Laplace- og Fouriertransformationer med anvendelser

Karin Lentfer Kristiansen
og Thomas Hecksher

EVU master i matematikuddannelsen på Aalborg Universitet
6. september 2014

Resumé

The following report is a concise presentation of the main identities and properties of the Laplace and Fourier transforms. The main goal of this report is to show how to use Laplace transforms and Fourier transforms to solve differential equations.

Fourier transform is a natural extension of Fourier series when the period of the represented function approaches infinity. It is therefore fundamental that Fourier series are briefly examined first.

The strong use of Laplace and Fourier transforms, in especially the engineering sciences, has triggered a report focus on the properties that are primarily needed for solving differential and integral equations. As such, a general method for solving ordinary as well as partial homogeneous and inhomogeneous differential equations is presented using these transforms.

The premise of the Laplace and Fourier transforms is their ability to reduce a differential equation into an algebraic equation. Such an equation is more readily solved, and subsequently inversely transformed into the solution to the original differential equation.

The methods allowed by the Laplace and Fourier transforms in solving differential equations are instrumental in solving physical problems. When solving linear ordinary differential equations regarding the analysis of electronic circuits and mechanical waves and vibrations the Laplace transform is a particular useful tool.

The target audience is upper secondary science teachers who may seek to implement these topics into their teaching practice. As such it has been necessary to encompass more comprehensive computations of theory and examples as may otherwise be expected in such a text. This is not least provided through the appendix material.

Where it has been deemed appropriate, the same solution methods have been presented for both the Laplace and the Fourier transforms. These are cross referenced in the text.

Many solutions involve more areas of mathematics than what can be represented by the Laplace and Fourier transforms alone. The foundation of residue theory e.g. is applied but circumvented to allow a more strict focus on the prevailing subject of transforms.

Forord

Denne rapport er blevet til som en del af EVU masteruddannelsen på Aalborg Universitet.

Målgruppen er gymnasielærere som tænker at anvende Laplace- eller Fouriertransformationer i matematik- eller fysikundervisningen. For at opnå undervisningskompetence i matematik i gymnasiet er det tilstrækkeligt, at læse matematik som sidefag og derfor er det ikke en selvfølge, at alle matematiklærere er bekendte med både Laplace- og Fouriertransformation - eller måske bare ikke har det present i hukommelsen, men det forventes dog, at målgruppen er bekendt med de vigtigste resultater fra introducerende kurser inden for emnerne analyse og komplekse funktioner.

Formålet med denne rapport er at give et indblik i Laplace- og Fouriertransformation. Der er i rapporten lagt vægt på, at få introduceret nogle af de vigtigste egenskaber ved henholdsvis Laplace- og Fouriertransformation og illustrere disse ved udvalgte eksempler.

Det er desuden denne rapports formål at vise, hvorledes Laplace- og Fouriertransformation kan anvendes til at løse simple partielle differentialligninger. Det er bevidst valgt, at der ikke er lagt specielt fokus på enkelte delemner indefor de to transformationstyper, men i stedet er det valgt at give en bredere præsentation af hele emnet.

Rapporten er opbygget således, at først bliver Laplacetransformationen præsenteret samt nogle af dens egenskaber. I afsnittet er der desuden nogle eksempler på løsningen af simple differentialligninger ved brug af Laplacetransformation.

Dernæst præsenteres Fourierrækker særskilt, da disse danner grundlag for Fouriertransformationen. Herefter følger selve udledningen af Fouriertransformationen, hvor egenskaber og simple beregninger under anvendelse af Fouriertransformation præsenteres.

Rapporten afsluttes med et afsnit omkring anvendelser af Laplace- og Fouriertransformation, hvor mere anvendelsesorienterede eksempler gennemregnes.

Vi vil gerne sige tak til vores vejleder Bo Rosbjerg for henvisning til mange relevante kilder.

Aalborg d. 6-9-2014

Karin Lentfer Kristiansen & Thomas Hecksher

Indhold

Kapitel 1

Laplacetransformationen

Laplace- og Fouriertransformationer er eksempler på integraltransformationer af typen

$$F(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\, dt \tag{1.1}$$

som transformerer $f(t)$ til $F(s)$, hvor $K(s,t)$ kaldes integral-kernen. Af andre transformationer finder man Mellin-, 3-, Z-, Stieltjes-, Laguerre- og Hankeltransformationen mv.

1.1 Grundlæggende egenskaber

Laplacetransformationen er opkaldt efter Pierre-Simon Laplace (1749-1827) [5] og er en afbildning som transformerer en reel eller kompleks funktion $f(t)$ til en kompleks funktion $F(s)$. $f(t)$ kaldes objektfunktionen og $F(s)$ kaldes billedfunktionen.

Eksistensen af $F(s)$ sætter nogle krav til $f(t)$, så vi definerer her tilstrækkelige betingelser for en klasse af funktioner.

Definition 1 ($\mathcal{E}$-klassen af funktioner og konvergensabscisse)**.** Lad f være en funktion $f : [0; \infty[\to \mathbb{C}$. f tilhører funktionsklassen $\mathcal{E}$ når der eksisterer et σ så

$$\lim_{a \to 0+, b \to \infty} \int_a^b |f(t)| e^{-\sigma t}\, dt < \infty$$

og her defineres σ ved

$$\sigma(f) := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \mid \lim_{a \to 0+, b \to \infty} \int_a^b |f(t)| e^{-\sigma t}\, dt < \infty \right\}$$

Det er klart at integralet vil være konvergent for alle $s \in \mathbb{C}$ hvor $Re(s) > \sigma$, så σ kaldes derfor *konvergensabscissen.*

Alle stykkevis kontinuerte og eksponentielt begrænsede funktioner vil derfor være indeholdt i $\mathcal{E}$-klassen.

Definition 2 (Laplacetransformation)**.** Lad $f \in \mathcal{E}$ og lad $s \in \mathbb{C}$ hvor $Re(s) > \sigma(f)$, så vil den Laplacetransformerede af $f(t)$ eksistere og være givet ved

$$F(s) \equiv \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) := \lim_{a \to 0+, b \to \infty} \int_a^b f(t) e^{-st}\, dt \tag{1.2}$$

Her anvendes ofte notationen $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$, $(\mathcal{L}f)(s)$ eller blot $\mathcal{L}f$ i stedet for $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ og $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$ i stedet for $\lim_{a\to 0+, b\to\infty} \int_a^b f(t)e^{-st}\, dt$, når misforståelser er udelukket. Afhænger f af flere variable kan man anvende et indeks til at understrege hvilken variabel transformationen er med hensyn til, fx $F(s,x) = \mathcal{L}_t\left\{f(t,x)\right\}$.

Nogle steder anvendes den bilaterale Laplacetransformation $\mathcal{B}$ hvor der integreres fra minus uendelig til plus uendelig. Den unilaterale kan da defineres ud fra den bilaterale $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{B}\left\{f(t)H(t)\right\}$ hvor $H(t)$ er Heaviside stepfunktionen hvor $H(t) = 0$ for $t < 0$ og $H(t) = 1$ for $t \geq 0$. Og omvendt kan den bilaterale defineres ud fra unilaterale $\mathcal{B}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{f(-t)\right\}(-s)$ Og Mellintransformationen kan defineres ud fra den bilaterale Laplacetransformation ved $\mathcal{M}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{B}\left\{f(e^{-t})\right\}$. Relationen mellem Fouriertransformationen og Laplacetransformationen behandles i detaljer i afsnit 3.2.

Laplacetransformation er generelt ikke entydig, men under visse forudsætninger for f er den entydig. Detaljer og bevis for dette er uden for rækkevidden af dette projekt.

Det er lige ud af landevejen at bestemme den Laplacetransformerede af en reel funktion - indsæt i definitionen og integrér. Det går let for simple funktioner - i første omgang eksponentialfunktioner og potensfunktioner.

Sætning 1. $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$ hvor $s > a$.

Bevis. Ud fra definitionen i ligning (1.2)

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

som er uegentlig integrabel når $s > a$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-(s-a)} \left(\lim_{t\to\infty} e^{-(s-a)t} - \lim_{t\to 0+} e^{-(s-a)t} \right) \\ &= \frac{1}{-(s-a)} (0 - 1) = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

$\square$

For potensfunktioner bliver den Laplacetransformerede særlig simpel når eksponenten er heltallig (≥ 0).

Sætning 2. $\mathcal{L}\left\{t^k\right\} = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$ hvor $k \in \mathbb{R}, k > -1$ og $\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ hvor $n \in \mathbb{N}_0$

Bevis. Ud fra definitionen i ligning (1.2) og omskrivning har vi

$$\mathcal{L}\left\{t^k\right\} = \int_0^\infty t^k e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^k}\int_0^\infty (st)^k e^{-st}\, dt$$

som bestemmes ved skift af variabel til $x = st \implies dt = \frac{1}{s}dx$, der ikke ændrer grænserne

$$= \frac{1}{s^k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\,\frac{1}{s}dx = \frac{1}{s^{k+1}}\int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx$$

hvilket ud fra definitionen på gammafunktionen bliver

$$\equiv \frac{1}{s^{k+1}}\Gamma(k+1) \quad \text{hvor } k > -1$$

der viser den første del af sætningen. Når $k \in \mathbb{N}_0$ er $\Gamma(k+1) = k!$ som viser den anden del af sætningen. □

Ud fra sætning 2 vil $\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\left\{t^0\right\} = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\left\{t^1\right\} = \frac{1}{s^2}$ osv.

I det følgende afsnit vil vi udlede nogle vigtige egenskaber for Laplacetransformationen og anvende disse egenskaber til at bestemme de Laplacetransformerede for bl.a. trigonometriske funktioner. En af de vigtigste egenskaber for Laplacetransformationen er lineariteten.

Sætning 3 (Linearitet)**.** Lad $F(s)$ og $G(s)$ være de Laplacetransformerede af hhv. $f(t)$ og $g(t)$, og lad $a, b \in \mathbb{C}$. Så vil

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Bevis. Lineariteten følger af definitionen i ligning (1.2) og lineariteten for bestemte integraler

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty (af(t) + bg(t))\, e^{-st}\, dt \\ &= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}\, dt \\ &= aF(s) + bG(s)\end{aligned}$$

□

Derfor vil transformationen af en sum være summen af transformationer og alle præfaktorer bibeholdes. En anden vigtig egenskab er translationsegenskaben.

Sætning 4 (Translation)**.** Lad $F(s)$ være Laplacetransformationen for $f(t)$ og $a \in \mathbb{R}$, så vil

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

for $Re(s) > a$. Tilsvarende vil

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

for $t > a$. Her kan man i stedet for denne betingelse tvinge funktionen til at være nul for $0 \leq t \leq a$ ved benytte Heaviside funktionen $H(t)$ så

$$\mathcal{L}\left\{H(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

Bevis. Ud fra definitionen i ligning (1.2) har vi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt = F(s-a)
\end{aligned}$$

for $Re(s) > Re(a)$. På tilsvarende vis vil

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\} = \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}\,du$$

når $u = t - a$ og e^{-as} faktoriseres

$$= e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du = e^{-as}F(s)$$

for $t > a$. $\square$

Translationsegenskaben virker derfor begge veje, og den kan bl.a. anvendes til at bestemme Laplacetransformationen for trigonometriske funktioner.

Sætning 5. $\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}$ hvor $Re(s) > |Im(a)|$ og $\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ hvor $Re(s) > |Im(a)|$.

Bevis. Ved Eulers formel og lineariteten har vi

$$\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left\{e^{iat}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-iat}\right\}\right)$$

Ved translationsegenskaben med $Re(s) > Re(ia)$ og $Re(s) > Re(-ia)$, dvs. $Re(s) > |Im(a)|$ får vi

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{s+ia-(s-ia)}{s^2+a^2}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Og for cosinus med tilsvarende argumenter

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{iat}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-iat}\right\}\right)$$

Også her skal $Re(s) > |Im(a)|$ så

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+ia+(s-ia)}{s^2+a^2}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

□

På præcis samme måde kan det vises at $\mathcal{L}\left\{\sinh(at)\right\} = \frac{a}{s^2-a^2}$ og $\mathcal{L}\left\{\cosh(at)\right\} = \frac{s}{s^2-a^2}$ når $Re(s) > |Re(a)|$.

Den vigtigste egenskab for Laplacetransformation (i konteksten af dette projekt) beskriver hvordan den afledede Laplacetransformeres.

Sætning 6 (Differentiering)**.** Lad $F(s)$ være Laplacetransformationen for $f(t)$ og lad f være kontinuert for $t \geq 0$

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Bevis. Ud fra definitionen i ligning (1.2) har vi

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \int_a^b f'(t)e^{-st}\,dt$$

som omskrives ved delvis integration

$$= \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \left(\left[f(t)e^{-st}\right]_a^b - \int_a^b f(t)(-s)e^{-st}\,dt\right)$$
$$= \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \left(f(b)e^{-sb} - f(a)e^{-sa} + s\int_a^b f(t)e^{-st}\,dt\right)$$

hvor grænseværdien af en sum er lig summen af grænseværdierne

$$= \lim_{b\to\infty} f(b)e^{-sb} + s \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \int_a^b f(t)e^{-st}\,dt - \lim_{a\to 0+} f(a)$$

hvor det første led bliver nul i grænsen og det andet led er definitionen på Laplacetransformationen af $f(t)$ (med faktoren s)

$$= sF(s) - \lim_{a\to 0+} f(a) = sF(s) - f(0)$$

idet f er kontinuert. □

Resultatet kan generaliseres til n'te afledede.

Sætning 7 (Differentiering n gange)**.** Lad $F(s)$ være den Laplacetransformerede af $f(t)$ og lad $f \in \mathcal{C}^n$ hvor $n \in \mathbb{N}_0$, så vil

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{j-1} f^{(n-j)}(0)$$

Bevis. Induktion efter k. Basistrinnet $k = 1$ er vist i sætning 6. Det antages at gælde for $k = n - 1$ og vi viser at det gælder for $k = n$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(f^{(n-1)}(t)\right)\right\} \\ &= \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f^{(n-1)}(t)\right) e^{-st}\, dt\end{aligned}$$

som omskrives ved delvis integration

$$\begin{aligned}&= \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \left(\left[f^{(n-1)}(t)e^{-st}\right]_a^b - \int_a^b f^{(n-1)}(t)(-s)e^{-st}\, dt\right) \\ &= \lim_{b\to\infty} f^{(n-1)}(b)e^{-sb} + s \lim_{a\to 0+, b\to\infty} \int_a^b f^{(n-1)}(t)e^{-st}\, dt - \lim_{a\to 0+} f^{(n-1)}(a)e^{-sa}\end{aligned}$$

hvor det første led bliver nul i grænsen og det andet led er definitionen på Laplacetransformationen af $f^{(n-1)}(t)$ (med faktoren s)

$$= s\left(s^{n-1}F(s) - \sum_{j=1}^{n-1} s^{j-1} f^{((n-1)-j)}(0)\right) - f^{(n-1)}(0)$$

ifølge induktionsantagelsen. Leddene samles i summen.

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{j-1} f^{(n-j)}(0)$$

$\square$

Her kan den nysgerrige læser springe til afsnit 1.3 for at se eksempler på hvordan sætning 6 og 7 anvendes til at løse differentialligninger.

Til sammenligning vil versionen af sætning 6 og 7 for den bilaterale Laplacetransformation $\mathcal{B}$ ikke have begyndelsesleddene med så $\mathcal{B}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s)$. Ligesom translationsegenskaben virker begge veje, gør egenskaben for differentiation det også.

Sætning 8. Lad $F(s)$ være den Laplacetransformerede af $f(t)$ og lad $F(s)$ være differentiabel $n \in \mathbb{N}$ gange, så vil

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Bevis. Ifølge Leibniz' integralregel vil

$$\begin{aligned}(-1)^n F^{(n)}(s) &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = (-1)^n \int_0^\infty f(t)\left(\frac{d^n}{ds^n}e^{-st}\right)dt \\ &= (-1)^n \int_0^\infty f(t)\left((-t)^n e^{-st}\right)dt = \mathcal{L}\{t^n f(t)\}\end{aligned}$$

hvilket viser sætningen. □

Hvis tiden skaleres fra t til at hvor $a \in \mathbb{R}$ vil s skaleres med den reciprokke størrelse $\frac{1}{a}$.

Sætning 9 (Tidsskalering)**.** Lad $F(s)$ være den Laplacetransformerede af $f(t)$ og lad $a \in \mathbb{R}$, så vil

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Bevis. Ud fra defintionen og skift af variabel $u = at \implies \frac{1}{a}du = dt$ får man

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\,\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

da grænserne er de samme for u. □

Sætning 10. Lad $F(s)$ og $G(s)$ være de Laplacetransformerede af hhv. $f(t)$ og $g(t)$, og lad $f * g$ være foldningen af f og g, så vil

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Bevis. Ud fra definitionen på foldning og Laplacetransformation fås

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-u)g(u)du\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-u)g(u)\,du\right)dt$$

Integrationsrækkefølgen af t og u skiftes

$$= \int_0^\infty g(u)\int_u^\infty e^{-st}f(t-u)\,dt\,du$$

Grænserne kan udvides når Heaviside funktionen tilføjes

$$= \int_0^\infty g(u)\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}H(t-u)f(t-u)\,dt}_{e^{-su}F(s)}\,du$$

ifølge translationsegenskaben, og $F(s)$ er uahængig af u så

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \int_0^\infty e^{-su} g(u)\, du = F(s)G(s)$$

Det bemærkes at foldning af funktioner er kommutativ. □

Denne egenskab benyttes bl.a. i sandsynlighedsregning hvor man netop udnytter at foldning af tæthedsfunktioner svarer til produktet af de tilsvarende momentfrembringende funktioner.

Sætning 11 (Integrering)**.** Lad $F(s)$ være den Laplacetransformerede af $f(t)$, så vil

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Bevis. $\int_0^t f(u)du$ svarer til f foldet med enhedsfunktionen 1, så dette er et simpelt specialtilfælde af sætning 10

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \mathcal{L}\{1 * f\} = \mathcal{L}\{1\}\,\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s}F(s)$$

□

1.2 Invers Laplacetransformation

Sætning 12 (Invers Laplacetransformation)**.** Lad $F(s)$ være Laplacetransformationen af $f(t)$ og lad singulariteterne for $F(s)$ ligger til venstre for $a \in \mathbb{R}$ så vil den inverse Laplacetransformation eksistere og være givet ved

$$f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{a-ik}^{a+ik} F(s)e^{st}\, ds \tag{1.3}$$

Her anvendes ofte notationen $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ eller blot $\mathcal{L}^{-1}F$ i stedet for $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$, når misforståelser er udelukket.

Bevis. Vi definerer funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved $g(t) = e^{-at}f(t)H(t)$ hvor $a \in \mathbb{R}$. Da $f \in \mathcal{E}$, er g en "pæn" funktion som opfylder Fouriers integralsætning (sætning 3.11) og kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} g(u)\, du\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} g(u)\, du \right) d\omega \end{aligned}$$

og ud fra definitionen af g får man

$$e^{-at}f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u}\underbrace{e^{-au}f(u)H(u)}_{g(u)}\,du\right)d\omega$$

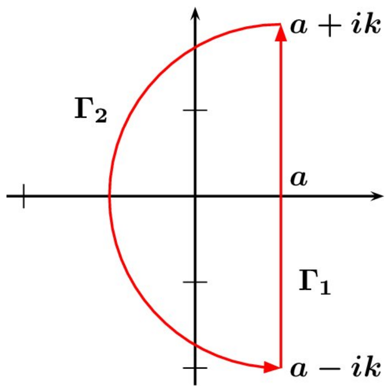
$$f(t)H(t) = \frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-(i\omega+a)u}f(u)H(u)\,du\right)d\omega$$

Nedre grænse rykkes op til nul idet Heavisidefunktionen sørger for at der intet bidrag er for $u < 0$. Hvis man lader $s = a + i\omega \implies ds = id\omega$ vil

$$f(t)H(t) = \frac{e^{at}}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{(s-a)t}\underbrace{\left(\int_{0}^{\infty} e^{-su}f(u)H(u)\,du\right)}_{F(s)}ds$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}F(s)ds \equiv \frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\int_{a-ik}^{a+ik} F(s)e^{st}\,ds$$

når f kun er defineret $t > 0$. $\square$



Figur 1.1: Integration langs Bromwich kurven $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ kan bruges til at beregne den inverse Laplacetransformation, så længe man vælger a så tilpas stor at alle singulariteter ligger inden for Γ når $k \to \infty$.

Hvis $F(s)$ ikke har nogen forgreninger, kan $f(t)$ omskrives til et Bromwich kurveintegral ($I_\Gamma = I_{\Gamma_1} + I_{\Gamma_2}$ se figur 1.1).

$$\begin{aligned} f(t) = \lim_{k\to\infty} I_{\Gamma_1} &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_\Gamma F(s)e^{st}\,ds - \int_{\Gamma_2} F(s)e^{st}\,ds\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma F(s)e^{st}\,ds \end{aligned} \tag{1.4}$$

idet integration langs Γ_2 giver nul i grænsen hvor $k \to \infty$, som vi viser her.

$$I_{\Gamma_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} F(s) e^{st}\, ds$$

omskrives s til $ke^{i\theta}$ vil $ds = ike^{i\theta} d\theta$ så

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(ke^{i\theta}) e^{ke^{i\theta} t}\, ike^{i\theta} d\theta = \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(ke^{i\theta}) e^{ke^{i\theta} t} e^{i\theta}\, d\theta$$

Integralet vurderes opad begrænset ved

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_2}| &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| F(ke^{i\theta}) e^{ke^{i\theta} t} e^{i\theta} \right| d\theta = \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| F(ke^{i\theta}) \right| \left| e^{ke^{i\theta} t} \right| \left| e^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| F(ke^{i\theta}) \right| e^{k \cos(\theta) t}\, d\theta \end{aligned}$$

fordi $\left| e^{i\theta} \right| \leq 1$. Og hvis man forlanger af $F(s)$ at $\left| F(ke^{i\theta}) \right| \leq \frac{M}{k^l}$ med $M, l \in \mathbb{R}, l > 1$ langs Γ_2 vil

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \frac{M}{2\pi k^{l-1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{k \cos(\theta) t}\, d\theta = \frac{M}{2\pi k^{l-1}} 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{k \cos(\theta) t}\, d\theta$$

fordi $\cos(\theta)$ er symmetrisk omkring $\theta = \pi$ og $1 - \frac{2\theta}{\pi} \geq \cos(\theta)$ i intervallet $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, så

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \frac{M}{2\pi k^{l-1}} 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{k\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right) t}\, d\theta = \frac{Me^{kt}}{\pi k^{l-1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{2kt\theta}{\pi}}\, d\theta$$

Lad $u = \frac{2kt}{\pi} \theta \implies du = \frac{2kt}{\pi} d\theta$

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_2}| &\leq \frac{Me^{kt}}{\pi k^{l-1}} \frac{\pi}{2kt} \int_{kt}^{2kt} e^{-u}\, du = \frac{Me^{kt}}{2tk^l} \left(\frac{1}{kt} e^{-kt} - \frac{1}{2kt} e^{-2kt} \right) \\ &= \frac{M}{2t^2 k^{l+1}} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-kt} \right) \to 0 \text{ når } k \to \infty \end{aligned}$$

Den inverse Laplacetransformation kan derfor beregnes ud fra Bromwich kurveintegral i ligning 1.4 så længe $|F(s)| \leq \frac{M}{k^l}$ med $M, l \in \mathbb{R}, l > 1$.

Hvis $F(s)$ har forgreninger bliver man nødt til at lægge kurven uden om forgreningssnittet.

Som vi vil se i afsnit 1.3 er det sværeste trin i metoden til at løse differentialligninger som regel at bestemme den inverse Laplacetransformation. Hvis man ikke står med en funktion $F(s)$ som bare kan slås op i tabellerne (se tabel A.1), men $F(s)$ er en brøk af polynomier kan brøken dekomponeres til en sum af brøker $\frac{T(s)}{N(s)}$ hvor tælleren $T(s)$ har en grad som er mindst én lavere end nævneren $N(s)$. På den måde kan det komplekse integral i ligning 1.4 lettere løses med residueregning. Hvis $F(s)$ ikke er en brøk som kan dekomperes, kan det være at den kan rækkeudvikles til en sum af brøker $\frac{T(s)}{N(s)}$ som ovenfor. Undervejs kan translationsegenskaberne og sætning 10 om foldning også gøre inverteringen lettere - og her er det som altid et spørgsmål om træning at kunne se de smarte genveje.

Eksempel 1.2.1. Den inverse Laplacetransformation for $F(s) = \frac{s}{(s^2+b^2)^2}$ hvor $b \in \mathbb{C}$ bestemmes ved residueregning.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{s}{(s^2+b^2)^2} e^{st}\, ds$$

som har poler af 2. orden i $s = \pm ib$. Γ skal derfor indeslutte $\pm ib$, så a vælges til at være større end $Re(b)$. Ifølge Cauchys residuesætning bliver det

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=ib} \frac{1}{2\pi i} F(s)e^{st} + \operatorname*{Res}_{z=-ib} \frac{1}{2\pi i} F(s)e^{st} \right) \\ &= \operatorname*{Res}_{s=ib} F(s)e^{st} + \operatorname*{Res}_{s=-ib} F(s)e^{st} \end{aligned} \tag{1.5}$$

som regnes ud hver for sig. For $s = ib$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{s=ib} F(s)e^{st} &= \lim_{s\to ib} \frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{(s+ib)^2}\right) = \lim_{s\to ib} \frac{e^{st}(1+st)(s+ib)^2 - 2(s+ib)se^{st}}{(s+ib)^4} \\ &= \lim_{s\to ib} \frac{e^{st}(ib + s^2t + istb - s)}{(s+ib)^3} = \frac{t}{4ib} e^{ibt} \end{aligned}$$

og for $s = -ib$ bliver det tilsvarende

$$\operatorname*{Res}_{s=-ib} F(s)e^{st} = \lim_{s\to -ib} \frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{(s-ib)^2}\right) = -\frac{t}{4ib} e^{-ibt}$$

Samlet bliver det ved indsættelse i ligning 1.5

$$f(t) = \frac{t}{4ib} e^{ibt} - \frac{t}{4ib} e^{-ibt} = \frac{t}{2b}\left(\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right) = \frac{t}{2b} \sin bt$$

1.3 Løsning af differentialligninger

Med Laplacetransformationen bliver det muligt at bestemme eksakte løsninger til endog meget komplicerede differentialligninger - både homogene og inhomogene, ordinære og partielle. I første omgang gives opskriften på ordinære differentialligninger. Metoden er forholdsvis simpel men kan blive mere kompliceret alt efter hvilken differentialligning, som skal løses.

1. Laplacetransformér differentialligningen ved hjælp af sætning 7.
2. Løs ligningen med hensyn til den transformerede funktion, $F(s)$.
3. Foretag invers Laplacetransformation. Hvis $F(s)$ er en rational funktion (hvilket ofte er tilfældet) skal brøken dekomponeres.

Tricket er at differentialligningen transformeres til det algebraiske problem i trin 2 som ofte er langt mere simpelt. Prisen er trin 3 hvor der skal foretages invers Laplacetransformation, men det kan ofte klares med tabelopslag og omskrivninger ud fra nogle af de centrale egenskaber (fx translationsegenskaberne, sætning 4). Det er værd at bemærke at begyndelsesbetingelserne bygges ind i den transformerede funktion allerede når sætning 7 benyttes.

Det er altid rart at starte med et eksempel, hvor man med sikkerhed kender resultatet på forhånd.

Eksempel 1.3.1. Den simple differentialligning $f'(t) = a$ med begyndelsesbetingelsen $f(0) = b$ har som bekendt løsningen $f(t) = at+b$. Lad os benytte metoden ovenfor til at nå frem til resultatet. I trin 1 benyttes sætning 7.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{a\right\}\\ sF(s) - b &= \frac{a}{s}\end{aligned}$$

I trin 2 løses ligningen for $F(s)$

$$F(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s}$$

I trin 3 foretages invers Laplacetransformation ved

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2} + \frac{b}{s}\right\} = a\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + b\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

pga. lineariteten og vi genkender $\frac{1}{s^2}$ som Laplacetransformationen af et lineært led og $\frac{1}{s}$ som Laplacetransformationen af 1 (specialtilfælde af sætning 2).

$$f(t) = at + b$$

Her er et andet eksempel, hvor man også kender resultatet på forhånd.

Eksempel 1.3.2. Den simple differentialligning $f'(t) = af(t)$ med begyndelsesbetingelsen $f(0) = b$ har som bekendt løsningen $f(t) = be^{at}$. Igen benytter vi sætning 7 i trin 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{af(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\\ sF(s) - b &= aF(s)\end{aligned}$$

I trin 2 løses ligningen for $F(s)$

$$F(s) = \frac{b}{s-a}$$

I trin 3 foretages invers Laplacetransformation ved

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s-a}\right\} = b\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = be^{at}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

pga. lineariteten og translationsegenskaben. Og som forrige eksempel er $\frac{1}{s}$ Laplacetransformationen af 1, så

$$f(t) = be^{at}$$

Og et simpelt eksempel på en ordinær 2. ordens homogen differentialligning.

Eksempel 1.3.3. Vi løser differentialligningen $f''(t) + 5f'(t) + 4f(t) = 0$ med begyndelsesbetingelserne $f(0) = a$ og $f'(0) = b$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f''(t) + af'(t) + bf(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{0\right\} \\
\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} + 5\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} + 4\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= 0 \\
(s^2F(s) - as - b) + 5(sF(s) - a) + 4F(s) &= 0
\end{aligned}$$

I trin 2 løses ligningen for $F(s)$ og brøken dekomponeres

$$F(s) = \frac{as + 5a + b}{s^2 + 5s + 4} = \frac{as + 5a + b}{(s+4)(s+1)} = \frac{1}{3}\frac{4a+b}{s+1} - \frac{1}{3}\frac{a+b}{s+4}$$

I trin 3 foretages invers Laplacetransformation ved

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{4a+b}{s+1} - \frac{1}{3}\frac{a+b}{s+4}\right\} \\
f(t) &= \frac{1}{3}(4a+b)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{3}(a+b)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}
\end{aligned}$$

pga. lineariteten og vha. translationsegenskaben får vi

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{3}(4a+b)e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}(a+b)e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \\
f(t) &= \frac{1}{3}\left((4a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-4t}\right)
\end{aligned}$$

Indtil videre er der ikke vundet meget - der er først en rigtig gevinst ved lidt sværere differentialligninger.

Eksempel 1.3.4. Den inhomogene ordinære 3. ordens differentialligning $f'''(t) + a^2 f'(t) = g(t)$ med begyndelsesbetingelsen $f(0) = b$, $f'(0) = c$ og $f''(0) = d$ løses. Differentialligningen Laplacetransformeres og ligningen løses for $F(s)$.

$$
\begin{aligned}
G(s) &= s^3 F(s) - s^2 b - sc - d + a^2 \left(sF(s) - b\right) \\
F(s) &= \frac{G(s) + s^2 b + sc + d + a^2 b}{s(s^2 + a^2)} \\
&= G(s)\frac{1}{s}\frac{1}{s^2 + a^2} + b\frac{s}{s^2 + a^2} + c\frac{1}{s^2 + a^2} + (d + a^2 b)\frac{1}{s}\frac{1}{s^2 + a^2}
\end{aligned}
$$

Det første led er et produkt af tre funktioner $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}\mathcal{L}\left\{1\right\}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a}\sin(at)\right\}$ som bliver til en dobbelfoldning (se sætning 10) ved invers Laplacetransformation

$$
\begin{aligned}
f(t) = &\int_0^t \left\{\frac{1}{a}\int_0^v \sin(au)\,du\right\} g(t-v)\,dv + b\cos(at) \\
&+ \frac{c}{a}\sin(at) + \frac{d + a^2 b}{a}\int_0^t \sin(au)\,du
\end{aligned}
$$

I kapitel 4 beskrives anvendelser af Laplacetransformationen i fysikkontekst til at løse partielle differentialligninger.

Kapitel 2

Fourierrækker

Det var Joseph Fourier (1768-1830), en fransk fysiker, som i 1807 postulerede, at enhver funktion $f(x)$ defineret på et endeligt interval kunne beskrives ved en trigonometrisk række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\left(nkx\right) + B_n \sin\left(nkx\right)\right)$$

Da Fouriertransformaitonen er en naturlig udvidelse af Fourierrækker, har vi valgt at beskrive Fourierrækker først.

2.1 Fourierrækker

Som skrevet ovenfor, er den grundlæggende ide omkring Fourierrækker er, at enhver periodisk funktion kan beskrives som en uendelig række af sinus og cosinus funktioner, hvor den funktion der ønskes beskrevet, vil være entydig. En periodisk funktion er en funktion, hvor grafen for funktionen vil gentage sig efter en periode. Definitionen for en periodisk funktion er som følgende

Definition 3 (Periodisk funktion)**.** En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes periodisk med perioden $p > 0$ (eller p-periodisk) hvis

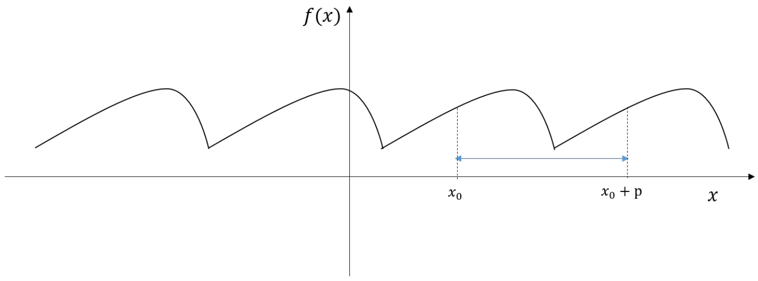
$$f\left(x + p\right) = f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$

Definition 4 (Periodisk udvidelse)**.** En funktion $g : [a, a + p] \to \mathbb{R}$ defineret på et afsluttet interval af længde $p > 0$ og som opfylder, at $g\left(a\right) = g\left(a + p\right)$ kan den entydige periodiske udvidelse $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineres ved

$$\tilde{g}\left(x + np\right) = g(x)$$

for alle $x \in [a, a + p]$ og alle $n \in \mathbb{Z}$



Figur 2.1: En periodisk funktion $f(x)$ med perioden p.

Standardmåden for opskrivning af Fourierrækken for en periodisk funktion i intervallet $-\pi < x < \pi$ er som følgende:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

hvor a_0, a_n, b_n kaldes *Fourierkoefficienterne* og beregnes som

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

For at enhver funktion kan udtrykkes ved sinus og cosinus er det nødvendigt, at henholdsvis sinus og cosinus er en basis i det rum, hvortil funktionen hører. Normalvis gælder det, at der skal lige så mange basisvektorer til som dimensionen på rummet, men eftersom sinus og cosinus er funktioner, så er der brug for en uendelig følge af basisfunktioner for at beskrive rummet.

Dette vises ved følgende sætning.

Sætning 13. Følgen af funktionerne

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots .$$

danner en ortonormal følge i rummet af alle stykkevis kontinuerte funktioner i intervallet $[-\pi, \pi]$ hvor det indre produkt $\langle f, g \rangle$ er defineret ved

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}\, dx \tag{2.1}$$

hvor $\bar{g}$ svarer til den kompleks konjugerede.

Bevis. For kontinuerte komplekse funktioner er det indre produkt defineret ved

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\, dx$$

Under forudsætning af, at funktionerne f og $\bar{g}$ er stykkevis kontinuerte, så er produktet af funktionerne $f\bar{g}$ også stykkevis kontinuert og derfor integrabel.

Nu skal det så godtgøres, at følgen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots$$

er ortonormal. Dette vises ved hjælp af (2.1), hvor

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \sin(nx), \sin(nx)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nx)\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1 \qquad \text{for alle } n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \cos(nx), \cos(nx)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2nx)\ dx = 1 \qquad \text{for alle } n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx)\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \text{for alle } n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(nx) \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \text{for alle } n\end{aligned}$$

$$\langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx)\, dx$$

Anvender, at $\cos A \sin B = \frac{1}{2} \left(\sin\left(A - B\right) + \sin\left(A + B\right) \right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin\left(\left(m+n\right) x \right) + \sin\left(\left(m-n\right) x \right) \right)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos\left(\left(m+n\right) x \right)}{m+n} - \frac{\cos\left(\left(m-n\right) x \right)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \qquad \text{for } m \neq n\end{aligned}$$

Hvis $m = n$, så er $\sin\left(\left(m-n\right) x \right) = \sin\left(0\right) = 0$, mens leddet $\sin\left(\left(m+n\right) x \right)$ forbliver uforandret i forhold til den viste integration ovenfor og derved bliver resultatet også her 0.

$$\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx)\, dx$$

Anvender, at $\cos A \cos B = \frac{1}{2} \left(\cos\left(A + B\right) + \cos\left(A - B\right) \right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\left(\left(m+n\right) x \right) + \cos\left(\left(m-n\right) x \right) \right)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\left(m+n\right) x \right)}{m+n} + \frac{\sin\left(\left(m-n\right) x \right)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \qquad \text{for } m \neq n\end{aligned}$$

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx)\, dx$$

Anvender, at $\sin A \sin B = \frac{1}{2} \left(\cos\left(A - B\right) - \cos\left(A + B\right) \right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\left(\left(m-n\right) x \right) - \cos\left(\left(m+n\right) x \right) \right)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\left(m-n\right) x \right)}{m-n} - \frac{\sin\left(\left(m+n\right) x \right)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

hvor beregningen svarer til den forrige for $\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle$.
Der henvises i øvrigt til Bilag B for alle mellemregninger. $\square$

De ovenstående beregninger har vist, at det indre produkt mellem to forskellige funktioner er 0, og da er funktionerne ortogonale basisfunktioner. Da det yderligere er vist, at det indre produkt af samme funktion er 1 er det klart, at funktionerne i følgen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), ...$$

tillige danner en ortonormal basis for rummet af stykkevise kontinuerte funktioner i intervallet $[-\pi, \pi]$.

Enhver funktion tilhørende vektorrummet kan nu udtrykkes som en linear kombination af elementerne i basis følgen.

Det vil sige, at

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{2.2}$$

i intervallet $-\pi < x < \pi$

2.1.1 Bestemmelse af Fourierkoefficienter

Under antagelse af, at rækken for $f(x)$ er ligeligt konvergent [1] kan koefficienterne til a_0, a_n, b_n bestemmes. Der tages udgangspunkt (2.2), hvor udtrykket omskrives til

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx \right)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Da der i de foregående beregninger allerede er vist, at $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0$ og $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0$ kan udtrykket reduceres til

[1]([7] s.231) Lad E være en ikke tom delmængde af $\mathbb{R}$ og lad f_k være en følge af reelle funktioner defineret på E. ii. Ledvis integration. Antag $E = [a, b]$ og enhver f_k er integrabel på $[a, b]$. Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergerer ligeligt på $[a, b]$ så er f integrabel på $[a, b]$ og $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}}\,dx \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}\Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0\,(\pi)}{\sqrt{2}} - \frac{a_0\,(-\pi)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\pi a_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi a_0\end{aligned}$$

Det vil sige

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Ser igen på (2.3) og multiplicerer på begge sider af lighedstegnet med $\cos(mx)$ for et vilkårligt $m \in \mathbb{N}$. Herved fås

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx =& \frac{a_0}{\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx\right)\end{aligned}$$

Igen fra de forrige beregninger ses, at alle led på højre side af lighedstegnet giver 0 på nær leddet med $a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx$ når $m = n$. Da giver udtrykket

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx &= a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(mx)\,dx \\ &= a_m\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos^2(mx)\,dx = a_m\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2mx)}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= a_m\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = a_m\pi\end{aligned}$$

og vi får

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

Tilsvarende beregning, hvor udtrykket i (2.3) multipliceres med $\sin(mx)$ for et tilfældigt $m \in \mathbb{N}$ ses det, at alle led på højre side af lighedstegnet er 0 på nær leddet med $b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$ når $m = n$. Udtrykket bliver da

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx &= b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(mx)\,dx \\ &= b_m\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin^2(mx)\,dx = b_m\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2mx)}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= b_m\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = b_m\pi\end{aligned}$$

Det vil sige

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx$$

Da alle ovenstående beregninger af Fourierrækkens koefficienter er foretaget ud fra den ortonormale basis, mens der i standard skrivemåden for Fourierrækker kun anvendes ortogonalitet (følgens første element er 1 fremfor $\frac{1}{\sqrt{2}}$) kan Fourierrækken nu defineres som

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{2.4}$$

i intervallet $-\pi < x < \pi$

hvor a_0 samt *Fourierkoefficienterne* a_n og b_n er beskrevet ved

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{2.5}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \tag{2.6}$$

$$\text{og} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \tag{2.7}$$

Integrationsområdet $[-\pi, \pi]$ kan erstattes af et vilkårligt interval af længe 2π. Det almindelige tilfælde gennemgås, da dets anvendelse finder sted i forbindelse med Fouriertransformationen, mens der i dette kapitel overvejende blive anvendt perioden 2π, da det tilstrækkeligt vil illustrere de ønskede egenskaber.

2.2 Komplekse Fourierrækker

En Fourierrække på kompleks form kan skrives som

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.8}$$

Med udgangspunkt i den generelle form for en Fourierrække (2.4)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

kan cosinus leddet og sinus leddet omskrives ved hjælp af Eulers formler til

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n}{2} e^{-inx} + \frac{b_n}{2i} e^{inx} - \frac{b_n}{2i} e^{-inx} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{inx} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{inx} \right)
\end{aligned}
$$

Ved at lade

$$
c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \bar{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, n = 1, 2, 3, \ldots
$$

kan udtrykket for Fourierrækken skrives som

$$
f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}
$$

Beregningen af de komplekse Fourierkoefficienter foretages på samme vis som ved de reelle koefficienter, nemlig under antagelse af ligelig konvergens og derved ledvis integration.

Da $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ og a_n samt b_n fra tidligere er bestemt ved

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \\
\text{fås} \quad c_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos(nx) - i \sin(nx) \right)\, dx
\end{aligned}
$$

Fra Euler haves $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \Leftrightarrow e^{-iy} = \cos(y) - i \sin(y)$ Det vil sige,

$$
c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx
$$

Det er denne komplekse form af Fourierrækkerne som anvendes til Fouriertransformation. Dette er nærmere omtalt i kapitel 3

2.3 Intervaller af vilkårlig længde

Ses der på intervaller med vilkårlig længde $2l$, hvor $-l < x < l$, vil funktionen i Fourierrækkeudviklingen få udseendet

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \tag{2.9}$$

som er periodisk med perioden $2l$.[4]

Hvis $l = \pi$ ses, at det er det igen er det oprindelige udtryk. Når det periodiske interval ændres fra $[-\pi, \pi]$ til $[-l, l]$ ændres Fourierkoefficienterne naturligt også.

Under antagelse af, at rækken (2.9) er ligelig konvergent i intervallet $[-l, l]$ kan Fourierkoeffiecienterne a_0, a_n, b_n beregnes ud fra følgende omskrivning af (2.9)

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{l} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx + \int_{-l}^{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx \right)$$

Ved at gennemføre samme beregninger som ved bestemmelse af Fourierkoefficienterne for funktioner periodisk på intervallet $[-\pi, \pi]$ i afsnit (2.1.1) fås

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{l} \frac{a_0}{2}\,dx = a_0 l \quad \text{hvor} \quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

For bestemmelse af koefficienterne til cosinusleddene multipliceres igennem med $\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ for et vilkårligt $m \in \mathbb{N}$ og der fås

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\,dx = a_m \int_{-l}^{l} f(x)\cos^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\,dx = a_m l$$

Det vil sige

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\,dx$$

Tilsvarende for bestemmelse af koefficienterne til sinusleddene multipliceres igennem med $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ for et tilfældigt $m \in \mathbb{N}$ og der fås

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\,dx = b_m \int_{-l}^{l} f(x)\sin^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\,dx = b_m l$$

Det vil sige

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\,dx$$

2.4 Konvergens af Fourierrækker

For at en funktion $f(x)$ kan Fourierrække udvikles er der nogle krav til funktionen. Hvis disse tilstrækkelige betingelser er opfyldt, så konvergerer Fourierrækken til $f(x)$ til funktionen ved alle punkter, hvor funktionen er kontinuert.

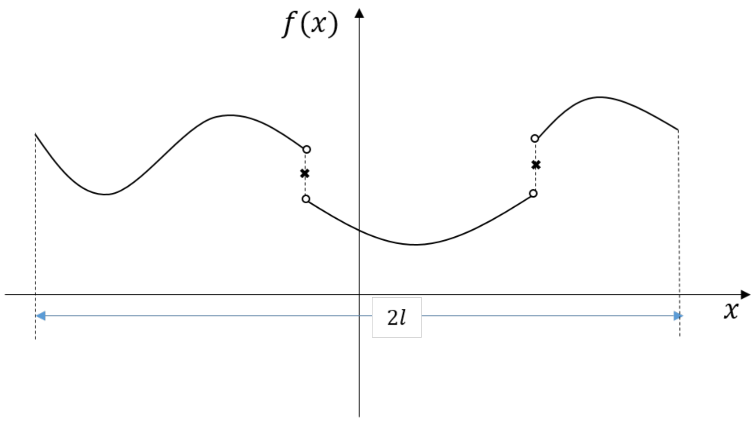
Sætning 14 (Dirichlet)**.** [2] Hvis f er defineret for alle x i perioden $2l$ på det lukkede interval $[-l, l]$, og hvis

- $f(x)$ er absolut integrabel i intervallet.
- $f(x)$ har et endeligt antal maksimum værdier og minimum værdier i intervallet.
- $f(x)$ har et endeligt antal diskontinuiteter i intervallet.

så konvergerer Fourierrækkeudviklingen af f til $f(x)$ for alle x, hvor $f(x)$ er kontinuert. I punkter, hvor der er diskontinuitet svarer $f(x)$ til gennemsnittet af henholdsvis grænseværdi fra højre og grænseværdi fra venstre, dvs

$$f(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} \tag{2.10}$$

og mod denne funktionsværdi konvergerer Fourierrækkeudviklingen i diskontinuerte punkter.



Figur 2.2: En funktion $f(x)$ som er periodisk i intervallet $[-l, l]$ med endeligt antal maksimum værdier og minimum værdier samt endeligt antal diskontinuiteter.

I forbindelse med projektets afgrænsning føres der ikke bevis for (2.10). De efterfølgende sætninger med bevis vil dog vise, at Fourierrækkeudviklingen af f konvergerer til $f(x)$, hvor $f(x)$ er kontinuert.

Sætning 15 (Bessel's ulighed)**.** Antag f er stykkevis kontinuert og integrabel i intervallet $[-\pi, \pi]$. Lad a_n og b_n være Fourierkoefficienter for f. Da gælder

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \tag{2.11}$$

Bevis. Med udgangspunkt i en afsnitssum for Fourierrækken, givet ved

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + a_n \sin(nx))$$

ses på middel kvadratafvigelsen på intervallet $[-\pi, \pi]$ for tilnærmelsen af $S_N(x)$ på f som

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \; dx$$

Udregnes dette udtryk fås

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \; dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \; dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2 \; dx \tag{2.12}$$

Ud fra definitionen på Fourierkoefficienterne (2.5), (2.6) og (2.7) kan leddet

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) \, dx \qquad \text{skrives som}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{a_0}{2} \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \frac{a_0}{2} \, dx$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) a_k \cos(kx) \; dx = |a_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) a_k \cos(kx) \; dx$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) b_k \sin(kx) \; dx = |b_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) b_k \sin(kx) \; dx$$

Det bemærkes for de ovenstående tre beregninger, at der er udeladt led som grundet ortogonalitet forsvinder.
Ved summation over de tre ovenstående beregninger for $k = 1, 2, ..., N$ fås

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2 \; dx$$

Indsættes dette resultat i (2.12) fås

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2 \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right)
\end{aligned}
$$

som giver $\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx$

Lader nu $N \to \infty$ og resultatet

$$
\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx \tag{2.13}
$$

viser, at summen på venstre side af ulighedstegnet konvergerer, da den er begrænset af f. □

Sætning 16 (Riemann-Lebesgue Lemma)**.** Hvis f er begrænset og integrabel på intervallet $[-\pi, \pi]$ så gælder

$$
\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0
$$

Bevis. Følger direkte af Bessel's ulighed da rækken

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \quad \text{er konvergent, er } \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0
$$

□

2.5 Lige og ulige funktioner

En vigtig egenskab ved lige og ulige funktioner er beskrevet ved følgende sætning.

Sætning 17. (Egenskaber ved lige og ulige funktioner) Hvis f er en lige funktion, så er

$$
\int_{-l}^{l} f(x) \, dx = 2 \int_{0}^{l} f(x) \, dx
$$

Hvis f er en ulige funktion, så er

$$
\int_{-l}^{l} f(x) \, dx = 0
$$

En væsentlig egenskab ved lige funktioner er, at Fourierrækkeudviklingen udelukkende indeholder cosinus-led (som jo er lige funktioner). Omvendt vil Fourierrækkeudviklingen for en ulige funktion udelukkende indeholde sinus-led (som jo er ulige funktioner).

Eksempel 2.5.1. Vis at en lige funktion ikke kan indeholde sinus-led i Fourierrækkeudviklingen. Det vises ud fra 2.7, hvor hele sinus-leddet går ud, hvis $b_n = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx = 0 \end{aligned}$$

fordi integranden $f(x)\sin(nx)$ er en ulige funktion da den er produktet af en lige funktion $f(x)$ og en ulige funktion $\sin(x)$.

2.6 Halv-interval udvidelse

En af forudsætningerne for, at en funktion $f(x)$ kan udvikles til en Fourierrække er, at den er periodisk. Så hvis funktionen ikke er periodisk kan der ikke opstilles en Fourierrække som konvergerer mod $f(x)$ for alle værdier af x. Ved halv-interval udvidelsen ser man kun på funktionen i det halve interval fx. $[0, \pi]$. Herefter foretages udvidelsen af funktionen til at være periodisk på hele intervallet $[-\pi, \pi]$. Det halve interval kan selvfølgelig også vælges som $[-\pi, 0]$.[3]
Hvis $f(x)$ er en lige funktion vil Fourierrækkeudviklingen for funktionen reduceres til

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

da leddet med $b_n \sin(nx)$ forsvinder.
Yderligere i henhold til sætning 17 beregnes Fourierkoefficienterne som

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

Omvendt hvis $f(x)$ er en ulige funktion vil Fourierrækkeudviklingen for funktionen blive

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

da både konstantleddet a_0 og $a_n \cos(nx)$ forsvinder.

Derfor kan Fourierkoefficienterne for halv-interval udvidelsen for en ulige funktion beregnes som

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,$$

Eksempel 2.6.1. For funktionen $f(x) = x$, defineret på intervallet $[0, \pi]$ beregnes

a) den lige halv-interval udvikling svarende til $f(x) = |x|$.

b) den ulige halv-interval udvikling.

a) For den lige rækkeudvikling gælder, at

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi \qquad \text{og} \qquad f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0$$

Beregningen af Fourierkoefficienterne giver

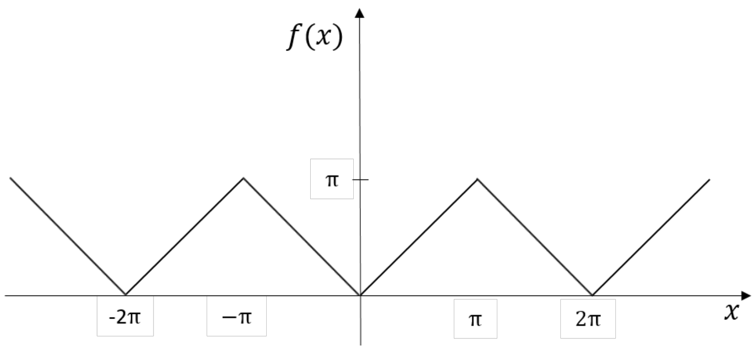
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{\pi\sin(n\pi)}{n}\right) - \left(\frac{\cos(n0)}{n^2} + \frac{0\sin(0)}{n}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(nx)}{n^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Da $\cos(nx) = (-1)^n$ fås, at $a_n = 0$ for lige n og $a_n = \dfrac{-4}{\pi n^2}$ for ulige n

Dette giver samlet Fourierrækken

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + ...\right)$$



Figur 2.3: Fourierrækkeudviklingen for $f(x) = |x|$.

b) For den ulige rækkeudvikling gælder, at

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi \qquad \text{og} \qquad -f(-x) = x, \quad -\pi < x < 0$$

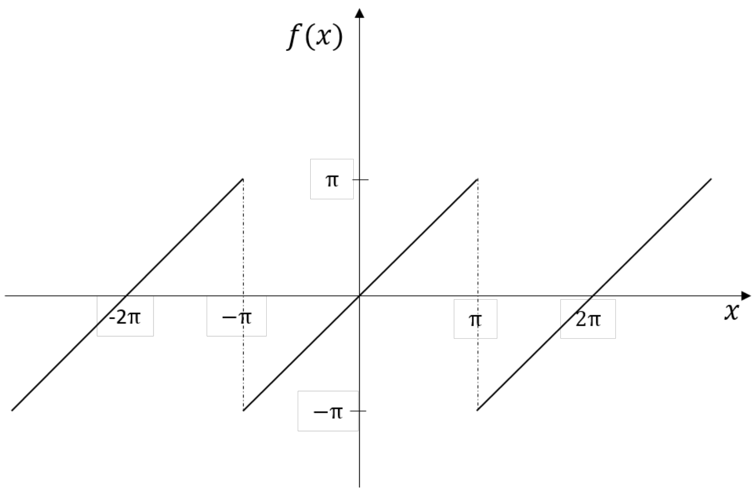
Beregningen af Fourierkoefficienterne for denne rækkeudvikling giver

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\sin(n\pi)}{n^2} - \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) - \left(\frac{\sin(n0)}{n^2} + \frac{0 \cos(n0)}{n} \right) \right] \\ &= \frac{-2}{\pi} \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} = \frac{-2}{n} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$ fås $b_n = \dfrac{-2}{n} (-1)^n$

Dette giver samlet Fourierrækken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) = 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \ldots \right)$$



Figur 2.4: Fourierrækkeudviklingen for $f(x) = x$.

Det ses af ovenstående eksempel, at Fourierkoefficienten for den lige funktion aftager som $\frac{1}{n^2}$, hvor Fourierkoefficienten for den ulige funktion aftager som $\frac{1}{n}$. Det betyder, at hastigheden hvormed Fourierrækken konvergerer er hurtigere for den lige funktion end for den ulige funktion. Dette skyldes diskontinutetspunkterne i den ulige funktion, hvor værdien for funktionen erstattes af gennemsnittet af grænseværdien fra venstre og grænseværdien fra højre, jvnf. sætning (14).

2.7 Differentiation og integration af Fourierrækker

Sætning 18 (Integration)**.** En Fourierrækkeudvikling af en periodisk funktion $f(x)$ som opfylder Dirichlet's betingelser kan integreres ledvist og den integrerede række konvergerer til integralet af funktionen $f(x)$. Det betyder, at hvis $f(x)$ opfylder Dirichlet's betingelser i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ og har Fourierrækkeudviklingen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

så gælder for $-\pi \leq x_1 < x \leq \pi$,

$$\int_{x_1}^{x} f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x} \frac{1}{2} a_0\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\; dx$$

$$= \frac{1}{2} a_0 (x - x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b_n}{n} (\cos(nx_1) - \cos(nx)) + \frac{a_n}{n} (\sin(nx) - \sin(nx_1)) \right]$$

Grundet leddet $\frac{1}{2} a_0 x$ på højre side er udtrykket ikke en Fourierrækkeudvikling, men resultatet kan omskrives således at det bliver en Fourierrækkeudvikling af funktionen

$$g(x) = \int_{x_1}^{x} f(x)\, dx - \frac{1}{2} a_0 x \tag{2.14}$$

Det bemærkes, at Fourierkoefficienterne i den nye Fourierrække er $\frac{b_n}{n}$ og $\frac{a_n}{n}$, hvilket betyder, at den integrerede række konvergerer hurtigere end den oprindelige serie for $f(x)$.

Sætning 19 (Differentiation)**.** Hvis $f(x)$ er en periodisk funktion der opfylder Dirichlet's krav, så kan funktionens afledede $f'(x)$, findes ved ledvis differentiation af Fourierrækken for $f(x)$, hvis og kun hvis funktionen $f(x)$ er kontinuert overalt i intervallet og funktionens afledede $f'(x)$ har en Fourierrækkeudvikling, dvs også opfylder Dirichlet's krav.

Så, hvis $f(x)$ er kontinuert overalt og har Fourierrækkeudviklingen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

så gælder, forudsat $f'(x)$ opfylder betingelserne, at $f'(x)$'s Fourierrækkeudvikling er

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)) \tag{2.15}$$

Det bemærkes, at Fourierkoefficienterne i den afledede udvikling er nb_n og na_n, så i modsætning til den integrerede række vil den differentierede række konvergere langsommere end den oprindelige række udvikling for $f(x)$.

De sidste sætninger i dette kapitel har stor betydning i forbindelse med anvendelse af Fourierrækkeudvikling til signalbehandling. De er derfor medtaget i dette projekt som et praktisk aspekt til emnet.

Sætning 20 (Multiplikationssætning)**.** Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er to periodiske funktioner med samme periode $2l$, så gælder

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\bar{d_n} \tag{2.16}$$

hvor c_n og d_n er koefficienterne i den komplekse Fourierrækkeudvikling af $f(x)$ og $g(x)$.

Bevis. Lad $f(x)$ og $g(x)$ have komplekse Fourierrækker givet ved

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}} \quad \text{med} \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{l}}\,dx$$

og

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{\frac{in\pi x}{l}} \quad \text{med} \quad d_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} g(x)e^{\frac{-in\pi x}{l}}\,dx$$

Så er

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}\right) g(x)\,dx$$

der ved ledvis integration bliver

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} g(x)e^{\frac{in\pi x}{l}}\,dx\right]$$

Inde i den kantede parentes står nu udtrykket for $d_{-n} = \bar{d_n}$. Det vil sige, at

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\bar{d_n}$$

□

Tilsvarende beregning kan foretages for Fourierrækkeudviklingen for $f(x)$ og $g(x)$ med reelle koefficienter til resultatet

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{4}a_{0(f)}a_{0(g)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n(f)}a_{n(g)} + b_{n(f)}b_{n(g)}\right)$$

Beviset herfor udelades.

Sætning 21 (Parseval's sætning for Fourierrækker)**.** Sætningen beskriver relationen mellem Fourierkoefficienterne og funktionen de beskriver.
Hvis $f(x)$ er en periodisk funktion med perioden 2π, så er

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\ dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{2.17}$$

hvor c_n er koefficienterne i den komplekse Fourier række udvikling af $f(x)$.

Bevis. Resultatet følger af multiplikationssætningen, hvor $g(x) = f(x)$ og $l = \pi$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\ dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\bar{c_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

□

Tilsvarende kan Parseval's sætning skrives for Fourierrækken for $f(x)$ med reelle koefficienter som

$$\frac{1}{2l}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\ dx = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Kapitel 3

Fouriertransformationer

I forrige kapitel blev Fourierrækker gennemgået og det blev vist, hvordan enhver periodisk funktion kan beskrives ved hjælp af sinus og cosinus.

I dette kapitel vil selve Fouriertransformationerne blive gennemgået. Der er flere måder at gribe dette emne an på. Fourierrækkerne blev defineret ud fra teorien omkring lineære funktionsrum, hvor den specifikke funktion var periodisk og stykkevis kontinuert i et lukket interval.

Samme metode med lineære funktionsrum kan anvendes ved beregning af Fouriertransformationen, hvor perioden udvides til at være uendelig. Det er dog ikke denne metode, der vil blive anvendt i nærværende projekt da en anden metode, nemlig definitionen af Fouriertransformationen ud fra integraltransformation er mere relevant. Denne relevans opstår i forhold til projektets formål, som både indeholder Laplace- og Fouriertransformationer. Ved valget af den sidste metode er der således mere sammenhæng mellem de to typer transformationer.

Integraltransformationer er, som navnet antyder, en transformation der ud fra givne funktioner, danner nye funktioner, som er afhængige af andre variable end den oprindelige funktion var og som fremstår som integraler der skal evalueres.

Det skal lige noteres, at i det forrige kapitel blev variablen benævnt x. I dette kapitel vil variablen blive benævnt t da Fouriertransformationerne ofte repræsenterer tidsafhænge funktioner.

Fouriertransformationer som også er opkaldt efter Joseph Fourier transformerer en funktion $f(t)$ i fx. tidsdomænet (s) til en funktion $F(\omega)$ i frekvensfomænet (s^{-1}).

Definition 5 (Fouriertransformation)**.** Lad f være en funktion defineret for alle $t \in \mathbb{R}$ med værdier i $\mathbb{C}$. Den fouriertransformerede $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er da defineret ved

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{3.1}$$

og den inverse Fouriertransformation

$$f(t) = \mathcal{F}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \tag{3.2}$$

3.1 Fra Fourierrækker til Fouriertransformation

Med udgangspunkt i Fourierrækken for en funktion som er periodisk med perioden $2l$ gælder følgende udtryk jævnfør 2.9

$$f_l(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\right] \tag{3.3}$$

Lader nu $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, hvilket reducerer udtrykket til

$$f_l(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\omega_n t\right) + b_n \sin\left(\omega_n t\right)\right]$$

idet Fourierkoefficienterne under substitution med R som "dummy variabel" bliver følgende

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_l\left(R\right)\, dR \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_l\left(R\right)\cos\left(\omega_n R\right)\, dR \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_l\left(R\right)\sin\left(\omega_n R\right)\, dR \end{aligned}$$

indsættes i udtrykket for $f_l(t)$ (3.3) ovenfor.

$$\begin{aligned} f_l(t) =& \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f_l\left(R\right)\, dR \\ &+ \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\omega_n t\right)\int_{-l}^{l} f_l\left(R\right)\cos\left(\omega_n R\right)\, dR + \sin\left(\omega_n t\right)\int_{-l}^{l} f_l\left(R\right)\sin\left(\omega_n R\right)\, dR\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Da ω er en diskret variabel kan $\Delta\omega$ beregnes som

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\,\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l}$$

Det vil sige

$$\frac{1}{l} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$$

som indsættes i (3.4) ovenfor og der fås

$$f_l(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-l}^{l} f_l\,(R)\ dR$$
$$+\frac{\Delta\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\omega_n t\right)\int_{-l}^{l} f_l\,(R)\cos\left(\omega_n R\right)\ dR + \sin\left(\omega_n t\right)\int_{-l}^{l} f_l\,(R)\sin\left(\omega_n R\right)\ dR\right]$$

Udtrykket omskrives, hvor $\Delta\omega$ flyttes ind i summen

$$= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-l}^{l} f_l\,(R)\ dR$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\omega_n t\right)\Delta\omega\int_{-l}^{l} f_l\,(R)\cos\left(\omega_n R\right)\ dR + \sin\left(\omega_n t\right)\Delta\omega\int_{-l}^{l} f_l\,(R)\sin\left(\omega_n R\right)\ dR\right]$$

Ifølge sætningen omkring Riemann summer [1] fås, at når $l \to \infty$ så går $\Delta\omega \to 0$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \to \int_0^{\infty} \quad \text{samt} \quad f_l(t) \to f(t)$$

Leddet for a_0 forsvinder da $\Delta\omega \to 0$ og udtrykket bliver derfor

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos(\omega t)\int_{-\infty}^{\infty} f(R)\cos(\omega R)\,dR + \sin(\omega t)\int_{-\infty}^{\infty} f(R)\sin(\omega R)\,dR\right]d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(R)\Big(\cos\left(\omega R\right)\cos(\omega t) + \sin(\omega R)\sin(\omega t)\Big)\,dR\right]d\omega \end{aligned} \tag{3.5}$$

hvor leddene nu er samlet under et fælles integraltegn og $f(R)$ faktoriseres.

Ved anvendelse af den trigonometriske identitet
$\cos\left(A\right)\cos\left(B\right) + \sin\left(A\right)\sin\left(B\right) = \cos\left(A - B\right)$ hvor $A = \omega R$ og $B = \omega t$ fås

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f\,(R)\cos\left(\omega R - \omega t\right)\ dR\right]d\omega$$

og da $\cos\left(-A\right) = \cos\left(A\right)$, kan der uden videre byttes rundt på de variable, så der fås

[1] ([7] s. 141) Lad $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$ og antag $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Så er f Riemann integrabel hvis og kun hvis

$$I\,(f) = \lim_{||p||\to 0}\sum_{j=1}^{\infty} f\,(t_j)\,\Delta x_j \quad \text{eksisterer og i så fald er} \quad I\,(f) = \int_a^b f\,(x)\ dx$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f\left(R\right) \cos\left(\omega t - \omega R\right) \, dR \right] d\omega \tag{3.6}$$

Her skal det lige noteres, at hvis $f(t)$ er en lige funktion, så reduceres (3.5) til

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} f\left(R\right) \cos\left(\omega t\right) \cos\left(\omega R\right) \, dR \right] d\omega \tag{3.7}$$

da leddet med sinus integrerer til 0. Dette integral kaldes *Fourier Cosinus Integral*

Tilsvarende, hvis $f(t)$ er en ulige funktion, så reduceres udtrykket til

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} f\left(R\right) \sin\left(\omega t\right) \sin\left(\omega R\right) \, dR \right] d\omega \tag{3.8}$$

hvor leddet med cosinus integrerer til 0. Dette integral kaldes passende *Fourier Sinus Integral*

Da $\cos(\omega)$ som nævnt er en lige funktion, gælder jævnfør sætning (17) at

$$\int_{0}^{\infty} \cos(\omega) \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega) \, d\omega$$

og udtrykket for $f(t)$ i (3.6) kan omskrives til

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f\left(R\right) \cos\left(\omega t - \omega R\right) \, dR \right] d\omega \tag{3.9}$$

Da $\sin(\omega)$ tillige er en ulige funktion, gælder også i henhold til sætning (17) at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega) \, d\omega = 0$$

og sinus har således ingen indflydelse på integralet og derfor kan leddet "$i \sin\left(\omega t - \omega R\right)$" tilføjes (3.9), så udtrykket bliver

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f\left(R\right) \left(\cos\left(\omega t - \omega R\right) + i \sin\left(\omega t - \omega R\right)\right) \, dR \right] d\omega$$

og efter en yderligere omskrivning i henhold til Euler's formler, hvor $\cos\left(\omega t - \omega R\right) + i \sin\left(\omega t - \omega R\right) = e^{i\omega(t-R)}$ fås

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f\left(R\right) e^{i\omega(t-R)} \, dR \right] d\omega \tag{3.10}$$

som kaldes det *komplekse Fourier integral.*

Opdeles udtryk 3.10 i en positiv og en negativ eksponent, fås

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f\,(R)\, e^{i\omega t} e^{-i\omega R}\, dR \right] d\omega$$

hvor $e^{i\omega t}$ flyttes udenfor det indre integraltegn, da $e^{i\omega t}$ ikke er en funktion af R. Det giver

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f\,(R)\, e^{-i\omega R}\, dR \right] e^{i\omega t}\, d\omega$$

Erstatter nu "dummy-variablen" R med t igen og får udtrykket

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt}_{F(\omega)}\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{3.11}$$

som betegnes **Fourier Integralet** hvor det indre integrale er Fouriertransformationen betegnet med $F(\omega)$ og det ydre integrale er den inverse Fouriertransformation. Placeringen af faktoren $\frac{1}{2\pi}$ kan vælges frit og dette giver tre Fourier transformationspar.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{og} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{og} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{og} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

Fourier Cosinus Integralet (3.7) og Fourier Sinus Integralet (3.8) giver også anledning til transformation og de er defineret ved følgende:

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\ dt \quad \text{og} \quad f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t)\ d\omega$$
$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t)\ dt \quad \text{og} \quad f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin(\omega t)\ d\omega$$

En række betingelser som er tilstrækkelige for eksistensen af Fourier Integralet er tilsvarende Dirichlet's betingelser for Fourierrækker (14) hvor $l \to \infty$.

Sætning 22. (Dirichlet's betingelser for Fourier Integralet) Hvis funktionen $f(t)$ er således, at
a. den er absolut integrabel, det vil sige

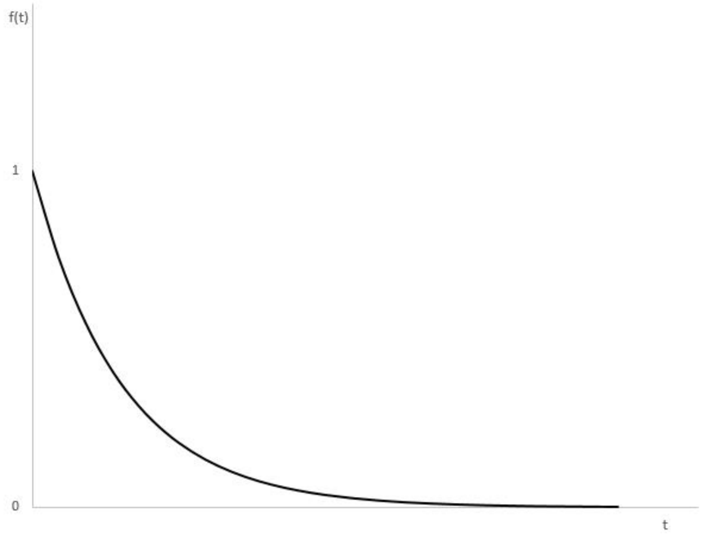
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

altså er integralet endeligt.
b. den har højst et endeligt antal maksimum og minimum samt et endeligt antal diskontinuiteter i ethvert endeligt interval

så vil integralet i udtrykket i 3.11 konvergere mod $f(t)$ i alle punkter, hvor $f(t)$ er kontinuert og til gennemsnittet af de to ensidede grænseværdier af $f(t)$ hvor $f(t)$ er diskontinuert.

Her skal det noteres, at betingelse a. i sætningen antyder, at arealet under grafen skal være endeligt. Dette er muligt, hvis $f(t)$ aftager hurtigt over tid. Betingelsen giver nogle begrænsninger for $f(t)$ eftersom funktioner af formen $f(t) = k$, $f(t) = e^{at}$, $f(t) = e^{-at}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ osv, defineret på intervallet $-\infty < t < \infty$ ikke opfylder kravene. Dirichlet's betingelser kan opfyldes for $f(t) = e^{-at}$ ved at tilføje Heaviside funktionen så $f(t) = H(t)e^{-at}$, $a > 0$. Dette illustreres ved følgende eksempel.

Eksempel 3.1.1. Fouriertransformationen bestemmes for den ensidede eksponentialfunktion $f(t) = H(t)e^{-at}$, $a > 0$, hvor $H(t)$ er Heaviside funktionen.



Figur 3.1: Den "ensidede" eksponentialfunktion $f(t) = H(t)e^{-at}$, $a > 0$

Grafen for $f(t)$ viser, at $f(t) \to 0$ når $t \to \infty$ og derfor er arealet under grafen begrænset. Nu eksisterer Fouriertransformationen og kan beregnes som

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt = \left[-\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_0^{\infty} \\
\text{så} \quad F(\omega) &= \frac{1}{a+i\omega} \quad \text{i overensstemmende med bilag A.2}
\end{aligned}
$$

Et andet eksempel som illusterer Fouriertransformation.

Eksempel 3.1.2. Find Fouriertransformationen for funktionen

$$
f\,(t) = \begin{cases} \cos(3t) & \text{for } -\pi < t < \pi \\ -\frac{1}{2} & \text{hvis } t = \pm\pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
$$

Det ses at funktionen $f(t) = \cos(3t)$ er en lige funktion og derfor er det faktisk nok at anvende Fourier Cosinus Integralet til at beregne funktionens Fouriertransformation. Da

$$
F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\ dt
$$

bliver udtrykket

$$
\begin{aligned}
F_c(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t)\cos(\omega t)\ dt = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(3-\omega)\,t}{3-\omega} + \frac{\sin(3+\omega)\,t}{3+\omega}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\sin(3t)\cos(\omega t) - 2\cos(3t)\sin(\omega t)}{9-\omega^2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2\omega\sin(\omega\pi) + 2\omega\sin(\omega\pi)}{9-\omega^2} = \frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{9-\omega^2}
\end{aligned}
$$

Der henvises til Bilag B for udførlig beregning

3.2 Egenskaber ved Fouriertransformationer

Her præsenteres nogle egenskaber for Fouriertransformationen og udvalgte egenskaber bevises.
Lad f og g være differentiable funktioner givet på den reelle akse med $f(t) = 0$ for store $|t|$-værdier.

Sætning 23 (Linearitet)**.** Fouriertransformationen og den inverse Fouriertransformation er lineær. Det vil sige, for enhver konstant c, haves

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f(t)+g(t)\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) + \mathcal{F}\left[g(t)\right](\omega) \\
\mathcal{F}\left[cf(t)\right](\omega) &= c\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega)
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)+G(\omega)\right](t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right](t)+\mathcal{F}^{-1}\left[G(\omega)\right](t)$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left[cF(\omega)\right](t)=c\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right](t)$$

Bevis.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(t)+g(t)\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)+g(t)\right]e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \mathcal{F}\left[f(t)\right]+\mathcal{F}\left[g(t)\right]\end{aligned}$$

□

Beviset er tilsvarende for $\mathcal{F}\left[cf(t)\right]=c\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ samt for den inverse Fouriertransformation.

Sætning 24. Fouriertransformationen af et produkt af F med t^n er givet ved

$$\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right](\omega)=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\left\{F(\omega)\right\}$$

Bevis. For Fouriertransformationen af et produkt af f og t^n haves

$$\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Under anvendelse af omskrivningen

$$t^n f(t)e^{-i\omega t}=(i)^n\frac{d^n}{d\omega^n}\left\{f(t)e^{-i\omega t}\right\}$$

fås

$$\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right](\omega)=(i)^n\frac{d^n}{d\omega^n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\right\}dt=(i)^n\frac{d^n}{d\omega^n}\left\{F(\omega)\right\}$$

□

Der henvises til bilag B for omskrivningen af $t^n f(t)e^{-i\omega t}$.

Sætning 25. Den inverse Fouriertransformation af et produkt af f med ω^n er givet ved

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\omega^n F(\omega)\right](t)=(-i)^n\frac{d^n}{dt^n}\left\{f(t)\right\}$$

Sætning 26 (Differentiering n gange)**.** Fouriertransformationen af den n'te afledede er givet ved

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega)=(i\omega)^n F(\omega)$$

Bevis. For Fouriertransformationen for den n'te afledede haves

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Ved anvendelse af delvis integration, hvor

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\,dv = uv|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v\,du$$

hvor $dv = f^{(n)}(t)$ og derved $v = f^{(n-1)}(t)$ samt $u = e^{-i\omega t}$ og
$du = (-i\omega)\,e^{-i\omega t}\,dt$ fås følgende

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f^{(n)}(t) = \left[e^{-i\omega t} f^{(n-1)}(t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(t)\,(-i\omega)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

Første led på højre side i udtrykket forsvinder da $f(t) = 0$ for store $|t|$-værdier. Tilbage står

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-i\omega t} = (i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Ved fortsættelse af denne beregningsprocedure yderligere $n-1$ gange fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-i\omega t} = (i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(-i\omega)^{n-1}\,e^{-i\omega t}\,dt$$

□

Sætning 27. Den inverse Fouriertransformationen af den n'te afledede er givet ved

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F^{(n)}(\omega)\right](t) = (-it)^n\,f(t)$$

Sætning 28 (Translation i tidsdomænet)**.** Fouriertransformationen for en vilkårlig translation i tidsdomænet er givet ved

$$\mathcal{F}\left[f\left(t-l\right)\right](\omega) = e^{-i\omega l}F(\omega)$$

Bevis. Vilkårlig translation i tidsdomænet

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$\mathcal{F}\left[f\left(t-l\right)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t-l\right)e^{-i\omega t}\,dt$$

substituerer $v = t - l$, $dv = dt$ og $t = v + l$ så

$$\mathcal{F}\left[f(t-l)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(v\right)e^{-i\omega(v+l)}\,dv \quad = e^{-i\omega l}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(v\right)e^{-i\omega v}\,dv = e^{-i\omega l}F(\omega)$$

□

Sætning 29 (Translation i frekvensdomænet)**.** Den inverse Fouriertransformation for en vilkårlig translation i frekvensdomænet er givet ved

$$\mathcal{F}\left[e^{itl}f(t)\right](\omega) = F(\omega - l)$$

Sætning 30 (Skalering)**.** Fouriertransformationen for en skaleret funktion er givet ved

$$\mathcal{F}[f(bt)](\omega) = \frac{1}{b}F\left(\frac{\omega}{b}\right)$$

Sætning 31. Hvis $f(t) = 0$ for $t < 0$ så er Fouriertransformationen af $f(t)$ givet ved

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{L}[f](i\omega),$$

hvor $\mathcal{L}[f]$ er Laplacetransformationen af f, se ligning 1.2.

Bevis. Ved omskrivning af den funktion som skal Fouriertransformeres til formen $e^{-at}f(t)$, vil Fouriertransformationen få følgende udtryk

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}f(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Med en yderligere omskrivning af udtrykket til

$$F_a(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(a+i\omega)t}\,dt$$

så vil $F_a(\omega)$ eksistere, såfremt $f(t)$ er af eksponentiel orden. Nedre grænse i integralet er ændret til 0 set i lyset af, at t som oftest repræsenterer tiden. Ved at definere $F_a(\omega) = 0$ for $t < 0$ kan den inverse Fouriertransformation skrives som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega)e^{(a+i\omega)t}\,d\omega$$

Det komplekse tal $a + i\omega$ svarer til s i Laplacetransformationen. Da a er konstant, kan $a + i\omega = s$ skrives som

$$ds = i\,d\omega$$

For $\omega = -\infty$ er $s = a - i\infty$ og for $\omega = \infty$ er $s = a + i\infty$. I det der nu skrives at $F_a(\omega) = f(s)$ fås

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s)\,e^{st}\,ds$$

hvilket svarer til udtrykket for den inverse Laplacetransformation. □

En mere direkte sammenhæng mellem Laplacetransformation og Fouriertransformation kan beskrives ved følgende.
Laplacetransformationen givet ved

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

hvor $s = k + i\omega$

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t)e^{-(a+i\omega)t}\,dt$$

som kan omskrives til

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty \left[f(t)e^{-at}\right]e^{-i\omega t}\,dt$$

Det ses, at indholdet i integraltegnet nu ligner den almindelige Fouriertransformation, hvor

$$\int_0^\infty \left[f(t)e^{-at}\right]e^{-i\omega t}\,dt = \mathcal{F}\left[f(t)e^{-at}\right]$$

og hvor $f(t) = 0$ for $t < 0$. Endeligt fås

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{F}\left[f(t)e^{-at}\right]$$

Dette kan illustreres ved følgende.

Eksempel 3.2.1. Lad $f(t) = t^n, n = 1, 2, \ldots$ for $t > 0$. Lad $f(t) = 0$ for $t < 0$.

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{-at}\right] = \mathcal{F}\left[t^n e^{-at}\right]$$

Ved opslag i A.2 ses, at

$$\mathcal{F}\left[t^n e^{-at}\right] = \frac{n!}{(i\omega + a)^{n+1}}$$

og for $s = a + i\omega$ fås

$$\mathcal{F}\left[t^n e^{-at}\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Ved opslag i A.1 ses, at resultatet svarer til $\mathcal{L}[t^n]$ Der henvises til bilag B for udførlig beregning.

Ligesom der er en sammenhæng mellem Fourierkoefficienterne og den funktion de beskriver, så er der også en sammenhæng mellem transformationerne. Denne sammenhæng er beskrevet ved Parsevals sætning for Fouriertransformationer.

Sætning 32. (Parseval's sætning for Fouriertransformationer) Følgende sammenhæng er givet

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \tag{3.12}$$

Bevis. Hvis $f(t)$ har en Fouriertransformation, så er den givet ved (3.2), som indsættes i 3.12 til

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$\text{så} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

Ændrer rækkefølgen på udtrykket i henhold til Fubini's sætning [7]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

Fra den oprindelige definition på Fouriertransformationen (3.1) ses at

$$\overline{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, dt \quad \text{da} \quad \overline{e^{i\omega t}} = e^{-i\omega t}$$

Det vil sige

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{F(\omega)} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

som er identisk med

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

□

Som det er tilfældet med Laplacetransformationer, så kan residueregning også anvendes i forbindelse med Fouriertransformationer til at løse ikke helt trivielle integraler. Dette illustreres ved følgende eksempel.

Eksempel 3.2.2.

$$\text{Beregn Fouriertransformationen for} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{2} x^2}{\sqrt{\pi} \left(1 + x^2\right)^2} \tag{3.13}$$

Opskriver først Fouriertransformationen for funktionen i henhold til definition 3.1 og får

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{\pi}\left(1+x^2\right)^2} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \left(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x)\right)\, dx$$

Da funktionen (3.13) i sig selv er en lige funktion, reduceres udtrykket til

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(\omega x)}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx$$

og det er således nok kun at beregne Fouriertransformationen for $\omega \geq 0$. Opstiller kurveintegralet for funktionen i henhold til Cauchy's Residue sætning, som giver

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(\omega x)}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} Re\left(\int_{\Gamma_R} \frac{z^2 e^{i\omega z}}{\left(1+z^2\right)^2}\, dz \right) \tag{3.14}$$

hvor γ_R er halvcirklen med R stor nok til at indeholde polerne for udtykket i (3.14). Evalueringen af kurveintegralet langs den lukkede sti Γ_R ved hjælp af residue sætningen, hvor R vokser ubegrænset giver

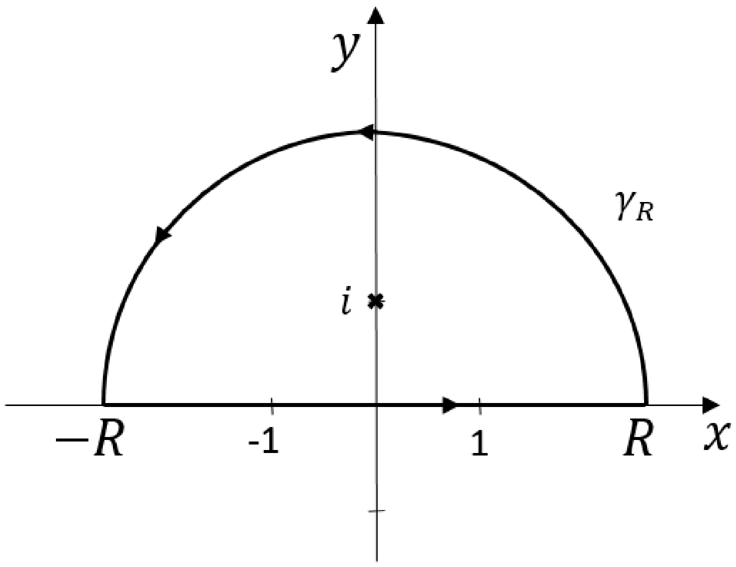
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right] = 2\pi i \sum Res\left[f, z_j\right] \tag{3.15}$$

$$\text{Da} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0$$

reduceres (3.15) til udtrykket for Cauchy principal value (hovedværdi) for uegentlige integraler som

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum Res\left[f, z_j\right] \tag{3.16}$$

Beregning af polerne giver, at funktionen $F(z) = \frac{x^2 e^{i\omega z}}{\left(1+z^2\right)^2}$ har en pol af 2. orden for $z_0 = \pm i$, men da kun polen $z_0 = i$ er placeret i øvre halvplan er det kun denne pol der ligger indenfor den lukkede sti og kurveintegralet med pol kan således illustreres i følgende figur.



Figur 3.2: Kurveintegral og pol i den øvre halvplan

Beregning af residum for en pol af 2. orden [2] giver

$$Res\left[\frac{z^2e^{i\omega z}}{(1+z^2)^2},i\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[z-i\right]^2\frac{z^2e^{i\omega z}}{(1+z)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^2e^{i\omega z}}{(z+i)^2}$$

Differentiation udføres og grænseværdi indsættes

$$=\frac{\left(e^{i\omega z}2z+i\omega z^2e^{i\omega z}\right)(z+i)^2-2\left(z+i\right)z^2e^{i\omega z}}{(z+i)^4}|_{z=i}=\frac{ie^{-\omega}\left(\omega-1\right)}{4}$$

Kan nu, ved anvendelse af Cauchy's residue sætning beregne kurveintegralet, som

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\,dx=2\pi i\frac{ie^{-\omega}\left(\omega-1\right)}{4}=\frac{\pi}{2}e^{-\omega}\left(1-\omega\right)$$

og slutteligt finde Fouriertransformationen for funktionen ved indsættelse i (3.14) som

$$F(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2}e^{-\omega}\left(1-\omega\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\omega}\left(1-\omega\right)$$

[2]([1] sætning 31.1) Hvis $f\left(z\right)$ har en pol af m'te orden i z_0 er $Res\left[f,z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f\left(z\right)\right]$

Det ovenstående resultat er kun gældende for $\omega \geq 0$. I det tilfælde, hvor $\omega < 0$ fås ved tilsvarende beregning

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; dx = \frac{\pi}{2} e^{-\omega} (\omega - 1)$$

Det vil sige, at for alle værdier af ω er Fouriertransformationen givet ved

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-|\omega|} (1 - |\omega|)$$

3.3 Foldning af Fouriertransformationer

For Fouriertransformationer er der to foldningsresultater, nemlig et i tidsdomænet og et i frekvensdomænet, svarende til den almindelige transformation og den inverse transformation.

Sætning 33. (Foldning i tidsdomænet) [3]
For funktionerne $f(t)$ og $g(t)$ som er defineret på intervallet $]-\infty, \infty[$, hvor f og g begge er stykkevis kontinuerte og den ene funktion er absolut integrabel og den anden funktion er begrænset, er foldningen $f * g = h$ defineret ved

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t - u)\; du = f(t) * g(t) \tag{3.17}$$

Bevis. Antag Fouriertransformationerne for de to funktioner er givet ved

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{og} \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Så er

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\; du \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t-u)\; dt \right] du$$

Med variabelskift $z \to t - u$, $dz = dt$ og $u \to u$ bliver

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, e^{-i\omega(z+u)}\, dz \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, du \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, e^{-i\omega z}\, dz \\ \text{så} \quad H(\omega) &= F(\omega) G(\omega) \end{aligned}$$

Det vil altså sige, $\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega)$ viser at en foldning i tidsdomænet transformeres til et produkt i frekvensdomænet. □

Ved at tage den inverse Fourier transformation på begge sider af $\mathcal{F}\left[f(t) * g(t)\right] = F(\omega)G(\omega)$ fås

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \tag{3.18}$$

Tilsvarende foldning kan laves i frekvensdomænet.
Hvis

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega) \quad \text{med} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, dt$$

og

$$\mathcal{F}\left[g(t)\right] = G(\omega) \quad \text{med} \quad g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}\, dt$$

så er den inverse transformation af foldningen

$$F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, G(\omega - y)\, dy$$

hvor

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega) * G(\omega)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, G(\omega - y)\, dy\right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega - y)\, d\omega\right] dy
\end{aligned}$$

Ændring af variable $z \to \omega - y$, $dz = d\omega$ og $\omega \to \omega$ giver

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega) * G(\omega)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z+y)t} G(z)\, dz\right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{iyt}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} G(z)\, e^{izt}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\pi f(t) 2\pi g(t) = 2\pi f(t)g(t)
\end{aligned}$$

Det vil sige, at $\quad \mathcal{F}\left[f(t)g(t)\right] = \frac{1}{2\pi}F(\omega)G(\omega)$

og at multiplikation i tidsdomænet svarer til foldning i frekvensdomænet med en faktor $\frac{1}{2\pi}$.
Det skal slutteligt nævnes at foldningen er kommutativ ligesom ved Laplacetransformationen.

3.4 Den historiske udvikling af integraltransformationer

Integraltransformationer, som både Laplace- og Fouriertransformationer hører til, har fundet anvendelse i næsten 200 år. Oprindeligt var det Leonhard Euler (1707-1783) som i 1744 var begyndt at studere integraler og Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) som i 1747 brugte superposition af sinus funktioner til at beskrive svingningerne i en violinstreng, der initierede arbejdet med integraltransformationer. P.S. Laplace (1749-1827), som var student hos d'Alembert fortsatte arbejdet med integraler og anvendte dem i forbindelse med løsning af ligninger.

I 1785 forsøgte Laplace sig med at bruge integralet som en transformation i stedet for at bruge integralet som løsning. Det er i den forbindelse, at starten på integraltransformation kan ledes tilbage til Laplace, som et led i hans arbejde med sandsynlighedsteori. I Laplace's bog "La Theorie Analytique des Probabilities" som blev udgivet i 1812 indeholder nogle af de første og mest elementære resultater ved anvendelse af Laplacetransformation, som jo i dag er en af de mest anvendte integraltransformationer, ikke mindst takket være den britiske ingeniør Oliver Heaviside (1850-1925), som anvendte Laplacetransformation til at løse ordinære differentialligninger i elektriske kredsløb.

Joseph Fourier (1768-1830) kom med sin afhandling "La Theorie Analytique de la Chaleur" i 1822, som var en afhandling omkring varmeledning. Denne afhandling præsentereder opdagelsen omkring Fourierrækker og Fourier Integraler og indeholdt eksempler på anvendelse. Det var i denne afhandling han postulerede, at enhver funktion på et endeligt interval kan udtrykkes som en trigonometrisk række.

Først meget senere, da Henri Lebesgue (1875-1941) i 1903 udgav sin afhandling "Sur les séries trigonometriques", hvor han præsenterede, at den n'te Fourierkoefficient går mod 0 for rækkeudviklingen af en begrænset funktion, blev Fourieranalysen generelt accepteret.

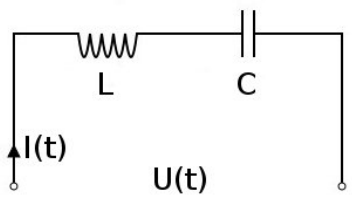
Kapitel 4

Anvendelser

Der findes utallige anvendelser af Laplace og Fouriertransformationer. Især inden for de naturvidenskabelige fag, som i forvejen er storforbrugere af differentialligninger, er der mange anvendelser. Her demonstrerer vi fysikanvendelser inden for elektriske kredsløb og mekaniske bølger.

Ud over, at Fouriertransformationer er brugt i forbindelse med signalbehandling, hvor transformationen mellem to domæner er relevant, kan Fouriertransformationer også anvendes i forbindelse med løsning af partielle differentialligninger på samme måde som Laplacetransformationer.
Det er ikke projektets intention at gå dybere ind i emnet omkring løsning af partielle differentialligninger, men nøjes med et par eksempler til at illustrere anvendelsen af Fouriertransformation i forbindelse med løsningen.

4.1 Elektriske kredsløb



Figur 4.1: Et elektrisk kredløb med en spændingskilde $U(t)$ og to komponenter (en spole L og en kapacitor C) som giver anledning til strømstyrken $I(t)$.

Eksempel 4.1.1 (LC kredsløb)**.** Kapacitoren har kapacitansen $C := \frac{q}{U}$ som angiver forholdet mellem den mængde ladning q på kapacitorpladerne og spændingsforskellen U mellem pladerne. Spolen har induktansen $L := \frac{U}{\ddot{q}}$ som angiver forholdet mellem spændingsforskellen over spolen og ændringen af strømstyrken $\dot{I} = \ddot{q} \equiv \frac{d^2q}{dt^2}$ gennem spolen. Ifølge Kirchhoffs anden lov er summen spændingsforskellene i kredsløbet nul, så summen af spændingskilden $U(t)$ og spændingsfaldene over komponenterne er nul.

$$U(t) - L\ddot{q}(t) - \frac{1}{C}q(t) = 0 \tag{4.1}$$

Hvis $U(t)$ er konstant U_0 svarende til at kredsløbet er koblet til et batteri, vil differentialligningen for $q(t)$ altså være

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) - \frac{U_0}{L} = \ddot{q}(t) + aq(t) + b = 0$$

når $a := \frac{1}{LC}$ og $b := -\frac{U}{L}$. Laplacetransformation bliver derfor med begyndelsesbetingelserne $q(0) = 0$ og $\dot{q}(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\ddot{q}(t) + aq(t) + b\right\} &= \mathcal{L}\left\{0\right\} \\
\mathcal{L}\left\{\ddot{q}(t)\right\} + a\mathcal{L}\left\{q(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{1\right\} &= 0 \\
s^2Q(s) + aQ(s) + \frac{b}{s} &= 0
\end{aligned}$$

som løses for $Q(s)$ og brøken dekomponeres

$$\begin{aligned}
Q(s) &= -\frac{b}{s(s^2+a)} = -b\frac{1}{s(s+i\sqrt{a})(s-i\sqrt{a})} \\
&= -\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+i\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}$$

som ved invers Laplacetransformation bliver

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{Q(s)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+i\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\sqrt{a}}\right)\right\} \\
q(t) &= -\frac{b}{a}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+i\sqrt{a}}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-i\sqrt{a}}\right\}\right) \\
q(t) &= -\frac{b}{a}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{a}t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}e^{i\sqrt{a}t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right)
\end{aligned}$$

pga. lineariteten og translationsegenskaben. $\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}$ så

$$\begin{aligned}
q(t) &= -\frac{b}{a}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{a}t} - \frac{1}{2}e^{i\sqrt{a}t}\right) = -\frac{b}{a}\left(1 - \cos(\sqrt{a}t)\right) \\
&= U_0C\left(1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)
\end{aligned}$$

og hvis man er interesseret i strømstyrken

$$I(t) = \dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\left\{U_0C\left(1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)\right\} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Man ser at amplituden for den oscillerende strømstyrke er proportional med U_0 og at $2\pi\sqrt{LC}$ spiller en rolle som karakteristisk svingningstid for det elektriske kredsløb.

4.2 Mekaniske bølger - halvuendelig snor

Eksempel 4.2.1 (Transversalbølger på snor)**.** Transversalbølger (vinkelret på udbredelsesretningen) sendes afsted på en snor fastgjort i den ene ende. Størrelsen af udsvinget u af bølgen afhænger af stedet på snoren x og tidspunktet t og opfylder bølgeligningen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) \quad x,t \geq 0$$

hvor $u(x,0) = 0$, dvs. snoren er i ro til start og $u(0,t) = f(t)$, dvs. profilen af bølgen er $f(t)$ som sendes afsted fra den side, hvor snoren er bundet op. Bølgeligningen Laplacetransformeres med hensyn til tiden t

$$\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\} = \mathcal{L}_t\left\{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\} = \frac{1}{v^2}\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\}$$

pga. lineariteten. $\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}_t\left\{u(x,t)\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$ da transformation er med hensyn til t så

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s) &= \frac{1}{v^2}\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\}\\ &= \frac{1}{v^2}\left(s^2U(x,s) - s\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) - u(x,0)\right)\end{aligned}$$

ifølge sætning 7. Snoren er i ro til start: $u(x,0) = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$ så

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s) = \frac{s^2}{v^2}U(x,s)$$

Den harmoniske ligning har løsningen

$$U(x,s) = ae^{\sqrt{\frac{s^2}{v^2}}x} + be^{-\sqrt{\frac{s^2}{v^2}}x} = be^{-\frac{s}{v}x}$$

idet a må være nul. Man må forlange at udsvinget $u(x,t)$ ikke divergerer for $x \to \infty$. b bestemmes ud fra randbetingelsen $u(0,t) = f(t) \implies U(0,s) = F(s) = be^{-\frac{s}{v}0} = b$ så

$$U(x,s) = F(s)e^{-\frac{x}{v}s}$$

Ved invers Laplacetransformation og translationsegenskaben bliver

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t^{-1}\left\{U(x,s)\right\} &= \mathcal{L}_t^{-1}\left\{F(s)e^{-\frac{x}{v}s}\right\}\\ u(x,t) &= f\left(t - \frac{x}{v}\right)H\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)\end{aligned}$$

når $t \geq \frac{x}{v}$. $v > 0$ svarer derfor til bølgens udbredelsesfart ud ad snoren. Det bemærkes at enhver funktion af formen $f(t - \frac{x}{v})$ altså opfylder bølgeligningen hvor $f(t)$ er "bølgeprofilen". Fx. vil en harmonisk svingning kunne sendes afsted med $f(t) = A\sin(\omega t) \implies u(x,t) = A\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ hvor A er amplituden og ω er den cykliske frekvens.

4.3 Mekaniske bølger - uendelig snor

Eksempel 4.3.1. Løs bølgeligningen $u(x,t)$ for bølger på en snor med længden x, hvor $-\infty < x < \infty$ for $t > 0$. Udbredelsesfarten for bølgen er i dette eksempel sat til 1.

1. $u_{tt} = u_{xx}$
2. $u(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$
3. $u_t = 0, \quad -\infty < x < \infty$
4. $u(x,y) \to 0, u_x(x,t) \to 0 \quad \text{for} \quad |x| \to \infty$

Fra egenskaberne for Fouriertransformationer anvendes sætning 26 omkring differentiation.
De partielt afledte af $u(x,t)$ med hensyn til x bliver således

$$\mathcal{F}[u_x(x,t)] = i\omega\mathcal{F}[u(x,t)] = i\omega U(\omega,t)$$
$$\mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = -\omega^2\mathcal{F}[u(x,t)] = -\omega^2 U(\omega,t)$$

De partielt afledte af $u(x,t)$ med hensyn til t følger af Leibniz' integralregel og bliver

$$\mathcal{F}[u_t(x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u_x(x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t)$$
$$\mathcal{F}[u_{tt}(x,t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}[u_x(x,t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\omega,t)$$

Transformerer $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ til $\mathcal{F}[u_{tt}] = \mathcal{F}[u_{xx}]$ efter ovenstående, lader $\hat{u} = \mathcal{F}[u]$ og får

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} = -\omega^2\hat{u}$$

som kan omskrives til

$$\hat{u}'' + \omega^2\hat{u} = 0$$

Da ovenstående ligning udelukkende indeholder afledte med hensyn til t er dette en almindelig 2. ordens differentialligning. Ved at se på karakterligning findes, at

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$$

Det vil sige, at når karakterligningen har to kompleks konjugerede rødder uden realdel er den generelle løsning til

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t) \tag{4.2}$$

Beregner konstanterne $A(\omega)$ og $B(\omega)$ ud fra begyndelsesbetingelserne.

Da $u(x,0) = g(x) \Leftrightarrow \hat{u}(\omega,0) = \hat{g}(\omega)$ og indsat i (4.2) får vi
$\hat{u}(\omega,0) = \hat{g}(\omega) = A(\omega)\cos(\omega 0) + B(\omega)\sin(\omega 0)$
Da $\cos(\omega 0) = 1$ og $\sin(\omega 0) = 0$ fås $\hat{g}(\omega) = A(\omega)$

For $u_t(x,0) \Leftrightarrow \hat{u}_t(\omega,0) = 0$
Finder først $\hat{u}_t(\omega,t)$ ud fra (4.2) som bliver
$\hat{u}_t(\omega,t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega t) + \omega B(\omega)\cos(\omega t)$
Så for $\hat{u}_t(\omega,0) = 0$ bliver $\hat{u}_t(\omega,t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega 0) + \omega B(\omega)\cos(\omega 0)$
Igen da $\cos(\omega 0) = 1$ og $\sin(\omega 0) = 0$ fås $\hat{u}(\omega, t=0) = B(\omega) \Leftrightarrow 0 = B(\omega)$
Det samlede udtryk bliver således

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)\cos(\omega t)$$

Transformerer nu $\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)\cos(\omega t)$ for at finde $u(x,t)$.

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(\omega)\cos(\omega t)]$$

Ved anvendelse af Eulers formler for omskrivning af

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

fås

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{g}(\omega)\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{g}(\omega)e^{i\omega t}\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{g}(\omega)e^{-i\omega t}\right]\right) \end{aligned}$$

Fra sætning 28 omkring translation, hvor $\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)e^{-il\omega}\right] = f(x-l)$ fås

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)]$$

som er løsningen på differentialligningen

4.4 Varmeledning - uendelig lang stang

Find temperaturen $u(x,t)$ af en isoleret stang med længden x, hvor $-\infty < x < \infty$ for $t > 0$.

1. $u_t = c^2 u_{xx}$
2. $u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$
3. $u(x,y) \to 0, u_x(x,t) \to 0 \quad \text{for} \quad |x| \to \infty$

Det er varmeledningsligningen som her skal løses.

Igen er det sætning 26 for Fouriertransformationerne som anvendes til at finde de partielt afledte. De partielt afledte af $u(x,t)$ med hensyn til x bliver således

$$\mathcal{F}[u_x(x,t)] = i\omega\mathcal{F}[u(x,t)] = c^2 i\omega U(\omega,t)$$
$$\mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = -\omega^2\mathcal{F}[u(x,t)] = -c^2\omega^2 U(\omega,t)$$

De partielt afledte af $u(x,t)$ med hensyn til t følger af Leibniz's integralregel og bliver

$$\mathcal{F}[u_t(x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u_x(x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t)$$

Transformerer $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ til $\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}]$ efter ovenstående og lader $\hat{u} = \mathcal{F}[u]$ til at få

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} = -c^2\omega^2\hat{u}$$

Da ovenstående ligning udelukkende indeholder afledte med hensyn til t er dette en almindelig 1. ordens differentialligning. Ved separation af variable fås

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{u}}{dt} = -c^2\omega^2\hat{u} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\hat{u}}d\hat{u} = -c^2\omega^2 dt \quad \Leftrightarrow \\
\int\frac{1}{\hat{u}}d\hat{u} = \int -c^2\omega^2 dt \quad &\Leftrightarrow \quad \int\frac{1}{\hat{u}}d\hat{u} = -c^2\omega^2\int dt \quad \Leftrightarrow \\
\log|\hat{u}| = -c^2\omega^2 t \quad &\Leftrightarrow \quad e^{|\log\hat{u}|} = e^{-c^2\omega^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u} = \pm e^{-c^2\omega^2 t} = ke^{-c^2\omega^2 t}
\end{aligned}$$

Det vil sige, at den generelle løsning er

$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega)e^{-c^2\omega^2 t} \tag{4.3}$$

Beregner konstanten $C(\omega)$ ud fra begyndelsesbetingelsen.

Da $u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ og indsat i (4.3) fås $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) = C(\omega)e^{-c^2\omega^2 0} \Leftrightarrow \hat{f}(\omega) = C(\omega)$

Det vil sige

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}$$

Transformerer nu $\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}$ for at finde $u(x,t)$

$$u(x,t) = \int_{\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega$$

Det ses nu, at udtrykket for $u\left(x,t\right)$ ligner (3.18), hvor

$$G\left(\omega\right)=\hat{g}\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-c^{2}\omega^{2}t}$$

Da definitionen af foldningen (3.17) med ændrede variable er

$$\left(f*g\right)\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(p\right)g\left(x-p\right)\,dp \tag{4.4}$$

skal den iverse Fourier transformation af $\hat{g}\left(\omega\right)$ bestemmes.

Ud fra tabelopslag i Bilag A.2 ses, at $\mathcal{F}\left[e^{-ax^{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-\omega^{2}}{4a}}$.
Da $c^{2}\omega^{2}t=\frac{-\omega^{2}}{4a} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{a}=4c^{2}t \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{4c^{2}t}$ fås

$$\mathcal{F}\left[e^{\frac{-x^{2}}{4c^{2}t}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{4c^{2}t}}}e^{-c^{2}\omega^{2}t}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2c^{2}t}}}e^{-c^{2}\omega^{2}t}=\sqrt{2c^{2}t}e^{-c^{2}\omega^{2}t}$$

Da $\hat{g}\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-c^{2}\omega^{2}t}\Leftrightarrow e^{-c^{2}\omega^{2}t}=2\pi\hat{g}\left(\omega\right)$.
Det vil sige, $\mathcal{F}\left[e^{\frac{-x^{2}}{4c^{2}t}}\right]=2\pi\sqrt{2c^{2}t}\hat{g}\left(\omega\right)$. og den inverse Fourier transformerede $g\left(x\right)$ fra $\hat{g}\left(\omega\right)$ bliver

$$g\left(x\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2c^{2}t}}e^{\frac{-x^{2}}{4c^{2}t}}$$

Substituerer $x\rightarrow x-p$ og indsætter det i formlen for foldningen (4.4) og opnår

$$u\left(x,t\right)=\left(f*g\right)\left(x\right)=\frac{1}{2\pi c\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(p\right)e^{-\frac{(x-p)^{2}}{4c^{2}t}}\,dp$$

Så temperaturen fordeles som en Gaussfunktion, der bliver spredt ud som tiden går.

Afrunding

Vi har udledt og præsenteret grundlæggende egenskaber for Laplace- og Fouriertransformationen med fokus på anvendelsen inden for løsningen af både homogene og inhomogene, ordinære og partielle differentialligninger. Her transformeres differentialligningen til en algebraisk ligning, som ofte lettere kan løses. For at få løsningen til den oprindelige differentialligning foretages invers transformation. Ved anvendelser af denne metode inden for modelleringen af fysiske systemer, dikterer randbetingelserne i det undersøgte system hvilken transformation, man skal bruge. I tilfældet med bølgen på snoren er randbetingelsen at snoren er fastgjort i den ene ende, så her anvendes Laplacetransformationen. I tilfældet med den uendelig lange snor, gjorde randbetingelsen at det var nødvendigt med Fouriertransformationen. Men det kan ikke altid lade sig gøre at holde sig til én dimension i anvendelser inden for fx fysik - en bølge eller varme kan udbrede sig i 2 eller 3 dimensioner. For funktioner af flere variable $f(\mathbf{x})$ kan transformationerne generaliseres til

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(\mathbf{x})\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d^n\mathbf{x} \\ \text{og} \quad \mathcal{F}\{f(\mathbf{x})\} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d^n\mathbf{x}\end{aligned}$$

hvor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Anvendelse i undervisning

I forhold til anvendelse af emnet i gymnasieundervisningen, kunne flere muligheder tænkes. Det er oplagt at sætte en dygtig elev til at skrive et kombineret fysik-matematik studieretningsprojekt (SRP). Her kunne fysikdelen være inden for elektriske kredsløb og SRP'en kunne fx tilrettelægges som følgende:

- Betragt LC-kredsløbet med vekselspændingskilde. Opstil vha. Kirschoffs love differentialligningen for ladningen som funktion af tiden.
- Løs differentialligningen vha. Laplacetransformationen
- Foretag forsøget med en spole og en capacitor hvor strømstyrken måles som funktion af tiden
- Diskutér de fysiske antagelser i denne model på baggrund af forskellen mellem model og eksperiment

En anden mulighed er at inddrage emnet som supplerende stof i klasseundervisningen på et matematik A hold. Kernestoffet er ifølge bekendtgørelsen

> Lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger, kvalitativ analyse af givne differentialligninger samt opstilling af simple differentialligninger.[6]

Her kunne man i umiddelbar forlængelse af kernestoffet (uden at indføre komplekse tal og kun ved tabelopslag) anvende metoden til at løse simple differentialligninger som anvist i eksempel 1.3.1 og eksempel 1.3.2.

Bilag A

Udvalgte Laplace- og Fouriertransformationer

I tabellerne nedenfor præsenteres samlet funktioner samt deres Laplace- og Fouriertransformerede. Linearkombinationer af de præsenterede funktioner håndteres let da transformationerne er lineære.

Funktion	Laplacetransformation	Betingelser
1	$\frac{1}{s}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$
t^k	$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$	$k \in \mathbb{R}, k > -1$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re(s) > \|Im(a)\|$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re(s) > \|Im(a)\|$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$Re(s) > \|Re(a)\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$Re(s) > \|Re(a)\|$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$Re(s) > a$
$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{j-1} f^{(n-j)}(0)$	$n \in \mathbb{N}_0$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$n \in \mathbb{N}_0$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a \in \mathbb{R}$
$f * g$	$F(s)G(s)$	
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$	

Tabel A.1: Nogle udvalgte Laplacetransformationer

Funktion	Fourier transformation	Betingelser
1	$\frac{2\sin(c\omega)}{\omega}$	$-c < t < c$
e^{at}	$\frac{1}{i\omega - a}$	$t > 0$, Re $a < 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(i\omega - a)^{n+1}}$	$t > 0$, $n = 1, 2, ...,$ Re $a < 0$
e^{-at^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$	$a > 0$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$	
$t^n f(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$	
$f(t - l)$	$e^{-i\omega l} F(\omega)$	
$e^{ilt} f(t)$	$F(\omega - l)$	
$f(bt)$	$\frac{1}{b} F(\frac{\omega}{b})$	

Tabel A.2: Nogle udvalgte Fourier transformationer

Bilag B

Detaljerede beregninger

Kapitel 2
Uddybende beregninger vedrørende ortogonalitet af basisfunktionerne i sætning 13

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,dx = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \sin(nx), \sin(nx)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(nx)\;dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\;dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)\;dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nx)\;dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left((\pi - 0) - (-\pi - 0)\right) \\ &= \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \qquad\qquad \text{for alle } n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left((\pi + 0) - (-\pi + 0)\right) \\
&= \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \qquad \text{for alle } n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx) \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \text{for alle } n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(nx) \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \left[-\cos(n\pi) - (-\cos(-n\pi))\right]
\end{aligned}
$$

da $\cos(-\pi) = \cos(\pi)$ fås

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \left[-\cos(n\pi) - (-\cos(n\pi))\right] \\
&= \frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \left[-\cos(n\pi) + \cos(n\pi)\right] = 0 \qquad \text{for alle } n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx \\
\text{Anvender, at} \cos A \sin B &= \frac{1}{2}\left(\sin(A-B) + \sin(A+B)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{\cos((m+n)-\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)-\pi)}{m-n} \right) \right]
\end{aligned}
$$

da $\cos(-\pi) = \cos(\pi)$ fås

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{\cos\left((m+n)\pi\right)}{m+n} - \frac{\cos\left((m-n)\pi\right)}{m-n} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\cos\left((m+n)\pi\right)}{m+n} + \frac{\cos\left((m-n)\pi\right)}{m-n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} 0 = 0 \qquad\qquad \text{for } m \neq n
\end{aligned}
$$

Hvis $m = n$, så er $\sin\left((m-n)x\right) = \sin(0) = 0$, mens leddet $\sin\left((m+n)x\right)$ forbliver uforandret i forhold til den viste integration ovenfor og derved bliver resultatet også her 0.

$$
\begin{aligned}
\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx \\
\text{Anvender, at} \cos A \cos B &= \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin\left((m+n)x\right)}{m+n} + \frac{\sin\left((m-n)x\right)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\sin\left((m+n)\pi\right)}{m+n} + \frac{\sin\left((m-n)\pi\right)}{m-n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sin\left((m+n)-\pi\right)}{m+n} + \frac{\sin\left((m-n)-\pi\right)}{m-n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} 0 = 0 \qquad\qquad \text{for } m \neq n
\end{aligned}
$$

$$\langle \sin(mx), \sin(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\ dx$$

Anvender, at $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x))\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

hvor beregningen svarer til den forrige for $\langle \cos(mx), \cos(nx)\rangle$.

Kapitel 3.2 Bevis sætning 24.
Omskrivningen af

$$t^n f(t)\, e^{-i\omega t}$$

Ser på $f(t)\, e^{-i\omega t}$.

$$\text{Da}\frac{d^n\left(f(t)\, e^{-i\omega t}\right)}{d\omega^n} = f(t)\frac{d^n\left(e^{-i\omega t}\right)}{d\omega^n}$$

fås ved substitution, hvor $u = i\omega t$, $\frac{du}{d\omega} = it$

$$\frac{d^n\left(f(t)\, e^{-i\omega t}\right)}{d\omega^n} = f(t)\frac{d\left(e^{-u}\right)}{du}\frac{du}{d\omega} = -f(t)\, e^{-u} it = -f(t)\, e^{-i\omega t} it = -itf(t)\, e^{-i\omega t}$$

Gentages differentiationen fås

$$-itf(t)\frac{d\left(e^{-u}\right)}{du}\frac{du}{d\omega} = -itf(t)\, e^{-u} it = -i^2t^2 f(t)\, e^{-i\omega t} = t^2 f(t)\, e^{-i\omega t}$$

Gentages differentiationen yderligere $n-2$ gange fås

$$\frac{d^n\left(f(t)\, e^{-i\omega t}\right)}{d\omega^n} = i^n t^n f(t)\, e^{-i\omega t}$$

Det ses, at fortegnet på den afledte funktion skifter, da for $n = 1$ er $i^n t^n = it$, $n = 2$ er $i^n t^n = -1t^2$, $n = 3$ er $i^n t^n = -it^3$ og for $n = 4$ er $i^n t^n = 1t^4$. Dette fortegnsskifte kompenseres der for ved at multiplicere udtrykket med i^n.

Eksempel(3.1.2) Den detaljerede beregning for Fouriertransformationen af

$$\mathcal{F}_c(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t)\cos(\omega t)\ dt = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(3-\omega)t}{3-\omega} + \frac{\sin(3+\omega)t}{3+\omega}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Under anvendelse af den trigonometriske identitet
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ fås

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(3t)\cos(\omega t) - \cos(3t)\sin(\omega t)}{3-\omega} + \frac{\sin(3t)\cos(\omega t) + \cos(3t)\sin(\omega t)}{3+\omega}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Opstilling på fælles brøkstreg

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{(3+\omega)(\sin(3t)\cos(\omega t) - \cos(3t)\sin(\omega t)) + (3-\omega)(\sin(3t)\cos(\omega t) + \cos(3t)\sin(\omega t))}{(3-\omega)(3+\omega)}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Reduktion

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\sin(3t)\cos(\omega t) - 2\cos(3t)\sin(\omega t)}{9-\omega^2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Indsætning af grænser

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{6\sin(3\pi)\cos(\omega\pi) - 2\cos(3\pi)\sin(\omega\pi)}{9-\omega^2} - \frac{6\sin(-3\pi)\cos(-\omega\pi) - 2\cos(-3\pi)\sin(-\omega\pi)}{9-\omega^2}\right)$$

Da $\sin(-A) = -\sin(A)$ fås

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{0 - 2(-1)\sin(\omega\pi)}{9-\omega^2} - \frac{0-2(-1)(-\sin(\omega\pi))}{9-\omega^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\omega\sin(\omega\pi) + 2\omega\sin(\omega\pi)}{9-\omega^2} = \frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{9-\omega^2}$$

Eksempel (3.2.1)
For $f(t) = t^n$ kan Fouriertransformationen skrives som

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt$$

Under anvendelse af sætning 24, hvor $f(t) = e^{-at}$ fås

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt$$

Grænserne ændres da $f(t) = 0$ for $t < 0$.

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt = \left[-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{a+i\omega}\right) = \frac{1}{a+i\omega}$$

Det vil nu sige, at

$$F[t^n f(t)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\left(\frac{1}{a+i\omega}\right) = i^n(-1)^n \frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}} i^n = \frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}}$$

Litteratur

[1] Kanishka Pinelas Sandra Agarwal, Ravi P Perera. *An Introduction to Complex Analysis*. Springer Science, 2010.

[2] P.P.G. Dyke. *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*. Springer-Verlag, 2004.

[3] Glyn James. *Advanced Modern Engineering Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[4] Helge Elbrønd Jensen. *Matematisk Analyse 4*. Danmarks Tekniske Højskole, 1975.

[5] D.A. McQuarrie. *Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. University Science Books, 2003.

[6] Undervisningsministeriet. Matematik A stx bekendtgørelse. `https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152507#Bil35`, 2013. [Online; hentet 6-september-2014].

[7] William R. Wade. *An Introduction to Analysis*. PearsonPrentice Hall, 2010.