AALBORG UNIVERSITET
Institut for Matematiske Fag – www.math.aau.dk

Analytisk perturbationsteori for matricer

Speciale

af

Kenn Erik Markholm Andersen

Efterår 2009

AALBORG UNIVERSITET

Institut for Matematiske Fag
Fredrik Bajers Vej 7G
9220 Aalborg Øst
Telefon 99 40 88 04
Fax 98 15 81 29
http://www.math.aau.dk

Titel: Analytisk perturbationsteori for matricer

Projektperiode: 11.sep. - 11. dec 2009

Forfatter:

Kenn Erik Markholm Andersen

Vejleder: Arne Jensen

Oplagstal: 4

Sidetal: 49

Bilagsantal og –art: Ingen

Afsluttet: 11. dec. 2009

Synopsis:

I denne rapport betragtes perturbation af egenværdier for lineære operatorer på endeligdimensionale komplekse vektorrum. Det undersøges hvordan egenværdierne ændrer sig med operatoren, når denne afhænger analytisk af en parameter. Da den karakteristiske ligning til bestemmelse af egenværdierne i dette endeligdimensionale tilfælde er givet ved et polynomium af to variable, bevises der en del resultater om polynomier. For at studere egenværdierne indføres resolventen for operatoren og perturbation af denne gennemgåes. Ligeledes findes en stambrøksopsplitning af resolventen.

ABSTRACT

Given a linear operator in a finite-dimensional complex vectorspace. It is of interest to know how the eigenvalues change with the operator, when the operator depends on a parameter analytically.
To answer this question the resultant of the operator is studied in detail. Various properties of the resolvent are stated and proved and these are used to investigate the singularities of the resolvent. Also the partial fraction decomposition of the resolvent has been derived. To this end a number of tools from complex analysis proves useful and some of them are discussed and proved.
Since the characteristic equation of the operator, in this finite-dimensional setting, is given by a polynomial equation in two variables, a selection of results on polynomials are stated and proved, so that the characteristic equation can be examined.
Algebraic functions are introduced in order to state and prove the main theorem about the behaviour of the eigenvalues. The concept of a norm is used to define the norm of an operator, which is the basic tool in the estimates of the following sections on the resolvent. Finally a number of examples are given to illustrate the theory.

FORORD

I denne rapport er det underforstået, at der ved feks. $T-\zeta$ skal forstås $T-\zeta I$., hvormed der ikke altid skelnes (notationsmæssigt) mellem skalarer og operatorer. Der betragtes kun lineære operatorer på endeligdimensionale komplekse vektorrum.

Generelle henvisninger skrives som eksempelvis [AJ], hvor [AJ] så kan findes i litteraturlisten. Specifikke henvisninger skrives som f.eks. [AJ, s. 12, Theorem 3.16], hvor [AJ] igen kan findes i litteraturlisten, s. 12 angiver sidetallet og Theorem 3.16 er navnet på resultatet.

Der skelnes ikke mellem analytisk og holomorf. Alle kurver antages at være stykkevis glatte.
Alle mængder antages at være åbne og sammenhængende, medmindre andet er nævnt.

INDHOLDSFORTEGNELSE

INTRODUKTION

1.1 PRELIMINARIES

1.1.1 RESULTATER FRA KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI

Definition 1.1 – Analytisk
En funktion der er defineret og komplekst differentiabel overalt i et område Θ kaldes en analytisk funktion.

En analytisk funktion kaldes også holomorf.

Definition 1.2 – Meromorf
Lad $G \in \mathbb{C}$ være et domæne og lad $f : G \setminus P \to \mathbb{C}$ være en holomorf funktion med isolerede singulariteter i P. Hvis alle punkter i P er poler, siges f at være meromorf i G.

Følgende bliver nyttig:

Sætning 1.3 – Rouches' sætning
Lad de to funktioner $f(z)$ og $\varphi(z)$ være analytiske i det enkeltsammenhængende område Θ. Lad den simple lukkede kurve C være indeholdt i Θ og lad $f(z) \neq 0$ på C. Antag desuden, at $\left|f(z)\right| > \left|\varphi(z)\right|$ på C. Så har de to funktioner $f(z)$ og $f(z)+\varphi(z)$ det samme antal nulpunkter i den del af Θ der er omsluttet af C.

Bevis:
Da f og φ begge er analytiske i Θ er $f+\varphi$ det også. [Conway, s. 123, 3.4 Argument Principle] giver således (med en lidt anden notation), at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}dz = M,$$

hvor N betegner summen af ordenerne af nulpunkterne for f omsluttet af C og M betegner summen af ordenerne af nulpunkterne for $f+\varphi$ omsluttet af C. Nu vælges orienteringen af C til at være positiv, hvilket er underordnet i sætningen, men nødvendigt i dette bevis. Det skal vises, at $N = M$, hvilket således er ækvivalent med at vise, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}dz$$

som er ækvivalent med at vise, at

$$\int_C \left(\frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz = 0.$$

Ved direkte udregning ses, at

$$\frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\varphi'(z)f(z)-\varphi(z)f'(z)}{f(z)(f(z)+\varphi(z))}$$

og

$$\frac{(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)})'}{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}}=\frac{\varphi'(z)f(z)-\varphi(z)f'(z)}{f(z)(f(z)+\varphi(z))}.$$

Der gælder altså

$$\frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)})'}{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}}.$$

Problemet kan således omskrives til

$$\int_C \frac{(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)})'}{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}}dz=0. \tag{1.1}$$

Det haves, at $\left|f(z)\right| > \left|\varphi(z)\right|$ på C, hvormed $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$. Dermed ligger værdierne for $1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ i den højre halvplan (indenfor cirklen med centrum i 1 og radius 1 - specielt bliver $1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ aldrig nul eller reelt og negativt) hvor logaritmen er veldefineret. Derfor kan integralet i (1.1) nu udregnes på følgende måde. Da $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ses, at integranden har stamfunktionen $\ln(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)})$. [AJ, s. 12, Theorem 3.16] giver således, at integralet er lig nul, idet C er en lukket kurve. Beviset er således fuldført. ■

Sætning 1.4 – Laurents sætning
Lad f være en kompleks funktion, som er analytisk på ringen $R_1 < |z-z_0| < R_2$, hvor z_0 er centrum for de to cirkler med radius R_1 og R_2. Så kan f repræsenteres ved en Laurent-række,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

hvor

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

og γ er en simpel lukket kurve med positiv omløbsretning, som omslutter z_0 og ligger mellem cirklerne med radius R_1 og R_2. Rækken konvergerer for $R_1 < |z-z_0| < R_2$. Specielt konvergerer rækken uniformt på $\rho_1 \le |z-z_0| \le \rho_2$, hvor $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.

Udtrykket

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

skal forstås som summen af de to uendelige rækker

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

hvor a_n er defineret som ovenfor. Det bemærkes, at

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

hvor

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (z-z_0)^{n-1} f(z) dz.$$

Denne del kaldes principaldelen af Laurent-rækken.

1.1.2 RESULTATER OM POLYNOMIER

I dette afsnit gennemgåes en række nyttige resultater om polynomier.
Som korollar til Rouches' sætning, sætning 1.3, fås følgende nyttige resultat:

Sætning 1.5 – Algebraens fundamentalsætning
Ethvert egentligt polynomium med komplekse koefficienter har præcis lige så mange komplekse rødder som graden af polynomiet, hvis rødderne tælles med multiplicitet.

Bevis:
Lad $p(z)$ være givet ved

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad \text{hvor} \quad a_n \neq 0.$$

Det fås, at

$$\frac{p(z)}{a_n z^n} = \frac{a_0}{a_n z^n} + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + 1 \quad \text{for} \quad z \neq 0.$$

Her ses, at højresiden (og dermed også venstresiden) går mod 1 for $|z|$ gående mod uendelig. Der findes derfor et tilpas stort tal R, så der for $|z| = R$ gælder

$$\begin{aligned}
\left| \frac{p(z)}{a_n z^n} - 1 \right| &< 1 \\
\left| \frac{p(z) - a_n z^n}{a_n z^n} \right| &< 1 \\
\frac{\left| p(z) - a_n z^n \right|}{|a_n z^n|} &< 1 \\
\left| p(z) - a_n z^n \right| &< \left| a_n z^n \right| \\
\left| a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} \right| &< \left| a_n z^n \right|.
\end{aligned}$$

Vælg nu et R så stort, at

$$\left| a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} \right| < \left| a_n z^n \right| \quad \text{for} \quad |z| = R,$$

så er betingelserne fra Rouches' sætning, sætning 1.3, opfyldt, med

$$f(z) = a_n z^n \quad \text{og} \quad \varphi(z) = a_0 + a_1(z) + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}.$$

Da $f(z) = a_n z^n$ har n rødder (0 er rod med multiplicitet n) indenfor cirklen $|z| = R$, $(R > 0)$, så har $p(z) = f(z) + \varphi(z)$ også n rødder, såfremt R vælges så stor, at alle rødder for $p(z)$ ligger i $|z| < R$. Da $f(z) = a_n z^n$ kun har roden 0, ændres/øges antallet af rødder ikke uanset hvor stor R bliver. Beviset er hermed færdigt. ■

Lemma 1.6
Givet et polynomium $p(\lambda)$ der har $\lambda = a$ som rod, så gælder:
$\lambda = a$ er multipel rod i $p(\lambda)$ hvis og kun hvis $\lambda = a$ er rod i $p'(\lambda)$.

Bevis:
Antag, at $\lambda = a$ er multipel rod i $p(\lambda)$. Det betyder, at $p(\lambda) = (\lambda - a)^m q(\lambda)$ hvor $q(\lambda)$ er et polynomium af grad $\deg q = \deg p - m$ hvor m er et naturligt tal, $m \geq 2$. Heraf fås

$$p'(\lambda) = m(\lambda - a)^{m-1} q(\lambda) + (\lambda - a)^m q'(\lambda) = (\lambda - a)^{m-1}(mq(\lambda) + (\lambda - a)q'(\lambda)),$$

hvoraf det ses, at $\lambda = a$ er rod i $p'(\lambda)$.
Antag nu, at $\lambda = a$ er rod i både $p(\lambda)$ og $p'(\lambda)$, da findes polynomier q_1 og q_2 så

$$p(\lambda) = (\lambda - a)q_1(\lambda) \quad \text{og} \quad p'(\lambda) = (\lambda - a)q_2(\lambda).$$

Ved differentiation af $p(\lambda)$ fås

$$p'(\lambda) = q_1(\lambda) + (\lambda - a)q_1'(\lambda).$$

De to udtryk for $p'(\lambda)$ sættes nu lig hinanden

$$q_1(\lambda) + (\lambda - a)q_1'(\lambda) = (\lambda - a)q_2(\lambda).$$

Dette kan omskrives til

$$q_1(\lambda) = (\lambda - a)(q_2(\lambda) - q_1'(\lambda)).$$

Ved at indsætte dette i udtrykket for $p(\lambda)$ fås

$$p(\lambda) = (\lambda - a)^2(q_2(\lambda) - q_1'(\lambda)),$$

hvoraf det ses, at $\lambda = a$ er multipel rod i $p(\lambda)$. ■

Bemærk, at ovenstående bevis faktisk viser, mere end der står i sætningen, nemlig at hvis $\lambda = a$ er rod i $p(\lambda)$ med multiplicitet $m \geq 2$, så er $\lambda = a$ rod i $p'(\lambda)$ med multiplicitet $m - 1$.
Nu indføres en variant af Euklids algoritme for polynomier.
Givet to polynomier $p(\lambda)$ og $q(\lambda)$, hvor $\deg p > \deg q$, så indføres følgende algoritme: Divider q op i p og find resten r_1. Divider r_1 op i q og find resten r_2. Divider r_2 op i r_1 og find resten r_3. Fortsæt på denne måde, indtil resten er en konstant. Denne konstant

er outputtet for algoritmen.
Algoritmen ser altså således ud:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= q_0(\lambda)q(\lambda) + r_1(\lambda), \quad \text{hvor} \quad \deg r_1 < \deg q,\\
q(\lambda) &= q_1(\lambda)r_1(\lambda) + r_2(\lambda), \quad \text{hvor} \quad \deg r_2 < \deg r_1,\\
r_1(\lambda) &= q_2(\lambda)r_2(\lambda) + r_3(\lambda), \quad \text{hvor} \quad \deg r_3 < \deg r_2,\\
&\vdots\\
r_{n-2}(\lambda) &= q_{n-1}(\lambda)r_{n-1}(\lambda) + r_n(\lambda), \quad \text{hvor} \quad \deg r_n < \deg r_{n-1},\\
&\\
\text{stop ved} &\quad \deg r_n \leq 0 \quad \text{og giv} \quad r_n \quad \text{som output.}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

[Cohen, s. 23, Theorem 5] giver eksistens og entydighed af outputtet r_n ved denne algoritme, hvormed det giver mening at fastsætte følgende:

Definition 1.7 – Resultant
Givet to polynomier $p(\lambda)$ og $q(\lambda)$, hvor $\deg p > \deg q$. Outputtet r_n fra ovenstående algoritme kaldes resultanten $R(p,q)$ for de to polynomier. Dvs. $R(p,q) \equiv r_n$.

Bemærk, at r_n, og dermed resultanten, er en konstant.

Eksempel 1.8
Betragt de tre polynomier

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda, \qquad q_1(\lambda) = \lambda + 3 \qquad \text{og} \qquad q_2(\lambda) = \lambda + 2.$$

Da der gælder, at

$$\lambda^2 + 2\lambda = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 3 \qquad \text{og} \qquad \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) + 0,$$

giver algoritmen

$$R(p,q_1) = 3 \qquad \text{og} \qquad R(p,q_2) = 0.$$

Bemærk desuden, at p og q_2 har den fælles rod $\lambda = -2$, mens p og q_1 ikke har nogen fælles rødder. □

Proposition 1.9
To polynomier $p(\lambda)$ og $q(\lambda)$, hvor $\deg p > \deg q$, har en fælles rod λ_0, hvis og kun hvis deres resultant er identisk lig nul, dvs. hvis og kun hvis $R(p,q) \equiv 0$.

Bevis:
Antag, at $p(\lambda)$ og $q(\lambda)$ har en fælles rod, λ_0, hvormed $p(\lambda_0) = 0$ og $q(\lambda_0) = 0$. Ved indsættelse af λ_0 i algoritmens første linie fås direkte, at $r_1(\lambda_0) = 0$. Ved indsættelse af λ_0 i algoritmens anden linie fås tilsvarende, at $r_2(\lambda_0) = 0$. Således fortsættes til algoritmens sidste linie, som giver $r_n(\lambda_0) = 0$. Da $\deg r_n \leq 0$, må $r_n \equiv 0$. Antag nu, at $R(p,q) \equiv 0$. Dvs., at $r_n \equiv 0$, hvormed algoritmens sidste linie giver, at

$$r_{n-2}(\lambda) = q_{n-1}(\lambda)r_{n-1}(\lambda). \tag{1.3}$$

Da $r_{n-1}(\lambda)$ er et polynomium af grad mindst een (ifølge algoritmen) følger det, af algebraens fundamentalsætning, sætning 1.5, at $r_{n-1}(\lambda)$ har mindst een rod. Lad λ_0 være rod i $r_{n-1}(\lambda)$, da giver (1.3), at λ_0 også er rod i $r_{n-2}(\lambda)$. Algoritmens andensidste linie:

$$r_{n-3}(\lambda) = q_{n-2}(\lambda) r_{n-2}(\lambda) + r_{n-1}(\lambda)$$

viser nu, at λ_0 er rod i $r_{n-3}(\lambda)$, da λ_0 er rod i $r_{n-2}(\lambda)$ og $r_{n-1}(\lambda)$. Ved at gå baglæns igennem algoritmen, fås af algoritmens første linie, at da λ_0 er rod i $q(\lambda)$ og $r_1(\lambda)$, er λ_0 også rod i $p(\lambda)$. Det er dermed vist, at $p(\lambda)$ og $q(\lambda)$ har en fælles rod. ■

Definition 1.10 – Diskriminant
Givet et polynomium p_n af grad n, så defineres diskriminanten, D_n, for polynomiet som resultanten af polynomiet og dets afledte, dvs.

$$D_n \equiv R(p_n, p_n').$$

Eksempel 1.11
Betragt det generelle andengradspolynomium

$$p_2(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad a \neq 0,$$

Heraf fås

$$p_2'(\lambda) = 2a\lambda + b.$$

Da

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{b}{4a}\right)(2a\lambda + b) + c - \frac{b^2}{4a}$$

fås

$$D_2 \equiv R(p_2, p_2') = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac).$$

Bemærk afvigelsen fra den sædvanlige diskriminant $d = b^2 - 4ac$.
Der gælder dog, at $D_2 = 0 = d$ præcis når $b^2 - 4ac = 0$, således at $p(\lambda)$ har en dobbeltrod hvis og kun hvis $D_2 = 0$. □

Proposition 1.12
Polynomiet $p_n(\lambda)$ har mindst een multipel rod hvis og kun hvis $D_n \equiv 0$.

Bevis:
Antag først, at polynomiet $p_n(\lambda)$ har mindst een multipel rod. Så er denne rod også rod i $p_n'(\lambda)$ ifølge lemma 1.6 og proposition 1.9 giver således at $R(p_n, p_n') \equiv 0$. Det følger så af definition 1.10, at $D_n \equiv 0$.
Antag nu, at $D_n \equiv 0$. Definition 1.10 giver således at $R(p_n, p_n') \equiv 0$, hvilket ifølge proposition 1.9 er ensbetydende med at $p_n(\lambda)$ og $p_n'(\lambda)$ har mindst een fælles rod, hvorefter

det følger af lemma 1.6 at $p_n(\lambda)$ har mindst een multipel rod. ■

Ved et polynomium p af to variable ζ og λ forstås en dobbeltsum af formen

$$p(\zeta,\lambda) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{jl}\zeta^j\lambda^l.$$

Definition 1.13 – Reducibel
Givet et polynomium $p(\zeta,\lambda)$, $\zeta \in \Omega$, analytisk i ζ. Så kaldes p reducibel, hvis og kun hvis der findes polynomier $p_1(\zeta,\lambda)$ og $p_2(\zeta,\lambda)$ der er ikke-konstante og analytiske i ζ, så $p(\zeta,\lambda) = p_1(\zeta,\lambda)p_2(\zeta,\lambda)$.

Diskriminanten for $p(\zeta,\cdot)$ betegnes $D(\zeta)$.

Proposition 1.14
Polynomiet $p(\zeta,\lambda)$ er reducibelt, hvis $D(\zeta) \equiv 0$ for alle $\zeta \in \Omega$.

Bevis:
I dette bevis benyttes en variant af algoritmen givet i (1.2). Ved hvert skridt i algoritmen i (1.2) divideres der med et polynomium. Hvis man således anvender denne algoritme direkte på polynomiet $p(\zeta,\lambda)$ og dets afledte (hvor disse betragtes som polynomier i λ, med koefficienter der afhænger polynomielt af ζ), så risikerer man at dividere med et udtryk, hvor koefficienterne der afhænger af ζ giver anledning til et nulpunkt for udtrykket. Ved alligevel at benytte algoritmen, men så efter hvert skridt gange den fremkomne ligning igennem med en faktor (der afhænger af ζ, men ikke af λ), således at eventuelle nulpunkter fjernes, så opnår man en variant af den oprindelige algoritme. Denne variant anvendes i det følgende, men de førnævnte faktorer der afhænger af ζ udelades, for at lette opskrivningen. Bemærk dog at dette ikke har betydning for de konklusioner der drages. Antag, at $D(\zeta) \equiv 0$ for alle $\zeta \in \Omega$. Så følger det af definition 1.10, at algoritmen i (1.2) giver outputtet $r_n \equiv 0$, hvormed algoritmens sidste linie er givet ved

$$r_{n-2}(\lambda) = q_{n-1}(\lambda)r_{n-1}(\lambda).$$

Indsættes dette udtryk for $r_{n-2}(\lambda)$ i algoritmens andensidste linie, som er givet ved

$$r_{n-3}(\lambda) = q_{n-2}(\lambda)r_{n-2}(\lambda) + r_{n-1}(\lambda),$$

fås

$$\begin{aligned} r_{n-3}(\lambda) &= q_{n-2}(\lambda)\left[q_{n-1}(\lambda)r_{n-1}(\lambda)\right] + r_{n-1}(\lambda) \\ &= r_{n-1}(\lambda)\left[q_{n-2}(\lambda)q_{n-1}(\lambda) + 1\right]. \end{aligned}$$

Indsættes dette udtryk for $r_{n-3}(\lambda)$, samt udtrykket for $r_{n-2}(\lambda)$ i algoritmens tredjesidste linie, som er givet ved

$$r_{n-4}(\lambda) = q_{n-3}(\lambda)r_{n-3}(\lambda) + r_{n-2}(\lambda),$$

fås

$$\begin{aligned} r_{n-4}(\lambda) &= q_{n-3}(\lambda) r_{n-1}(\lambda)\left[q_{n-2}(\lambda) q_{n-1}(\lambda)+1\right] + q_{n-1}(\lambda) r_{n-1}(\lambda) \\ &= r_{n-1}(\lambda)\left[q_{n-3}(\lambda)\left[q_{n-2}(\lambda) q_{n-1}(\lambda)+1\right] + q_{n-1}(\lambda)\right]. \end{aligned}$$

Det følger heraf, at man ved at fortsætte med at gå baglæns gennem algoritmen på denne måde, opnår en faktorisering af polynomiet p. Da der i algoritmen gælder, at $\deg r_n < \deg r_{n-1}$ og $\deg r_n = 0$, følger det, at faktorerne i førnævnte faktorisering ikke er konstanter, hvormed det er blevet bevist, at p er reducibelt. ■

1.1.3 ALGEBRAISKE FUNKTIONER

Definition 1.15 – Algebraisk funktion
En løsning $w = f(z)$ til ligningen

$$g_0(z) + g_1(z) w + g_2(z) w^2 + \cdots + g_m(z) w^m = 0, \tag{1.4}$$

hvor $g_n(z)$ er polynomier af z alene og mindst et af dem er egentligt, kaldes en algebraisk funktion.
Ligningen (1.4) *kan skrives kortfattet som $G(z,w) = 0$.*

Eksempel 1.16
Polynomier er algebraiske funktioner idet

$$w = f(z) \Rightarrow -f(z) + w = 0$$

her er

$$g_n \equiv 0 \quad \text{for} \quad n > 1, \quad g_1(z) \equiv 1 \quad \text{og} \quad g_0(z) \equiv -f(z).$$

□

Eksempel 1.17
Rationale funktioner er algebraiske funktioner idet

$$f(z) = \frac{a(z)}{b(z)} \Rightarrow -a(z) + b(z) f(z) = 0$$

her er

$$g_n \equiv 0 \quad \text{for} \quad n > 1, \quad g_1 \equiv b(z) \quad \text{og} \quad g_0 \equiv -a(z).$$

□

Eksempel 1.18
En rational funktion opløftet til en brudden potens er en algebraisk funktion idet

$$f(z) = (\frac{a(z)}{b(z)})^{\frac{p}{q}} \Rightarrow (f(z))^q = (\frac{a(z)}{b(z)})^p \Rightarrow -(a(z))^p + (b(z))^p (f(z))^q = 0,$$

her er

$$g_n \equiv 0 \quad \text{for} \quad n \notin \{0, q\}, \quad g_q \equiv (b(z))^p \quad \text{og} \quad g_0 \equiv -(a(z))^p.$$

□

Eksempel 1.19
Ligningen $x^2 + y^2 = 1$ giver $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ begge grene hører til den algebraiske funktion y, selvom y ikke er en funktion i sædvanlig forstand. □

De trigonometriske funktioner, eksponentialfunktionerne og logaritmefunktionerne er alle eksempler på ikke-algebraiske funktioner eller transcendente funktioner.
For $m \leq 4$ kan ligningen i (1.4) løses direkte, hvorved man opnår et eksplicit udtryk for funktionen $w = f(z)$, der derefter kan undersøges. For $m > 4$ er dette ikke længere muligt og derfor opstår spørgsmålet om hvorvidt der i det hele taget findes en løsning $w = f(z)$ til ligningen, om den er entydig, og hvilke egenskaber den ellers har. Før disse spørgsmål besvares, gøres først nogle antagelser. Det antages, at $G(z,w)$ er irreducibel, jævnfør definition 1.13. Denne antagelse er ikke urimelig, for hvis G var reducibelt, så f.eks. $G(z,w) = G_1(z,w)G_2(z,w)$, ville behandlingen af problemet $G(z,w) = 0$, ved hjælp af nulreglen, kunne deles op i behandlingen af de to (simplere) problemer $G_1(z,w) = 0$ og $G_2(z,w) = 0$. Ved at substituere en fast værdi z_0 med z i ligningen, fås en polynomiel ligning i w med skalar koefficienter. Denne ligning vil generelt have m forskellige løsninger/rødder, medmindre man er i et af de to følgende tilfælde:

1. $g_m(z_0) = 0$, hvormed graden af polynomiet er mindre end m og antallet af løsninger/rødder dermed også er mindre end m, ifølge algebraens fundamentalsætning, sætning 1.5.

2. $G(z_0,w) = 0$ har multiple rødder.

Det sidste sker netop når ligningens diskriminant er identisk lig nul, som det fremgår af proposition 1.12. Der gælder desuden, at hvis $G(z,w)$ er irreducibel, så er diskriminanten, $D(z)$, ikke identisk lig nul, ifølge proposition 1.14, men derimod et polynomium af en bestemt grad. Det fremgår af 1. og 2., at undtagelserne kun kan ske for et endeligt antal specielle værdier af z, som fremover benævnes $a_1,\ldots,a_r$. I det følgende vil der (til at begynde med) blive set bort fra sådanne kritiske punkter. Der gælder således, at $G(z_0,w) = 0$ har præcis m forskellige rødder, $w_0^{(1)},\ldots,w_0^{(m)}$ for hvert $z = z_0$ forskelligt fra de kritiske punkter. Målet er nu følgende:

Sætning 1.20
$G(z,w)$ antages at være af formen $G(z,w) = g_0(z) + g_1(z)w + g_2(z)w^2 + \cdots + g_m(z)w^m$ og irreducibel. Ligningen $G(z,w) = 0$ definerer præcis een $m-$tydig analytisk funktion $w = F(z)$ i den punkterede plan, dvs. planen bortset fra de kritiske punkter.

1.2 HOVEDSÆTNINGEN

Betragt en lineær operator T på et endeligdimensionalt komplekst vektorrum X og lad $\zeta \mapsto T(\zeta)$ være analytisk i Ω. Funktionen $p(\zeta,\lambda) = \det(T(\zeta)-\lambda)$ er analytisk i $\Omega\times\mathbb{C}$. Dette ses let hvis standardmatricen for T er en $(2x2)$-matrix, idet alle fire indgange i matricen er analytiske. Heraf følger resultatet for en (nxn)-matrix ved induktion. Bemærk, at en funktion af to komplekse variable kaldes analytisk, hvis den er analytisk i hver af de variable når den anden variabel holdes fast (separat analytisk).
Lad

$$p(\zeta,\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}(\zeta)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(\zeta)\lambda + a_0(\zeta)).$$

Nu betragtes et simpelt nulpunkt, λ_0, for $p(\zeta_0,\lambda)$, hvor $\zeta_0 \in \Omega$ er fast.

Proposition 1.21
Givet $(\zeta_0,\lambda_0) \in \Omega\times\mathbb{C}$ *, så* $p(\zeta_0,\lambda_0) = 0$ *og* $\frac{\partial p}{\partial\lambda}(\zeta_0,\lambda_0) \neq 0$*, så findes* $\delta_1,\delta_2 > 0$*, så at* $p(\zeta;\lambda)$ *har præcis ét nulpunkt,* $\lambda_0(\zeta)$*, i* $|\lambda-\lambda_0| < \delta_1$ *for* $|\zeta-\zeta_0| < \delta_2$ *.* $\lambda_0(\zeta)$ *afhænger analytisk af* ζ *og* $p(\zeta,\lambda_0(\zeta)) = 0$ *overalt i* $|\zeta-\zeta_0| < \delta_2$*.*

Bevis:
Ideen er at benytte implicit funktionssætningen som angivet i [Wade, s. 356, 11.47 Theorem [The Implicit Function Theorem]]. Bemærk, at der i det følgende er byttet om på x og t i forhold til i Wade og at 0 bruges i flere betydninger, således at der (notationsmæssigt) ikke skelnes mellem tallet 0 og punktet (0,0).
Lad $\zeta = x_1 + ix_2$ og $\lambda = t_1 + it_2$, hvormed de (via isomorfien mellem $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$) kan betragtes som punkterne (x_1,x_2) og (t_1,t_2) i $\mathbb{R}^2$. Lad desuden

$$p(\zeta,\lambda) = p_1(x_1,x_2,t_1,t_2) + i\,p_2(x_1,x_2,t_1,t_2),$$

således at $F = (p_1,p_2) : V \to \mathbb{R}^2$. Tilsvarende kan $\Omega\times\mathbb{C}$ betragtes som en åben delmængde, V, af $\mathbb{R}^4$. Da $p(\zeta,\lambda)$ er analytisk i $\Omega\times\mathbb{C}$, opfylder $F = (p_1,p_2)$ kravet om at være C^1 på V. At der er givet $(\zeta_0,\lambda_0) \in \Omega\times\mathbb{C}$, så $p(\zeta_0,\lambda_0) = 0$ kan dermed oversættes til at der er givet $(x_{0,1},x_{0,2},t_{0,1},t_{0,2}) \in V$, således at

$$p(x_{0,1},x_{0,2},t_{0,1},t_{0,2}) = p_1(x_{0,1},x_{0,2},t_{0,1},t_{0,2}) + i\,p_2(x_{0,1},x_{0,2},t_{0,1},t_{0,2}) = 0.$$

Det skal nu vises, at

$$d = \frac{\partial(p_1,p_2)}{\partial(t_1,t_2)}(x_{0,1},x_{0,2},t_{0,1},t_{0,2}) \neq 0.$$

For at lette notationen en anelse, skrives punktet $(x_{0,1},x_{0,2},t_{0,1},t_{0,2})$ ikke i de følgende udregninger. Der gælder

$$\begin{aligned} d &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial t_1} & \frac{\partial p_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1} & \frac{\partial p_2}{\partial t_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial p_1}{\partial t_1}\frac{\partial p_2}{\partial t_2} - \frac{\partial p_2}{\partial t_1}\frac{\partial p_1}{\partial t_2} \\ &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial t_2}\right)^2 \\ &= \left|p'()\right|^2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

hvor der blev gjort brug af Cauchy-Riemann ligningerne

$$\frac{\partial p_1}{\partial t_1} = \frac{\partial p_2}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t_2} = -\frac{\partial p_2}{\partial t_1}.$$

[AJ, s. 2, Theorem 2.4] giver, at

$$p'(\lambda_0) = \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t_{0,1}, t_{0,2}) - i\frac{\partial p_1}{\partial t_2}(t_{0,1}, t_{0,2}).$$

Heraf følger, at

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda}(\zeta_0, \lambda_0) = \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(x_{0,1}, x_{0,2}, t_{0,1}, t_{0,2}) - i\frac{\partial p_1}{\partial t_2}(x_{0,1}, x_{0,2}, t_{0,1}, t_{0,2}).$$

Da $\frac{\partial p}{\partial \lambda}(\zeta_0, \lambda_0) \neq 0$ fås specielt, at $p'(\lambda_0) \neq 0$, hvormed $\left|p'(\lambda_0)\right|^2 \neq 0$. Således følger nu af (1.5), at

$$d \neq 0. \tag{1.6}$$

Det følger så af Implicit funktionssætningen, at der eksisterer en åben mængde $W \subset \mathbb{R}^2$ der indeholder $(x_{0,1}, x_{0,2})$ og en entydig, kontinuert, differentiabel funktion $g = (g_1, g_2)$, $g : W \to \mathbb{R}^2$, således at

$$g(x_{0,1}, x_{0,2}) = (g_1(x_{0,1}, x_{0,2}), g_2(x_{0,1}, x_{0,2})) = (t_{0,1}, t_{0,2})$$

og

$$F(x_1, x_2, g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = 0$$

for alle $(x_1, x_2) \in W$. Det vil sige, at $g_1(x_1, x_2) = t_1$ og $g_2(x_1, x_2) = t_2$ for alle $(x_1, x_2) \in W$. Det skal nu vises, at g er analytisk i ζ, hvilket gøres, ved at vise, at g opfylder Cauchy-Riemann ligningerne. Resultatet følger så af [AJ, s. 2, Theorem 2.4].
Da $F(x_1, x_2, t_1, t_2) = 0$ for alle $(x_1, x_2) \in W$ fås specielt, at

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2, t_1, t_2) &= 0 \quad \text{og} \\ p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

for alle $(x_1, x_2) \in W$.
Differentiation af (1.7) med hensyn til x_1 giver ifølge Kædereglen

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial t_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial t_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial p_2}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Det ses, at (1.8) kan betragtes som et inhomogent lineært ligningssystem i de to ubekendte $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}$ og $\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$. Ligningssystemet (1.8) har en entydig løsning, hvis og kun hvis dets determinant er forskellig fra nul, dvs. når

$$d = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial t_1} & \frac{\partial p_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1} & \frac{\partial p_2}{\partial t_2} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{1.9}$$

Det følger af (1.5) og (1.6), at (1.9) er opfyldt, hvormed ligningssystemet (1.8) har en entydig løsning. Denne løsning er givet ved Cramer's regel [Lay, s. 196, Theorem 7 Cramer's Rule]

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1},\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{-\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{\partial p_2}{\partial t_2}+\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\frac{\partial p_1}{\partial t_2}}{d},\frac{-\frac{\partial p_1}{\partial t_1}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial t_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}}{d}\right). \tag{1.10}$$

Ved at differentiere (1.7) med hensyn til x_2 og løse det derved fremkomne ligningssystem, fås tilsvarende

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2},\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)=\left(\frac{-\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\frac{\partial p_2}{\partial t_2}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\frac{\partial p_1}{\partial t_2}}{d},\frac{-\frac{\partial p_1}{\partial t_1}\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_2}{\partial t_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}}{d}\right). \tag{1.11}$$

Da p er analytisk i både $\zeta = x_1 + ix_2$ og $\lambda = t_1 + it_2$ giver Cauchy-Riemann ligningerne

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}&=\frac{\partial p_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial p_1}{\partial x_2}&=-\frac{\partial p_2}{\partial x_1},\\ \frac{\partial p_1}{\partial t_1}&=\frac{\partial p_2}{\partial t_2}, & \frac{\partial p_1}{\partial t_2}&=-\frac{\partial p_2}{\partial t_1}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Da det skal vises, at g er analytisk i $\zeta = x_1 + ix_2$, skal det vises, at g opfylder Cauchy-Riemann ligningerne

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}=\frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial g_2}{\partial x_1}. \tag{1.13}$$

Ved at sammenligne løsningerne fra (1.10) og (1.11) og anvende (1.12) ses det, at (1.13) er opfyldt. Første del af (1.13) verificeres således

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}&=-\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{\partial p_2}{\partial t_2}+\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\frac{\partial p_1}{\partial t_2}=-\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\frac{\partial p_1}{\partial t_1}+\left(-\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)\left(-\frac{\partial p_2}{\partial t_1}\right)\\ &=-\frac{\partial p_1}{\partial t_1}\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_2}{\partial t_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial g_2}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Anden del af (1.13) kan verificeres på tilsvarende måde. Sættes $\lambda_0(\zeta)$ nu lig $g(\zeta)$ er sætningen bevist, idet det bemærkes, at de åbne mængder der kommer fra Implicit funktionssætningen i Wade, indeholder de i Proposition 1.21 nævnte cirkelskiver, for passende valg af deres radier. ■

Proposition 1.22
$\lambda_0(\zeta)$ er rod af multiplicitet $m \geq 2$ i $p(\zeta_0,\lambda)$ hvis og kun hvis $D(\zeta_0) = 0$.

Bevis:
Da ζ_0 er fast, kan $p(\zeta_0,\lambda)$ betragtes som et polynomium af den ene variabel λ, hvormed resultatet følger af Proposition 1.12. ■

Nu formuleres hovedsætningen:

Sætning 1.23
Givet $p(\zeta,\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(\zeta)\lambda^{n-1} + \cdots + a_0(\zeta)$. Antag, at λ_0 er et nulpunkt af multiplicitet m for $p(\zeta_0,\lambda) = 0$. Så findes $\delta > 0$, så at for alle ζ der opfylder $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ har $p(\zeta,\lambda)$ præcis m nulpunkter (talt med algebraisk multiplicitet) tæt ved λ_0. Mere præcist: Der findes heltal $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $p_j \geq 1$, $\sum_{j=1}^{k} p_j = m$ og funktioner (ikke nødvendigvis forskellige) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (multiple værdier), så at hver λ_j har en konvergent Puiseux-række $\lambda_j(\zeta) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} c_l(\zeta - \zeta_0)^{l/p_j}$. De m egenværdier er givet ved p_1 værdier af λ_1, p_2 værdier af λ_2, etc.

Bevis: Vi kan antage, at $p(\zeta,\lambda)$ er irreducibelt. I modsat fald, kan man faktorisere i irreducible faktorer og betragte dem enkeltvis. Antagelsen om irreducibilitet giver ifølge proposition 1.14, at $D(\zeta)$ ikke er identisk nul. Lad $\{\zeta_j\}$ være den diskrete delmængde af Ω, hvor $D(\zeta_j) = 0$. Dvs. for $\zeta \in \Omega \setminus \{\zeta_j\}$ har $p(\zeta,\lambda)$ n forskellige rødder i λ ifølge Proposition 1.12. Dvs. at alle rødder er simple!
Nu betragtes et af de exceptionelle punkter ζ_j. For nemheds skyld kaldes det ζ_0. Det antages, at $p(\zeta_0, \lambda_0) = 0$ og at λ_0 har multiplicitet m, $1 < m \leq n$.
Man får brug for følgende

Proposition 1.24
Lad ζ_0 være et exceptionelt punkt for $p(\zeta,\lambda)$. Antag, at $p(\zeta,\lambda)$ er irreducibelt samt at $p(\zeta_0, \lambda_0) = 0$ og at λ_0 har multiplicitet m, $1 < m \leq n$. Givet $\varepsilon > 0$ tilstrækkeligt lille, så findes et $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, så at for $0 < |\zeta - \zeta_0| < \delta(\varepsilon)$ har ligningen $p(\zeta, \lambda) = 0$ præcis m forskellige rødder som alle ligger i $\{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$.

Bevis:
Skriv

$$p(\zeta,\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n + b_{n-1}(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \cdots + b_1(\zeta)(\lambda - \lambda_0) + b_0(\zeta).$$

Dette gøres ved at benytte, at $\lambda = \lambda - \lambda_0 + \lambda_0$ og derefter gange ud og omarrangere leddene. Antagelsen om, at λ_0 er et nulpunkt af multiplicitet m for $p(\zeta_0, \lambda)$, betyder, at

$$b_j(\zeta_0) = 0 \quad \text{for} \quad j = 0, \ldots, m-1 \quad \text{og} \quad b_m(\zeta_0) \neq 0.$$

Vælg $\delta_1 > 0$ og lad $B(\zeta_0,\delta_1) = \{\zeta : |\zeta - \zeta_0| < \delta_1\}$ så at $b_m(\zeta) \neq 0$ for $\zeta \in \overline{B(\zeta_0,\delta_1)} \subset \Omega$ og desuden $D(\zeta) \neq 0$, for $0 < |\zeta - \zeta_0| < \delta_1$.
Det er nu muligt at skrive $p(\zeta, \lambda)$ således:

$$\begin{aligned}
p(\zeta,\lambda) &= b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m(1 + A(\zeta,\lambda) + B(\zeta,\lambda)), \quad \text{hvor} \\
A(\zeta,\lambda) &= \frac{b_{m+1}(\zeta)}{b_m(\zeta)}(\lambda - \lambda_0) + \cdots \frac{b_{n-1}(\zeta)}{b_m(\zeta)}(\lambda - \lambda_0)^{n-1-m} + \frac{1}{b_m(\zeta)}(\lambda - \lambda_0)^{n-m} \quad \text{og} \\
B(\zeta,\lambda) &= \frac{b_{m-1}(\zeta)}{b_m(\zeta)} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} + \cdots + \frac{b_0(\zeta)}{b_m(\zeta)} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^m}
\end{aligned}$$

Der gives nu en vurdering af $|A(\zeta,\lambda)|$ og $|B(\zeta,\lambda)|$.

Vurdering af $|A(\zeta,\lambda)|$:

Lad

$$c = \min_{\zeta \in \overline{B(\zeta_0,\delta_1)}} |b_m(\zeta)| \qquad \text{og} \qquad M = \max_{\substack{\zeta \in \overline{B(\zeta_0,\delta_1)} \\ \zeta = 0,1,\dots,n-1}} \left|b_j(\zeta)\right|.$$

Bemærk, at $c > 0$ idet $b_m(\zeta) \neq 0$ for $\zeta \in \overline{B(\zeta_0,\delta_1)}$.
Lad et ε, som opfylder både $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ og $\varepsilon < \frac{c}{4M}$ være givet.
For $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ haves

$$|A(\zeta,\lambda)| \leq \frac{M}{c}(\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-m}) = \frac{M}{c}\varepsilon\frac{1-\varepsilon^{n-m}}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon\frac{M}{c} < \frac{1}{2}.$$

Det er således blevet vist, at for alle ζ, $|\zeta - \zeta_0| < \delta_1$ og alle λ, $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ gælder

$$|A(\zeta,\lambda)| < \frac{1}{2}.$$

Vurdering af $|B(\zeta,\lambda)|$:

Lad

$$\mu = \frac{c}{2}(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon^m})^{-1}.$$

Vælg $\delta < \delta_1$ således, at der for alle $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ gælder $\left|b_j(\zeta)\right| < \mu$, $j = 0,1,\dots,m-1$. Dette er muligt, da $b_j(\zeta_0) = 0$.
For $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ og $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ fås

$$|B(\zeta,\lambda)| < \frac{\mu}{c}(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon^m}) = \frac{1}{2}.$$

Ved en mindre omskrivning af $p(\zeta,\lambda)$, fås at:

$$p(\zeta,\lambda) = b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m + (A(\zeta,\lambda) + B(\zeta,\lambda))b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m.$$

Heraf følger nu

$$\begin{aligned} p(\zeta,\lambda) - b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m &= (A(\zeta,\lambda) + B(\zeta,\lambda))b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m \\ \left|p(\zeta,\lambda) - b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m\right| &= \left|(A(\zeta,\lambda) + B(\zeta,\lambda))b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m\right| \\ &\leq (|A(\zeta,\lambda)| + |B(\zeta,\lambda)|)\left|b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m\right| \\ &< \left|b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m\right|. \end{aligned}$$

Lad ζ, $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ være fast. Det er så blevet vist, at for $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ gælder

$$\left|b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m\right| > \left|p(\zeta,\lambda) - b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m\right|.$$

Det bemærkes, at $b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m \neq 0$ for $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ og $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$, idet $b_m(\zeta) \neq 0$ for $\zeta \in \overline{B(\zeta_0,\delta_1)}$ og $\delta < \delta_1$. Rouches sætning, sætning 1.3 giver således, at $b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m$ og $b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m + p(\zeta,\lambda) - b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m = p(\zeta,\lambda)$ har det samme antal nulpunkter i $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Eftersom $b_m(\zeta)(\lambda - \lambda_0)^m$ har præcis m nulpunkter ($\lambda = \lambda_0$ er m-dobbelt nulpunkt) i $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, er det således vist, at $p(\zeta,\lambda)$ har præcis m nulpunkter i $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Da δ_1 blev valgt, således at $D(\zeta) \neq 0$, for $0 < |\zeta - \zeta_0| < \delta_1$, følger det, da

$\delta < \delta_1$, at $D(\zeta) \neq 0$, $0 < |\zeta - \zeta_0| < \delta$. At $D(\zeta) \neq 0$ betyder, ifølge proposition 1.12, at disse nulpunkter er simple. Altså har $p(\zeta,\lambda)$ m forskellige nulpunkter i $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. ■

Beviset for hovedsætningen fortsætter...
Der gælder stadig $p(\zeta,\lambda) = 0$, $\zeta \in \Omega$, og p er irreducibel. Graden i λ er n. Der er n rødder i λ, alle simple, hvis $\zeta^* \in \Omega \setminus \{\zeta_j\}$. Disse afhænger analytisk af ζ, for ζ tæt på ζ^* og væk fra alle ζ_j.
Lad nu $\zeta^* \in \Omega \setminus \{\zeta_j\}$ være fast. Lad desuden $\varphi_1(\zeta;\zeta^*),\ldots,\varphi_n(\zeta;\zeta^*)$ være de funktioner der giver de n nulpunkter for $p(\zeta,\lambda)$. Disse funktioner er defineret på hele Ω og er kontinuerte i de exceptionelle punkter, på grund af de ovenstående argumenter.
Nu undersøges hvad der sker i et af de exceptionelle punkter. Lad ζ_0 være et exceptionelt punkt og lad λ_0 være et nulpunkt af multiplicitet $m > 1$ for $p(\zeta_0,\lambda) = 0$.
Lad Γ være en cirkel med centrum i ζ_0 og med så lille en radius, at der ikke er andre ζ_j på eller indenfor cirklen. Tag $z_0 \in \Gamma$ og tag den analytiske funktion $\varphi_1(\zeta; z_0)$, som er defineret på den lille cirkelskive $B_0 = \{\zeta : |\zeta - z_0| < \delta(z_0)\}$. Cirkelskiven indeholder ikke nogen singulære punkter, så $\varphi_1(\zeta; z_0)$ er analytisk på denne cirkelskive.
Tag z_1 på Γ, hvor $z_1 \neq z_0$ og $z_1 \in B_0$ og konstruer cirkelskiven $B_1 = \{\zeta : |\zeta - z_1| < \delta(z_1)\}$. Til punktet z_1 svarer der funktioner $\varphi_1(\zeta; z_1),\ldots,\varphi_n(\zeta; z_1)$ definerede og analytiske i B_1. Da $B_0 \cap B_1 \neq \{\}$, må een af disse stemme overens med $\varphi_1(\zeta; z_0)$. Derfor er $\varphi_1(\zeta; z_1)$ defineret i Ved at fortsætte med at konstruere cirkelskiver på denne måde, kan man lave en åben overdækning af Γ og da Γ er kompakt, kan denne overdækning udtyndes til en endelig overdækning, hvilket vil sige, at man kan 'komme hele vejen rundt' i et endeligt antal skridt.
'Fortsættelses-argumentet' fører til roden $\widetilde{\varphi}_1(z_0,z_0)$. Hvis $\widetilde{\varphi}_1(z_0,z_0) = \varphi_1(z_0,z_0)$ er argumentet færdigt og der haves en cykel med periode 1.
Hvis $\widetilde{\varphi}_1(z_0,z_0) = \varphi_j(z_0,z_0)$, $j > 1$ fortsættes argumentet. Da der højst kan være n egenværdier for $p(\zeta_0,\lambda)$, stopper processen.
Antag at man returnerer til den oprindelige værdi efter en p-cykel. Så vil man have defineret en funktion $F_1(\zeta)$ på ringen $\mu_1 < |\zeta - \zeta_0| < \mu_2$ som er analytisk med p værdier i denne ring. Definer $G_1(\zeta) = F_1(\zeta_0 + \zeta^p)$. Så er denne funktion en entydig (enkeltværdi) funktion på ringen $\mu_1 < |\zeta| < \mu_2$.
Da alle funktioner $\varphi_j(\zeta,z_0)$ er kontinuerte i ζ_0, har denne funktion en Laurentudvikling uden negative potenser (altså en Taylorudvikling), dvs. at $G_1(\zeta)$ rent faktisk er analytisk i $|\zeta| < \mu_2$, således at $G_1(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \zeta^l$, $|\zeta| < \mu_2$. Heraf følger, at

$$F_1(\zeta_0 + \zeta^p) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \zeta^l$$

og dermed

$$F_1(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (\zeta - \zeta_0)^{l/p}.$$

■

1.3 LEDSAGERMATRICEN

Et polynomium hvor koefficienten til højestegradsleddet er 1 kaldes et monisk polynomium.

Definition 1.25 – Ledsagermatrix
Givet et monisk polynomium

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

så kaldes matricen

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

for ledsagermatricen til $p_n(x)$.

Der gælder følgende

Proposition 1.26

$$\det(A_n - \lambda I_n) = (-1)^n p_n(\lambda), \quad \textit{for} \quad n \geq 2.$$

Altså, at rødderne i polynomiet p_n præcis er egenværdierne for matricen A_n.
Bevis:
Beviset gennemføres ved hjælp af induktion over n. Basistrin:
For $n = 2$ fås:

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & -a_0 \\ 1 & -\lambda - a_1 \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(-\lambda - a_1) - (-a_0) \\ &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \\ &= (-1)^2(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) \\ &= (-1)^2 p_2(\lambda) \end{aligned}$$

så basistrinnet er okay.

Induktionstrin:
Antag, at

$$\det(A_n - \lambda I_n) = (-1)^n p_n(\lambda), \qquad \text{for et eller andet } n.$$

Det skal nu vises, at

$$\det(A_{n+1} - \lambda I_{n+1}) = (-1)^{n+1} p_{n+1}(\lambda).$$

Matricen opskrives

$$A_{n+1} - \lambda I_{n+1} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \ddots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -\lambda & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda - a_n \end{bmatrix}$$

Ved at lave kofaktor-ekspansion langs den første række i matricen, fås determinanten til at være

$$\det(A_{n+1} - \lambda I_{n+1}) = -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda - a_n \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} a_0$$

ved at benytte induktionsantagelsen (og bemærke, at den sidste søjle i determinanten er magen til søjlen i definitionen på ledsagermatricen, bortset fra at alle elementerne har indeks der er 1 højere) fås, at ovenstående er lig

$$\begin{aligned} &= -\lambda(-1)^n (a_1 + a_2\lambda + \cdots + a_n\lambda^{n-1} + \lambda^n) + (-1)^{n+1} a_0 \\ &= (-1)^{n+1}(a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n + \lambda^{n+1}) + (-1)^{n+1} a_0 \\ &= (-1)^{n+1}(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n + \lambda^{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} p_{n+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Hermed er beviset fuldført. ■

1.4 Operatornorm

Først introduceres begrebet norm.

Definition 1.27
Et normeret vektorrum $(X, \|\cdot\|)$ *består af et vektorrum* X *og en afbildning* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ *med egenskaberne*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad , \qquad x \in X,$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad \forall x \in X \quad og \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X,$

hvor $\|\cdot\|$ *kaldes for normen.*

Der gælder følgende

Sætning 1.28
Lad T være en lineær operator på et normeret vektorrum X. Lad desuden

$$
\begin{aligned}
a &= \inf\{K \in \mathbb{R}_+ : \ \|Tx\| \le K\|x\|, x \in X\},\\
b &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\},\\
c &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \ \|x\| = 1\},\\
d &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \ \|x\| \le 1\}.
\end{aligned}
$$

For $\dim X = 0$ *sættes* $b = c = 0$*.*
Så gælder

1. $\|Tx\| \le a\|x\| \quad \forall x \in X,$
2. $a = b = c = d.$

Bevis:
Punkt 1 følger direkte af definitionen af a. Punkt 2 vil blive vist ved at vise, at

$$a \le b \le c \le d \le a.$$

For ethvert $x \in X$, $x \neq 0$, haves, at

$$b \ge \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \Leftrightarrow \|Tx\| \le b\|x\|.$$

Det vil sige, at

$$b \in \{K : \ \|Tx\| \le K\|x\|, x \in X\},$$

og da

$$a = \inf\{K : \ \|Tx\| \le K\|x\|, x \in X\},$$

må $a \le b$.
For $x \in X$, $x \neq 0$, gælder der, at

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| = \left|\frac{1}{\|x\|}\right|\|Tx\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}Tx\right\| = \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \tag{1.14}$$

Det bemærkes, at $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, hvormed

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \le \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} = c. \tag{1.15}$$

Af (1.14) og (1.15) fås således at

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le c. \tag{1.16}$$

Da (1.16) gælder for alle $x \in X$, $x \neq 0$, så gælder den specielt når der tages supremum over alle $x \in X$, $x \neq 0$ og idet

$$b = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\},$$

fås $b \leq c$.
Da

$$\{x : x \in X, \|x\| = 1\} \subset \{x : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

er

$$\sup\{x : x \in X, \|x\| = 1\} \leq \sup\{x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

og dermed $c \leq d$.
Antag, at $\|x\| \leq 1$, og $x \in X$. Så giver punkt 1, at

$$\|Tx\| \leq a\|x\| \leq a,$$

og da

$$d = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

fås $d \leq a$. ■

Nu indføres operatornormen.

Definition 1.29
For enhver lineær operator T på X defineres normen af T, betegnet $\|T\|$, som tallet

$$\|T\| = \inf\{K \in \mathbb{R}_+ : \|Tx\| \leq K\|x\|, x \in X\}.$$

Normen af T, $\|T\|$, giver et mål for størrelsen af T, idet $\|T\|$ er den mindste værdi af K, der gør, at uligheden $\|Tx\| \leq K\|x\|$ er opfyldt.
Det kan vises, at $\|T\| < \infty$.
Punkt 2 i Sætning 1.28 giver alternative udtryk for $\|T\|$, og punkt 1 giver følgende ulighed

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|, \quad x \in X, \tag{1.17}$$

som kan bruges til at bevise denne

Sætning 1.30
Lad S og T være lineære operatorer. Da vil

$$\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|. \tag{1.18}$$

Bevis:
For alle $x \in X$ gælder der ifølge (1.17), at

$$\|STx\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\,\|Tx\| \leq \|S\|\,\|T\|\,\|x\|.$$

For $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ giver dette $0 \le 0$, hvilket er sandt. For $\|x\| > 0$ omskrives til

$$\frac{\|STx\|}{\|x\|} \le \|S\| \, \|T\| \,.$$

Da denne ulighed gælder for alle x, $\|x\| > 0$, gælder den også, når der tages supremum over alle de x, der opfylder $\|x\| > 0$. Det vil sige, at

$$\begin{aligned} \|ST\| &= \sup \left\{ \frac{\|STx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0 \right\} \\ &\le \sup \{ \|S\| \, \|T\| : x \in X, x \neq 0 \} \\ &= \|S\| \, \|T\| \,, \end{aligned}$$

hvor der blev gjort brug af b fra sætning 1.28. ■

Uligheden i (1.18) gælder ikke for alle normer, hvilket følgende eksempel illustrerer.

Eksempel 1.31

Lad $\|A\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$, hvor $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, og betragt matricerne

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

haves således, at $\|A\| = \|B\| = 1$ og $\|AB\| = 2$. Heraf ses, at uligheden $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$ ikke er opfyldt. □

Som korollar til Sætning 1.30 haves

Korollar 1.32

Lad T være en lineær operator på et endeligdimensionalt komplekst vektorrum, så gælder $\left\| T^k \right\| \le \|T\|^k$, for $k = 1, 2, \ldots$.

Bevis:

Bevis føres ved hjælp af induktion.

Basistrin:

For $k = 1$ fås: $\left\| T^1 \right\| = \|T\| = \|T\|^1$, hvilket vil sige, at uligheden er opfyldt, endda med lighed.

For $k = 2$ fås: $\left\| T^2 \right\| = \|TT\| \le \|T\| \, \|T\| = \|T\|^2$, hvor uligheden følger af Sætning 1.30.

Basistrinnet er således i orden.

Induktionstrin:

Antag, at $\|T^n\| \le \|T\|^n$, for et eller andet $n > 1$, så haves:

$$\left\| T^{n+1} \right\| = \left\| T^n T \right\| \le \left\| T^n \right\| \, \|T\| \le \|T\|^n \, \|T\| = \|T\|^{n+1} \,,$$

hvor den første ulighed følger af Sætning 1.30. ■

1.5 Perturbation af resolventen

Ved spektret $\sigma(T)$ for operatoren T, forstås mængden af alle egenværdier for T. Da T er en lineær operator og derfor kan repræsenteres entydigt ved en matrix, er egenværdierne for T netop egenværdierne for denne matrix. Da egenværdierne præcis er rødderne i det karakteristiske polynomium, følger det af algebraens fundamentalsætning, sætning 1.5, at der mindst er een egenværdi (dvs. spektret altid er ikke-tomt) og højst lige så mange egenværdier som graden af det karakteristiske polynomium. Komplementærmængden til spektret for T kaldes for resolventmængden hørende til T og betegnes $\rho(T)$. $\rho(T)$ er således mængden af alle komplekse tal, som er forskellige fra egenværdierne for T. Er $\zeta \notin \sigma(T)$, så er $T-\zeta$ invertibel. Et sådant punkt kaldes regulært. $\rho(T)$ er dermed mængden af alle regulære punkter.

Definition 1.33 – Resolvent
For $\zeta \in \rho(T)$ defineres operatorværdifunktionen

$$R(\zeta) = R(\zeta, T) = (T-\zeta)^{-1}$$

som kaldes resolventen hørende til operatoren T.

Sætning 1.34
$R(\zeta)$ er en meromorf funktion.

Bevis:
Da T er en lineær operator på et endeligdimensionalt komplekst vektorrum, kan T repræsenteres ved en kvadratisk $(n \times n)$-matrix, hvormed $T-\zeta$ også kan repræsenteres ved en kvadratisk $(n \times n)$-matrix. [Lay, s. 198, Theorem 8] giver følgende formel til bestemmelse af den inverse matrix, til en invertibel kvadratisk matrix A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A,$$

hvor $\operatorname{adj} A$ er den transponerede af komplementmatricen til A. Da indgangene i $\operatorname{adj} A$ består af produkter og differenser af indgangene i A, følger det direkte, at $\operatorname{adj} A$ er analytisk, hvis A er analytisk. Bemærk, at en matrix kaldes analytisk, hvis alle dens indgange er analytiske. Det følger nu, at

$$R(\zeta) = R(\zeta, T) = (T-\zeta)^{-1} = \frac{1}{\det(T-\zeta)} C(\zeta),$$

hvor $C(\zeta)$ er den transponerede af komplementmatricen til $(T-\zeta)$. Da $\det(T-\zeta)$ er et polynomium af grad n, følger det af ovenstående, at resolventen, i dette tilfælde, er givet ved en matrix, hvis indgange er rationale funktioner, hvilket igen betyder, at resolventen er en meromorf funktion, idet der kun er singulariteter i egenværdierne og disse er poler. ■

Resolventen opfylder:

Proposition 1.35 – Første resolventligning
For ζ_1 og ζ_2 i $\rho(T)$ gælder

$$R(\zeta_1) - R(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2) R(\zeta_1) R(\zeta_2)$$

Bevis:
Der gælder

$$R(\zeta_1) = R(\zeta_1)(T-\zeta_2)R(\zeta_2) \qquad \text{og} \qquad R(\zeta_2) = R(\zeta_1)(T-\zeta_1)R(\zeta_2).$$

Første resolventligning fås nu ved subtraktion af ovenstående. ■

Bemærk, at Første resolventligning også kan skrives på formen

$$R(\zeta_1) = [1-(\zeta_2-\zeta_1)R(\zeta_1)]R(\zeta_2). \tag{1.19}$$

Af Første resolventligning følger direkte, at:

$$\frac{R(\zeta_1)-R(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2} = R(\zeta_1)R(\zeta_2) \tag{1.20}$$

for alle ζ i $\rho(T)$. Heraf følger

Korollar 1.36
For alle ζ_1 og ζ_2 i $\rho(T)$ gælder:

$$R(\zeta_1)R(\zeta_2) = R(\zeta_2)R(\zeta_1).$$

Før yderligere resultater om resolventen præsenteres, introduceres følgende:

Definition 1.37 – Neumannrækken
Lad T være en lineær operator, så kaldes summen

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

for Neumannrækken.

Det kan vises (se [Kato, s. 30, Example 4.5 (Neumann series)]), at der gælder

Proposition 1.38
For $\|T\| < 1$ er Neumannrækken

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

absolut konvergent og der gælder

$$\left\|(1-T)^{-1}\right\| \leq (1-\|T\|)^{-1}.$$

Heraf følger

Korollar 1.39
For $\zeta \in \rho(T)$, hvor $|\zeta| > \|T\|$ er

$$R(\zeta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{k+1}} T^k$$

absolut konvergent og der gælder

$$\|R(\zeta)\| \leq (|\zeta| - \|T\|)^{-1}. \tag{1.21}$$

Bevis:
For $\zeta \in \rho(T)$, hvor $|\zeta| > \|T\|$ er $\left\|\frac{1}{\zeta}T\right\| < 1$, hvormed Proposition 1.38 giver, at

$$R(\zeta) = (T-\zeta)^{-1} = -\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{1}{\zeta}T\right)^{-1} = -\frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta}T\right)^{k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{k+1}}T^{k}.$$

Desuden haves

$$\|R(\zeta)\| = \left\|-\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{1}{\zeta}T\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\zeta|}\left\|\left(1-\frac{1}{\zeta}T\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\zeta|}\left(1-\left\|\frac{1}{\zeta}T\right\|\right)^{-1} = (|\zeta|-\|T\|)^{-1}.$$

■

Bemærk, at Korollar 1.39 giver, at alle egenværdierne for T ligger indenfor eller på cirklen med centrum i origo og radius $\|T\|$. Der gælder desuden følgende

Korollar 1.40
Givet et $\zeta_0 \in \rho(T)$. For

$$|\zeta-\zeta_0| < \|R(\zeta_0)\|^{-1}$$

er Neumannrækken for resolventen givet ved

$$R(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n R(\zeta_0)^{n+1}$$

og denne er absolut konvergent.

Bevis:
Betragt den alternative form af resolventligningen (1.19), med $\zeta_1 = \zeta_0$ og $\zeta_2 = \zeta$

$$R(\zeta_0) = [1-(\zeta-\zeta_0)R(\zeta_0)]R(\zeta). \tag{1.22}$$

Det følger af proposition 1.38, at

$$[1-(\zeta-\zeta_0)R(\zeta_0)]$$

er invertibel for

$$\begin{aligned} \|(\zeta-\zeta_0)R(\zeta_0)\| &< 1 \\ |\zeta-\zeta_0|\,\|R(\zeta_0)\| &< 1 \\ |\zeta-\zeta_0| &< \|R(\zeta_0)\|^{-1}. \end{aligned}$$

Dermed giver (1.22) og Proposition 1.38 at $R(\zeta)$ er givet ved

$$R(\zeta) = [1-(\zeta-\zeta_0)R(\zeta_0)]^{-1}R(\zeta_0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n R(\zeta_0)^n\right]R(\zeta_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n R(\zeta_0)^{n+1}$$

samt at denne række er absolut konvergent for

$$|\zeta-\zeta_0| < \|R(\zeta_0)\|^{-1}.$$

■

For $\kappa \in \Omega$, hvor Ω er åben, kaldes

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)} + \kappa^2 T^{(2)} + \cdots,$$

for en familie af operatorer.

Definition 1.41
Resolventen

$$R(\zeta,\kappa) = (T(\kappa)-\zeta)^{-1}$$

for $T(\kappa)$ er defineret for alle ζ, der ikke er lig nogle af egenværdierne for $T(\kappa)$.

Betragtes en fast værdi af κ, giver Sætning 1.34, at $R(\zeta,\kappa)$ er en meromorf funktion af ζ. Faktisk gælder der følgende

Sætning 1.42
$R(\zeta,\kappa)$ er holomorf (defineret og differentiabel overalt) i de to variable ζ og κ i ethvert område, hvor ζ ikke er lig nogle af egenværdierne for $T(\kappa)$.

Bevis:
Vælg et fast $\kappa_0 \in \Omega$. Derefter vælges et fast $\zeta_0 \in \rho(T(\kappa_0))$. For at lette notationen, antages, at $\kappa_0 = 0$. Der skrives $R(\zeta) = R(\zeta,0)$. Da $T(\kappa)$ er analytisk i κ, findes der et δ_0, så at $\{\kappa : |\kappa| < \delta\} \subset \Omega$, således at der haves en konvergent potensrækkeudvikling

$$T(\kappa) = T + \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^k T^{(k)}, \quad |\kappa| < \delta.$$

Der skrives $A(\kappa) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^k T^{(k)}$. Sæt nu

$$\delta_1 = \frac{1}{2\,\|R(\zeta_0)\|}$$

og bestem derefter $\delta_2 \le \delta$, således at

$$\|A(\kappa)\| < \frac{1}{2\,\|R(\zeta_0)\|} \quad \text{for alle} \quad |\kappa| < \delta_2.$$

Sæt

$$G = \{(\zeta,\kappa) : |\zeta-\zeta_0| < \delta_1, |\kappa| < \delta_2\}.$$

Så gælder for alle $(\zeta,\kappa) \in G$, at

$$\|((\zeta-\zeta_0) - A(\kappa))R(\zeta_0)\| < 1.$$

Der gælder

$$\begin{aligned} T(\kappa)-\zeta &= T-\zeta_0 - (\zeta-\zeta_0) + T(\kappa) - T \\ &= T-\zeta_0 - (\zeta-\zeta_0) + A(\kappa) \\ &= T-\zeta_0 - [(\zeta-\zeta_0) - A(\kappa)](T-\zeta_0)^{-1}(T-\zeta_0) \\ &= [1-((\zeta-\zeta_0) - A(\kappa))(T-\zeta_0)^{-1}](T-\zeta_0) \\ &= [1-((\zeta-\zeta_0) - A(\kappa))R(\zeta_0)](T-\zeta_0). \end{aligned}$$

Heraf følger, at der for alle $(\zeta,\kappa) \in G$ haves at $\zeta \in \rho(T(\kappa))$ og

$$R(\zeta,\kappa) = R(\zeta_0)\,[1-((\zeta-\zeta_0) - A(\kappa))R(\zeta_0)]^{-1}.$$

Nu kan man gennemføre argumentet for, at $R(\zeta,\kappa)$ er separat analytisk i mængden G.
Analyticitet i ζ: For et fastholdt κ, $|\kappa| < \delta_2$, har man klart analyticitet, da det er resolventen for en operator.
Analyticitet i κ: Her vælges et fastholdt ζ_1 med $|\zeta_1 - \zeta_0| < \delta_1$. Der skal nu vises analyticitet i κ i cirkelskiven $|\kappa| < \delta_2$. Dette gøres ved at vise kompleks differentiabilitet. Vælg et fastholdt κ_1 med $|\kappa_1| < \delta_2$. Her får man brug for følgende

Lemma 1.43

$$X \to (I+X)^{-1}$$

er en kontinuert afbildning (i operatornorm) for $\|X\| < 1$.

Bevis:
Lad x_0 være fastholdt og $\|x_0\| < 1$. Der skal nu vises kontinuitet i x_0, dvs. det skal vises, at

$$\left\|(I+X_0)^{-1} - (I+Y)^{-1}\right\| < \varepsilon \quad \text{for} \quad \|X_0 - Y\| < \delta(x_0).$$

. For $\|X\| < 1$ og $\|Y\| < 1$ haves

$$\begin{aligned}(I+X)^{-1} - (I+Y)^{-1} &= (I+X)^{-1}(I+Y-(I+X))(I+Y)^{-1} \\ &= (I+X)^{-1}(Y-X)(I+Y)^{-1}.\end{aligned}$$

Heraf fås

$$\begin{aligned}\left\|(I+X_0)^{-1} - (I+Y)^{-1}\right\| &= \left\|(I+X_0)^{-1}(Y-X_0)(I+Y)^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|(I+X_0)^{-1}\right\| \|(Y-X_0)\| \left\|(I+Y)^{-1}\right\|\end{aligned}$$

Antag nu, at

$$\delta < \frac{1}{2\left\|(I+X_0)^{-1}\right\|}.$$

Skriv

$$\begin{aligned}I+Y &= I+X_0+Y-X_0 \\ &= (I+X_0)\left(I+(I+X_0)^{-1}(Y-X_0)\right).\end{aligned}$$

Det bemærkes, at

$$\begin{aligned}\left\|(I+X_0)^{-1}(Y-X_0)\right\| &\leq \left\|(I+X_0)^{-1}\right\| \|Y-X_0\| \\ &< \left\|(I+X_0)^{-1}\right\| \delta \\ &< \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sæt

$$S = (I+X_0)^{-1}(Y-X_0),$$

så haves, idet $\|S\| < \frac{1}{2}$, at

$$(I+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-S)^k,$$

hvormed

$$\left\|(I+S)^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|S\|^k < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Idet der gælder

$$I+Y = (I+X_0)(I+S)$$

fås

$$(I+Y)^{-1} = (I+S)^{-1}(I+X_0)^{-1}$$

og dermed

$$\left\|(I+Y)^{-1}\right\| < 2\left\|(I+X_0)^{-1}\right\|.$$

Uligheden i uligheden bliver således

$$\begin{aligned}\left\|(I+X_0)^{-1} - (I+Y)^{-1}\right\| &\leq \left\|(I+X_0)^{-1}\right\| \|Y - X_0\| \left\|(I+Y)^{-1}\right\| \\ &< \left\|(I+X_0)^{-1}\right\| \|Y - X_0\| \, 2 \left\|(I+X_0)^{-1}\right\| \\ &= 2\left\|(I+X_0)^{-1}\right\|^2 \|Y - X_0\|.\end{aligned}$$

Vælges nu

$$\delta(X_0) = \frac{\varepsilon}{2\left\|(I+X_0)^{-1}\right\|^2},$$

er beviset ført. ■

Tilbage til beviset:
Det haves, at for alle κ med $|\kappa| < \delta_2$ er $\zeta_1 \in \rho(T(\kappa))$ (det var på den måde mængden G var konstrueret). Specielt for $\kappa = 0$, altså $\zeta_1 \in \rho(T)$.
Der haves

$$T(\kappa) - \zeta_1 = T - \zeta_1 + A(\kappa) = (I + A(\kappa)R(\zeta_1))(T - \zeta_1)$$

og dermed

$$R(\zeta_1,\kappa) = R(\zeta_1)\,[I + A(\kappa)R(\zeta_1)]^{-1}.$$

Det skal altså vises, at

$$f(\kappa) = [I + A(\kappa)R(\zeta_1)]^{-1}$$

er analytisk for $|\kappa| < \delta_2$. Der skal vises kompleks differentiabilitet i punktet κ_1 valgt ovenfor. For $|h|$ tilstrækkelig lille har vi

$$\begin{aligned}\frac{f(\kappa_1+h) - f(\kappa_1)}{h} &= \frac{1}{h}\left([I + A(\kappa_1+h)R(\zeta_1)]^{-1} - [I + A(\kappa_1)R(\zeta_1)]^{-1}\right) \\ &= -\left([I + A(\kappa_1+h)R(\zeta_1)]^{-1}\frac{1}{h}(A(\kappa_1+h) - A(\kappa_1))R(\zeta_1)\,[I + A(\kappa_1)R(\zeta_1)]^{-1}\right).\end{aligned}$$

Da $A(\kappa)$ er differentiabel i κ_1, følger differentiabiliteten i κ af resolventen, ved at bruge kontinuiteten af den tidligere nævnte afbildning. Ved at lade $h \to 0$ fås således

$$\begin{aligned} f'(\kappa_1) &= -\left[I + A(\kappa_1)R(\zeta_1)\right]^{-1} A'(\kappa_1)R(\zeta_1)\left[I + A(\kappa_1)R(\zeta_1)\right]^{-1} \\ &= -f(\kappa_1)A'(\kappa_1)R(\zeta_1)f(\kappa_1). \end{aligned}$$

■

1.6 Singulariteter for resolventen

Da resolventen har mindst én singularitet, kan der i henhold til Laurents sætning, sætning 1.4 udvikles en Laurentrække om hver singularitet. Laurentrækken for $R(\zeta)$ i $\zeta = \lambda_h$ betragtes, idet det antages, at $\lambda_h = 0$; det vil sige

$$R(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta^n A_n.$$

Koefficienterne A_n er givet ved

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-n-1} R(\zeta)d\zeta, \tag{1.23}$$

hvor Γ er en lille positivt orienteret cirkel, som omslutter $\zeta = 0$, men ingen af de øvrige egenværdier for operatoren T. At A_n har ovenstående form, ses ved indsættelse af $R(\zeta)$ i ovenstående udtryk,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-n-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\zeta^k A_k\right)d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{k-n-1}d\zeta\right)A_k = A_n,$$

idet Laurentrækken er uniformt konvergent på Γ, og der gælder, at

$$\int_\Gamma \zeta^{k-n-1}d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \tag{1.24}$$

Integralet i (1.23) er uafhængigt af cirklen, blot den omkranser egenværdien $\zeta = 0$ og ingen af de øvrige egenværdier. Cirklen Γ kan derfor erstattes af en lidt større cirkel Γ', uden at det ændrer værdien af integralet. Dermed fås

$$\begin{aligned} A_nA_m &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-n-1}R(\zeta)d\zeta\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \zeta'^{-m-1}R(\zeta')d\zeta'\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'}\int_\Gamma \zeta^{-n-1}\zeta'^{-m-1}R(\zeta)R(\zeta')d\zeta d\zeta' \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'}\int_\Gamma \zeta^{-n-1}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}[R(\zeta')-R(\zeta)]d\zeta d\zeta', \end{aligned} \tag{1.25}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af (1.20).
Følgende sætning er nyttig i forbindelse med videre omskrivninger af (1.25)

Sætning 1.44
Lad Γ være en positivt orienteret cirkel med centrum i $\zeta = 0$, som er omsluttet af en anden positivt orienteret cirkel Γ' med samme centrum. Da gælder der, at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta &= \eta_n \zeta'^{-n-1}, \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta' &= (1-\eta_m)\zeta^{-m-1}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

hvor η_j for $j \in \{n,m\}$ er defineret som

$$\eta_j = \begin{cases} 1, & j \geq 0, \\ 0, & j < 0. \end{cases}$$

Bevis:
Det bemærkes, at ζ-værdierne ligger på cirklen Γ, mens ζ'-værdierne ligger på cirklen Γ'. Betragtes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta, \tag{1.27}$$

ses det, at da ζ' er en fast værdi, som ligger uden for cirklen Γ, har $(\zeta'-\zeta)^{-1}$ ingen singulariteter inden for cirklen Γ. Ydermere bemærkes det, at hvis $n < 0$ har ζ^{-n-1} ingen singulariteter i $\mathbb{C}$. Dermed er integranden i (1.27) analytisk og dermed holomorf inden for cirklen Γ, og der gælder derfor ifølge Cauchys integralsætning [AJ, s. 17, Corollary 4.5.], at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta = 0, \quad \text{når } n < 0.$$

Hvis $n \geq 0$, gælder der, at ζ^{-n-1} har en singularitet i $\zeta = 0$, som er inden for cirklen Γ. Dermed er $\zeta = 0$ en pol af orden $n+1$ for integranden i (1.27). Dette er samtidig den eneste pol indenfor cirklen Γ. Ifølge Cauchys residuesætning, [AJ, s. 30, Thereom 7.5 (Cauchy's residue theorem)], gælder der således, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta = \operatorname{Res}(\zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},0).$$

Nu defineres

$$H(\zeta) = \zeta^{n+1}\zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1} = (\zeta'-\zeta)^{-1}.$$

Der haves ifølge metoden i punkt 3 fra [AJ, s. 31], at

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},0) &= \frac{H^{(n)}(0)}{n!} \\ &= \left.\frac{n!(\zeta'-\zeta)^{-n-1}}{n!}\right|_{\zeta=0} \\ &= \zeta'^{-n-1}. \end{aligned}$$

Således haves

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\zeta^{-n-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta = \zeta'^{-n-1}, \quad \text{når} \quad n \geq 0,$$

hvormed første del af (1.26) er vist. Nu betragtes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta', \tag{1.28}$$

hvor det bemærkes, at ζ nu er en fast værdi, som ligger inden for cirklen Γ'. Derfor har $(\zeta'-\zeta)^{-1}$ en simpel pol i $\zeta'=\zeta$.
For $m<0$, har ζ'^{-m-1} ingen poler i $\mathbb{C}$. Der vil således gælde, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta' = \text{Res}(\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},\zeta),$$

og der gælder ifølge metoden i punkt 1 fra [AJ, s. 30], at

$$\text{Res}(\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},\zeta) = \lim_{\zeta'\to\zeta}(\zeta'-\zeta)\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1} = \zeta^{-m-1}.$$

Altså haves

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta' = \zeta^{-m-1}, \quad \text{når } m<0.$$

Hvis $m \geq 0$, har ζ'^{-m-1} en pol af orden $m+1$ i $\zeta'=0$, og integranden i (1.28) har nu polerne $\zeta'=\zeta$ og $\zeta'=0$. Derfor gælder der ifølge Cauchys residuesætning, [AJ, s. 30, Thereom 7.5 (Cauchy's residue theorem)], at

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta' &= \text{Res}(\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},\zeta)\\ &\quad + \text{Res}(\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},0).\end{aligned}$$

Funktionen $G(\zeta')$ defineres som

$$G(\zeta') = \zeta'^{m+1}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1} = (\zeta'-\zeta)^{-1}.$$

Nu er $\text{Res}(\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},0)$ givet ved

$$\begin{aligned}\text{Res}(\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1},0) &= \frac{G^{(m)}(0)}{m!}\\ &= \left.\frac{(-1)^m m!(\zeta'-\zeta)^{-m-1}}{m!}\right|_{\zeta'=0}\\ &= -\zeta^{-m-1}.\end{aligned}$$

Dermed haves, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\zeta'^{-m-1}(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta' = \zeta^{-m-1}-\zeta^{-m-1} = 0, \quad \text{når} \quad m \geq 0,$$

hvormed anden del af (1.26) er vist. ■

Der kan nu omskrives yderligere på (1.25), således at der om $A_n A_m$ gælder

$$\begin{aligned}
A_n A_m &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} R(\zeta') d\zeta d\zeta' \\
&\quad - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} R(\zeta) d\zeta d\zeta' \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \zeta'^{-m-1} R(\zeta') \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-n-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} d\zeta d\zeta' \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-n-1} R(\zeta) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} d\zeta' d\zeta \\
&= \frac{\eta_n}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \zeta'^{-n-m-2} R(\zeta') d\zeta' - \frac{1-\eta_m}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-n-m-2} R(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{\eta_n + \eta_m - 1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-n-m-2} R(\zeta) d\zeta \\
&= (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1}.
\end{aligned}$$

Undervejs er det udnyttet, at integralet, som tidligere nævnt, er uafhængigt af cirklen, så længe den omslutter de samme egenværdier, samt (1.23).
Der gælder altså

$$A_n A_m = (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1}. \tag{1.29}$$

Når $n = m = -1$, opnås således, at

$$A_{-1}^2 = -A_{-1}$$

hvilket er ækvivalent med

$$(-A_{-1})^2 = -A_{-1} \tag{1.30}$$

Dermed er $-A_{-1}$ en projektion, og den benævnes derfor P, dvs.

$$P = -A_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta) d\zeta. \tag{1.31}$$

Ydermere haves der for $n,m < -1$, at

$$\begin{aligned}
(-A_{-2})^2 &= -A_{-3}, \\
(-A_{-2})^3 &= -A_{-2}(-A_{-2})^2 = A_{-2} A_{-3} = -A_{-4}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sættes

$$-A_{-2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta R(\zeta) d\zeta = N, \tag{1.32}$$

gælder der således, at

$$A_{-k} = -N^{k-1} \quad \text{for} \quad k \geq 2.$$

Sættes

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-1} R(\zeta) d\zeta = D,$$

gælder der tilsvarende, at

$$A_n = D^{n+1} \quad \text{for} \quad n \geq 0.$$

Laurentrækken for $R(\zeta)$ i $\zeta = 0$ bliver dermed

$$\begin{aligned} R(\zeta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta^n A_n \\ &= \zeta^{-1} A_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-n-1} A_{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n A_n \\ &= -\zeta^{-1} P - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-n-1} N^n + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n D^{n+1}. \end{aligned}$$

Betragtes nu Laurentrækken for resolventen i det generelle tilfælde hvor $\zeta = \lambda_h$, $\lambda_h \neq 0$, er singulariteten, fås

$$R(\zeta) = -(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h - \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} N_h^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^n D_h^{n+1}. \tag{1.33}$$

Indsættes først $n = -1$ og $m = -2$ og derefter $n = -2$ og $m = -1$ i (1.29), ses, at der gælder, at

$$\begin{aligned} P_h N_h &= (-A_{-1})(-A_{-2}) = A_{-1} A_{-2} = -A_{-2} = N_h, \\ N_h P_h &= (-A_{-2})(-A_{-1}) = A_{-2} A_{-1} = -A_{-2} = N_h. \end{aligned}$$

Tilsvarende gælder der for $n = -1$ og $m = 0$ samt $n = 0$ og $m = -1$, at

$$\begin{aligned} P_h D_h &= (-A_{-1}) A_0 = 0, \\ D_h P_h &= A_0 (-A_{-1}) = 0. \end{aligned}$$

Af dette, og dermed

$$\begin{aligned} P_h N_h^j &= (P_h N_h) N_h^{j-1} = N_h N_h^{j-1} = N_h^j, \\ N_h^j P_h &= N_h^{j-1} (N_h P_h) = N_h^{j-1} N_h = N_h^j, \\ P_h D_h^j &= (P_h D_h) D_h^{j-1} = 0 D_h^{j-1} = 0, \\ D_h^j P_h &= D_h^{j-1} (D_h P_h) = D_h^{j-1} 0 = 0, \end{aligned}$$

samt (1.30), $P_h P_h = P_h$, ses det, at udtrykket i (1.33) er en dekomposition af operatoren $R(\zeta)$ i henhold til dekompositionen $X = M_h \oplus M'_h$, hvor $M_h = P_h X$ og $M'_h = (I - P_h) X$. Leddet

$$-(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h - \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} N_h^n$$

er principaldelen af Laurentrækken i en isoleret singularitet i $\zeta = \lambda_h$.
Da resolventen er meromorf, ifølge Sætning 1.34, giver [Conway, s. 109, 1.18 Corollary] at principaldelen i Laurentrækken for resolventen er en endelig sum. Dette medfører så, at N_h er en nilpotent operator. Det vil sige, at der ifølge [Axler, s. 167, 8.8 Corollary] gælder, at

$$N_h^{m_h} = 0, \quad m_h = \dim M_h = \dim P_h.$$

Dette medfører, at leddet

$$-(\zeta-\lambda_h)^{-1}P_h-\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta-\lambda_h)^{-n-1}N_h^n$$

i udtryk (1.33) kan reduceres til

$$-(\zeta-\lambda_h)^{-1}P_h-\sum_{n=1}^{m_h-1}(\zeta-\lambda_h)^{-n-1}N_h^n. \tag{1.34}$$

Sætning 1.45
Operatorerne P_h opfylder

$$\begin{aligned} &P_hP_k=\delta_{hk}P_h,\\ &\sum_{h=1}^{s}P_h=I,\\ &P_hT=TP_h. \end{aligned}$$

Bevis:
Det bemærkes, at

$$P_h=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}R(\zeta_h)d\zeta_h,$$

hvor Γ_h er en positivt orienteret cirkel, som omkranser egenværdien λ_h, jævnfør definitionen af P_h i (1.31) samt (1.23). Cirklerne Γ_h overlapper ikke hinanden for forskellige h og ligger heller ikke inden i hinanden for forskellige h, se Figur Dermed gælder, at

FiXme Dødelige: (skal den med?)

$$\begin{aligned} P_hP_k&=\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}R(\zeta_h)d\zeta_h\right)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}R(\zeta_k)d\zeta_k\right)\\ &=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_k}R(\zeta_h)R(\zeta_k)d\zeta_kd\zeta_h\\ &=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_k}(\zeta_k-\zeta_h)^{-1}(R(\zeta_k)-R(\zeta_h))d\zeta_kd\zeta_h\\ &=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_k}(\zeta_k-\zeta_h)^{-1}R(\zeta_k)d\zeta_kd\zeta_h\\ &\quad-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_k}(\zeta_k-\zeta_h)^{-1}R(\zeta_h)d\zeta_kd\zeta_h\\ &=-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_k}R(\zeta_k)\int_{\Gamma_h}(\zeta_h-\zeta_k)^{-1}d\zeta_hd\zeta_k\\ &\quad-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_h}R(\zeta_h)\int_{\Gamma_k}(\zeta_k-\zeta_h)^{-1}d\zeta_kd\zeta_h. \end{aligned}$$

Det bemærkes, at der ifølge [AJ, s. 28, Proposition 7.3] gælder, at

$$\int_{\Gamma_k}(\zeta_k-\zeta_h)^{-1}d\zeta_k=0,$$

hvis ζ_h ikke er omsluttet af cirklen Γ_k, og at

$$\int_{\Gamma_k} (\zeta_k - \zeta_h)^{-1} d\zeta_k = 2\pi i, \tag{1.35}$$

hvis ζ_h er omsluttet af cirklen. Tilsvarende gælder ved ombytning af h og k. Dette medfører, at hvis $h \neq k$, så gælder der, at

$$P_h P_k = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_k} R(\zeta_k) \cdot 0 d\zeta_k - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_h} R(\zeta_h) \cdot 0 d\zeta_h = 0.$$

Hvis $h = k$, vil den ene cirkel ligge uden om den anden. I tilfældet, hvor Γ_k er den yderste, vil der gælde, at

$$-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_k} R(\zeta_k) \int_{\Gamma_h} (\zeta_h - \zeta_k)^{-1} d\zeta_h d\zeta_k = 0,$$

da ζ_k i så fald ligger uden for cirklen Γ_h. Men når Γ_k er den yderste cirkel, gælder der så, at

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_h} R(\zeta_h) \int_{\Gamma_k} (\zeta_k - \zeta_h)^{-1} d\zeta_k d\zeta_h \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_h} R(\zeta_h) 2\pi i d\zeta_h \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_h} R(\zeta_h) d\zeta_h \\
&= P_h.
\end{aligned}$$

Havde det i stedet været tilfældet, at Γ_h var den yderste cirkel, ville det modsatte have været tilfældet; integralet, hvor der først integreres over ζ_h, ville give P_k, som i dette tilfælde er det samme som P_h, mens integralet, hvor der først integreres over ζ_k, ville give 0. Heraf ses, at der må gælde, at

$$P_h P_k = \delta_{hk} P_h,$$

og dermed er det første punkt i sætningen bevist. Det bemærkes, at alle egenværdierne for operatoren T er poler for funktionen $R(\zeta)$. Det betyder, at der ifølge Cauchys residuesætning, [AJ, s. 30, Theorem 7.5 (Cauchy's residue theorem)], gælder, at

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta) d\zeta = \sum_{h=1}^{s} \operatorname{Res}(R(\zeta), \lambda_h), \tag{1.36}$$

hvor Γ er en positivt orienteret cirkel, som omkranser samtlige egenværdier og s er antallet af forskellige egenværdier/poler. Om venstresiden i (1.36) gælder, at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} T^n d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\Gamma} \zeta^{-n-1} d\zeta \right) T^n,
\end{aligned}$$

Hvor det blev benyttet, at

$$R(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} T^n,$$

for $|\zeta| > \|T\|$ (se Korollar 1.39). Det bemærkes nu, at ifølge (1.24) er $\int_\Gamma \zeta^{-n-1} d\zeta = 0$ for $n \neq 0$, og dermed kan summen reduceres til leddet hørende til $n = 0$. Integralet i dette led giver ifølge (1.24) $2\pi i$; det vil sige

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\zeta) d\zeta = \frac{-1}{2\pi i}(2\pi i) T^0 = -I. \tag{1.37}$$

Ifølge [AJ, s. 28, Theorem 7.2.] gælder der, at

$$\operatorname{Res}(R(\zeta), \lambda_h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(\zeta) d\zeta = -P_h,$$

hvor Γ_h er en positivt orienteret cirkel med centrum i λ_h, som er så lille, at den ikke omkranser andre egenværdier end λ_h. Indsættes dette samt (1.37) i (1.36), fås

$$-I = \sum_{h=1}^{s} (-P_h),$$

som er ækvivalent med andet punkt i sætningen, der således er bevist. Der gælder, idet $R(\zeta)T = TR(\zeta)$ ifølge [Kato, s. 36, Problem 5.4], at

$$\begin{aligned} P_h T &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(\zeta) d\zeta\right) T = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(\zeta) T d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} T R(\zeta) d\zeta = T\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(\zeta) d\zeta\right) \\ &= T P_h, \end{aligned}$$

og det sidste punkt i sætningen er bevist. ■

Der gælder ifølge (1.33) og (1.34), at $R(\zeta)$ kan skrives som

$$R(\zeta) = -(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h - \sum_{n=1}^{m_h - 1} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} N_h^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^n D_h^{n+1}, \tag{1.38}$$

for hvert λ_h når $|\zeta - \lambda_h| < \delta_h$, hvor δ_h er afstanden fra egenværdien λ_h til den nærmeste af de øvrige egenværdier, se Figur . Det bemærkes, at det sidste led i (1.38) er en konvergent potensrækkeudvikling, og de to første led i (1.38) er principaldelen for udtrykket. Da spektret for T altid er ikke-tomt, er $R(\zeta)$ ikke analytisk på hele $\mathbb{C}$. Trækkes principaldelen fra alle rækkeudviklingerne omkring hver egenværdi fra $R(\zeta)$, fås en ny funktion, $g(\zeta)$,

FiXme Dødelige: (skal den med?)

$$g(\zeta) = R(\zeta) + \sum_{h=1}^{s}\left((\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h + \sum_{n=1}^{m_h - 1} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} N_h^n\right). \tag{1.39}$$

Det bemærkes, at da $R(\zeta)$ er analytisk for $|\zeta| > \|T\|$ ifølge Korollar 1.39, gælder der samtidig, at principaldelene også er analytiske for $|\zeta| > \|T\|$, og dermed er $g(\zeta)$ analytisk for $|\zeta| > \|T\|$, idet en endelig sum af analytiske funktioner er analytisk. Der gælder, at når

samtlige principaldele for $R(\zeta)$ trækkes fra $R(\zeta)$, ophæves singulariteterne for $R(\zeta)$ (idet singulariteterne befinder sig i principaldelene), og dermed er $g(\zeta)$ analytisk på hele $\mathbb{C}$.
Det ønskes nu vist, at $g(\zeta)$ er begrænset. Det er praktisk, at betragte de to tilfælde $|\zeta| > \|T\|+1$ og $|\zeta| \le \|T\|+1$ hver for sig.
Først betragtes tilfældet $|\zeta| > \|T\|+1$:
For $|\zeta| > \|T\|+1$ fås, idet $|\lambda_h| \le \|T\|$, at

$$\begin{aligned} |\zeta| &> \|T\|+1 \ge |\lambda_h|+1 \\ |\zeta-\lambda_h| &> |\zeta|-|\lambda_h| > 1 \\ |\zeta-\lambda_h|^n &> 1 \quad \text{for} \quad n=1,2,\dots \\ |\zeta-\lambda_h|^{-n} &< 1 \quad \text{for} \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

Dog vil der for $n = 1$ i stedet blive gjort brug af uligheden $|\zeta-\lambda_h|^{-1} \le (|\zeta|-\|T\|)^{-1}$, som følger af at $|\lambda_h| \le \|T\|$. Disse uligheder samt (1.21) giver nu anledning til følgende vurdering

$$\begin{aligned} \|g(\zeta)\| &= \left\| R(\zeta) + \sum_{h=1}^{s} \left((\zeta-\lambda_h)^{-1} P_h + \sum_{n=1}^{m_h-1} (\zeta-\lambda_h)^{-n-1} N_h^n \right) \right\| \\ &= \left\| R(\zeta) + (\zeta-\lambda_h)^{-1} \sum_{h=1}^{s} \left(P_h + \sum_{n=1}^{m_h-1} (\zeta-\lambda_h)^{-n} N_h^n \right) \right\| \\ &\le \|R(\zeta)\| + |\zeta-\lambda_h|^{-1} \sum_{h=1}^{s} \left(\|P_h\| + \sum_{n=1}^{m_h-1} |\zeta-\lambda_h|^{-n} \|N_h\|^n \right) \\ &\le \frac{1}{|\zeta|-\|T\|} + \frac{1}{|\zeta|-\|T\|} \sum_{h=1}^{s} \left(\|P_h\| + \sum_{n=1}^{m_h-1} \|N_h\|^n \right) \\ &= \frac{1+c}{|\zeta|-\|T\|}, \end{aligned}$$

hvor $c = \sum_{h=1}^{s} \left(\|P_h\| + \sum_{n=1}^{m_h-1} \|N_h\|^n \right)$ er uafhængig af ζ. Det følger således af ovenstående vurdering, at $g(\zeta) \to 0$ for $\zeta \to \infty$.
Nu betrages tilfældet $|\zeta| \le \|T\|+1$:
I dette tilfælde er der to muligheder: Enten befinder ζ sig i nærheden af en af singulariteterne (dvs. egenværdierne for T), eller også gør den ikke. Dette præciseres i det følgende. Antag først, at ζ befinder sig i nærheden af singulariteten λ_h, hvilket skal forstås som at $|\zeta-\lambda_h| < \frac{\delta_h}{2}$, hvor δ_h er afstanden fra egenværdien λ_h til den nærmeste af de øvrige egenværdier. Når dette er tilfældet, kan $R(\zeta)$ skrives som i (1.38), og ved indsættelse af dette udtryk i udtrykket (1.39) for $g(\zeta)$, fås

$$g(\zeta) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne h}}^{s} \left((\zeta-\lambda_j)^{-1} P_j + \sum_{n=1}^{m_j-1} (\zeta-\lambda_j)^{-n-1} N_j^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta-\lambda_h)^n D_h^{n+1}.$$

Det bemærkes, at $\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta-\lambda_h)^n D_h^{n+1}$ er konvergent inden for denne cirkel og derfor også begrænset. Resten af udtrykket for $g(\zeta)$ består af et endeligt antal begrænsede led, og dermed er $g(\zeta)$ begrænset i dette tilfælde. Antag nu, at ζ ikke befinder sig i nærheden af nogle af singulariteterne, hvilket skal forstås som at ζ ikke er indeholdt i een eneste af de åbne cirkler omkring hver af singulariteterne, hvor der findes en Laurentudvikling af resolventen. Hvis dette er tilfældet, vil ζ befinde sig i en mængde, som er lukket og begrænset, og dermed kompakt. Da $R(\zeta)$ er en analytisk funktion (og dermed specielt kontinuert) på denne kompakte mængde, gælder der ifølge [Apostol, s. 83, Theorem 4.27], at $R(\zeta)$ er begrænset på denne mængde. Resten af $g(\zeta)$ (som givet i (1.39)) består af et endeligt antal begrænsede led, og $g(\zeta)$ er derfor også begrænset i dette tilfælde. Da de to tilfælde tilsammen dækker hele $\mathbb{C}$, er det således vist, at $g(\zeta)$ er begrænset på hele $\mathbb{C}$. Da $g(\zeta)$ er en hel, begrænset funktion på $\mathbb{C}$, gælder der ifølge Liouvilles sætning [AJ, s. 22, Theorem 5.7 (Liouville)] at $g(\zeta)$ er en konstant funktion, og da $g(\zeta) \to 0$ for $\zeta \to \infty$, må der gælde, at $g(\zeta) \equiv 0$. Dermed fås stambrøksopsplitningen af $R(\zeta)$ vha. (1.39) som

$$R(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s} \left((\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h + \sum_{n=1}^{m_h - 1} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} N_h^n \right). \tag{1.40}$$

Det bemærkes, at der gælder

$$\begin{aligned}
(T - \lambda_h I) D_h &= (T - \lambda_h I) A_0 \\
&= (T - \lambda_h I) \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda_h} R(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda_h} (T - \lambda_h I)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda_h} \big((T - \zeta I) + (\zeta I - \lambda_h I) \big)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda_h} (T - \zeta I)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda_h} (\zeta - \lambda_h) I (T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda_h} I d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= I - P_h.
\end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn følger af (1.35) (idet Γ omslutter samtlige egenværdier og dermed specielt λ_h) og definitionen af P_h (1.31). Tilsvarende kan det vises, at der gælder

$$D_h (T - \lambda_h I) = I - P_h.$$

Desuden gælder der, at

$$\begin{aligned}
(T - \lambda_h I) P_h &= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma (T - \lambda_h I)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \big((T - \zeta I) + (\zeta I - \lambda_h I) \big)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma (T - \zeta I)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta - \lambda_h) I (T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma I d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta - \lambda_h)(T - \zeta I)^{-1} d\zeta \\
&= N_h.
\end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn følger at at integranden i det første integral har en stamfunktion, hvormed integralet langs den lukkede kurve Γ giver nul ifølge [AJ, s. 12, Theorem 3.16] samt definitionen af N_h (1.32). Tilsvarende kan det vises, at der gælder

$$P_h (T - \lambda_h I) = N_h.$$

1.7 Eksempler

For at illustrere indholdet af (1.40)) betragtes nedenfor en række matricer. Disse matricer har kun reelle egenværdier, hvilket dog ikke behøver at være tilfældet i de generelle resultater præsenteret i de foregående kapitler. Reelle egenværdier illustrerer den beviste teori lige så godt som komplekse egenværdier, men udregningerne lettes.

1.7.1 Operator repræsenteret ved (2×2)-matrix

For en (2×2)-matrix kan der enten være to forskellige egenværdier hver med algebraisk multiplicitet 1 eller en egenværdi med algebraisk multiplicitet 2. I begge disse tilfælde kan matricen være normal, hvilket vil medføre, at den nilpotente matrix er 0-matricen, som her betegnes 0. Dette vil imidlertid ikke umiddelbart kunne ses af (1.40) i det førstnævnte tilfælde, da den nilpotente matrix ikke optræder her.

Eksempel 1.46
Betragt matricen T, som er givet ved

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Her er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 4$ egenværdier med algebraisk multiplicitet 1; det vil sige $m_1 = 1$ og $m_2 = 1$. Heraf ses desuden, at resolventmængden i dette tilfælde er $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{-1,4\}$. I dette tilfælde kan $R(\zeta)$ skrives som

$$R(\zeta) = -\left(\frac{1}{\zeta+1}\,\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta-4}\,\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right).$$

Dette ses at passe med (1.40), idet direkte udregninger viser, at matricerne

$$P_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

er idempotente og dermed projektionsmatricer. □

Eksempel 1.47
Betragt matricen T, som er givet ved

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Her er $\lambda_1 = 2$ en egenværdi med algebraisk multiplicitet 2; det vil sige $m_1 = 2$. Heraf ses desuden, at resolventmængden i dette tilfælde er $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{2\}$. I dette tilfælde kan $R(\zeta)$ skrives som

$$R(\zeta) = -\left(\frac{1}{\zeta-2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(\zeta-2)^2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Dette ses at passe med (1.40), idet direkte udregninger viser, at matricerne

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad N_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

er henholdsvis en idempotent matrix (og dermed en projektionsmatrix) og en nilpotent matrix. □

1.7.2 Operator repræsenteret ved (3×3)-matrix

For en (3×3)-matrix kan der enten være tre forskellige egenværdier hver med algebraisk multiplicitet 1 eller to forskellige egenværdier, hvor den ene har algebraisk multiplicitet 1, og den anden har algebraisk multiplicitet 2, eller en egenværdi med algebraisk multiplicitet 3. I alle tre tilfælde kan matricen være normal, hvilket vil medføre, at den nilpotente matrix er 0-matricen, som her benævnes 0. Dette vil imidlertid ikke umiddelbart kunne ses af (1.40) for de egenværdier, der har algebraisk multiplicitet 1, da den nilpotente matrix ikke optræder for disse.

Eksempel 1.48
Betragt matricen T,som er givet ved

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Her er $\lambda_1 = 2$ en egenværdi med algebraisk multiplicitet $m_1 = 2$, og $\lambda_2 = 9$ en egenværdi med algebraisk multiplicitet $m_2 = 1$. Heraf ses desuden, at resolventmængden i dette tilfælde er $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{2,9\}$. I dette tilfælde kan $R(\zeta)$ skrives som

$$R(\zeta) = -\left(\frac{1}{\zeta - 2} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -2 & 8 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta - 9} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \right).$$

Dette ses at passe med (1.40) med $N_h = 0$. Ved direkte udregning ses det, at matricerne

$$P_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -2 & 8 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P_2 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

er idempotente og dermed projektionsmatricer. □

(

KILDER

[Apostol, 1974] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison Wesley, 2. udgave, 1974.

[Axler, 1999] Sheldon Axler. *LINEAR ALGEBRA DONE RIGHT.* Springer, 2. udgave, 1999.

[Cohen, 1999] Arjeh M. Cohen. *Algebra Interactive.* Springer, 1. udgave, 1999.

[Conway, 1986] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable.* Springer Verlag, 2. udgave, 1986.

[Jensen, 2005] Arne Jensen. *A short introduction to complex analysis.* Department of Mathematical sciences, Aalborg university, revideret udgave, 2005.

[Kato, 1966] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, 1. udgave, 1966.

[Knopp, 1947] Konrad Knopp. *Theory of Functions – Part 2.* Dover Publications, 1. udgave, 1947.

[Lay, 1998] David C. Lay. *Linear algebra and its applications.* Addison wesley, 2. udgave, 1998.