omega - m \right) \\ &= e^{2\pi i m x} (Zg_r) \left(x - n \cdot \frac{p}{q}, \omega \right), \quad x, \omega \in Q. \end{aligned} \quad (5.17)$$

For $n = n'q + l$, hvor $0 \leq l \leq q-1$ og $l, n' \in \mathbb{Z}$ har vi dermed ifølge ligning (5.17) og ligning (5.9) side 56, at

$$\begin{aligned} (Zg_{m,n'q+l}^r)(x, \omega) &= e^{2\pi i m x} (Zg_r) \left(x - (n'q + l) \cdot \frac{p}{q}, \omega \right) \\ &= e^{2\pi i m x} (Zg_r) \left(x - n'p - l \cdot \frac{p}{q}, \omega \right) \\ &= e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} (Zg_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega \right), \quad x, \omega \in Q. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Vi kan dermed skrive

$$\begin{aligned}
(S_z F)_j(x, \omega) &= (Z S f) \left(x, \omega + \frac{j}{p} \right) \\
&= \left(Z \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m, n}^r \rangle g_{m, n}^r \right) \left(x, \omega + \frac{j}{p} \right) \\
&= \left(Z \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{q-1} \langle f, g_{m, n'q+l}^r \rangle g_{m, n'q+l}^r \right) \left(x, \omega + \frac{j}{p} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{q-1} \langle f, g_{m, n'q+l}^r \rangle (Z g_{m, n'q+l}^r) \left(x, \omega + \frac{j}{p} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{q-1} \langle f, g_{m, n'q+l}^r \rangle e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} (Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Ifølge ligning (5.14) side 59 og ligning (5.18) kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\langle f, g_{m, n'q+l}^r \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g_{m, n'q+l}^r(x)} dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x, \omega) \overline{(Z g_{m, n'q+l}^r) \left(x, \omega + \frac{k}{p} \right)} d\omega dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x, \omega) e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} \overline{(Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p} \right)} d\omega dx. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Ligning (5.19) og (5.20) giver nu, at

$$\begin{aligned}
(S_z F)_j(x, \omega) &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{q-1} e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} (Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right) \\
&\quad \times \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x', \omega') e^{-2\pi i \omega' n' p} e^{2\pi i m x'} \overline{(Z g_r) \left(x' - l \cdot \frac{p}{q}, \omega' + \frac{k}{p} \right)} d\omega' dx' \\
&= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} (Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right) \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} \\
&\quad \times \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x', \omega') \overline{(Z g_r) \left(x' - l \cdot \frac{p}{q}, \omega' + \frac{k}{p} \right)} \cdot e^{-2\pi i \omega' n' p} e^{2\pi i m x'} d\omega' dx' \\
&= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} (Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right) \sum_{m, n' \in \mathbb{Z}} \sqrt{p} e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} \\
&\quad \times \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x', \omega') \overline{(Z g_r) \left(x' - l \cdot \frac{p}{q}, \omega' + \frac{k}{p} \right)} \cdot \sqrt{p} e^{-2\pi i \omega' n' p} e^{2\pi i m x'} d\omega' dx'.
\end{aligned}$$

Da $\left\{ \sqrt{p} e^{-2\pi i \omega n' p} e^{2\pi i m x} \right\}_{m, n' \in \mathbb{Z}}$ ifølge ligning (5.12) side 57 er en ortonormal basis for $L^2(O)$, har vi ifølge Sætning 2.14 side 14 næsten overalt, at

$$\begin{aligned}
(S_z F)_j(x, \omega) &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} (Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right) \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x, \omega) \overline{(Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p} \right)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x, \omega) \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} (Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p} \right) \overline{(Z g_r) \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p} \right)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} F_k(x, \omega) \mathcal{S}_{j, k}(x, \omega) \\
&= (\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega))_j.
\end{aligned}$$

Dermed har vi vist ligning (5.16). ■

Sætning 5.7 medfører, at vi kan udtale os om egenskaber ved $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ ved at se på $\mathcal{S}(x, \omega)$. Vi har ifølge ligning (5.15), at der for $f \in L^2(\mathbb{R})$ gælder, at

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle \overline{\langle f, g_{m,n}^r \rangle} \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle \langle g_{m,n}^r, f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle g_{m,n}^r, f \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{S}f, f \rangle. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ifølge ligning (5.13) og (5.16) har vi yderligere, at

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}f, f \rangle &= \langle \mathcal{S}_z F, F \rangle_{L^2(O, \mathbb{C}^p)} \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} (\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega))_j \overline{F_j(x, \omega)} d\omega dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} \overline{F_j(x, \omega)} (\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega))_j d\omega dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \overline{F(x, \omega)} \mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega) d\omega dx. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ligning (5.21) og (5.22) giver nu, at

$$\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} \overline{F_j(x, \omega)} \mathcal{S}(x, \omega) F_j(x, \omega) d\omega dx. \tag{5.23}$$

Vi har følgende lemma for $\mathcal{S}(x, \omega)$.

Lemma 5.8

Matricen $\mathcal{S}(x, \omega)$ er selvadjungeret og positivt semidefinit for $(x, \omega) \in O$.

Bevis:

At $\mathcal{S}(x, \omega)$ er selvadjungeret ses af

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k,j}(x, \omega) &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} Z g_r \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{k}{p} \right) \overline{Z g_r \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{j}{p} \right)} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} Z g_r \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{j}{p} \right) \overline{Z g_r \left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{k}{p} \right)} \\ &= \overline{\mathcal{S}_{j,k}(x, \omega)}, \quad (x, \omega) \in O. \end{aligned}$$

For at se, at $\mathcal{S}(x, \omega)$ er positivt semidefinit betragter vi $Rq \times p$ matricen $G(x, \omega)$ givet ved

$$G(x, \omega) = \begin{bmatrix} G^0(x, \omega) \\ \vdots \\ G^{R-1}(x, \omega) \end{bmatrix},$$

hvor $G^r(x, \omega)$ er en $q \times p$ matrix, hvis indgange er givet ved

$$G_{l,k}^r(x, \omega) = \overline{Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{k}{p}\right)}, \quad l = 0, \dots, q-1, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Dermed har vi, at $\frac{1}{p} \overline{G(x, \omega)^T} G(x, \omega)$ er en $p \times p$ matrix, hvor indgangene er givet ved

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} \overline{G(x, \omega)^T} G(x, \omega) \right)_{j,k} &= \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{Rq-1} \overline{G_{j,l}(x, \omega)^T} G_{l,k}(x, \omega) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{Rq-1} \overline{G_{l,j}(x, \omega)} G_{l,k}(x, \omega) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} \overline{G_{l,j}^r(x, \omega)} G_{l,k}^r(x, \omega) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{j}{p}\right) \overline{Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, u + \frac{k}{p}\right)} \\ &= \mathcal{S}(x, \omega)_{j,k}, \quad j, k = 0, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Dermed har vi, at

$$\frac{1}{p} \overline{G(x, \omega)^T} G(x, \omega) = \mathcal{S}(x, \omega). \quad (5.24)$$

Det vil sige, at der for alle $F \in \mathbb{C}^p$ gælder, at

$$\overline{F^T} \mathcal{S}(x, \omega) F = \overline{F^T} \left(\frac{1}{p} \overline{G(x, \omega)^T} G(x, \omega) \right) F \geq 0, \quad (x, \omega) \in O.$$

Dermed er $\mathcal{S}(x, \omega)$ positivt semidefinit. ■

For et givent Gabor system $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ indfører vi nu *samplingstætheden* d givet ved

$$d := \frac{R}{ab}.$$

Vi kan inddele $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ i tre tilfælde:

(i) Undersampling: $d < 1$.

(ii) Kritisk samling: $d = 1$.

(iii) Oversampling: $d > 1$.

Dette er en udvidelse af de betegnelser, vi brugte i tilfældet $R = 1$.

5.2.1 Undersampling og kritisk sampling

I det følgende vil der blive vist, at der også for multiple Gabor systemer gælder, at systemet ikke udgør en frame, hvis der er anvendt undersampling. Til dette skal bruges følgende lemma.

Lemma 5.9

Antag at $g_r \in L^2(\mathbb{R})$, for $0 \leq r \leq R-1$, og at $\mathcal{S}(x, \omega)$, hvor $(x, \omega) \in O$, er givet som i Sætning 5.7. Da gælder, at hvis $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) = 0$ for en målbar mængde i O med mål større end nul, så eksisterer en funktion $F \in L^2(O, \mathbb{C}^p)$, hvor $F \neq 0$, sådan at

$$\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega) = 0$$

næsten overalt på O .

Et bevis for dette lemma kan findes i [Zibulski og Zeevi, 1997][Lemma 1 side 196]. Ved undersamling har vi, at

$$\frac{R}{ab} < 1 \Leftrightarrow R < ab \Leftrightarrow R < \frac{p}{q} \Leftrightarrow Rq < p.$$

Ifølge ligning (5.24) kan vi skrive

$$\mathcal{S}(x, \omega) = \frac{1}{p} \overline{G(x, \omega)^T} G(x, \omega), \quad (5.25)$$

hvor $G(x, \omega)$ er en $Rq \times p$ matrix. Eftersom $Rq < p$, så medfører ligning (5.25), at $\text{rang}(\mathcal{S}(x, \omega)) < p$, og dermed at $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) = 0$ næsten overalt på O . Lemma 5.9 giver nu, at der eksisterer $F \in L^2(O, \mathbb{C}^p)$, hvor $F \neq 0$, sådan at

$$\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega) = 0$$

næsten overalt på O . Ligning (5.23) giver nu, at

$$\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} \overline{F(x, \omega)} \mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega) d\omega dx = 0,$$

hvor F er den SZT af $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dermed er dette ikke muligt for $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ at have en nedre frame-grænse, og derfor kan $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ ikke være en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

I tilfældet med kritisk sampling gælder der ifølge [Zibulski og Zeevi, 1997][Side 203] følgende udvidelse af Balian-Low's sætning.

Sætning 5.10

Lad $g_r \in L^2(\mathbb{R})$ for $0 \leq r \leq R-1$, $a > 0$ samt $d = 1$. Da gælder, at hvis $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så medfører dette, at

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g_r(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}_r(\omega)|^2 d\omega \right) = \infty$$

for mindst et r , hvor $0 \leq r \leq R-1$.

Ligesom det var tilfældet med $R = 1$, så er oversampling altså en nødvendig betingelse, når vi anvender multible Gabor frames, for at de forskellige vinduefunktioner g_r kan have god opløsning i både tid og frekvens samtidig med, at systemet $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$. Igen bemærker vi, at oversampling ikke er en tilstrækkelig betingelse for at opnå dette.

5.2.2 Oversampling

Der vil i dette afsnit blive set på, hvilke egenskaber $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ har i tilfældet med oversampling. Først vises den følgende sætning, der udtaler sig fuldstændigheden af $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ i sammenhæng med determinanten af $\mathcal{S}(x, \omega)$.

Sætning 5.11

Antag at $g_r \in L^2(\mathbb{R})$, for $0 \leq r \leq R-1$, og at $\mathcal{S}(x, \omega)$, hvor $(x, \omega) \in O$, er givet som i Sætning 5.7. Da gælder, at Gabor systemet $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$, hvor $ab = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, er fuldstændigt, hvis og kun hvis $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) \neq 0$ næsten overalt på O .

Bevis:

- (i) Vi antager først, at $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er fuldstændigt og skal vise, at dette medfører, at $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) \neq 0$ næsten overalt på O . Vi viser dette ved modstrid og antager, at $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) = 0$ for en målbar mængde med mål større end nul. Ifølge Lemma 5.9 medfører dette, at der eksisterer $F \in L^2(O, \mathbb{C}^p)$, $F \neq 0$, sådan at

$$\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega) = 0$$

næsten overalt på O . Ifølge ligning (5.23) medfører dette, at

$$\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 = 0,$$

hvor $f \in L^2(\mathbb{R})$ er funktionen, der har F som sin STZ. Dette medfører, at

$$\langle f, g_{m,n}^r \rangle = 0$$

for alle $r \in \mathcal{R}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$. Dermed har vi, at

$$f \in (\overline{\text{span}\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}})^\perp. \quad (5.26)$$

Da $F \neq 0$, så har vi, at $f \neq 0$, og dermed medfører ligning (5.26), at systemet $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ ikke er fuldstændigt. Dette er i modstrid med vores antagelse, og derfor må der gælde, at $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) \neq 0$ næsten overalt på O .

- (ii) Vi antager nu, at $\det(\mathcal{S}(x, \omega)) \neq 0$ næsten overalt på O og skal vise, at dette medfører, at systemet $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er fuldstændigt. Vi anvender igen modstrid og antager, at $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ ikke er fuldstændigt. Dermed eksisterer der $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$, sådan at

$$f \in (\overline{\text{span}\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}})^\perp.$$

Med de samme argumenter som i den første del af beviset medfører dette, at

$$\mathcal{S}(x, \omega) F(x, \omega) = 0$$

næsten overalt på O , hvilket er i modstrid med antagelsen, da $F \neq 0$. Dermed må der gælde, at $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er fuldstændigt. ■

Sætning 5.11 medfører, at hvis $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er $\mathcal{S}(x, \omega)$ er invertibel næsten overalt på O .

Vi husker, at $\lambda \in \mathbb{C}$ er en *eigen værdi* for $\mathcal{S}(x, \omega)$, hvis der eksisterer en *eigen vektor* $F \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$, sådan at

$$\mathcal{S}(x, \omega)F = \lambda F.$$

Da $\mathcal{S}(x, \omega)$ er en kompleks matrix, så har den p egen værdier, som vi noterer med

$$\lambda_j(\mathcal{S}(x, \omega)), \quad 1 \leq j \leq p.$$

Ifølge [Axler, 2004][Theorem 7.27 side 145] gælder der, at en matrix er positivt semidefinit, hvis og kun hvis alle dens egen værdier er ikke-negative. Vi har dermed ifølge Lemma 5.8 side 62, at

$$\lambda_j(\mathcal{S}(x, \omega)) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Ved at definere

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\mathcal{S}) &:= \operatorname{ess\,sup}_{(x, \omega) \in O} \left(\max_{1 \leq j \leq p} \lambda_j(\mathcal{S}(x, \omega)) \right), \\ &= \inf \left\{ a \in [0, \infty] \mid \max_{1 \leq j \leq p} \lambda_j(\mathcal{S}(x, \omega)) \leq a \text{ for næsten alle } (x, \omega) \in O \right\} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathcal{S}) &:= \operatorname{ess\,inf}_{(x, \omega) \in O} \left(\min_{1 \leq j \leq p} \lambda_j(\mathcal{S}(x, \omega)) \right), \\ &= \sup \left\{ b \in [0, \infty] \mid \min_{1 \leq j \leq p} \lambda_j(\mathcal{S}(x, \omega)) \geq b \text{ for næsten alle } (x, \omega) \in O \right\}, \end{aligned}$$

så gælder der ifølge [Zibulski og Zeevi, 1997][Side 199] følgende sætning, der relaterer sig til egen værdierne af $\mathcal{S}(x, \omega)$.

Sætning 5.12

Antag at $g_r \in L^2(\mathbb{R})$, for $0 \leq r \leq R-1$, og at $\mathcal{S}(x, \omega)$, hvor $(x, \omega) \in O$, er givet som i Sætning 5.7. Da gælder, at Gabor systemet $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$, hvor $ab = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvis og kun hvis

$$0 < \lambda_{\min}(\mathcal{S}) \leq \lambda_{\max}(\mathcal{S}) < \infty.$$

Der vil i det følgende afsnit blive set på, hvordan dual framen til en multibel Gabor frame kan udregnes i tilfældet, hvor $ab \in \mathbb{Q}$.

5.2.3 Dual framen

I tilfældet hvor $R = 1$ har vi ifølge Sætning 4.14 side 43, at hvis $\{g_{m,n}\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er dual vinduet givet ved $\gamma = S^{-1}g$, hvor S er frame operatoren for $\{g_{m,n}\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$.

Dette viser sig også at være tilfældet for en multiple Gabor frame $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$, hvor frame operatoren er givet som i ligning (5.15) side 59 ved

$$Sf = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle g_{m,n}^r, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dette er indeholdt i følgende sætning.

Sætning 5.13

Antag at $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvor $ab = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, og lad $\{\gamma_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ betegne dual framen til $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$. Da gælder, at $\{\gamma_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er givet ved

$$\gamma_{m,n}^r = M_{mb} T_{na} \gamma^r, \quad 0 \leq r \leq R-1, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

hvor $\gamma^r = S^{-1} g_r$, og S er frame operatoren for $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$.

Bevis:

Vi skal først vise, at

$$SM_{mb} T_{na} g^r = M_{mb} T_{na} S g^r, \quad \forall 0 \leq r \leq R-1, \quad (5.27)$$

hvor S er frame operatoren for $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$. Vi vælger, at vise dette i domænet for den SZT. Ifølge ligning (5.17) side 60 har vi, at

$$G_{m,n}^r(x, \omega) = e^{2\pi i m x} G_r\left(x - n \cdot \frac{p}{q}, \omega\right), \quad (x, \omega) \in O, \quad (5.28)$$

hvor $G_{m,n}^r$ er den SZT af $g_{m,n}^r$, og G_r er den SZT af g_r . Ifølge definitionen af $\mathcal{S}(x, \omega)$ (se Sætning 5.7 side 60) har vi yderligere for $j, k = 0, \dots, p-1$, at

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{j,k}\left(x - \frac{p}{q}, \omega\right) &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} Z g_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q} - \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Z g_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q} - \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p}\right)} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{q-1} Z g_r\left(x - (l+1) \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Z g_r\left(x - (l+1) \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p}\right)} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{l=1}^q Z g_r\left(x - l \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Z g_r\left(x - l \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p}\right)} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \left(\sum_{l=1}^{q-1} Z g_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Z g_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p}\right)} \right. \\ &\quad \left. + Z g_r\left(x - p, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Z g_r\left(x - p, \omega + \frac{k}{p}\right)} \right). \end{aligned}$$

Ved nu at anvende ligning (5.9) side 56 kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{j,k}\left(x - \frac{p}{q}, \omega\right) &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \left(\sum_{l=1}^{q-1} Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p}\right)} \right. \\
&\quad \left. + e^{-2\pi i \omega p} Zg_r\left(x, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{e^{-2\pi i \omega p} Zg_r\left(x, \omega + \frac{k}{p}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{R-1} \left(\sum_{l=1}^{q-1} Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Zg_r\left(x - l \cdot \frac{p}{q}, \omega + \frac{k}{p}\right)} \right. \\
&\quad \left. + Zg_r\left(x, \omega + \frac{j}{p}\right) \overline{Zg_r\left(x - p, \omega + \frac{k}{p}\right)} \right) \\
&= \mathcal{S}_{j,k}(x, \omega).
\end{aligned}$$

Det vil sige, at $\mathcal{S}\left(x - \frac{p}{q}, \omega\right) = \mathcal{S}(x, \omega)$, og dermed, at

$$\mathcal{S}(x, \omega) = \mathcal{S}\left(x - n \frac{p}{q}, \omega\right), \quad (x, \omega) \in O. \quad (5.29)$$

Ifølge ligning (5.28) og (5.29) har vi, at

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x, \omega) G_{m,n}^r(x, \omega) &= \mathcal{S}(x, \omega) e^{2\pi i m x} G_r\left(x - n \cdot \frac{p}{q}, \omega\right) \\
&= e^{2\pi i m x} \mathcal{S}\left(x - n \cdot \frac{p}{q}, \omega\right) G_r\left(x - n \cdot \frac{p}{q}, \omega\right) \\
&= e^{2\pi i m x} \mathcal{S}(x - nab, \omega) G_r(x - nab, \omega), \quad (x, \omega) \in O.
\end{aligned}$$

Da $\alpha = \frac{1}{b}$ kan vi dermed skrive

$$\mathcal{S}(x, \omega) G_{m,n}^r(x, \omega) = e^{2\pi i m x} \mathcal{S}\left(x - \frac{na}{\alpha}, \omega\right) G_r\left(x - \frac{na}{\alpha}, \omega\right), \quad (x, \omega) \in O. \quad (5.30)$$

Ligning (5.10) og (5.11) fra side 56 giver, at

$$\begin{aligned}
(ZT_{na}f)(x, \omega) &= Zf\left(x - \frac{na}{\alpha}, \omega\right), \\
(ZM_{mb}f)(x, \omega) &= e^{2\pi i m x} Zf(x, \omega).
\end{aligned}$$

Det vil sige, at højresiden i ligning (5.30) præcis er translation og modulation i Zak-domænet. Da den SZT er en unitær operator, har vi dermed vist ligning (5.27).

Da $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ per antagelse er en frame, så er S invertibel næsten overalt på O , og ligning (5.27) medfører dermed, at

$$SM_{mb}T_{na}g^r = M_{mb}T_{na}Sg^r \Leftrightarrow M_{mb}T_{na}S^{-1}g^r = S^{-1}M_{mb}T_{na}g^r. \quad (5.31)$$

Vi kan dermed skrive dual framen til $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ som

$$\begin{aligned}
\{S^{-1}g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}} &= \{S^{-1}M_{mb}T_{na}g^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}} \\
&= \{M_{mb}T_{na}S^{-1}g^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}} \\
&= \{M_{mb}T_{na}\gamma^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

hvor $\gamma^r = S^{-1}g^r$. Dermed er dual framen givet ved $\{\gamma_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$, hvilket beviser sætningen. ■

Hvis $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så kan vi ifølge ligning (4.5) side 36 skrive

$$f = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle S^{-1} g_{m,n}^r, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

hvor rækken konvergerer ubetinget. Ligning (5.31) medfører dermed, at

$$\begin{aligned} f &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{m,n}^r \rangle S^{-1} g_{m,n}^r \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle f, M_{mb} T_{na} g_r \rangle S^{-1} M_{mb} T_{na} g_r \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} V_{g_r} f(na, mb) M_{mb} T_{na} S^{-1} g_r \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} V_{g_r} f(na, mb) \gamma_{m,n}^r, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

hvor rækken konvergerer ubetinget. Dette er f 's Gabor udvikling i tilfældet med en multibel Gabor frame, hvor $ab = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Hvis ikke de forskellige områder, udgjort af støtten af de forskellige tids-frekvens skift af γ^r , har for meget overlap, kan Gabor koefficienterne $c_{m,n}^r = V_{g_r} f(na, mb)$ bruges til at beskrive, hvor meget tids-frekvens indhold f har i områderne. Præcis som det var tilfældet med $R = 1$.

5.2.4 Forskellige translations- og modulationsparametre

Der vil i dette afsnit blive set på situationen, hvor de forskellige vinduefunktioner g_r har forskellige translations og modulationsparametre a_r og b_r tilknyttet. Det vil sige, at

$$g_{m,n}^r(x) = M_{mb_r} T_{na_r} g_r(x) = e^{2\pi i m b_r x} g_r(x - n a_r), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Det vil være antaget, at a_r og b_r er rationelle tal for alle $0 \leq r \leq R-1$. I dette tilfælde er samplingstætheden givet ved

$$d := \sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{a_r b_r},$$

og vi kan på samme måde som tidligere inddele $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ i de tre forskellige tilfælde: undersampling $d < 1$, kritisk sampling $d = 1$ og oversampling $d > 1$. For at analysere det nye system med de metoder, der er blevet introduceret i dette kapitel, er ideen, at vi ændrer det nye system til et ækvivalent system, hvor $a_r = a$ og $b_r = b$ for alle r .

Uden at miste generalitet lader vi

$$a_r = \frac{p_r}{q_r}, \quad \text{hvor } \gcd(p_r, q_r) = 1.$$

Vi indfører nu størrelserne

$$\begin{aligned} Q &= \gcd(q_0, q_1, \dots, q_{R-1}), \\ P &= \gcd(p_0, p_1, \dots, p_{R-1}). \end{aligned}$$

Yderligere sætter vi

$$a = \frac{1}{QP} \prod_{r=0}^{R-1} p_r.$$

Dermed har vi, at

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_r} &= \frac{1}{a_r} \cdot \frac{1}{QP} \prod_{n=0}^{R-1} p_n \\ &= \frac{q_r}{p_r} \cdot \frac{1}{QP} \prod_{n=0}^{R-1} p_n \\ &= \frac{q_r}{Q} \cdot \frac{1}{P} \prod_{n \in \mathcal{R}, n \neq r} p_n, \quad r = 0, \dots, R-1. \end{aligned}$$

Dermed er $\frac{a}{a_r}$ et heltal for alle $0 \leq r \leq R-1$. Ifølge [Zibulski og Zeevi, 1997][Side 211] er a faktisk det mindste tal, der opfylder dette.

Tilsvarende indfører vi b baseret på værdierne af b_r . I det nye system erstatter vi nu hver vinduefunktion g_r med $R_r^a \cdot R_r^b$ nye vinduefunktioner, hvor $R_r^a = \frac{a}{a_r}$ og $R_r^b = \frac{b}{b_r}$, og hvor de nye vinduefunktioner er givet ved

$$\tilde{g}_{j,k}^r(x) = M_{kb_r} T_{ja_r} g_r(x) = e^{2\pi i k b_r x} g_r(x - j a_r), \quad 0 \leq j \leq R_r^a - 1, \quad 0 \leq k \leq R_r^b - 1.$$

Dermed er det nye system givet ved

$$\left\{ M_{mb} T_{na} \tilde{g}_{j,k}^r \right\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}; 0 \leq j \leq R_r^a - 1; 0 \leq k \leq R_r^b - 1}.$$

Vi har fra ligning (2.7) fra side 9, at vi kan skrive

$$\begin{aligned} \left\{ M_{mb} T_{na} \tilde{g}_{j,k}^r \right\} &= \left\{ M_{mb} T_{na} M_{kb_r} T_{ja_r} g_r \right\} \\ &= \left\{ e^{-2\pi i n a k b_r} M_{mb} M_{kb_r} T_{na} T_{ja_r} g_r \right\} \\ &= \left\{ e^{-2\pi i n a k b_r} M_{mb+kb_r} T_{na+ja_r} g_r \right\} \\ &= \left\{ e^{-2\pi i n a k b_r} M_{mb_r} T_{na_r} g_r \right\}, \end{aligned}$$

hvor vi i sidste lighed anvender, at $0 \leq j \leq \frac{a}{a_r} - 1$ og $0 \leq k \leq \frac{b}{b_r} - 1$ for alle $0 \leq r \leq R-1$. Dermed er det nye system identisk med det gamle udover den komplekse faktor $e^{-2\pi i n a k b_r}$. De to systemer er imidlertid ækvivalente i den forstand, at de har samme frame operator, hvilket ses af det følgende:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{R_r^a-1} \sum_{k=0}^{R_r^b-1} \left\langle f, M_{mb} T_{na} \tilde{g}_{j,k}^r \right\rangle M_{mb} T_{na} \tilde{g}_{j,k}^r = \\ &\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\frac{a}{a_r}-1} \sum_{k=0}^{\frac{b}{b_r}-1} \left\langle f, e^{-2\pi i n a k b_r} M_{mb+kb_r} T_{na+ja_r} g_r \right\rangle e^{-2\pi i n a k b_r} M_{mb+kb_r} T_{na+ja_r} g_r = \\ &\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\frac{a}{a_r}-1} \sum_{k=0}^{\frac{b}{b_r}-1} \left\langle f, M_{mb+kb_r} T_{na+ja_r} g_r \right\rangle M_{mb+kb_r} T_{na+ja_r} g_r = \\ &\sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left\langle f, M_{mb_r} T_{na_r} g_r \right\rangle M_{mb_r} T_{na_r} g_r, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Det første udtryk er frame operatoren for det nye system og det sidste udtryk er frame operatoren for det gamle system. Dermed er det ene system en frame, hvis og kun hvis det andet system er en frame ifølge Sætning 5.12 side 66.

Da de to systemer har samme frame operator, så er dual framen for det nye system givet ved $\{M_{mb}T_{na}\tilde{\gamma}_{j,k}^r\}$, hvor vi ifølge ligning (5.31) har, at

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{j,k}^r &= S^{-1}\tilde{g}_{j,k}^r \\ &= S^{-1}M_{kb_r}T_{ja_r}g_r \\ &= M_{kb_r}T_{ja_r}S^{-1}g_r.\end{aligned}$$

Dermed kan dual framen skrives som

$$\begin{aligned}\{M_{mb}T_{na}\tilde{\gamma}_{j,k}^r\} &= \{M_{mb}T_{na}M_{kb_r}T_{ja_r}S^{-1}g_r\} \\ &= \{e^{-2\pi i n a k b_r} M_{mb_r}T_{na_r}S^{-1}g_r\}.\end{aligned}$$

Det vil sige, at dual framen er den samme som til det gamle system på nær den komplekse faktor.

Eksempel 5.14:

Et eksempel på, hvornår det nye system er identisk med det gamle er, når $b_r = b$ for alle r . Vi betragter her tilfældet, hvor $R = 2$, $b_r = 1$ for alle r og $a_0 = 4$, $a_1 = \frac{4}{3}$. Vi har dermed, at

$$d = \sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{a_r b_r} = \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{\frac{4}{3} \cdot 1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Der er altså tale om kritisk sampling. Yderligere har vi, at

$$\begin{aligned}g_{m,n}^0 &= e^{2\pi i m x} g_0(x - n4), \\ g_{m,n}^1 &= e^{2\pi i m x} g_1\left(x - n\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

Vi ønsker nu at konstruere et nyt system, der er identisk med det gamle system, og hvor $a = a_r$ for alle r . Vi har, at

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{4}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \\ a_1 &= \frac{4}{3} = \frac{p_1}{q_1},\end{aligned}$$

Det vil sige, at

$$\begin{aligned}Q &= \gcd(1, 3) = 1, \\ P &= \gcd(4, 4) = 4.\end{aligned}$$

Vi udregner nu

$$a = \frac{1}{QP} \prod_{r=0}^{R-1} p_r = \frac{1}{4} (4 \cdot 4) = 4.$$

Dermed erstatter vi g_0 med $R_0^a = \frac{a}{a_0} = 1$ ny vinduefunktion, og g_1 med $R_1^a = \frac{a}{a_1} = 3$ nye vinduefunktioner, sådan at

$$\tilde{g}_0(x) = g_0(x),$$

$$\tilde{g}_1(x) = g_1(x),$$

$$\tilde{g}_2(x) = g_1\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

$$\tilde{g}_3(x) = g_1\left(x - \frac{8}{3}\right),$$

hvor $\tilde{g}_r(x)$ er vinduefunktionerne til det nye system. Dermed har vi, at

$$\tilde{g}_{m,n}^0 = e^{2\pi i m x} g_0(x - n4),$$

$$\tilde{g}_{m,n}^1 = e^{2\pi i m x} g_1(x - n4),$$

$$\tilde{g}_{m,n}^2 = e^{2\pi i m x} g_1\left(x - \frac{4}{3} - n4\right),$$

$$\tilde{g}_{m,n}^3 = e^{2\pi i m x} g_1\left(x - \frac{8}{3} - n4\right).$$

I det nye system erstatter $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ og $\tilde{g}_3$ den gamle vinduefunktion g_1 . De to systemer er identiske, da de begge repræsenterer den samme følge. $\diamond$

I det næste kapitel vil der blive set på andre tilgange til at konstruere multiple Gabor frames, der ikke antager, at translations- og modulationsparametrene er rationelle tal.

MULTIPLE GABOR FRAMES FOR $L^2(\mathbb{R})$

Dette kapitel er baseret på [Dörfler, 2002] og [Balazs et al., b].

Der vil her blive set på to forskellige tilgange til at konstruere multiple Gabor frames. Først vil det blive vist, hvordan man kan konstruere *reducerede multiple Gabor frames*, og senere i kapitlet vil der blive set på *ikke-stationære Gabor systemer*.

I det følgende vil det ikke længere være antaget, at a_r og b_r er rationelle tal, men til gengæld vil det være antaget, at $\{g_{m,n}^r\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$ for alle $r \in \mathcal{R}$. Det vil sige, at der for alle $r \in \mathcal{R}$ eksisterer frame-grænser A_r og B_r , sådan at

$$A_r \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \leq B_r \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dette medfører, at

$$\sum_{r=0}^{R-1} A_r \|f\|^2 \leq \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \leq \sum_{r=0}^{R-1} B_r \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dermed er $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m,n \in \mathbb{Z}}$ en multibel Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame-grænser $A = \sum_{r=0}^{R-1} A_r$ og $B = \sum_{r=0}^{R-1} B_r$.

Problemet med denne multiple Gabor frame er, at den indeholder meget redundans, da den består af R fuldstændige frames. Der vil i Afsnit 6.2 blive set på, hvordan man kan reducere denne multiple frame, så den indeholder mindre redundans, men stadig bevarer sin egenskab som frame. Det næste afsnit indeholder definitioner, som vi får brug for i forbindelse med dette arbejde.

6.1 Tilladelig overdækning og BTIE

I arbejdet med at vise hvordan reducerede multiple Gabor frames kan konstrueres, får vi brug for følgende definitioner.

Definition 6.1 (Tilladelig overdækning)

Lad $\mathcal{I}$ være en højst tællelig indekssmængde. En mængde $\Omega = (\Omega_r)_{r \in \mathcal{I}}$ af intervaller i $\mathbb{R}$ kaldes en *tilladelig overdækning* af $\mathbb{R}$, hvis

- (i) $\bigcup_{r \in \mathcal{I}} \Omega_r = \mathbb{R}$.
- (ii) Der eksisterer $n_0 \in \mathbb{N}$, sådan at $|r^*| \leq n_0$ for alle $r \in \mathcal{I}$, hvor

$$r^* := \left\{ s \mid s \in \mathcal{I}, \Omega_s \cap \Omega_r \neq \emptyset \right\}.$$

Dette kaldes den *tilladelige betingelse*.

Ifølge Definition 6.1 er det muligt for de forskellige Ω_r at have overlap, men den tilladelige betingelse medfører, at der højst er n_0 overlap for hvert $r \in \mathcal{I}$. Hvis $\mathcal{I}$ er en endelig mængde, så vil den tilladelige betingelse altid være opfyldt, da vi blot kan vælge $n_0 = |\mathcal{I}|$.

Definition 6.2 (Begrænset tilladelig inddeling af enhed)

Givet en tilladelig overdækning $\Omega = \{\Omega_r\}_{r \in \mathcal{I}}$ af $\mathbb{R}$, så kaldes en mængde af funktioner $\{\psi_r\}_{r \in \mathcal{I}}$ for en *begrænset tilladelig inddeling af enhed* (BTIE) underordnet Ω , hvis der gælder, at

- (i) $0 \leq \psi_r(x) \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\psi_r(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_r$.
- (iii) $\sum_{r \in \mathcal{I}} \psi_r(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi definerer yderligere $\text{supp}(f)$, støtten af en funktion $f \in L^2(\Omega)$, som aflukningen af mængden, hvor $f \neq 0$. Dermed har vi, at $\text{supp}(\psi_r) \subseteq \overline{\Omega_r}$ for alle $r \in \mathcal{I}$.

Eksempel 6.3:

I dette eksempel vil der blive konstrueret en tilladelig overdækning $\Omega = (\Omega_r)_{r \in \mathcal{I}}$ af $\mathbb{R}$ og en BTIE $\{\psi_r\}_{r \in \mathcal{I}}$ underordnet Ω . Til dette indføres funktionen $\phi(x)$ givet ved

$$\phi(x) = \chi_{[-2,2]}(x) \cdot \left(\frac{-3x^2 + 12}{32} \right).$$

Denne funktion opfylder, at

$$\phi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

og

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-2,2]}(x) \cdot \left(\frac{-3x^2 + 12}{32} \right) dx \\
&= \frac{1}{32} \int_{-2}^2 -3x^2 + 12 dx \\
&= \frac{1}{32} [-x^3 + 12x]_{-2}^2 \\
&= \frac{1}{32} ((-2^3 + 12 \cdot 2) - (-(-2)^3 + 12 \cdot (-2))) \\
&= \frac{1}{32} ((-8 + 24) - (8 - 24)) \\
&= \frac{1}{32} (16 - (-16)) = 1.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Vi skal yderligere bruge intervallerne

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_0 &=]-\infty, -1], \\
\tilde{\Omega}_1 &= [-1, 1], \\
\tilde{\Omega}_2 &= [1, \infty[.
\end{aligned}$$

Vi sætter nu $\mathcal{I} = \{0, 1, 2\}$ og definerer ψ_r som foldningen mellem $\chi_{\tilde{\Omega}_r}$ og ϕ :

$$\psi_r(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\tilde{\Omega}_r}(y) \phi(x-y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathcal{I}. \tag{6.3}$$

Dermed har vi ifølge ligning (6.2), at

$$\begin{aligned}
\psi_r(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\tilde{\Omega}_r}(y) \phi(x-y) dy \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Af ligning (6.1) følger det, at $0 \leq \psi_r(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og dermed er punkt (i) i Definition 6.2 opfyldt. Vi har yderligere, at der gælder

$$\psi_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\tilde{\Omega}_r}(y) \phi(x-y) dy = \int_{\tilde{\Omega}_r} \phi(x-y) dy.$$

Eftersom $\text{supp}(\phi) = [-2, 2]$, så har vi, at ved at indføre den tilladelige overdækning $\Omega = (\Omega_r)_{r \in \mathcal{I}}$ givet ved

$$\Omega_r = \tilde{\Omega}_r + [-2, 2], \quad r \in \mathcal{I},$$

så er punkt (ii) i Definition 6.2 opfyldt. Punkt (iii) følger af, at

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^2 \psi_r(x) &= \sum_{r=0}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\tilde{\Omega}_r}(y) \phi(x-y) dy \\
&= \sum_{r=0}^2 \int_{\tilde{\Omega}_r} \phi(x-y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Der er dermed blevet vist, at $\{\psi_r\}_{r \in \mathcal{I}}$ er en BTIE af $\mathbb{R}$ underordnet Ω . ◇

6.2 Eksistens af reducerede multible Gabor frames

Vi lader nu $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathbb{Z}}$ være en multibel Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$ bestående af R forskellige Gabor frames $\{g_{m,n}^r\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$. I praktiske anvendelser vil vinduefunktionerne altid være begrænsede i tid, og vi kan derfor antage, at g_r har kompakt støtte for alle $r \in \mathcal{R}$. Dermed kan vi antage, at $\text{supp}(g_r) \subseteq \overline{\Omega_r}$, hvor Ω_r er et interval tilhørende en tilladelig overdækning $\Omega = \{\Omega_r\}_{r \in \mathcal{R}}$. Vi antager yderligere, at $\{\psi_r\}_{r \in \mathcal{R}}$ er en BTIE underordnet Ω .

Da både $\text{supp}(g_r)$ og $\text{supp}(\psi_r)$ tilhører mængden $\overline{\Omega_r}$, så gælder der, at antallet af $n \in \mathbb{Z}$, der opfylder, at

$$\text{supp } \psi_r \cap \text{supp } g_{m,n}^r \neq \emptyset \quad (6.4)$$

er endeligt for alle $r \in \mathcal{R}$ og $m \in \mathbb{Z}$. For at se dette antager vi, uden at miste generalitet, at $\overline{\Omega_r}$ er givet ved $[-x_r, x_r]$. Dermed har de forskellige tids-frekvens skift

$$g_{m,n}^r(x) = e^{2\pi i m b_r x} g_r(x - n a_r)$$

støtte i intervallet $[n a_r - x_r, n a_r + x_r]$. Det vil sige, at når n bliver tilstrækkelig stor eller lille, så vil $g_{m,n}^r$ ikke længere have støtte til fælles med $[-x_r, x_r]$. Da n kun kan antage heltal, så kan der nødvendigvis kun være et endeligt antal n , der opfylder ligning (6.4).

For $r \in \mathcal{R}$ noteres antallet af n , der opfylder ligning (6.4), med r_n . For hvert $r \in \mathcal{R}$ kan vi dermed konstruere en indeksmængde $\mathcal{R}^r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ på formen $\mathbb{Z} \times [n_1, \dots, n_{r_n}]$, sådan at

$$\text{supp } \psi_r \cap \text{supp } g_{m,n}^r \neq \emptyset$$

for alle $(m, n) \in \mathcal{R}^r$ og

$$\text{supp } \psi_r \cap \text{supp } g_{m,n}^r = \emptyset$$

for alle $(m, n) \notin \mathcal{R}^r$. Den følgende sætning giver nu, at vi for hvert $r \in \mathcal{R}$ kan undlade de tids-frekvens skift, hvor $(m, n) \notin \mathcal{R}^r$ og stadig have, at det resterende system udgør en frame.

Sætning 6.4

Hvis $\{g_{m,n}^r\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ er Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$ for $r \in \mathcal{R} = \{0, 1, \dots, R-1\}$, og $\{\psi_r\}_{r \in \mathcal{R}}$ er en BTIE af $\mathbb{R}$ med den egenskab, at der kan vælges $\mathcal{R}^r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sådan at

$$\text{supp } \psi_r \cap \text{supp } g_{m,n}^r = \emptyset, \quad \forall (m, n) \notin \mathcal{R}^r, \quad (6.5)$$

så gælder, at $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathcal{R}^r}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Bevis:

For at vise at $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m, n \in \mathcal{R}^r}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, skal vi vise, at der eksisterer frame-grænser A og B , sådan at

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m, n \in \mathcal{R}^r} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

For alle $r \in \mathcal{R}$ gælder der per antagelse, at $\{g_{m,n}^r\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvilket vil sige, at der eksisterer frame-grænser A_r og B_r , sådan at

$$A_r \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \leq B_r \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.6)$$

Vi har dermed, at

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathcal{R}^r} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 &\leq \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{r=0}^{R-1} B_r \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dermed kan vi vælge $B = \sum_{r=0}^{R-1} B_r$ som en øvre frame-grænse for $\{g_{m,n}^r\}_{r \in \mathcal{R}; m,n \in \mathcal{R}^r}$. For at bestemme den nedre frame-grænse ser vi, at ligning (6.5) medfører, at der for alle $r \in \mathcal{R}$ gælder, at

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \sqrt{\psi_r} f, g_{m,n}^r \rangle|^2 = \sum_{m,n \in \mathcal{R}^r} |\langle \sqrt{\psi_r} f, g_{m,n}^r \rangle|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.7)$$

Ved anvendelse af Tornellis sætning og pkt. (i) og (iii) i definitionen af en BTIE (se Definition 6.2), kan vi yderligere skrive

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{R-1} \psi_r(x) |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_r(x) \cdot |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \int_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{\psi_r(x)} f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \|\sqrt{\psi_r} f\|^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ved at sætte $A = \min_{0 \leq r \leq R-1} \{A_r\}$ har vi nu ifølge ligning (6.8), (6.6) og (6.7), at

$$\begin{aligned} A \|f\|^2 &= \sum_{r=0}^{R-1} A \|\sqrt{\psi_r} f\|^2 \\ &\leq \sum_{r=0}^{R-1} A_r \|\sqrt{\psi_r} f\|^2 \\ &\leq \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \sqrt{\psi_r} f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathcal{R}^r} |\langle \sqrt{\psi_r} f, g_{m,n}^r \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{m,n \in \mathcal{R}^r} |\langle f, g_{m,n}^r \rangle|^2, \end{aligned}$$

hvor den sidste ulighed følger af pkt. (i) i definitionen af en BTIE. Vi kan dermed vælge A som nedre frame-grænse. ■

Ifølge de udregninger, der ledte op til sætningen, kan der i alle praktiske tilfælde vælges $\mathcal{R}^r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sådan at ligning (6.5) er opfyldt. Denne betingelse er som nævnt ikke en nødvendighed for at vise, at det multiple Gabor system udgør en frame, men betingelsen sikrer, at vi kan reducere mængden af redundans i det nye system uden tab af information.

Eksempel 6.5:

Lad $\mathcal{R} = \{0, 1, 2\}$ og lad vinduefunktionerne $\{g_r\}_{r \in \mathcal{R}}$ være givet ved følgende Gauss funktioner:

$$g^0(x) = \varphi_1(x) = e^{-\pi x^2},$$

$$g^1(x) = \varphi_{\frac{1}{3}}(x) = e^{-3\pi x^2},$$

$$g^2(x) = \varphi_3(x) = e^{-\frac{\pi}{3}x^2}.$$

Dermed har vi ifølge Eksempel 2.8 side 11, at

$$\widehat{g^0}(\omega) = \varphi_1(\omega) = e^{-\pi\omega^2},$$

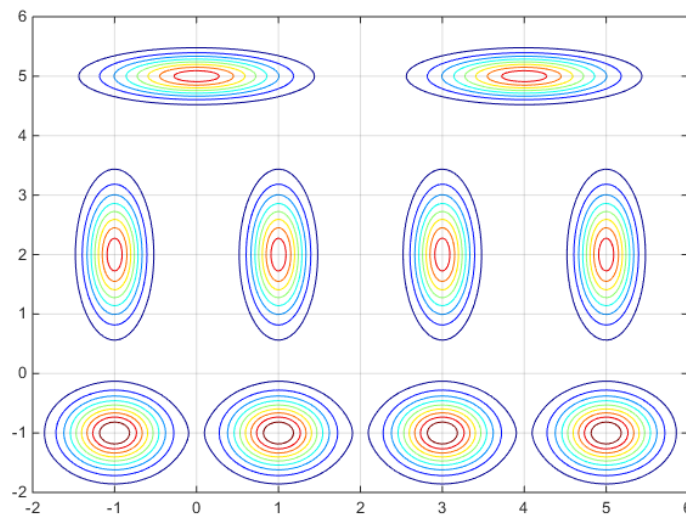
$$\widehat{g^1}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_3(\omega) = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-\frac{\pi}{3}\omega^2},$$

$$\widehat{g^2}(\omega) = \sqrt{3}\varphi_{\frac{1}{3}}(\omega) = \sqrt{3}e^{-3\pi\omega^2}.$$

For at se, hvordan støtten af disse vinduefunktioner er fordelt i tids-frekvens planen betragter vi for $i, j \in \mathbb{Z}$ og $r \in \mathcal{R}$ funktionen

$$G_{i,j}^r(x, \omega) = M_i T_j g_r(x) \cdot (M_i T_j \widehat{g_r})(\omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

I Figur 6.1 ses en mulig fordeling af $G_{i,j}^r(x, \omega)$ i tids-frekvens planen.



Figur 6.1: Funktionen $G_{i,j}^r$ i tids-frekvens planen

Her er områderne for illustrationens skyldt skilt ad, men i praksis vil der være overlap. Jo mere overlap, der er mellem de forskellige områder, desto mere redundans vil den multiple Gabor frame indeholde. $\diamond$

Sætning 6.4 giver, at det er muligt at konstruere reducerede multiple Gabor frames ud fra en

mængde originale Gabor frames. Der er imidlertid flere ulemper ved denne tilgang. For det første indeholder den multible frame som nævnt meget redundans, og for det andet kan der være komplikationer i arbejdet med den nye frame. Ifølge [Dörfler, 2002] [Afsnit 3.4.2 side 33] er det f.eks. kompliceret at udregne dual framen for den multible frame, hvilket er uhensigtsmæssigt i forbindelse med rekonstruktion af signalet ud fra dets Gabor koefficienter jvf. Sætning 4.15 side 45. I det næste afsnit vil der blive set på en fremgangsmåde til at konstruere multible Gabor frames, som imødekommer disse problemer.

6.3 Ikke-stationære Gabor systemer

I dette afsnit vil det være antaget, at vi har en mængde af vinduefunktioner $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, der opfylder, at $g_n \in L^2(\mathbb{R})$, og at g_n har kompakt støtte for alle $n \in \mathbb{Z}$. For modulation af de forskellige vinduefunktioner anvendes notationen

$$g_m^n(x) = M_{mb_n} g_n(x) = e^{2\pi i mb_n x} g_n(x), \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

hvor $b_n > 0$ er en modulationsparameter, der hører til vinduefunktionen g_n . Vi kalder $\{g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ for et ikke-stationært Gabor system. Hvis $\{g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er frameoperatoren, S , ifølge ligning (4.3) side 35 givet ved

$$Sf = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \langle f, g_m^n \rangle g_m^n, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Vi vil imidlertid også benævne S som frameoperatoren, selvom $\{g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ ikke udgør en frame. Der gælder følgende sætning.

Sætning 6.6

Lad $\{g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ være et ikke-stationært Gabor system, der opfylder at $\text{supp}(g_n) \subseteq [c_n, d_n[$ og $d_n - c_n \leq \frac{1}{b_n}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Da er frameoperatoren S givet ved

$$Sf(x) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 \right) f(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Bevis:

Eftersom $\text{supp}(g_n) \subseteq [c_n, d_n[$, så har vi, at

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \left\langle \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \langle f, g_m^n \rangle g_m^n, f \right\rangle \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \langle f, g_m^n \rangle \langle g_m^n, f \rangle \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \langle f, g_m^n \rangle \overline{\langle f, g_m^n \rangle} \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_m^n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g_m^n(x)} dx \right|^2 \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left| \int_{c_n}^{d_n} f(x) \overline{g_n(x)} e^{-2\pi i mb_n x} dx \right|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Vi sætter nu $I_n = [c_n, c_n + \frac{1}{b_n}]$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, og lader χ_{I_n} betegne indikatorfunktionen på I_n . Vi har dermed, at $\text{supp}(g_n) \subseteq [c_n, d_n] \subseteq I_n$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Vi kan nu lave følgende omskrivning

$$f(x) \overline{g_n(x)} = \chi_{I_n}(x) \sum_{l \in \mathbb{Z}} f\left(x - l \frac{1}{b_n}\right) \overline{g_n\left(x - l \frac{1}{b_n}\right)}. \quad (6.10)$$

Dette følger af, at hvis $x \notin I_n$, så er begge sider lig nul, og hvis $x \in I_n$, så er $l = 0$ det eneste positive led i summen. Vi har, at $\sum_{l \in \mathbb{Z}} f\left(x - l \frac{1}{b_n}\right) \overline{g_n\left(x - l \frac{1}{b_n}\right)}$ er en $\frac{1}{b_n}$ -periodisk funktion, og dermed medfører ligning (6.10), at $f(x) \overline{g_n(x)}$ kan udvides til en $\frac{1}{b_n}$ -periodisk funktion. Det vil sige, at $f \cdot \overline{g_n} \in L^2(\overline{I_n})$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. For $n, m \in \mathbb{Z}$ indfører vi nu funktionen

$$W_m^n(x) = \sqrt{b_n} e^{-2\pi i m b_n x},$$

Vi kan nu forsætte ligning (6.9) og skrive

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left| \int_{c_n}^{d_n} f(x) \overline{g_n(x)} \frac{1}{\sqrt{b_n}} W_m^n(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left| \int_{I_n} f(x) \overline{g_n(x)} \frac{1}{\sqrt{b_n}} W_m^n(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f \cdot \overline{g_n} \frac{1}{\sqrt{b_n}}, \overline{W_m^n} \right\rangle_{L^2(\overline{I_n})} \right|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f \cdot \overline{g_n} \frac{1}{\sqrt{b_n}}, \overline{W_m^n} \right\rangle_{L^2(\overline{I_n})} \right|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ifølge Eksempel 2.15 side 14 udgør $\{\overline{W_m^n}\}_{m \in \mathbb{Z}} = \{\sqrt{b_n} e^{2\pi i m b_n x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ en ortonormal basis for $L^2(\overline{I_n})$. Da $f \cdot \overline{g_n} \in L^2(\overline{I_n})$ kan vi dermed anvende Parsevals ligning (se ligning (2.17) side 14), hvilket giver, at

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| f \cdot \overline{g_n} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \right\|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} \|f \cdot \overline{g_n}\|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} \langle f \cdot \overline{g_n}, f \cdot \overline{g_n} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} \langle f \cdot \overline{g_n} \cdot g_n, f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 f, f \right\rangle, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dermed har vi, at

$$\left\langle \left(S - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 \right) f, f \right\rangle = 0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.12)$$

Det følger nu af Lemma A.7 side 103, at

$$S - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 = 0,$$

hvilket beviser sætningen. ■

Vi har følgende vigtige korollar til Sætning 6.6.

Korollar 6.7

Under de givne antagelse i Sætning 6.6, så danner det ikke-stationære system $\{g_m^n\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame-grænser $A, B > 0$, hvis og kun hvis

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 \leq B, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

I dette tilfælde er den kanoniske dual frame givet ved

$$\tilde{g}_m^n(x) = \frac{g_n(x)}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_l} |g_l(x)|^2} e^{2\pi i m b_n x},$$

og den kanoniske tight dual frame ved

$$\hat{g}_m^n(x) = \frac{g_n(x)}{\sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_l} |g_l(x)|^2}} e^{2\pi i m b_n x},$$

Bevis:

Ifølge ligning (6.9) og (6.11) har vi, at

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_m^n \rangle|^2 = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 f, f \right\rangle, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.14)$$

Vi har yderligere, at

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 f, f \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 f(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 |f(x)|^2 dx, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Heraf ses det, at ligning (6.13) er opfyldt, hvis og kun hvis

$$A \|f\|^2 \leq \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 f, f \right\rangle \leq B \|f\|^2.$$

Dermed gælder der ifølge ligning (6.14) for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 \leq B \\ &\Downarrow \\ A \|f\|^2 &\leq \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2 f, f \right\rangle \leq B \|f\|^2 \\ &\Downarrow \\ A \|f\|^2 &\leq \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_m^n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \end{aligned}$$

Dette beviser den første del af korollaret. For at bestemme den kanoniske dual frame $\{S^{-1}g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ ser vi først, at

$$S^{-1}f = \frac{1}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2} f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Vi bemærker, at nævneren ikke kan være nul ifølge antagelsen. Ved at sætte $\{\tilde{g}_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}} = \{S^{-1}g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ har vi dermed, at den kanoniske dual frame $\{\tilde{g}_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ er givet ved

$$\tilde{g}_m^n(x) = \frac{g_m^n(x)}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_l} |g_l(x)|^2} = \frac{g^n(x)}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_l} |g_l(x)|^2} e^{2\pi i m b_n x}.$$

Vi mangler nu at bestemme den kanoniske tight dual frame $\{\tilde{g}_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}} = \{S^{-\frac{1}{2}}g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$. Vi ser først, at

$$S^{-\frac{1}{2}}f = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n|^2}} f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dermed har vi, at

$$\tilde{g}_m^n(x) = \frac{g_m^n(x)}{\sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_l} |g_l(x)|^2}} = \frac{g^n(x)}{\sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_l} |g_l(x)|^2}} e^{2\pi i m b_n x}.$$

Dette beviser korollaret. ■

Det følger af den første del af beviset, at hvis $\{g_m^n\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame, så er de optimale frame-grænser, A_{opt} og B_{opt} , givet ved

$$\begin{aligned} A_{\text{opt}} &= \text{ess inf} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 \right) \\ &= \sup \left\{ A \in [0, \infty] \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 \geq A \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R} \right\}, \\ B_{\text{opt}} &= \text{ess sup} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 \right) \\ &= \inf \left\{ B \in [0, \infty] \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{b_n} |g_n(x)|^2 \leq B \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Følgende korollar giver resultaterne fra Sætning 6.6 og Korollar 6.7 for den tilsvarende situation i frekvensdomænet.

Korollar 6.8

Antag at $h_m \in L^2(\mathbb{R})$ opfylder, at $\text{supp}(\widehat{h_m}) \subseteq [c_m, d_m]$, og lad a_m være en translationsparameter tilhørende h_m , der opfylder, at $d_m - c_m \leq \frac{1}{a_m}$ for alle $m \in \mathbb{Z}$. Da er frameoperatoren S for systemet

$$h_n^m(x) = h_m(x - na_m), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

givet ved

$$Sf(x) = \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \right) * f \right)(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Systemet $\{h_n^m\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frame-grænser $A, B > 0$, hvis og kun hvis

$$A \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}(\omega)|^2 \leq B, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Den kanoniske dual frame er givet ved

$$\tilde{h}_n^m(x) = T_{na_m} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{h_m}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2} \right)(x),$$

og den kanoniske tight dual frame ved

$$\mathring{h}_n^m(x) = T_{na_m} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{h_m}}{\sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2}} \right)(x).$$

Bevis:

Vi ser først, at vi ifølge ligning (2.11) fra side 11 kan skrive

$$\widehat{h_n^m}(\omega) = (T_{na_m} h_m)^\wedge(\omega) = e^{-2\pi i na_m \omega} \widehat{h_m}(\omega).$$

Da Fouriertransformationen er lineær og unitær, kan vi dermed skrive

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \langle \widehat{Sf}, \widehat{f} \rangle = \left\langle \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, h_n^m \rangle \widehat{h_n^m}, \widehat{f} \right\rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, h_n^m \rangle \langle \widehat{h_n^m}, \widehat{f} \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \widehat{h_n^m} \rangle \overline{\langle \widehat{f}, \widehat{h_n^m} \rangle} \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \langle \widehat{f}, \widehat{h_n^m} \rangle \right|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h_n^m}(\omega)} d\omega \right|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h_m}(\omega)} e^{2\pi i na_m \omega} d\omega \right|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{c_m}^{d_m} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h_m}(\omega)} e^{2\pi i na_m \omega} d\omega \right|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Resten af beviset for frame operatoren foregår med samme argumenter som beviset for Sætning 6.6. Vi indfører intervallet $I_m = [c_m, c_m + \frac{1}{a_m}]$, og viser at $\hat{f} \cdot \widehat{h_m} \in L^2(\overline{I_m})$, hvorefter vi indfører funktionen

$$W_n^m(\omega) = \sqrt{a_m} e^{2\pi i n a_m \omega}.$$

Dermed er $\{\overline{W_n^m}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en ortonormal basis for $L^2(\overline{I_m})$. Ved at anvende Parsevals ligning finder vi, at

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \hat{f}, \hat{f} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \hat{f} \right), f \right\rangle. \\ &= \left\langle \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \right) * f, f \right\rangle, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (6.16)$$

hvor $*$ er foldningen mellem de to funktioner. Det vil sige, at

$$\left\langle Sf - \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \right) * f, f \right\rangle = 0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Lemma A.7 side 103 giver nu, at

$$Sf - \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \right) * f = 0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dette beviser udsagnet med frame operatoren. Ifølge ligning (6.15) og (6.16) kan vi skrive

$$\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{f}, \widehat{h_n^m} \rangle|^2 = \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \hat{f}, \hat{f} \right\rangle, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dermed har vi for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \leq B \\ &\Downarrow \\ A \|\hat{f}\|^2 &\leq \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \hat{f}, \hat{f} \right\rangle \leq B \|\hat{f}\|^2 \\ &\Downarrow \\ A \|\hat{f}\|^2 &\leq \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{f}, \widehat{h_n^m} \rangle|^2 \leq B \|\hat{f}\|^2 \\ &\Downarrow \\ A \|f\|^2 &\leq \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, h_n^m \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \end{aligned}$$

Dette beviser udsagnet med frame-grænserne. For at bestemme den kanoniske dual frame $\{\tilde{h_n^m}\}_{m, n \in \mathbb{Z}} = \{S^{-1} h_n^m\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ ser vi først, at

$$\widehat{Sf} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \hat{f}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Vi indfører nu operatoren $\hat{S} \in L^2(\mathbb{R})$ givet ved

$$\hat{S}\hat{f} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2 \hat{f}, \quad \forall \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}),$$

og har dermed, at

$$(\hat{S})^{-1} \hat{f} = \frac{1}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2} \hat{f}, \quad \forall \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Vi bemærker, at nævneren i denne brøk ikke kan være nul. Vi kan dermed skrive

$$Sf = \mathcal{F}^{-1} \hat{S} \mathcal{F} f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

hvilket medfører, at

$$S^{-1}f = \mathcal{F}^{-1} (\hat{S})^{-1} \mathcal{F} f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

Det vil sige, at

$$\widehat{S^{-1}f} = (\hat{S})^{-1} \mathcal{F} f = \frac{1}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2} \hat{f}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

Ved at tage den inverse Fourier transformation på begge side fås

$$S^{-1}f = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2} \right) * f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Ved at anvende ligning (2.11) side 11 kan vi dermed skrive den kanoniske dual frame som

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^m(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2} \right) (x) * h_n^m(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{h_n^m}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2} \right) (x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{M_{-na_m} \widehat{h_m}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2} \right) (x) = T_{na_m} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{h_m}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2} \right) (x). \end{aligned}$$

Vi mangler nu blot at bestemme udtrykket for den kanoniske tight dual frame. Med samme argumenter som ovenfor ses det, at

$$\widehat{S^{-\frac{1}{2}}f} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2}} \hat{f}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

hvilket medfører, at

$$S^{-\frac{1}{2}}f = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} |\widehat{h_m}|^2}} \right) * f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Det vil sige den kanoniske tight dual frame $\{\hat{h}_n^m\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{S^{-\frac{1}{2}}h_n^m\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ er givet ved

$$\hat{h}_n^m(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2}} \right) (x) * h_n^m(x) = T_{na_m} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{h_m}}{\sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_l} |\widehat{h_l}|^2}} \right) (x),$$

hvilket beviser korollaret. ■

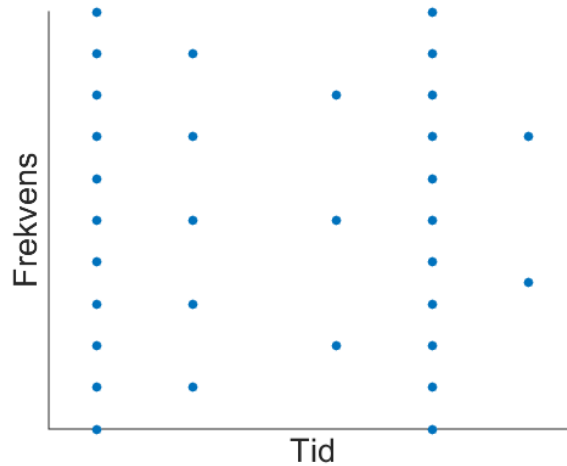
Hvis $\{h_n^m\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ udgør en frame, så er de optimale frame-grænser, A_{opt} og B_{opt} , givet ved

$$\begin{aligned} A_{\text{opt}} &= \text{ess inf} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} \left| \widehat{h}_m(\omega) \right|^2 \right) \\ &= \sup \left\{ A \in [0, \infty] \mid \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} \left| \widehat{h}_m(\omega) \right|^2 \geq A \text{ for næsten alle } \omega \in \mathbb{R} \right\}, \\ B_{\text{opt}} &= \text{ess sup} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} \left| \widehat{h}_m(\omega) \right|^2 \right) \\ &= \inf \left\{ B \in [0, \infty] \mid \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a_m} \left| \widehat{h}_m(\omega) \right|^2 \leq B \text{ for næsten alle } \omega \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

6.3.1 Ikke-stationære Gabor systemer i forbindelse med musiksignaler

Ved anvendelse af ikke-stationære Gabor systemer inddeles enten tids- eller frekvensaksen i forskellige kompakte intervaller, der hver har en vinduefunktion tilknyttet. De forskellige intervaller har et vist overlap for, at systemet ikke mister information, men for meget overlap er uønsket og medfører unødvendig redundans. Vi kan antage, at vinduefunktionerne vil være lokaliseret og centreret omkring et punkt i intervallet (som det f.eks. er tilfældet med Gauss funktionen).

Hvis vi f.eks. har inddelt tidsaksen, så opnår vi altså et gitter i tids-frekvens planen, der varierer uregelmæssigt i tid, men regelmæssigt i frekvens for hvert fast tidspunkt. Dette er illustreret i Figur 6.2, hvor hver prik svarer til centrum af støtten af en moduleret vinduefunktion.



Figur 6.2: Støtten af modulerede vinduefunktioner ved inddeling af tidsaksen.

Som vi har set, så udgør et ikke-stationært Gabor system $\{g_m^n\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$, under de rette antagelser, en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med en simpel eksplicit formel for dual framen. Dermed kan vi ifølge ligning (4.5) side 35 skrive

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, g_m^n \rangle \tilde{g}_m^n, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.17)$$

Det vil sige, at vi har en formel til at rekonstruere et givet signal s ud fra dets koefficienter $\langle s, g_m^n \rangle$. Vi vil benytte terminologien *ikke-stationær Gabor udvikling* om udviklingen givet i ligning (6.17), og *ikke-stationære Gabor koefficienter* om koefficienterne i udviklingen.

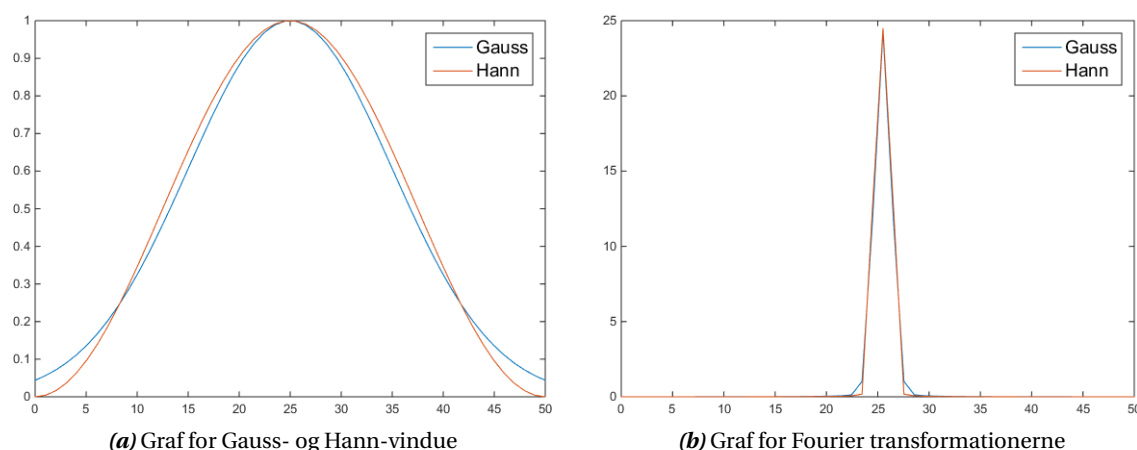
Ikke-stationære Gabor systemer er særlig anvendelige i forbindelse med musiksignaler, da sådanne signaler ofte kan opdeles på en meningsfuld måde i tid eller frekvens. For at illustrere dette antager vi, at vi ønsker at analysere et stykke klavermusik, og at vi i den forbindelse skal konstruere en fornuftig tids-frekvens repræsentation af signalet. Der er flere egenskaber ved klaveret, der gør, at vi kan foretage visse antagelser omkring tids-frekvens repræsentationen. For det første er klaveret opdelt i *oktaver*, der hver indeholder 12 forskellige *halvtoner*. Det vil sige, at det er en mulighed at inddele frekvensaksen efter disse halvtoner, sådan at vi anvender vinduefunktioner med god præcision i frekvens omkring de frekvenser, som er grundfrekvenser for halvtoner, og vinduefunktioner med god opløsning i tid omkring de resterende frekvenser. For det andet ved vi, at hver tone har et anslag direkte efterfulgt af forskellige overtoner i frekvensspektret. Det vil sige, at det er en mulighed at inddele tidsaksen sådan, at en vinduefunktion med god præcision i tid anvendes netop ved hvert anslag, og vinduefunktioner med god opløsning i frekvens anvendes mellem anslagene. At inddele tidsaksen på denne måde kræver en algoritme, der kan udregne, hvornår anslagene forekommer. Ifølge [Dixon, 2006] eksisterer der algoritmer, der med høj nøjagtighed kan udregne dette.

EKSEMPLER

I dette kapitel vil den inddragede teori blive anvendt til at konstruere forskellige spektrogrammer af musiksignaler. Der vil til alle de inddragede spektrogrammer være anvendt såkaldte *Hann vinduer* som vinduefunktioner. I Matlab defineres Hann-vinduet $w(n)$ ved

$$w(n) = 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

hvor $L = N + 1$ er længden af vinduet. I Figur 7.1 ses graferne for et Hann-vindue og et Gauss-vindue af længde 50 og de tilhørende Fourier transformationer (se Bilag B Matlab-kode B.9 side 113 for Matlab-koden). Det ses af graferne, hvordan de to vinduefunktioner minder meget om hinanden.



Figur 7.1: Sammenligning af Gauss og Hann vindue

De inddragede musiksignaler vil være korte klaverstykker, der er indspillet på et akustisk flygel, hvorefter det tilhørende signal blevet importeret i Matlab. Det første klaverstykke er gengivet i noderne i Figur 7.2.

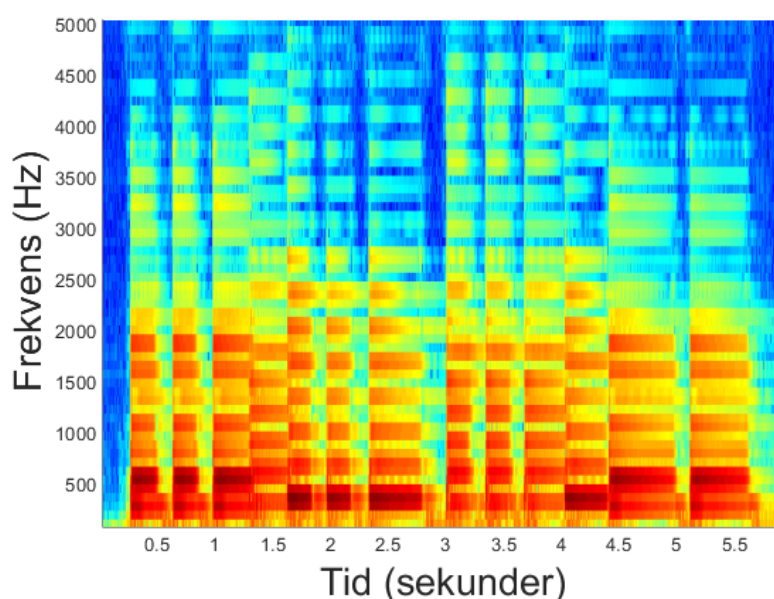


Figur 7.2: Noder for de første to takter af Lille Peter edderkop

Der er her tale om de to første takter af "Lille Peter edderkop" i tonearten C-dur. Stykket indeholder kun tre forskellige toner, og der spilles med én tone af gangen startende på nøglehuls-c. Der spilles i alt 13 toner, og de tilhørende grundfrekvenser er angivet i nedenstående tabel (se [Grubbe] for en oversigt over tonefrekvenser).

Tone nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Tone	c	c	c	d	e	e	e	d	d	d	e	c	c
Gfrek.	261	261	261	293	329	329	329	293	293	293	329	261	261

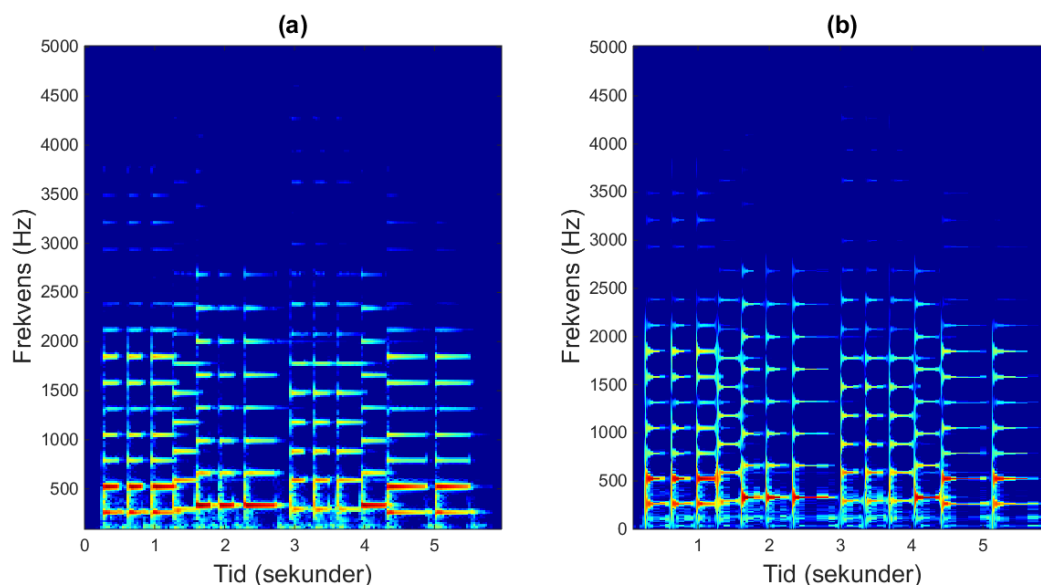
I Figur 7.3 ses et spektrogram af klaverstykket baseret på kort-tids fourier transformationen.



Figur 7.3: Spektrogram af de to første takter af Lille Peter edderkop

Det ses, at spektrogrammet groft gengiver de 13 anslag, selvom nogle af anslagene fremstår mere tydeligt end andre. Det 4. og det 11. anslag fremstår mindst tydeligt, hvilket skyldes, at de tilhørende toner ikke gentages. Af frekvenserne kan vi f.eks. se, at grundfrekvensen til den første tone ligger i området 200-600 Hz, men mere præcist kan vi ikke komme det. Både tids- og frekvensopløsningen lader altså meget tilbage at ønske.

Der er nu blevet konstrueret to spektrogrammer, hvor det ene er baseret på en Gabor udvikling af signalet, og det andet er baseret på en ikke-stationær Gabor udvikling af signalet. Ved den ikke-stationære udvikling er der anvendt forskellige vinduefunktioner i løbet af tidsaksen, sådan at vinduefunktioner med god præcision i tid er anvendt ved hvert anslag, og vinduefunktioner med god præcision i frekvens er anvendt mellem anslagene. En algoritme har udregnet, hvornår anslagene finder sted. Der henvises til [Balazs et al., a] for den anvendte Matlab-kode til at konstruere sådanne spektrogrammer. De to spektrogrammer ses på Figur 7.4.



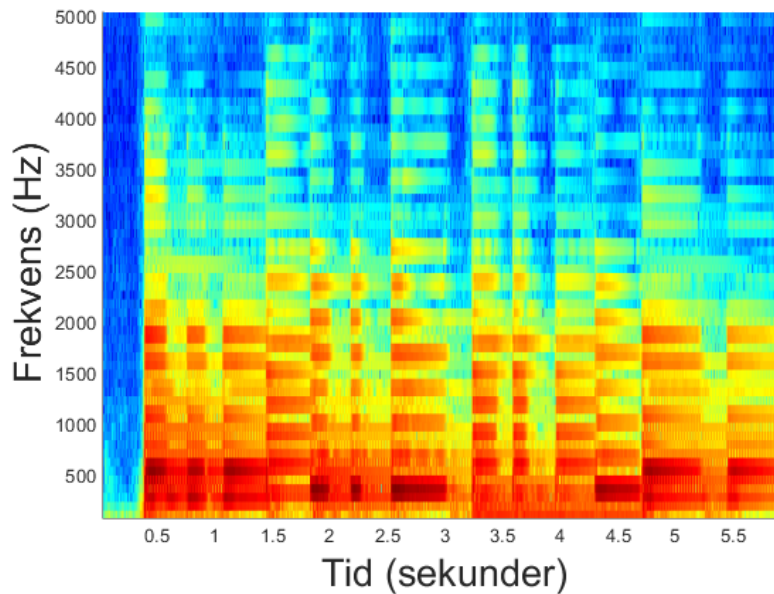
Figur 7.4: Spektrogram (a) er baseret på en Gabor udvikling, og spektrogram (b) er baseret på en ikke-stationær Gabor udvikling.

Det ses, hvordan begge spektrogrammer er betydeligt forbedret i både tid og frekvens i forhold til spektrogrammet i Figur 7.3. De 13 anslag er tydeligt gengivet, og man kan se, hvordan hver tone består af en grundfrekvens og frekvenser, der er multiplum af grundfrekvensen. De højere frekvenser skyldes som nævnt i afsnit Afsnit 3.4 side 28 forekomsten af overtoner. I forhold til de to spektrogrammer i Figur 7.4 ses det, hvordan spektrogram (b) har en bedre opløsning i tid ved anslagene og en bedre opløsning i frekvens mellem anslagene end spektrogrammet (a). I selve anslagene har spektrogram (a) en bedre opløsning i frekvens end spektrogram (b), men på grund af tonernes varighed giver denne forbedrede opløsning ikke nogen yderligere information. Vi betragter nu det samme stykke musik med en tilføjet bastone som vist i Figur 7.5.



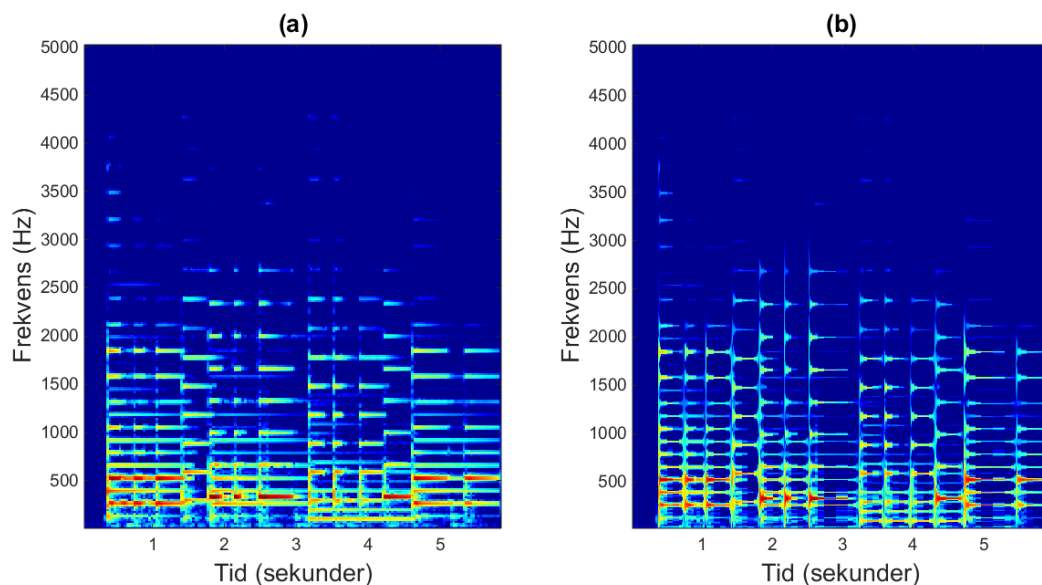
Figur 7.5: Noder for de første to takter af Lille Peter edderkop med en tilføjet bas

De to bastoner har grundfrekvenser på henholdsvis 130 og 97 Hz. Spektrogrammet baseret på KTFT'en kommer i dette tilfælde til at se ud som på Figur 7.6.



Figur 7.6: Spektrogram af de to første takter af Lille Peter edderkop

Vi kan se, hvordan de tilføjede bastoner gør det svært at adskille de forskellige anslag og de forskellige frekvensområder. Med lidt besvær kan man se, at der er 13 anslag, og at grundfrekvenserne befinder sig i området 0-700 Hz. På samme måde som i Figur 7.4 er der nu blevet konstrueret yderligere to spektrogrammer af klaverstykket, som ses i Figur 7.7.

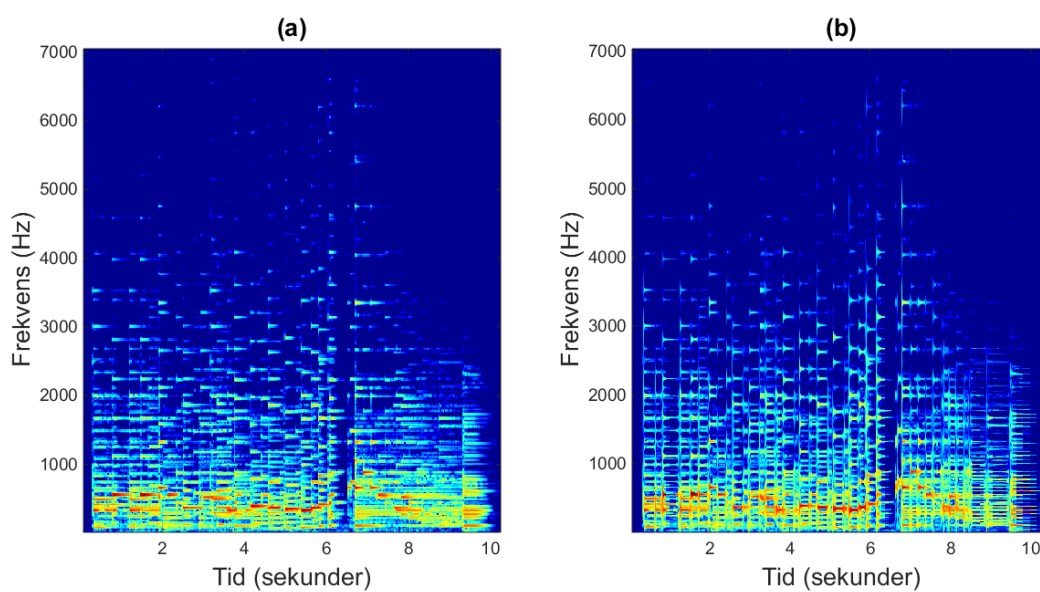


Figur 7.7: Spektrogram (a) er baseret på en Gabor udvikling, og spektrogram (b) er baseret på en ikke-stationær Gabor udvikling.

Igen kan vi se betydelige forbedringer i forhold til spektrogrammet i Figur 7.6, hvad angår både tid og frekvens. I forhold til de to spektrogrammer i Figur 7.7 fremstår fordelene ved spektrogram (b) endnu mere tydeligt, efter der er blevet tilføjet en bastone til musikken. Præcision i tid er betydeligt forbedret i forhold til spektrogram (a), og præcisionen i frekvens er, på nær i selve

anslagene, ligeledes forbedret.

Det sidste spektrogram, vi vil se på, er en tids-frekvens repræsentation af et mere kompliceret stykke klavermusik. Der er her tale om et stykke improviseret blues-musik i højt tempo med mange forskellige toner, og hvor tonematerialet strækker sig over mere end fire oktaver. Komplexiteten af stykket medfører, at et præcist nodebillede ikke er muligt, og at et forsøg på et sådan blot ville forvirre mere, end det ville gavne. Spektrogrammer baseret på en Gabor udvikling og en ikke-stationær Gabor udvikling ses i Figur 7.8.



Figur 7.8: Spektrogram (a) er baseret på en Gabor udvikling, og spektrogram (b) er baseret på en ikke-stationær Gabor udvikling.

Der er i dette stykke musik rigtig mange anslag, og den anvendte algoritme udregner i dette tilfælde kun de mest fremtrædende af disse. I dette tilfælde udregnede algoritmen 43 anslag, hvor det nøjagtige antal er et godt stykke over 100. Alligevel ses det, hvordan spektrogram (b) stadig formår at give en tids-frekvens repræsentation med større præcision i både tid og frekvens end spektrogram (a).

KAPITEL 8

KONKLUSION

Der er i løbet af rapporten blevet set på, hvordan man på forskellige vis kan repræsentere et signal i tids-frekvens planen. Først blev det vist, hvordan kort-tids Fourier transformationen kan benyttes til at konstruere et spektrogram, og hvordan et signal kan rekonstrueres ud fra dets kort-tids Fourier transformation. Ved at variere vinduefunktionens længde så vi, hvordan det er muligt at opnå bedre opløsning i tid på bekostning af dårligere opløsning i frekvens og omvendt. Ulempen ved at konstruere spektrogrammer på denne måde er imidlertid, at metoden er dårlig til at afgrænse signalets essentielle tids-frekvens indhold, og derfor kan det være svært at aflæse informationer af spektrogrammet. F.eks. har vi set, at selvom der kun spilles én tone på et flygel, så er det svært at aflæse grundfrekvensen af denne tone. Tilstedeværelsen af overtonerne er altså i sig selv nok til, at spektrogrammet baseret på kort-tids Fourier transformationen ikke kan gengive grundfrekvensen tydeligt.

En forbedring blev foretaget med introduktionen af Gabor frames. Det blev vist, hvordan disse frames giver en god struktur at arbejde med, sådan at ethvert signal kan skrives som en Gabor udvikling med tilhørende Gabor koefficienter. Yderligere blev der givet et udtryk for dualramen, sådan at rekonstruktion er mulig ud fra Gabor koefficienterne. Nødvendigheden af redundante frames blev retfærdiggjort ved Balian-Low's sætning, der medfører, at hvis det anvendte Gabor systemet er en ortonormal basis, så kan den tilhørende vinduefunktion ikke være godt lokaliseret i både tid og frekvens. Dermed bliver vi nødt til at acceptere en vis redundans for at opnå spektrogrammer med en fornuftig opløsning i både tid og frekvens, når vi anvender Gabor frames. Som eksempel så vi på spektrogrammer af en chirp, og det var her tydeligt, hvordan spektrogrammet, baseret på Gabor repræsentationen, var bedre til at indfange det essentielle tids-frekvens indhold i forhold til spektrogrammet baseret på kort-tids Fourier transformationen.

Som udgangspunkt indeholder Gabor frames kun én vinduefunktion, hvilket er en ulempe i forbindelse med at analysere musiksignaler. For at løse dette problem er der blevet gennemgået tre forskellige tilgange til at konstruere multiple Gabor frames, der hver især har deres fordele og ulemper. Tilgangen baseret på Zak transformationen antager rationelle parametre, men kan under denne antagelse give kriterier for, hvornår et multibelt Gabor system er en frame og i bekræftende fald også give et udtryk for dualramen. De to andre tilgange antager ikke rationelle parametre, men har i stedet andre begrænsninger. Ved konstruktion af reducerede multiple Gabor frames er der ikke noget eksplicit udtryk for dualramen, og ved anvendelse af ikke-stationære Gabor systemer kan vi kun inddele enten tids- eller frekvens-aksen i forskellige intervaller med tilknyttede vinduefunktioner.

I forhold til at analysere klaverstykker er ikke-stationære Gabor systemer imidlertid særlig anvendelige, da ideen om at inddele enten tids- eller frekvens-aksen stemmer godt overens med de forventninger, vi har til signalet. Det blev vist, at hvis man inddeler tidsaksen, sådan at vinduefunktioner med god opløsning i tid anvendes ved hvert anslag, og vinduefunktioner med god opløsning i frekvens anvendes mellem anslagene, så forbedres den samlede opløsning betragteligt.

De inddragede signaler har i dette projekt været af særlig simpel karakter for at tydeliggøre pointerne i de forskellige kapitler. Det er klart, at man i praksis ikke er interesseret i at anvende et computerprogram til at transskribere Lille Peter edderkop, da stykket er af så simpel karakter, at det let kan aflyttes. At opnå en god tids-frekvens repræsentation er imidlertid også vigtigt for at kunne transskribere mere komplicerede musikstykker, hvor der f.eks. anvendes et helt band. I dette tilfælde vil man være nødt til først at sortere de forskellige instrumenter fra hinanden, hvilket kræver, at man kan analysere musikkens udbredelse i tids-frekvens planen.

Det sidste klaverstykke, som blev inddraget i rapporten, kunne godt stamme fra en praktisk situation, hvor man ønsker at transskribere musikken på noder. Her kunne en anvendelse af den inddragede teori som nævnt være at anvende computeren til at give et bud på transskriptionen. I denne sammenhæng er det imidlertid vigtigt at gøre sig klart, at præcis notering af kompliceret improviseret musik ikke er mulig, hvad end man bruger computeren eller øret. Noder er trods alt kun en tilnærmelse af det, vi forstår som musik, og de vil aldrig kunne gengive præcis det, som musikeren improviserer sig frem til. Hvis man imidlertid blot kan bestemme det harmoniske grundlag for musikken, så er man kommet et langt stykke af vejen. En realistisk målsætning kunne dermed være at lade computeren give et bud på tonearten og de anvendte akkorder. I praksis vil dette også være en stor hjælp for musikeren og i mange sammenhænge være præcis det, som han eller hun er på jagt efter. Der findes allerede programmer til netop dette formål, men fælles for dem alle er, at de lader meget tilbage at ønske med hensyn til præcision. Forbedrede tids-frekvens repræsentationer er derfor en nødvendighed, hvis det skal være muligt at lave programmer, der på fornuftig vis kan hjælpe musikere med at transskribere musik.

Transskribering er blot én anvendelse, som tids-frekvens analyse har indenfor musik. Andre anvendelser kunne være komprimering af musik, adskillelse af instrumenter fra hinanden, støjrreduktion eller kategorisering af musikstykker efter genrer. Dette er alle anvendelsesmuligheder, som teorien fra dette projekt kan anvendes i forbindelse med. Som det blev nævnt i indledningen, så ønsker man ikke kun, at en tids-frekvens repræsentation skal kunne gengive signalet tydeligt i tids-frekvens planen. Det er også vigtigt, at det er muligt at implementere teorien, og at der kan konstrueres effektive algoritmer til udregning af koefficienter og til rekonstruktion af signalet. Effektiviteten af de inddragede tids-frekvens repræsentationer kunne dermed ligeledes være et emne at videre arbejde med.

LITTERATUR

Auger, Flandrin, Gonçalves, og Lemoine. François Auger, Patrick Flandrin, Paulo Gonçalves, og Olivier Lemoine. *the Time-Frequency Toolbox*. URL: <http://tftb.nongnu.org/>. Hentet: 23-10-2014.

Axler, 2004. Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. ISBN: 0-387-98258-2. Springer, 2004.

Balazs, Dörfler, Holighaus, Jaillet, og Velasco, a. Peter Balazs, Monika Dörfler, Nicki Holighaus, Florent Jaillet, og Gino Angelo Velasco. *Theory and Implementation of Nonstationary Gabor Frames*. URL: <http://www.univie.ac.at/nonstatgab/>. Hentet: 13-11-2014.

Balazs, Dörfler, Holighaus, Jaillet, og Velasco, b. Peter Balazs, Monika Dörfler, Nicki Holighaus, Florent Jaillet, og Gino Angelo Velasco. *Theory, implementation and applications of nonstationary Gabor frames*. URL: http://www.univie.ac.at/nonstatgab/pdf_files/badohojave11_04042011.pdf. Hentet: 07-11-2014.

Berg og Madsen, 2001. Christian Berg og Tage Gutmann Madsen. *Mål- og integralteori*. ISBN: 0-471-55604-1. Københavns universitet, 2001.

Christensen, 2003. Ole Christensen. *An introduction to frames and riesz bases*. ISBN: 0-8176-4295-1. Birkhäuser, 2003.

Dixon, 2006. Simon Dixon. *Onset Detection Revisited*. Austrian Research Institute for Artificial Intelligence, 2006.

Dörfler, 2002. Monika Dörfler. *Gabor Analysis for a Class of Signals called Music*. Institute für Mathematik, Universität Wien, 2002.

Dörfler, 2004. Monika Dörfler. *What time-frequency analysis can do to music signals (and what it can't do)*. Institute für Mathematik, Universität Wien, 2004.

Gröchenig, 2000. Karlheinz Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. ISBN: 0-8176-4022-3. Birkhäuser, 2000.

Grubbe. Lasse Grubbe. *Tonefrekvenser*. URL: <http://www.musikipedia.dk/tonefrekvenser>. Hentet: 13-11-2014.

Katnelson, 1976. Yitzhak Katnelson. *An introduction to Harmonic Analysis*. ISBN: 0-486-63331-4. Dover Publications, INC., 1976.

Lax, 2010. Peter D. Lax. *Functional Analysis*. ISBN: 0-471-55604-1. Wiley, 2010.

Lieb og Loss, 2000. Elliott H. Lieb og Michael Loss. *Analysis*. ISBN: 0-8218-2783-9. American Mathematical Society, 2000.

Pedersen, 2000. Michael Pedersen. *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*. ISBN: 0-8493-7169-4. Birkhäuser, 2000.

Reed og Simon, 1980. Michael Reed og Barry Simon. *Functional Analysis*. ISBN: 0-12-585050-6. Academic Press, INC., 1980.

Zibulski og Zeevi, 1997. Meir Zibulski og Yehoshua Y. Zeevi. *Analysis og Multiwindow Gabor-type Schemes by Frame Methods*. Department of Electrical Engineering, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, 32000, Israel, 1997.

EKSTRAMATERIALE

Der vil i dette bilag være samlet forskellige sætning og udregninger, der er blevet udeladt fra rapporten for at forbedre læsevenligheden.

A.1 Normerede rum

En norm $\|\cdot\|$ på et vektorrum V er en funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, der opfylder

$$(i) \quad \|f\| \geq 0, \quad \forall f \in V, \quad \text{og} \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0,$$

$$(ii) \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \quad \forall f \in V, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(iii) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in V.$$

Et vektorrum med en tilhørende norm kaldes et normeret rum. En følge $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ siges at *konvergere* mod $f \in V$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \quad \text{når} \quad n \geq N_\varepsilon.$$

En følge $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ kaldes en *Cauchy-følge*, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\|f_k - f_l\| < \varepsilon \quad \text{når} \quad k, l \geq N_\varepsilon.$$

Sætning A.1

En konvergent følge $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ er en Cauchy-følge.

Bevis:

Antag at følgen $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ konvergerer mod punktet f . Da gælder, at givet $\varepsilon > 0$, så eksisterer et $N_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{når} \quad n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Dermed fås

$$\begin{aligned}
\|f_k - f_l\| &= \|f_k - f + f - f_l\| \\
&\leq \|f_k - f\| + \|f - f_l\| \\
&= \|f_k - f\| + |-1| \|f_l - f\| \\
&= \|f_k - f\| + \|f_l - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ når } k, l \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}.
\end{aligned}$$

■

A.2 Skalarprodukt og ortogonalkomplement

I dette afsnit vil begreberne *skalarprodukt* og *ortogonalkomplement* blive introduceret, og der inddrages forskellige sætninger, som benyttes undervejs i rapporten.

Definition A.2 (Skalarprodukt)

Lad V være et komplekst vektorrum. Et *skalarprodukt* er en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, der opfylder

- (i) $\langle f, f \rangle \geq 0$, $\forall f \in V$, og $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
- (ii) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$, $\forall f, g \in V$,
- (iii) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$, $\forall f, g, h \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Af punkt (ii) og (iii) følger det, at

$$\begin{aligned}
\langle f, \alpha g + \beta h \rangle &= \overline{\langle \alpha g + \beta h, f \rangle} = \overline{\alpha \langle g, f \rangle + \beta \langle h, f \rangle} \\
&= \overline{\alpha} \cdot \overline{\langle g, f \rangle} + \overline{\beta} \cdot \overline{\langle h, f \rangle} = \overline{\alpha} \langle f, g \rangle + \overline{\beta} \langle f, h \rangle, \quad \forall f, g, h \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Ifølge [Lax, 2010][side 52] medfører et skalarprodukt en induceret norm givet ved

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad \forall f \in V,$$

og denne norm opfylder *Cauchy-Schwarz' ulighed*:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad \forall f, g \in V. \tag{A.1}$$

Det fremgår af den følgende sætning, at skalarproduktet er kontinuert.

Sætning A.3

Lad V være et komplekst vektorrum med et tilknyttet skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. Da gælder, at hvis $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ er en følge, der konvergerer mod $f \in V$ og $\{g_n\}_{n \geq 1} \subseteq V$ er en følge, der konvergerer mod $g \in V$, så konvergerer følgen $\{\langle f_n, g_n \rangle\}_{n \geq 1}$ mod $\langle f, g \rangle$.

Bevis:

Vi ser først, at der for alle $n \geq 1$ gælder, at

$$\begin{aligned}
 |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f_n, g \rangle - \langle f, g_n \rangle + \langle f, g \rangle + \langle f, g_n \rangle - \langle f, g \rangle + \langle f_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| \\
 &= |\langle f_n, g_n - g \rangle - \langle f, g_n - g \rangle + \langle f, g_n \rangle - \langle f, g \rangle + \langle f_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| \\
 &= |\langle f_n - f, g_n - g \rangle + \langle f, g_n - g \rangle + \langle f_n - f, g \rangle| \\
 &\leq |\langle f_n - f, g_n - g \rangle| + |\langle f, g_n - g \rangle| + |\langle f_n - f, g \rangle|.
 \end{aligned}$$

Ved at anvende Cauchy-Schwarz' ulighed (se ligning (A.1)) fås nu, at

$$|\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| \leq \|f_n - f\| \|g_n - g\| + \|f\| \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \|g\|.$$

Det følger heraf, at når $\{f_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ og $\{g_n\}_{n \geq 1} \rightarrow g$, så gælder, at $\{\langle f_n, g_n \rangle\}_{n \geq 1} \rightarrow \langle f, g \rangle$. ■

Vi lader nu $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum. To vektorer $f, g \in \mathcal{H}$ siges at være *ortogonale*, hvis $\langle f, g \rangle = 0$. I forbindelse med ortogonale vektorer har vi følgende definition.

Definition A.4 (Ortogonalkomplement)

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum, og lad $Y \subseteq \mathcal{H}$ være et underrum. *Ortogonalkomplementet* til Y er da givet ved

$$Y^\perp = \{g \in \mathcal{H} \mid \langle f, g \rangle = 0, \quad \forall f \in Y\}.$$

Hvis et element h tilhører både Y og $Y^\perp$, så må der nødvendigvis gælde, at $h = 0$. Der gælder ifølge [Lax, 2010][Theorem 3 side 55] følgende sætning for orthogonalkomplementet.

Sætning A.5

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum, og lad $Y \subseteq \mathcal{H}$ være et lukket underrum. Da gælder, at

- (i) $Y^\perp$ er et lukket underrum.
- (ii) For alle $h \in \mathcal{H}$ eksisterer en entydig vektor $f \in Y$ og en entydig vektor $g \in Y^\perp$, sådan at $h = f + g$.
- (iii) $(Y^\perp)^\perp = Y$.

A.2.1 Pythagoras' sætning

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum. For ortogonale vektorer $f, g \in \mathcal{H}$ gælder *Pythagoras' sætning*:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\
 &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\
 &= \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|^2 \\
 &= \|f\|^2 + \|g\|^2.
 \end{aligned}$$

Hvis $f_1, f_2, \dots, f_n$ er parvist ortogonale vektorer, sådan at $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ for $i \neq j$, har vi ifølge definitionen af skalarproduktet (pkt. (iii) i Sætning A.2), at

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n f_i, \sum_{j=1}^n f_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i, f_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle f_k, f_k \rangle = \sum_{k=1}^n \|f_k\|^2. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Vi kan nu opskrive Pythagoras' sætning for uendelige summer.

Sætning A.6

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum, og lad $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ være en følge af parvist ortogonale vektorer, sådan at $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ for $i \neq j$. Da gælder, at $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergerer, hvis og kun hvis $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$ konvergerer, og i så fald gælder der, at

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2.$$

Denne række konvergerer ubetinget.

Bevis:

Vi betragter følgerne $\{A_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{H}$ og $\{B_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{R}$ givet ved

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n f_k, \\ B_n &= \sum_{k=1}^n \|f_k\|^2 \end{aligned}$$

Dermed har vi ifølge ligning (A.2) for $m > n$, at

$$\begin{aligned} \|A_m - A_n\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^n f_j \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|^2 \\ &= B_m - B_n = |B_m - B_n|. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Da både $\mathcal{H}$ og $\mathbb{R}$ er fuldstændige rum, så følger der heraf, at $\{A_n\}_{n \geq 1}$ konvergerer, hvis og kun hvis $\{B_n\}_{n \geq 1}$ konvergerer. For alle $n \geq 1$ har vi ifølge ligning (A.2), at

$$\|A_n\|^2 = B_n, \tag{A.4}$$

og da normen er kontinuert, har vi dermed, at

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2, \quad (\text{A.5})$$

hvis $\{A_n\}_{n \geq 1}$ og $\{B_n\}_{n \geq 1}$ konvergerer. Da ligning (A.3) og (A.4) gælder uanset, hvilken rækkefølge leddene i $\{A_n\}_{n \geq 1}$ og $\{B_n\}_{n \geq 1}$ forekommer i, så konvergerer rækken i (A.5) ubetinget, hvis $\{A_n\}_{n \geq 1}$ og $\{B_n\}_{n \geq 1}$ konvergerer. ■

A.3 Positiv operator

En operator $U \in B(\mathcal{H})$ kaldes positiv, hvis

$$\langle Uf, f \rangle \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

I det følgende vil det blive vist, at en positiv operator nødvendigvis er selvadjungeret.

Lemma A.7

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum. Hvis $T \in B(\mathcal{H})$ opfylder, at

$$\langle Tf, f \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

så gælder der, at $T = 0$.

Bevis:

For $f, g \in \mathcal{H}$ har vi ifølge antagelsen, at

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(f+g), f+g \rangle = \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle + \langle Tg, g \rangle \\ &= \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(f+ig), f+ig \rangle = \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, ig \rangle + \langle T(ig), f \rangle + \langle T(ig), ig \rangle \\ &= i \langle Tf, g \rangle - i \langle Tg, f \rangle \\ &= i (\langle Tf, g \rangle - \langle Tg, f \rangle). \end{aligned}$$

Disse to udregninger medfører, at $\langle Tf, g \rangle = 0$ for alle $f, g \in \mathcal{H}$, og dermed at $T = 0$. ■

Sætning A.8

En positiv operator $U \in B(\mathcal{H})$ er selvadjungeret.

Bevis:

Vi har, at

$$\begin{aligned} \langle (U - U^*)f, f \rangle &= \langle Uf, f \rangle - \langle U^*f, f \rangle \\ &= \langle Uf, f \rangle - \langle f, Uf \rangle \\ &= \langle Uf, f \rangle - \overline{\langle Uf, f \rangle} \\ &= \langle Uf, f \rangle - \langle Uf, f \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Det følger nu af Lemma A.7, at $U - U^* = 0$, hvilket vil sige, at U er selvadjungeret. ■

A.4 Riesz baser

Der vil i dette afsnit blive defineret såkaldte *Riesz baser* og vist forskellige egenskaber for sådanne baser. Først bringes følgende sætning for ortonormale baser [Christensen, 2003][Theorem 3.4.7 side 59].

Sætning A.9

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum og $\{e_k\}_{k \geq 1}$ være en ortonormal basis for $\mathcal{H}$. Da gælder, at de ortonormale baser for $\mathcal{H}$ er mængden $\{Ue_k\}_{k \geq 1}$, hvor $U \in B(\mathcal{H})$ er en unitær operator.

Ideen med en Riesz basis er, at man lempet på kravet til operatoren i Sætning A.9:

Definition A.10 (Riesz basis)

En Riesz basis for et Hilbertrum $\mathcal{H}$ er en mængde $\{Ue_k\}_{k \geq 1}$, hvor $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en ortonormal basis og $U \in B(\mathcal{H})$ er en bijektiv operator.

Da U er bijektiv, så har den en invers U^{-1} , der også er bijektiv, og ifølge [Christensen, 2003][Theorem A.5.2 side 407] gælder der, at hvis $U \in B(\mathcal{H})$, så er $U^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

Der gælder ifølge [Reed og Simon, 1980][Theorem VI.3 side 186] også, at hvis $U \in B(\mathcal{H})$ er bijektiv, så er $U^* \in B(\mathcal{H})$ også bijektiv og $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$.

Samlet set giver dette, at hvis $U \in B(\mathcal{H})$ er bijektiv, så er $U^{-1} \in B(\mathcal{H})$ bijektiv, og dermed er $(U^{-1})^* \in B(\mathcal{H})$ også bijektiv. Dette får vi brug for til at vise følgende sætning, hvoraf det bl.a. fremgår, at en Riesz basis rent faktisk er en basis.

Sætning A.11

Lad $\{f_k\}_{k \geq 1}$ være en Riesz basis for et Hilbertrum $\mathcal{H}$. Da eksisterer en unik følge $\{g_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$, sådan at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Denne række konvergerer ubetinget. Der gælder yderligere, at $\{g_k\}_{k \geq 1}$ også er en Riesz basis og

$$\langle f_i, g_j \rangle = 0 \quad \text{for } i \neq j, \quad \text{og} \quad \langle f_k, g_k \rangle = 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Bevis:

Da $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en Riesz basis, kan vi ifølge Definition A.10 skrive $\{f_k\}_{k \geq 1} = \{Ue_k\}_{k \geq 1}$, hvor $U \in B(\mathcal{H})$ er bijektiv og $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{H}$. Der gælder dermed ifølge Sætning 2.14

side 14, at vi kan skrive $U^{-1}f$ ved brug af basisvektorerne på følgende måde

$$\begin{aligned} U^{-1}f &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle U^{-1}f, e_k \rangle e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

hvor $g_k = (U^{-1})^* e_k$. Da $U \in B(\mathcal{H})$ har vi dermed, at

$$\begin{aligned} f &= UU^{-1}f = U \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle Ue_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Da $U \in B(\mathcal{H})$ er bijektiv, så er $(U^{-1})^* \in B(\mathcal{H})$ også bijektiv, og dermed er $\{g_k\}_{k \geq 1}$ en Riesz basis ifølge Definition A.10. For at vise at rækken i ligning (A.6) konvergerer ubetinget, skal vi vise, at $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en Besselfølge, da resultatet så følger af Korollar 2.12 side 13. Dette ses ved det følgende, hvor vi undervejs anvender Parsevals ligning (se ligning (2.17) side 14) og ligning (2.2) fra side 7:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^* f, e_k \rangle|^2 \\ &= \|U^* f\|^2 \\ &\leq (\|U^*\|_* \|f\|)^2 \\ &= \|U^*\|_*^2 \|f\|^2 \\ &= \|U\|_*^2 \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Heraf ses det, at $\{f_k\}_{k \geq 1}$ er en Besselfølge med Besselgrænse $\|U\|_*^2$ ifølge Definition 2.10 side 12. Den sidste del af sætningen vises ved det følgende, samt det faktum, at $\{e_k\}_{k \geq 1}$ er en ortonormal basis:

$$\begin{aligned} \langle f_i, g_j \rangle &= \langle Ue_i, (U^{-1})^* e_j \rangle \\ &= \langle U^{-1}Ue_i, e_j \rangle \\ &= \langle e_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

■

Følgen $\{g_k\}_{k \geq 1}$ kaldes *dual Riesz basen* til $\{f_k\}_{k \geq 1}$. I beviset for Sætning A.11 så vi, at når $\{f_k\}_{k \geq 1} = \{Ue_k\}_{k \geq 1}$, så er $\{g_k\}_{k \geq 1} = \{(U^{-1})^* e_k\}_{k \geq 1}$. Ved at anvende Sætning A.11 på $\{g_k\}_{k \geq 1}$ finder vi dermed, at dual Riesz basen til $\{g_k\}_{k \geq 1}$ er

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\left((U^{-1})^* \right)^{-1} \right)^* e_k \right\}_{k \geq 1} &= \left\{ \left(\left((U^{-1})^{-1} \right)^* \right)^* e_k \right\}_{k \geq 1} \\ &= \{(U^*)^* e_k\}_{k \geq 1} \\ &= \{Ue_k\}_{k \geq 1} \\ &= \{f_k\}_{k \geq 1}. \end{aligned}$$

Altså er $\{f_k\}_{k \geq 1}$ og $\{g_k\}_{k \geq 1}$ hinandens dual Riesz baser og Sætning A.11 giver dermed, at

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

I resten af dette afsnit vil der blive set på sammenhænge mellem Riesz baser og frames.

Sætning A.12

Hvis $\{f_k\}_{k \geq 1} = \{Ue_k\}_{k \geq 1}$ er en Riesz basis for $\mathcal{H}$, så eksisterer der konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Den størst mulige værdi for konstanten A er $\frac{1}{\|U^{-1}\|_*^2}$, og den mindst mulige værdi for B er $\|U\|_*^2$.

Bevis:

Vi har fra ligning (A.7), at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \|U^* f\|^2 \leq (\|U^*\|_* \|f\|)^2 = \|U\|_*^2 \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

og vi ved ifølge definitionen af operatornormen (se ligning (2.1) side 7), at der ikke eksisterer noget tal mindre end $\|U\|_*^2$, der opfylder denne ulighed. Dette beviser, at den mindst mulige værdi for B er $\|U\|_*^2$. Den sidste del af beviset set ved følgende, hvor Parsevals ligning (se ligning (2.17) side 14) og ligning (2.2) side 7 anvendes:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|(U^*)^{-1} U^* f\|^2 \\ &\leq \|(U^*)^{-1}\|_*^2 \|U^* f\|^2 \\ &= \|(U^{-1})^*\|_*^2 \|U^* f\|^2 \\ &= \|U^{-1}\|_*^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^* f, e_k \rangle|^2 \\ &= \|U^{-1}\|_*^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 \\ &= \|U^{-1}\|_*^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Igen ved vi ifølge definitionen af operatornormen, at $\|U^{-1}\|_*^2$ er det mindst tal, der opfylder denne ulighed, og dermed at den størst mulige værdi for A er $\frac{1}{\|U^{-1}\|_*^2}$. ■

Det er klart, at konstanterne A og B i Sætning A.12 ikke er unikke. Tal, der opfylder uligheden, kaldes henholdsvis nedre og øvre *Riesz-grænser*, og $A = \frac{1}{\|U^{-1}\|_*^2}$ og $B = \|U\|_*^2$ kaldes de *optimale Riesz-grænser*.

En vigtig sammenhæng mellem Riesz baser og frames er indeholdt i følgende sætning.

Sætning A.13

En Riesz basis $\{f_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ er en frame for $\mathcal{H}$ og Riesz-grænserne stemmer overens med frame-grænserne. Dual Riesz basen er $\{g_k\}_{k \geq 1} = \{S^{-1}f_k\}_{k \geq 1}$.

Bevis:

Den første del af sætningen følger direkte af Sætning A.12. For at vise den anden del af sætningen anvender vi Sætning 4.5 side 35 til at skrive

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Entydighedsdelen af Sætning A.11 side 104 giver nu, at dual Riesz basen er givet ved $\{g_k\}_{k \geq 1} = S^{-1}\{f_k\}_{k \geq 1}$. ■

A.5 Kort-tids Fourier transformationen

Der vil i dette afsnit være samlet forskellige egenskaber ved KTFT'en, som benyttes i rapporten til at bevise inversionsformlen for KTFT'en.

Lemma A.14

For $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ er $V_g f$ kontinuert, og

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Bevis:

Ifølge definitionen af KTFT'en (se Definition 3.3 side 22) har vi, at

$$V_g f(x, \omega) = \langle f, M_{\omega} T_x g \rangle, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Kontinuiteten af $V_g f$ følger nu af, at skalarproduktet er kontinuert og translation og modulation er begrænsede, og dermed kontinuerte, operatorer. Ifølge Plancherel's ligninger (se ligning (2.10) side 10) gælder der, at

$$V_g f(x, \omega) = \langle f, M_{\omega} T_x g \rangle = \langle \hat{f}, (M_{\omega} T_x g)^{\wedge} \rangle, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Ifølge ligning (2.11) og (2.12) fra side 11 haves yderligere, at

$$\langle \hat{f}, (M_{\omega} T_x g)^{\wedge} \rangle = \langle \hat{f}, T_{\omega} (T_x g)^{\wedge} \rangle = \langle \hat{f}, T_{\omega} M_{-x} \hat{g} \rangle, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Ligning (2.7) side 9 giver nu, at

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, T_{\omega} M_{-x} \hat{g} \rangle &= \langle \hat{f}, e^{2\pi i x \omega} M_{-x} T_{\omega} \hat{g} \rangle \\ &= e^{-2\pi i x \omega} \langle \hat{f}, M_{-x} T_{\omega} \hat{g} \rangle \\ &= e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x), \quad x, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi har nu vist, at

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x), \quad x, \omega \in \mathbb{R},$$

hvilket beviser sætningen. ■

For $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ lader vi nu $f \otimes g$ betegne tensor produktet givet ved

$$f \otimes g(x, t) = f(x)g(t), \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Yderligere lader vi $\mathcal{T}_a$ betegne den asymmetriske koordinattransformation

$$\mathcal{T}_a F(x, t) = F(t, t - x), \quad x, t \in \mathbb{R},$$

og $\mathcal{F}_2$ være den delvise Fourier transformation givet ved

$$\mathcal{F}_2 F(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) e^{-2\pi i t \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Med denne notation gælder følgende lemma.

Lemma A.15

Hvis $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, så gælder, at

$$V_g f = \mathcal{F}_2 \mathcal{T}_a (f \otimes \bar{g}).$$

Bevis:

Lemmaet bevises direkte:

$$\begin{aligned} V_g f(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t - x)} e^{-2\pi i t \omega} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f \otimes \bar{g}(t, t - x) e^{-2\pi i t \omega} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_a (f \otimes \bar{g})(x, t) e^{-2\pi i t \omega} dt \\ &= \mathcal{F}_2 \mathcal{T}_a (f \otimes \bar{g})(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

I den følgende sætning indgår rummet $L^2(\mathbb{R}^2)$. Helt generelt gælder der ifølge [Berg og Madsen, 2001][Afsnit 7.14 side 159], at vektorrummet

$$L^2(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ er målelig og } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

er et Hilbertrum mht. skalarproduktet:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Det er her anvendt notationen:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d.$$

Vi kan nu bevise den følgende sætning.

Sætning A.16

Hvis $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$, så gælder at $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$ for $j = 1, 2$, og

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

Bevis:

Da både $\mathcal{F}_2$ og $\mathcal{T}_a$ er unitære operatorer på $L^2(\mathbb{R})$, så gælder ifølge Lemma A.15, at

$$\begin{aligned} \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \langle \mathcal{F}_2 \mathcal{T}_a(f_1 \otimes \overline{g_1}), \mathcal{F}_2 \mathcal{T}_a(f_2 \otimes \overline{g_2}) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \langle f_1 \otimes \overline{g_1}, f_2 \otimes \overline{g_2} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \otimes \overline{g_1}(x, \omega) \overline{f_2 \otimes \overline{g_2}(x, \omega)} d\omega dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{g_1}(\omega) \overline{f_2(x) g_2(\omega)} d\omega dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_1(\omega)} g_2(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_1(\omega)} g_2(\omega) d\omega \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}. \end{aligned}$$

■

A.6 Eksempel på Balian-Low's sætning

Det vises her, at vinduefunktionen $g = \chi_{[0,1]}$, hørende til den ortonormale basis $\{e_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$ givet ved

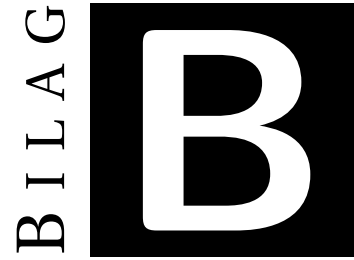
$$\left\{ e^{2\pi i k x} \chi_{[0,1]}(x - n) \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}} = \{M_k T_n g(x)\}_{k,n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

er dårligt lokaliseret i tid. Vi udregner først den Fourier transformerede:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{[0,1]}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(x) e^{-2\pi i x \omega} dx = \int_0^1 e^{-2\pi i x \omega} dx \\ &= \left[\frac{e^{-2\pi i x \omega}}{-2\pi i \omega} \right]_0^1 = \frac{e^{-2\pi i \omega} - 1}{-2\pi i \omega} = \frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2\pi i \omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Herefter ser vi, at

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{\chi}_{[0,1]}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left| \frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2\pi i \omega} \right|^2 d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{|1 - e^{-2\pi i \omega}|^2}{|2\pi i \omega|^2} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{|1 - (\cos(-2\pi\omega) + i \sin(-2\pi\omega))|^2}{(2\pi |\omega|)^2} d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - \cos(\omega) + i \sin(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(\omega))^2 + \sin(\omega)^2 d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} 1 + \cos(\omega)^2 - 2 \cos(\omega) + \sin(\omega)^2 d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2 - 2 \cos(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left[2\omega - 2 \sin(\omega) \right]_{-N}^N \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(2N - 2 \sin(N) - (2(-N) - 2 \sin(-N)) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(4N - 2 \sin(N) + 2 \sin(-N) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(4N - 2 \sin(N) - 2 \sin(N) \right) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(N - \sin(N) \right) \\
&\geq \frac{1}{\pi^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(N - 2\pi \right) = \infty.
\end{aligned}$$



MATLAB KODE

I dette bilag vil de anvendte Matlab koder fra projektet være samlet. Den anvendte version af Matlab er Matlab R2014b.

Matlab-kode B.1 (Definition og plot af simpelt signal)

```
f1 = 2; f2 = 3; f3 = 6;
Fs = 100;
Ts = 1/Fs;
t = 0:Ts:1-Ts;

s = 1*cos(2*pi*f1*t)+3*cos(2*pi*f2*t)+2*cos(2*pi*f3*t);

plot(t,s)
xlabel('Tid (sekunder)','fontsize',20);
ylabel('Udsving','fontsize',20);
```

Matlab-kode B.2 (Fourier transformation af simpelt signal og plot)

```
function [X,frekvens] = positiveFFT(s,Fs)
N=length(s);
k=0:N-1;
T=N/Fs;
frekvens=k/T;

X=(2*fft(s))/N;

cutOff=ceil(N/2);
X=X(1:cutOff);
frekvens=frekvens(1:cutOff);
end

[X,frekvens]=positiveFFT(s,Fs);
stem(frekvens,abs(X))
xlabel('Frekvens (Hz)','fontsize',20);
ylabel('Udsving','fontsize',20);
```

Matlab-kode B.3 (Spektrogram af simpelt signal)

```
g = gausswin(100);  
F=0:0.01:15;  
  
spectrogram(s,g,0,F,Fs,'yaxis')  
xlabel('Tid (sekunder)','fontsize',20);  
ylabel('Frekvens (Hz)','fontsize',20);  
colormap('jet');
```

Matlab-kode B.4 (Spektrogram af Chirp)

```
Fs=500;  
Ts= 1/Fs;  
t=0:Ts:1-Ts;  
  
s = chirp(t,10,0.5,40,'q');  
  
g = gausswin(100);  
spectrogram(s,g,90,100,500,'yaxis')  
xlabel('Tid (sekunder)','fontsize',20);  
ylabel('Frekvens (Hz)','fontsize',20);  
colormap('jet');
```

Matlab-kode B.5 (Implementering af de fire tacters klavermusik)

```
[kor,Fs,nbits]=wavread('filnavn.wav');  
N=length(kor);  
Ts=1/Fs;  
t=0:Ts:N*Ts-Ts;  
  
plot(t,kor);  
xlabel('Tid (sekunder)','fontsize',20);  
ylabel('Udsving','fontsize',20);  
axis tight
```

Matlab-kode B.6 (Spektrogram af de fire tacters klavermusik)

```
g = gausswin(512);  
set(gcf, 'renderer', 'zbuffer');  
spectrogram(kor(:,1),g,256,512,Fs,'yaxis')  
xlabel('Tid (sekunder)','fontsize',20);  
ylabel('Frekvens (Hz)','fontsize',20);
```


Matlab-kode B.7 (Konturplot af vinduefunktion)

```
syms x y;
G00=abs(exp(-pi*(x^2+y^2)));
G23=abs(exp(12*pi*1i+4*pi*1i*x-pi*(x-3)^2-6*pi*1i*y-pi*(y-2)^2));
G=G00+G23;
ezcontour(G00,[-3,6],500)
title(' ');xlabel(' ');ylabel(' ');colormap('jet');
```

Matlab-kode B.8 (Gabor repræsentation af chirp)

% Der er i denne kode anvendt funktioner fra tids-frekvens Toolbox'en [Auger et al.]

```
Fs=500;
t=0:1/Fs:1-(1/Fs);
s = chirp(t,10,0.5,40,'q');
N1=length(s);

N=20;
Q=4;

h=window(@gausswin,odd(N));
trace=0;

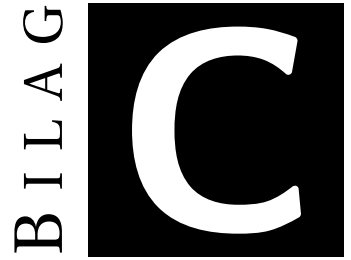
[tfr,dgr,gam]=tfrgabor(hilbert(s'),N,Q,h,trace);

tfrqview(tfr,hilbert(s'),1:N,'type1')
xlabel('N','fontsize',16);
ylabel('Normaliserede frekvenser','fontsize',16);
axis('xy');
title('');
colormap('jet');
```

Matlab-kode B.9 (Gauss og Hann vindue)

```
x = linspace(0,50,50);
g = gausswin(50);
h = hann(50);
plot(x,g,x,h);

gf = fftshift(fft(g));
hf = fftshift(fft(h));
plot(x,abs(gf),x,abs(hf))
```

ABSTRACT

This thesis deals with time-frequency analysis, in particular Gabor representations of music signals. I will give a description of the Hilbertspace $L^2(\mathbb{R})$ and introduce several operators defined on this space. Elementary results on Hilbertspaces are included in order to prepare the reader for the introduction of frame theory.

In describing the foundation of time-frequency analysis the following topics are treated: the uncertainty principle, the short-time Fourier transform and the spectrogram. Several examples are included to illustrate how the short-time Fourier transform works.

The main part of the thesis is based on frame theory and in particular the theory of Gabor frames. I will explain how the dual frame is obtained from a Gabor frame, and discuss how Gabor theory is related to time-frequency analysis. An example is included to illustrate the difference between the approach based on the short-time Fourier transform and the approach based on a Gabor representation.

Finally I discuss three different approaches to construct multiple Gabor frames. Such frames are especially interesting when analysing music signals and can improve both time and frequency resolution in comparison with traditional Gabor methods. To illustrate this, different piano pieces are used as signals and comparisons are made between the multi-window approach and the single-window approach.