

GRAFER MED MAKSIMAL GRAD d , DIAMETER k OG LILLE DEFEKT

Speciale skrevet af

Anita Abildgaard Sillasen



Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet



TITEL:

Grafer med maksimal grad d , diameter k og lille defekt

SPECIALE PERIODE:

2/2/2009 – 10/6/2009

SKREVET AF:

Anita Abildgaard Sillasen

VEJLEDER:

Leif Kjær Jørgensen

ANTAL KOPIER: 7

ANTAL SIDER: 88

AFSLUTTET: 10/06 – 2009

SYNOPSIS:

Rapporten er resultatet af speciale perioden på 10. semester i diskret matematik. Specialet tager udgangspunkt i det såkaldte grad/diameter-problem, der omhandler hvor store grafer man kan konstruere, når en maksimal grad d og diameter k er givet på forhånd. En graf der har maksimal grad d og diameter k kaldes en (d,k) -graf og har $n(d,k)$ knuder.

I Kapitel 1 bliver en teoretisk øvre grænse for $n(d,k)$ givet vha. Mooregrænsen $M(d,k)$. Desuden bliver det gennemgået, hvordan det kan bevises, at det er meget få (d,k) -grafer, der har $M(d,k)$ knuder. I Kapitel 2 forklares det hvorfor der eksisterer meget få (d,k) -grafer, der har $M(d,k) - 1$ knuder, og derfor bliver forskellige egenskaber vedrørende (d,k) -grafer med $M(d,k) - 2$ knuder betragtet i Kapitel 3. Specielt bliver det bevist, at der eksisterer meget få $(3,k)$ -grafer med $M(3,k) - 2$ knuder, hvilket er grunden til, at Kapitel 4 omhandler $(3,k)$ -grafer med $M(3,k) - 4$ knuder. Igen bevises det, at det er meget få grafer af denne type der eksisterer. Afslutningsvis betragtes nogle af de største kendte (d,k) -grafer. Da mange af disse store grafer er Cayley-grafer betragtes desuden en simpel måde at konstruere store Cayley-grafer på, inden resultaterne i specialet summeres op i Kapitel 6.



Forord

Dette speciale er resultatet af mit projektarbejde på 10. semester ved Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet. Projektet tager udgangspunkt i grafteoretiske problemer og løsninger hertil, som kan anvendes til at konstruere netværk med ønskede egenskaber.

De faglige forudsætninger for at kunne læse specialet er et basalt kendskab til grafteori, algebra og lineær algebra, se evt. [1], [2] og [3].

Specialet beskæftiger sig udelukkende med simple ikke-orienterede grafer, dvs. grafer, der ikke indeholder loops, parallelle kanter eller retninger på kanterne. En kant mellem de to knuder x og y vil blive betegnet med xy , mens en vej imellem x og y vil blive betegnet som en $x \sim y$ -vej. Længden af en korteste vej mellem de to knuder x og y vil blive betegnet med $d(x,y)$, som også siges at være afstanden mellem x og y . En vej af længde l vil blive betegnet som en l -vej og en kreds af længde m vil blive betegnet som en m -kreds.

Jeg vil gerne rette en stor tak til min vejleder Leif Kjær Jørgensen for faglig bistand og vejledning.

Anita Abildgaard Sillasen



English Summary

This Master Thesis in Mathematics concerns the degree/diameter problem for simple undirected graphs. The problem arises in the study of interconnection networks, and is to determine the largest possible number of vertices, hence the largest possible order, in a graph with given maximal degree d and given diameter k . A graph with maximal degree d and diameter k is called a (d,k) -graph and is said to have $n(d,k)$ vertices.

A theoretical upper bound on $n(d,k)$ is given as the Moore bound,

$$M(d,k) = 1 + \sum_{i=1}^k d(d-1)^{i-1},$$

and a (d,k) -graph with order $M(d,k)$ is called a Moore graph. In terms of eigenvalues and their multiplicities in the adjacency matrix of a Moore graph it is proven that only a few values of d and k ensures (d,k) -graphs which have order $M(d,k)$. These values are given by $k = 1$, $d = 2$ and $k = 2$ where $d = 3, 7$ and possible 57. If a (d,k) -graph has $n(d,k) = M(d,k) - \delta$ vertices, then it is said to have defect δ .

Because there are only a few values of d and k , for which there exists (d,k) -graphs of defect 0, (d,k) -graphs with defect 1 are of interest. A regular (d,k) -graph with odd defect must have even degree, and hence so does the (d,k) -graphs of defect 1. Properties of the adjacency matrix and its eigenvalues are used to prove there only exists one $(d,2)$ -graph of order $M(d,2) - 1$, namely the circuit of length 4. The same proof strategy can also be used for proving no other (d,k) -graph with order $M(d,k) - 1$ exists.

Hence, the next (d,k) -graphs of interest are the (d,k) -graphs of defect 2. General properties for these graphs are proven by means of contradictions to the girth and diameter. It is also proven that no $(3,k)$ -graph with $M(3,k) - 2$ vertices can exist, except for a $(3,2)$ - and $(3,3)$ -graph, and properties of $(4,k)$ -graphs with order $M(4,k) - 2$ are given. Some results from the literature for $(d,2)$ -graphs with order $M(d,2) - 2$ are given at the end of the chapter.

The only graphs which have proven upper bound $M(d,k) - 4$ for all $k \geq 3$ are the $(3,k)$ -graphs, which is the reason for studying graphs with degree 3 and defect 4. It is proven that $(3,k)$ -graphs with defect 4 only exists for $k = 2,3$, again by means of contradictions to the girth and diameter.

Finally some of the largest known graphs are presented and the development in this area is discussed, along with why some of the largest known graphs are optimal. As many of the largest known graphs are Cayley graphs, a simple way of constructing large Cayley graphs with order within half the optimal order are given.



Indhold

Forord	3
English Summary	5
1 Indledning	9
1.1 Moore-grafer	10
2 Grafer med defekt 1	17
2.1 Generelle egenskaber	18
2.2 Grafer med diameter 2	19
2.3 Andre $(d,k,1)$ -grafer	21
3 Grafer med defekt 2	23
3.1 Grafer med grad 3	28
3.2 Generelle egenskaber	32
3.3 Egenskaber for grafer med grad 4	34
3.4 Andre resultater	37
4 Grafer med grad 3 og defekt 4	41
4.1 Regulære grafer	41
4.2 Grafer med diameter 2 og 3	44
4.3 Grafer med diameter mindst 4	46
4.3.1 Diameter 4	48
4.3.2 Diameter mindst 5	54
5 Store grafer	75
5.1 De største kendte grafer	75
5.2 Store knudetransitive grafer	79
5.2.1 Store Cayley-grafer med diameter 2	80
6 Afrunding	85
Litteratur	87

Indledning

I denne såkaldte højteknologiske tid er vi i stor grad afhængige af forskellige former for teknologiske netværk. Hvordan netværkene ser ud, afhænger i stor grad af, hvad deres anvendelse er. Det kan være alt fra netværk som telefonnetværket til netværk, der forbinder komponenterne i en chip. Uanset hvilket netværk man betragter, er man dog interesseret i at finde det optimale netværk, men hvad det optimale netværk er, afhænger i stor grad af, hvad anvendelsen af netværket er. I [4] præsenteres nogle af de egenskaber for grafer, der kan anvendes til at beskrive et optimalt netværk;

Lille maksimal grad: Graden svarer til antal direkte forbindelser, en komponent kan have til andre komponenter i netværket. For en komponent kan der være tekniske restriktioner på gradens størrelse, men det er også ønskeligt at have en lille maksimal grad i forbindelse med omkostningerne for netværket og i forbindelse med chip-netværk, hvor pladsen er lille, for jo større grad, jo flere mulige forbindelser, der kan optage plads.

Lille diameter: Diameteren er det højeste antal forbindelser mellem komponenterne som en meddelelse skal igennem for at nå fra en komponent til en anden, dvs. diameteren er proportional med overførelses-hastigheden i netværket. Jo mindre diameter, jo større overførelses-hastighed, hvilket er grunden til, at diameteren ønskes lille.

Høj sammenhængsgrad: Sammenhængsgraden svarer til, hvor mange forbindelser mellem komponenterne, der kan gå i stykker, sådan at der stadig kan overføres meddelelser mellem to vilkårlige komponenter. Sammenhængsgraden er altså et udtryk for, hvor pålideligt netværket er, og den ønskes derfor at være høj.

Simpel routing algoritme: Planlægningen af ruter fra hver af komponenterne til alle de andre komponenter i netværket, det såkaldte routing, afhænger i høj grad af netværkets struktur, og derfor ønskes strukturen af netværket at være således, at det er simpelt at finde sådanne ruter.

Andre strukturer som delgraf: For at kunne anvende bestemte algoritmer på en graf, er det nødvendigt, at grafen indeholder en struktur, som algoritmen er

konstrueret til at køre på. Derfor er man ofte interesseret i, at netværkene skal indeholde bestemte delgrafer, således at det er muligt at køre bestemte algoritmer på dem.

Symmetri: En ønskelig adfærd for komponenterne er, at de opfører sig ens og kommunikerer på tilsvarende måder. Dette gør det nemmere at udregne forskellige værdier for grafen, som f.eks. diameteren og det gør det simple at konstruere nogle algoritmer.

Mulighed for udvidelse: Det skal ikke bare være muligt at konstruere et netværk af en hvis størrelse med ønskelige egenskaber, men det skal også være muligt at udvide eksisterende netværk således, at de bibeholder de ønskelige egenskaber.

Effektivt layout af chips: Dette inkluderer blandt andet, at der ikke må eksistere forbindelser, der krydser hinanden, idet signalerne, der går igennem forbindelserne, så kan forstyrre hinanden. Det indebærer også en begrænsning på, hvor meget ledning, der kan anvendes til forbindelserne og hvor meget netværket fysisk må fylde.

Ovenstående er altså en liste over de ting, der skal være opfyldt for at have det bedst tænkelige netværk, men det ses også, at nogle af punkterne arbejder imod hinanden. F.eks. vil en komplet graf opfylde alle punkter bortset fra, at graden ikke er lille og at det ikke vil være et effektivt layout til chips. Desuden vil omkostningerne ved et sådan netværk være høje, hvilket der ikke er taget højde for i ovenstående liste. I et træ er det simpelt at finde ruter, det er simpelt at udvide træet og det er et effektivt layout til chips, men sammenhængsgraden er dårlig. Derfor er det klart, at man hver gang, når man skal konstruere et nyt netværk, må sætte sig ind i hvilke af ovenstående ting, der er vigtigst i den pågældende situation.

Hvis både graden og diameteren skal være lille i en graf, afhænger det selvfølgelig af hvordan man tolker "lille", når man skal undersøge om det kan lade sig gøre. Derfor er der blevet forsket en del i det såkaldte grad/diameter-problem, som går ud på at undersøge hvor mange knuder, der kan være i en graf af maksimal grad d og diameter k .

En (d,k) -graf er en graf med maksimal grad d og diameter k . Lad antallet af knuder i en sådan graf være givet ved $n(d,k)$. Så ønsker man at finde en (d,k) -graf således at $n(d,k)$ er så stor som muligt. En (d,k) -graf med det største antal knuder blandt alle (d,k) -grafer kaldes en maksimal (d,k) -graf. Derfor vil jeg i det næste afsnit se nærmere på hvor mange knuder, der maksimalt kan være i en (d,k) -graf.

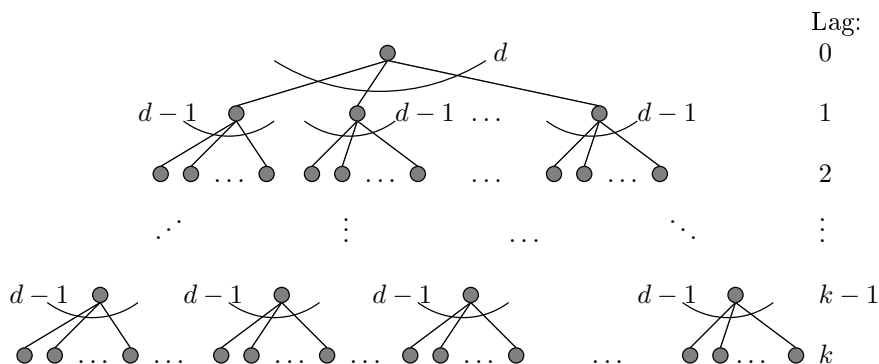
1.1. Moore-grafer

Moore var den første, der kom med en teoretisk øvre grænse for, hvor mange knuder der kan være i en (d,k) -graf og spørgsmålet om hvorvidt der eksisterer grafer som har netop dette antal knuder [5]. Den teoretiske øvre grænse kaldes derfor ofte for Moore-grænsen og den opnås ved at indse, at fra en vilkårlig knude er der maksimalt $d(d-1)^{i-1}$ knuder som ligger i afstand i fra denne knude for alle $i = 1, \dots, k$, og desuden er der én knude, nemlig knuden selv, som ligger i afstand 0. Heraf får man

at Moore-grænsen er givet ved

$$M(d,k) = 1 + \sum_{i=1}^k d(d-1)^{i-1}.$$

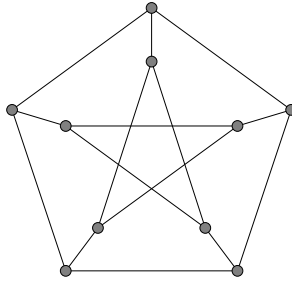
En Moore-graf er så en (d,k) -graf, som har præcist $M(d,k)$ knuder, og det er klart, at det er en maksimal (d,k) -graf. Gældende for en Moore-graf er, at hvis man udvælger en knude som roden i et hierarki, så vil hierarkiet altid se ens ud, uanset hvilken knude man vælger som roden, se Figur 1.1, for ellers vil der opstå en modstrid med enten antallet af knuder, diameteren eller graden. Heraf ses det også at enhver Moore-graf er d -regulær. Desuden er omkredsen i grafen $2k+1$, da der mellem to vilkårlige knuder maksimalt eksisterer én vej af længde højst k .



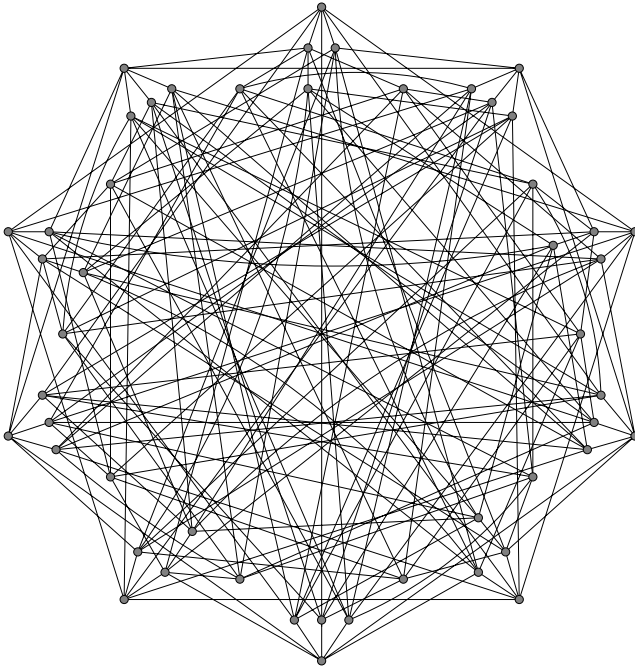
Figur 1.1: Hierarkiet for en Moore-graf.

Det er klart, at hvis $k = 1$, så eksisterer der Moore-grafer, der er givet ved de komplette grafer, altså hvor $d = M(d,k) - 1$. For $d = 2$ er $(2k+1)$ -kredse Moore-grafer.

Hoffman og Singleton var nogle af de første, som kom med resultater vedrørende Moore-grafer. I [5] fra 1960 beviste de, at der ikke eksisterer Moore-grafer for $k = 2$ når $d \neq 2,3,7,57$. Dette gjorde de ved at betragte egenverdier for nabomatrixen til en eventuel Moore-graf, og specielt vise at multipliciteten af egenverdierne kun kan være heltallige, hvis $d = 2,3,7$ eller 57 . Men selvom eksistensen af de fleste Moore-grafer for $k = 2$ er udelukket, garanterer det ikke, at der eksisterer Moore-grafer for $d = 2,3,7$ og 57 . For at finde ud af om de eksisterer, er man enten nødt til at bevise, at de ikke eksisterer, eller man bliver nødt til at konstruere graferne. For $d = 2$ er det som nævnt en 5-kreds, som udgør Moore-grafen, mens det for $d = 3$ er Petersen-grafen med $M(3,2) = 10$ knuder, se Figur 1.2. Hoffman-Singleton-grafen er Moore-grafen med $d = 7$ og $M(7,2) = 50$ knuder, se Figur 1.3, og både denne og Petersen-grafen er entydige, hvilket også blev bevist i [5].



Figur 1.2: Petersen-grafen.



Figur 1.3: Hofmann-Singleton-grafen [6]

Ovenstående grafer, har man altså bevist, er Moore-grafer, men det forholder sig anderledes med $(57,2)$ -grafen, idet man ikke ved, om der eksisterer en Moore-graf med $k = 2$ og $d = 57$, men man ved den vil have $M(57,2) = 3250$ knuder, hvis den eksisterer.

Hoffman og Singleton beviste også i [5] at den eneste Moore-graf, der eksisterer for $k = 3$ er en $(2,3)$ -graf, altså en 7-kreds. I de efterfølgende år blev der forsket en del mere i Moore-grafer, der blev bevist at forskellige specielle tilfælde af Moore-grafer ikke eksisterede, se [6] for konkrete eksempler, men det var først i 1973 at Damerell i [7] og Bannai og Ito uafhængigt i [8] beviste, at der ikke eksisterer Moore-grafer for $d, k \geq 3$. Begge beviser tager udgangspunkt i egenværdierne til nabomatricen A for en Moore-graf. Jeg vil her summere nogle af de egenskaber op for Moore-grafer, som

blev brugt i beviserne, og som jeg også brugte i [9] til at gennemgå Damerells bevis. Grunden til, at jeg ønsker at summere disse egenskaber op, er at lignende argumenter kan bruges i beviser for mindre grafer, som jeg vil vise i Kapitel 2.

Først ser man på de såkaldte afstandsmatricer, der for en vilkårlig graf G med knudemængde $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, er givet ved

$$(A_i)_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } d(v_j, v_l) = i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle $i = 0, \dots, k$, hvor det altså fremgår af, at hvis der eksisterer en korteste vej af længde i mellem v_j og v_l , så er $(A_i)_{jl} = 1$. Der gælder desuden, at $A_1 = A$, hvor A er nabomatricen til G , og at $A_0 = I$, hvilket ses direkte af definitionen af A_i .

For en Moore-graf bemærkes det, at $\sum_{i=0}^k A_i = J$, hvor J er en matrix bestående af 1-taller på alle indgange, idet præcist ét af A_i 'erne har et 1-tal på hver indgang, da der er præcist én vej af længde højst k mellem to vilkårlige knuder. Derfor er A_0, A_1, \dots, A_k også lineært uafhængige for en Moore-graf.

For en såkaldt afstandsregulær graf G kan man opstille en ligning, der definerer afstandsmatricerne rekursivt, givet ved $AA_{s-1} = c_s A_s + a_{s-1} A_{s-1} + b_{s-2} A_{s-2}$ for alle $s = 2, \dots, k$. Damerell beviste i [7], ved hjælp af resultater af Biggs i en tidligere udgave af [10], at Moore-grafer er afstandsregulære, og dermed kan man opstille ligningen givet ved

$$A_2 = A^2 - dI, \tag{1.1}$$

dvs. her er $c_2 = 1$, $a_1 = 0$ og $b_0 = d$ og ligningen

$$A_s = AA_{s-1} - (d-1)A_{s-2}, \tag{1.2}$$

dvs. $c_s = 1$, $a_{s-1} = 0$ og $b_{s-2} = d-1$ for alle $s = 3, \dots, k$. Ligningen (1.1) opstår ved at indse, at $(A^i)_{jl}$ vil være antallet af stier af længde i , som der er fra v_j til v_l , dvs. de kan evt. indeholde kredse og genbruge kanter, se [1]. Da der maksimalt er én vej af længde 2 fra v_j til v_l for $j \neq l$, idet $2 \leq k$, vil $(A_2)_{jl} = (A^2)_{jl}$ for $j \neq l$. Hvis $j = l$ vil $(A^2)_{jl} = d$ eftersom hver kant fra v_j kan anvendes to gange for at nå v_j igen, og dermed er $(A_2)_{jl} = (A^2)_{jl} - d$. Heraf får man altså (1.1), idet $A_0 = I$ er den eneste af A_i 'erne der indeholder ikke-nul indgange på diagonalen.

Ligningen (1.2) opstår ved at betragte hierarkiet for en Moore-graf, Figur 1.1, og indse at $(AA_{s-1})_{jl}$ er antallet af knuder w som ligger i afstand 1 fra v_j og afstand $s-1$ fra v_l . Hvis antallet af sådanne w skal være større end 0, må det betyde, at v_j og v_l ligger i afstand s eller $s-2$ fra hinanden, hvilket indses ved at lade v_j være roden i hierarkiet på Figur 1.1. Så kan et w kun ligge i lag 1, og dermed må v_l , som skal ligge i afstand $s-1$ fra w , ligge i lag $s-2$ eller s . Hvis v_l ligger i lag s , er der præcist ét w , som ligger i afstand $s-1$ fra v_l og afstand 1 fra v_j , dvs. $(AA_{s-1})_{jl} = 1 = (A_s)_{jl}$. Hvis v_l ligger i lag $s-2$, vil der være $d-1$ w 'er, som ligger i afstand 1 fra v_j og afstand $s-1$ fra v_l , dvs. $(AA_{s-1})_{jl} = d-1 = (d-1)(A_{s-2})_{jl}$. Hvis v_l ligger i et andet lag, vil $(AA_{s-1})_{jl} = 0$, og dermed får man altså ved omskrivning, at (1.2) er opfyldt. Bemærk, at ovenstående er helt uafhængigt af, hvilke knuder man vælger i de forskellige lag, hvilket netop er det der gør at Moore-grafer er afstandsregulære.

Et vigtigt resultat der følger af (1.1), (1.2), $A_1 = A$ og $A_0 = I$ er, at A_s kan skrives som et polynomium i A for alle $s = 0, 1, \dots, k$. Derfor kan egenverdierne bestemmes vha. det minimale polynomium, der er givet ved

$$(A - dI) \sum_{i=0}^k A_i = (A - dI)J = 0,$$

idet G er d -regulær. Da det allerede er kendt at d er en egenværdi, er man altså interesseret i at finde de resterende egenverdier. Disse egenverdier er så løsninger til ligningen $F_k(x) = 0$, hvor polynomierne F_s er givet rekursivt vha. følgende for $s \leq k$,

$$F_0(x) = 1, \quad F_1(x) = x + 1, \quad F_s(x) = xF_{s-1}(x) - (d-1)F_{s-2}(x). \quad (1.3)$$

Dette ses eftersom $(F_s(A))_{ij}$ er antallet af $v_i \sim v_j$ -veje af længde højst s , og dermed gælder der, at $F_k(A) = J$, dvs. det minimale polynomium kan skrives som

$$(A - dI)F_k(A) = 0,$$

og da vi betragter egenverdier forskellige fra d , må disse være rødder i $F_k(x) = 0$. Ovenstående ses også af, at J er et polynomium i A , og da A har reelle indgange og er symmetrisk, vil alle egenverdier være reelle og A og J vil have fælles egenvektorer. Dermed vil de øvrige egenverdier i A have samme egenvektorer som egenværdien 0 i J , altså vil $F_k(\alpha) = 0$, hvis α er en egenværdi til A .

Det er polynomierne F_s , som vi senere skal se også anvendes i andre beviser.

For en afstandsregulær graf kan man opstille en såkaldt skæringsmatrix B , der er givet ved $(k+1) \times (k+1)$ matricen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ d & a_1 & c_2 & & & & 0 \\ & b_1 & a_2 & c_3 & & & \\ & & b_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & & b_3 & a_4 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & b_{k-1} & a_k & \end{bmatrix},$$

dvs. for en Moore-graf er skæringsmatricen givet ved

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ d & 0 & 1 & & & & 0 \\ & d-1 & 0 & 1 & & & \\ & & d-1 & 0 & \ddots & & \\ & & & d-1 & 0 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & d-1 & d-1 & \end{bmatrix}$$

i følge (1.2) og (1.1). B har de samme egenverdier som A og desuden kan man vha. en egenværdi og dens tilhørende egenvektor til B udregne multipliciteten af denne egenværdi i A , [10]. Damerell beviste, at der eksisterer irrationelle egenverdier til B

for $d, k \geq 3$, og ved hjælp af udregningerne af multipliciteten af en sådan egen værdi, kommer han frem til en modstrid, dvs. der ikke eksisterer Moore-grafer for $d, k \geq 3$.

Bannai og Ito anvendte en lidt anden fremgangsmåde i anvendelsen af egen værdierne og deres multiplicitet i [8]. De delte det nemlig op i seks forskellige tilfælde alt efter størrelsen på k og d , og beviste dermed, at der ikke kunne eksistere Moore-grafer for hvert af disse tilfælde.

Eftersom der altså kun eksisterer Moore-grafer for meget få værdier af k og d , er det næste spørgsmål, der opstår, hvor stor orden en graf med maksimal grad d og diameter k så kan have. Man er altså interesseret i en tættere øvre grænse på ordenen af en (d, k) -graf. Et andet interessant spørgsmål er, hvordan man konstruerer store grafer med grad d og diameter k , ikke blot fordi de er anvendelige i netværk, men også fordi man så har en nedre grænse for ordenen i en maksimal (d, k) -graf.

Disse to spørgsmål er hvad dette speciale har taget udgangspunkt i, med hovedvægt på det første og set fra en grafteoretisk vinkel. Derfor vil den første del af rapporten omhandle grafer, der har orden tæt på Moore-grænsen og den anden del vil handle om nogle af de største kendte grafer til dags dato.

Grafer med defekt 1

Som beskrevet, er det for meget få værdier af d og k der eksisterer Moore-grafer, dvs. den øvre grænse for antal knuder i de fleste (d,k) -grafer er $n(d,k) \leq M(d,k) - 1$. Da man allerede ved der eksisterer Moore-grafer, hvis $d = 2$ eller $k = 1$, kan man antage at $d \geq 3$ og $k \geq 2$, hvilket også gøres i resten af rapporten med mindre andet er nævnt.

En (d,k) -graf, der har $n(d,k) = M(d,k) - \delta$ knuder, siges at have defekt δ , og disse grafer vil fremover også blive betegnet som (d,k,δ) -grafer. Moore-grafer har altså defekt 0.

En vigtig egenskab for grafer med tilstrækkelig lille defekt, er at disse er regulære, hvilket bl.a. er bevist af Miller og Simanjuntak i [11].

Lemma 2.1. *Hvis $\delta \leq M(d-1, k-1)$ så er alle (d,k,δ) -grafer regulære.*

Bevis. Antag, at v er en knude i en (d,k,δ) -graf med grad $d_v \leq d-1$. Så ses det, at antallet af knuder i grafen højst er

$$\begin{aligned} & 1 + d_v + d_v(d-1) + \dots + d_v(d-1)^{k-1} \\ & \leq 1 + (d-1) + (d-1)(d-1) + \dots + (d-1)(d-1)^{k-1} \\ & = 1 + \sum_{i=1}^k d(d-1)^{i-1} - \sum_{i=1}^k (d-1)^{i-1} \\ & < M(d,k) - M(d-1, k-1) \\ & \leq M(d,k) - \delta, \end{aligned}$$

hvilket er i modstrid med, at det er en (d,k,δ) -graf. ■

Under antagelsen af at $d \geq 3$ og $k \geq 2$, kan man altså antage, at alle (d,k,δ) -grafer for $\delta \leq 3$ er d -regulære, idet $M(d-1, k-1) \geq M(2,1) = 3$.

En vigtig egenskab for regulære (d,k,δ) -grafer med ulige δ , er at d nødvendigvis må være lige, eftersom

$$n(d,k) \equiv M(d,k) - \delta$$

$$\begin{aligned} &\equiv 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{k-1} - \delta \\ &\equiv d + 1 - \delta \equiv d \pmod{2} \end{aligned}$$

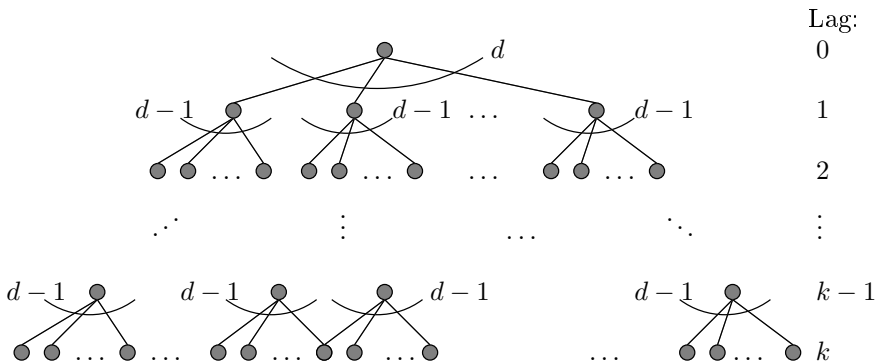
og da der ikke kan være et ulige antal knuder af ulige grad i en graf, må der altså gælde at både $n(d,k)$ og d er lige.

I resten af dette kapitel vil jeg betragte (d,k) -grafer med defekt 1.

2.1. Generelle egenskaber

Som allerede bemærket, må der gælde, at d er lige for alle $(d,k,1)$ -grafer.

Man kan opstille et hierarki, som minder om det på Figur 1.1 for Moore-grafer, blot med den undtagelse, at der er en knude mindre i det k 'te lag og at én af knuderne i det k 'te lag har to forældre i lag $k-1$, se Figur 2.1.



Figur 2.1: Hierakiet for en graf med defekt 1.

Af Figur 2.1 ses det, at hver knude vil være indeholdt i netop én kreds af længde $2k$, idet hierarkiet vil være ens for alle knuder, for ellers vil der, som ved Moore-graferne, opstå problemer med antallet af knuder, diameteren eller graden. For $(d,k,1)$ -grafer kan man, hvor afstandsmatricerne er defineret som tidligere, også opskrive ligningen (1.1) og hvis $k \geq 4$ også ligningerne (1.2) for $s = 3, \dots, k-1$. For $s = k$ vil der gælde at $(AA_{k-1})_{jl} = 2$ hvis v_j og v_l ligger på den samme $2k$ -kreds i afstand k fra hinanden, men for de øvrige værdier vil $(AA_{k-1})_{jl} = (A_k)_{jl} + (d-1)A_{s-2}$. Derfor vil

$$A_k = AA_{k-1} - (d-1)A_{k-2} - E, \quad (2.1)$$

hvor E er en matrix bestående af præcist ét 1-tal i hver række og søjle, og ingen på diagonalen, svarende til de indgange i AA_{k-1} der er 2, mens resten af indgangene er 0 i E . Ved passende permutation af knuderne, kan man skrive E som den direkte sum af matricerne

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Derfor får man, vha. (1.1), (1.2) og (2.1), at

$$F_k(A) = J + E. \quad (2.2)$$

Da G er regulær kommuterer J og A , og dermed kommuterer de også med E , og eftersom de alle tre er diagonaliserbare, så er de simultant diagonaliserbare i følge [12]. E har egenverdierne -1 og 1 , hver med multiplicitet $\frac{M(d,k)-1}{2}$, heraf kan man også konkludere at $n(d,k) = M(d,k) - 1$ nødvendigvis må være lige, da multipliciteter altid er heltallige, og derfor må d være lige.

Det ses at $(1,1,\dots,1)$ er en egenvektor til A svarende til egenværdien d og en egenvektor til J svarende til egenværdien $M(d,k) - 1$, samt en egenvektor til E svarende til egenværdien 1 . Derfor får man, da 0 er en egenverdi til J med multiplicitet $M(d,k) - 2$, følgende ligning, hvor α er egenverdier til A , $n = M(d,k) - 1$ og diagonal matricerne er af størrelse $n \times n$,

$$\begin{bmatrix} F_k(d) & & & & \\ & F_k(\alpha) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & F_k(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Dermed vil de øvrige egenverdier til A være rødder i følgende polynomier,

$$F_k(\alpha) = -1, \quad (2.3)$$

og

$$F_k(\alpha) = 1, \quad (2.4)$$

hvor summen af multipliciteterne af egenverdierne der opfylder (2.3) er $\frac{M(d,k)-1}{2}$ og dem der opfylder (2.4) er $\frac{M(d,k)-1}{2} - 1$.

Efter at have undersøgt nogle af de generelle egenskaber for $(d,k,1)$ -grafer, ser jeg nu nærmere på et special tilfælde.

2.2. Grafer med diameter 2

Jeg vil nu anvende ovenstående teori til at bevise følgende sætning, som Erdős, Fajtlowicz og Hoffman [13] var de første til at bevise i 1980.

Sætning 2.2. *Lad G være en $(d,2,1)$ -graf, så er G en kreds af længde 4.*

Bevis. Først indsættes det, at $M(d,2) - 1 = 1 + d + d(d - 1) - 1 = d^2$, og G har derfor d^2 knuder. Desuden ses det, at

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) &= \alpha F_1(\alpha) - (d - 1)F_0(\alpha) \\ &= \alpha(\alpha + 1) - (d - 1) \\ &= \alpha^2 + \alpha - (d - 1) \end{aligned}$$

i følge (1.3).

Derfor får man i følge (2.3) og (2.4) at egenverdierne til A er rødderne α , der opfylder følgende ligninger,

$$\alpha^2 + \alpha - (d - 1) = -1 \quad (2.5)$$

og

$$\alpha^2 + \alpha - (d - 1) = 1. \quad (2.6)$$

De egenverdier til A , som ikke er d , er altså givet ved

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4d-7}}{2} \quad \text{og} \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4d-7}}{2} \quad (2.7)$$

med multiplicitet hhv. m_1 og m_2 , således at $m_1 + m_2 = \frac{d^2}{2}$, og ved

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4d+1}}{2} \quad \text{og} \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4d+1}}{2} \quad (2.8)$$

med multiplicitet hhv. n_1 og n_2 således at $n_1 + n_2 = \frac{d^2}{2} - 1$.

Lad nu $p = \sqrt{4d-7}$ og $q = \sqrt{4d+1}$. Da (2.5) og (2.6) er polynomier med heltallige koefficienter med den ledende koefficient 1, så vil egenverdierne være heltallige hvis de er rationelle. Dvs. egenverdierne enten er heltal eller irrationelle, hvilket afgøres af om p og q er heltal eller irrationelle.

Hvis q ikke er et heltal, gælder der at $n_1 = n_2$, og dermed vil $\frac{d^2}{2} - 1$ være et lige tal, hvilket er i modstrid med, at d er lige, dvs. q må nødvendigvis være et heltal. Hvis p også er et heltal, så må der gælde at $p = 1$ og $q = 3$ idet $q^2 - p^2 = 8$. Dermed gælder der, at $d = \frac{q^2-1}{4} = 2$ og G vil altså så være en kreds af længde 4.

Hvis p ikke er et heltal, så må der gælde at $m_1 = m_2$. Da summen af egenverdierne regnet med multiplicitet er lig sporet i A , som er 0, får man at

$$\begin{aligned} 0 &= d + m_1 \frac{-1+p}{2} + m_2 \frac{-1-p}{2} + n_1 \frac{-1+q}{2} + n_2 \frac{-1-q}{2} \\ &= d - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(n_1 + n_2) + \frac{q}{2}(n_1 - n_2) \\ &= d - \frac{d^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{q}{2}(n_1 - n_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da $d = \frac{q^2-1}{4}$ kan ovenstående omskrives til

$$q^4 - 10q^2 - 16q(n_1 - n_2) - 7 = 0.$$

Da q som nævnt er et heltal, må der altså gælde at $q = 1$ eller $q = 7$, dvs. at $d = 0$ eller $d = 12$. Det er klart at der ikke eksisterer en (0,2)-graf.

Hvis $d = 12$ får man egenverdierne og multipliciteterne, der ses i Tabel 2.1, hvor de sidste to multipliciteter fås fra hhv. $n_1 + n_2 = \frac{d^2}{2} - 1 = 71$ og (2.9) der bliver til $n_1 - n_2 = 17$.

Egenværdi	Multiplicitet
12	1
$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$	36
$\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$	36
3	44
-4	27

Tabel 2.1: Egenværdierne til A med tilhørende multiplicitet når $d = 12$.

Da G har omkreds 4, vil sporet af A^3 være 0. Men

$$\sum_{i=1}^{d^2} \lambda_i^3 = 12 + 36 \left(\frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \right)^3 + 36 \left(\frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \right)^3 + 44 \cdot 3^3 + 27(-4)^3 = 72,$$

dvs. der ikke kan eksistere en $(12,2,1)$ -graf. Dermed følger sætningen. ■

Det er altså nu bevist at der ikke eksisterer $(d,k,1)$ -grafer for $k = 2$ hvor $d \neq 2$, og jeg vil nu opsummere et resultat vedrørende de andre $(d,k,1)$ -grafer.

2.3. Andre $(d,k,1)$ -grafer

I 1981 fulgte et bevis af Bannai og Ito [14], der omhandler et problem, der ligger tæt op af problemet med at finde de maksimale grafer, der har maksimal grad d og diameter k . Det omhandlede problemet med at finde minimale grafer, der har grad d og omkreds g , disse kaldes for (d,g) -bure. Hvis g er ulige, dvs. hvis $g = 2k + 1$, så er den nedre grænse for antallet af knuder i et (d,g) -bur givet vha. Moore-grænsen, og derfor vil Moore-graferne være $(d,2k + 1)$ -bure. Ligesom begrebet defekt er givet for (d,k) -grafer, findes der begrebet overskud ϵ for (d,g) -bure med ulige g , som altså svarer til at en graf med grad d og omkreds g har $M(d,k) + 1$ knuder.

Det Bannai og Ito beviste i [14], var at hvis omkredsen er $g = 2k + 1 \geq 5$, så findes der ingen (d,g) -bure med overskud 1. Dette gjorde de ved at bruge lignende argumenter som dem, der er præsenteret før og i beviset for Sætning 2.2, idet det der er ligning (2.2) for en $(d,k,1)$ -graf i ovenstående argumenter, er $F_k(A) = J - E$ for et $(d,2k + 1)$ -bur med overskud 1, dvs. der er kun forskel i fortegnet foran E . Dvs. at de ligninger man skal finde egenværdier i, stadig er givet ved $F_k(x) = \pm 1$.

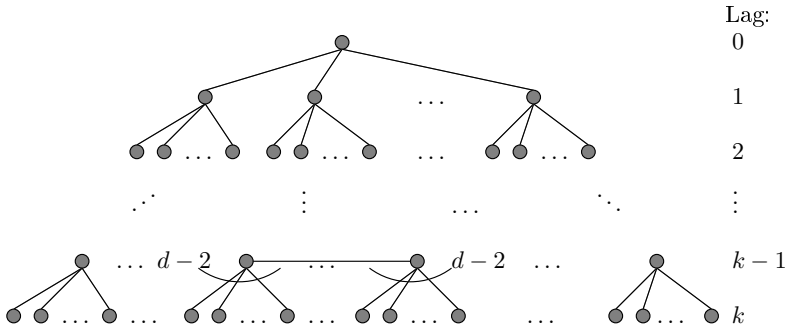
Jeg har valgt ikke at tage beviset med her, idet det er mere baseret på lineær algebra end grafteori. I stedet har jeg bevist Sætning 2.2 for at give en idé om nogle af de argumenter, der kan anvendes, omend beviset i [14] er langt mere omfattende.

Grafer med defekt 2

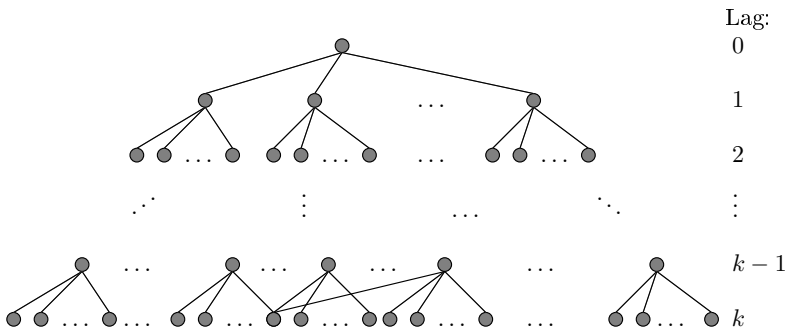
Som nævnt er en (d,k) -graf med defekt 2 en (d,k) -graf, som har $n(d,k) = M(d,k) - 2$ knuder. I resten af dette kapitel vil grafen G være en sådan $(d,k,2)$ -graf med $d \geq 3$ og $k \geq 2$. Betragter man en vilkårlig knude i G og danner et hierarki med denne knude som roden, vil man altså få et hierarki, hvor alle lag til og med det $(k-1)$ 'te er fyldt og der i det k 'te lag er $d(d-1)^{k-1} - 2$ knuder. Hvis ikke hierarkiet var som beskrevet, dvs. det $(k-1)$ 'te lag højst havde $d(d-1)^{k-1} - 1$ knuder, så ville antallet af knuder i det k 'te lag højst være $d(d-1)^{k-1} - (d-1)$, og dermed ville G højst have $M(d,k) - 1 - (d-1) < M(d,k) - 2$ knuder, en modstrid. Fremover vil jeg betegne knuderne i afstand i fra en knude v som $N_i(v)$ for $i = 0, \dots, k$, dvs. hvis v vælges som roden i et hierarki, så vil $N_i(v)$ være knuderne, der ligger i det i 'te lag. Bemærk at $v = N_0(v)$ og $N(v) = N_1(v)$. Desuden vil $(2k-1)$ -kredse ofte blive betegnet med C , evt. med et indeks eller anden skrift, mens $2k$ -kredse på tilsvarende vis vil blive betegnet med D .

Der er tre forskellige måder, hvorpå de to knuder kan mangle i det k 'te lag, og det kan være forskelligt alt efter, hvilken knude man vælger som rod i hierarkiet, dvs. hierarkiet er altså ikke nødvendigvis ens for alle valg af roden, som det var ved Moore-graferne og graferne med defekt 1. De tre forskellige typer af hierarkier udgøres af tilfældet, hvor to knuder i lag $(k-1)$ har en kant imellem sig, se Figur 3.1, eller hvor præcist én knude i lag k har tre forældre i lag $(k-1)$, se Figur 3.2, eller det sidste tilfælde, hvor præcist to knuder i lag k har hver to forældre i lag $(k-1)$, se Figur 3.3.

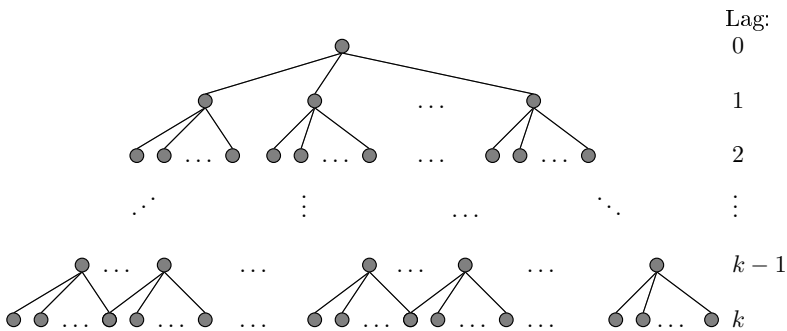
I studiet af en (d,k,δ) -graf kan det være nyttigt at betragte det såkaldte lagvise diagram. For en graf H , en knude $u \in V(H)$ og et heltal l indeholder det lagvise diagram i afstand l fra u , $LD(H,u,l)$, lag af knuder i H . Det øverste lag indeholder den enlige knude u , det næste lag indeholder u 's naboer i H og generelt gælder der at det i 'te lag indeholder de knuder, der kan nås vha. en sti af længde i fra u for alle $i = 0, 1, \dots, l$, hvor en sti ikke indeholder den samme kant to gange i træk, men godt kan indeholde kredse. Det er klart, at en delmængde af de knuder der ligger i det i 'te lag i $LD(H,u,l)$ er givet ved de knuder som kan nås vha. en i -vej fra u . Hvis H er en Moore-graf med grad d og diameter k , så svarer diagrammet $LD(H,u,k)$ uanset valg af $u \in V(H)$ altså til hierarkiet i Figur 1.1 på side 11. Afhængigt af værdien af



Figur 3.1: Et eksempel på hierarkiet for en graf med defekt 2, hvor der er en kant mellem to knuder i lag $k-1$.



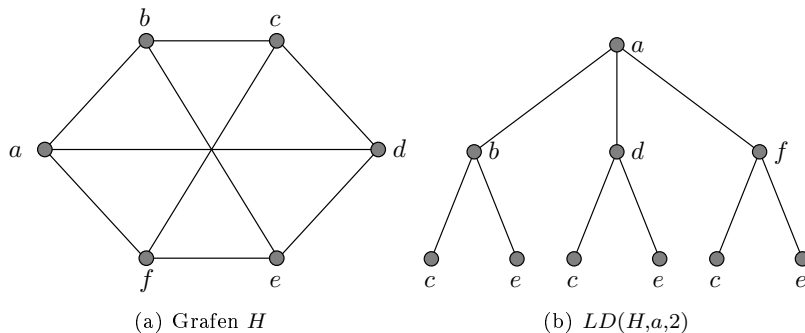
Figur 3.2: Et eksempel på hierarkiet for en graf med defekt 2, hvor en knude i lag k har tre forældre i lag $k-1$.



Figur 3.3: Et eksempel på hierarkiet for en graf med defekt 2, hvor to knuder i lag k hver har to forældre i lag $k-1$.

l og defekten kan knuder i en vilkårlig graf H godt optræde flere gange i et lagvist diagram, men så længe H , u og l er givet er det lagvise diagram entydigt bestemt. Et eksempel på en graf H og et af dens lagvise diagrammer ses i Figur 3.4.

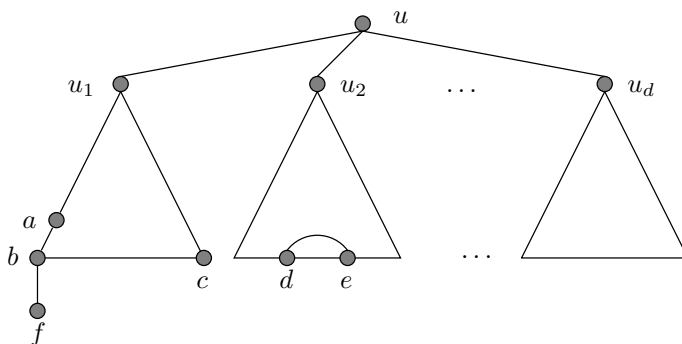
Det er vigtigt at bemærke, at der er forskel på om der tales om lag i et hierarki eller i et lagvist diagram for en graf j , idet det i 'te lag i et hierarki for H , som nævnt, er



Figur 3.4: Et eksempel på en graf H og dens lagvise diagram $LD(H, a, 2)$.

en delmængde, dog ikke nødvendigvis ægte, af det i 'te lag i et lagvist diagram for H for alle valg af $i = 0, \dots, k$.

I de tilfælde der bliver betragtet her, er man ofte kun interesseret i en knude u , dens naboer u_1, u_2, \dots, u_d , og så nogle af de knuder der ligger i lag $k-1, k, k+1$ og evt. $k+2$. Derfor vil de lagvise diagrammer $LD(G, u, k+1)$ ofte blive tegnet som på Figur 3.5, hvor de knuder, der er interessante er markeret. Trekanterne på figuren repræsenterer dele af hhv. $LD(G, u_1, k-1)$, $LD(G, u_2, k-1)$ og $LD(G, u_d, k-1)$ og de vandrette linjer repræsenterer blot det k 'te lag i $LD(G, u, k+1)$. Derfor er knuderne i det k 'te lag nemme at genkende, på Figur 3.5 ses det at b, c, d, e er i det k 'te lag af $LD(G, u, k+1)$. Er der naboknuder til knuderne i det k 'te lag, vil disse være tegnet i det lag hvor de befinder sig, f.eks. er a naboen til b som ligger i det $(k-1)$ 'te lag og f er en nabo til b som ligger i det $(k+1)$ 'te lag. Den eneste linje i en trekant som helt sikkert repræsenterer en kant er altså linjen mellem en knude i lag $(k-1)$ og en i lag k , det er altså ikke sikkert der er en kant mellem u_1 og a i Figur 3.5, men det er ikke umuligt.



Figur 3.5: Det lagvise diagram $LD(G, u, k+1)$ indeholdende trekanter, der repræsenterer dele af $LD(G, u_1, k-1)$, $LD(G, u_2, k-1)$ og $LD(G, u_d, k-1)$.

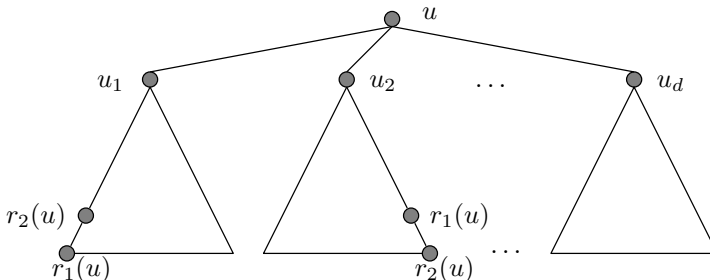
Nogle gange er det også en fordel at tegne kanter fra grafen G ind i det lagvise diagram, f.eks. mellem knuder i det samme lag, som er naboer. F.eks. er d og e i Figur 3.5 naboer, hvilket er tydeliggjort med en buet kant mellem de to, og grunden til

dette er at det så er nemmere at visualisere, at der eksisterer en $(2k - 1)$ -kreds som indeholder u_2, d og e , end hvis hhv. d og e blot havde haft kanter til hhv. e og d i det $(k + 1)$ 'te lag. Sådanne kanter og veje, som anvendes for at gøre resultater tydeligere, tegnes også ind imellem som stiplede linjer.

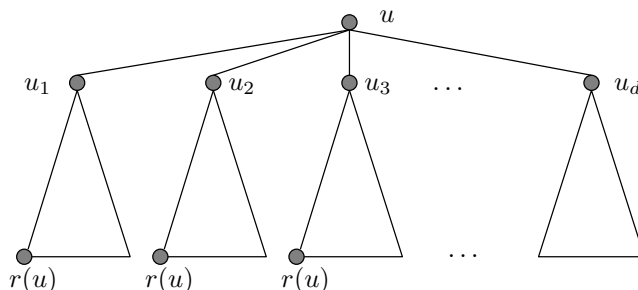
Givet (d, k, δ) -graf G kaldes en knude $v \in V(G)$ en gentagelse af u , hvis v optræder flere gange i det lagvise diagram $LD(G, u, k)$, dvs. hvis der eksisterer mere end én vej af længde højst k mellem u og v . Mængden af gentagelser til en knude u betegnes med $R(u)$ og hvis der er m gentagelser til en knude, betegnes de som $r_1(u), r_2(u), \dots, r_m(u)$. Hvis der blot er en enkelt gentagelse til u betegnes den også ofte som $r(u)$.

Sammenholdt med hierarkierne beskrevet ovenfor er der altså tre forskellige scenarier for en given knude u i en $(d, k, 2)$ -graf og dens gentagelser, hvoraf den ene deles ind i yderligere tre scenarier.

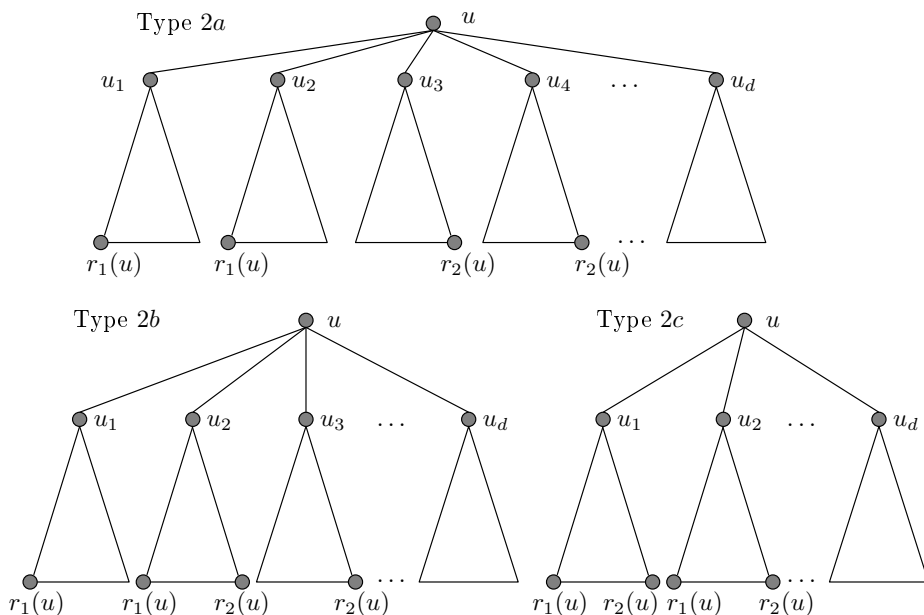
- u er en type 0 knude, hvis $d(u, r_1(u)) = d(u, r_2(u)) = k - 1$, se Figur 3.6,
- u er en type 1 knude, hvis $d(u, r_1(u)) = d(u, r_2(u)) = k$, hvor $r_1(u) = r_2(u)$, se Figur 3.7,
- u er en type 2 knude, hvis $d(u, r_1(u)) = d(u, r_2(u)) = k$, hvor $r_1(u) \neq r_2(u)$. Denne type deles ind i yderligere tre typer;
 - u er en type 2a knude, hvis $d \geq 4$ og der eksisterer fire forskellige knuder, $u_1, u_2, u_3, u_4 \in N(u)$, således, at $d(u_1, r_1(u)) = d(u_2, r_1(u)) = k - 1$ og $d(u_3, r_2(u)) = d(u_4, r_2(u)) = k - 1$, se Figur 3.8,
 - u er en type 2b knude, hvis $d \geq 3$ og der eksisterer tre forskellige knuder, $u_1, u_2, u_3 \in N(u)$, således, at $d(u_1, r_1(u)) = d(u_2, r_1(u)) = k - 1$ og $d(u_2, r_2(u)) = d(u_3, r_2(u)) = k - 1$, se Figur 3.8,
 - u er en type 2c knude, hvis $d \geq 2$ og der eksisterer to forskellige knuder, $u_1, u_2 \in N(u)$, således, at $d(u_1, r_1(u)) = d(u_2, r_1(u)) = k - 1$ og $d(u_1, r_2(u)) = d(u_2, r_2(u)) = k - 1$, se Figur 3.8.



Figur 3.6: Det lagvise diagram $LD(G, u, k)$ for en knude u af type 0.



Figur 3.7: Det lagvise diagram $LD(G, u, k)$ for en knude u af type 1.



Figur 3.8: De lagvise diagrammer $LD(G, u, k)$ for knuder u af type 2a, 2b og 2c.

Ovenstående observationer resulterer i det følgende lemma sammensat af lemmaer fra [11] og [15], hvor Θ_k er foreningsmængden af tre uafhængige k -veje, som har endeknuderne tilfælles. Hvis x er den ene endeknude i et Θ_k , så kan man også præcisere betegnelsen Θ_k som $\Theta_k(x)$.

Lemma 3.1. *Lad x være en knude i G , så gælder enten at*

- (i) *x er indeholdt i præcist én $(2k - 1)$ -kreds og ingen andre kredse af længde højst $2k$, og de to gentagelser af x ligger også på denne kreds, eller*
- (ii) *x er en knude af grad 3 i en Θ_k og hver kreds af længde højst $2k$ i G som indeholder x er indeholdt i denne Θ_k , og desuden gælder der, at $\Theta_k(x) = \Theta_k(r(x))$, eller*

- (iii) x er indeholdt i præcist to $2k$ -kredse og ingen kredse af længde højst $2k - 1$. Desuden har de to $2k$ -kredse en l -vej, $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ tilfælles og hver af $2k$ -kredsene indeholder én gentagelse af x .

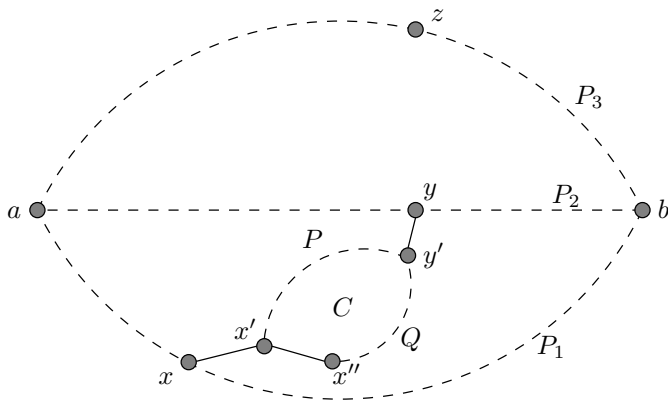
Med ovenstående lemma er det nu muligt at bevise mange forskellige egenskaber vedrørende $(d, k, 2)$ -grafer.

3.1. Grafer med grad 3

I 1994 beviste Jørgensen [15], at der ikke eksisterer $(3, k, 2)$ -grafer for $k \geq 4$. Dette gjorde han ved at anvende Lemma 3.1 gentagne gange, hvilket ses i de følgende lemmaer. Lad derfor G være en $(3, k, 2)$ -graf i resten af dette afsnit.

Lemma 3.2. Hvis G indeholder en Θ_k , så er $k = 2$.

Bevis. Lad Θ være et Θ_k i G . Så består Θ af to knuder, a og b , og tre uafhængige $a \sim b$ -veje, P_1, P_2 og P_3 , af længde k , se Figur 3.9. I følge Lemma 3.1 (ii) vil enhver kreds af længde højst $2k$, som indeholder en knude fra Θ være en del af Θ .



Figur 3.9: En Θ_k i en $(3, k, 2)$ -graf.

Lad x være en knude på P_1 , som er forskellig fra a og b . Lad desuden y og z være knuder på hhv. P_2 og P_3 som ligger i afstand k fra x . Eftersom $d = 3$, vil sådanne knuder x, y, z have entydige naboer x', y', z' ikke indeholdt i Θ .

Først bevises det, at en $x' \sim y$ -vej, P , af længde højst k altid vil indeholde kanten $y'y$, ikke indeholder knuden x og at den vil have længde præcist k . Dette gøres ved at vise at hvis et af tilfældene gælder, så eksisterer der en kreds af længde højst $2k$ som ikke er en kreds i Θ , men som indeholder knuder derfra, hvilket er i modstrid med Lemma 3.1 (ii).

Hvis v er en nabo til y på P_2 og der eksisterer en $v \sim x'$ -vej i G af længde højst $k - 1$, så vil $x \sim v$ -vejen af længde $k - 1$ i Θ , $x' \sim v$ -vejen og kanten xx' tilsammen udgøre en kreds af længde højst $2k - 1$, derfor må enhver $x' \sim y$ -vej af længde højst

k indeholde kanten yy' . En sådan $x' \sim y$ -vej indeholder ikke x , idet der ellers ville eksistere en $x \sim y$ -vej i G af længde højst $k - 1$ og denne tilsammen med en $x \sim y$ -vej i Θ ville udgøre en $(2k - 1)$ -kreds. Desuden er $x' \sim y$ -vejen præcist af længde k , for ellers ville en af $x \sim y$ -vejene i Θ sammen med $x' \sim y$ -vejen og kanten xx' være en kreds af længde højst $2k$, ikke indeholdt i Θ , men som indeholder knuder i Θ .

Lad x'' være den entydige nabo til x' som ikke ligger på P eller P_1 . Med lignende argumenter som ovenfor ses det, at en $x'' \sim y$ -vej af længde højst k vil indeholde kanten $y'y$, og ikke indeholde x' eftersom $d(x', y) = k$.

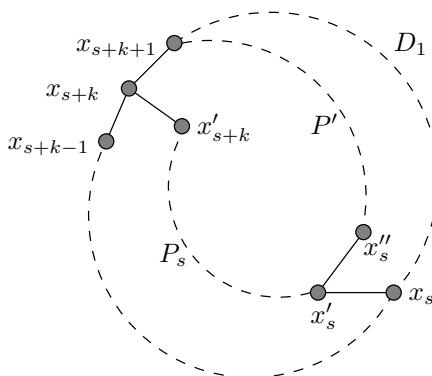
Lad Q være en $x'' \sim y'$ -vej af længde højst $k - 1$, så vil vejene P og Q sammen med kanten $x''x'$ udgøre en $(2k - 1)$ -kreds, C .

Da y og z er valgt symmetrisk vil der eksistere en $(2k - 1)$ -kreds, C' , som indeholder x' og z' og hvor afstanden mellem x' og z' er $k - 1$ på C' . I følge Lemma 3.1 (i) vil der så gælde at $C = C'$ og dermed er $d(y', z') \leq 1$. Eftersom afstanden mellem y og z i Θ højst er k , vil den korteste $y \sim z$ -vej i Θ sammen med kanterne yy' , zz' og evt. $y'z'$ udgøre en kreds af længde højst $k + 3$. Da denne kreds indeholder knuder som ikke er indeholdt i Θ , gælder der i følge Lemma 3.1 (ii) at kredsen må have længde mindst $2k + 1$. Dvs. $k + 3 \geq 2k + 1$, og dermed må der gælde at $k = 2$. ■

I resten af dette afsnit antages det derfor nu, at G ikke indeholder en Θ_k , dvs. ingen knuder af type 1.

Lemma 3.3. *Antag at G indeholder en $2k$ -kreds. Så er fællesmængden af ethvert par af ikke disjunkte $2k$ -kredse en $(k - 1)$ -vej. Hvis der yderligere gælder, at $k \geq 3$, så indeholder G desuden en $(2k - 1)$ -kreds.*

Bevis. Lad D_1 være en $2k$ -kreds i G , og lad knuderne i cyklisk orden være givet ved $x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}$. Lad x'_i være den entydige nabo til x_i i $G - D_1$, se Figur 3.10. Da diameteren er k , eksisterer der en $x'_i \sim x_{i+k}$ -vej af længde højst k i G . Ved lignende argumenter som i beviset for Lemma 3.2 ses det, at en sådan vej ikke indeholder x_i , men nødvendigvis må indeholde kanten $x'_{i+k}x_{i+k}$, idet der ellers eksisterer en kreds af længde højst $2k - 1$ forskellig fra D_1 , men som indeholder knuder fra D_1 , hvilket er i modstrid med Lemma 3.1 (i).



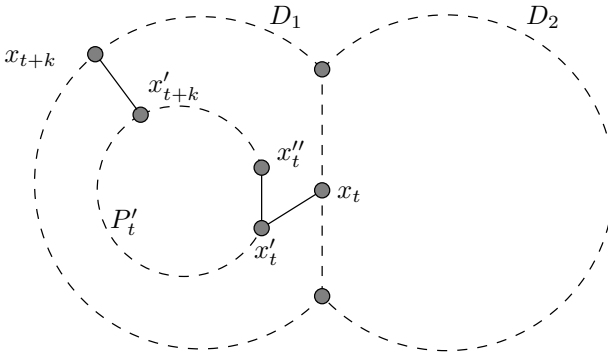
Figur 3.10: $2k$ -kredsen D_1 i en $(3, k, 2)$ -graf.

Eftersom G ikke indeholder en Θ_k , vil der desuden gælde at $d(x'_i, x_{i+k}) = k$. For $0 \leq i \leq 2k - 1$ lad P_i betegne en $x'_i \sim x'_{i+k}$ -vej af længde $k - 1$ og lad x''_i betegne den entydige nabo til x'_i som ikke er x_i og ikke ligger på P_i .

I følge Lemma 3.1 (iii) vil enhver knude på D_1 også være indeholdt i en anden $2k$ -kreds. Lad D_2 være en sådan kreds, som har en eller flere knuder tilfælles med D_1 . Da $D_2 \neq D_1$ vil der eksistere et tal $s \in \{0, \dots, 2k - 1\}$ således at $x_s \in D_2$ og $x'_s \in D_2$.

Da $d(x'_s, x_{s+k}) = k$ vil en $x''_s \sim x_{s+k}$ -vej af længde højst k ikke indeholde x'_s . Hvis der eksisterer en $x''_s \sim x'_{s+k}$ -vej af længde højst $k - 1$, så vil denne vej sammen med P_s og kanten $x'_s x''_s$ være en kreds af længde højst $2k - 1$, dvs. det er en modstrid med Lemma 3.1, idet x_s ikke kan ligge på både en $2k$ -kreds og en $(2k - 1)$ -kreds. Derfor må der eksistere en $x''_s \sim x_{s+k}$ -vej, P' , af længde højst $k - 1$, som går igennem enten x_{s+k-1} eller x_{s+k+1} , pga. symmetri kan vi antage at det er x_{s+k+1} som P' indeholder. Kredsen, der består af P' , $x_s \sim x_{s+k+1}$ -vejen af længde $k - 1$ på D_1 og kanterne $x_s x'_s$ og $x'_s x''_s$, er en $2k$ -kreds, som indeholder x_s og derfor må denne kreds være D_2 i følge Lemma 3.1 (iii). Dvs. at $D_1 \cap D_2$ er en $(k - 1)$ -vej, nemlig $x_s \sim x_{s+k+1}$ -vejen.

Antag nu at $k \geq 3$, så eksisterer der et tal $t \in \{0, \dots, 2k - 1\}$ således at $x_t \in D_1 \cap D_2$ men hvor $x'_t \notin D_1 \cup D_2$, se Figur 3.11. Som ovenfor vil en $x''_t \sim x_{t+k}$ -vej af længde højst k indeholde enten x'_{t+k} , x_{t+k-1} eller x_{t+k+1} . Hvis den indeholder enten x_{t+k-1} eller x_{t+k+1} , så vil en sådan vej sammen med $x_t \sim x_{t+k}$ -vejen af længde $k - 1$ på D_1 og kanterne $x_t x'_t$ og $x'_t x''_t$ udgøre en $2k$ -kreds, hvilket er i modstrid med Lemma 3.1 (iii). Dvs. der eksisterer en $x''_t \sim x'_{t+k}$ -vej af længde højst $k - 1$, og denne vej, sammen med P_t og kanten $x'_t x''_t$, udgør en kreds af længde $2k - 1$, som ikke indeholder knuder fra hverken D_1 eller D_2 .



Figur 3.11: $2k$ -kredsene D_1 og D_2 i en $(3,k,2)$ -graf.

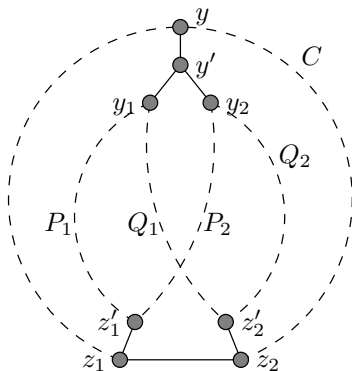
■

Med ovenstående lemmaer er det muligt at bevise den følgende vigtige sætning.

Sætning 3.4. For $k \geq 4$ eksisterer der ingen $(3,k,2)$ -graf.

Bevis. I følge Lemma 3.1, 3.2 og 3.3 indeholder G en $(2k - 1)$ -kreds, C , for $k \geq 3$. Lad y være en knude på C og lad z_1 og z_2 være knuderne i afstand $k - 1$ fra y på C .

Lad y' , z'_1 og z'_2 være de entydige naboer til hhv. y , z_1 og z_2 i $G - C$ og lad y_1 og y_2 være naboerne til y' , som er forskellige fra y , se Figur 3.12.

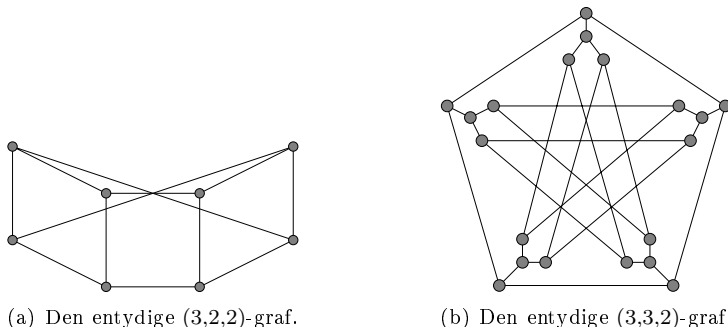


Figur 3.12: $(2k - 1)$ -kredsen C i en $(3, k, 2)$ -graf.

En $y_1 \sim z_1$ -vej af længde højst k vil indeholde kanten $z'_1 z_1$, men ikke $y_1 y'$, og vil have længde præcist k , for ellers vil der eksistere en anden kreds af længde højst $2k$ som indeholder knuder fra C , hvilket er i modstrid med Lemma 3.1 (i). Lad P_1 være en $y_1 \sim z'_1$ -vej af længde $k - 1$. Pga. symmetri eksisterer der også en $y_1 \sim z'_2$ -vej, Q_1 , en $y_2 \sim z'_1$ -vej, P_2 , og en $y_2 \sim z'_2$ -vej, Q_2 , alle af længde $k - 1$.

Kredsen D_1 , der består af vejene P_1 , P_2 og kanterne $y_1 y'$ og $y_2 y'$, er så en $2k$ -kreds, og det samme gælder for kredsen D_2 , der består af Q_1 , Q_2 og kanterne $y_1 y'$ og $y_2 y'$.

Eftersom z_1 ligger på C , gælder der i følge Lemma 3.1 (i), at kredsen bestående af P_1 , Q_1 og kanterne $z'_1 z_1$, $z_1 z_2$ og $z_2 z'_2$ har længde $2k + 1$, dvs. $P_1 \cap Q_1 = \{y_1\}$. Pga. symmetri ses det, at der også gælder $P_2 \cap Q_2 = \{y_2\}$. Fællesmængden af D_1 og D_2 er altså en 2-vej bestående af kanterne $y_1 y$ og $y_2 y$, og i følge Lemma 3.3 gælder der så at $k - 1 = 2$, og dermed er den eneste mulige værdi for $k \geq 3$ i en $(3, k, 2)$ -graf $k = 3$. ■



(a) Den entydige $(3, 2, 2)$ -graf.

(b) Den entydige $(3, 3, 2)$ -graf.

Figur 3.13: De entydige $(3, k, 2)$ -grafer.

Ovenstående lemmaer og sætning konkluderer altså, at der ikke eksisterer $(3,k,2)$ -grafer for $k \geq 4$. For $k = 2$ eksisterer der $(3,2,2)$ -grafene, der ses på Figur 3.13(a) og for $k = 3$ eksisterer der $(3,3,2)$ -grafene på Figur 3.13(b). Derfor er man interesseret i at se nærmere på om der eksisterer $(d,k,2)$ -grafer for andre d . I det næste afsnit ses der nærmere på generelle egenskaber for grafer med defekt 2.

3.2. Generelle egenskaber

Den følgende sætning er i følge [11] bevist af Miller og Simanjuntak i en anden artikel ved at betragte de forskellige typer af knuder i grafen. Jeg har dog valgt at bevise det vha. af nabomatricen og polynomierne (1.3).

Sætning 3.5. *For ethvert $u \in V(G)$ gælder der at $N(R(u)) = R(N(u))$.*

Bevis. For at bevise sætningen har man brug for polynomierne fra (1.3). Som nævnt før, gælder der for en graf med knudemængde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ at $(F_s(A))_{ij}$ er antallet af $v_i \sim v_j$ -veje af længde højst s , og derfor gælder der per definition af gentagelser, at

$$(F_k(A) - J)_{ij} = \begin{cases} > 0 & \text{hvis } v_i \in R(v_j) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Betragter man så $A(F_k(A) - J)$, ser man at

$$(A(F_k(A) - J))_{ij} = \begin{cases} > 0 & \text{hvis } v_i \in N(R(v_j)) \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

idet hvis $(A(F_k(A) - J))_{ij} > 0$, så må det være fordi der eksisterer mindst ét $v \in R(v_j)$ som er nabo til v_i . Tilsvarende ses det at

$$((F_k(A) - J)A)_{ij} = \begin{cases} > 0 & \text{hvis } v_i \in R(N(v_j)) \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

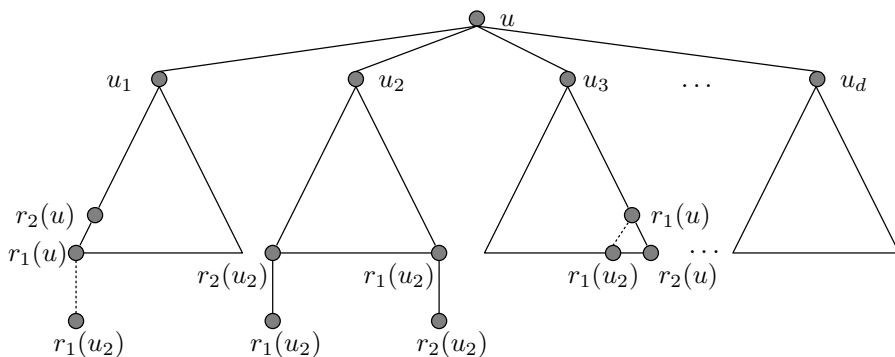
idet hvis $((F_k(A) - J)A)_{ij} > 0$, så må det være fordi der eksisterer mindst ét $v \in N(v_j)$, som har v_i som en gentagelse. Da A kommuterer med både $F_k(A)$ og J , ses det dermed at $N(R(u)) = R(N(u))$ for alle $u \in V(G)$. ■

Lad G være en $(d,k,2)$ -graf med $d \geq 4$ og $k \geq 3$ i resten af dette afsnit. De følgende korollarer og lemmaer stammer fra [11].

Lemma 3.6. *Lad u være en type 0 knude i G og lad C være $(2k - 1)$ -kredsen som indeholder u . Alle naboer til u , som ikke er i C , er så andre typer end type 0 knuder.*

Bevis. Lad u_1, u_2, \dots, u_d være naboerne til u , hvor C indeholder $u_1, u_3, r_1(u)$ og $r_2(u)$. Antag at u_2 er en knude af type 0, så vil kanten $r_1(u_2)r_2(u_2)$ være indeholdt i G , se Figur 3.14.

Man ved, da diameteren er k , at der eksisterer en vej af længde højst k fra knuderne u_1, u_3, \dots, u_d til $r_1(u_2)$. Disse veje kan ikke gå gennem hverken $r_2(u_2)$ eller den knude der er nabo til $r_1(u_2)$ i afstand $k - 1$ fra u , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k$ forskellig fra C , men indeholdende knuder (u som minimum) fra C , hvilket er i modstrid med Lemma 3.1 (i). Der er altså $d - 1$ veje der skal nå $r_1(u_2)$



Figur 3.14: $LD(G, u, k + 1)$ for en knude af type 0, som har tre naboer af type 0.

vha. $d - 2$ naboknuder til $r_1(u_2)$, dvs. én af dem må blive genbrugt. Det kan enten være $r_1(u)$ eller $r_2(u)$, for hvis det var en anden knude, ville det være i modstrid med at u kun har 2 gentagelser. Pga. symmetri kan vi vælge at det er $r_1(u)$ der er knuden som bliver anvendt to gange. Dvs. at $r_1(u_2)$ er i afstand $k - 1$ fra u_3 , men dette er igen en modstrid, idet der så vil være tre knuder der er gentagelser af u . ■

Som en direkte konsekvens af ovenstående lemma, fås følgende korollar.

Korollar 3.7. *Det er ikke muligt for alle knuderne i en $(d, k, 2)$ -graf at være af type 0.*

Det følgende lemma skal anvendes til at bevise at en type 0 knude kun kan have type 0 og type 2 knuder som naboer.

Lemma 3.8. *Lad v og u være to forskellige knuder i G . Hvis u er en knude af type 0, så kan gentagelserne af u ikke begge være naboer til v .*

Bevis. Da u er en type 0 knude vil $r_1(u)$ og $r_2(u)$ være naboer. Hvis v så er nabo til begge u 's gentagelser, så vil der eksistere en 3-kreds i G , men da omkredsen i G er $2k - 1$, kan dette ikke lade sig gøre når $k \geq 3$. Hvis $k = 2$, så vil der i følge Lemma 3.1 (i) gælde at $u = v$, hvilket er i modstrid med at u og v er forskellige. ■

Korollar 3.9. *En knude af type 0 og en knude af type 1 kan ikke være naboer i G .*

Bevis. Lad v og u være naboer og lad v være en type 1 knude og u være en type 0 knude, dvs. at $R(v) = r(v)$ og $R(u) = \{r_1(u), r_2(u)\}$. I følge Sætning 3.5 gælder der at $R(u) \subseteq R(N(v)) = N(R(v))$, dvs. at $r(v)$ er nabo til både $r_1(u)$ og $r_2(u)$, hvilket er en modstrid med Lemma 3.8. ■

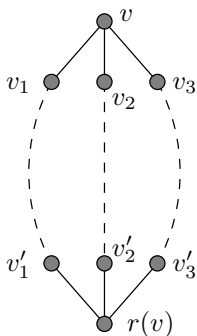
Af ovenstående korollar og Lemma 3.6 fås det følgende korollar.

Korollar 3.10. *Lad v være en knude af type 0 i G , så består naboerne til v af to knuder af type 0 og de resterende $d - 2$ naboer er af typen 2.*

Den sidste egenskab for knuderne i en $(d, k, 2)$ -graf vises i det følgende lemma.

Lemma 3.11. *Naboerne til en knude af type 1 i G er enten af typen 1 eller af typen 2. Desuden må mindst tre af naboerne være af type 2.*

Bevis. Den første del følger direkte af Korollar 3.9. Lad nu v være en knude af type 1 i G , så indeholder G altså en $\Theta_k(v) = \Theta_k(r(v))$. Lad v_1, v_2, v_3 være naboerne til v på $\Theta_k(v)$ og lad v'_1, v'_2, v'_3 være naboerne til $r(v)$ i $\Theta(r(v))$, således at v_i og v'_i tilhører den samme $v \sim r(v)$ -vej af længde k for $i = 1, 2, 3$, se Figur 3.15. Så er det klart at $R(v_1) = \{v'_2, v'_3\}$, $R(v_2) = \{v'_1, v'_3\}$ og $R(v_3) = \{v'_1, v'_2\}$, dvs. der altså eksisterer mindst tre naboer til v af type 2.



Figur 3.15: En $\Theta_k(v)$.

■

3.3. Egenskaber for grafer med grad 4

Efter at have studeret nogle af de generelle egenskaber for $(d, k, 2)$ -grafer med $d \geq 4$ og $k \geq 3$ kan man nu bevise yderligere egenskaber for $(4, k, 2)$ -grafer med $k \geq 3$. I resten af dette afsnit antages det derfor at G er en $(4, k, 2)$ -graf og at $k \geq 3$ og beviserne er som de tidligere fra [11].

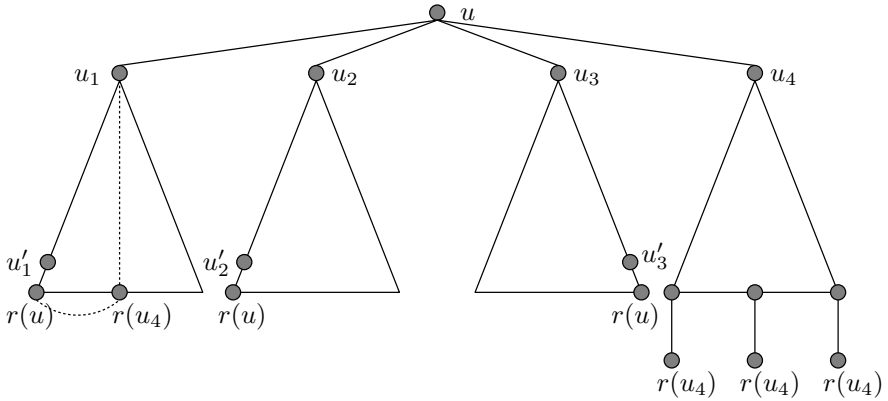
Lemma 3.12. *Lad u være en knude af type 1 i G . Så består naboerne til u af én knude af type 1 og tre knuder af type 2.*

Bevis. Lad naboerne til u være givet ved u_1, u_2, u_3 og u_4 . I følge Lemma 3.11 er tre af disse naboer type 2 knuder som ligger på $\Theta_k(u)$. Lad u_1, v_2 og u_3 være disse type 2 knuder. Antag at u_4 har to gentagelser, $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$. I følge Sætning 3.5 er $r(u)$ så nabo til både $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$. Lad naboerne til $r(u)$ i $\Theta_k(u)$ være givet ved a, b, c , så ses det at $R(\{u_1, u_2, u_3\}) = \{a, b, c\}$. Da $u_4 \notin \Theta_k(u)$, gælder der i følge Lemma 3.1 at $r_1(u_4), r_2(u_4) \notin \{a, b, c\}$, men eftersom $d = 4$ må der så gælde at $r_1(u_4) = r_2(u_4)$, dvs. u_4 er en type 1 knude. ■

Med ovenstående lemma er man nu i stand til at bevise, at en $(4, k, 2)$ -graf ikke indeholder type 1 knuder, dvs. at den ikke indeholder en Θ_k .

Lemma 3.13. *G indeholder ingen type 1 knuder.*

Bevis. Antag at $u \in G$ er en type 1 knude og lad u_1, u_2, u_3, u_4 være naboerne til u , således at u_1, u_2, u_3 er type 2 knuderne på $\Theta_k(u)$ og u_4 er en type 1 knude, jvf. Lemma 3.12. Lad u'_1, u'_2, u'_3 være de tre naboer til $r(u)$ på $\Theta_k(u)$, se Figur 3.16.



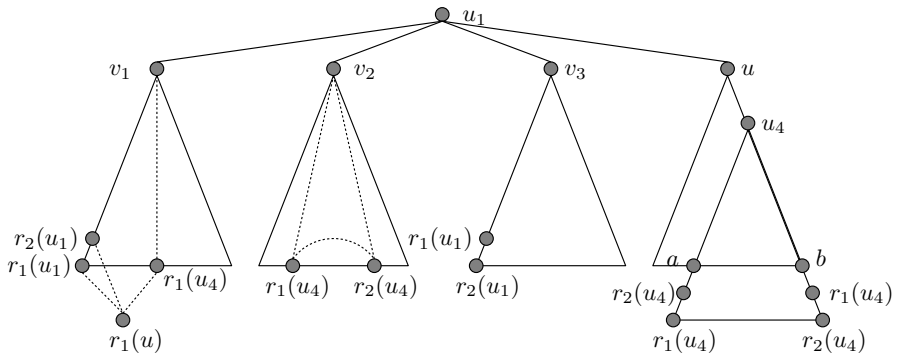
Figur 3.16: $LD(G, u, k + 1)$ for en knude af type 1.

Da diameteren er k , må $r(u_4)$ optræde i det lagvise diagram $LD(G, u, k)$. I følge Sætning 3.5 er $N(r(u)) = \{r(u_4), u'_1, u'_2, u'_3\}$, dvs. kanten $r(u)r(u_4)$ er i G . Derfor må $r(u_4)$ befinde sig i det k 'te lag af $LD(G, u, k)$ i følge Lemma 3.1. Pga. symmetri kan vi antage at $r(u_4)$ har afstand $k - 1$ til u_1 . Der eksisterer altså så en $(2k - 1)$ -kreds, C , indeholdende u_1 , $r(u)$ og $r(u_4)$, hvilket er i modstrid med at u_1 er en type 2 knude. ■

Nu ved vi altså at en $(4, k, 2)$ -graf ikke indeholder type 1 knuder, og med denne viden kan vi nu studere type 2 knuderne nærmere.

Lemma 3.14. *En type 2 knude i G har højst én nabo af type 0.*

Bevis. Lad u være en knude af type 2 i G . Antag, at u er nabo til mere end én nabo af type 0, hvoraf to af dem betegnes med u_1 og u_4 . I følge Korollar 3.10 har u_1 så to naboer, v_1 og v_3 af type 0 og én nabo mere v_2 , udover u , af type 2, se Figur 3.17.



Figur 3.17: $LD(G, u, k + 1)$ for en knude af u type 2, tegnet anderledes end normalt, da figuren også kan ses som $LD(G, u_1, k + 2)$.

Betragt nu $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$ og lad a , hhv. b betegne knuden i $N(r_2(u_4)) \cap N_k(u_1)$, hhv. $N(r_2(u_4)) \cap N_k(u_1)$. Både $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$ må optræde én gang i $LD(G, u_1, k)$

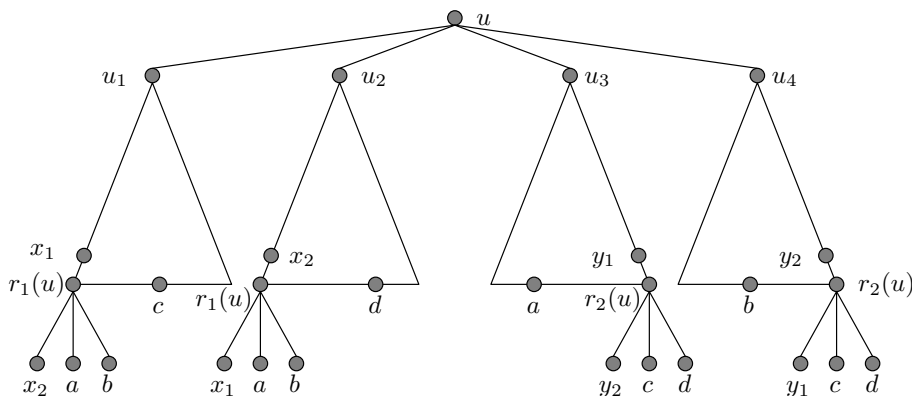
idet diameteren er k , og specielt må der gælde, at de ligger i det k 'te lag, for hvis de lå i afstand mindre end k fra u_1 , så ville a og b optræde mere end en gang i $LD(G, u_1, k)$.

Antag nu at en af $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$ ligger i afstand $k - 1$ fra en af type 0 knuderne v_1 og v_3 . Pga. symmetri kan vi antage at det er $r_1(u_4)$ der ligger i afstand $k - 1$ fra v_1 . Eftersom u og u_4 er naboer, får vi i følge Sætning 3.5 og Lemma 3.8 at en af gentagelserne af u er en nabo til $r_1(u_4)$. Pga. symmetri kan vi antage at det er $r_1(u)$ der er nabo til $r_1(u_4)$. Ved lignende argumentation får vi at $r_1(u)$ er nabo til enten $r_1(u_1)$ eller $r_2(u_1)$. Uanset hvilket tilfælde, der er gældende, ses det, at v_1 og $r_1(u)$ er indeholdt i en kreds af længde højst $2k$, hvilket er i modstrid med at v_1 er en type 0 knude. Derfor kan hverken $r_1(u_4)$ eller $r_2(u_4)$ ligge i afstand $k - 1$ til en af type 0 knuderne v_1 og v_3 . Dvs. at både $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$ må ligge i afstand $k - 1$ fra v_2 , hvilket resulterer i en $(2k - 1)$ -kreds som indeholder v_2 , $r_1(u_4)$ og $r_2(u_4)$, hvilket er i modstrid med at v_2 er en type 2 knude. ■

Med ovenstående lemma kan vi nu udelukke eksistensen af type $2a$ knuder.

Lemma 3.15. G indeholder ingen knuder af type $2a$.

Bevis. Antag G indeholder en knude u af type $2a$ med naboerne u_1, u_2, u_3 og u_4 , se Figur 3.18. Dvs. der eksisterer naboer x_1, x_2, y_1 og y_2 til $r_1(u)$ og $r_2(u)$, således at $x_1 \in R(u_2)$, $x_2 \in R(u_1)$, $y_1 \in R(u_4)$ og $y_2 \in R(u_3)$. Lad de to øvrige naboer til $r_1(u)$ være givet ved a og b , og de to øvrige naboer til $r_2(u)$ være givet ved c og d .



Figur 3.18: $LD(G, u, k + 1)$ for en knude af type $2a$.

Da der eksisterer en $2k$ -kreds som indeholder u_1 og u_2 , kan der i følge Lemma 3.1 ikke eksistere en kreds af længde $2k - 1$ indeholdende disse knuder. Dvs. at hverken a eller b kan være i $N_{k-1}(u_1)$ og $N_{k-1}(u_2)$, og tilsvarende kan hverken c eller d være i $N_{k-1}(u_3)$ og $N_{k-1}(u_4)$.

I følge Sætning 3.5 får vi at $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \{x_1, x_2, a, b, y_1, y_2, c, d\}$. Hvis både a og b befinder sig i $N_{k-1}(u_j)$ for et $j \in \{3, 4\}$, så vil der eksistere to forskellige veje af længde k fra u_j til $r_1(u)$, hvilket betyder at $r_1(u) \in R(u_j)$. Det indses at $r_1(u)$ ikke kan være a, b, x_1, x_2 eftersom de er naboer til $r_1(u)$, og det kan ikke være y_1 eller y_2 idet de så ville optræde 3 gange i det lagvise diagram, derfor må det være enten c eller d , og da

de optræder symmetrisk, kan man antage $c = r_1(u)$. Da $r_2(u) \in N(c) = N(r_1(u))$, får man ved lignende argumenter at man kan antage at $a = r_2(u)$. For det u_j hvor $b \in N_{k-1}(u_j)$ vil $c = r_1(u)$ så være en gentagelse til u_j , da c ligger på en $2k$ -kreds i afstand k fra u_j . Desuden ses det at $a = r_2(u)$ vil være en gentagelse til det u_i , $i \in \{1,2\}$, hvor $d \in N_{k-1}(u_i)$, og at denne kreds af længde $2k$ også indeholder c . Det resulterer altså i tre forskellige $2k$ -kredse som indeholder $c = r_1(u)$, idet $r_1(u)$ jo er en gentagelse til type 2 knuden u . Dvs. det er en modstrid at $r_1(u) \in R(u_j)$.

Derfor kan man pga. symmetri antage, at

$$a \in N_{k-1}(u_3) \setminus N_{k-2}(u) \text{ og } b \in N_{k-1}(u_4) \setminus N_{k-2}(u).$$

Ved tilsvarende argumenter kan vi antage at

$$c \in N_{k-1}(u_1) \setminus N_{k-2}(u) \text{ og } d \in N_{k-1}(u_2) \setminus N_{k-2}(u).$$

Da u_1 er indeholdt i en $2k$ -kreds, kan den ikke være af type 0 og i følge Lemma 3.13 er den heller ikke af type 1, og dermed må den altså være af type 2. Pga. symmetri kan vi antage at $R(u_1) = \{x_2, a\}$. Der eksisterer altså to $u_1 \sim a$ -veje af længde k som tilsammen udgør en kreds af længde $2k$ som indeholder $r_1(u)$. Tilsvarende ses det at u_2 er en type 2 knude med $R(u_2) = \{x_1, b\}$ og at der eksisterer en $2k$ -kreds indeholdende b og $r_1(u)$. Der eksisterer altså i alt tre $2k$ -kredse, som indeholder $r_1(u)$, hvilket er i modstrid med Lemma 3.1. ■

Miller og Simanjuntak forsøgte i [11] at bevise yderligere egenskaber vedrørende de resterende type 2 knuder, som de så brugte til et bevis for, at der ikke eksisterer $(4,k,2)$ -grafer. Problemet er, at der er fundet fejl i disse resterende beviser. Det udelukker dog ikke, at man i fremtiden kan anvende det allerede beviste til at bevise at der ikke eksisterer $(4,k,2)$ -grafer. I følge en privat korrespondance med Guillermo Pineda-Villavicencio, har han på nuværende tidspunkt bevist at omkredsen i en $(4,k,2)$ -graf er $2k$ og at der for $k \leq 10.000$ ikke eksisterer $(4,k,2)$ -grafer. Dvs. han har bevist at der ikke eksisterer type 0 knuder i en $(4,k,2)$ -graf og da Lemma 3.2 og 3.15 udtaler, at der ikke eksisterer type 1 og $2a$ knuder er følgende derfor anerkendt som en formodning.

Formodning 3.16. *Der eksisterer ingen $(4,k,2)$ -grafer for $k \geq 3$.*

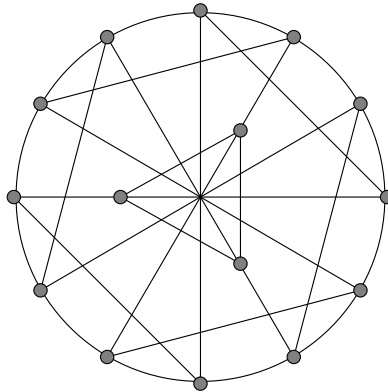
For at bevise formodningen, mangler man altså at bevise, at der ikke eksisterer type $2b$ og $2c$ knuder i en $(4,k,2)$ -graf for $k \geq 3$.

3.4. Andre resultater

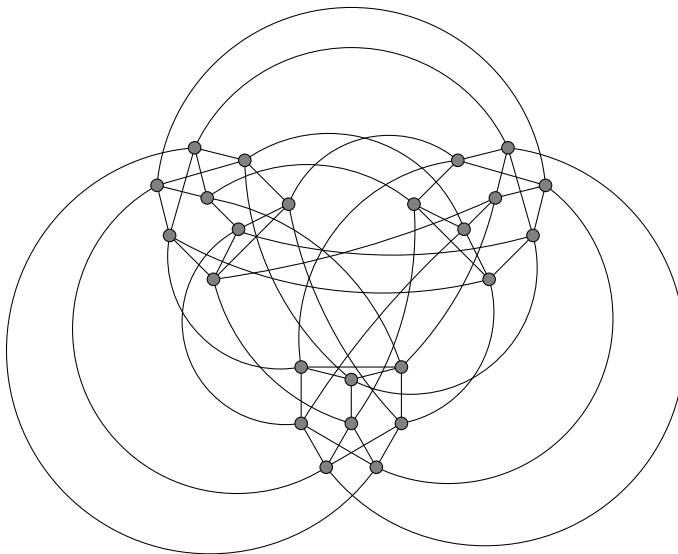
Indtil videre er det altså vist, at der for $d = 3$ eksisterer en $(3,2,2)$ - og en $(3,3,2)$ -graf, og at der for $k \geq 4$ ikke eksisterer $(3,k,2)$ -grafer. Desuden formodes det, som beskrevet, at der ikke eksisterer $(4,k,2)$ -grafer for $k \geq 3$.

For $k = 2$ fandt Elspas allerede i 1964 en $(4,2,2)$ -graf, se Figur 3.19 og en $(5,2,2)$ -graf, se Figur 3.20, som beskrevet i [16]. Derfor er de næste interessante tilfælde for $k = 2$ når $d > 5$. Miller, Nguyen og Pineda-Villavicencio udgav i 2008 artiklen [17], hvor de viser at eksistensen af $(d,2,2)$ -grafer er udelukket for uendeligt mange værdier af d , hvor d er lige. De værdier af lige $d \geq 4$ hvor der ikke eksisterer $(d,2,2)$ -grafer

for, er bl.a. dem hvor $d \not\equiv 1 \pmod 3$ og de beviste det ved at betragte strukturen i $(d,2,2)$ -grafer mht. gentagelserne. De opstillede desuden en formodning om, at der ikke eksisterer $(d,2,2)$ -grafer for lige $d > 4$.



Figur 3.19: Den entydige $(4,2,2)$ -graf.



Figur 3.20: Den entydige $(5,2,2)$ -graf.

I 2009 udgav Conde og Gimbert artiklen [18], hvori de beskriver to formodninger, som, hvis de er sande for et d , kan bevise at der ikke eksisterer $(d,2,2)$ -grafer for dette d . De beviser at formodningerne er sande for $5 < d \leq 50$, dvs. der eksisterer ikke $(d,2,2)$ -grafer for $5 < d \leq 50$. Fremgangsmåden bygger på de karakteristiske polynomier for $(d,2,2)$ -grafer. Hvis det kan lade sig gøre at bevise formodningerne for $d > 50$, så vil det altså være bevist at der ikke eksisterer $(d,2,2)$ -grafer for $d \geq 6$.

Forudsat, at der ikke eksisterer yderligere resultater vedrørende grafer med defekt 2 end de nævnte, giver det derfor ikke den store mening at betragte større defekter,

for andre værdier end $d = 3$, da man forsøger at finde en øvre grænse for ordenen af (d,k) -grafer. Selvfølgelig vil det ikke skade at have resultater vedrørende andre defekter for $d > 3$, hvis det på et tidspunkt skulle lykkes for nogle at bevise at der ikke eksisterer øvrige $(d,k,2)$ -grafer, idet man så er klar til at bevise eller modbevise eksistensen af de næste mulige maksimale (d,k) -grafer.

Grafer med grad 3 og defekt 4

Som nævnt tidligere er de eneste regulære (d, k, δ) -grafer med d ulige, dem hvor δ er lige. Dvs. når $d = 3$, så er de næste interessante $(3, k, \delta)$ -grafer dem hvor $\delta = 4$ i følge Kapitel 3. Det er disse grafer som dette kapitel vil beskæftige sig med og derfor kan det antages, at G er en $(3, k, 4)$ -graf i resten af dette kapitel.

I de kommende beviser vil man kun være interesseret i de korteste veje, hvilket er grunden til at jeg fremover blot vil betegne en vej af længde højst k som en vej og altså ikke specificere hver gang, at det er en korteste vej. Kredse af længde $2k - 1$ og $2k$ betegnes desuden samlet som korte kredse. Som tidligere er $N_i(x)$ mængden af knuder der ligger i afstand i fra knuden x og mængden af kanter mellem $N_i(x)$ og $N_j(x)$ betegnes fremover med $E(N_i(x), N_j(x))$, hvis $i = j$ dog blot med $E(N_i(x))$. Hvis to veje P og Q har mindst én knude tilfælles, $x \in P - Q$ og $y \in Q - P$, så skal der ved notationen $xPQy$ forstås den vej der starter i x og følger P mod den første knude der ligger i $P \cap Q$, og derefter fortsætter ad Q til y . Dvs. hvis z er en sådan første knude, så er $xPQy = xPzQy$.

4.1. Regulære grafer

I følge Lemma 2.1 er $(3, k, 4)$ -grafer regulære for $k \geq 3$ idet der så gælder at $\delta = 4 < M(2, 2) = 5 \leq M(2, k - 1)$. Dvs. at hvis der eksisterer en $(3, 2, 4)$ -graf, så er den ikke nødvendigvis regulær, hvilket jeg også vil vise senere.

I [19] beviste Pineda-Villavicencio og Miller følgende lemmaer for $k \geq 5$, men det er ikke en nødvendighed at $k \geq 5$.

Lemma 4.1. *En $(3, k, 4)$ -graf G hvor $k \geq 3$ har omkreds mindst $2k - 2$. Desuden gælder der, at hvis x er indeholdt i en $(2k - 2)$ -kreds, så kan den ikke være indeholdt i yderligere korte kredse.*

Bevis. Hvis der eksisterer en knude $x \in G$ som har højst $3 \cdot 2^{k-3} - 1$ knuder i $N_{k-2}(x)$, så vil $|N_{k-1}(x)| \leq 3 \cdot 2^{k-2} - 3$ og $|N_k(x)| < 3 \cdot 2^{k-2} - 6$ og dermed vil der højst være $M(d, k) - 10$ knuder i G i modstrid med, at G har defekt 4. Derfor er $|N_i(x)| = 3 \cdot 2^{i-1}$ for $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ og $|E(N_i(x))| = 0$ for alle $i \in \{1, 2, \dots, k-3\}$.

Hvis $|E(N_{k-2}(x))| > 0$, så vil $|N_{k-1}(x)| \leq 3 \cdot 2^{k-2} - 2$ og $|N_k(x)| \leq 3 \cdot 2^{k-1} - 4$, dvs. der vil højst være $M(d,k) - 6$ knuder i G i modstrid med, at defekten er 4. Derfor er $N_{k-2}(x)$ en uafhængig mængde og dermed har G omkreds mindst $2k - 2$.

Hvis en knude x er indeholdt i en $(2k - 2)$ -kreds svarer det altså til, at der er en knude i $N_{k-1}(x)$, der har to naboer i $N_{k-2}(x)$ og én i $N_k(x)$. Dermed er

$$|E(N_{k-1}(x), N_k(x))| \leq 2(3 \cdot 2^{k-2} - 1) - 1 = |N_k(x)|,$$

og der må derfor nødvendigvis gælde lighed. Heraf får man, at der kun eksisterer en enkelt knude i $N_{k-1}(x)$, der har to naboer i $N_{k-2}(x)$, at $N_{k-1}(x)$ er en uafhængig mængde og at ingen knude i $N_k(x)$ kan have to forældre i $N_{k-1}(x)$. Alt i alt, at der ikke eksisterer yderligere korte kredse, som indeholder x . ■

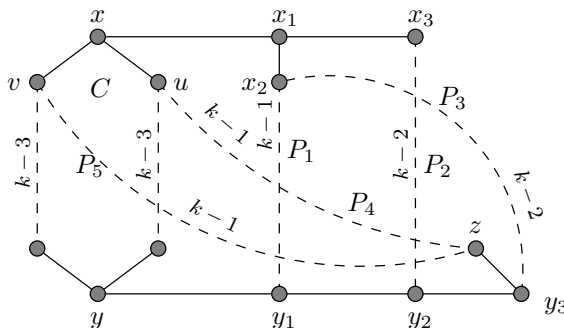
Det næste lemma udelukker, at der kan mangle en knude i det $(k - 1)$ 'te lag i et hierarki, dvs. hvis x er roden i hierarkiet, så er $|N_{k-1}(x)| = 3 \cdot 2^{k-2}$.

Lemma 4.2. *En $(3,k,4)$ -graf G med $k \geq 3$ har omkreds mindst $2k - 1$.*

Bevis. Lad C være en $(2k - 2)$ -kreds. Lad desuden x og y være knuder på C , som ligger i afstand $k - 1$ fra hinanden og lad x_1 hhv. y_1 være naboen til x hhv. y , som ikke ligger på C . I følge Lemma 4.1 vil en $x_1 \sim y_1$ -vej, P_1 , være af længde k og $P_1 \cap C = \emptyset$, idet x og y ellers vil være en del af kredse af længde højst $2k$.

Lad y_2 være naboen til y_1 , som er forskellig fra y og som ikke ligger på P_1 . Så vil en $y_2 \sim x$ -vej, P_2 , også være af længde k og $P_1 \cap C = \{x\}$ i følge Lemma 4.1, dvs. at $x_1 \in P_2$. Lad x_2 og x_3 være de to naboer til x_1 , der er forskellig fra x , således at $x_2 \in P_1$. Så ses det, at en $y \sim x_3$ -vej, Q , vil have længde k og gå igennem y_1 , med lignende argumentation som ovenfor, dvs. $D = y_1 Q x_3 x_1 P_1 y_1$ er en $2k$ -kreds.

Antag at $|V(P_1 \cap P_2)| > 1$, så må $V(P_1 \cap P_2) = \{x_1, x_2\}$, idet der ellers vil eksistere en kreds $y_2 P_2 P_1 y_1 y_2$ af længde højst $2k - 3$. Der vil så eksistere en $(2k - 2)$ -kreds, $C_1 = y_2 P_2 P_1 y_1 y_2$ som indeholder y_1 , men dette er i følge Lemma 4.1 i modstrid med at y_1 også er indeholdt i $2k$ -kredsen D . Derfor må $V(P_1 \cap P_2) = \{x_1\}$ og dermed $x_3 \in P_2$, se Figur 4.1.



Figur 4.1: En $(2k - 2)$ -kreds i en $(3,k,4)$ -graf.

Lad y_3 være naboen til y_2 , som er forskellig fra y_1 og som ikke ligger på P_2 . En $y_3 \sim x$ -vej, P_3 , vil så ikke indeholde hverken y_2 eller x_3 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 3$. Derfor må $x_2 \in P_3$ og P_3 må være af længde $k - 1$ eller k , for ellers vil x og y være indeholdt i en $2k$ -kreds.

Hvis P_3 har længde $k - 1$, så vil $y_3P_3P_1y_1y_2y_3$ være en kreds af længde højst $2k - 2$ som indeholder y_1 , men dette er som før i modstrid med, at y_1 er indeholdt i $2k$ -kredsen D . Derfor må P_3 være en k -vej.

Lad nu naboerne til x i C være givet ved u og v . I følge Lemma 4.1 vil en $y_3 \sim u$ -vej, P_4 , så være af længde k , ikke indeholde y_2 og desuden vil der gælde at $P_3 \cap P_4 = \{y_3\}$. Lad z være naboen til y_3 som ligger på P_4 . Ved lignende argumentation ses det, at en $y_3 \sim v$ -vej, P_5 , vil være af længde k og gå gennem z . Men så vil xuP_4zP_5x være en $2k$ -kreds der indeholder x , i modstrid med Lemma 4.1.

Heraf følger lemmaet. ■

Det ses at ovenstående lemma også er gældende for $k = 2$, idet det er klart at en graf har omkreds mindst 3. I følge Lemma 4.2 kan man derfor for $k \geq 2$ beskrive de forskellige typer af knuder i en regulær $(3, k, 4)$ -graf G ved hjælp af det følgende lemma, som først er beskrevet af Pineda-Villavicencio og Miller i [20].

Lemma 4.3. *Lad x være en knude i en regulær $(3, k, 4)$ -graf G , så gælder der, at x ligger på kredsene som beskrevet nedenfor, og ingen andre kredse af længde højst $2k$. Man får følgende tilfælde:*

x er indeholdt i to $(2k - 1)$ -kredse. Så vil der gælde at

a) *x ligger på præcist to $(2k - 1)$ -kredse, hvis fællesmængde er en l -vej, hvor $1 \leq l \leq k - 1$. Hvis $l = k - 1$ så er x også indeholdt i en $2k$ -kreds; eller*

x er indeholdt i præcist én $(2k - 1)$ -kreds. Så gælder der enten at

b) *x er en endeknude i en Θ_k , eller*

c) *x er indeholdt i præcist to $2k$ -kredse; eller*

x er ikke indeholdt i en $(2k - 1)$ -kreds. Så gælder der enten at

d) *x er en endeknude i præcist to Θ_k , eller*

e) *x er en endeknude i en Θ_k , og er indeholdt i yderligere to $2k$ -kredse, eller*

f) *x er indeholdt i præcist fire $2k$ -kredse.*

Bevis. I følge Lemma 4.2 ses det at $N_i(x)$ er uafhængige mængder af knuder for $i = 0, 1, \dots, k - 2$ og dermed er $|N_{k-1}(x)| = 3 \cdot 2^{k-2}$.

Der må nødvendigvis gælde at $|E(N_{k-1}(x))| \leq 2$, idet man ellers får at G højst har $M(3, k) - 6$ knuder.

Hvis $|E(N_{k-1}(x))| = 2$, så vil de to kanter enten have en fælles endeknude, eller også vil de være uafhængige. Heraf fås a. Hvis $|E(N_{k-1}(x))| = 1$, så vil man, da

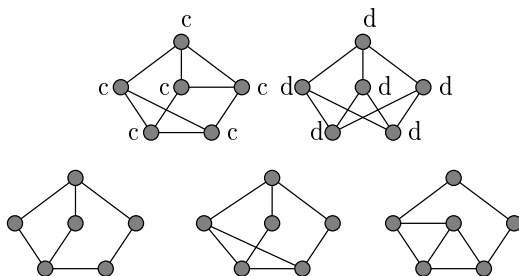
$|N_k(x)| = 3 \cdot 2^{k-1} - 4$ og $|E(N_{k-1}(x), N_k(x))| = 3 \cdot 2^{k-1} - 2$ opnå *b* eller *c*. Hvis $|E(N_{k-1}(x))| = 0$, så vil man, da $|N_k(x)| = 3 \cdot 2^{k-1} - 4$ og $|E(N_{k-1}(x), N_k(x))| = 3 \cdot 2^{k-1}$ opnå enten *d*, *e* eller *f*. ■

Hvis en knude opfylder f.eks. punkt *b* i Lemma 4.3 kaldes knuden for en type *b* knude. Som i tidligere modstridsbeviser i rapporten vil de kommende modstridsbeviser ofte betragte delgrafer af en $(3, k, 4)$ -graf for at bevise specifikke egenskaber. I den forbindelse vil man ofte komme frem til at en knude er indeholdt i for mange korte kredse. For at gøre læsningen mere flydende, vil jeg fremover kalde en knude *x* for mættet, hvis man ved *x* ikke kan være indeholdt i yderligere korte kredse. F.eks. er en type *a* knude mættet hvis man kender to $(2k - 1)$ -kredse og en $2k$ -kreds den er indeholdt i. Derimod vil knuden ikke være mættet hvis man blot ved den er indeholdt i to $(2k - 1)$ -kredse og man ikke ved noget om den vej de to kredse har tilfælles.

Desuden ses det, at hvis enhver knude *x* i en $(3, k, 4)$ -graf tilhører højst én $(2k - 1)$ -kreds, *C*, så er fællesmængden mellem *C* og enhver $2k$ -kreds af længde højst $k - 1$. Dette ses idet, hvis de havde en vej af længde *k* tilfælles, så ville der eksistere type *a* knuder, dvs. knuder der ligger på to $(2k - 1)$ -kredse, og hvis de har en vej af længde større end *k* tilfælles, så vil der eksistere en kreds af længde højst $2k - 2$.

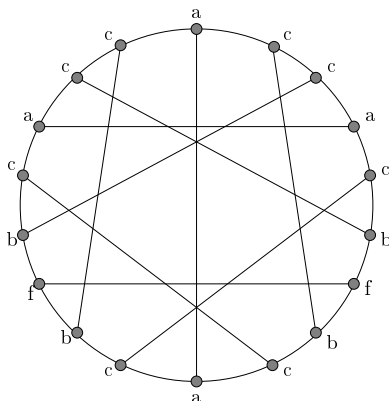
4.2. Grafer med diameter 2 og 3

I [19] er det vist og forklaret, enten direkte, eller med henvisninger, hvordan alle $(3, 2, 4)$ -grafer kan konstrueres. Der eksisterer fem $(3, 2, 4)$ -grafer, to af dem er regulære, mens de tre andre ikke er, se Figur 4.2. På de regulære grafer er der tilknyttet knudernes type. Det ses desuden at knuderne i de ikke-regulære grafer ikke nødvendigvis kan beskrives vha. af typerne i Lemma 4.3 idet der er nogle af knuderne som ikke er indeholdt i kredse af længde mindre end 5 og nogle som ikke er mættede af de korte kredse de er indeholdt i.



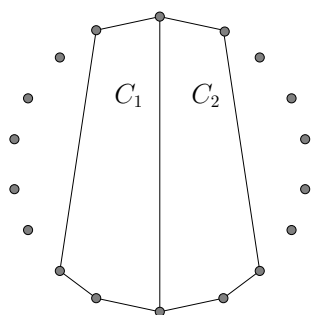
Figur 4.2: Alle $(3, 2, 4)$ -graferne.

I følge [20] var det Faradžev, der i 1978 var den første til at konstruere $(3, 3, 4)$ -grafen, se Figur 4.3. Dog var Faradževs resultater ikke tilgængelige for ret mange, så McKay og Royle konstruerede på ny $(3, 3, 4)$ -grafen i 1986 og beviste endvidere, at den er entydig.

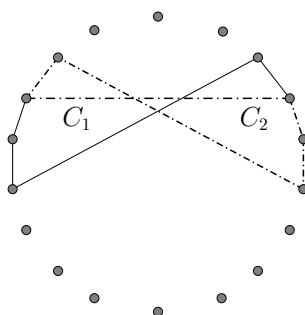


Figur 4.3: Den entydige $(3,3,4)$ -graf.

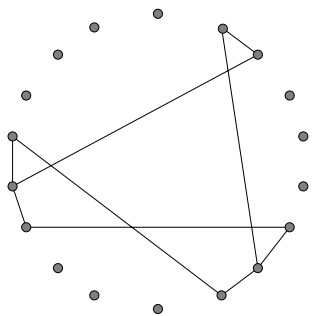
Igen er knudernes type tilknyttet figuren. Typerne findes ved at betragte de korte kredse i grafen, se Figur 4.4, og sammenholde det med Lemma 4.3.



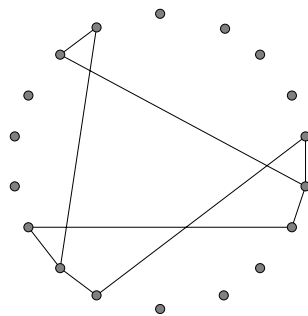
(a) To 5-kredse i $(3,3,4)$ -graf.



(b) To 5-kredse i $(3,3,4)$ -graf, hvor den ene er tegnet med stiplede kanter, og den anden indeholder de solide kanter samt den vandrette stiplede kant.



(c) En Θ_3 i $(3,3,4)$ -graf.



(d) En Θ_3 i $(3,3,4)$ -graf.

Figur 4.4: Alle korte kredse i $(3,3,4)$ -graf.

For at kategorisere de resterende $(3,k,4)$ -grafer mangler man altså dem hvor $k \geq 4$, hvilket er årsagen til det følgende afsnit.

4.3. Grafer med diameter mindst 4

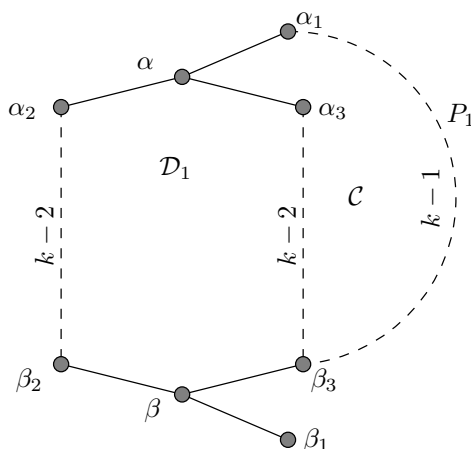
I dette afsnit vil jeg bevise, at der ikke eksisterer $(3,k,4)$ -grafer for $k \geq 4$. Jeg følger Miller og Pineda-Villavicencios beviser fra [20], hvor andet ikke er nævnt.

Fremgangsmåden, der anvendes til at bevise, at der ikke eksisterer $(3,k,4)$ -grafer, er at udelukke eksistensen af de forskellige typer knuder, der er nævnt i Lemma 4.3. Inden denne udelukkelse begynder, er det nødvendigt at bevise det følgende lemma, som vil blive anvendt gentagne gange til at bevise nogle af de øvrige lemmaer og sætninger der er nødvendige. Derefter vises nogle egenskaber vedrørende type a knuder, som anvendes til at udelukke eksistensen af $(3,4,4)$ -grafer, og derefter udelukkes hver type af knuder for $(3,k,4)$ -knuder med $k \geq 5$ én efter én.

Lemma 4.4. *Lad \mathcal{D}_1 være en $2k$ -kreds i G og lad α og β være knuder på \mathcal{D}_1 således at $d(\alpha, \beta) = k$. Lad desuden α_1 være naboen til α , som ikke ligger på \mathcal{D}_1 . Antag at α ikke er en endeknude i en Θ_k og at α_1 er indeholdt i højst én $(2k-1)$ -kreds \mathcal{C} , som også indeholder α , hvis denne eksisterer. Så gælder der enten at*

- (i) *fællesmængden af \mathcal{D}_1 og \mathcal{C} er en $(k-1)$ -vej, eller*
- (ii) *der eksisterer endnu en $2k$ -kreds, \mathcal{D}_2 , som indeholder α og α_1 . Desuden er fællesmængden af \mathcal{D}_1 og \mathcal{D}_2 en $(k-1)$ -vej.*

Bevis. Lad α , β og α_1 være givet som beskrevet i lemmaet, og lad α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , β_3 være givet som på Figur 4.5. Da $d(\alpha, \beta) = k$ vil en $\alpha_1 \sim \beta$ -vej, P_1 , ikke indeholde α og den vil være af længde $k-1$ eller k .

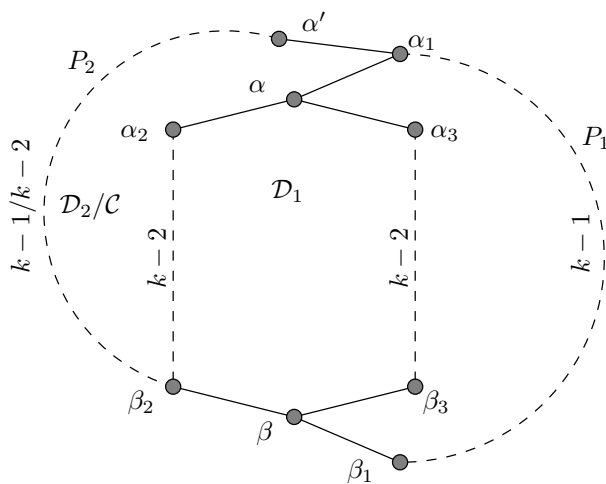


Figur 4.5: Tilfældet hvor $\beta_3 \in P_1$.

P_1 vil enten gå igennem et β_i for $i \in \{2,3\}$ eller β_1 . Hvis P_1 går gennem et β_i for et $i \in \{2,3\}$, så vil P_1 være af længde præcist k og $P_1 \cap \mathcal{D}_1 = \{\beta_i, \beta\}$, idet der

ellers vil opstå en modstrid med, at omkredsen er mindst $2k - 1$. Heraf ses det at $\mathcal{C} = \alpha\alpha_1P_1\beta_i\mathcal{D}_1\alpha$, se Figur 4.5 og derfor er (i) opfyldt.

Hvis P_1 går gennem β_1 , så vil P_1 også være af længde præcist k , idet α ellers vil være en endeknude i en Θ_k , i modstrid med antagelsen. Lad α' være den nabo til α_1 , hvorom det gælder at $\alpha' \neq \alpha$ og $\alpha' \notin P_1$. En $\alpha' \sim \beta$ -vej, P_2 , kan ikke gå igennem β_1 , idet $\alpha_1\alpha'P_2\beta_1P_1\alpha$ så vil være en kreds af længde højst $2k - 1$, og dette er i modstrid med at α_1 højst er indeholdt i én $(2k - 1)$ -kreds, nemlig \mathcal{C} , som også indeholder α . Derfor må P_2 gå gennem β_i for et $i \in \{2,3\}$ og være af længde k eller $k - 1$, se Figur 4.6. Hvis P_2 er af længde k , så vil $\mathcal{D}_2 = \alpha\alpha_i\mathcal{D}_1\beta_iP_2\alpha'\alpha_1\alpha$, og (ii) er dermed opfyldt. Hvis P_2 er af længde $k - 1$, så vil $\mathcal{C} = \alpha\alpha_i\mathcal{D}_1\beta_iP_2\alpha'\alpha_1\alpha$, og dermed følger (i).



Figur 4.6: Tilfældet hvor $\beta_1 \in P_1$.

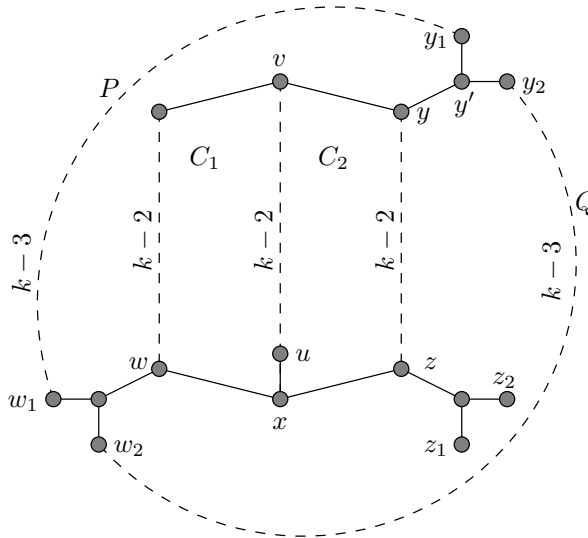
■

For at bevise det ønskede udelukkes eksistensen af type a, b og c knuder i en $(3,k,4)$ -graf og dermed følger det at omkredsen er $2k$. For at gøre dette, er det nødvendigt at bevise forskellige egenskaber vedrørende de tre typer.

Først bevises en egenskab vedrørende type a knuder, som resulterer i, at disse ikke kan være indeholdt i en $2k$ -kreds.

Lemma 4.5. *Lad C_1 og C_2 være to $(2k - 1)$ -kredse, som har mindst én knude tilfælles. Så er fællesmængden af disse to $(2k - 1)$ -kredse en vej af længde højst $k - 2$.*

Bevis. Det er klart, at man kan vælge et $x \in C_1 \cap C_2$ således, at de tre naboer til x alle ligger på $C_1 \cup C_2$, så w er naboen der ligger på $C_1 - C_2$, z er naboen der ligger på $C_2 - C_1$ og u er naboen der ligger på $C_1 \cap C_2$. Antag at fællesmængden mellem C_1 og C_2 er en $(k - 1)$ -vej og lad $u, v, y, y', y_1, y_2, w_1, w_2, z_1$ og z_2 være givet som på Figur 4.7. Heraf ses det at kanterne i $(C_1 \cup C_2) - (C_1 \cap C_2)$ danner en $2k$ -kreds, som indeholder x, v og alle knuderne på hhv. $C_1 - C_2$ og $C_2 - C_1$, dvs. x er mættet.



Figur 4.7: Knuden x er indeholdt i to $(2k-1)$ -kredse, der har en $(k-1)$ -vej tilfælles.

En $y_1 \sim x$ -vej, P , må være af længde k , idet der ellers vil opstå en modstrid med, at omkredsen er mindst $2k-1$ eller at x er mættet. P kan ikke gå igennem u , idet der så vil eksistere en $2k$ -kreds $uPy_1y'yv(C_1 \cap C_2)u$, dvs. den indeholder v , men ikke x , og dermed vil v være indeholdt i to $(2k-1)$ -kredse og to $2k$ -kredse, en modstrid. P kan heller ikke gå igennem z , idet der så vil eksistere en $(2k-1)$ -kreds $zPy_1y'yC_2z$, dvs. at z er en type a knude, som er indeholdt i en $2k$ -kreds, dermed må der i følge Lemma 4.3 gælde, at fællesmængden af de to $(2k-1)$ -kredse er en $(k-1)$ -vej, men dette er en modstrid med at deres fællesmængde er yC_2z , som er en $(k-2)$ -vej.

Derfor må P gå gennem w og dermed w_i for et $i \in \{1,2\}$, idet naboen til w på C_1 der er forskellig fra x ellers vil bidrage med en lignende modstrid med Lemma 4.3 som z gjorde ovenfor.

Ved tilsvarende argumentation ses det at en $y_2 \sim x$ -vej, Q , vil være af længde k og gå gennem w_i for et $i \in \{1,2\}$. Men dette betyder, at G indeholder en kreds af længde højst $2k-2$, bestående af $P, Q, y_1y', y'y_2$ og evt. en vej af længde 2 mellem w_1 og w_2 , altså alt i alt en modstrid med at omkredsen af G er mindst $2k-1$. ■

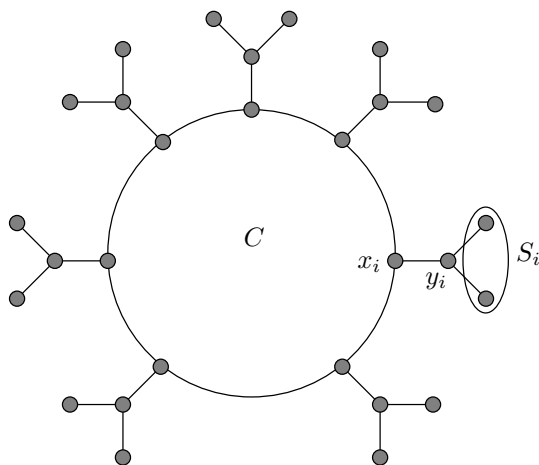
Med ovenstående lemma bevist, er det nu muligt at bevise yderligere resultater vedrørende $(3,4,4)$ -grafer.

4.3.1 Diameter 4

Dette afsnit har til formål at udelukke eksistensen af $(3,4,4)$ -grafer, hvilket gøres ved at bevise det følgende lemma og sætning som Jørgensen først beviste i [21]. Argumenterne er tilpasset Pineda-Villavicencio og Millers tilgangsvinkel, idet Jørgensen anvender nogle lidt anderledes argumenter.

Lemma 4.6. *En $(3,4,4)$ -graf G har omkreds 8.*

Bevis. Antag, at G indeholder en kreds, C , af længde 7. I følge Lemma 4.5 og at omkredsen er mindst 7, vil G indeholde delgrafen, der ses på Figur 4.8.



Figur 4.8: (3,4,4)-grafen G indeholder en kreds af længde 7.

Lad H_1 betegne den delgraf, der bliver udspændt af knuderne i Figur 4.8, dvs. H_1 indeholder evt. nogle kanter som ikke ses på Figur 4.8. Lad H_2 være grafen $G - H_1$, så ses det at denne har orden 14, idet H_1 har orden 28 og G har orden 42. Lad knuderne i C være betegnet med x_1, x_2, \dots, x_7 i cyklisk orden og lad naboen til x_i , der ikke ligger på C , være givet ved y_i for alle $i = 1, 2, \dots, 7$. Lad desuden mængden af de to naboer til y_i , der er forskellige fra x_i være betegnet med S_i for alle $i = 1, 2, \dots, 7$ og lad S være foreningsmængden af disse mængder, dvs. der er 14 knuder i S .

For alle knuder $x \in H_2$ gælder der, at $d(x, x_i) \leq 4$ og derfor vil der enten gælde, at

- x er nabo til $y \in S_i$, eller
- x er nabo til $y \in S_j$, hvor $x_i x_j \in C$, eller
- x er nabo til $y \in S_j$ og y er nabo til $z \in S_i$, eller
- x er nabo til $y \in H_2$ og y er nabo til $z \in S_i$.

Hvis x har grad 3 i H_2 , så vil der eksistere et $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ således at $d(x, x_i) > 4$, hvilket er en modstrid. Derfor har alle $x \in H_2$ højst grad 2 i H_2 , og hvis den har grad 2, så vil mindst én af dens naboer have grad 1 i H_2 , idet der ellers vil opstå en modstrid som før. Derfor er de mulige komponenter i H_2 veje af længde 0, 1, 2 og 3.

For alle $x \in H_2$, lad $s(x)$ betegne antallet af kanter fra H_1 til H_2 som indeholder x , plus antallet af knuder $y \in S$, som er nabo til både x og en anden knude i S . Så vil der gælde, at

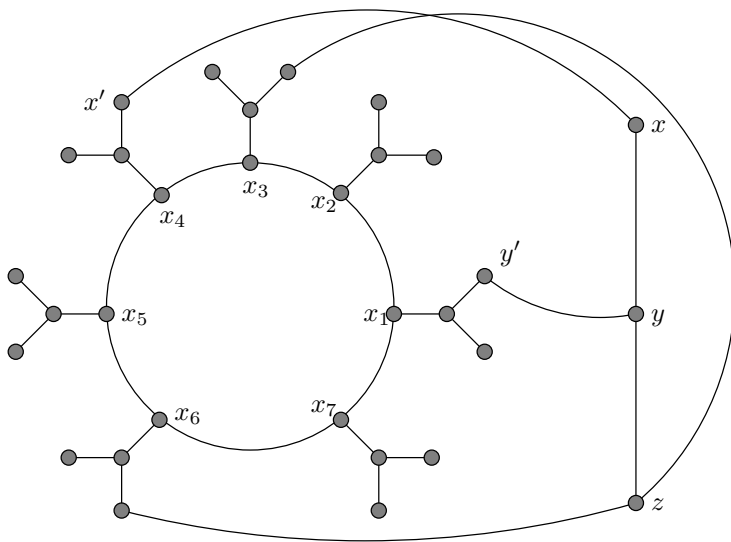
$$\sum_{x \in H_2} s(x) \leq 2|S| = 2|H_2| = 28. \quad (4.1)$$

Dette ses eftersom (4.1) også kan udregnes ved at definere en funktion $r(y)$ for alle $y \in S$, som antallet af kanter fra y til H_2 plus, hvis y er nabo til en knude i H_2 ,

antallet af kanter fra y til andre knuder i S . Dermed ses det altså at $r(y) \leq 2$ for alle $y \in S$.

For knuder x i veje af længde 0 og 1 i H_2 er det klart at $s(x) \geq 2$, idet x er indeholdt i mindst to kanter fra H_1 til H_2 . Det samme gør sig gældende hvis x er en knude af grad 1 i en 3-vej. Hvis x er en knude af grad 2 i en 3-vej, så vil der være én kant mellem H_1 og H_2 som indeholder x , og da $d(x, x_i) \leq 4$ for alle $i = 1, 2, \dots, 7$ må der desuden eksistere mindst én knude $y \in S$ som er nabo til både x og en anden knude i S , derfor er $s(x) \geq 2$ for alle knuder, der ligger på veje af længde 0, 1 eller 3.

Antag at H_2 indeholder en komponent som er en 2-vej. Så eksisterer der en 2-vej, xyz , som opfylder $s(x) + s(y) + s(z) \leq 6$, idet der ellers vil opstå en modstrid med (4.1). Da knuderne på en 2-vej i H_2 vil være indeholdt i 5 kanter mellem H_1 og H_2 , eksisterer der altså højst ét $v \in S$, som er nabo til både en anden knude i S og til enten x, y eller z . Pga. symmetri kan man så antage, at en sådan knude, hvis den eksisterer, ikke er nabo til z . Desuden kan vi antage, at y er nabo til $y' \in S_1$. Heraf ses det at $d(z, x_1) = 4$ og da $d(z, x_i) \leq 4$ for alle $i = 2, 3, \dots, 7$, må der nødvendigvis gælde at z er nabo til en knude i S_3 og en i S_6 , se Figur 4.9. Derfor ved man nu, at $d(y, x_i) \leq 4$ for $i = 1, 2, 3, 6, 7$, og dermed må x være nabo til en knude i enten S_4 eller S_5 , da der også skal gælde at $d(y, x_i) \leq 4$ for $i = 4, 5$. Man kan antage at x er nabo til en knude $x' \in S_4$ pga. symmetri.



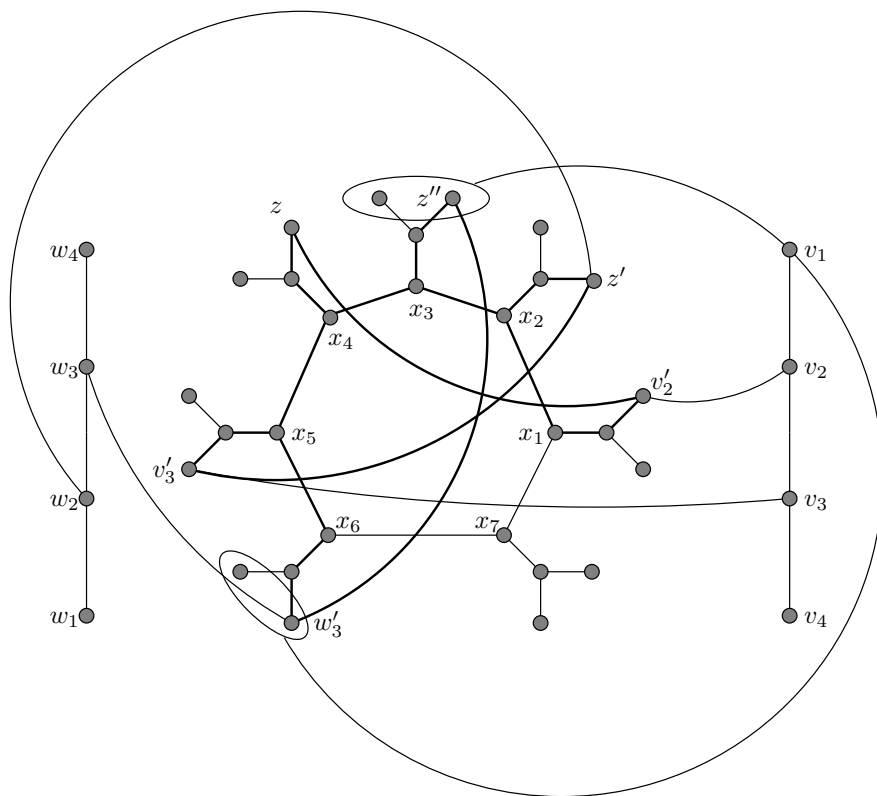
Figur 4.9: H_2 indeholder en 2-vej, xyz , som komponent.

Antag at $w \in S_5$ er nabo til y' . Dvs. der ikke eksisterer en knude $v \in S$, som er nabo til x og en anden knude i S . Dermed må der gælde at $d(x, x_2) > 4$ eller $d(x, x_6) > 4$, hvilket er en modstrid.

Derfor eksisterer der altså ikke et $w \in S_5$, som er nabo til y' og da $d(y, x_5) \leq 4$ er den eneste mulighed for dette, hvis x er nabo til en knude $x'' \in S_5$. Men så vil der gælde, at $d(x, x_2) > 4$ eller $d(x, x_7) > 4$, igen en modstrid. Derfor kan H_2 ikke indeholde en

2-vej som komponent. Dvs. at $s(x) = 2$ for alle $x \in H_2$ i følge (4.1), og dermed kan en 0-vej heller ikke være en komponent i H_2 .

Antag nu at $v_1 v_2 v_3 v_4$ er en 3-vej i H_2 . Pga. symmetri kan vi antage at v_2 er nabo til en knude $v'_2 \in S_1$ og så vil v_1 være nabo til en knude i S_3 og en i S_6 , se Figur 4.10. Dermed mangler vi blot, at $d(v_2, x_i) \leq 4$ for $i = 4, 5$. For at dette kan lade sig gøre må der for det første gælde at v'_2 er nabo til enten en knude i S_4 eller en i S_5 . Pga. symmetri kan vi antage at v'_2 er nabo til $z \in S_4$. For det andet må der så gælde at v_3 er nabo til $v'_3 \in S_5$. Dermed må v_4 være nabo til en knude i S_3 og en i S_7 , og så må v'_3 være nabo til en knude $z' \in S_2$.



Figur 4.10: H_2 indeholder en 3-vej som komponent.

Da der gælder lighed (4.1), kan hver knude i S højst have grad 2 i H_1 . Derfor eksisterer der en knude $w_2 \in H_2$, som er nabo til z' og af grad 2, idet kanten $w_2 z'$ eksisterer og knuden z' dermed er nabo til både w_2 og en anden knude i S , dvs. $s(w_2) = 2$ er opfyldt. Dermed må w_2 være indeholdt i en 3-vej $w_1 w_2 w_3 w_4$. Med lignende argumentation som ovenfor, ses det, at w_3 er nabo til en knude $w'_3 \in S_6$ og at w'_3 er nabo til en knude $z'' \in S_3$. Men så ses det at x_3 er indeholdt i 8-kredsene $x_3 x_4 x_5 y_5 v'_3 z' y_2 x_2 x_3$, $x_3 x_4 y_4 z v'_2 y_1 x_1 x_2 x_3$ og $x_3 x_4 x_5 x_6 y_6 w'_3 z'' y_3 x_3$ der er markeret med tykkere streger på Figur 4.10, hvilket er en modstrid i følge Lemma 4.3, idet x_3 også er indeholdt i 7-kredsen C .

Alle komponenter i H_2 må altså være 1-veje og S være en uafhængig mængde. Lad x være en knude i H_2 , så gælder der, idet $d(x, y_1) \leq 4$, enten at

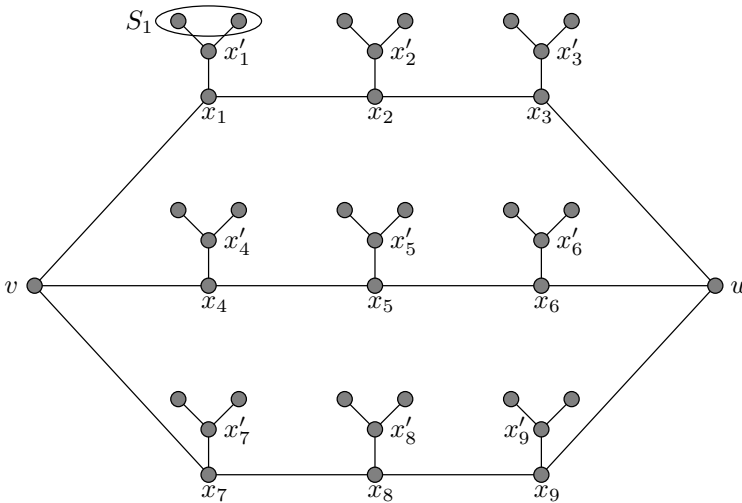
- x er nabo til $y \in S_1$, eller
- x er nabo til $y \in H_2$ og y er nabo til $z \in S_1$, eller
- x er nabo til $y \in S_j$, y er nabo til $z \in H_2$ og z er nabo til $v \in S_1$.

Så er der fire af hver af de ovennævnte knuder, men da $|H_2| = 14$, vil der altså være to knuder, som har afstand mindst 5 til y_1 . Denne modstrid beviser lemmaet. ■

Vi har nu udelukket eksistensen af type a, b og c knuder i en (3,4,4)-graf og mangler derfor blot at betragte type d, e og f knuder for at bevise den følgende sætning.

Sætning 4.7. *Der eksisterer ingen (3,4,4)-grafer.*

Bevis. Antag at G er en (3,4,4)-graf og at den indeholder en Θ_k med endeknuderne v og w . Lad x_1, x_2, \dots, x_9 være givet som på Figur 4.11 og lad x'_i være naboen til x_i som ikke ligger på Θ_k , samt $S_i = \{y_i, z_i\}$ være mængden af de to naboer til x'_i som er forskellige fra x_i , for alle $i = 1, 2, \dots, 9$. Da omkredsen er 8 vil $x'_i \neq x'_j$ for alle $i \neq j$, men der gælder ikke nødvendigvis, at $S_i \cap S_j = \emptyset$.



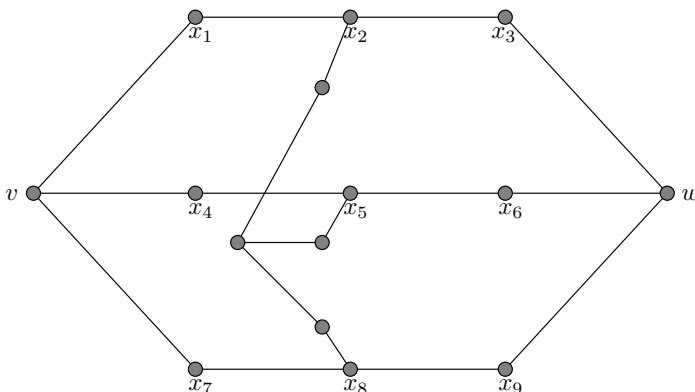
Figur 4.11: G indeholder en Θ_k .

Antag at $S_2 \cap S_5 = \emptyset$, så ses det, idet $d(x_2, x'_5) \leq 4$, at der er en kant mellem S_2 og S_5 . Så kan vi antage at denne kant er givet ved $y_2 y_5$. Hvis der er en vej af længde højst 2 mellem S_2 og z_5 , så vil G indeholde en kreds af længde højst 7. Derfor vil en $z_5 \sim x_2$ -vej af længde højst 4 indeholde en kant mellem z_5 og enten S_1 eller S_3 . Tilsvarende ses det, at der vil være en kant fra z_2 til S_4 eller S_6 . Disse kanter vil så være indeholdt i 8-kredse $D_1 = x_2 x'_2 z_2 (u \in S_i) x'_i x_i t x_{i-3} x_2$, hvor $i \in \{4, 6\}$, $t = v$ hvis $i = 4$ og $t = w$ hvis $i = 6$, og $D_2 = x_5 x'_5 z_5 (u \in S_j) x'_j x_j t x_{j+3} x_5$, hvor $j \in \{1, 3\}$, $t = v$ hvis $j = 1$ og $t = w$ hvis $j = 3$. D_1 og D_2 indeholder altså enten v eller w .

Antag nu, at $S_2 \cap S_8 = \emptyset$ eller $S_5 \cap S_8 = \emptyset$, pga. symmetri kan vi antage at $S_2 \cap S_8 = \emptyset$. Med lignende argumentation som ovenfor ses det, at der eksisterer to 8-kredse D_3 og D_4 , hvor D_3 indeholder en kant mellem S_2 og $S_{8\pm 1}$ og D_4 indeholder en kant mellem S_8 og $S_{2\pm 1}$, dvs. de hver indeholder enten v eller w . Ved at studere kredsene D_1, \dots, D_4 ses det at det højst er D_1 og D_3 , der har en 4-vej tilfælles, som ender i v eller w , dvs. at v og w enten er mættede type e knuder eller type d knuder, hvor den sidste 8-kreds vil indeholde kanter allerede indeholdt i en af de nævnte 8-kredse. Derfor må der også gælde, at $S_5 \cap S_8 = \emptyset$, idet der ellers vil eksistere yderligere to 8-kredse indeholdende v eller w , som ikke har en 4-vej tilfælles med D_1, \dots, D_4 som ender i v eller w . Men så kan man ved tilsvarende argumenter som ovenfor, vise at der eksisterer yderligere en 8-kreds som indeholder v eller w og som indeholder en kant mellem S_5 og $S_{8\pm 1}$, dvs. en kant der ikke er indeholdt i nogle af de tidligere nævnte kredse.

Derfor må $S_2 \cap S_8 \neq \emptyset$ og $S_5 \cap S_8 \neq \emptyset$, når man har givet at $S_2 \cap S_5 = \emptyset$. Men så eksisterer der yderligere fire 8-kredse, hvoraf to indeholder v og de to andre indeholder w , men ingen af dem vil have 4-veje tilfælles med hinanden som har endeknuder i v eller w , og derfor er v eller w indeholdt i for mange 8-kredse i følge Lemma 4.3.

Derfor gælder det, at $S_2 \cap S_5 \neq \emptyset$, $S_2 \cap S_8 \neq \emptyset$ og $S_5 \cap S_8 \neq \emptyset$ og da omkredsen er 8 gælder der yderligere, at $S_2 \cap S_5 \cap S_8 \neq \emptyset$. Derfor vil alle $\Theta_k \in G$ være indeholdt i en delgraf som den på Figur 4.12. Alle knuderne, der har grad 3 i den graf, der ses på figuren er af type d og er mættede. Heraf følger det, idet alle de andre knuder i delgrafen kun har type d naboer i delgrafen, at alle kredse af længde 8 som indeholder nogle af knuderne på Figur 4.12, er indeholdt i denne graf. Grafen på Figur 4.12 indeholder altså 6 knuder af type d og 9 knuder af type f og G vil ikke indeholde knuder af type e.



Figur 4.12: Hvis G indeholder en Θ_k , så vil alle Θ_k være indeholdt i en delgraf som denne.

Lad nu G være en vilkårlig $(3,4,4)$ -graf, så ses det af ovenstående, at hvis p er antallet af type d knuder i G og q er antallet af type f knuder, så er $6q \geq 9p$. For enhver knude $x \in G$ gælder der, at $|E(N_4(x))| = 18$. En type d knude vil så være indeholdt i 18 kredse af længde 9, mens en type f knude vil være indeholdt i 22 9-kredse.

Alt i alt er der altså $\frac{1}{9}(22q + 18p)$ kredse af længde 9 og derfor vil 9 gå op i $22q + 18p$. Da 9 går op i $18q + 18p$, vil 9 gå op i $4q$ og dermed i q .

Antallet af 8-kredse er $\frac{1}{8}(4q + 6p)$ og dermed går 8 altså op i $4q + 6p$. Da 8 går op i $168 = 4 \cdot 42 = 4(p + q)$, vil 8 så også gå op i $2p$, dvs. 4 går op i p . Da p og q er ikke-negative og heltallige, resulterer ovenstående i at $p = 24$ og $q = 18$, men dette er i modstrid med at $6q \geq 9p$, hvilket beviser sætningen. ■

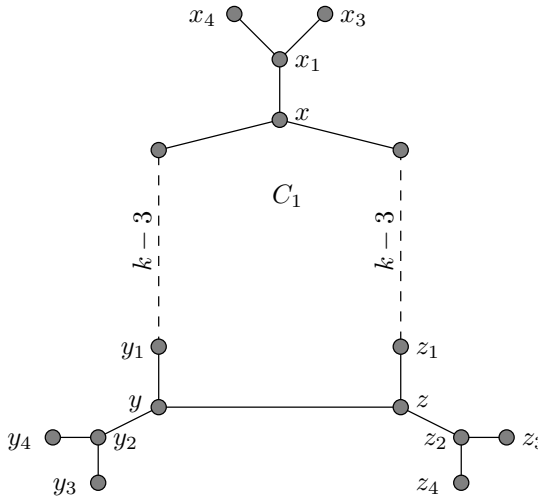
4.3.2 Diameter mindst 5.

Følgende lemma udtaler sig om den præcise længde på den vej to $(2k - 1)$ -kredse har tilfælles, hvis de ikke er disjunkte.

Lemma 4.8. *Antag at G er en $(3, k, 4)$ -graf med $k \geq 4$ som indeholder to ikke-disjunkte $(2k - 1)$ -kredse. Så er fællesmængden af disse to $(2k - 1)$ -kredse en vej af længde præcist $k - 2$.*

Bevis. Lad C_1 og C_2 være de to $(2k - 1)$ -kredse og antag at deres fællesmængde er en l -vej, hvor $l \in \{1, 2, \dots, k - 3\}$.

Da C_1 og C_2 er forskellige eksisterer der en endeknude x på l -vejen, hvorom det gælder, at x har en nabo x_1 således at $x_1 \notin C_1$. Desuden har x_1 en nabo $x_3 \neq x$, hvor $x_3 \in C_2$. Lad de øvrige knuder være givet som på Figur 4.13.



Figur 4.13: Delgrafen, der er indeholdt i G , når $x \in C_1 \cap C_2$ og $x_1 \in C_2 - C_1$.

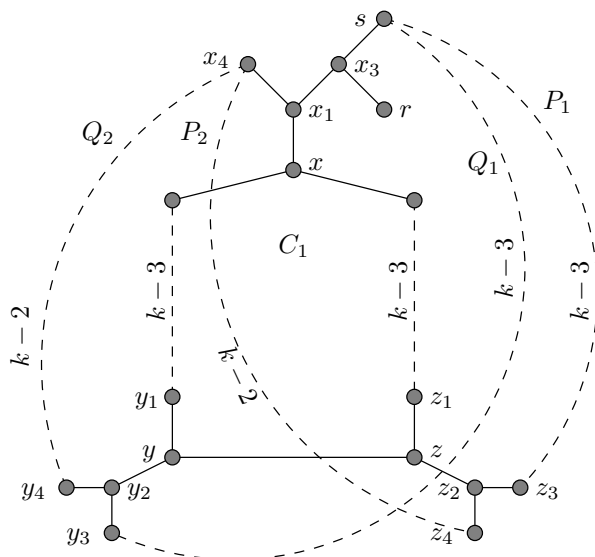
En $x_3 \sim z$ -vej, P_1 , vil ikke indeholde x_1 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$ forskellige fra C_1 og C_2 , som indeholder x , hvilket er en modstrid. Da der per antagelse gælder, at fællesmængden mellem C_1 og C_2 ikke er en $(k - 2)$ -vej, vil der desuden gælde, at $z_1 \notin P_1$ og $y_1 \notin P_1$. Hvis P_1 går gennem y_2 , så eksisterer der en kreds af længde højst $2k$ givet ved $y_2 y_1 C_1 x x_1 x_3 P_1 y_2$, men da x er en type a knude, så er dette en modstrid med Lemma 4.5 og antagelsen. Derfor må P_1 gå

igennem z_2 og være af længde k , idet det ellers er en modstrid med antagelsen. Ved lignende argumentation ses det, at en $x_4 \sim z$ -vej, P_2 , også må gå gennem z_2 . Hvis både P_1 og P_2 går gennem det samme z_i for et $i \in \{3,4\}$, så vil $x_1x_3P_1z_iP_2x_4x_1$ være en $(2k-2)$ -kreds, en modstrid og derfor kan man antage at $z_3 \in P_1$ og $z_4 \in P_2$. Det bemærkes at $x_1x_3P_1z_3z_2z_4P_2x_4x_1$ er en $2k$ -kreds D_1 .

På tilsvarende vis kan man vise, at en $x_3 \sim y$ -vej, Q_1 , og en $x_4 \sim y$ -vej, Q_2 , vil gå igennem y_2 og begge være af længde k . Som før kan man så antage, at $y_3 \in Q_1$ og $y_4 \in Q_2$, idet der ellers vil eksistere en kreds af længde $2k-2$, hvis Q_1 og Q_2 går gennem det samme y_i for et $i \in \{3,4\}$. Desuden vil der eksistere endnu en $2k$ -kreds $D_2 = x_1x_3Q_1y_3y_2y_4Q_2x_4x_1$, dvs. at x_1 og x_3 begge er indeholdt i de to $2k$ -kredse, D_1 og D_2 , og i $(2k-1)$ -kredsen C_2 . Dermed er både x_1 og x_3 type c knuder, idet hvis x_1 skulle være en type b knude, så ville $z_2 = y_2$ og hvis x_3 var en type b knude, så ville $z_4 = y_4$, dvs. der ville eksistere en kreds af længde 5 i begge tilfælde, hvilket er i modstrid med at omkredsen er mindst $2k-1$ og $k \geq 4$. Med andre ord er x_1 og x_3 mættede.

Lad s og r være naboerne til x_3 , som ikke er x_1 , således at $s \in P_1$ og $r \notin P_1$. Så vil der enten gælde, at $V(P_1 \cap Q_1) = \{x_3, s\}$ eller $V(P_1 \cap Q_1) = \{x_3\}$, for hvis de har mere tilfælles, så vil der eksistere en kreds af længde højst $2k-2$.

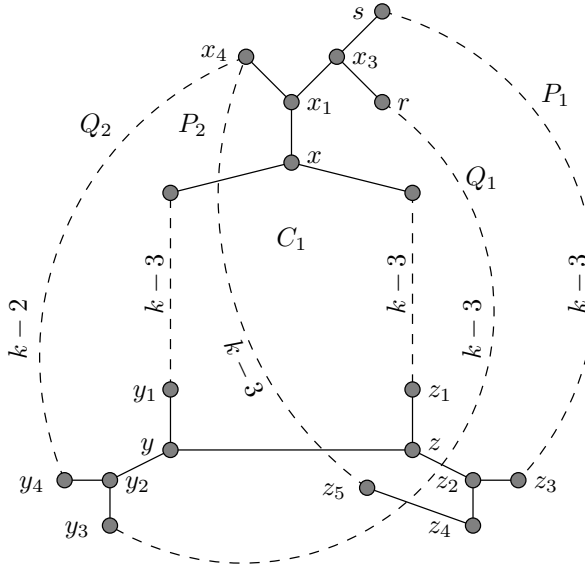
Hvis $V(P_1 \cap Q_1) = \{x_3, s\}$, så vil y og z ligge på $(2k-1)$ -kredsen $sP_1z_3z_2zyy_2y_3Q_1s$, og dermed må der gælde, at $V(P_2 \cap Q_2) = \{x_4\}$, for ellers vil y og z ligge på ialt tre $(2k-1)$ -kredse. G vil altså indeholde en delgraf som på Figur 4.14.



Figur 4.14: Delgrafen i G , hvis $V(P_1 \cap Q_1) = \{x_3, s\}$.

Lad A være en $r \sim z$ -vej. Så kan A ikke gå gennem hverken y_1, y_2, z_1 eller z_2 idet x_1 og x_3 er mættede, og derfor kan man altså ikke komme fra r til z via en vej af længde højst k , hvilket er en modstrid med definitionen af diameteren k .

Derfor må $V(P_1 \cap Q_1) = \{x_3\}$ og man kan antage, at $V(P_2 \cap Q_2) = \{x_4\}$, for ellers vil der enten eksistere kredse af længde højst $2k - 2$ eller en $(2k - 1)$ -kreds, der indeholder y og z , hvilket er i modstrid med, at omkredsen er mindst $2k - 1$ eller at $C_1 \cap C_2$ har en l -vej tilfælles, som ender i x og som derfor ikke indeholder hverken y eller z . Desuden kan det antages, at $r \in C_2$. G indeholder altså delgrafene, der ses på Figur 4.15, hvor det ses, at $z_5 \in P_2$ er naboen til z_4 , som ikke er z_2 .

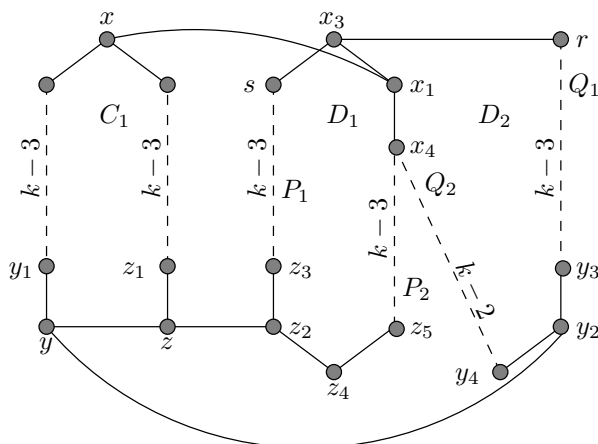


Figur 4.15: Delgrafene i G , hvis $V(P_1 \cap Q_1) = \{x_3\}$.

Da jeg ønsker at anvende Lemma 4.4, tegnes delgrafene på en anden måde, som har fokus på knuderne x_3 , r og $2k$ -kredsen D_1 , se Figur 4.16. Da r er indeholdt i D_2 gælder der i følge Lemma 4.5, at r højst kan være med i én $(2k - 1)$ -kreds. Derfor ses det at Lemma 4.4 kan anvendes ved at lade x_3 være α , z_4 være β , r være α_1 , D_1 være \mathcal{D}_1 og C_2 være \mathcal{C} . Hvis det er Lemma 4.4 (i), der er opfyldt, så er det fordi x_3 og r begge er indeholdt i en $(2k - 1)$ -kreds, som har en $(k - 1)$ -vej tilfælles med D_1 . Denne kreds må så nødvendigvis være C_2 , men så opstår der en modstrid, idet der så skal gælde at $k - 1 = 1$ for $k \geq 5$. Hvis det derimod er Lemma 4.4 (ii), der er opfyldt, så er det fordi x_3 og r begge er indeholdt i en $2k$ -kreds, som har en $(k - 1)$ -vej tilfælles med D_1 . Men denne kreds vil være givet ved D_2 , som har en 2-vej, givet ved $x_4x_1x_3$, tilfælles med D_1 , hvilket igen er i modstrid med at $k \geq 5$.

■

Det ovenstående lemma gælder også for $k = 3$, men bevis metoden kan ikke generaliseres til $k \geq 3$. At lemmaet er sandt for $k = 3$ indses, eftersom hvis en knude x i en $(3,3,4)$ -graf er indeholdt i to 5-kredse, så vil disse kredse have præcist én kant tilfælles i følge Lemma 4.5, dvs. en 1-vej, og da $k = 3$ er lemmaet altså også opfyldt for $k = 3$. Lemmaet gælder også for $k = 4$ som allerede beskrevet, men lemmaet var ikke nødvendigt for at bevise, at der ikke eksisterer $(3,4,4)$ -grafer, hvilket er grunden



Figur 4.16: Fokus på x_3, r og D_1 .

til at det først bliver præsenteret nu, idet vi skal se at det er nødvendigt for at bevise, at der ikke eksisterer $(3, k, 4)$ -grafer for $k \geq 5$.

I resten af kapitlet vil det være forudsat at $k \geq 5$, hvad der derfor kan antages gælder med mindre andet er nævnt. Resten af afsnittet vil være opbygget således at de forskellige typer af knuder vil blive udelukket en efter en, hvilket resulterer i at der ikke eksisterer $(3, k, 4)$ -grafer for $k \geq 5$.

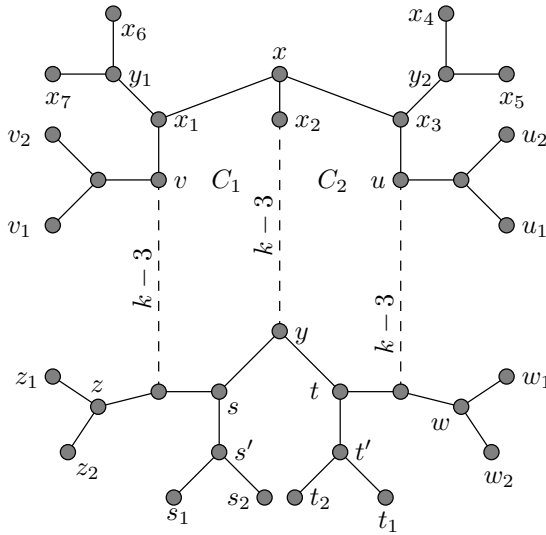
Type a knuder

Med ovenstående lemmaer er det nu muligt at bevise, at der ikke eksisterer type a knuder i G .

Sætning 4.9. *En $(3, k, 4)$ -graf G indeholder ingen knuder af type a.*

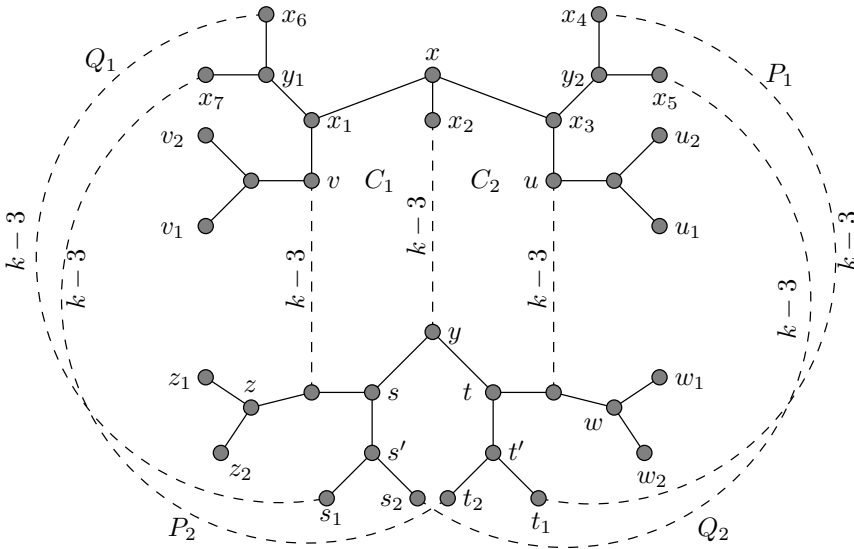
Bevis. Lad x være en type a knude, som ligger på de to $(2k - 1)$ -kredse C_1 og C_2 , således at x har naboer $x_2 \in C_1 \cap C_2$, $x_3 \in C_2 - C_1$ og $x_1 \in C_1 - C_2$. I følge Lemma 4.5 og 4.8 er fællesmængden mellem C_1 og C_2 så en $(k - 2)$ -vej. Derfor vil G indeholde delgraften, der ses på Figur 4.17, hvor betegnelserne for de øvrige knuder kan ses. Det bemærkes at alle knuderne på $(k - 2)$ -vejen mellem y og x er af type a, og dermed mættede i følge Lemma 4.5.

Lad P_1 være en $t_1 \sim x$ -vej. Hvis P_1 indeholder enten x_2 eller t' , så vil der eksistere yderligere en $(2k - 1)$ -kreds indeholdende x_2 eller en kreds af længde højst $2k - 2$, hvilket er i modstrid med, at x_2 er mættet og at omkredsen er mindst $2k - 1$. Der må derfor gælde at $x_2, t' \notin P_1$. Der gælder også, at $u \notin P_1$, for ellers vil der eksistere en kreds af længde højst $(2k - 2)$. Hvis $v \in P_1$, så vil der eksistere en kreds af længde højst $2k$ indeholdende y , hvilket er i modstrid med, at y er mættet. Derfor må der altså gælde, at P_1 går gennem enten y_1 eller y_2 og at det er en k -vej, idet x er mættet. På tilsvarende vis ses det, at en $t_2 \sim x$ -vej, P_2 , er en k -vej og går gennem enten y_1 eller y_2 . Hvis $x_1 \in V(P_1 \cap P_2)$ eller $x_3 \in V(P_1 \cap P_2)$, så vil der eksistere en kreds af længde højst $2k - 2$ i G , en modstrid, og man kan derfor antage at P_1 går gennem



Figur 4.17: Delgraf indeholdende knuden x af type a.

x_4 og P_2 går gennem x_7 .

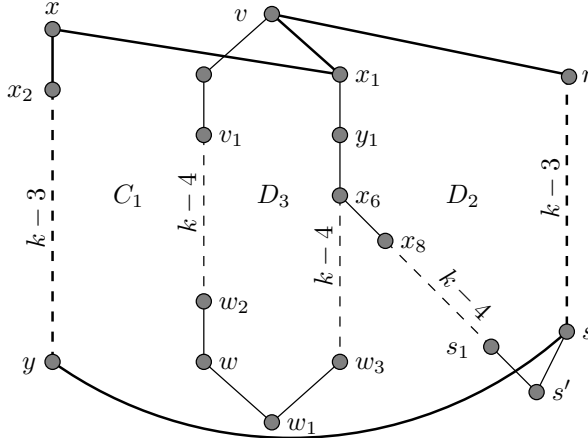


Figur 4.18: Delgraf indeholdende knuden x af type a.

Ved lignende argumentation kan man antage, at k -vejene Q_1 mellem s_1 og x og Q_2 mellem s_2 og x går gennem hhv. y_1 og y_2 . Hvis Q_1 går gennem x_7 , så vil $ytt't_2P_2x_7Q_1s_1s'sy$ være en kreds af længde $2k$, en modstrid med at y er mæt-tet. Tilsvarende ser man, at Q_2 ikke kan gå gennem x_4 , og dermed kan man se, at Q_1 må gå gennem x_6 og Q_2 må gå gennem x_5 , se Figur 4.18. Det ses at $D_1 = tt't_1P_1x_4y_2x_3uC_2t$ og $D_2 = ss's_1Q_1x_6y_1x_1vC_1s$ er $2k$ -kredse, dvs. at t, u, x_3, x_1, v, s er

Θ_k , idet $|E(D_1 \cap D_2)| = 3 < k$, dvs. de er af type c.

Vi vil nu fokusere på knuden v og kredsene C_1 , D_2 og D_3 , og lade w_3 være naboen til w_1 der er forskellig fra w , således at $w_3 \in M_1$, se Figur 4.20.



Figur 4.20: Delgraf indeholdende knuden x af type a, hvor kanterne og vejene i C_1 er markeret med tykkere streger.

Man kan nu anvende Lemma 4.4, idet man kan afbilde v over i α , r over i α_1 , w_1 over i β , D_3 over i \mathcal{D} og C_1 over i \mathcal{C} . Hvis Lemma 4.4 (i) er opfyldt, vil C_1 være den kreds der indeholder v og r og som har en $(k-1)$ -vej tilfælles med D_3 . Men dette er i modstrid med at D_3 og C_1 kun har kanten vx_1 tilfælles, idet $k \geq 5$. Derfor må Lemma 4.4 (ii) være opfyldt, dvs. der eksisterer yderligere en $2k$ -kreds, som indeholder v og r og som har en $(k-1)$ -vej tilfælles med D_3 . Dette må nødvendigvis være D_2 , idet v er af type c, men en modstrid opnås igen, da D_2 og D_3 kun har en 3-vej tilfælles og $k \geq 5$.

Ovenstående modstride beviser altså at der ikke kan eksistere type a knuder i G . ■

Næste skridt er at bevise, at der ikke eksisterer type b knuder.

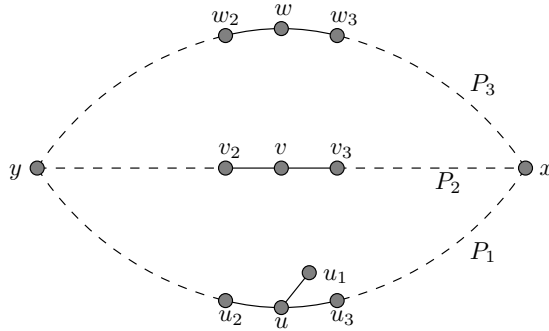
Type b knuder

Efter at have bevist, at der ikke eksisterer type a knuder i G , er det nu muligt at udelukke eksistensen af type b knuder uden yderligere lemmaer end dem, der allerede er til rådighed.

Sætning 4.10. En $(3,k,4)$ -graf G indeholder ingen knuder af type b.

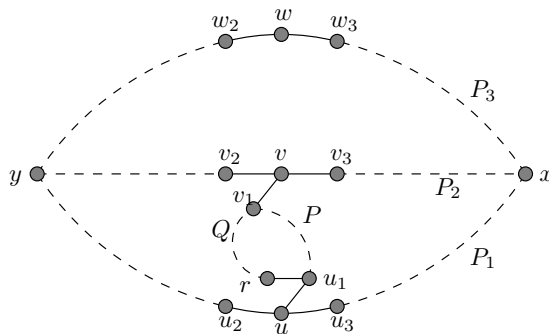
Bevis. Lad x være en knude af type b og Θ være en $\Theta_k(x)$ hvor den anden endeknude kaldes y . Så består Θ af tre uafhængige $x \sim y$ -veje af længde k givet ved P_1, P_2 og P_3 . Da x er en type b knude, er den også indeholdt i en $(2k-1)$ -kreds, C . Idet to af x 's naboer ligger på C , kan vi antage at disse to naboer er dem der ligger på P_1 og P_3 , dvs. $|V(P_1 \cap C)| > 1$ og $|V(P_3 \cap C)| > 1$. Så eksisterer der en knude $u \in P_1$ forskellig

fra x og y , således at $u \in C$ og u 's nabo, u_1 , der ikke tilhører P_1 , også ligger på C . Lad v og w være knuderne på hhv. P_2 og P_3 , som ligger i afstand k fra u i Θ . Hvis afstanden mellem u og enten v eller w i G var højst $k - 1$, så ville u være indeholdt i to $(2k - 1)$ -kredse, i modstrid med Sætning 4.9 og derfor må $d(u, v) = d(u, w) = k$. Heraf ses det også, at u må være af type c, idet den er indeholdt i C og $2k$ -kredsene P_1P_3 og P_1P_2 og ikke er en endeknude i Θ , og dermed er u mættet. Lad u_2 og u_3 være de øvrige naboer til u , lad v_2 og v_3 være naboerne til v på P_2 og lad w_2 og w_3 være naboerne til w på P_3 , se Figur 4.21.



Figur 4.21: Delgraf i G indeholdende knuden x af type b.

Da $d(u, v) = k$ vil en $u_1 \sim v$ -vej, P , ikke gå igennem u . Antag, at P går gennem v_3 . Hvis x og v er naboer, dvs. hvis $x = v_3 = w_3$, så vil P gå gennem w eller x 's naboknude på P_1 ; hvis det første er tilfældet vil $d(u, w) \leq k - 1$, en modstrid, hvis det andet er tilfældet vil der eksistere en $(2k - 3)$ -kreds, også en modstrid. Derfor kan x og v ikke være naboer, hvis P går gennem v_3 , og så vil $xP_1uu_1Pv_3P_2x$ være en $(2k - 1)$ -kreds, men dette er i modstrid med, at x er indeholdt i C , som ikke indeholder andre knuder fra P_2 . Derfor vil $v_3 \notin P$. Hvis $v_2 \in P$, så vil der eksistere en $(2k - 1)$ -kreds givet ved $yP_2v_2Pu_1uP_1y$, som indeholder u og er forskellig fra C , hvilket er i modstrid med at u er mættet. Derfor må P gå gennem v_1 , som er naboen til v , der ikke ligger på P_2 , se Figur 4.22.



Figur 4.22: Delgraf i G indeholdende knuden x af type b.

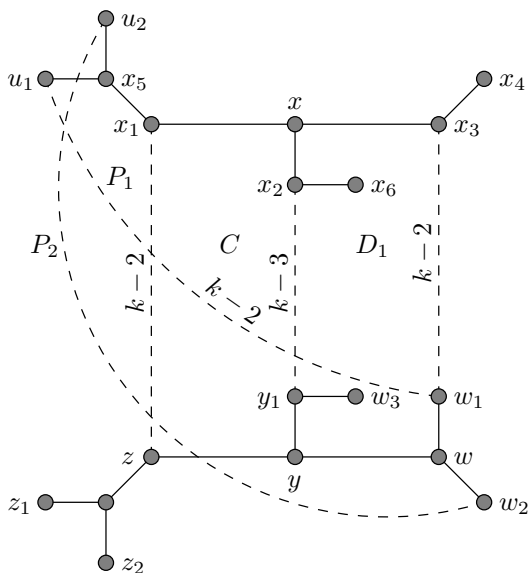
Lad r være naboen til u_1 , som er forskellig fra u og som ikke ligger på P . En $r \sim v$ -vej,

kreds af længde $2k - 2$, dvs. P_1 går igennem knuden w_1 , w_2 eller w_3 .

På tilsvarende vis kan man vise, at en $u_2 \sim y$ -vej, P_2 , vil gå gennem w_1 , w_3 eller w_2 .

Antag at $w_1 \in P_1$, så må P_1 nødvendigvis være af længde k , idet der ellers vil eksistere yderligere en kreds af længde højst $2k - 1$ indeholdende x , i modstrid med Sætning 4.9. Det ses, at der eksisterer en $2k$ -kreds $D_2 = u_1 P_1 w_1 D_1 x x_1 x_5 u_1$, som indeholder x , og dermed er x mættet i følge Sætning 4.10.

Så kan P_2 ikke gå gennem w_1 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $(2k - 2)$, og den kan heller ikke gå igennem y_1 , idet $u_2 P_2 y_1 C x x_1 x_5 u_2$ ellers vil være yderligere en kreds af længde højst $2k$ indeholdende x , i modstrid med at x er mættet. Derfor må P_2 gå gennem w_2 og være af længde $k - 1$ eller k , idet y ellers vil være indeholdt i yderligere en kreds af længde højst $2k - 1$, i modstrid med Sætning 4.9 eller at omkredsen er mindst $2k - 1$. Så er $D_3 = u_1 P_1 w_1 w w_2 P_2 u_2 x_5 u_1$ enten en $(2k - 1)$ eller $2k$ -kreds, afhængigt af P_2 's længde, se Figur 4.24. Det ses at $w_1 \in D_1, D_2, D_3$, og dermed kan w_1 ikke være indeholdt i flere $(2k - 1)$ -kredse, idet den ikke kan være en type b knude i følge Sætning 4.10.



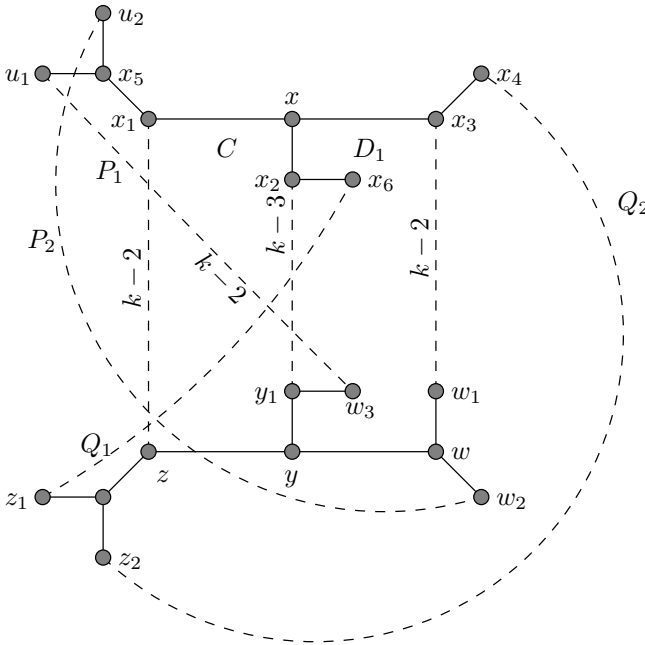
Figur 4.24: Vejene P_1 og P_2 i en delgraf af G , hvor $(2k - 1)$ -kredsen C og $2k$ -kredsen D_1 har en $(k - 1)$ -vej tilfælles og $w_1 \in P_1$.

Betragt nu en $x_4 \sim y$ -vej. Denne kan ikke gå igennem w , idet der ellers vil eksistere yderligere en kreds af længde højst $2k - 1$ indeholdende w_1 , og den kan heller ikke gå gennem z eller y_1 , da x ellers vil være indeholdt i yderligere en kreds af længde højst $2k$. Der kan altså ikke eksistere en $x_4 \sim y$ -vej af længde højst k , hvilket er en modstrid og derfor må der gælde at $w_1 \notin P_1$.

P_1 går altså igennem w_3 eller w_2 , og pga. symmetri ses det, at P_2 også går igennem

w_3 eller w_2 . Hvis både P_1 og P_2 går gennem w_i for et $i \in \{2,3\}$, så vil der eksistere en kreds af længde højst $2k - 2$, og vi kan derfor antage at P_1 går gennem w_3 og at P_2 går gennem w_2 . P_1 må så være af længde k , idet $u_1P_1y_1Cx_1x_5u_1$ ellers vil være en kreds af længde højst $2k - 1$, og P_2 må være af længde $k - 1$ eller k .

På denne måde har vi opnået en $2k$ -kreds $D_2 = u_1P_1w_3y_1Cx_2x_1x_5u_1$, som altså indeholder x og x_2 , dvs. de begge er mættede, se Figur 4.25.



Figur 4.25: Vejene Q_1 og Q_2 i en delgraf af G , hvor $(2k - 1)$ -kredsen C og $2k$ -kredsen D_1 har en $(k - 1)$ -vej tilfælles og $w_3 \in P_1$.

På tilsvarende måde som ovenfor kan man argumentere for, at en $z_1 \sim x$ -vej, Q_1 , og en $z_2 \sim x$ -vej, Q_2 , går igennem x_6 eller x_4 . Da begge veje ikke kan gå gennem den samme knude, kan vi antage at Q_1 går igennem x_6 og Q_2 går igennem x_4 . Men så vil $x_2Q_1z_1 \dots zyCx_2$ være en $2k$ -kreds forskellig fra D_1 og D_2 , som indeholder x_2 , i modstrid med at x_2 er mættet.

Heraf følger lemmaet. ■

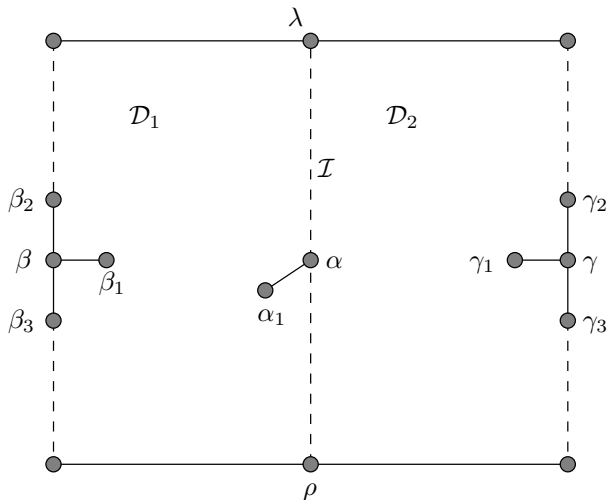
Følgende lemma kan ikke blot anvendes i beviset for, at der ikke eksisterer type c knuder, men også i beviserne for, at nogle af de øvrige typer ikke eksisterer.

Lemma 4.12. *Lad \mathcal{D}_1 og \mathcal{D}_2 være to $2k$ -kredse, som har en $(k - 1)$ -vej \mathcal{I} tilfælles. Lad λ og ρ være knuderne, der ligger i afstand $k - 1$ fra hinanden på \mathcal{I} . Antag at der eksisterer en knude $\alpha \neq \lambda, \rho$, der ligger på \mathcal{I} , således at dens nabo $\alpha_1 \notin \mathcal{I}$, ikke ligger på de korte kredse, som indeholder λ . Så eksisterer der mindst én kort kreds \mathcal{D}_3 , hvorom det gælder*

(i) \mathcal{D}_3 indeholder α, α_1 og ρ ,

(ii) hvis $\eta_1 \notin \mathcal{I}$ er naboen til en knude $\eta \in \mathcal{I}$, hvor $\eta \neq \lambda, \alpha, \rho$, så er η_1 ikke indeholdt i \mathcal{D}_3 .

Bevis. Lad β og γ være knuderne i afstand k fra α således at $\beta \in \mathcal{D}_1$ og $\gamma \in \mathcal{D}_2$, og lad de yderligere knuder være givet ved Figur 4.26.



Figur 4.26: To $2k$ -kredse \mathcal{D}_1 og \mathcal{D}_2 , der har en $(k-1)$ -vej tilfælles.

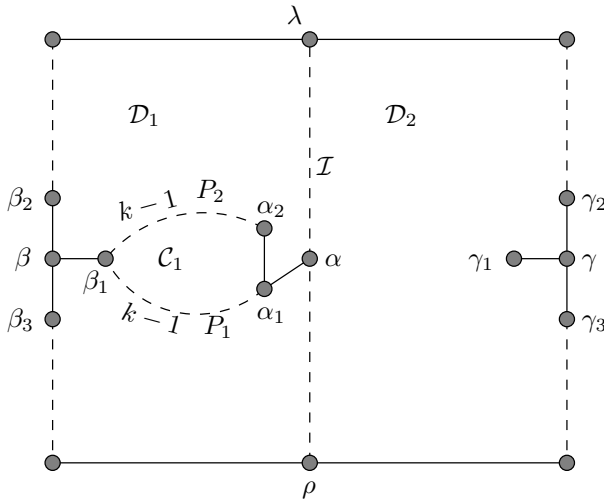
Jeg vil først bevise, at der eksisterer en kreds \mathcal{D}_3 som opfylder (i), for derefter at bevise, at denne også opfylder (ii).

Antag, at der ikke eksisterer en kort kreds, som indeholder α, α_1 og ρ og lad P_1 være en $\alpha_1 \sim \beta$ -vej. Hvis P_1 gik gennem β_2 , så ville $\alpha D_1 \beta_2 P_1 \alpha_1 \alpha$ være en kort kreds der indeholder λ , i modstrid med at α_1 ikke ligger på en kort kreds, der indeholder λ . P_1 kan heller ikke gå gennem β_3 , idet der ellers vil eksistere en kort kreds $\alpha \alpha_1 P_1 \beta_3 D_1 \rho \mathcal{I} \alpha$, der indeholder α, α_1 og ρ . Derfor må P_1 indeholde β_1 og være af længde k , da α_1 ikke ligger på en kort kreds, der indeholder λ .

Lad $\alpha_2 \neq \alpha$ være naboen til α_1 som ikke ligger på P_1 . Lad P_2 være en $\alpha_2 \sim \beta$ -vej, så er det klart, at $\alpha_1 \notin P_2$, da $d(\alpha_1, \beta) = k$. Desuden gælder der, at $\beta_2 \notin P_2$, for ellers vil der eksistere en kort kreds indeholdende α_1 og λ . Det ses også, at $\beta_3 \notin P_2$, da vi har antaget, at der ikke eksisterer en kort kreds indeholdende α, α_1 og ρ . Så P_2 går også gennem β_1 og er af længde k . Så er $\mathcal{C}_2 = \alpha_1 P_1 \beta_1 P_2 \alpha_2 \alpha_1$ en $(2k-1)$ -kreds, se Figur 4.27.

På tilsvarende måde indses det, at en $\alpha_1 \sim \gamma$ -vej, Q_1 , og en $\alpha' \sim \gamma$ -vej, Q_2 , hvor $\alpha' \neq \alpha$ er naboen til α_1 , som ikke ligger på Q_1 , går gennem γ_1 . Der eksisterer altså en $(2k-1)$ -kreds $\mathcal{C}_2 = \alpha_1 Q_1 \gamma_1 Q_2 \alpha' \alpha_1$, og dermed er α_1 indeholdt i to $(2k-1)$ -kredse, hvilket er i modstrid med Sætning 4.9.

Dvs. at antagelsen om at der ikke eksisterer en kort kreds, der indeholder α, α_1 og ρ er falsk, og dermed eksisterer der en kreds \mathcal{D}_3 , som opfylder (i).



Figur 4.27: Vejene P_1 og P_2 i en graf der indeholder to $2k$ -kredse med en $(k-1)$ -vej tilfælles.

For at bevise at \mathcal{D}_3 opfylder (ii), lad $\eta \in \mathcal{I}$ forskellig fra α, λ, ρ og lad η_1 være dens nabo som ikke tilhører \mathcal{I} . Så er det klart at $d(\alpha, \eta) \leq k-3$ og dermed $d(\alpha, \eta_1) \leq k-2$.

Af beviset for (i) ses det, at hvis $\alpha_1 \sim \beta$ -vejen P_1 går gennem enten β_3 eller β_1 så eksisterer der en kreds \mathcal{D}_3 som opfylder (i) og det bemærkes at $\eta_1 \notin \mathcal{D}_3$. Antag at $\eta_1 \in \mathcal{D}_3$.

Hvis P_1 går gennem β_3 , så vil \mathcal{D}_3 være en $(2k-1)$ -kreds $\alpha_1 P_1 \beta_3 \mathcal{D}_1 \rho \alpha \alpha_1$ og dermed vil afstanden mellem α og η_1 på \mathcal{D}_3 højst være $k-1$. Så vil der altså eksistere en kreds af længde højst $2k-3$, en modstrid. Hvis P_1 går igennem β_1 , så vil \mathcal{D}_3 være en $2k$ -kreds $\alpha_1 \alpha_2 P_2 \beta_3 \mathcal{D}_1 \rho \alpha \alpha_1$, hvor P_2 er af længde $k-1$. Afstanden mellem α og η_1 på \mathcal{D}_3 vil altså være højst k , hvilket resulterer i eksistensen af en kreds af længde højst $2k-2$, igen en modstrid. Dvs. at $\eta_1 \notin \mathcal{D}_3$ og dermed er både (i) og (ii) opfyldt for kredsen \mathcal{D}_3 . ■

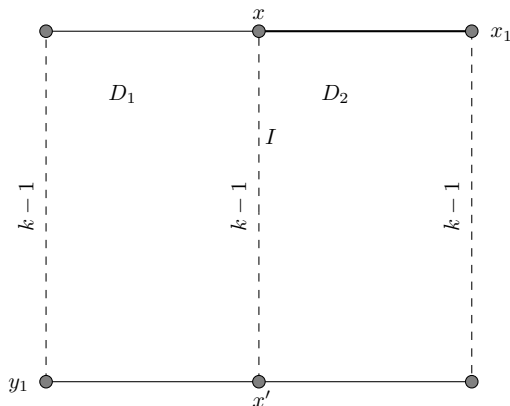
Med ovenstående lemmaer er det nu muligt at bevise den følgende sætning.

Sætning 4.13. *En $(3, k, 4)$ -graf indeholder ingen knuder af type c.*

Bevis. Lad x være en type c knude, der er endeknuden i en fælles vej mellem de to $2k$ -kredse D_1 og D_2 , og som ligger på $(2k-1)$ -kredsen C . Per symmetri kan man antage, at C har en kant xx_1 tilfælles med D_2 . Lad desuden y_1 være knuden på D_1 som ligger i afstand k fra x .

Ved at anvende Lemma 4.4 med x som α , x_1 som α_1 , y_1 som β , D_1 som \mathcal{D}_1 og C som \mathcal{C} , og indse at Lemma 4.4 (i) ikke kan være opfyldt i følge Lemma 4.11, ses det at D_1 og D_2 må have en vej I af længde $k-1$ tilfælles, se Figur 4.28.

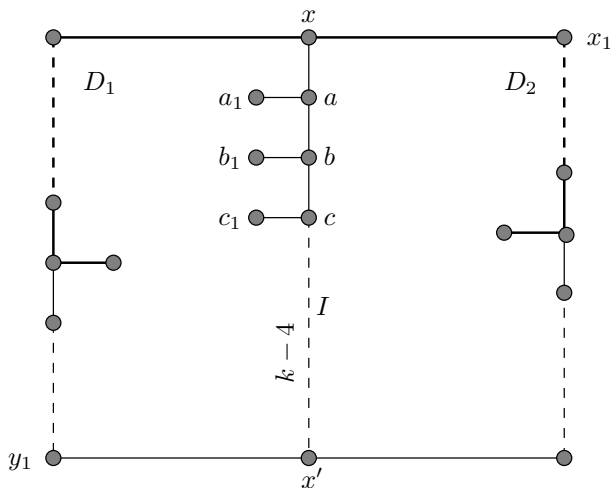
Antag nu, at $|V(C \cap I)| > 1$, så eksisterer der to knuder $z \neq x$ og z_1 , således at $z \in (C \cap I)$, $z_1 \in C - I$ og så z og z_1 er naboer. Dvs. at z er en type c knude i



Figur 4.28: Delgraf indeholdende knuden x af type c.

følge Lemma 4.3 og Sætning 4.10, og dermed er z mættet idet den tilhører C , D_1 og D_2 . Ved igen at anvende Lemma 4.4, denne gang med z som α , z_1 som α_1 , knuden på D_1 i afstand k fra z som β , C som C og D_1 som D_1 , ses det at Lemma 4.4 (i) ikke kan være opfyldt af samme grund som ovenfor. Derfor må Lemma 4.4 (ii) være opfyldt, men det betyder, at der eksisterer yderligere en $2k$ -kreds forskellig fra D_1 og D_2 , som indeholder z , hvilket er i modstrid med, at z er mættet. Derfor må der gælde at $|V(C \cap I)| = 1$, og dermed $C \cap I = \{x\}$ per definition af x .

Lad x' være knuden på I som ligger i afstand $k - 1$ fra x , $a \in I$ være naboen til x og a_1 være naboen til a der ikke ligger på I . Da x er mættet kan vi anvende Lemma 4.12 med x som λ , a som α , a_1 som α_1 , x' som ρ , D_1 som D_1 og D_2 som D_2 , og dermed ses det, at der eksisterer yderligere en kort kreds D_3 , som indeholder a, a_1 og x' .



Figur 4.29: Delgraf indeholdende knuden x af type c, hvor en tykkere streg repræsenterer en kant der er indeholdt i C .

Lad $b \in I$ være naboen til a , som ikke er x , lad $c \in I$ være naboen til b som ikke er a og lad b_1, c_1 være naboerne til hhv. b og c som ikke ligger på I , hvilket kan lade sig gøre idet $k \geq 5$ og dermed er $|V(I)| \geq 5$, se Figur 4.29.

I følge Lemma 4.12 vil hverken b_1 eller c_1 være indeholdt i D_3 , og ved at have b som α , b_1 som α_1 og ellers de resterende knuder som ovenfor, ses det at der eksisterer yderligere en kort kreds D_4 , som indeholder b, b_1 og x' . Nu er x' altså indeholdt i mindst fire korte kredse, D_1, D_2, D_3 og D_4 og er derfor i følge Lemma 4.3 mættet.

Det ses, at $c_1 \notin D_4$ i følge Lemma 4.12, og derfor kan vi anvende dette lemma yderligere en gang og opnå en kort kreds D_5 , som indeholder c, c_1 og x' , men dette er i modstrid med at x' er mættet.

Derfor kan G ikke indeholde en knude af type c. ■

Som nævnt tidligere, kan udelukkelsen af type a, b og c knuder anvendes til at bevise, at G har omkreds $2k$.

Korollar 4.14. *En $(3, k, 4)$ -graf har omkreds $2k$.*

Bevis. Beviset følger direkte af Sætning 4.9, 4.10 og 4.13. ■

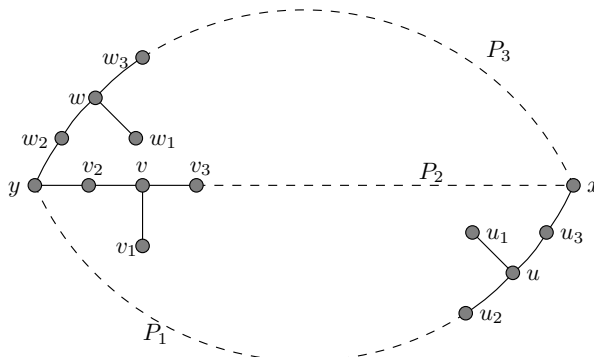
Det er altså nu udelukket, at G kan indeholde en $(2k - 1)$ -kreds, dvs. den kan kun bestå af type d, e og f knuder.

Type d og e knuder

Det følgende lemma er tilstrækkeligt til at udelukke eksistensen af både d og e knuder.

Lemma 4.15. *En $(3, k, 4)$ -graf indeholder ingen Θ_k .*

Bevis. Antag at G indeholder en Θ_k og lad endeknuderne heri være givet ved x og y . Lad desuden P_1, P_2 og P_3 være de tre $x \sim y$ -veje i Θ_k og lad u være knuden, der ligger i afstand 2 fra x på P_1 . Lad v og w være knuderne, der ligger i afstand k fra u på hhv. P_2 og P_3 og lad naboerne til u, v og w være givet som på Figur 4.30.



Figur 4.30: Delgraf indeholdende en Θ_k med x og y som endeknuder.

En $u_1 \sim v$ -vej, Q_1 , vil så ikke gå gennem u, v_2 eller v_3 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$ i modstrid med Korollar 4.14. Dvs. at Q_1 går gennem v_1 og er af længde $k - 1$ eller k .

Antag først, at Q_1 er af længde k og lad $r \neq u$ og $s \neq v$ være naboerne til hhv. u_1 og v_1 som ikke ligger på Q_1 . Så vil en $r \sim v$ -vej, Q_2 , ikke gå gennem v_1 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$ i G . Dermed må Q_2 gå igennem enten v_2 eller v_3 og være af længde k , ellers vil der igen eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$ i G . Tilsvarende vil en $s \sim u$ -vej, Q_3 , gå gennem u_2 eller u_3 og være af længde k .

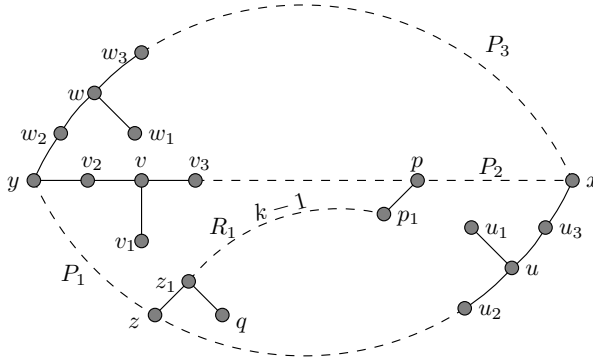
Så ses det, at der eksisterer to $2k$ -kredse D_1 og D_2 , som hver indeholder enten x eller y og som er givet ved $D_1 = v_i Q_2 r u_1 u u_i P_1 t P_2 v_i$ og $D_2 = u_i Q_3 s v_1 v v_i P_2 t u_i$ hvor $i \in \{2, 3\}$ og $t = y$ hvis $i = 2$ og $t = x$ hvis $i = 3$. Bemærk, at hverken D_1 eller D_2 indeholder w_1, w_2 eller w_3 .

Lad os nu med lignende argumenter som før antage, at en $u_1 \sim w$ -vej, T_1 , er af længde k . Ved lignende argumentation som ovenfor, ses det at T_1 nødvendigvis må gå gennem w_1 og at der eksisterer to $2k$ -kredse D_3 og D_4 som hver indeholder enten x eller y . Ved at betragte de fire $2k$ -kredse og deres fællesmængder, ses det, at hvis x er endeknuden i yderligere en Θ_k , så er det enten fordi at D_1 og D_3 begge indeholder x og har en k -vej tilfælles, eller også fordi D_2 og D_4 opfylder dette. Tilsvarende ses det, at det samme er gældende, hvis y er en endeknude i en Θ_k . Eftersom det kun er disse tilfælde, hvor det er muligt at x og y er type d knuder og den evt. tredje kreds af længde $2k$, som er indeholdt i en sådan yderligere Θ_k ikke er en af de allerede nævnte kredse, ses det at x og y hver er indeholdt i præcist to af kredsene D_1, D_2, D_3 og D_4 i følge Lemma 4.3. Dermed ses det at x og y er type e knuder og mættet eller type d knuder, hvor den sidste $2k$ -kreds, der skal til for at gøre dem mættede, udelukkende vil indeholde knuder der som minimum allerede er indeholdt i D_1, D_2, D_3 eller D_4 .

Da $k \geq 5$ eksisterer der en knude $z \in P_1$, forskellig fra x, y, u, u_2 og u_3 . Lad p være den knude på P_2 som ligger i afstand k fra z og lad z_1 være z 's nabo som ikke er indeholdt i Θ_k . Bemærk, at z_1 ikke ligger på hverken D_1, D_2, D_3 eller D_4 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 4$, i modstrid med, at omkredsen er $2k$.

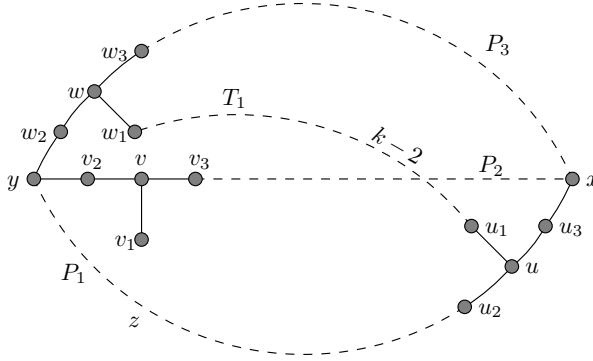
Lad R_1 være en $z_1 \sim p$ -vej og R_2 være en $q \sim p$ -vej, hvor q er naboen til z_1 som ikke ligger på R_1 . Så må R_1 gå gennem p 's nabo p_1 , som ikke ligger på P_2 og være af længde k , se Figur 4.31, idet der ellers eksisterer yderligere korte kredse som indeholder x og y og som ikke er med til at mætte dem eller der eksisterer en kreds af længde højst $2k - 1$. Så kan R_2 ikke gå igennem p_1 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$, dvs. den går igennem en af p 's naboer på P_2 . Men så eksisterer der en $2k$ -kreds indeholdende z_1 og x eller y , i modstrid med at z_1 ikke ligger på de kredse der mætter x og y . Derfor må antagelsen om, at T_1 er af længde k være forkert, og T_1 må altså have længde $k - 1$.

Så eksisterer der to $2k$ -kredse D_3 og D_4 som indeholder w_1 , se Figur 4.32, hvor $D_3 = x P_3 w w_1 T_1 u_1 u P_1 x$ indeholder x og $D_4 = y P_3 w w_1 T_1 u_1 u P_1 y$ indeholder y . Ved som før at betragte fællesmængderne mellem D_1, D_2, D_3 og D_4 , ses det at x og y kun kan være en type d knude, hvis D_1 og D_3 eller D_4 har en k -vej tilfælles, hvor en af endeknuderne er x eller y . Derfor ses det som før, at x hhv. y enten er en mættet



Figur 4.31: Delgraf indeholdende en Θ_k med x og y som endeknuder, som ikke er mættet af kredse der indeholder z_1 .

type e knude eller type d knude, hvor alle knuderne i den sidste $2k$ -kreds der er med til at mætte x hhv. y , er indeholdt i enten D_1 eller D_3 hhv. D_4 .



Figur 4.32: Delgraf indeholdende en Θ_k med x og y som endeknuder, hvor T_1 er en $u_1 \sim w$ -vej af længde $k - 1$.

Knuderne z, z_1, p, p_1 og q defineres tilsvarende som tidligere, og ved lignende argumentation som før, ses det at en $z_1 \sim p$ -vej R_1 og en $q \sim p$ -vej R_2 resulterer i en $2k$ -kreds indeholdende z_1 og enten x eller y , hvilket er en modstrid, da z_1 ikke er indeholdt i de kredse, der mætter x og y .

Derfor må både Q_1 og T_1 være af længde $k - 1$ pga. symmetri. Så eksisterer der fire $2k$ -kredse, $D_1 = xP_2vv_1Q_1u_1uP_1x$, $D_2 = yP_2vv_1Q_1u_1uP_1y$, $D_3 = xP_3ww_1T_1u_1uP_1x$ og $D_4 = yP_3ww_1T_1u_1uP_1y$, hvor to af dem altså indeholder x og de to andre indeholder y . Det er kun $D_1 \cap D_3$ og $D_2 \cap D_4$, der kan være k -veje med endeknuder i x eller y , og derfor er x eller y som før mættede type e knuder eller type d knuder hvor øvrige $2k$ -kredse der indeholder dem, kun vil indeholde knuder, der allerede er indeholdt i enten D_1, D_2, D_3 eller D_4 . Men som tidligere kan man endnu en gang konstruere yderligere en $2k$ -kreds vha. knuderne z, z_1, p, p_1 og q , som indeholder enten x eller y , i modstrid med at x og y er mættede af kredse, som ikke indeholder z_1 . ■

Som resultat af Lemma 4.15 fås det følgende korollar, som nævnt tidligere.

Korollar 4.16. *En $(3,k,4)$ -graf indeholder ingen knuder af type d og e.*

Den eneste type knude, der er tilbage, er altså type f knuder og derfor må alle knuder i G være af type f.

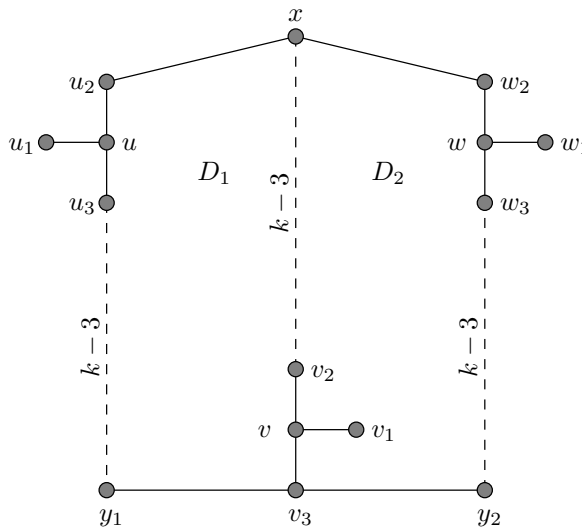
Type f knuder

Da de øvrige typer er udelukket er det nu muligt at udelukke eksistensen af type f knuder i G .

Sætning 4.17. *En $(3,k,4)$ -graf G indeholder ingen knuder af type f.*

Bevis. Lad x være en knude i G , dvs. den er af type f. Lad D_1 være en af de $2k$ -kredse som x ligger på og lad naboen til x , som ikke ligger på D_1 være givet ved w_2 . Lad desuden y_1 være knuden som ligger i afstand k fra x på D_1 . Ved at anvende Lemma 4.4 med x som α , w_2 som α_1 , y_1 som β , D_1 som \mathcal{D}_1 og huske at w_2 ikke er indeholdt i en $(2k-1)$ -kreds, ses det, at der eksisterer en $2k$ -kreds, D_2 , som indeholder x og w_2 og som har en $(k-1)$ -vej tilfælles med D_1 .

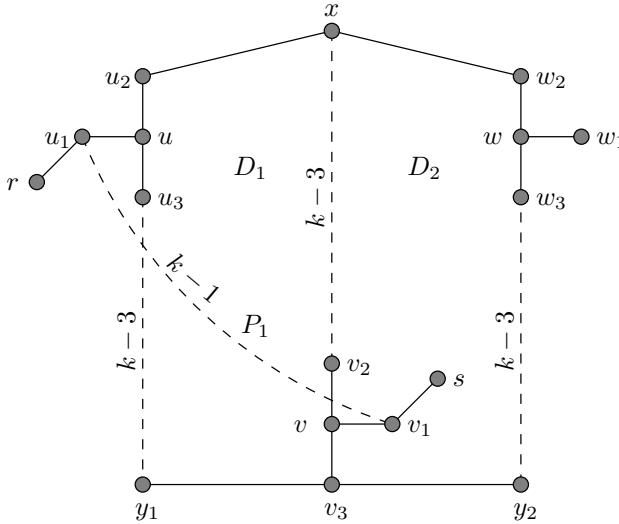
Lad u og w være knuderne på hhv. $D_1 - D_2$ og $D_2 - D_1$, som ligger i afstand 2 fra x og lad v være knuden, der ligger på $D_1 \cap D_2$ i afstand k fra både u og w . Lad v_3 være knuden, der ligger i afstand $k-1$ fra x på $D_1 \cap D_2$ og lad de øvrige knuder være givet ved Figur 4.33.



Figur 4.33: Delgraf indeholdende knuden x af type f.

En $u_1 \sim v$ -vej, P_1 , vil ikke gå gennem hverken v_2 eller v_3 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k-1$, og derfor må den altså gå gennem v_1 . Desuden vil P_1 være af længde k , idet hvis den var kortere, så ville der enten eksistere en kreds af længde højst $2k-1$ eller også ville u og v være endeknuder i en Θ_k , i modstrid med Sætning 4.15.

Lad $r \neq u$ og $s \neq v$ være naboerne til hhv. u_1 og v_1 , som ikke ligger på P_1 , se Figur 4.34. Så vil en $r \sim v$ -vej, P_2 , ikke gå gennem v_1 , idet der ellers vil eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$ og dermed vil P_2 altså gå igennem v_2 eller v_3 , og af samme grund vil den være af længde k . Tilsvarende ses det, at en $s \sim u$ -vej, P_3 , går igennem enten u_2 eller u_3 og er af længde k .



Figur 4.34: Delgraf indeholdende knuden x af type f og vejen P_1 .

Så eksisterer der to $2k$ -kredse D_3 og D_4 , hvor D_3 er givet ved $uu_3D_1y_1v_3y_2P_2ru_1u$ eller $uu_2xD_1v_2P_2ru_1u$ og D_4 ved kredsen $u_2xD_1v_2vv_1sP_3u_2$ eller $u_3D_1y_1v_3vv_1sP_3u_3$, og som altså derfor enten indeholder x eller v_3 og ikke w, w_2 og w_3 .

Betragt nu en $w_1 \sim v$ -vej, T_1 . Ved lignende argumentation som ovenfor, ses det at T_1 går igennem v_1 og er af længde k og at der eksisterer to $2k$ -kredse D_5 og D_6 indeholdende x eller v_3 , og dermed må x og v_3 være mættede i følge Lemma 4.3.

Da $k \geq 5$ kan der findes en knude z på $D_1 - D_2$ forskellig fra u_2, u, u_3 og y_1 . Lad p være knuden der ligger på $D_1 \cap D_2$ i afstand k fra z og z_1 være naboen til z , som ikke ligger på D_1 . Bemærk at z_1 ikke ligger på hverken D_2, D_3, D_4, D_5 eller D_6 , idet der ellers ville eksistere en kreds af længde højst $2k - 1$.

Som i beviset for Lemma 4.15, ses det at en $z_1 \sim p$ -vej R_1 så vil gå igennem p 's nabo p_1 , som ikke er indeholdt i $D_1 \cap D_2$, og være af længde k . En $q \sim p$ -vej R_2 , hvor $q \neq z$ er z_1 's nabo, der ikke ligger på R_1 , må derfor nødvendigvis gå gennem en af p 's naboer på $D_1 \cap D_2$ og dermed eksisterer der endnu en $2k$ -kreds, som indeholder x eller v_3 , eller evt. en kreds af længde højst $2k - 1$. Heraf følger sætningen. ■

Med ovenstående lemmaer, sætninger og korrolarer er det nu muligt at bevise hovedresultatet i dette afsnit.

Sætning 4.18. For $k \geq 5$ eksisterer der ingen $(3, k, 4)$ -grafer.

Bevis. Beviset følger direkte af Lemma 4.3, Sætning 4.9, 4.10, 4.13, 4.17 og Korollar 4.16. ■

De næste interessante $(3,k)$ -grafer for $k \geq 4$, altså $(3,k,6)$ -grafer, idet det nu er bevist, at der ikke eksisterer $(3,k,4)$ -grafer for $k \geq 4$. Det næste kapitel vil omhandle store (d,k) -grafer, og der vil blive givet et resultat vedrørende $(3,4,6)$ -grafer. Derudover er der formentligt ikke forsket ret meget i $(3,k,6)$ -grafer for $k \geq 5$, idet Sætning 4.18 først er bevist i artiklen [20], som først er accepteret i april 2009.

Store grafer

I de foregående kapitler har jeg undersøgt noget af den teori, der er i forbindelse med at finde øvre grænser for $n(d,k)$. Men en sådan teoretisk grænse er ikke specielt anvendelig, hvis man ikke kan konstruere store grafer. Derfor ser jeg i dette kapitel nærmere på nogle af de største kendte grafer og metoder, der kan bruges til at konstruere store grafer med grad d og diameter k . Antallet af knuder i en sådan graf vil så være en nedre grænse for antal knuder i en maksimal (d,k) -graf, og hvis den stemmer overens med den øvre grænse, har man altså konstrueret en maksimal (d,k) -graf.

Der er flere forskellige måder at gribe problemet an på. Et problem der ligger tæt op af grad/diameter-problemet er, hvor lille diameteren kan være i en regulær graf med grad d og med n knuder. I den forbindelse blev det i 1986 – 1987 undersøgt af Buskens, Stanton og Rogers, [22], [23] og [24] hvor lille diameteren kan være i grafer med grad 4, hvor ordenen er mindst 5 og højst 13. Det gjorde de ved for hver orden at betragte om en graf med denne orden, $d = 4$ og $k = 2$ kunne konstrueres. For at finde en løsning til grad/diameter-problemet, kunne man på tilsvarende måde for $d = 4$ starte med at forsøge at konstruere en $(4,2)$ -graf med 15 knuder, idet $M(4,2) = 17$ og defekten er mindst 2. Hvis dette viser sig at være umuligt har man givet en ny øvre grænse for $n(4,2)$ på 14 og det næste man ville undersøge ville så være hvorvidt der eksisterer en $(4,2)$ -graf med 14 knuder. Ved at fortsætte på denne måde vil man, første gang man konstruerer en graf, have fundet en maksimal $(4,2)$ -graf.

Ovenstående metode kan generaliseres for øvrige værdier af d og k til at konstruere andre maksimale (d,k) -grafer, men arbejdet er enormt krævende, især når man kommer op i de lidt større værdier af d og k , og man ønsker ofte metoder, der garanterer at man kan konstruere mange store grafer og ikke blot én af gangen som ovenstående metode.

5.1. De største kendte grafer

Lige så længe som grad/diameter-problemet har været kendt, har man forsøgt at konstruere store grafer.

I 1964 lavede Elspas [16] en tabel over ordenen i de største (d,k) -grafer, som var kendt på daværende tidspunkt, se Tabel 5.1. Understregede ordener er bevist optimale på daværende tidspunkt, de eneste af disse som ikke er Moore-grafer er $(3,3)$ -grafene med orden 20, $(4,2)$ -grafene med orden 15 og $(5,2)$ -grafene med orden 24. Det ses at der er et spørgsmåltegn ved ordenen på $(6,2)$ -grafene. Grunden til dette har højst sandsynligt været, at man på daværende tidspunkt endnu ikke havde udelukket eksistensen af grafer, der havde mindre defekt end 2 og man derfor var fristet til at formode, at defekten i en (d,k) -graf maksimalt var 2. Men i følge diskussionen til sidst i Kapitel 3 ved man nu, at dette ikke er tilfældet, og specielt ikke for $(6,2)$ -grafene, som må have højst 34 knuder i følge Kapitel 3, eftersom der ikke eksisterer $(d,2,2)$ -grafer for $5 < d \leq 50$.

$d \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7
1	<u>2</u>	-	-	-	-	-	-
2	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>11</u>	<u>13</u>	<u>15</u>
3	<u>4</u>	<u>10</u>	<u>20</u>	28	36	44	60
4	<u>5</u>	<u>15</u>	27				
5	<u>6</u>	<u>24</u>	36	60			
6	<u>7</u>	35?					
7	<u>8</u>	<u>50</u>	78				

Tabel 5.1: Oversigt over ordenen af de største kendte (d,k) -grafer fra 1964, [16].

Siden da er der sket en del. Siden 1995 har Comellas vedligeholdt en tabel på hjemmesiden [25] over alle de største kendte (d,k) -grafer for $3 \leq d \leq 16$ og $2 \leq k \leq 10$, som sidst er opdateret i januar 2008.

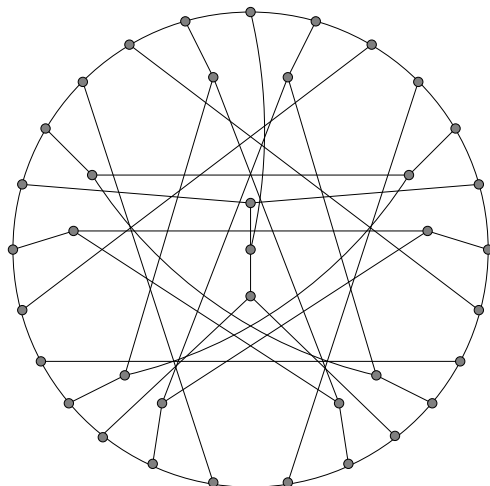
En af dem som i løbet af de seneste år har lagt et stort arbejde i at konstruere nye grafer med stor orden er Loz, som på sin hjemmeside [26] har en tabel lignende den tabel Comellas har givet på [25], men som er opdateret senest i januar 2009. Loz er allerede den, der har bidraget med størstedelen af ordenerne i Comellas' tabel, og ved at se hans opdaterede Tabel 5.2, hvor indgangene markeret med fed er opdaterede værdier i forhold til Comellas' tabel, ses det at han har forbedret en meget stor del af de værdier, der tidligere er bidraget med, på forholdsvis kort tid.

De eneste ordener fra Tabel 5.1, som stadig er aktuelle, er dem som allerede på daværende tidspunkt var bevist optimale. Dette ses ved at sammenligne Tabel 5.1 med Tabel 5.2.

Det bemærkes desuden, at $(3,4)$ -grafene med 38 knuder er markeret som optimal. I følge Kapitel 4 har en $(3,4)$ -graf højst 40 knuder, men i 2000 skitserede Buset et bevis for, at en $(3,4,6)$ -graf ikke kan eksistere [27]. Dermed er de to ikke isomorfe $(3,4,8)$ -grafer, som er fundet af Doty i 1982 og von Conta i 1983, optimale [27], se Figur 5.1, som er grafene givet af von Conta [25].

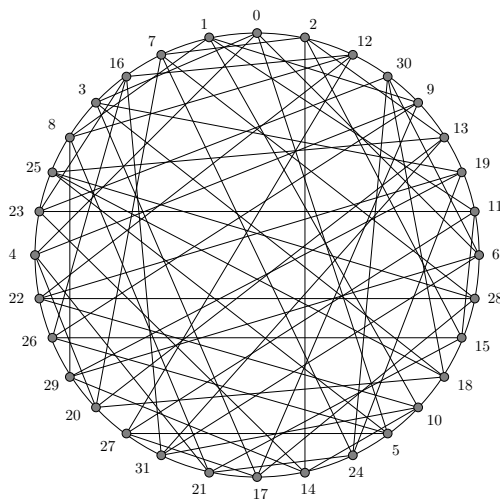
$d \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	<u>2</u>	-								
3	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>11</u>	<u>13</u>	<u>15</u>	<u>17</u>	<u>19</u>	<u>21</u>
4	<u>4</u>	<u>10</u>	<u>20</u>	<u>38</u>	<u>70</u>	<u>132</u>	<u>196</u>	<u>336</u>	<u>600</u>	<u>1.250</u>
5	<u>5</u>	<u>15</u>	<u>41</u>	<u>96</u>	<u>364</u>	<u>740</u>	<u>1.320</u>	<u>3.243</u>	<u>7.575</u>	<u>17.703</u>
6	<u>6</u>	<u>24</u>	<u>72</u>	<u>210</u>	<u>624</u>	<u>2.772</u>	<u>5.516</u>	<u>17.030</u>	<u>57.840</u>	<u>187.056</u>
7	<u>7</u>	<u>32</u>	<u>110</u>	<u>390</u>	<u>1404</u>	<u>7.917</u>	<u>19.383</u>	<u>76.461</u>	<u>307.845</u>	<u>1.253.615</u>
8	<u>8</u>	<u>50</u>	<u>168</u>	<u>672</u>	<u>2.756</u>	<u>11.988</u>	<u>52.768</u>	<u>249.660</u>	<u>1.223.050</u>	<u>6.007.230</u>
9	<u>9</u>	<u>57</u>	<u>253</u>	<u>1100</u>	<u>5.060</u>	<u>39.672</u>	<u>131.137</u>	<u>734.830</u>	<u>4.243.100</u>	<u>24.897.161</u>
10	<u>10</u>	<u>74</u>	<u>585</u>	<u>1.550</u>	<u>8.200</u>	<u>75.893</u>	<u>279.616</u>	<u>1.686.600</u>	<u>12.123.288</u>	<u>65.866.350</u>
11	<u>11</u>	<u>91</u>	<u>650</u>	<u>2.286</u>	<u>13.140</u>	<u>134.690</u>	<u>583.083</u>	<u>4.293.452</u>	<u>27.997.191</u>	<u>201.038.922</u>
12	<u>12</u>	<u>104</u>	<u>715</u>	<u>3.200</u>	<u>19.500</u>	<u>156.864</u>	<u>1.001.268</u>	<u>7.442.328</u>	<u>72.933.102</u>	<u>600.380.000</u>
13	<u>13</u>	<u>133</u>	<u>786</u>	<u>4.680</u>	<u>29.470</u>	<u>359.772</u>	<u>1.999.500</u>	<u>15.924.326</u>	<u>158.158.875</u>	<u>1.506.252.500</u>
14	<u>14</u>	<u>162</u>	<u>851</u>	<u>6.560</u>	<u>40.260</u>	<u>531.440</u>	<u>3.322.080</u>	<u>29.927.790</u>	<u>249.155.760</u>	<u>3.077.200.700</u>
15	<u>15</u>	<u>183</u>	<u>916</u>	<u>8.200</u>	<u>57.837</u>	<u>816.294</u>	<u>6.200.460</u>	<u>55.913.932</u>	<u>600.123.780</u>	<u>7.041.746.081</u>
16	<u>16</u>	<u>186</u>	<u>1.215</u>	<u>11.712</u>	<u>76.518</u>	<u>1.417.248</u>	<u>8.599.986</u>	<u>90.001.236</u>	<u>1.171.998.164</u>	<u>10.012.349.898</u>
17	<u>17</u>	<u>198</u>	<u>1.600</u>	<u>14.640</u>	<u>132.496</u>	<u>1.771.560</u>	<u>14.882.658</u>	<u>140.559.416</u>	<u>2.025.125.476</u>	<u>12.951.451.931</u>

Tabel 5.2: Oversigt over ordenen af de største kendte (d, k) -grafer fra januar 2009, [26]. Understregede ordener er bevist maksimale, og ordener markeret med fed, er nye grafer fundet efter januar 2008 [25].



Figur 5.1: En optimal (3,4,8)-graf.

Desuden er det bevist af Molodtsov i 2006 vha. et computerprogram, at en $(6,2)$ -graf har orden højst 32. Dette blev gjort ved at udføre en søgning blandt $(6,2)$ -grafer, som startede ved de $(6,2)$ -grafer, der har orden $M(6,2) - 2 = 35$. Ingen $(6,2)$ -grafer af orden 35, 34 og 33 blev fundet, men blandt $(6,2)$ -grafer med 32 knuder, blev der i alt fundet 6 ikke isomorfe $(6,2)$ -grafer [28]. En af de 6 $(6,2)$ -grafer ses på Figur 5.2.

Figur 5.2: En optimal $(6,2,5)$ -graf.

Alle de ordener, der er markeret med fed i Tabel 5.2 og en del af de andre ordener i Tabel 5.2, er desuden ordener for såkaldte Cayley-grafer, hvilket er grunden til at det næste afsnit handler om Cayley-grafer og en nem måde at konstruere store Cayley-grafer for $k = 2$ på.

5.2. Store knudetransitive grafer

Som nævnt i Kapitel 1 er der en del ting man ønsker opfyldt i netværk. Indtil videre har jeg udelukkende koncentreret mig om at kigge på grafer med grad d og diameter k og ikke set på de andre egenskaber, der ønskes opfyldt. En egenskab, som har været betragtet før i forbindelse med grad/diameter-problemet, er hvor stor en symmetrisk graf med grad d og diameter k kan være. Inden man kan betragte dette nærmere, må man nødvendigvis have en klar definition af hvad symmetrisk egentlig betyder. En måde at definere dette på, er ved at definere det som knudetransitivitet.

En graf G med orden n siges at være knudetransitiv, hvis der for alle par af knuder u, v eksisterer en automorfi $\theta \in \text{Aut}(G)$, således at $\theta(u) = v$. En ækvivalent definition af knudetransitivitet er at alle inducerede delgrafer af orden $n - 1$ i G er isomorfe [4]. Det, som gør knudetransitive grafer ønskelige, er bl.a. at udregninger af diameter, grad og den samlede vejlængde i grafen er nemme at udføre. Graden findes nemt idet grafen nødvendigvis må være regulær, og diameteren kan udregnes ved blot at undersøge en enkelt knude og vejene mellem den og de andre knuder i grafen.

Det viser sig at det er svært at bestemme om en given graf er knudetransitiv, men det er derimod ikke svært at konstruere knudetransitive grafer. Det kan bl.a. gøres ved at konstruere Cayley-grafer, som jeg i [9] beviste er knudetransitive.

Normalt defineres Cayley-grafer som orienterede grafer, men da jeg kun ønsker at betragte ikke-orienterede grafer, definerer jeg i det følgende Cayley-grafer på en måde, således det er sikret, at de er ikke-orienterede.

Lad Γ være en ikke-triviell endelig gruppe og S være en ikke-tom delmængde af Γ , som ikke indeholder det neutrale element $e \in \Gamma$ og hvorom det gælder at $S = S^{-1}$. Grafen der er givet ved knuderne $V(G) = \Gamma$ og kanterne $xy \in E(G) \Leftrightarrow x^{-1}y \in S$, for alle $x, y \in \Gamma$ kaldes en Cayley-graf for gruppen Γ med hensyn til S og betegnes med $C_\Gamma(S)$.

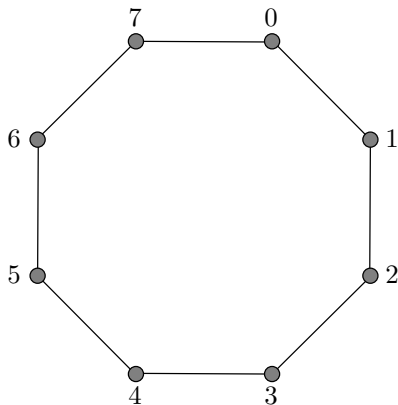
Det, at S ikke indeholder det neutrale element $e \in \Gamma$, sikrer, at der ikke er loops i grafen, idet $x^{-1}x = e \notin S$ for ethvert $x \in \Gamma$, og det at $S = S^{-1}$, er den egenskab, der sikrer, at grafen kan repræsenteres som en ikke-orienteret graf.

Cayley grafen $C_\Gamma(S)$ er desuden $|S|$ -regulær, idet der for $x \in \Gamma$ og alle $s \in S$ vil eksistere et $y \in \Gamma$ således at $xy \in E(C_\Gamma(S))$. Dette skyldes at der eksisterer et $y \in \Gamma$ således at $y = xs$ for et $s \in S$, og dermed er den nævnte kant med i Cayley grafen per definition.

Som eksempel ses det, at Cayley-graferne $C_\Gamma(S)$ med $\Gamma = \mathbb{Z}_m$ og $S = \{\pm 1\}$ er givet ved m -kredsene. Figur 5.3 viser Cayley-grafen $C_{\mathbb{Z}_8}(\{\pm 1\})$. Heraf ses det også at alle Moore-grafer med $d = 2$ er isomorfe med $C_{\mathbb{Z}_m}(\{\pm 1\})$, hvor $m = 2k + 1$.

Desuden er Cayley-graferne givet ved $C_\Gamma(\Gamma - \{e\})$ komplette grafer af orden $|\Gamma| - 1$, og dermed er Moore-graferne med $k = 1$ også isomorfe med Cayley-grafer.

Da man er interesseret i de største Cayley-grafer, vil ordenen af en maksimal Cayley-



Figur 5.3: Cayley-grafen givet ved en kreds af længde 8.

graf med diameter k og grad d fremover blive betegnet med $Cay(d,k)$. Det er endnu ikke bevist, at der skulle eksistere en bedre øvre grænse for $Cay(d,k)$ end der er for $n(d,k)$. Dog er det bevist, at Petersen og Hofmann-Singleton-graferne er knude-transitive, men ikke er Cayley-grafer, dvs. at der for $k = 2$ hvor $d = 3, 7$ gælder at $Cay(d,k) \leq M(d,k) - 2$. Dette er også gældende for $Cay(3,3)$, $Cay(3,4)$, $Cay(4,2)$ og $Cay(5,2)$ i følge [29]. For de maksimale (3,3)-, (4,2)- og (5,2)-grafer kan det også ses af hhv. Figur 3.13(b), 3.19 og 3.20, at disse ikke er knude-transitive, idet der er nogle knuder i hver graf, der er indeholdt i kortere kredse end andre knuder i den graf, dvs. at alle de inducerede delgrafer af størrelse $n - 1$ ikke kan være isomorfe. Dette er også tilfældet for (3,4)-grafer af von Conta, der ses på Figur 5.1.

Desuden er det bevist, at hvis der eksisterer en Moore-graf med $k = 2$ og $d = 57$, så vil en sådan Moore-graf ikke være knude-transitiv, og dermed vil der også gælde at $Cay(57,2) \leq M(57,2) - 2$ [6].

5.2.1 Store Cayley-grafer med diameter 2

Jeg vil nu præsentere en gruppe og en undergruppe heraf, som sikrer Cayley-grafer der har orden tæt på $\frac{d^2}{2}$, først præsenteret af Šiagiová og Širáň i 2005 i artiklen [30]. Dette er interessant eftersom $n(d,2) < d^2$ for de fleste d , dvs. at hvis en $(d,2)$ -graf har orden $\frac{d^2}{2}$, så er den indenfor en faktor 2 af det optimale for de fleste værdier af d .

Lad F være det endelige legeme af en ulige primtalspotens q og lad F^+ være den additive gruppe i F . Lad Γ være givet ved $\Gamma = \{(a,b,i) | a,b \in F^+, i \in \{1, -1\}\}$, hvori multiplikation er givet ved $(a,b,i)(a',b',i') = (a + ia', b + ib', ii')$. Det ses at Γ er en gruppe idet den associative lov gælder, der eksisterer elementet $(0,0,1) \in \Gamma$ som er det neutrale element, og ethvert element i Γ har et invert element i Γ . Specielt gælder der, at elementer på formen $(a,b,-1)$ er sit eget inverse element, dvs. af orden 2, idet $(a,b,-1)(a,b,-1) = (a - a, b - b, 1) = (0,0,1)$.

Lad S være delmængden af Γ , som er givet ved $S = \{(a,a^2,-1) | a \in F^+\} \cup \{(0,b,1) | b \in F^+, b \neq 0\}$. Det ses at $S = S^{-1}$ idet et element på formen $(a,a^2,-1)$ som nævnt

er sit eget inverse element og det inverse element til et element på formen $(0,b,1)$ er givet ved $(0, -b,1) \in S$, eftersom $(0,b,1)(0, -b,1) = (0,0,1)$. Derfor er $C_\Gamma(S)$ en Cayley-graf med orden $2q^2$ og grad $d = 2q - 1$.

Da Cayley-grafer er knudetransitive, kan man som nævnt udregne diameteren ved blot at beregne afstandene fra én knude til alle de andre. Det neutrale element i Γ er som nævnt $(0,0,1)$ og jeg vil i den følgende sætning anvende denne til at beregne diameteren i $C_\Gamma(S)$.

Sætning 5.1. *Diameteren i $C_\Gamma(S)$ er 2.*

Bevis. For at bevise sætningen, vil jeg bevise at ethvert element i Γ kan skrives som produktet af højst to elementer fra S . Dette er tilstrækkeligt, idet der så vil eksistere en vej af længde højst 2 fra det neutrale element til alle andre knuder i grafen per definition af en Cayley-graf.

Det er klart at ovenstående er opfyldt hvis $(a,b,i) \in S$. Derfor er man interesseret i at betragte elementer der opfylder at $(a,b, -1)$ hvor $b \neq a^2$ og $(a,b,1)$ hvor $a \neq 0$. I det første tilfælde gælder det at $(a,b, -1) = (0,b - a^2,1)(a,a^2, -1)$, og det ønskede er derfor opfyldt per definitionen af S . Da q er en ulige primtalspotens, eksisterer der $g,h \in F^+$, som er de entydige løsninger til de to ligninger $g - h = a$ og $g + h = a^{-1}b$, hvor $a \neq 0$. Så vil $(g,g^2, -1)(h,h^2, -1) = (g - h, g^2 - h^2, 1) = (a,b,1)$ og dermed er det ønskede bevist. ■

Det ses af ovenstående, at S er en frembringende mængde og at ordenen for en maksimal Cayley-graf med diameter 2 og grad $d = 2q - 1$, hvor q er en ulige primtalspotens, er begrænset nedad med $Cay(d,2) \geq 2q^2 = \frac{(d+1)^2}{2}$. Er man interesseret i yderligere grader, er det nødvendigt at tilføje elementer til S . For at sikre sig at den frembringende mængde stadig er sin egen inverse, er det elementer af orden 2, der tilføjes. Tilføjes der blot et enkelt element af orden 2 til den frembringende mængde, ses det at der eksisterer en Cayley-graf af orden $2q^2$, diameter 2 og grad $d = 2q$. En nedre grænse for antal knuder i en maksimal Cayley-graf med diameter 2 er altså givet ved $Cay(d,2) \geq \frac{d^2}{2}$ for et lige d , hvor $\frac{d}{2}$ er en ulige primtalspotens. Den følgende sætning udtaler sig om en nedre grænse for ordenen af Cayley-grafer med andre værdier af d end de ovenstående.

Sætning 5.2. *For ethvert heltal $t \geq 2$ og et arbitrært lille $\epsilon > 0$ eksisterer der et heltal m således at der for alle ulige primtalspotenser $q \geq m$ og alle $d = 2q - 1 + t$ gælder at $Cay(d,2) \geq (\frac{1}{2} - \epsilon)d^2$.*

Bevis. For ethvert ϵ hvorom det gælder at $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ og ethvert heltal $t \geq 2$ lad m være givet ved et heltal således at $m \geq \frac{(t-1)}{\epsilon}$ og $m > t$. Lad q være en vilkårlig ulige primtalspotens således at $q \geq m$. Lad $Y \subset \Gamma$ være en arbitrær delmængde af $\{(1,b, -1) | b \in F^+, b \neq 1\}$ således at $|Y| = t$, dette kan lade sig gøre da q er valgt så $q \geq m > t$. Bemærk desuden at $S \cap Y = \emptyset$. Så vil der eksistere en Cayley-graf $C_\Gamma(S \cup Y)$, der har orden $2q^2$, grad $d = |S \cup Y| = 2q - 1 + t$ og i følge Sætning 5.1 har diameter 2. Da $t \geq 2$ får man at

$$\begin{aligned}
d &= 2q - 1 + t \geq 2q \geq 2m \geq \frac{t-1}{\epsilon} \\
&\Leftrightarrow 2\epsilon d^2 \geq 2d(t-1) \\
&\Leftrightarrow 2\epsilon d^2 + (1-t)^2 \geq 2d(t-1) \\
&\Leftrightarrow d^2 + (1-t)^2 + 2d(1-t) \geq d^2 - 2\epsilon d^2 \\
&\Leftrightarrow 4q^2 = (d + (1-t))^2 \geq (1-2\epsilon)d^2
\end{aligned}$$

og det ønskede er dermed bevist, idet ordenen som nævnt er $2q^2$. ■

I Tabel 5.3 ses ordenen af de største kendte Cayley grafer med $3 \leq d \leq 20$ og diameter 2, som er tilgængelig fra en tabel i [29], der sidst er opdateret oktober 2008. Desuden kan ordenen, n , af de Cayley-grafer, der er beskrevet som ovenfor, hvor $d = 2q - 1$ eller $d = 2q$ og q er en ulige primtalspotens, aflæses af Tabel 5.3.

d	$Cay(d,2) \geq$	n	d	$Cay(d,2) \geq$	n	d	$Cay(d,2) \geq$	n
3	<u>8</u>		9	<u>60</u>	50	15	144	
4	<u>13</u>		10	<u>72</u>	50	16	150	
5	<u>18</u>	18	11	<u>84</u>		17	160	162
6	<u>32</u>	18	12	<u>96</u>		18	171	162
7	<u>36</u>		13	108	98	19	200	
8	<u>48</u>		14	128	98	20	203	

Tabel 5.3: De største kendte Cayley-grafer med grad d og diameter 2, [29].

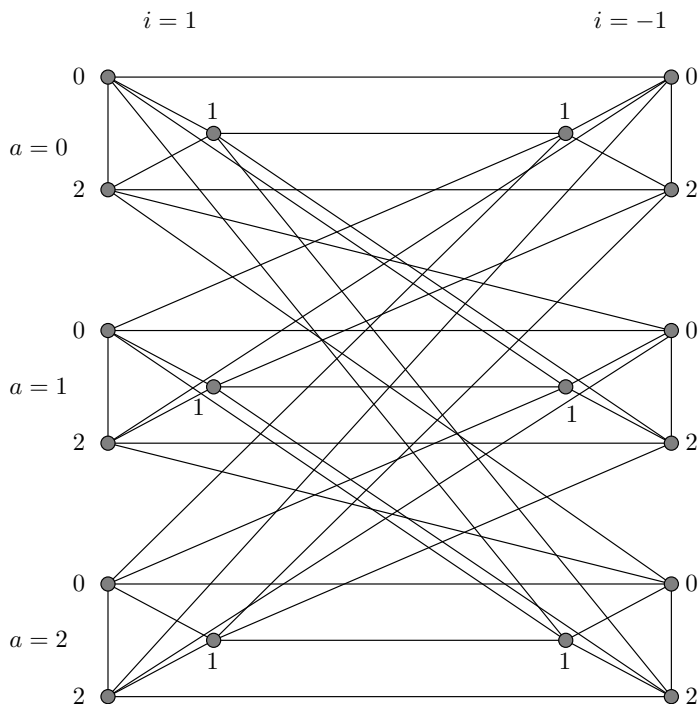
Det ses, at for $d = 17$ er den største orden i tabellen fra [29] givet ved 160, dvs. tabellen ikke er helt opdateret, da man vha. [30], der er udgivet i 2005, får ordenen 162.

På Figur 5.4 ses Cayley-grafen med grad 5, diameter 2 og orden 18, fremkommet ved hjælp af ovenstående metode, hvor $\Gamma = \{(a,b,i) | a,b \in \mathbb{Z}_3, i \in \{-1,1\}\}$.

Det ses i Tabel 5.3, at for $d = 6$ er $Cay(6,2) = 32$, hvilket også er ordenen for en optimal (6,2)-graf i det generelle grad/diameter-problem. Rent faktisk er det grafen på Figur 5.2 som er en Cayley-graf, mens de 5 andre ikke isomorfe grafer ikke er knude-transitive, [28]. Cayley-grafen kan repræsenteres vha. gruppen $\Gamma = \{(a,b,i) | a,b \in \mathbb{Z}_4, i \in \mathbb{Z}_2\}$ med multiplikation givet ved

$$(a,b,i)(a',b',i') = (a + a' + i(a' + b'), b + b' + i(a' + b'), i + i').$$

Det neutrale element i Γ er $(0,0,0)$ og et element på formen $(a,b,0)$ har invert element $(-a,-b,0)$, mens elementer på formen $(a,b,1)$ har invert element $(-2a-b,-a-2b,1)$. Ved at vælge $S = \{(2,0,0), (2,2,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1), (3,2,1)\}$, ser man at $S = S^{-1}$ idet der i følge ovenstående gælder at $(2,0,0)^{-1} = (2,0,0)$, $(2,2,0)^{-1} = (2,2,0)$, $(0,0,1)^{-1} = (0,0,1)$, $(0,1,1)^{-1} = (3,2,1)$, $(1,1,1)^{-1} = (1,1,1)$ og $(3,2,1)^{-1} = (0,1,1)$. Man kan så bevise at Cayley-grafen $C_\Gamma(S)$ med 32 knuder og grad 6 har diameter 2, ved som før at vise at alle elementer kan skrives som produktet af to elementer fra S .



Figur 5.4: Cayley-grafen $C_\Gamma(S)$ af orden 18.

Mange af Cayley-graferne i Tabel 5.2 og de store grafer generelt, er fundet vha. computere, hvilket også gør sig gældende for ovennævnte Cayley-graf med 32 knuder, som nævnt i [28]. Der kan findes mange af nabo-listerne for de store grafer i [25], [26] og [29], og for nogle af dem forklaringer på hvordan de er konstrueret.

Afrunding

Jeg har i dette speciale studeret (d,k) -grafer, som er grafer med maksimal grad d , diameter k og orden $n(d,k)$ og undersøgt, hvilke øvre grænser, der er for hvor stor $n(d,k)$ kan være.

I Kapitel 1 blev en teoretiske øvre grænse for $n(d,k)$ givet som Moore-grænsen,

$$n(d,k) \leq M(d,k) = 1 + \sum_{i=1}^k d(d-1)^{i-1},$$

og det blev bevist at grafer hvori der gælder lighed, kun kan eksistere for $k = 1$, $d = 2$ og $k = 2$ hvor $d = 2, 3, 7$ og evt. $d = 57$. Disse grafer kaldes Moore-grafer og de er maksimale (d,k) -grafer. De kendte Moore-grafer er givet ved de komplette grafer, alle kredse af ulige længde, Petersen-grafen, se Figur 1.2 og Hofmann-Singleton-grafen, se Figur 1.3. For at finde øvre grænser for $n(d,k)$ i de øvrige (d,k) -grafer, er man altså groft sagt interesseret i (d,k) -grafer hvor $d \geq 3$ og $k \geq 2$.

I Kapitel 2 indføres begrebet defekt som antallet af knuder en (d,k) -graf har mindre end Moore-grænsen, dvs. en graf med $n(d,k) = M(d,k) - \delta$ knuder har defekt δ . Det bevises, at for ulige d kan der ikke eksistere regulære (d,k) -grafer med ulige defekt. Desuden bevises det vha. egenværdier til nabomatrixen for en (d,k) -graf med defekt 1, og deres multiplicitet, at der ikke eksisterer grafer med defekt 1 for $d \geq 3$ og $k \geq 2$.

I Kapitel 3 bevises det, at der ikke eksisterer $(3,k)$ -grafer med defekt 2 for $k \geq 4$, og den entydige $(3,2)$ - og $(3,3)$ -graf med defekt 2 ses på hhv. Figur 3.13(a) og 3.13(b). På Figur 3.19 og 3.20 er de entydige $(4,2)$ - og $(5,2)$ -grafer med defekt 2 vist. Desuden er der bevist forskellige egenskaber vedrørende (d,k) -grafer for $d \geq 4$ og det formodes at der ikke eksisterer $(4,k)$ -grafer med defekt 2 for $k \geq 3$. Til sidst i kapitlet er der præsenteret nogle resultater vedrørende $(d,2)$ -grafer, som omhandler at disse ikke kan have defekt 2, hvis bl.a. $5 < d \leq 50$ eller $d \not\equiv 1 \pmod{3}$ for et lige d .

I Kapitel 4 bevises det, at der for $k \geq 4$ ikke eksisterer $(3,k)$ -grafer med defekt 4. Alle $(3,2)$ -graferne med defekt 4 ses i Figur 3.13(a) og den entydige $(3,3)$ -graf med defekt 4 ses på Figur 3.13(b).

I Kapitel 5 betragtes ordenen af nogle af de største kendte (d,k) -grafer og det nævnes, at der eksisterer $(6,2)$ -grafer med 32 knuder, dvs. at de har defekt 5, og at disse er maksimale, se Figur 5.2 for en af dem. Desuden eksisterer der også $(3,4)$ -grafer med defekt 8, dvs. med 38 knuder, som er maksimale, se Figur 5.1 for en af dem. Da mange af de største kendte (d,k) -grafer er Cayley-grafer vises desuden, at det er forholdsvis simpelt at konstruere store Cayley-grafer, hvis orden ligger indenfor en faktor 2 af det maksimale.

I Tabel 6.1 er der en samlet oversigt over de øvre grænser for $n(d,k)$, der er diskuteret i dette speciale.

k	d	Øvre grænse for $n(d,k)$
1	$d \geq 1$	$M(d,k)$
2	$d = 2,3,7,57$	$M(d,k)$
	$d = 6$	$M(d,k) - 5$
	$6 < d \leq 50$ eller $d \not\equiv 1 \pmod{3}$ hvor $d \geq 4$ lige	$M(d,k) - 3$
	øvrige d	$M(d,k) - 2$
3	$d = 2$	$M(d,k)$
	$d \geq 3$	$M(d,k) - 2$
$k = 4$	$d = 2$	$M(d,k)$
	$d = 3$	$M(d,k) - 8$
	$d \geq 4$	$M(d,k) - 2$
$k \geq 5$	$d = 2$	$M(d,k)$
	$d \geq 3$	$M(d,k) - 2$

Tabel 6.1: De øvre grænser for $n(d,k)$.



Litteratur

- [1] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 3. edition, 2005.
- [2] Niels Lauritzen. *Concrete Abstract Algebra*. Cambridge, 2005.
- [3] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2. edition, 2004.
- [4] Junming Xu. *Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks*. Kluwer Academic Publishers, 2005.
- [5] A. J. Hoffman and R. R. Singleton. On Moore Graphs with Diameters 2 and 3. *IBM Journal*, 1960.
- [6] Mirka Miller and Jozef Širáň. Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem. *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS14, 2005.
- [7] R. M. Damerell. On Moore graphs. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 74, 1973.
- [8] E. Bannai and T. Ito. On finite Moore graphs. *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, 20, 1973.
- [9] Anita Abildgaard Sillasen. Grafer egnede til netværk, 2008.
- [10] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge Mathematical Library, 2. edition, 1993.
- [11] Mirka Miller and Rinovia Simanjuntak. Graphs of order two less than the Moore bound. *Discrete Mathematics*, 308:2810–2821, 2008.
- [12] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [13] Paul Erdős, Siemion Fajtlowicz, and Alan J. Hoffman. Maximum degree in graphs of diameter 2. *Networks*, 10:87–90, 1980.
- [14] Eiichi Bannai and Tatsuro Ito. Regular graphs with excess one. *Discrete Mathematics*, 37:147–158, 1981.

- [15] Leif Kjær Jørgensen. Diameters of cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 37/38:347–351, 1992.
- [16] Bernard Elspas. Topological constraints on interconnection-limited logic. In *SWCT '64: Proceedings of the 1964 Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design*, pages 133–137, Washington, DC, USA, 1964. IEEE Computer Society.
- [17] Mirka Miller, Minh H. Nguyen, and Guillermo Pineda-Villavicencio. On the non-existence of even degree graphs with diameter 2 and defect 2. In James Harland and Prabhu Manyem, editors, *Fourteenth Computing: The Australasian Theory Symposium (CATS 2008)*, volume 77 of *CRPIT*, pages 93–95, Wollongong, NSW, Australia, 2008. ACS.
- [18] J. Conde and J. Gimbert. On the existence of graphs of diameter two and defect two. *Discrete Mathematics*, 309(10):3166 – 3172, 2009.
- [19] G. Pineda-Villavicencio and M. Miller. On graphs of maximum degree 3 and defect 4. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 65:25–31, 2008.
- [20] M. Miller and G. Pineda-Villavicencio. Complete catalogue of graphs of maximum degree 3 and defect at most 4. *Discrete Applied Mathematics*. accepted in April 2009, doi:10.1016/j.dam.2009.04.021.
- [21] Leif Kjær Jørgensen. Nonexistence of certain cubic graphs with small diameter. *Discrete Mathematics*, 114:265–273, 1993.
- [22] R. W. Buskens, M. J. Rogers, and R. G. Stanton. A census of tetravalent generalized Moore networks. *Congressus Numerantium*, 52:255–296, 1986.
- [23] R. W. Buskens and R. G. Stanton. The generalized Moore graphs on twelve and thirteen vertices. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 1:23–66, 1987.
- [24] R. W. Buskens and R. G. Stanton. Generalized Moore graphs on twelve and thirteen vertices. *ARS Combinatoria*, 23B:87–132, 1987.
- [25] Francesc Comellas. The (degree,diameter) problem for graphs. http://www-mat.upc.es/grup_de_grafs/, Januar 2008.
- [26] Eyal Loz. The degree/diameter problem. http://www.eyal.com.au/wiki/The_Degree/Diameter_Problem, Januar 2009.
- [27] Dominique Buset. Maximal cubic graphs with diameter 4. *Discrete Appl. Math.*, 101(1-3):53–61, 2000.
- [28] Sergey G. Molodtsov. Largest graphs of diameter 2 and maximum degree 6. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 21:365 – 366, 2005. General Theory of Information Transfer and Combinatorics.
- [29] Combinatorics Wiki. The Degree Diameter Problem for Cayley Graphs. http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for_Cayley_Graphs, Oktober 2008.
- [30] Jana Šiagiová and Jozef Širáň. A note on large Cayley graphs of diameter two and given degree. *Discrete Mathematics*, 305:379–382, 2005.