Pseudospektrer og normvurderinger

af
Lars V. Iversen
Dan V. Jensen
Ove L. Sandau

AALBORG UNIVERSITET

Institut for Matematiske Fag • Gruppe G3-109 • MAT6 • 1. februar – 5. juni 2009

AALBORG UNIVERSITET

Aalborg Universitet
Institut for Matematiske Fag
Fredrik Bajers Vej 7G
http://www.math.aau.dk

Titel:

Pseudospektrer og normvurderinger

Semester:

MAT6

Projektperiode:

1. feb. – 5. jun. 2009

Projektgruppe:

G3-109

Gruppemedlemmer:

Lars V. Iversen

Dan V. Jensen

Ove L. Sandau

Vejleder:

Arne Jensen

Oplagstal: 6

Sidetal: 112

Synopsis:

For en begrænset operator A har udviklingen af $\|p_n(A)\|$, hvor p_n er et polynomium af grad n, stor interesse både for et givet n og asymptotisk. I denne forbindelse bevises bl.a. Kreiss' matrixsætning og nogle forskellige generaliseringer heraf. Denne del af rapportens resultater tager udgangspunkt i kompleks funktionsteori, og Dunfordkalkulen bliver en vigtig metode til at forbinde kompleks funktionsteori med Hilbertrum.

Udvidelsen af Kreiss' matrixsætning kræver kendskab til Faberpolynomier, som er tæt forbundet med Riemanns afbildningssætning. I den forbindelse bevises en række resultater fra kompleks funktionsteori.

Det har stor interesse at bestemme pseudospektrer for matricer, da der er sammenhæng mellem pseudospektrer og operatorers og dynamiske systemers opførsel. Et eksempel på en operator er differentialoperatoren, der kan diskretiseres ved hjælp af spektrale differentiationsmetoder. Som et eksempel herpå betragtes Chebyshevdifferentiationsmatricer. Dele af teorien bag beskrives, og forskellige egenskaber vises. Endvidere beskrives implementering heraf i Maple og MATLAB, og pseudospektrerne betragtes.

Desuden gennemgås teori om og eksempler på numerisk bestemmelse af den pseudospektrale abscisse ved hjælp af de såkaldte criss-cross-algoritmer. Disse algoritmer er baseret på egenskaber ved singulære værdier og hamiltoniske matricer.

Forord

Denne rapport er skrevet som speciale ved Aalborg Universitet.

Projektet er ment som en udredning og præsentation af generaliseringer af Kreiss' matrixsætning og resultater angående pseudospektrer for begrænsede operatorer på separable Hilbertrum. Alle vektorrum i denne rapport benytter $\mathbb{C}$ som skalarlegeme. Rapporten forudsætter kendskab til kompleks funktionsteori og dennes generalisering til Hilbertrum.

Kapitel 1 og 2 er skrevet i fællesskab, mens kapitel 3 er skrevet af Dan V. Jensen, kapitel 4 af Lars V. Iversen og kapitel 5 af Ove L. Sandau.

Vi gør læseren opmærksom på, at der benyttes to slags henvisninger. Når nummeret er i parentes, som f.eks. (1.2), henvises der til det matematiske udtryk med dette nummer, mens f.eks. "sætning 1.2" henviser til en hel sætning med dette nummer. Sidstnævnte henvisning findes ligeledes til algoritme, definition, figur, korollar og lemma.

Kilder anføres med notationen [forfatter(e), udgivelsesår, placering i kilde].

Aalborg, den 5/6 2009

Lars V. Iversen

Dan V. Jensen

Ove L. Sandau

Abstract

Let A be a bounded operator in a Hilbert space. It is of interest to give estimates for $\|f(A)\|$, in particular when f is a polynomial. The objective of this report is to give such bounds for $\|f(A)\|$ based on pseudospectra and the Kreiss matrix theorem, of which the latter is generalized to bounded operators with spectrum $\sigma(A)$ in arbitrary compact sets $\sigma(A) \subseteq \Omega \subset \mathbb{C}$, and to address the question of computation of quantities related to norm bounds, particularly related to pseudospectra.

To associate an operator with a continuous function, the Dunford calculus is used, and complex analysis and in particular the Cauchy integral formula will play an important role. In the first chapter we will present some classical results from complex analysis, e.g. the maximum modulus principle, the open mapping principle and the Riemann mapping theorem. In the second chapter we associate pseudospectra and the Kreiss constant, and through the conformal mapping from the Riemann mapping theorem another definition of the Kreiss constant is presented, and it is shown that the two definitions are equivalent in a sense.

The Faber polynomials, too, are related to the Kreiss constant in the sense that they, too, are defined through the conformal mapping from the Riemann mapping theorem. These are defined in the third chapter, and generalizations of the Kreiss matrix theorem to Faber polynomials and polynomials in general are proven.

Pseudospectra are particularly useful for non-normal operators. In chapter four a discretization of the differential operator by Chebyshev differential methods is considered, and implementation and some properties of the non-normal Chebyshev differentiation matrix are presented.

The last chapter considers computation of the pseudospectral abscissa, which e.g. yields a lower bound for the transient behavior of $\|\exp(tA)\|$. The criss-cross algorithm is presented, and some properties concerning convergence are proven.

Indhold

Kapitel 1

Riemanns afbildningssætning

I dette kapitel præsenteres og bevises en række geometrisk funderede resultater fra kompleks funktionsteori samt en række generelle resultater angående holomorfe funktioner. Notationen $\mathcal{H}(G)$ henviser til mængden af holomorfe funktioner $f\colon G \to \mathbb{C}$, og hvor intet andet nævnes, er $G \subseteq \mathbb{C}$ åben og sammenhængende. Kapitlet er baseret på [Conway, 1978] og [Apostol, 1974] og tager sigte på at bevise Riemanns afbildningssætning.

1.1 Det udvidede komplekse plan

Senere i rapporten betragtes komplementærmængden til kompakte mængder i $\mathbb{C}$. Det bliver i den forbindelse naturligt at betragte ∞ som et punkt. Inden for de reelle tal er det praktisk at udvide med både $\pm\infty$, da de reelle tal har en ordning, men da de komplekse tal ikke har en sådan ordning, udvides blot med ∞.

Det ønskes at tillade, at komplekse funktioner antager værdien ∞. I det følgende udvides det metriske rum $\mathbb{C}$ derfor til et metrisk rum $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, så konvergens i $\mathbb{C}$ er ækvivalent med konvergens i $\mathbb{C}_\infty$. Således vil blandt andet kontinuitet og analyticitet nedarves. Det vil ofte være praktisk at betragte $\mathbb{C}_\infty$ som enhedskuglen $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, og vi vil benytte den metrik, der følger deraf. Hvordan dette gøres, konkretiseres i det følgende.

Afbildningen $z = a + ib \mapsto (a, b, 0) \in \mathbb{R}^3$ er en isometri mellem $\mathbb{C}$ og x_1x_2-planet. Det vises først, at der eksisterer en homeomorfi mellem x_1x_2-planet og $S \setminus \{N\}$, hvor $N = (0, 0, 1)$. For ethvert punkt $\zeta = (a, b, 0)$ i x_1x_2-planet eksisterer en entydigt bestemt linje gennem ζ og N, der kan parametriseres ved

$$t \mapsto ((1-t)a, (1-t)b, t) \text{ for } t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Denne skærer S for $t = 1$, og det vises nu ved indsættelse i kuglens ligning, at der eksisterer ét andet skæringspunkt. For $t \neq 1$ er følgende udsagn ækvivalente:

$$\begin{aligned} 1 &= (1-t)^2a^2 + (1-t)^2b^2 + t^2 \\ 1 - t^2 &= (1-t)^2|z|^2 \\ 1 + t &= (1-t)|z|^2 \\ t &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ved indsættelse i (1.1) fås

$$x_1 = \frac{2a}{|z|^2+1}, \quad x_2 = \frac{2b}{|z|^2+1} \quad \text{og } x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},$$

eller ækvivalent

$$x_1 = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \quad x_2 = \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1} \quad \text{og } x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{1.3}$$

Omvendt, hvis $\zeta = (x_1, x_2, x_3)$ er kendt, og z skal bestemmes, fås ved indsættelse af $t = x_3$ i (1.1)

$$a = \frac{x_1}{1-x_3} \text{ og } b = \frac{x_2}{1-x_3},$$

da $x_3 = t \neq 1$. Afbildningen mellem z og $\zeta = (x_1, x_2, x_3)$ er dermed en bijektion, og da den er kontinuert, er det en homeomorfi, og dermed er $\mathbb{C}$ og $S \setminus \{N\}$ homeomorfe ved afbildningen givet ved

$$z \mapsto \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

Hvis $|z|$ går mod ∞, fås ifølge (1.2), at t går mod 1, og dermed går $\zeta = (x_1, x_2, x_3)$ mod N. Derfor lader vi N svare til punktet ∞ i $\mathbb{C}_\infty$. Betragt metrikken på S induceret af den sædvanlige metrik på $\mathbb{R}^3$. Da gælder for $z \mapsto \zeta = (x_1, x_2, x_3)$ og $z' \mapsto \zeta' = (x_1', x_2', x_3')$ på S, at

$$\begin{aligned} d(\zeta, \zeta') &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \\ &= \sqrt{2 - 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3')}, \end{aligned}$$

hvilket ved hjælp af (1.3) giver

$$d(\zeta, \zeta') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}$$

for $z, z' \in \mathbb{C}$. Med ovenstående som motivation benyttes $d(\zeta, \zeta')$ som metrik på $\mathbb{C}_\infty$ med nedenstående grænsetilfælde.

Sætning 1.1
Funktionen $d \colon \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \to [0, \infty)$ givet ved

$$d(z, z') = \begin{cases} \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}} & \text{for } z, z' \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} & \text{for } z' = \infty \\ \frac{2}{\sqrt{|z'|^2+1}} & \text{for } z = \infty \\ 0 & \text{for } z = z' = \infty \end{cases}$$

er en metrik på $\mathbb{C}_\infty$.

Det bliver nødvendigt at betragte mængder, specielt værdi- og definitionsmængder for funktioner, som delmængder af både $\mathbb{C}$ og $\mathbb{C}_\infty$. Derfor får vi brug for følgende sætning. En følge $\{z_n\}$ i $\mathbb{C}$ siges at konvergere mod ∞, hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$ medfører $|z_n| > \varepsilon^{-1}$.

Sætning 1.2
En følge er konvergent i $\mathbb{C}$ (evt. mod ∞), hvis og kun hvis følgen er konvergent med samme grænse i $\mathbb{C}_\infty$.

Bevis
Antag, at der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$ medfører $|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, hvor $a, z_n \in \mathbb{C}$. Bemærk, at $\sqrt{(|z_n|^2+1)(|a|^2+1)} \geq 1$. Der gælder dermed for $n \geq N$, at

$$d(z_n, a) = \frac{2|z_n - a|}{\sqrt{(|z_n|^2+1)(|a|^2+1)}} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hvis $\{z_n\}$ konvergerer mod ∞ i $\mathbb{C}$, eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$ medfører $|z_n| > 2\varepsilon^{-1}$. Da fås

$$d(z_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z_n|^2+1}} < \frac{2}{\sqrt{4\varepsilon^{-2}}} = \varepsilon.$$

Antag, at $\{z_n\}$ er konvergent mod $a \neq \infty$ i $\mathbb{C}_\infty$. Det vises, at følgen er Cauchy i $\mathbb{C}$. At følgen så vil konvergere mod samme grænse i $\mathbb{C}_\infty$, følger af første del af beviset. Da $a \neq \infty$, eksisterer et $\delta > 0$, så $\frac{2}{\sqrt{|z_n|^2+1}} \geq \delta$ for store n, og dermed også $\frac{4}{\delta^2} - 1 \geq |z_n|^2$. Da fås

$$\sqrt{(|z_n|^2+1)(|z_m|^2+1)} \leq \sqrt{\left(\frac{4}{\delta^2}\right)^2} = \frac{4}{\delta^2},$$

og deraf følger

$$|z_n - z_m| \leq \frac{4|z_n - z_m|}{\delta^2\sqrt{(|z_n|^2+1)(|z_m|^2+1)}} = \frac{2}{\delta^2} d(z_n, z_m).$$

Givet et $\delta > 0$ eksisterer der et $N \in \mathbb{N}$, så $n, m \geq N$, hvilket medfører, at $d(z_n, z_m) < \frac{\delta^2 \varepsilon}{2}$, hvormed følgen konvergerer i $\mathbb{C}$. Hvis $z_n \to \infty$ i $\mathbb{C}_\infty$, gælder $\frac{2}{\sqrt{|z_n|^2+1}} < \varepsilon$, og dermed $4\varepsilon^{-2} - 1 < |z_n|^2$. For små ε gælder $1 < 3\varepsilon^{-2}$, og dermed $\varepsilon^{-1} < |z_n|$, hvormed $z_n \to \infty$ i $\mathbb{C}$. $\square$

Af ovenstående følger, at enhver kontinuert funktion ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er kontinuert som funktion ind i $\mathbb{C}_\infty$, hvis funktionen ikke antager værdien ∞.

Definition 1.3 (Funktioner og ∞)
En åben mængde $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}$, hvor $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq \mathcal{A}$ for et $r > 0$, kaldes en åben omegn af ∞. Hvis f er en kompleks funktion defineret på en åben omegn af ∞, og grænseværdien $a = \lim_{z\to\infty} f(z)$ eksisterer, defineres $f(\infty) = a$. Tilsvarende, hvis $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, defineres $f(a) = \infty$.

Funktionen $f(z)$ siges at være holomorf på en åben omegn af ∞, hvis og kun hvis der for $w = z^{-1}$ gælder, at $f(w)$ er holomorf på en åben omegn af 0. I bekræftende fald defineres $\frac{d}{dz} f(z)\mid_{z=\infty} = \frac{d}{dw} f(w)\mid_{w=0}$.

Hvis funktionen $f(z^{-1})$ er holomorf på en åben omegn af 0, har den dermed en potensrække $f(z^{-1}) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, og dermed er $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{-n}$. Hvis $f(z^{-1})$ har en pol i 0 af orden m, siges $f(z)$ at have en pol i ∞ af orden m, og der må gælde $f(\infty) = \infty$. Funktionen $z^m f(z^{-1})$ er så holomorf på en åben omegn af 0, og der gælder dermed $f(z) = a_m z^m + \cdots + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ efter en omnummerering af konstanterne. Følgende definition kan udvides til $\mathbb{C}_\infty$.

Definition 1.4 (Simpel kurve)
En kontinuert funktion $\gamma\colon [a, b] \to X$, hvor X er et metrisk rum, og hvor $\gamma\colon [a, b) \to$

X er injektiv, kaldes en simpel kurve. Hvis $\gamma(a) = \gamma(b)$, kaldes kurven lukket. Ved γ^* forstås kurvens billede $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$.

Det antages endvidere, at simple kurver i $\mathbb{C}$ er kontinuerte og stykkevis glatte. Følgende definition gælder også tilsvarende i $\mathbb{C}_\infty$.

Definition 1.5 (Enkeltsammenhængende)
Lad $G \subseteq X$, hvor X er et metrisk rum, og $\gamma_1 \colon [a, b] \to G$ og $\gamma_2 \colon [a, b] \to G$ være simple kurver, og enten

a) $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ *og* $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

eller

b) $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ *og* $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$.

Kurverne γ_1 og γ_2 siges at være homotope i G, hvis der eksisterer en kontinuert funktion $h \colon [0, 1] \times [a, b] \to G$, så

1. $h(0, t) = \gamma_1(t)$ *for* $t \in [a, b]$

2. $h(1, t) = \gamma_2(t)$ *for* $t \in [a, b]$

og i tilfælde a):

3.a) $h(s, a) = \gamma_1(a)$ *og* $h(s, b) = \gamma_1(b)$ *for* $s \in [0, 1]$

og i tilfælde b):

3.b) $h(s, a) = h(s, b)$ *for* $s \in [0, 1]$.

Hvis G er åben og sammenhængende, og enhver simpel, lukket kurve γ i G er homotop med et punkt $\xi \in G$, dvs. homotop med kurven $t \mapsto \xi$, kaldes G enkeltsammenhængende.

Det vises for god ordens skyld, at der eksisterer enkeltsammenhængende områder.

Sætning 1.6
En åben, stjerneformet mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ er enkeltsammenhængende.

Bevis
Da G er stjerneformet, eksisterer der et $\xi \in G$, så linjestykket mellem ξ og z ligger i G for alle $z \in G$. Lad γ være en simpel, lukket kurve i G. Da ligger linjestykket mellem ξ og $\gamma(t)$ i G for alle t, og funktionen $h(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\xi$ opfylder det ønskede. □

Sætning 1.7
Lad $f \colon G_\infty \to G$, hvor både $G_\infty \subseteq \mathbb{C}_\infty$ og $G \subseteq \mathbb{C}$ er åbne og sammenhængende, være bijektiv og holomorf. Da er G_∞ enkeltsammenhængende, hvis og kun hvis G er enkeltsammenhængende.

Bevis
Antag, at G_∞ er enkeltsammenhængende, og lad $\gamma \colon [a, b] \to G$ være en simpel, lukket kurve. Da er $f^{-1} \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ en simpel, lukket kurve i G_∞, og der eksisterer dermed en funktion h, der opfylder kravene i definition 1.5, så $\tilde{\gamma}$ er homotop med $\tilde{\gamma}(a)$ i G_∞. Således er γ homotop med $\gamma(a)$ i G ved funktionen $f \circ h$.

Antag omvendt, at G er enkeltsammenhængende, og γ er en simpel, lukket kurve i G_∞. Da er $f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ en simpel, lukket kurve i G, hvoraf resultatet følger analogt. □

1.2 Argument og logaritme

Gennem rapporten benyttes både argument og logaritme, der som udgangspunkt ikke er entydigt bestemte for komplekse tal. I dette afsnit defineres disse størrelser stringent. Bemærk, at det er mængder, der defineres.

Definition 1.8 (Argument og logaritme)
Lad $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Der defineres følgende mængder:

$$\arg z = \{v \in \mathbb{R} : z = |z|e^{iv}\}$$
$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : z = e^{w}\}.$$

Mængden $\arg z$ kaldes argumentet til z, og mængden $\log z$ kaldes logaritmen til z.

Det ses ved at vise inklusion begge veje, at der gælder mængderelationen

$$\log z = \ln|z| + i\arg z.$$

Her betegner ln den sædvanlige reelle naturlige logaritmefunktion.

Definition 1.9 (Kontinuert determination)
Lad $G \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ være en åben og sammenhængende mængde. En funktion $\vartheta\colon G \to \mathbb{R}$ kaldes en kontinuert determination af argumentet i G, hvis ϑ er kontinuert, og der for alle $z \in G$ gælder, at $z = |z|e^{i\vartheta(z)}$.

Tilsvarende kaldes en funktion $l\colon G \to \mathbb{C}$ en kontinuert determination af logaritmen i G, hvis l er kontinuert, og der for alle $z \in G$ gælder, at $z = e^{l(z)}$.

Det er en umiddelbar konsekvens af definitionerne, at hvis ϑ er en kontinuert determination af argumentet i G, så er $\ln|z| + i\vartheta(z)$ en kontinuert determination af logaritmen i G. Omvendt, hvis l er en kontinuert determination af logaritmen i G, er $\operatorname{Im} l(z)$ en kontinuert determination af argumentet i G.

Sætning 1.10
Lad $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en åben og sammenhængende mængde. Hvis en funktion $\vartheta\colon G \to \mathbb{R}$ er en kontinuert determination af argumentet i G, så er $\widetilde{\vartheta} = \vartheta + 2k\pi$ en kontinuert determination af argumentet i G for ethvert $k \in \mathbb{Z}$.

Hvis både ϑ og $\widetilde{\vartheta}$ er kontinuerte determinationer af argumentet i G, så eksisterer der et $k \in \mathbb{Z}$, så $\widetilde{\vartheta} = \vartheta + 2k\pi$.

Bevis
Første del er triviel. Antag nu, at ϑ og $\widetilde{\vartheta}$ er kontinuerte determinationer af argumentet i G, og betragt funktionen

$$h(z) = \frac{\vartheta(z) - \widetilde{\vartheta}(z)}{2\pi}.$$

Da gælder

$$e^{h(z)2\pi i} = \frac{e^{i\vartheta(z)}}{e^{i\widetilde{\vartheta}(z)}} = 1$$

for alle $z \in G$. Det følger heraf, at $h(z)$ er et heltal for alle $z \in G$. Da $h(z)$ er kontinuert, og G er sammenhængende, er $h(z)$ konstant i G. □

Sætning 1.11
Lad $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en åben og sammenhængende mængde. Hvis en funktion $l\colon G \to \mathbb{C}$ er en kontinuert determination af logaritmen i G, så er $\widetilde{l} = l + 2ki\pi$ en kontinuert determination af logaritmen i G for ethvert $k \in \mathbb{Z}$.

Hvis både l og $\widetilde{l}$ er kontinuerte determinationer af logaritmen i G, så eksisterer der et $k \in \mathbb{Z}$, så $\widetilde{l} = l + 2ki\pi$.

Dette følger af sætning 1.10 og bemærkningen før denne.

Sætning 1.12
Lad G og Ω være åbne delmængder af $\mathbb{C}$. Antag, at f og g er kontinuerte på hhv. G og Ω, at $f(G) \subseteq \Omega$, og at $g(f(z)) = z$ for alle $z \in G$. Hvis g er differentiabel, og $g'(z) \neq 0$, er f differentiabel, og

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Altså, hvis g er analytisk, er f analytisk.

Bevis
Lad $a \in G$ være fast, og lad $h \in \mathbb{C}$, hvor $h \neq 0$, og $a+h \in G$. Bemærk, at $a = g(f(a))$ og $a + h = g(f(a + h))$ medfører, at $f(a) \neq f(a + h)$. Derudover er

$$\begin{aligned} 1 = \frac{a+h-a}{h} &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\ &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

På grund af ligheden eksisterer der en grænseværdi for $h \to 0$ på højresiden, og da $\lim_{h\to 0}(f(a + h) - f(a)) = 0$, er

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} = g'(f(a)).$$

Da $g'(f(a)) \neq 0$ per antagelse, eksisterer

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

og vi får, at $1 = g'(f(a))f'(a)$. Da G er åben, er dette uafhængigt af valget af $a \in G$, da et h som det anvendte altid vil eksistere. Dermed er $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$ for alle $z \in G$. Hvis g er analytisk, er g' kontinuert, og $f'(z)$ vil derfor altid eksistere. Dermed er f holomorf og dermed analytisk. □

Korollar 1.13
Lad $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være åben og sammenhængende. Enhver kontinuert determination af logaritmen i G er analytisk, og dens afledede er $\frac{1}{z}$.

Bevis
Lad g være eksponentialfunktionen, og f være en kontinuert determination af logaritmen. Da g er analytisk, er f analytisk, og

$$f'(z) = \frac{1}{\frac{d}{df(z)} \exp(f(z))} = \frac{1}{z}.$$

□

Definition 1.14 (Hoveddetermination)
For $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ betegnes med $\operatorname{Arg} z$ den kontinuerte determination af argumentet, der ligger i intervallet $(-\pi, \pi)$. Denne determination kaldes hoveddeterminationen af argumentet. Tilsvarende er hoveddeterminationen af logaritmen, $\operatorname{Log} z$, givet ved

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Det ses, at $\operatorname{Arg} z$ kan bestemmes ved

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arccot}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}\right) & \text{for } \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 & \text{for } \operatorname{Im} z = 0 \\ -\operatorname{arccot}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{-\operatorname{Im} z}\right) & \text{for } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Det bemærkes også, at der til enhver cirkelskive, der ikke indeholder nul, findes en determination af argumentet, da cirklen enten er indeholdt i $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ eller kan roteres π radianer omkring origo, hvorefter $\operatorname{Arg} z$ kan bestemmes og π lægges til.

Definition 1.15 (Determination langs kurve)
Lad $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ være en kurve, der ikke går gennem nul. En kontinuert funktion $\vartheta \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kaldes en kontinuert determination af argumentet langs γ, hvis der gælder, at

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\vartheta(t)}$$

for alle $t \in [a, b]$.

Man kan ligeledes indføre begrebet en kontinuert logaritmefunktion langs en kurve.

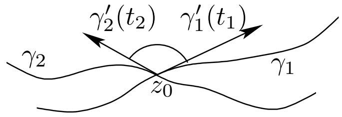
Sætning 1.16
Lad $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ være en kurve, der ikke går gennem nul. Så gælder følgende:

(i) Der eksisterer en kontinuert determination af argumentet langs γ.

(ii) Hvis en funktion $\vartheta \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ er en kontinuert determination af argumentet langs γ, så er $\widetilde{\vartheta} = \vartheta + 2k\pi$ en kontinuert determination af argumentet langs γ for ethvert $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Hvis både ϑ og $\widetilde{\vartheta}$ er kontinuerte determinationer af argumentet langs γ, så eksisterer der et $k \in \mathbb{Z}$, så $\widetilde{\vartheta} = \vartheta + 2ki\pi$.

Bevis
Lad $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ være en kurve, så $0 \notin \gamma^*$. Da eksisterer der et $\rho > 0$, så $\operatorname{dist}(0, \gamma^*) = \rho$. Da $[a, b]$ er kompakt, er γ ligeligt kontinuert på intervallet, og der eksisterer dermed et $\delta > 0$, så der for $t_1, t_2 \in [a, b]$ gælder, at $|t_1 - t_2| < \delta$ medfører, at $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \rho$. Bemærk, at der for alle $t \in [a, b]$ gælder, at $0 \notin B_\rho(\gamma(t))$, og dermed eksisterer der en kontinuert determination af argumentet i $B_\rho(\gamma(t))$. Betragt nu en inddeling $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = b$, så $|\tau_i - \tau_{i+1}| < \delta$. Lad ϑ_i betegne en kontinuert determination af argumentet i $B_\rho(\gamma(\tau_i))$. Da $B_\rho(\gamma(\tau_i)) \cap B_\rho(\gamma(\tau_{i+1})) \neq \emptyset$, og ϑ_i og ϑ_{i+1} begge er kontinuerte determinationer af argumentet på mængden, eksisterer der et $k_{i+1} \in \mathbb{Z}$, så $\vartheta_i = \vartheta_{i+1} + 2k_{i+1}\pi$, hvor k_0 sættes lig med nul. Funktionen bestemt



Figur 1.1: Illustration af vinkel mellem kurver.

ved

$$\vartheta(t) = \vartheta_i(t) + \sum_{j=0}^{i} 2k_j\pi \quad \text{for } t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

er da en kontinuert determination af argumentet langs γ.

Anden og tredje del vises som i sætning 1.10. □

Bemærk, at da en kontinuert determination af argumentet er en funktion fra $G \subset \mathbb{C}$ til $\mathbb{R}$, kan den ikke være holomorf. Lad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en simpel, glat kurve, hvor $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, så $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in \mathbb{R}$ for alle t. Da giver (1.4) en kontinuert determination af argumentet langs γ. Endvidere er funktionen $t \mapsto \operatorname{Arg}(\gamma(t))$ en reel differentiabel funktion med den afledede

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccot}\left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}\right) = \frac{\gamma_2'(t)\gamma_1(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2}.$$

1.3 Möbiustransformationen

Möbiustransformationer er en klasse af funktioner med klare geometriske fortolkninger, som sammensætninger af translationer, inversioner, skaleringer og rotationer. Derudover afbilder Möbiustransformationer cirkler over på cirkler, og derudfra kan egenskaber som orientering og symmetri defineres.

Definition 1.17 (Konform afbildning)
En analytisk funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ siges at være konform, hvis der for ethvert $z_0 \in G$ og alle simple kurver $\gamma_1\colon [a,b] \to G$ og $\gamma_2\colon [c,d] \to G$, der opfylder

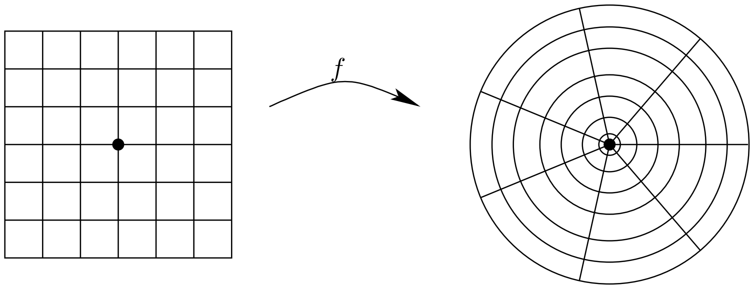
- $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$
- $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ *og* $\gamma_2'(t_2) \neq 0$
- $\arg \gamma_1'(t_1) \neq \arg \gamma_2'(t_2)$,

gælder, at f er vinkelbevarende. Se figur 1.1. Der skal altså gælde

$$\arg \gamma_1'(t_1) - \arg \gamma_2'(t_2) = \arg f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) - \arg f'(\gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2).$$

Det ses af definitionen, at der skal gælde $f'(z_0) \neq 0$. Følgende sætning viser, at dette er en tilstrækkelig betingelse.

Sætning 1.18
En funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ er konform, hvis $f'(z) \neq 0$ for alle z i G.



Figur 1.2: Et eksempel på en konform afbildning er $f(z) = e^z$. Rette linjer med konstant real- eller imaginærdel bliver afbildet over på hhv. cirkler og halvlinjer, men vinklen bevares.

Bevis
Lad γ_1 og γ_2 være givet som i definition 1.17, og antag, at $f'(z_0) \neq 0$. Da gælder

$$\arg f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(t_1)$$

og

$$\arg f'(\gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(t_2),$$

da $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $\gamma_1'(t_1) \neq 0$, og $\gamma_2'(t_2) \neq 0$. Således fås

$$\arg f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) - \arg f'(\gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2) = \arg \gamma_1'(t_1) - \arg \gamma_2'(t_2),$$

hvormed f er konform. $\square$

Et eksempel på en konform afbildning er $f(z) = e^z$. Som det ses på figur 1.2, bliver rette linjer med konstant real- eller imaginærdel afbildet over på hhv. cirkler og halvlinjer, men vinklen bevares.

Med ovenstående sætning som motivation siges en funktion $f\colon G_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, hvor $G_\infty \subseteq \mathbb{C}_\infty$, at være konform, hvis $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in G_\infty$. Det ses umiddelbart, at $f(z) = z^{-1}$ er konform på en åben omegn af ∞, da der for $w = z^{-1}$ gælder, at $\frac{d}{dw} f(w) = 1$.

Lemma 1.19
Sammensætninger af konforme afbildninger er konforme.

Bevis
Lad $f\colon G_1 \to G_2$ og $g\colon G_2 \to \mathbb{C}_\infty$ være konforme, hvor $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}_\infty$. Da gælder $f'(z) \neq 0$ og $g'(z) \neq 0$ for alle z, og dermed er $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z) \neq 0$. $\square$

Definition 1.20 (Möbiustransformation)
En afbildning $S\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ på formen

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, og $ad - bc \neq 0$, kaldes en Möbiustransformation. Der gælder $S(\infty) = \frac{a}{c}$ og $S(\frac{-d}{c}) = \infty$.

De sidste udsagn kræver et argument. Antag først, at $c \neq 0$. Det ses, at $S(z) \to \infty$ for $z \to \frac{-d}{c}$, og tilsvarende $\lim_{z\to\infty} S(z) = \frac{a}{c}$. Hvis $c = 0$, fås $S(\infty) = \infty$, hvilket betragtes som et grænsetilfælde af ovenstående. Følgende sætning eftervises nemt.

Sætning 1.21
Möbiustransformationen er en bijektion på $\mathbb{C}_\infty$ med invers

$$S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

der også er en Möbiustransformation. Hvis T er en Möbiustransformation, er $S \circ T$ det også. For funktionerne

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c} \qquad f_2(z) = \frac{1}{z}$$
$$f_3(z) = -\frac{ad - bc}{c^2} z \qquad f_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

gælder $S = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Altså er Möbiustransformationer sammensætninger af translationer, inversioner, skaleringer og rotationer.

Sætning 1.22
Möbiustransformationen er konform på $\mathbb{C}_\infty$.

Bevis
Antag først, at $c \neq 0$. Det ses, at Möbiustransformationen $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ er holomorf for $z \neq \frac{-d}{c}$ og $z \neq \infty$, og der gælder

$$S'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

For $z \to \frac{-d}{c}$ går $S'(z)$ mod ∞, og dermed er $S'(\frac{-d}{c}) = \infty$ ifølge definition 1.3. For $w = z^{-1}$ gælder $S(w) = \frac{bw+a}{dw+c}$, og dermed $\frac{d}{dw}S(0) = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Hvis $c = 0$, gælder $S(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, og dermed fås $S'(w) = \frac{-a}{dw^2}$, og dermed for $w \to 0$, at $S'(\infty) = \infty$. Således er S konform ifølge sætning 1.18. □

Sætning 1.23
Lad $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ være forskellige, og $S(a) = \alpha$, $S(b) = \beta$ og $S(c) = \gamma$. Da er S den eneste Möbiustransformation med denne egenskab.

Bevis
Bemærk, at hvis S ikke er identitetsafbildningen, har S højst to fikspunkter, da $z = \frac{az+b}{cz+d}$ hvis og kun hvis $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Antag, at T også opfylder kravene til S, da har sammensætningen $T^{-1} \circ S$ både a, b og c som fikspunkter, og dermed er $S = T$. □

Definition 1.24 (Dobbeltforhold)
Lad z_2, z_3 og z_4 være forskellige punkter i $\mathbb{C}_\infty$, og definer $S\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ ved

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4}\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \qquad \textit{hvis } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$
$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} \qquad \textit{hvis } z_2 = \infty$$
$$S(z) = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4} \qquad \textit{hvis } z_3 = \infty$$
$$S(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \qquad \textit{hvis } z_4 = \infty.$$

Da er S den entydigt bestemte Möbiustransformation, så $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$, og $S(z_4) = \infty$, og dobbeltforholdet defineres som $(z_1, z_2, z_3, z_4) = S(z_1)$.

Sætning 1.25
Dobbeltforholdet er invariant under Möbiustransformation. Det vil sige, at

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$$

for enhver Möbiustransformation T.

Bevis
Lad $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, og definer $M = S \circ T^{-1}$. Da gælder $M(Tz_2) = 1$, $M(Tz_3) = 0$ og $M(Tz_4) = \infty$, og dermed $M(z) = (z, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$ for alle $z \in \mathbb{C}_\infty$. Vælg nu $z = Tz_1$, hvilket giver det ønskede. □

Sætning 1.26
Lad $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ være forskellige, og $\omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \mathbb{C}_\infty$ være forskellige. Da eksisterer en entydigt bestemt Möbiustransformation S, så $S(z_2) = \omega_2$, $S(z_3) = \omega_3$, og $S(z_4) = \omega_4$.

Bevis
Definer $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ og $M(z) = (z, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Da har $S = M^{-1} \circ T$ de ønskede egenskaber. Hvis R også opfylder egenskaberne, har $S^{-1} \circ R$ tre fikspunkter, hvormed $S = R$. □

Bemærk, at i $\mathbb{C}_\infty$ betragtes linjer som cirkler gennem ∞.

Sætning 1.27
Lad z_1, z_2, z_3 og z_4 være forskellige punkter i $\mathbb{C}_\infty$. Da er (z_1, z_2, z_3, z_4) reel, hvis og kun hvis z_1, z_2, z_3 og z_4 ligger på en cirkel.

Bevis
Først vises, at for en vilkårlig Möbiustransformation S^{-1} er billedet af den reelle akse en cirkel i $\mathbb{C}_\infty$. Antag, at $z \in \mathbb{R}$, og $S^{-1}(z) = \omega$, så hverken z eller ω er ∞. Da gælder $S(\omega) = \overline{S(\omega)}$, det vil sige

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{\bar{a}\bar{\omega} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{\omega} + \bar{d}},$$

og dermed

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|\omega|^2 + (a\bar{d} - \bar{b}c)\omega + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{\omega} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0.$$

Bemærk, at hvis $z = \infty$, gælder $\omega = S^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$, som også opfylder ovenstående ligning. Antag først, at $a\bar{c} = \bar{a}c$. Da gælder

$$\begin{aligned} 0 &= (a\bar{d} - \bar{b}c)\omega - (\bar{a}d - b\bar{c})\bar{\omega} + (b\bar{d} - \bar{b}d) \\ &= (a\bar{d} - \bar{b}c)\omega + b\bar{d} - \overline{((a\bar{d} - \bar{b}c)\omega + b\bar{d})}, \end{aligned}$$

hvoraf det fås, at

$$\operatorname{Im}((a\bar{d} - \bar{b}c)\omega + b\bar{d}) = 0,$$

og dermed ligger $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ på en linje. Under antagelse af, at $a\bar{c} = \bar{a}c$, og at $\omega \neq \infty$, er ovenstående udsagn ækvivalente, og dermed udgør $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ hele linjen. Bemærk, at der eksisterer et $z_\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, så $S^{-1}(z_\infty) = \infty$, hvis og kun hvis $z_\infty = S(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$, hvilket er ækvivalent med $a\bar{c} = \bar{a}c$. Et sådant z_∞ kan altså kun eksistere, hvis mængden $S^{-1}((\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \setminus \{z_\infty\})$ udgør en linje, og dermed er $S(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ en cirkel i $\mathbb{C}_\infty$.

Hvis $a\bar{c} \neq \bar{a}c$, defineres $\gamma = \frac{b\bar{c}-d\bar{a}}{a\bar{c}-\bar{a}c}$ og $\delta = \frac{\bar{b}d-b\bar{d}}{a\bar{c}-\bar{a}c}$, så der gælder

$$|\omega|^2 + \bar{\gamma}\omega + \gamma\bar{\omega} - \delta = 0,$$

og dermed fås ved simple udregninger

$$|\omega + \gamma| = \sqrt{|\gamma|^2 + \delta} = \left|\frac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right| > 0.$$

Da $|\gamma|^2 + \delta$ er uafhængig af z, svarer dette til, at $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ ligger på en cirkel. Da ovenstående udsagn er ækvivalente under antagelse af, at $a\bar{c} \neq \bar{a}c$, udgør $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ hele cirklen.

Antag nu, at $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Specielt gælder således for $S(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, hvor $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, at z_1, z_2, z_3 og z_4 ligger på en cirkel.

Antag nu, at z_1, z_2, z_3 og z_4 ligger på en cirkel. Da z_2, z_3 og z_4 ligger i $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, og da dette er en cirkel, må også z_1 ligge på denne cirkel, og dermed $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. □

Sætning 1.28
En Möbiustransformation afbilder cirkler over på cirkler.

Bevis
Lad $\Gamma \subset \mathbb{C}_\infty$ være en cirkel, og $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ være forskellige. For $\omega_i = S(z_i)$ bestemmer ω_2, ω_3 og ω_4 en cirkel Γ'. Der gælder ifølge sætning 1.25

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (S(z), \omega_2, \omega_3, \omega_4),$$

så $z \in \Gamma$, hvis og kun hvis $S(z) \in \Gamma'$ ifølge sætning 1.27, og dermed $S(\Gamma) = \Gamma'$. □

Sætning 1.29
Lad Γ og Γ' være cirkler i $\mathbb{C}_\infty$. Da eksisterer en Möbiustransformation S, så $S(\Gamma) = \Gamma'$. Hvis der for tre forskellige punkter $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ fastsættes $S(z_i) = \omega_i$, hvor $\omega_i \in \Gamma'$, så er S entydigt bestemt.

Bevis
Lad $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, og $R(z) = (z, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, og definer $S = R^{-1} \circ T$. Da $S(\Gamma)$ er en cirkel, og da $S(z_i) = \omega_i$, må der gælde $S(\Gamma) = \Gamma'$. Antag, at M også opfylder kravene til S. Da gælder $M^{-1} \circ S(z_i) = z_i$ for $i \in \{2, 3, 4\}$, hvormed $M = S$. □

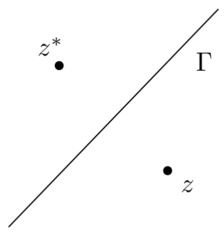
Orienteringsprincippet

Det er vist i det foregående, at Möbiustransformationen afbilder cirkler over på cirkler. Det vises nu, at området på den ene side af cirklen bliver på samme side i en passende forstand.

Definition 1.30 (Symmetri)
Givet en cirkel $\Gamma \subset \mathbb{C}_\infty$ og tre forskellige punkter $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ siges to punkter z og z^* at være symmetriske mht. Γ, hvis

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}.$$

Da Möbiustransformationen er en bijektion på $\mathbb{C}_\infty$, vil z^* eksistere for ethvert z. Bemærk, at z er symmetrisk med sig selv, hvis og kun hvis $z \in \Gamma$ ifølge sætning 1.27. Efter følgende sætning vises, at definitionen er uafhængig af z_2, z_3 og z_4.



Figur 1.3: Illustration af symmetriske punkter mht. linjen Γ.

Sætning 1.31 (Symmetriprincippet)
Lad Γ_1 og Γ_2 være cirkler i $\mathbb{C}_\infty$, så $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Hvis z og z^* er symmetriske mht. Γ_1, er $S(z)$ og $S(z^*)$ symmetriske mht. Γ_2.

Bevis
For $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma_1$ gælder

$$\begin{aligned}(S(z), S(z_2), S(z_3), S(z_4)) &= (z, z_2, z_3, z_4)\\ &= \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}\\ &= \overline{(S(z^*), S(z_2), S(z_3), S(z_4))},\end{aligned}$$

hvormed $S(z)$ og $S(z^*)$ er symmetriske mht. Γ_2. □

Korollar 1.32
Hvis $\Gamma \subset \mathbb{C}_\infty$ er en cirkel, og $(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}$ for $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$, gælder $(z, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \overline{(z^*, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)}$ for vilkårlige punkter $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \in \Gamma$.

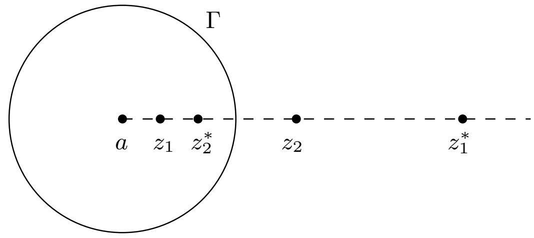
Bevis
Det vises, at $(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}$ medfører $(z, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \overline{(z^*, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)}$. Lad $S(\Gamma) = \Gamma$, så $S(\zeta_i) = z_i$. Da gælder

$$\begin{aligned}(z, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) &= (S(z), z_2, z_3, z_4)\\ &= \overline{(S(z^*), z_2, z_3, z_4)}\\ &= \overline{(z^*, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)}.\end{aligned}$$ □

Det vises nu, at definitionen stemmer overens med, hvad der normalt forstås ved symmetri. Lad Γ være en linje i $\mathbb{C}$, og z og z^* være symmetriske mht. Γ. Bemærk, at $z = z^*$, hvis og kun hvis $z \in \Gamma$. Hvis z_2, z_3 og z_4 vælges på Γ, så $z_4 = \infty$, fås $\frac{z-z_3}{z_2-z_3} = \frac{\bar{z}^*-\bar{z}_3}{\bar{z}_2-\bar{z}_3}$, og dermed $|z - z_3| = |z^* - z_3|$. Da z_3 kan vælges vilkårligt på linjen, har z og z^* samme afstand til ethvert punkt på linjen, hvormed punkterne må ligge som på figur 1.3.

Lad nu Γ være en cirkel, $\Gamma = \partial B_R(a)$, $R \in (0, \infty)$. Ved hjælp af sætning 1.25 fås

$$\begin{aligned}(z^*, z_2, z_3, z_4) &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}\\ &= \overline{(z-a, z_2-a, z_3-a, z_4-a)}\\ &= \left(\bar{z}-\bar{a}, \frac{R^2}{z_2-a}, \frac{R^2}{z_3-a}, \frac{R^2}{z_4-a}\right) \qquad (1.5)\\ &= \left(\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right),\end{aligned}$$



Figur 1.4: Illustration af symmetriske punkter mht. cirklen Γ.

hvor (1.5) følger af definition 1.24. Således gælder $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$. Dermed må der gælde $|z^* - a||z - a| = R^2$, så hvis z ligger inden for cirklen, må z^* ligge uden for cirklen, og jo tættere z er på a, desto længere må z^* være fra cirklen. Tilsvarende gælder $z^* = a + \frac{R^2}{|z-a|^2}(z-a)$, så z^* ligger på halvlinjen fra a gennem z. Dette er illustreret på figur 1.4.

Definition 1.33 (Orientering)
Givet en cirkel $\Gamma \subset \mathbb{C}_\infty$ kaldes en tripel (z_1, z_2, z_3) af forskellige punkter i Γ en orientering på Γ.

Lad z_1, z_2 og z_3 være tre forskellige punkter i $\mathbb{R}$. For $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3) = \frac{az+b}{cz+d}$ kan a, b, c og d vælges reelle ifølge definition 1.24. Da gælder

$$\begin{aligned}(z, z_1, z_2, z_3) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{az+b}{|cz+d|^2}(c\bar{z}+d) \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2}(ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd)\end{aligned}$$

og dermed $\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z$. Tallene z_1, z_2 og z_3 opfylder $(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1) > 0$, hvis og kun hvis en af følgende gælder:

$$\begin{aligned} z_1 < z_2 < z_3 \\ z_3 < z_1 < z_2 \\ z_2 < z_3 < z_1. \end{aligned}$$

Det vil sige, at hvis den reelle akse betragtes som en cirkel i $\mathbb{C}_\infty$, skal punkterne ligge i rækkefølge. Ifølge definition 1.24 kan a, b, c og d vælges, så

$$\begin{aligned} ad - bc &= (z_1 - z_3)z_3(z_2 - z_1) - z_2(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \\ &= -(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1), \end{aligned}$$

og dermed ligger z til venstre for den reelle tallinje, hvis $\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0$, og z_1, z_2 og z_3 ligger i den naturlige rækkefølge. Således defineres den venstre side af en cirkel $\Gamma \in \mathbb{C}_\infty$ som $\{z : \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$, og tilsvarende defineres den højre side som $\{z : \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$. Bemærk, at et punkt ligger hverken på venstre eller højre side, hvis og kun hvis punktet ligger i Γ.

Sætning 1.34 (Orienteringsprincippet)
Lad Γ_1 og Γ_2 være cirkler i $\mathbb{C}_\infty$, så $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$, og lad (z_1, z_2, z_3) være en orientering på Γ_1. Da vil den højre og den venstre side af Γ_1 mht. (z_1, z_2, z_3) blive afbildet over på hhv. den højre og den venstre side af Γ_2 mht. orienteringen $(S(z_1), S(z_2), S(z_3))$.

Bevis
Hvis z ligger på venstre side, ligger z^* på højre side. Da $(z, z_1, z_2, z_3) = (S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3))$, fås det ønskede. □

Betragt nu enhedscirklen ∂B_1 med orientering $(-i, 1, i)$, hvilket intuitivt svarer til positiv omløbsretning. Da gælder der, at $(z, -i, 1, i) = S(z) = \frac{z-1}{z-i}\frac{-2i}{-i-1} = \frac{(z-1)(\bar{z}+i)(1+i)}{|z-i|^2}$. Det kan således afgøres, om $z = a + ib$ ligger på højre eller venstre side ved at bestemme fortegnet for imaginærdelen af tælleren. Der gælder $(a + ib - 1)(a - ib + i)(1 + i) = a^2 + b^2 - 2a - 2b + 1 + i(a^2 + b^2 - 1)$. Således gælder $\operatorname{Im} S(z) < 0$ for $z \in B_1$, og dermed svarer det indre af cirklen til venstre side ved positiv omløbsretning.

Sætning 1.35
Til enhver åben kugle $\mathcal{B}$ i $\mathbb{C}_\infty$ eksisterer en Möbiustransformation T, så $T(\mathcal{B}) = B_1$.

Bevis
Lad $\Gamma = \partial\mathcal{B}$, og vælg orientering (z_1, z_2, z_3) på Γ, så $\mathcal{B}$ udgør venstre side. Da eksisterer en entydigt bestemt Möbiustransformation T, så $T(\Gamma) = \partial B_1$, og $T(z_1) = -i$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = i$, ifølge sætning 1.29, og dermed gælder ifølge orienteringsprincippet, at $T(\mathcal{B}) = B_1$. □

Bemærk, at $\mathcal{B}$ både kan være en åben kugle $B_r(a)$ og et halvplan i $\mathbb{C}$.

1.4 Det metriske rum $\mathcal{H}(G)$

Gennem rapporten benyttes de forskellige maksimumprincipper og åben afbildningssætningen for holomorfe funktioner flere gange. I næste kapitel skærpes åben afbildningssætningen for holomorfe og injektive funktioner i Koebes $\frac{1}{4}$-sætning.

Lemma 1.36 (Lokalt maksimumprincip)
Lad $S \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og $f \in \mathcal{H}(S)$, hvor f ikke er konstant. Så har $|f|$ ikke lokalt maksimum i S, dvs. enhver $B_r(a) \subseteq S$ indeholder et z, så $|f(z)| > |f(a)|$.

Bemærk kontrapositionen af lemmaet: Hvis $|f|$ har lokalt maksimum i S, så er f konstant.

Bevis
Antag, at for alle $z \in B_r(a)$ er $|f(z)| \leq |f(a)|$, dvs. at $|f|$ har lokalt maksimum i $B_r(a)$, og betragt $B_{r'}(a)$, hvor $0 < r' < r$. Bemærk, at for alle $\theta \in \mathbb{R}$ er $a + r'e^{i\theta} \in B_r(a)$, så $|f(a + r'e^{i\theta})| \leq |f(a)|$. Antag nu, at uligheden er skarp for et θ. Dermed vil der på grund af kontinuitet eksistere et $\varepsilon > 0$ for alle $\theta \in I \subseteq [0, 2\pi]$, så $|f(a + r'e^{i\theta})| \leq |f(a)| - \varepsilon$. Ved hjælp af Cauchys integralformel fås, at

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{r'}|f(a)| &\leq \int_0^{2\pi} |f(a + r'e^{i\theta})|d\theta \\ &= \int_I |f(a + r'e^{i\theta})|d\theta + \int_{[0,2\pi]-I} |f(a + r'e^{i\theta})|d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq h(|f(a)|-\varepsilon)+(2\pi-h)|f(a)| = 2\pi|f(a)| - h\varepsilon\\&< 2\pi|f(a)|,\end{aligned}$$

hvor h er længden af I. Dette er en modstrid for små r', så $|f(z)| = |f(a)|$ for alle $z \in B_r(a)$. Men så er $|f|$ konstant på kuglen. Skriv $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Hvis $|f| = c$, er $u^2 + v^2 = c^2$, hvoraf

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ved hjælp af Cauchy-Riemann-ligningerne fås det konsistente, homogene ligningssystem

$$\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed er de afledede af u, og dermed også af v, konstant lig nul. Sæt $a = (x_0, y_0)$, og lad y' ligge mellem y og y_0, og x' ligge mellem x og x_0. Fra middelværdisætningen fås, at

$$u(x,y) - u(x,y_0) = (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y') = 0,$$

og

$$u(x,y_0) - u(x_0,y_0) = (x-x_0)\frac{\partial}{\partial y}u(x',y_0) = 0.$$

Dermed er $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ for alle $x, y \in B_r(a)$. Samme argument kan laves for v. Dermed er f konstant på kuglen. Dette udvider nu til hele S jf. identitetssætningen for analytiske funktioner. □

Lemma 1.37 (Absolut maksimumprincip)
Lad $T \subset \mathbb{C}$ være kompakt, og $f \in \mathcal{H}(\operatorname{int} T)$ og kontinuert på T. Så antages det absolutte maksimum af $|f|$ på randen af T.

Bevis
Lad $|f|$ antage sit maksimum i $a \in T$. Dette eksisterer, da T er kompakt. Hvis $|f|$ er konstant, antages maksimum på randen. Hvis $|f|$ ikke er konstant, kan $|f|$ ikke antage sit maksimum i et indre punkt ifølge lokalt maksimumprincippet, hvormed a ligger på randen. □

Lemma 1.38 (Minimumprincip)
Lad $S \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og f en ikke-konstant analytisk funktion på S. Hvis $|f|$ har lokalt minimum i $a \in S$, er $f(a) = 0$.

Bevis
Hvis $f(a) \neq 0$, kan lemma 1.36 anvendes på $g = \frac{1}{f}$, der er analytisk på en åben kugle omkring a. Dermed har $|g|$ lokalt maksimum i a. Men så er g, og dermed f, konstant på kuglen omkring a, og dermed på hele S. □

Sætning 1.39 (Åben afbildningssætning)
Hvis $f \in \mathcal{H}(G)$, hvor $G \subseteq C$ er åben, ikke er konstant, vil $f(\mathcal{A})$ være åben, hvis $\mathcal{A} \subseteq G$ er åben.

Bevis
Lad $b = f(a)$ være et vilkårligt punkt i $f(\mathcal{A})$ for et $a \in \mathcal{A}$, hvor $\mathcal{A} \subseteq G$ er åben. Bemærk, at a ikke er et fortætningspunkt i urbilledet af b, da f således ville være konstant på hele $\mathcal{A}$, jf. identitetssætningen. Dermed eksisterer en kugle $B_r(a)$, hvis aflukning ligger i $\mathcal{A}$ og kun indeholder a fra urbilledet af b.

Da $f(\partial B_r(a))$ er en kompakt mængde ikke indeholdende b, er $m = \inf\{|f(z) - b| : z \in \partial B_r(a)\} > 0$. Lad w være et vilkårligt punkt i $B_{\frac{m}{2}}(b)$, og $g(z) = f(z) - w$. Nu er $|g|$ kontinuert på $\overline{B_r(a)}$, der er kompakt, så der findes et $z_0 \in \overline{B_r(a)}$, hvor $|g|$ antager sit minimum. Da $a \in B_r(a)$, er

$$|g(z_0)| \leq |g(a)| = |f(a) - w| = |b - w| < \frac{m}{2},$$

men for $z \in \partial B_r(a)$ er

$$|g(z)| = |f(z) - b + b - w| \geq |f(z) - b| - |w - b| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}.$$

Dermed ligger z_0 ikke i $\partial B_r(a)$, men kun i $B_r(a)$. Da g er analytisk og ikke-konstant, kan minimumprincippet anvendes, hvorved $g(z_0) = 0$. Dermed er $w = f(z_0)$, så hele $B_{\frac{m}{2}}(b)$ er indeholdt i $f(\overline{B_r(a)})$, og dermed er $f(\mathcal{A})$ åben, da $f(\overline{B_r(a)}) \subseteq f(\mathcal{A})$. □

Definition 1.40 ($C(G, \Omega)$)
For en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ og et fuldstændigt metrisk rum (Ω, d) betegner $C(G, \Omega)$ mængden af alle kontinuerte funktioner fra G til Ω.

Medmindre andet nævnes, vil G i dette afsnit være en åben delmængde af $\mathbb{C}$, og i de fleste tilfælde vil $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{C}_\infty$ optræde som Ω. Det bemærkes i den forbindelse, at mængden af analytiske funktioner på G betegnet med $\mathcal{H}(G)$ kan betragtes som en delmængde af $C(G, \mathbb{C})$.

Definition 1.41 (Konvergens i $C(G, \Omega)$ og $\mathcal{H}(G)$)
En følge $\{f_n\}$ i $C(G, \mathbb{C})$ konvergerer mod f, hvis $\{f_n\}$ konvergerer ligeligt mod f på alle kompakte delmængder af G. Konvergensbegrebet nedarves fra $C(G, \mathbb{C})$ til $\mathcal{H}(G)$. Det vil sige, at en følge $\{f_n\}$ i $\mathcal{H}(G)$ konvergerer mod f, hvis $\{f_n\}$ konvergerer ligeligt mod f på alle kompakte delmængder af G.

Der findes en metrik, der realiserer disse konvergensbegreber, og udstyret med denne er mængden $C(G, \Omega)$ et fuldstændigt metrisk rum. Detaljer kan findes i [Conway, 1978, §VII.1]. Udstyret med denne metrik er mængden $\mathcal{H}(G)$ et metrisk rum, og følgende sætning giver yderligere oplysninger om dette.

Sætning 1.42
Hvis $\{f_n\}$ er en følge i $\mathcal{H}(G)$, og f tilhører $C(G, \mathbb{C})$, således at $f_n \to f$, så er f analytisk, og $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ for ethvert heltal $k \geq 1$.

Bevis
For at vise, at f er analytisk, anvendes Moreras sætning. Lad Δ være en udfyldt trekant, der er helt indeholdt i $G \subseteq \mathbb{C}$. Den udfyldte trekant Δ er kompakt, så i henhold til definition 1.41 konvergerer $\{f_n\}$ ligeligt mod f på Δ. På grund af den ligelige konvergens fås, at $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n = 0$, hvor det sidste lighedstegn følger af Cauchys integralsætning, idet hver af funktionerne f_n per antagelse er analytisk. Det følger så af Moreras sætning, at f er analytisk på G.

Nu vises det, at $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$. Lad $D = \overline{B_r(a)} \subset G$. Definer $m > 0$ ved $r + m = \mathrm{dist}(a, G^c)$ og $R = r + \frac{m}{2}$, således at $\overline{B_R(a)} \subset G$. Betingelserne for at anvende Cauchys integralformel for den k'te afledede er opfyldt, da det i første del af beviset er vist, at $f \in \mathcal{H}(G)$, hvor $G \subseteq \mathbb{C}$ er en åben delmængde. Hvis γ er $\partial B_R(a)$, fås, at

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw$$

for $z \in D \subset B_R(a)$. For et fast punkt $z \in D \subset B_R(a)$ og et fast k er nævneren i integranden konstant for hvert punkt $w \in \gamma^*$. Ifølge antagelsen konvergerer f_n mod f, så i henhold til definition 1.41 konvergerer $\{f_n\}$ ligeligt mod f på alle kompakte delmængder af G og dermed også på γ. Det vil sige, at $\{f_n - f\}$ konvergerer ligeligt mod 0, og ved udnyttelse af disse bemærkninger fås

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(w) - f(w) dw = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z), \end{aligned}$$

det vil sige, at $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ ligeligt i $\overline{B_r(a)}$, da det sidste lighedstegn netop gælder for $z \in D = \overline{B_r(a)}$. Hvis K er en vilkårlig kompakt delmængde af G, og $0 < r < d(K, \partial G)$, hvor $d(K, \partial G) = \inf\{d(z, z') : z \in K, z' \in \partial G\}$, findes der $\{a_1, \ldots, a_N\} \subseteq K$, således at $K \subset \bigcup_{j=1}^N B_r(a_j)$, disse åbne kugler udgør altså en endelig åben overdækning af K. Det er vist ovenfor, at $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ ligeligt i en vilkårlig lukket kugle $\overline{B_r(a)} \subset G$. Således er der en tilsvarende ligelig konvergens i hver af de åbne kugler $B_r(a_j) \subset G$ og dermed også på K. Det gælder altså for alle kompakte delmængder af G, hvilket i henhold til definition 1.41 giver det ønskede resultat. □

Ovenstående sætning viser, at $\mathcal{H}(G)$ indeholder alle sine grænsepunkter, eller med andre ord, at $\mathcal{H}(G)$ er lukket i $C(G, \mathbb{C})$. Da $C(G, \mathbb{C})$ er et fuldstændigt metrisk rum, medfører dette, at $\mathcal{H}(G)$ også er et fuldstændigt metrisk rum, hvilket vises på tilsvarende vis som for $C(G, \mathbb{C})$. Sætningen giver også, at afbildningen $f \mapsto f'$ fra $\mathcal{H}(G)$ ind i sig selv er kontinuert, for hvis $f_n \to f$, gælder $f_n' \to f'$.

Nu indføres nogle begreber, som indgår i Arzela-Ascolis sætning.

Definition 1.43 (Normal)
En mængde $\mathcal{F} \subseteq C(G, \Omega)$ er normal, hvis enhver følge i $\mathcal{F}$ har en delfølge, der konvergerer mod $f \in C(G, \Omega)$.

Dette minder om definitionen på en følgekompakt mængde, dog med den forskel, at for en følgekompakt mængde skal grænsen for enhver følge i mængden tilhøre mængden. Det ses umiddelbart, at hvis $\mathcal{F}$ er normal, er $\bar{\mathcal{F}}$ kompakt.

Definition 1.44 (Ækvikontinuert)
En mængde $\mathcal{F} \subseteq C(G, \Omega)$ er ækvikontinuert i et punkt $z_0 \in G$, hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at der for $|z - z_0| < \delta$ gælder, at $d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ for ethvert $f \in \mathcal{F}$.
En mængde $\mathcal{F} \subseteq C(G, \Omega)$ er ækvikontinuert på en mængde $E \subseteq G$, hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at der for alle $z, z' \in E$ og $|z - z'| < \delta$ gælder, at $d(f(z), f(z')) < \varepsilon$ for ethvert $f \in \mathcal{F}$.

Det samme δ skal altså kunne bruges for alle $f \in \mathcal{F}$. Hvis $\mathcal{F}$ kun består af én funktion f, vil det, at $\mathcal{F}$ er ækvikontinuert i et punkt z_0, blot sige, at f er kontinuert i z_0, hvilket allerede er opfyldt. For samme $\mathcal{F}$ vil det, at $\mathcal{F}$ er ækvikontinuert på en mængde E, sige, at f er ligeligt kontinuert på E. Der er altså en væsentlig forskel mellem de to definitioner. Hvis $\mathcal{F}$ består af flere funktioner, skal der være ligelig kontinuitet både med hensyn til punkter og funktioner. Følgende sætning anføres uden bevis. For bevis, se [Conway, 1978, Theorem VII.1.23].

Sætning 1.45 (Arzela-Ascoli)
En mængde $\mathcal{F} \subseteq C(G, \Omega)$ er normal, hvis og kun hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(i) For ethvert $z \in G$ har mængden $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ en kompakt aflukning i Ω.

(ii) Mængden $\mathcal{F}$ er ækvikontinuert i ethvert punkt i G.

For at opnå en alternativ karakterisering af normale mængder i $\mathcal{H}(G)$ indføres følgende begreb.

Definition 1.46 (Lokalt begrænset)
En mængde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G)$ er lokalt begrænset, hvis der for ethvert punkt $a \in G$ findes konstanter M og $r > 0$, så $B_r(a) \subseteq G$, og så der for alle $f \in \mathcal{F}$ gælder, at

$$|f(z)| \leq M \text{ for } z \in B_r(a).$$

Dette kan også formuleres som, at der for ethvert punkt $a \in G$ eksisterer et $M_a > 0$ og et $r_a > 0$, så $B_{r_a}(a) \subseteq G$, og så $\mathcal{F}$ er ligeligt begrænset af M_a på $B_{r_a}(a)$.

Lemma 1.47
En mængde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G)$ er lokalt begrænset, hvis og kun hvis der for enhver kompakt mængde $K \subset G$ findes en konstant M, så

$$|f(z)| \leq M \text{ for alle } f \in \mathcal{F} \text{ og alle } z \in K.$$

Bevis
Antag først, at $\mathcal{F}$ er lokalt begrænset, det vil sige, at $\mathcal{F}$ er ligeligt begrænset af M_a på $B_{r_a}(a) \subseteq G$ for ethvert punkt $a \in G$. For enhver kompakt delmængde K af G findes en åben overdækning bestående af en åben kugle $B_{r_b}(b) \subseteq G$ om hvert punkt $b \in K$, altså $K \subseteq \bigcup_{b \in K} B_{r_b}(b)$. Per antagelse er $\mathcal{F}$ ligeligt begrænset af M_b på $B_{r_b}(b) \subseteq G$. Der findes en endelig deloverdækning, så $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{r_{b_i}}(b_i)$, og dermed er $\mathcal{F}$ ligeligt begrænset på K af $M = \max_{i \in \{1,\ldots,N\}} M_{b_i}$.

Antag omvendt, at $\mathcal{F}$ er ligeligt begrænset på enhver kompakt mængde $K \subseteq G$, det vil sige, at der findes en konstant M, så $|f(z)| \leq M$ for alle $f \in \mathcal{F}$ og alle $z \in K$. For enhver åben kugle om et punkt $a \in G$, så $B_r(a) \subseteq G$, gælder der, at $\overline{B_r(a)} \subseteq G$. Sidstnævnte kugle er lukket og begrænset og dermed kompakt, så per antagelse er $\mathcal{F}$ ligeligt begrænset på enhver af disse $\overline{B_r(a)}$ og dermed også på $B_r(a)$, hvilket netop vil sige, at $\mathcal{F}$ er lokalt begrænset. □

Sætning 1.48 (Montel)
En mængde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G)$ er normal, hvis og kun hvis $\mathcal{F}$ er lokalt begrænset.

Bevis

Først vises det ved et modstridsbevis, at normal medfører lokalt begrænset. Lad $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G) \subseteq C(G, \Omega)$ være normal, og antag, at $\mathcal{F}$ ikke er lokalt begrænset. Det vil sige, at der findes en kompakt mængde $K \subset G$, så der for enhver konstant M findes et $f \in \mathcal{F}$ og et $z \in K$, så $|f(z)| > M$. Med andre ord eksisterer der en kompakt mængde $K \subset G$, så $\sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in K\} = \infty$, hvilket vil sige, at der må findes en følge $\{f_n\}$ i $\mathcal{F}$, så $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$. Da $\mathcal{F}$ er normal, findes der per definition en delfølge $\{f_{n_k}\}$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G)$ og en funktion $f \in C(G, \Omega)$, så $f_{n_k} \to f$. Ifølge sætning 1.42 er f så analytisk, altså $f \in \mathcal{H}(G)$. Ovenstående giver, at

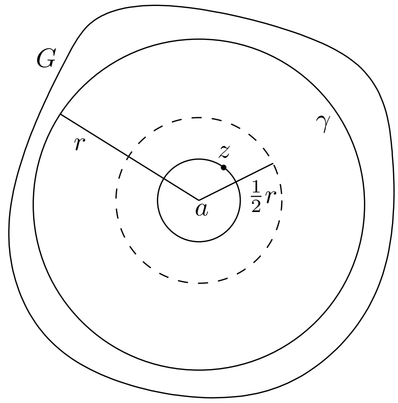
$$\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0 \tag{1.6}$$

for $k \to \infty$. Delfølgen opfylder analogt med følgen, at $\sup\{|f_{n_k}(z)| : z \in K\} \geq n_k$. Antages det, at $|f(z)| \leq M$ for $z \in K$, kan der foretages følgende omskrivninger. Denne antagelse kan gøres, da en kontinuert funktion på en kompakt mængde antager sit maksimum, og det bemærkes, at den heller ikke er i modstrid med antagelsen om, at $\mathcal{F}$ ikke er lokalt begrænset. Omskrivningerne er

$$\begin{aligned} n_k &\leq \sup\{|f_{n_k}(z)| : z \in K\} = \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z) + f(z)| : z \in K\} \\ &\leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z)| : z \in K\} \\ &\leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + \sup\{|f(z)| : z \in K\} \\ &\leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M. \end{aligned}$$

Det følger af (1.6), at højresiden går mod M for $k \to \infty$. Da venstresiden går mod ∞ for $k \to \infty$, er dette en modstrid, så $\mathcal{F}$ må være lokalt begrænset.

For at vise, at lokalt begrænset medfører normal, antages det nu, at $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G)$ er lokalt begrænset. Til at vise, at $\mathcal{F}$ så er normal, anvendes Arzela-Ascolis sætning, sætning 1.45. Punkt *(i)* i sætningen gælder, da alle funktionerne f i den normale familie $\mathcal{F}$ per definition er ligeligt begrænsede i punkter i en åben cirkelskive omkring ethvert punkt i den åbne mængde G. Aflukningen af mængden $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ er dermed lukket og begrænset og dermed kompakt i $\mathbb{C}$ for ethvert $z \in G$. Nu vises punkt *(ii)*. Vælg et punkt $a \in G$ og et $\varepsilon > 0$. Mængden $\mathcal{F}$ er antaget at være lokalt begrænset, så dermed findes der per definition et $r > 0$ og et $M > 0$, så $\overline{B_r(a)} \subset G$ og $|f(z)| \leq M$ for alle $z \in \overline{B_r(a)}$ og alle $f \in \mathcal{F}$. Lad $|z - a| < \frac{1}{2}r$, og lad $f \in \mathcal{F}$. Ved at anvende Cauchys integralformel med kurven $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, der gennemløber $\partial B_r(a)$ en gang i positiv omløbsretning, fås nedenstående. Situationen er illustreret på figur 1.5. Betingelserne for at anvende Cauchys integralformel i dette tilfælde er opfyldt, da $f \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(G)$, hvor $G \subseteq \mathbb{C}$ er en åben delmængde, $\overline{B_r(a)} \subset G$



Figur 1.5: Kurven γ, der anvendes i beviset for sætning 1.48.

som konstateret ovenfor, og $a, z \in B_r(a)$. Der gælder altså, at

$$\begin{aligned}
|f(a) - f(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-a} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)(w-z)}{(w-a)(w-z)} dw - \int_\gamma \frac{f(w)(w-a)}{(w-z)(w-a)} dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)((w-z)-(w-a))}{(w-a)(w-z)} dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \gamma^*} \left| \frac{f(w)}{(w-a)(w-z)} \right| \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt \cdot |a-z| \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r \frac{1}{2} r} 2\pi r |a-z| = \frac{2M}{r} |a-z|.
\end{aligned}$$

For $|a-z| < \delta = \frac{r}{2M}\varepsilon$ fås fra ovenstående, at

$$|f(a) - f(z)| \leq \frac{2M}{r}|a-z| < \frac{2M}{r}\delta = \frac{2M}{r}\frac{r}{2M}\varepsilon = \varepsilon.$$

Det følger, at $|a-z| < \delta$ medfører, at $|f(a) - f(z)| < \varepsilon$ for alle $f \in \mathcal{F}$. Punktet $a \in G$ er tilfældigt valgt, så det vil sige, at $\mathcal{F}$ er ækvikontinuert i ethvert punkt i G, hvilket er punkt *(ii)* i Arzela-Ascolis sætning. Dermed følger det af denne, at $\mathcal{F}$ er normal, og den sidste implikation og dermed hele Montels sætning er bevist. □

1.5 Riemanns afbildningssætning

Ud over at Riemanns afbildningssætning har selvstændig interesse, vil den også spille en afgørende rolle i definitionen af den generelle Kreisskonstant.

Sætning 1.49 (Rouché)
Lad f og g være meromorfe på en åben omegn af $\overline{B_r(a)}$ uden nulpunkter eller poler

på $\partial B_r(a)$. Hvis Z_f, Z_g og P_f, P_g er antallet af nulpunkter hhv. poler af f og g i $B_r(a)$, talt med multiplicitet, og hvis

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

på $\partial B_r(a)$, så er

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

Bevis
Fra antagelsen fås, at

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1$$

på $\partial B_r(a)$. Hvis $\frac{f(z)}{g(z)}$ er et positivt reelt tal, fås en modstrid, så den meromorfe funktion $\frac{f}{g}$ afbilder $\partial B_r(a)$ på $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Hvis l er en kontinuert determination af logaritmen på Ω, er $l\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)$ veldefineret for alle $z \in \partial B_r(a)$. Af kædereglen fås

$$\left(l \circ \frac{f}{g}\right)'(z) = l'\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \left(\frac{f}{g}\right)'\left(\frac{f}{g}\right)^{-1}(z),$$

så $l\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)$ er en veldefineret stamfunktion til $\left(\frac{f}{g}\right)'\left(\frac{f}{g}\right)^{-1}$ på en åben omegn af $\partial B_r(a)$. Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right) dz \\ &= (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g), \end{aligned}$$

hvor sidste lighed følger af argumentprincippet [Conway, 1978, Theorem V.3.4]. □

Sætning 1.50 (Hurwitz)
Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(G)$ konvergere mod f med metrikken fra $C(G, \Omega)$. Hvis $f \not\equiv 0$, $\overline{B_r(a)} \subset G$, og $f(z) \neq 0$ for $z \in \partial B_r(a)$, da eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$ medfører, at f og f_n har samme antal nulpunkter i $B_r(a)$.

Bevis
Da $f(z) \neq 0$ for $z \in \partial B_r(a)$, er

$$\delta = \inf\{|f(z)| : z \in \partial B_r(a)\} > 0.$$

Da $\partial B_r(a)$ er en kompakt mængde, konvergerer $\{f_n\}$ ligeligt mod f på denne mængde. Derfor findes et $N \in \mathbb{N}$, så

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\delta < |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|$$

for $n \geq N$ og $z \in \partial B_r(a)$. Af Rouchés sætning følger det nu, at f og f_n har samme antal nulpunkter i $B_r(a)$. □

Korollar 1.51
Hvis $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(G)$ konvergerer mod f, og $f_n(z) \neq 0$ for alle n og alle $z \in G$, da er $f \equiv 0$ eller $f(z) \neq 0$ for alle $z \in G$.

Lemma 1.52 (Schwarz)
Lad f være analytisk på B_1 med $f(B_1) \subseteq B_1$ og $f(0) = 0$. Så er $|f'(0)| \leq 1$, og $|f(z)| \leq |z|$ for alle $z \in B_1$. Hvis enten $|f'(0)| = 1$, eller $|f(z)| = |z|$ for et $z \neq 0$, eksisterer en konstant c med $|c| = 1$, så $f(z) = cz$ for alle $z \in B_1$.

Bevis
Definer $g\colon B_1 \to \mathbb{C}$ ved $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ og $g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$. Dermed er g analytisk på B_1. Lad $z \in \overline{B}_r \subset B_1$. Anvendes absolut maksimumprincippet på $\frac{f(z)}{z}$ fås, at der eksisterer et $z_r \in \partial B_r$, så

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \left|\frac{f(z_r)}{z_r}\right| \leq \frac{1}{r}.$$

For $r \to 1$ er $|g(z)| \leq 1$ for alle $z \in B_1$. Men så er $|f(z)| \leq |z|$, og $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.
Hvis $|f(z)| = |z|$ for et $z \neq 0$ i B_1, eller $|f'(0)| = 1$, så antager $|g|$ sit maksimum i B_1. Men jf. kontrapositionen af lokalt maksimumprincippet er g dermed konstant lig c, med $|c| = 1$. Men så er $f(z) = cz$. □

Lemma 1.53
Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og enkeltsammenhængende. Da eksisterer for enhver funktion $f \in \mathcal{H}(G)$, som opfylder $f(z) \neq 0$ for alle $z \in G$, følgende funktioner:

(i) Der eksisterer $g \in \mathcal{H}(G)$, så $f(z) = \exp(g(z))$ for alle $z \in G$.

(ii) For ethvert $n \in \mathbb{N}$ eksisterer $h \in \mathcal{H}(G)$, så $f(z) = h(z)^n$ for alle $z \in G$.

Bevis
Da f er forskellig fra nul på G, er funktionen $\frac{f'}{f}$ holomorf på G. Da G er enkeltsammenhængende, eksisterer en funktion $\psi \in \mathcal{H}(G)$, så $\psi' = \frac{f'}{f}$. Betragt nu funktionen $\psi_1(z) = \exp(\psi(z))$. Denne er holomorf og forskellig fra nul på G. Således er funktionen $\frac{f}{\psi_1}$ holomorf med differentialkvotient

$$\frac{f'\psi_1 - f\psi_1'}{\psi_1^2} = \frac{f'\exp(\psi) - \exp(\psi)f'}{\psi_1^2} = 0,$$

og således gælder $f(z) = c\psi_1(z) = \exp(\psi(z) + c')$ for alle $z \in G$, hvilket var kravet til g. Når $\psi_1 \in \mathcal{H}(G)$, er $\exp(\frac{1}{n}(\psi_1 + c'))$ også holomorf, og der gælder dermed $\exp(\frac{1}{n}(\psi_1 + c'))^n = \exp(\psi_1 + c') = f$, hvilket var det ønskede. □

Lemma 1.54
For $f \in \mathcal{H}(G)$ er funktionen

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{for } w \neq z \\ f'(z) & \text{for } w = z \end{cases}$$

kontinuert på $G \times G$.

Bevis
Da f er kontinuert, er g kontinuert, når $z \neq w$. Vælg nu $a \in G$ og $\varepsilon > 0$. Da eksisterer et $r > 0$, så $B_r(a) \subset G$, og $|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon$ for alle $\xi \in B_r(a)$, da f' er kontinuert. For $z, w \in B_r(a)$ defineres den konvekse linearkombination $\xi(t) = z + (w - z)t$ for $t \in [0, 1]$, som også ligger i $B_r(a)$. Der gælder for $z \neq w$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f'(\xi(t)) - f'(a))\,dt &= \frac{1}{w-z}\int_0^1 f'(\xi(t))\xi'(t)dt - f'(a)\\ &= \frac{1}{w-z}[f(\xi(t))]_0^1 - f'(a)\\ &= \frac{1}{w-z}(f(w) - f(z)) - f'(a)\\ &= g(z,w) - g(a,a),\end{aligned}$$

og for $z = w$, og dermed $\xi(t) = z$,

$$\int_0^1 (f'(\xi(t)) - f'(a))dt = \int_0^1 (f'(z) - f'(a))dt = g(z,w) - g(a,a).$$

Da $|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon$, fås

$$|g(z,w) - g(a,a)| \leq \int_0^1 |f'(\xi(t)) - f'(a)|dt \leq \varepsilon,$$

hvilket viser det ønskede. □

Definition 1.55 (Orden af nulpunkt)
Hvis $f \in \mathcal{H}(G)$ opfylder $f(a) = 0$ for et $a \in G$ gælder enten $f^{(n)}(a) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ eller der eksisterer et mindste n, således at $f^{(n)}(a) \neq 0$. I sidstnævnte tilfælde siges a at være et nulpunkt af orden n for f.

Det er velkendt, at hvis a er et nulpunkt af orden n for f, eksisterer der en funktion $g \in \mathcal{H}(G)$, hvor $g(a) \neq 0$, så $f(z) = (z-a)^n g(z)$ for alle $z \in G$.

Lemma 1.56
Lad $f \in \mathcal{H}(G)$ være en ikke-konstant funktion, der opfylder $f(z_0) = w_0$. Hvis m er ordenen af nulpunktet for $f - w_0$ i z_0, eksisterer der en åben mængde $\mathcal{O} \subseteq G$, der indeholder z_0, og en funktion $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$, så der gælder:

(i) $f(z) = w_0 + \varphi(z)^m$ *for alle* $z \in \mathcal{O}$.

(ii) φ' *har ingen nulpunkter i* $\mathcal{O}$.

(iii) φ *er injektiv på* $\mathcal{O}$.

(iv) Der eksisterer et $\xi \in f(\mathcal{O})$, så $f(z) = \xi$ for m forskellige værdier af z i $\mathcal{O}$, og ingen værdi antages oftere end m gange af f på $\mathcal{O}$.

Bevis
Der eksisterer en åben og enkeltsammenhængende mængde $\mathcal{O}_1 \subseteq G$, så $z_0 \in \mathcal{O}_1$, og så $f(z) \neq w_0$ for $z \in \mathcal{O}_1 \setminus \{z_0\}$, da f er holomorf. Der eksisterer tillige en funktion $g \in \mathcal{H}(G)$, så $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$, hvor $g(z) \neq 0$ for $z \in \mathcal{O}_1$. Da eksisterer

ifølge lemma 1.53 en funktion $h \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_1)$, så $g(z) = \exp(h(z))$ for alle $z \in \mathcal{O}_1$. For $\varphi(z) = (z - z_0)\exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)$ gælder da

$$\begin{aligned} f(z) - w_0 &= (z - z_0)^m g(z) \\ &= (z - z_0)^m \exp(h(z)) \\ &= \left((z - z_0)\exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)\right)^m \\ &= \varphi(z)^m, \end{aligned}$$

hvilket giver punkt *(i)*. Da $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_1)$, og $\varphi'(z_0) = \exp\left(\frac{h(z_0)}{m}\right) \neq 0$, eksisterer en åben mængde $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$, så $z_0 \in \mathcal{O}_2$, og så $\varphi'(z) \neq 0$ for $z \in \mathcal{O}_2$, da φ' er kontinuert, hvilket er punkt *(ii)*.

For φ defineres analogt med lemma 1.54 funktionen g, og da g er kontinuert, og $|\varphi'(z_0)| > 0$, eksisterer en åben mængde $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_2$, så $z_0 \in \mathcal{O}$, og så

$$|g(z_0, z_0) - g(z_2, z_1)| \leq \frac{1}{2}|\varphi'(z_0)|$$

for alle $z_1, z_2 \in \mathcal{O}$. Da gælder $|g(z_0, z_0)| - |g(z_2, z_1)| \leq \frac{1}{2}|\varphi'(z_0)|$, og da $g(z_0, z_0) = \varphi'(z_0)$, fås for $z_1 \neq z_2$

$$\frac{1}{2}|\varphi'(z_0)| \leq \frac{|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)|}{|z_2 - z_1|},$$

hvilket giver

$$|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| \geq \frac{1}{2}|\varphi'(z_0)||z_2 - z_1|,$$

og da $|\varphi'(z_0)| > 0$, viser dette, at φ er injektiv på $\mathcal{O}$, hvilket er punkt *(iii)*.

Der gælder $f(z) - w_0 = \varphi(z)^m$, $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$, og da $f(z_0) - w_0 = 0$, gælder $\varphi(z_0) = 0$, jf. punkt *(i)*. Da eksisterer ifølge åben afbildningssætningen, sætning 1.39, et $r > 0$, så $\overline{B_r} \subset \varphi(\mathcal{O})$, og dermed eksisterer $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in \mathcal{O}$, så $\varphi(\zeta_k) = re^{i\frac{2\pi k}{m}}$, hvilket giver $f(\zeta_k) - w_0 = \varphi(\zeta_k)^m = r^m$, og dermed $f(\zeta_k) = r^m + w_0$. Bemærk, at der eksisterer netop m værdier af ζ, der opfylder dette, da φ er injektiv ifølge punkt *(iii)*. Tilsvarende gælder $\varphi(z_i)^m = \varphi(z_j)^m$, hvis og kun hvis $\varphi(z_i)$ og $\varphi(z_j)$ er m'te rødder, hvilket er opfyldt for højst m værdier af $z \in \mathcal{O}$. Dette viser punkt *(iv)*. □

Lemma 1.57
Hvis $f \in \mathcal{H}(G)$ er injektiv, gælder $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in G$.

Bevis
Antag, at der eksisterer et $z_0 \in G$, så $f'(z_0) = 0$. Da eksisterer en åben omegn $\mathcal{O}$ af z_0 og en funktion $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$, så $f(z) = w_0 + \varphi(z)^m$ for et $m \in \mathbb{N}$ ifølge lemma 1.56, punkt *(i)*, og dermed er $f'(z) = m\varphi(z)^{m-1}\varphi'(z)$ for $z \in \mathcal{O}$. Hvis $m = 1$, fås ifølge lemma 1.56, punkt *(ii)*, at $0 = f'(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$, hvilket er en modstrid. Hvis $m > 1$, er f ikke injektiv på $\mathcal{O}$ ifølge lemma 1.56, punkt *(iv)*, hvilket også er en modstrid, og der eksisterer dermed ikke $z_0 \in G$, så $f'(z_0) = 0$. □

Bemærk, at ovenstående lemma specielt gælder for Möbiustransformationer, hvilket også kan eftervises direkte.

Sætning 1.58
Betragt Möbiustransformationen

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Hvis $|a| < 1$, *er* φ_a *en bijektion på* B_1 *med invers* φ_{-a}. *Desuden gælder*

(i) $\varphi_a(\partial B_1) = \partial B_1$

(ii) $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$

(iii) $\varphi_a'(a) = (1-|a|^2)^{-1}$.

Bevis
Bemærk, at φ_a er holomorf på B_1 og kontinuert på $\overline{B_1}$. Da gælder ifølge absolut maksimumprincippet, lemma 1.37, at $|\varphi_a|$ antager sit maksimum et sted på ∂B_1. Da der gælder

$$|\varphi_a(e^{it})| = \left|\frac{e^{it}-a}{1-\bar{a}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it}-a}{e^{it}(e^{-it}-\bar{a})}\right| = 1,$$

fås $\varphi_a(B_1) \subseteq B_1$. Det vises let, at φ_{-a} er invers på B_1 for φ_a, der dermed er en bijektion på B_1. Der gælder

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2},$$

og deraf fås punkt *(ii)* og *(iii)*. □

Sætning 1.59
Lad $f \in \mathcal{H}(B_1)$ *være bijektiv på* B_1, *og* $f(a) = 0$. *Da eksisterer et* $c \in \mathbb{C}$, *hvor* $|c| = 1$, *så* $f = c\varphi_a$.

Bevis
Lad f være givet som ovenfor, og definer

$$g(z) = \varphi_a(f^{-1}(z)) \quad \text{og} \quad h(z) = f(\varphi_{-a}(z)).$$

Disse funktioner opfylder kravene i Schwarz' lemma, lemma 1.52, og derved fås

$$1 \geq |h'(0)| = |f'(a)||\varphi_a'(a)^{-1} \text{ og derved } |f'(a)| \leq (1-|a|^2)^{-1}, \tag{1.7}$$

da $\varphi_{-a}'(z) = \varphi_a'(\varphi_{-a}(z))^{-1}$. Analogt fås

$$1 \geq |g'(0)| = |(f^{-1})'(0)|(1-|a|^2)^{-1} \text{ og derved } |(f^{-1})'(0)| \leq (1-|a|^2). \tag{1.8}$$

Der gælder derved $1 = |f'(a)||(f^{-1})'(0)| \leq 1$, så der må gælde lighed i (1.7) og (1.8). Da fås $|h'(0)| = 1$, så der eksisterer ifølge Schwarz' lemma, lemma 1.52, en konstant $|c| = 1$, så $cz = f(\varphi_{-a}(z))$, og dermed $c\varphi_a(z) = f(z)$. □

Den konforme ækvivalens mellem enkeltsammenhængende områder, som Riemanns afbildningssætning garanterer, er en egenskab, der kun hører til enkeltsammenhængende områder. For eksempel eksisterer der en analytisk bijektion mellem to ringområder $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ og $\{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$, hvis og kun hvis $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$, jf. [Rudin, 1987, Theorem 14.22].

Sætning 1.60 (Riemanns afbildningssætning)
Lad $G \subset \mathbb{C}$ være åben og enkeltsammenhængende. Til ethvert $a \in G$ eksisterer da en entydigt bestemt funktion $f \in \mathcal{H}(G)$, som opfylder

(i) $f(a) = 0,\ f'(a) > 0$

(ii) f *er injektiv*

(iii) $f(G) = B_1$.

Bevis
Definer mængden

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(G) : f \text{ er injektiv}, f(a) = 0, f'(a) > 0, f(G) \subseteq B_1\}.$$

Først vises, at $\mathcal{F}$ ikke er tom. Vælg $b \in \mathbb{C} \setminus G$. Da er $z \mapsto z - b$ holomorf og forskellig fra nul på G, hvormed der ifølge lemma 1.53 eksisterer en funktion $g \in \mathcal{H}(G)$, så $g(z)^2 = z - b$. Bemærk, at $g(z) \neq 0$ for alle $z \in G$, og da $1 = 2g(z)g'(z)$ for alle z, er $g'(z)$ således også forskellig fra nul. Da $g(z)^2 = z - b$, gælder

$$g(z_1)^2 = g(z_2)^2 \Leftrightarrow z_1 = z_2, \tag{1.9}$$

hvilket viser, at g er injektiv. Ifølge åben afbildningssætningen, sætning 1.39, eksisterer et $r > 0$, så $\overline{B_r(g(a))} \subset g(G)$. Antag, at der eksisterer et $\zeta \in G$, så $g(\zeta) \in \overline{B_r(-g(a))}$. Da gælder

$$r \geq |g(\zeta) + g(a)| = |-g(\zeta) - g(a)|,$$

altså $-g(\zeta) \in \overline{B_r(g(a))}$, og dermed eksisterer et $w \in G$, så $-g(\zeta) = g(w)$. Dermed er $\zeta = w$ ifølge (1.9), men da må der gælde $g(\zeta) = 0$, hvilket strider imod $g(z) \neq 0$ for alle $z \in G$. Således gælder $g(G) \cap \overline{B_r(-g(a))} = \emptyset$.

Ifølge sætning 1.35 eksisterer en Möbiustransformation T, så $T(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{B_r(-g(a))}) = B_1$. Definer nu $g_1 = T \circ g$. Da $|\alpha| < 1$, er g_1 injektiv og holomorf på G, og $g_1(G) \subseteq B_1$. For $\alpha = g_1(a)$ vælges $g_2 = \varphi_\alpha \circ g_1$, jf. sætning 1.58. Da er g_2 injektiv og holomorf på G, og tillige er $g_2(G) \subseteq B_1$, og $g_2(a) = 0$. Da både T' og g' er forskellige fra nul, gælder $g_2'(a) \neq 0$, og der eksisterer dermed et $c \in \mathbb{C}$, hvor $|c| = 1$, så $cg_2'(a) > 0$. Da ligger $g_3 = cg_2$ i $\mathcal{F}$.

Det vises nu, at $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$. Lad $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$, og $f_n \to f$. Det skal derfor vises, at $f \in \mathcal{F}$ eller $f \equiv 0$. Der gælder $f(a) = 0$ og $f'(a) \geq 0$ ifølge sætning 1.42. For vilkårlige $z_1, z_2 \in G$, hvor $z_1 \neq z_2$, defineres $\nu = f(z_1)$ og $\nu_n = f_n(z_1)$. Der eksisterer et $r > 0$, så $z_1 \notin \overline{B_r(z_2)}$, dvs. $f_n(z) - \nu_n \neq 0$ for $z \in \overline{B_r(z_2)}$ ifølge definitionen af $\mathcal{F}$. Da $\overline{B_r(z_2)}$ er kompakt, konvergerer $f_n(z) - \nu_n$ ligeligt mod $f - \nu$ på $\overline{B_r(z_2)}$, og hvis $f \not\equiv \nu$, gælder ifølge korollar 1.51, at $f(z) \neq \nu$ på $\overline{B_r(z_2)}$. Da gælder, at $f(z_1) \neq f(z_2)$, og da dette gælder for vilkårlige z_1, z_2, er f injektiv, og dermed er $f'(z) \neq 0$ ifølge lemma 1.57. Hvis $f \equiv \nu$, må dette udvide til hele G, og dermed $f \equiv \nu = f(a) = 0$. Da $|f_n(z)| < 1$, gælder $|f(z)| \leq 1$. Antag, at der eksisterer et z, så $|f(z)| = 1$. Der eksisterer dermed et $r > 0$, så $B_r(f(z)) \subset f(G)$, og dermed eksisterer et $\mu \in f(G)$, så $|\mu| > 1$, hvilket er en modstrid, når f_n er punktvis konvergent. Altså må der gælde $f(G) \subseteq B_1$, og dermed $f \in \mathcal{F}$, hvormed $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$.

Ifølge Montels sætning, sætning 1.48, er $\mathcal{F}$ normal, da $|f(z)| < 1$ for alle $f \in \mathcal{F}$ og $z \in G$. Altså er $\overline{\mathcal{F}}$ kompakt, og da funktionen $f \mapsto f'(a)$ er kontinuert fra $\mathcal{H}(G)$ til $\mathbb{R}$, antager funktionen sit maksimum, dvs. der eksisterer et $f \in \mathcal{F}$, så $f'(a) \geq g'(a)$ for alle $g \in \mathcal{F}$.

Det skal nu vises, at $f(G) = B_1$. Antag, at $\omega \in B_1 \setminus f(G)$. Da er afbildningen

$$\varphi_\omega(f(z)) = \frac{f(z) - \omega}{1 - \bar{\omega} f(z)}$$

analytisk og forskellig fra nul på G, og der eksisterer dermed ifølge lemma 1.53 en funktion $h \in \mathcal{H}(G)$, så

$$h(z)^2 = \frac{f(z) - \omega}{1 - \bar{\omega} f(z)}, \tag{1.10}$$

ifølge sætning 1.58 gælder så $h(G) \subseteq B_1$. Definer nu

$$g(z) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)} h(z)}.$$

Der gælder således også $g(G) \subseteq B_1$, og desuden $g(a) = 0$, så ved hjælp af sætning 1.58 er $g \in \mathcal{F}$. Der gælder $g'(a) = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2}$, men $|h(a)|^2 = |\omega|$, da $f(a) = 0$, og ifølge (1.10) gælder $2h(a)h'(a) = (1 - |\omega|^2) f'(a)$. Bemærk, at for reelle tal $a \neq b$ gælder $2ab < a^2 + b^2$. Der gælder således

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{|h'(a)|}{1 - |\omega|} \\ &= \frac{(1 - |\omega|^2) f'(a)}{2|h(a)|(1 - |\omega|)} \\ &= \frac{(1 - |\omega|^2) f'(a)}{(1 - |\omega|) 2\sqrt{|\omega|}} \\ &= f'(a) \frac{(1 + |\omega|)}{2\sqrt{|\omega|}} \\ &> f'(a), \end{aligned}$$

hvilket er en modstrid, da $f'(a)$ var maksimal, og dermed er $f(G) = B_1$.

Det vises nu, at f er den eneste funktion med disse egenskaber. Antag, at g også opfylder det ønskede. Da er $f \circ g^{-1} \colon B_1 \to B_1$ en holomorf bijektion, og da $f \circ g^{-1}(0) = f(a) = 0$, eksisterer dermed ifølge sætning 1.59 en konstant $|c| = 1$, så $f \circ g^{-1}(z) = cz$, og dermed $f(z) = cg(z)$. Da både f og g opfylder punkt *(i)*, og $f'(a) = cg'(a)$, må der da gælde $c = 1$. $\square$

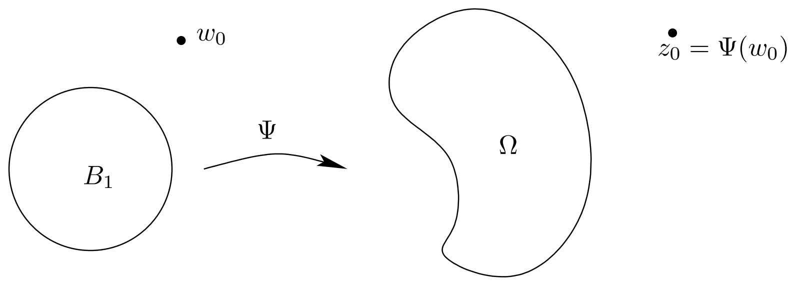
Bemærk, at Ω^c er enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}_\infty$, hvis og kun hvis Ω er enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}$ ifølge [Conway, 1995, Proposition 13.1.1]. Notationen $\overline{B}_r^c$ benyttes for mængden $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$.

Sætning 1.61 (Riemanns afbildningssætning på $\mathbb{C}_\infty$)
Lad Ω være kompakt i $\mathbb{C}$, og Ω^c være enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}_\infty$. Da eksisterer en afbildning $\Phi \colon \Omega^c \to \overline{B}_1^c$, så

(i) *Φ er konform*

(ii) $\Phi(\infty) = \infty$

(iii) $\Phi(z) = dz + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$*, hvor $d > 0$ for store $z \in \Omega^c$*



Figur 1.6: Afbildningen Ψ.

(iv) *Φ er invertibel med invers Ψ, der opfylder $\Psi(w) = cw + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n}$, hvor $c = d^{-1}$ for store $w \in \overline{B}_1^c$,*

og afbildningen $\Phi\colon \Omega^c \to \overline{B}_1^c$ er entydigt bestemt ved kravene (i)–(iv).

Afbildningen Ψ er illustreret på figur 1.6.

Bevis
Der eksisterer et $d \in \mathbb{C}$, så $0 \in \Omega - d$, så for funktionerne $f_1(z) = z + d$ og $f_2(z) = z^{-1}$ gælder $\infty \notin f_2(f_1(\Omega^c))$ og $f_2(f_1(\infty)) = 0$. Da $f_2 \circ f_1$ er en Möbiustransformation, er denne en konform bijektion ifølge sætning 1.22, og $f_2(f_1(\Omega^c))$ er enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}$. Da eksisterer ifølge Riemanns afbildningssætning, sætning 1.60, en konform bijektion $f\colon f_2(f_1(\Omega^c)) \to B_1$, så $f(0) = 0$ og $f'(0) > 0$. Betragt nu funktionen $\Phi = f_2 \circ f \circ f_2 \circ f_1$. Dette er en konform bijektion ifølge lemma 1.19, og den opfylder $\Phi(\infty) = f(0)^{-1} = \infty$, hvilket giver punkt *(i)* og *(ii)*.

Da $\Phi(\infty) = \infty$, gælder $\lim_{z \to 0} \Phi(z^{-1}) = \infty$. Ved brug af L'Hôpitals regel gælder

$$\lim_{z \to 0} z\Phi(z^{-1}) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{f\left(\frac{z}{dz+1}\right)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{f'\left(\frac{z}{dz+1}\right)} = \frac{1}{f'(0)} \in (0, \infty),$$

og dermed er $z\Phi(z^{-1})$ analytisk på en åben omegn af 0, så $h_1(z) = z\Phi(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, hvor $h_1(0) = a_0 = \frac{1}{f'(0)} > 0$, og dermed er $\Phi(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, hvoraf punkt *(iii)* følger efter omnummerering.

Når $\Phi = f_2 \circ f \circ f_2 \circ f_1$, og $f_2(f_2(z)) = z$, må der gælde $\Psi = f_1^{-1} \circ f_2 \circ g \circ f_2$, hvor g er invers for f. Bemærk, at $f_1^{-1}(z) = z - d$, og dermed

$$\Psi(z) = \frac{1}{g(z^{-1})} - d.$$

Da $\Phi(\infty) = \infty$, gælder også $\Psi(\infty) = \infty$, og dermed er $\lim_{z \to 0} \Psi(z^{-1}) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{g(z)} - d = \infty$. Der gælder dog

$$\lim_{z \to 0} z\Psi(z^{-1}) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{g(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{g'(z)} = f'(0) \in (0, \infty),$$

hvor sidste lighed følger af sætning 1.12, og dermed er funktionen $h_2(z) = z\Psi(z^{-1})$ analytisk, og punkt *(iv)* følger analogt med punkt *(iii)*.

Det står nu tilbage at vise, at Φ og Ψ er entydigt bestemte ved kravene *(i)*-*(iv)*. Antag at $\widetilde{\Phi}$ og $\widetilde{\Psi}$ også opfylder det ønskede. At $\widetilde{\Psi}$ er konform på $\overline{B}_1^c$ i $\mathbb{C}_\infty$ giver, at $\widetilde{\Psi}(w^{-1})$ er holomorf for $0 < |w| < 1$ ind i $\mathbb{C}$. Dermed er funktionen $g(w) =$

$\Phi(\widetilde{\Psi}(w^{-1}))^{-1}$ holomorf for $0 < |w| < 1$. Der gælder

$$\lim_{w\to 0} g(w) = \lim_{w\to\infty} \Phi(\widetilde{\Psi}(w))^{-1} = 0,$$

hvormed g udvider til en holomorf funktion på B_1. Bemærk, at g er en bijektion på B_1, og der gælder dermed ifølge sætning 1.59, at der eksisterer $\xi \in \mathbb{C}$, hvor $|\xi| = 1$, så $g(w) = \xi w$ for alle $w \in B_1$. Da gælder $\Phi(\widetilde{\Psi}(w^{-1})) = (\xi w)^{-1}$ for alle $w \in B_1$, og dermed $\Phi(\widetilde{\Psi}(w)) = \frac{w}{\xi}$ for $w \in \overline{B}_1^c$. For alle $w \in \overline{B}_1^c$ eksisterer et $z \in \Omega^c$, så $\widetilde{\Phi}(z) = w$, og dermed $\Phi(z) = \frac{\widetilde{\Phi}(z)}{\xi}$ for alle $z \in \Omega^c$, og af punkt *(iii)* følger, at $\xi = 1$, og dermed gælder $\Phi(z) = \widetilde{\Phi}(z)$ for alle $z \in \Omega^c$ og $\Psi(w) = \widetilde{\Psi}(w)$ for alle $w \in \overline{B}_1^c$. □

At bevise randegenskaber for Riemanns afbildningssætning vil føre for vidt, så resultatet anføres med henvisning til [Conway, 1995, Theorem 14.5.6].

Sætning 1.62
Lad G være åben og enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}$, og $f\colon G \to B_1$ være funktionen givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.60. Hvis ∂G er en simpel, lukket kurve, udvider f til en homeomorfi, $f\colon \overline{G} \to \overline{B}_1$, så $f(\partial G) = \partial B_1$.

Tilsvarende, hvis Ω er kompakt i $\mathbb{C}$ og Ω^c er enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}_\infty$, og hvis $\Phi\colon \Omega^c \to \overline{B}_1^c$ er afbildningen givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, så udvider Φ til en homeomorfi $\Phi\colon \Omega^c \cup \partial\Omega \to B_1^c$, så $\Phi(\partial\Omega) = \partial B_1$, hvis $\partial\Omega$ er en simpel, lukket kurve.

KAPITEL 2

KREISSKONSTANTER

I dette kapitel præsenteres og bevises en række resultater med forbindelse til Kreiss-konstanten. Gennem rapporten betegner $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mængden af begrænsede lineære operatorer på det separable Hilbertrum $\mathcal{H}$ over de komplekse tal, og det antages, at $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Spektret for A betegnes $\sigma(A)$, mens $\rho(A)$ betegner resolventmængden, og $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$ resolventen. Det er ligeledes en gennemgående antagelse, at mængden Ω er enkeltsammenhængende og kompakt, så $\sigma(A) \subseteq \Omega \subset \mathbb{C}$, og det indre produkt er lineært i anden variabel. Kapitlet tager sigte på resultater fra [Toh og Trefethen, 1999].

2.1 Pseudospektrer og Kreisskonstanten

For resultater, der ikke er bevist i nærværende rapport, findes bevis eller henvisning i [Trefethen og Embree, 2005].

Definition 2.1 (Pseudospektrum)
For $\varepsilon > 0$ er ε-pseudospektret for $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ givet ved

$$\sigma_\varepsilon(A) = \sigma(A) \cup \{z \in \rho(A) : \|R_A(z)\| > \varepsilon^{-1}\}.$$

Sætning 2.2
Lad $\varepsilon > 0$. Da er følgende tre udsagn ækvivalente:

(i) $z \in \sigma_\varepsilon(A)$.

(ii) Der eksisterer et $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ med $\|B\| < \varepsilon$, så $z \in \sigma(A + B)$.

(iii) $z \in \sigma(A)$, eller der eksisterer et $v \in \mathcal{H}$ med $\|v\| = 1$, så $\|(A - zI)v\| < \varepsilon$.

Det ses således, at $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ kan tolkes som, at z ligger i spektret for en operator tæt ved A, og som, at z næsten er en egenværdi i den forstand givet ved punkt *(iii)*.

Sætning 2.3
(i) For $z \notin \sigma(A)$ gælder

$$\|R_A(z)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}.$$

(ii) Hvis A er normal, gælder endvidere

$$\|R_A(z)\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}.$$

Ovenstående sætning viser, hvorfor pseudospektrer ikke er særlig interessante for normale operatorer.

Definition 2.4 (Numerisk værdimængde)
For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ defineres den numeriske værdimængde for A som

$$W(A) = \{\langle u, Au\rangle : \|u\| = 1\}.$$

Sætning 2.5
For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gælder

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}.$$

I det endeligdimensionale tilfælde er $W(A)$ kompakt, da enhedskuglen i $\mathcal{H}$ er kompakt, og da afbildningen $u \mapsto \langle u, Au\rangle$ er kontinuert, og aflukning er dermed overflødigt.

Definition 2.6 (Spektral- og pseudospektralradius)
For en operator $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ og $\varepsilon > 0$ kaldes

$$r(A) = \sup_{z \in \sigma(A)} |z| \quad \text{og} \quad r_\varepsilon(A) = \sup_{z \in \sigma_\varepsilon(A)} |z|$$

henholdsvis spektralradius og pseudospektralradius for A.

Følgende sætning er et eksempel på, hvorledes pseudospektrer kan give grænser for $\|A^k\|$.

Sætning 2.7
Der gælder for alle $k \in \mathbb{N}$ og $\varepsilon > 0$

$$\|A^k\| \leq \frac{r_\varepsilon(A)^{k+1}}{\varepsilon}.$$

Definition 2.8 (Kreisskonstanten)
Lad Ω være en enkeltsammenhængende og kompakt mængde, så $\sigma(A) \subseteq \Omega \subset \mathbb{C}$. Givet en operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ defineres Kreisskonstanten mht. Ω som

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Omega) = \sup_{z \in \Omega^c} \|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \Omega).$$

Bemærk, at hvis $\sigma(A) \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subset \mathbb{C}$, gælder $\tilde{\mathcal{K}}(\Omega_1) \geq \tilde{\mathcal{K}}(\Omega_2)$. Dette følger direkte af definitionen, da supremum over en delmængde er mindre end eller lig med supremum over hele mængden. Der vil senere i rapporten blive præsenteret en anden Kreisskonstant, men det er den ovenfor definerede, der er lettest at beregne, og det vises i sætning 2.31, at de to definitioner adskiller sig fra hinanden med højst en faktor to.

Sætning 2.9
For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gælder

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Omega) \geq 1.$$

Hvis A er normal, gælder endvidere $\tilde{\mathcal{K}}(\sigma(A)) = 1$.

Bevis
Der gælder $\|R_A(z)\| \leq (|z| - \|A\|)^{-1}$ og $\|R_A(z)\| \geq \operatorname{dist}(z, \sigma(A))^{-1} \geq (|z| + \|A\|)^{-1}$ for store z. Hvis $\frac{\|A\|}{|z|(|z|-\|A\|)} < \varepsilon$, gælder

$$\frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z| + \|A\|} = \frac{|z| + \|A\| - |z|}{|z|(|z| + \|A\|)} \leq \frac{\|A\|}{|z|(|z| - \|A\|)} < \varepsilon,$$

og tilsvarende

$$\frac{1}{|z| - \|A\|} - \frac{1}{|z|} = \frac{|z| - |z| + \|A\|}{|z|(|z| - \|A\|)} < \varepsilon,$$

og dermed $\frac{1}{|z|} - \varepsilon < \|R_A(z)\| < \frac{1}{|z|} + \varepsilon$ eller ækvivalent

$$\frac{1}{|z| + \delta} < \|R_A(z)\| < \frac{1}{|z| - \delta}$$

for et passende valgt δ. Da Ω er kompakt, eksisterer et $\zeta \in \Omega$, så $\operatorname{dist}(z, \Omega) = |z - \zeta|$. Deraf fås

$$\frac{|z - \zeta|}{|z| + \delta} < \|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \Omega) < \frac{|z - \zeta|}{|z| - \delta},$$

og dermed fås, ved at lade z gå mod uendelig,

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Omega) \geq 1.$$

Antag nu, at A er normal. Da gælder

$$\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \sigma(A)) = \frac{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))} = 1,$$

og dermed $\tilde{\mathcal{K}}(\sigma(A)) = 1$. □

Korollar 2.10
Hvis A er normal, gælder

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Omega) = 1.$$

Resultatet følger af ovenstående sætning, da $\sigma(A) \subseteq \Omega$ medfører, at $1 \leq \tilde{\mathcal{K}}(\Omega) \leq \tilde{\mathcal{K}}(\sigma(A)) = 1$.

Sætning 2.11
Hvis A er en diagonaliserbar matrix, så $A = VDV^{-1}$, og $\kappa(V) = \|V\|\|V^{-1}\|$ er konditionstallet for V, gælder

$$\tilde{\mathcal{K}}(\sigma(A)) \leq \kappa(V).$$

Bevis
For $z \in \rho(A)$ gælder

$$\begin{aligned} \|(A - zI)^{-1}\| &\leq \kappa(V)\|(D - zI)^{-1}\| \\ &= \frac{\kappa(V)}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda - z|} \\ &= \frac{\kappa(V)}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}, \end{aligned}$$

og dermed $\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \sigma(A)) \leq \kappa(V)$, hvilket giver det ønskede. □

Sætning 2.12
For alle $z \notin \overline{W(A)}$ gælder

$$\|R_A(z)\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \overline{W(A)})}, \tag{2.1}$$

og dermed

$$\tilde{\mathcal{K}}(\overline{W(A)}) = 1. \tag{2.2}$$

Bevis
For $u \in \mathcal{H}$, hvor $\|u\| = 1$, gælder

$$\operatorname{dist}(z, \overline{W(A)}) \leq |\langle u, Au\rangle - z| = |\langle u, (A - zI)u\rangle|.$$

Da $z \in \rho(A)$ ifølge sætning 2.5, er $A - zI$ invertibel, og dermed er $R_A(z)v \neq 0$, når $\|v\| = 1$. Vælg $u = \frac{R_A(z)v}{\|R_A(z)v\|}$. Da fås af ovenstående

$$\operatorname{dist}(z, \overline{W(A)}) \leq \frac{|\langle R_A(z)v, v\rangle|}{\|R_A(z)v\|^2} \leq \frac{1}{\|R_A(z)v\|}.$$

Da dette gælder for alle $v \in \mathcal{H}$, hvor $\|v\| = 1$, fås $\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \overline{W(A)}) \leq 1$, og dermed (2.1) og (2.2) ifølge sætning 2.9. □

Følgende sætning fastlægger sammenhængen mellem pseudospektrer og Kreisskonstanten. Ligning (2.3) viser således, at Kreisskonstanten kan tolkes som, hvor meget $\sigma_\varepsilon(A)$ strækker sig ud over Ω i forhold til ε.

Sætning 2.13
For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ og $\sigma(A) \subseteq \Omega \subset \mathbb{C}$, hvor Ω er enkeltsammenhængende og kompakt, er følgende tre udsagn ækvivalente givet en positiv konstant C:

(i) $\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \Omega) \leq C$ *for alle* $z \in \Omega^c$

(ii) $\operatorname{dist}(z, \Omega) \leq C\varepsilon$ *for alle* $\varepsilon > 0$ *og* $z \in \sigma_\varepsilon(A)$

(iii) $\sigma_\varepsilon(A) \subseteq \Omega + C\overline{B}_\varepsilon$ *for alle* $\varepsilon > 0$.

Dermed er

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Omega) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A), \Omega)}{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

hvor $\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A), \Omega) = \sup_{z \in \sigma_\varepsilon(A)} \operatorname{dist}(z, \Omega)$.

Bevis
Først vises ækvivalensen mellem punkt *(i)* og *(ii)*. Antag, at $\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \Omega) \leq C$ for alle $z \in \Omega^c$, og lad $\varepsilon > 0$. Hvis $\sigma_\varepsilon(A) \subset \Omega$, er punkt *(ii)* opfyldt, da $\operatorname{dist}(z, \Omega) = 0$ for $z \in \sigma_\varepsilon(A)$. Hvis der eksisterer et $z \in \sigma_\varepsilon(A)$, så $\operatorname{dist}(z, \Omega) > 0$, fås

$$\operatorname{dist}(z, \Omega) \leq C\varepsilon,$$

da $\|R_A(z)\|^{-1} < \varepsilon$ for $z \in \sigma_\varepsilon(A)$, hvilket giver punkt *(ii)*.

Antag nu, at punkt *(ii)* gælder, og vælg $z \in \Omega^c$. Der eksisterer et $\varepsilon > 0$, så $\|R_A(z)\| = \varepsilon^{-1}$, og dermed eksisterer der en følge $\{z_n\} \subset \sigma_\varepsilon(A)$, så $z_n \to z$ for $n \to \infty$. Da må der per antagelse gælde $\operatorname{dist}(z_n, \Omega) \leq C\varepsilon$, og dermed for $n \to \infty$, at

$$\operatorname{dist}(z, \Omega) \leq \frac{C}{\|R_A(z)\|},$$

hvilket giver punkt *(i)*.

Antag igen, at punkt *(ii)* er opfyldt. Da Ω er kompakt, eksisterer der for ethvert $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ et $\zeta \in \Omega$, så $\operatorname{dist}(z, \Omega) = |z - \zeta| \leq C\varepsilon$. Således må der eksistere et $\xi \in \overline{B}_\varepsilon$, så $z - \zeta = C\xi$, og dermed $z = \zeta + C\xi$, hvilket giver punkt *(iii)*.

Antag nu, at punkt *(iii)* er opfyldt, og skriv $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ som $z = \zeta + C\xi$, hvor $\zeta \in \Omega$, og $\xi \in \overline{B}_\varepsilon$. Da gælder $|z - \zeta| \leq C\varepsilon$, og specielt, hvis der tages infimum over $\zeta \in \Omega$,

$$\operatorname{dist}(z, \Omega) \leq C\varepsilon,$$

hvilket netop er punkt *(ii)*.

Ligning (2.3) vises ved ulighed begge veje. For alle $z \in \Omega^c$ gælder der ifølge definitionen på Kreisskonstanten, at $\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \Omega) \leq \tilde{\mathcal{K}}(\Omega)$, og dermed gælder ifølge ækvivalensen mellem punkt *(i)* og *(ii)*, at

$$\frac{\operatorname{dist}(z, \Omega)}{\varepsilon} \leq \tilde{\mathcal{K}}(\Omega) \quad \text{for alle } \varepsilon > 0 \text{ og } z \in \sigma_\varepsilon(A).$$

Tag nu først supremum over $z \in \sigma_\varepsilon(A)$, og dernæst over $\varepsilon > 0$. Da fås

$$\sup_{\varepsilon > 0} \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A), \Omega)}{\varepsilon} \leq \tilde{\mathcal{K}}(\Omega). \tag{2.4}$$

For alle $\varepsilon > 0$ og for $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ gælder

$$\operatorname{dist}(z, \Omega) \leq \varepsilon \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A), \Omega)}{\varepsilon} \leq \varepsilon \sup_{\varepsilon' > 0} \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma'_\varepsilon(A), \Omega)}{\varepsilon'}.$$

Hvis dette supremum er endeligt, gælder ifølge ækvivalensen mellem punkt *(i)* og *(ii)*, at

$$\|R_A(z)\| \operatorname{dist}(z, \Omega) \leq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A), \Omega)}{\varepsilon} \quad \text{for alle } z \in \Omega^c,$$

som også gælder, hvis højresiden er uendelig. Ved at tage supremum over z fås

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Omega) \leq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A), \Omega)}{\varepsilon},$$

hvilket sammen med (2.4) giver det ønskede. □

2.2 Kreiss' matrixsætning

I dette afsnit præsenteres og bevises de to normvurderinger ved Kreisskonstanten mht. enhedscirklen, som senere skal generaliseres. Afsnittet er baseret på [Trefethen og Embree, 2005].

Sætning 2.14
Hvis $\sigma(A) \subseteq \overline{B}_1$, gælder der for alle $k \geq 0$, at

$$\|A^k\| \leq e(k+1)\tilde{\mathcal{K}}(\overline{B}_1).$$

Bevis
Bemærk, at sætningen er trivielt opfyldt for $k = 0$. Vælg $\varepsilon > 0$, så $r_\varepsilon(A) = 1 + k^{-1}$. Da eksisterer der et $z \in \mathbb{C}$, så $|z| = 1 + k^{-1}$, og $\|R_A(z)\| = \varepsilon^{-1}$. Der gælder således

ifølge sætning 2.7, at

$$\|A^k\| \leq \frac{r_\varepsilon(A)^{k+1}}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}(1+k^{-1})(1+k^{-1})^k.$$

Det kan vises, at $(1+k^{-1})^k$ er en voksende funktion af k, der går mod e, og der gælder dermed

$$\begin{aligned}\|A^k\| &\leq e(1+k^{-1})\varepsilon^{-1} \\ &= e(k+1)k^{-1}\|R_A(z)\| \\ &= e(k+1)(|z|-1)\|R_A(z)\| \\ &\leq e(k+1)\tilde{\mathcal{K}}(\overline{B}_1).\end{aligned}$$

□

Følgende lemma er fra [Trefethen og Embree, 2005] og benyttes implicit flere steder gennem denne rapport. Bemærk, at $\gamma = \|A\|$ altid kan benyttes.

Lemma 2.15
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, og antag, at der eksisterer $M \geq 1$ og $\gamma > 0$, så

$$\|A^n\| \leq M\gamma^n \text{ for alle } n \geq 0.$$

Da tilhører de $z \in \mathbb{C}$, hvor $|z| > \gamma$, resolventmængden for A, og

$$R_A(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} A^k.$$

Følgende er Kreiss' matrixsætning som givet i [Trefethen og Embree, 2005]. Denne vil senere blive generaliseret. Bemærk skrivemåden $\int_{\gamma^*} |f(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt$.

Sætning 2.16 (Kreiss' matrixsætning)
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^N)$, så $\sigma(A) \subseteq \overline{B}_1$, og definer $p(A) = \sup_{n\geq 0} \|A^n\|$. Da gælder

$$\tilde{\mathcal{K}}(\overline{B}_1) \leq p(A) \leq eN\tilde{\mathcal{K}}(\overline{B}_1).$$

Bevis
Først vises venstre ulighed. Antag, at $p(A)$ er endelig, da der ellers ikke er noget at vise. Da gælder $\|A^n\| \leq p(A)$ for alle $n \geq 0$, og dermed $R_A(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}}$ for alle $z \in \mathbb{C}$, der opfylder $|z| > 1$, ifølge lemma 2.15. Der gælder således

$$\|R_A(z)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(A)}{|z|^{k+1}} = \frac{p(A)}{|z|-1},$$

og dermed $(|z|-1)\|R_A(z)\| \leq p(A)$, hvilket giver det ønskede ved at tage supremum over $|z| > 1$.

Det står nu tilbage at vise højre ulighed. Ifølge Dunfordkalkulen gælder

$$A^n = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B_k} z^n R_A(z) dz,$$

hvor $k > 1$. For enhedsvektorer $u, v \in \mathbb{C}^N$ gælder

$$\langle u, A^n v\rangle = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B_k} z^n r(z) dz,$$

hvor r er den rationale funktion $z \mapsto \langle u, R_A(z)v\rangle$, der kan skrives som en brøk mellem to polynomier af grad mindre end eller lig med N, hvilket vises i lemma 3.18. Ved delvis integration opnås

$$\langle u, A^n v\rangle = \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int_{\partial B_k} z^{n+1} r'(z) dz,$$

og dermed

$$|\langle u, A^n v\rangle| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{\partial B_k} |z^{n+1} r'(z)||dz|.$$

Vælg nu $k = 1 + (n+1)^{-1}$. Da fås

$$|\langle u, A^n v\rangle| \leq \frac{(1+(n+1)^{-1})^{n+1}}{2\pi(n+1)} \int_{\partial B_k} |r'(z)||dz|. \tag{2.5}$$

Der eksisterer ifølge sætning 1.29 en Möbiustransformation S, så $S(\partial B_1) = \partial B_k$, og dermed vælges parametriseringen af ∂B_k som $t \mapsto S(e^{it})$ for $t \in [0, 2\pi]$. Da gælder

$$\int_{\partial B_k} |r'(z)||dz| = \int_0^{2\pi} |r'(S(e^{it}))S'(e^{it})ie^{it}|dt = \int_{\partial B_1} |(r \circ S)'(z)||dz|,$$

og da sammensætningen af en rational funktion med en Möbiustransformation igen er en rational funktion, hvor polynomierne i tæller og nævner har samme eller lavere grad, gælder der ifølge [Spijker, 1991], at

$$\int_{\partial B_k} |r'(z)||dz| \leq 2\pi N \sup_{z \in \partial B_1} |r(S(z))| = 2\pi N \sup_{z \in \partial B_k} |r(z)|.$$

Da $(1 + x^{-1})^x$ er en voksende funktion gående mod e for $x \to \infty$, fås af (2.5), at

$$|\langle u, A^n v\rangle| \leq \frac{2\pi e N}{2\pi(n+1)} \sup_{z \in \partial B_k} |r(z)|.$$

Da $|r(z)| = |\langle u, R_A(z)v\rangle| \leq \|R_A(z)\|$, fås

$$|\langle u, A^n v\rangle| \leq eN(n+1)^{-1} \sup_{z \in \partial B_k} \|R_A(z)\|.$$

Da $|z| = 1 + (n+1)^{-1}$, fås $(n+1)^{-1}\|R_A(z)\| = \mathrm{dist}(z, \overline{B}_1)\|R_A(z)\| \leq \tilde{\mathcal{K}}(\overline{B}_1)$. Vælg nu $u = \|A^n v\|^{-1} A^n v$, og tag supremum over $\|v\| = 1$. Da opnås

$$\|A^n\| \leq eN\tilde{\mathcal{K}}(\overline{B}_1). \qquad \square$$

2.3 Koebes $\frac{1}{4}$-sætning

I dette afsnit bevises Koebes $\frac{1}{4}$-sætning, som senere skal anvendes til at vise ækvivalens mellem Kreisskonstanterne. Hvor intet andet er nævnt, er afsnittet baseret på [Conway, 1995, kapitel 14].

Definition 2.17 (Univalent)
En funktion på en åben mængde siges at være univalent, hvis den er analytisk og injektiv. Mængden $\mathcal{U}$ er defineret som mængden af alle funktioner f, der er univalente

på $\overline{B}_1^c$ og har en Laurentrækkeudvikling på formen

$$f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots .$$

At f har denne Laurentrækkeudvikling på en åben cirkelring om 0 med indre radius r og ydre radius ∞, svarer til, at f for $w = z^{-1}$ på den åbne cirkelring om 0 med indre radius 0 og ydre radius r^{-1} har Laurentrækkeudviklingen $f(w) = w^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 w + \cdots$. Følgende sætning giver en karakterisering af $\mathcal{U}$, der ikke inddrager Laurentrækkeudviklingen.

Sætning 2.18
En funktion f tilhører mængden $\mathcal{U}$, hvis og kun hvis f er en univalent funktion på $\overline{B}_1^c$, således at $f(\infty) = \infty$, og funktionen $f(z) - z$ har en hævelig singularitet i ∞.

Bevis
Antag først, at $f \in \mathcal{U}$. Da gælder $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, og

$$\lim_{z\to 0}(f(z^{-1}) - z^{-1}) = \lim_{z\to 0} \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots = \alpha_0,$$

hvilket viser, at singulariteten i ∞ er hævelig.

Antag nu, at $f(z) - z$ har en hævelig singularitet i ∞. Da har $f(z^{-1}) - z^{-1}$ en potensrækkeudvikling omkring 0 givet ved

$$f(z^{-1}) - z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

og dermed er

$$f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots ,$$

hvilket viser det ønskede. □

Det følger af Riemanns afbildningssætning, sætning 1.60, at der for enhver enkeltsammenhængende og åben mængde $G \subset \mathbb{C}$ findes en analytisk og injektiv, altså univalent, funktion $f : G \to \mathbb{C}$, således at $f(G) = B_1$, og at denne funktion er entydigt bestemt. Der findes dermed også en tilsvarende invers, så $f^{-1}(B_1) = G$. Således svarer det at betragte univalente funktioner på B_1 til at betragte univalente funktioner på en vilkårlig enkeltsammenhængende og åben mængde, idet sammensætningen af en univalent funktion på B_1 med den ovenfor beskrevne f^{-1} bliver en univalent funktion på en enkeltsammenhængende og åben mængde. I beviset for sætning 2.26 argumenteres der i detaljer for, at sammensætningen af to univalente funktioner er univalent.

Ved at betragte $\overline{B}_1^c$ som en delmængde af $\mathbb{C}_\infty$ bliver $\overline{B}_1^c$ også enkeltsammenhængende, og da der endvidere gælder, at $\overline{B}_1$ er kompakt i $\mathbb{C}$, følger det af Riemanns afbildningssætning på $\mathbb{C}_\infty$, sætning 1.61, at det at betragte univalente funktioner på B_1 også svarer til at betragte univalente funktioner på $\overline{B}_1^c$. Ved at normalisere de sidstnævnte funktioner, så de opfylder betingelserne i definition 2.17, svarer dette til at betragte funktioner i mængden $\mathcal{U}$. Inspireret af ovenstående defineres nu en mængde af funktioner, hvis nøjagtige sammenhæng med $\mathcal{U}$ vil blive klarlagt nedenfor.

Definition 2.19 (Schlicht)
Mængden af alle funktioner, der er univalente på B_1, således at $f(0) = 0$, og $f'(0) = 1$, betegnes med $\mathcal{S}$, og funktionerne kaldes schlichte funktioner.

Det følgende eksempel er ud over den tidligere nævnte kilde baseret på [Rudin, 1987, Example 14.11]. Et eksempel på en schlicht funktion er Koebefunktionen givet ved $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, at den virkelig er schlicht, vises i det følgende. Funktionen ses at være analytisk på B_1, og for at vise injektivitet på B_1 betragtes $f(z) = f(w)$, som er ækvivalent med

$$0 = f(z) - f(w) = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{w}{(1-w)^2}.$$

Ved at sætte på fælles brøkstreg og betragte tælleren ses dette at være ækvivalent med

$$0 = z(1 + w^2 - 2w) - w(1 + z^2 - 2z) = (z - w)(1 - zw).$$

Den anden faktor i det sidste produkt er aldrig nul for $|z| < 1$ og $|w| < 1$, så under denne antagelse er ligningen kun opfyldt for $z = w$. Det vil sige, at $f(z) = f(w)$ for $z, w \in B_1$ medfører, at $z = w$. Det ses ved indsættelse, at $f(0) = 0$. Den afledede af f er givet ved $f'(z) = \frac{(1-z)^2 - z\cdot 2(1-z)(-1)}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$, så $f'(0) = 1$. Dette viser tilsammen, at $f \in \mathcal{S}$. Det ses også, at $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in B_1$, så ifølge sætning 1.18 er f konform på B_1.

Betragt for en vilkårlig univalent funktion h på B_1 funktionen $f = \frac{h - h(0)}{h'(0)}$. Ifølge lemma 1.57 er $h'(z) \neq 0$ for alle $z \in B_1$, så nævneren er aldrig 0, og dermed er f ligesom h univalent på B_1. Det ses, at $f(0) = 0$. Den afledede af f er givet ved $f'(z) = \frac{h'(z)}{h'(0)}$, så $f'(0) = 1$. Ovenstående giver tilsammen, at f er schlicht. Alle univalente funktioner på B_1 hænger således sammen med funktioner i $\mathcal{S}$ i den forstand, at de kan normaliseres til at tilhøre $\mathcal{S}$. For $f \in \mathcal{S}$ er potensrækkeudviklingen for f omkring 0 ifølge Taylors formel på formen

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots .$$

Følgende sætning angiver sammenhængen mellem $\mathcal{S}$ og $\mathcal{U}$.

Sætning 2.20

(i) Hvis $g \in \mathcal{U}$, og g aldrig er nul, så tilhører $f(z) = (g(z^{-1}))^{-1}$ mængden $\mathcal{S}$ af schlichte funktioner.

(ii) Hvis $f \in \mathcal{S}$, så tilhører $g(z) = (f(z^{-1}))^{-1}$ mængden $\mathcal{U}$ af univalente funktioner på $\overline{B}_1^c$, og g er aldrig nul.

(iii) Hvis $f \in \mathcal{S}$ med potensrækken $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$, og $(f(z))^{-1} = g(w)$ for $w = z^{-1} \in \overline{B}_1^c$, hvor g har potensrækken $g(w) = w + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{w} + \cdots$, så er $\alpha_0 = -a_2$.

Bevis
Antag, at $g \in \mathcal{U}$, at g aldrig er nul, og at $f(z) = (g(z^{-1}))^{-1}$ for $z \in B_1$. Det følger af sætning 2.18, at $g(\infty) = \infty$, og dermed er

$$f(0) = \lim_{z \to 0} (g(z^{-1}))^{-1} = 0.$$

Da g er analytisk på $\overline{B}_1^c$, gælder $f \in \mathcal{H}(B_1)$, og da $f(z_1) = f(z_2)$, hvis og kun hvis $g(z_1^{-1}) = g(z_2^{-1})$, er f også injektiv. Det står nu tilbage at vise, at $f'(0) = 1$. Funktionen $g \in \mathcal{U}$ har ifølge definition 2.17 en Laurentrækkeudvikling på formen $g(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots$. Det følger heraf, at

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{z\to 0} \frac{(g(z^{-1}))^{-1} - 0}{z} \\
&= \lim_{z\to 0} \left(\frac{g(z^{-1})}{z^{-1}}\right)^{-1} \\
&= \left(\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z}\right)^{-1} \\
&= \left(\lim_{z\to\infty} 1 + \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \cdots\right)^{-1} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

og dermed er $f \in \mathcal{S}$.

Antag nu, at $f \in \mathcal{S}$, og at $g(z) = (f(z^{-1}))^{-1}$. Ifølge definition 2.19 er $f(0) = 0$, og da ses det analogt med første del, at $g(\infty) = \infty$, og g er univalent på $\overline{B}_1^c$. Tillige gælder $g(z) = 0$, hvis og kun hvis $f(z^{-1}) = \infty$, og det ses af Laurentrækkeudviklingen af f, at dette kun kan lade sig gøre for $z = 0$, som ikke ligger i $\overline{B}_1^c$, og dermed er $g(z) \neq 0$ på $\overline{B}_1^c$. Da g er analytisk på en åben omegn af ∞, har g en Laurentrækkeudvikling, $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} z^n$, og der må gælde, at

$$1 = g(z)f(z^{-1}) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} z^n\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right),$$

og da dette skal gælde for alle $z \in \overline{B}_1^c$, må der gælde, at $\alpha_{-n} = 0$ for $n \geq 2$, og så er

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\alpha_{-1} z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right) \\
&= \alpha_{-1} + \frac{\alpha_0 + \alpha_{-1} a_2}{z} + \cdots .
\end{aligned}$$

Heraf ses, at $\alpha_{-1} = 1$, og dermed er $g \in \mathcal{U}$ ifølge sætning 2.18. Da $\alpha_{-1} = 1$, må der også gælde, at $\alpha_0 = -a_2$. □

Det fremgår således af sætningen, at der er en bijektion mellem $\mathcal{S}$ og den delmængde af $\mathcal{U}$, der består af funktioner, der aldrig er nul.

Sætning 2.21
For $f \in \mathcal{U}$, hvor f aldrig er nul, og ethvert positivt heltal n findes der en funktion $g \in \mathcal{U}$, som aldrig er nul, så $g(z)^n = f(z^n)$, og denne funktion er entydigt bestemt.

Bevis
For $f \in \mathcal{U}$, som aldrig er nul, gælder

$$f(z^{-n}) = z^{-n} + \alpha_0 + \alpha_1 z^n + \cdots,$$

som er analytisk, injektiv og forskellig fra nul for $0 < |z| < 1$. Der gælder

$$\lim_{z\to 0} z^n f(z^{-n}) = \lim_{z\to 0} 1 + \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{2n} + \cdots = 1, \tag{2.6}$$

og dermed eksisterer der en funktion $g_1 \in \mathcal{H}(B_1)$, som stemmer overens med

$z^n f(z^{-n})$ for $z \neq 0$, og $g_1(0) = 1$, og denne funktion er entydigt bestemt, jf. identitetssætningen for analytiske funktioner. Bemærk, at dette giver g_1 potensrækken givet i (2.6). Da $g_1(0) = 1$, og $z^n f(z^{-n}) \neq 0$ for $0 < |z| < 1$, eksisterer der ifølge lemma 1.53 en funktion $h \in \mathcal{H}(B_1)$, så $h(z)^n = g_1(z)$ for alle $z \in B_1$, og denne funktion er entydigt bestemt, og dermed er $(zh(z^{-1}))^n = f(z^n)$ for $z \in \overline{B}_1^c$. Det skal nu vises, at funktionen givet ved $g(z) = zh(z^{-1})$ er i $\mathcal{U}$ og aldrig er nul. Bemærk først, at da $f(z) \neq 0$, gælder også $g(z) \neq 0$. Desuden gælder $\infty = f(\infty) = g(\infty)^n$, og dermed $g(\infty) = \infty$. Ifølge sætning 2.18 står der således tilbage at vise, at funktionen $g(z) - z$ har en hævelig singularitet i ∞, hvormed $g \in \mathcal{U}$. Betragt først funktionen $h \in \mathcal{H}(B_1)$, der opfylder

$$h(z)^n = \begin{cases} z^n f(z^{-n}) & \text{for } z \neq 0 \\ 1 & \text{for } z = 0. \end{cases}$$

Der gælder dermed, at $h(z)^n = z^n f(z^{-n}) = 1 + \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{2n} + \cdots$, hvilket giver $nh(z)^{n-1}h'(z) = n\alpha_0 z^{n-1} + 2n\alpha_1 z^{2n-1} + \cdots$. Da $h(0)^n = 1$, er $h(0) = \omega$, hvor ω er en n'te enhedsrod. Der gælder således $n\omega^{n-1}h'(0) = 0$, og dermed $h'(0) = 0$. At funktionen $g(z) - z$ har en hævelig singularitet i ∞, ses nu ved

$$\lim_{z\to\infty} (g(z) - z) = \lim_{z\to 0} \frac{h(z) - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{h'(z)}{1} = 0,$$

hvilket viser det ønskede. □

Sætning 2.22
For $f \in \mathcal{U}$ med Laurentrækkeudviklingen $f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots$ gælder der, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1. \tag{2.7}$$

For bevis, se [Conway, 1995, Theorem 14.6.3].

Korollar 2.23
For $f \in \mathcal{U}$ med Laurentrækkeudviklingen $f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots$ er $|\alpha_1| \leq 1$.

Bevis
At summen af ikke-negative led i (2.7) er mindre end eller lig med 1, medfører, at hvert af leddene er mindre end eller lig med 1. Det vil for $n = 1$ sige, at $1|\alpha_1|^2 \leq 1$, hvilket medfører, at $|\alpha_1| \leq 1$. □

Sætning 2.24
For $g \in \mathcal{U}$, som aldrig er nul, med Laurentrækkeudviklingen $g(z) = z+\alpha_0+\alpha_1 z^{-1}+\cdots$ er $|\alpha_0| \leq 2$.

Bevis
Lad $g \in \mathcal{U}$ have Laurentrækkeudviklingen $g(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots$, og lad $h \in \mathcal{U}$, således at $h(z)^2 = g(z^2)$ for $z \in \overline{B}_1^c$. En sådan funktion h eksisterer ifølge sætning 2.21. Lad Laurentrækkeudviklingen af h være givet ved $h(z) = z + \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots$. Det ses, at

$$h(z)^2 = (z + \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots)^2 = z^2 + 2\beta_0 z + (\beta_0^2 + 2\beta_1) + \cdots .$$

Fra udtrykket for Laurentrækkeudviklingen af g fås, at

$$z^2 + 2\beta_0 z + (\beta_0^2 + 2\beta_1) + \cdots = h(z)^2 = g(z^2) = z^2 + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-2} + \cdots .$$

Dette giver, at $\beta_0 = 0$, og at $\alpha_0 = \beta_0^2 + 2\beta_1 = 2\beta_1$. Ifølge korollar 2.23 gælder der for en sådan funktion $h \in \mathcal{U}$, som aldrig er nul, med den givne Laurentrækkeudvikling, at $|\beta_1| \leq 1$. Så idet $\alpha_0 = 2\beta_1$, er $|\alpha_0| \leq 2$. $\square$

Korollar 2.25
For $f \in \mathcal{S}$ med potensrækkeudviklingen $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ er $|a_2| \leq 2$.

Dette følger direkte af sætning 2.24 og sætning 2.20, punkt *(ii)* og *(iii)*. Korollaret kan anvendes til at bevise Koebes $\frac{1}{4}$-sætning.

Sætning 2.26 (Koebes $\frac{1}{4}$-sætning)
For $f \in \mathcal{S}$ gælder der, at

$$B_{\frac{1}{4}} \subseteq f(B_1).$$

Bevis
Vælg et fast $f \in \mathcal{S}$, og lad ζ_0 være et komplekst tal, så $\zeta_0 \notin f(B_1)$. Det skal vises, at $|\zeta_0| \geq \frac{1}{4}$. Det følger af definitionen på $\mathcal{S}$, definition 2.19, at $f(0) = 0$, så $\zeta_0 \neq 0$. Dermed er $g(z) = f(z)(1 - \zeta_0^{-1} f(z))^{-1}$ en analytisk funktion på B_1. Det vises nu, at g er schlicht. Det ses direkte, at $g(0) = 0$, så

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{z \to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z(1 - \zeta_0 f(z))} \\ &= \left(\lim_{z \to 0} \frac{1}{1 - \zeta_0 f(z)} \right) \left(\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} \right) \qquad (2.8) \\ &= 1 f'(0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

hvor (2.8) er mulig, da begge grænseværdier eksisterer. Desuden er $g = M \circ f$, hvor $M(z) = z(1 - \zeta_0^{-1} z)^{-1}$ er en Möbiustransformation med $a = 1$, $b = 0$, $c = -\zeta_0^{-1}$, $d = 1$, og $ad - bc = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-\zeta_0^{-1}) = 1 \neq 0$. En Möbiustransformation er konform på $\mathbb{C}_\infty$ ifølge sætning 1.22 og dermed analytisk på $\mathbb{C}_\infty$ ifølge definition 1.17. Ifølge sætning 1.21 er en Möbiustransformation en bijektion på $\mathbb{C}_\infty$ og dermed specielt injektiv på $\mathbb{C}_\infty$. En sammensætning af analytiske funktioner er analytisk, og en sammensætning af injektive funktioner er injektiv, så g er både analytisk og injektiv, det vil sige univalent, i henhold til definitionen på f nærmere bestemt univalent på B_1. Dermed er g schlicht.

Da $f(0) = 0$, findes der et $r > 0$, således at $|f(z)| < |\zeta_0|$ for $|z| < r$, hvilket er ensbetydende med, at $|\zeta_0^{-1} f(z)| < 1$ for $|z| < r$. På denne omegn af 0 er Taylorrækkeudviklingen i variablen $f(z)$ givet ved

$$\frac{1}{1 - \zeta_0^{-1} f(z)} = 1 + \zeta_0^{-1} f(z) + \zeta_0^{-2} f(z)^2 + \cdots.$$

Ved at indsætte potensrækkeudviklingen $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ fås for $|z| < r$, at

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{1 - \zeta_0^{-1} f(z)} \\ &= \left(z + a_2 z^2 + \cdots\right) \left(1 + \zeta_0^{-1} \left(z + a_2 z^2 + \cdots\right) + \zeta_0^{-2} \left(z + a_2 z^2 + \cdots\right)^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$= z + (\zeta_0^{-1} + a_2)z^2 + \cdots .$$

Ved at anvende korollar 2.25 på $g \in \mathcal{S}$ fås, at $|\zeta_0^{-1} + a_2| \leq 2$. Anvendt på $f \in \mathcal{S}$ giver det samme korollar, at $|a_2| \leq 2$, og $2 \geq |\zeta_0^{-1} + a_2|$, så $0 \leq |\zeta_0^{-1}| \leq 4$. Dette giver, at $|\zeta_0| \geq \frac{1}{4}$. Det er hermed vist for et $f \in \mathcal{S}$, der kan vælges vilkårligt, at hvis et punkt ikke ligger i $f(B_1)$, ligger det ikke i $B_{\frac{1}{4}}$, hvilket svarer til, at hvis et punkt ligger i $B_{\frac{1}{4}}$, ligger det i $f(B_1)$, hvilket netop er det ønskede. □

Denne sætning er ækvivalent med, at $\operatorname{dist}(0, \partial f(B_1)) = \operatorname{dist}(f(0), \partial f(B_1)) \geq \frac{1}{4}$ for $f \in \mathcal{S}$. Som omtalt på side 39 findes der for en vilkårlig funktion h, som er univalent på B_1, en schlicht funktion f givet ved $f = \frac{h - h(0)}{h'(0)}$. Koebes $\frac{1}{4}$-sætning forudsætter, at f er schlicht, men giver således et tilsvarende resultat for univalente funktioner på B_1. Hvis funktionen h er univalent på B_1, kan den udtrykkes ved $h = h'(0)f + h(0)$, så $h(B_1)$ er en skalering med $h'(0)$ og en translation med $h(0)$ af $f(B_1)$. Det samme må ske med den kugle, der er indeholdt i billedet af enhedskuglen, hvilket giver følgende korollar til Koebes $\frac{1}{4}$-sætning.

Korollar 2.27 (Koebes $\frac{1}{4}$-sætning for univalente funktioner på B_1)
For en univalent funktion h på B_1 gælder der, at

$$B_{\frac{|h'(0)|}{4}}(h(0)) \subseteq h(B_1),$$

eller ækvivalent at $\operatorname{dist}(h(0), \partial h(B_1)) \geq \frac{1}{4}|h'(0)|$.

2.4 Ækvivalens mellem Kreisskonstanter

I denne rapport arbejdes med to definitioner af Kreisskonstanten, $\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)$ og $\mathcal{K}(\Omega)$. Den første, $\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)$, har klare beregningsmæssige fordele frem for $\mathcal{K}(\Omega)$, men det er $\mathcal{K}(\Omega)$, der generaliserer resultaterne for matricer med spektrum i den lukkede enhedscirkel i sætning 2.14 og sætning 2.16 til resultater på samme form. I dette afsnit vises dog, at $\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)$ og $\mathcal{K}(\Omega)$ er ækvivalente i passende forstand. Afsnittet er baseret på [Toh og Trefethen, 1999].

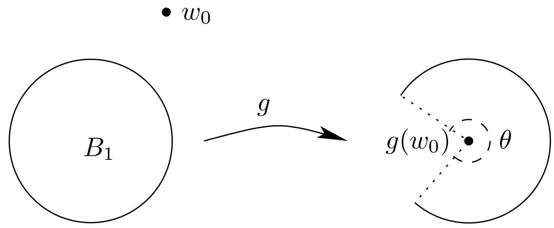
Lemma 2.28 (Cirkelbue- og intervalafbildning)
For et fast $w_0 \in \overline{B}_1^c$ kaldes afbildningerne $g\colon \overline{B}_1^c \to \Omega_1^c$ og $h\colon \overline{B}_1^c \to \Omega_2^c$ givet ved

$$g(w) = w\frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} \quad og \quad h(w) = \frac{(w - w_0)(1 - \bar{w}_0 w)}{4w(|w_0| - 1)^2}$$

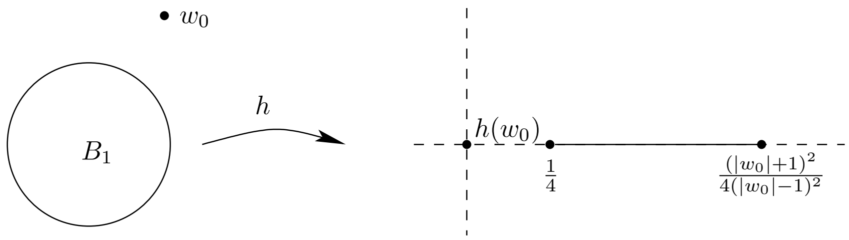
hhv. en cirkelbueafbildning og en intervalafbildning. Begge disse opfylder kravene til Ψ i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, hvor Ω_1 er en cirkelbue af en cirkel med radius 1 med vinkel $\theta = 4\arctan\frac{1}{\sqrt{|w_0|^2 - 1}}$, og Ω_2 er intervallet $\left[\frac{1}{4}, \frac{(|w_0|+1)^2}{4(|w_0|-1)^2}\right]$. Således er både g og h konforme bijektioner, der udvider kontinuert til $g\colon B_1^c \to \Omega_1^c \cup \partial\Omega_1$ og $h\colon B_1^c \to \Omega_2^c \cup \partial\Omega_2$. Se figur 2.1 og figur 2.2.

Bevis
Det vises først, at g og h er konforme. Ved direkte udregninger fås

$$g'(w) = -\frac{-2w + \bar{w}_0 w^2 + w_0}{(w_0 w - 1)^2} \quad \text{og}$$



Figur 2.1: Cirkelbueafbildningen g.



Figur 2.2: Intervalafbildningen h.

$$h'(w) = \frac{w_0 - \bar{w_0} w^2}{4w^2(|w_0|-1)^2}.$$

Lad $w_0 = re^{i\theta}$ og bemærk, at $\frac{d}{dw} g(we^{-i\theta}) = g'(we^{-i\theta})e^{-i\theta}$. Multiplikationen af w med $e^{-i\theta}$ er blot en rotation af w, hvilket ikke ændrer på modulus af nulpunkterne til den afledede. For at opnå $0 = g'(we^{-i\theta}) = w^2 - \frac{2}{r}e^{2i\theta}w + e^{4i\theta}$ kræves det, at

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}e^{2i\theta} \pm \sqrt{\frac{4}{r^2}e^{4i\theta} - 4e^{4i\theta}}\right) \\ &= e^{i2\theta}\left(\frac{1}{r} \pm \sqrt{r^{-2}-1}\right) \\ &= e^{i2\theta}\left(\frac{1}{r} \pm i\sqrt{1-r^{-2}}\right). \end{aligned}$$

Da $1 - r^{-2} > 0$, gælder, at

$$|w|^2 = \left|r^{-1} \pm i\sqrt{1-r^{-2}}\right|^2 = r^{-2} + 1 - r^{-2} = 1,$$

så begge løsninger ligger på enhedscirklen, og dermed er $g'(w) \neq 0$ for $w \in \overline{B}_1^c$. For at opnå, at $h'(w) = 0$, kræves det, at $w^2 = \frac{w_0}{\bar{w_0}}$, så $h'(w) \neq 0$ for $w \in \overline{B}_1^c$. Dermed er både g og h konforme. Det bemærkes, at $g(\infty) = \infty = h(\infty)$.

Cirkelbueafbildningen kan skrives som

$$g(w) = -\frac{1}{\bar{w_0}}w - \frac{|w_0|^2 - 1}{\bar{w_0}^2} + (|w_0|^2 - 1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{w_0}^{n+2}w^n},$$

hvilket kan eftervises ved først at omskrive rækken til en geometrisk række og dernæst sammenligne med det oprindelige udtryk. Den geometriske række konvergerer, da

$|\bar{w_0}w| > 1$. Intervalafbildningen kan skrives som

$$h(w) = -\frac{\bar{w_0}}{4(|w_0|-1)^2}w + \frac{|w_0|^2+1}{4(|w_0|-1)^2} - \frac{w_0}{4(|w_0|-1)^2}w^{-1}.$$

Dermed kan både g og h skrives på samme form som Ψ i punkt *(iv)* i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61.

Det ønskes nu at finde en invers til g på samme form som Φ i punkt *(iii)* i Riemanns afbildningssætning. Da rotation er bijektiv, kan $g(we^{-i\theta}) = z$, hvor $w_0 = re^{i\theta}$, betragtes. Løses dette for w, fås

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}e^{i\theta}\left(re^{i\theta} - re^{-i\theta}z \pm \sqrt{r^2e^{2i\theta} - 2r^2z + r^2e^{2i\theta}z^2 + 4z}\right) \\ &= \frac{r}{2}e^{2i\theta}\left(1 - e^{-2i\theta}z \pm \sqrt{1 + (4-2r^2)r^{-2}e^{-2i\theta}z + z^2}\right). \end{aligned}$$

Løses $(1+\zeta)(1-z)^2 = 1 + (4-2r^2)r^{-2}e^{-2i\theta}z + z^2$ mht. ζ, fås, at

$$\zeta = (1 + 2r^{-1}e^{-2i\theta} - e^{-2i\theta})\frac{2z}{1-z^2},$$

der ses at gå mod nul for $z \to \infty$. Dermed kan w skrives som

$$w = \frac{r}{2}e^{2i\theta}\left(1 - e^{-2i\theta}z \pm (1-z)\sqrt{1+\zeta}\right).$$

Her er det den positive løsning der vælges, da det ses, at denne ligger uden for enhedscirklen for store z. Da $z \mapsto \sqrt{1+z}$ er analytisk for z med $|z| < 1$ med rækkeudviklingen

$$\sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}z^k,$$

og da $|\zeta| < 1$ for store z, kan g^{-1} netop udtrykkes på samme form som Φ i punkt *(iii)* i Riemanns afbildningssætning. Lignende udregninger kan foretages for h.

Det undersøges nu, hvorledes enhedscirklen afbildes under g og h. Betragt derfor $w = e^{i\theta}$. Så er

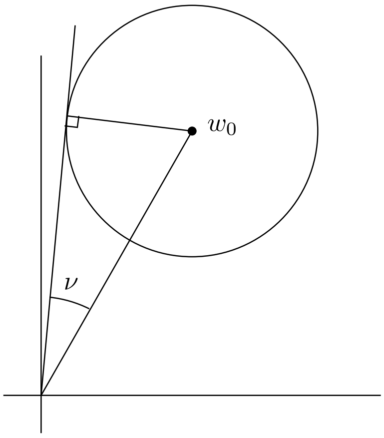
$$g(e^{i\theta}) = e^{i\theta}\frac{e^{i\theta} - w_0}{1 - \bar{w_0}e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} - w_0}{e^{-i\theta} - \bar{w_0}} = \frac{w_0 - e^{i\theta}}{\bar{w_0} - e^{-i\theta}} = \frac{\zeta}{\bar{\zeta}},$$

hvor $\zeta = w_0 - e^{i\theta}$. Men da er $|g(e^{i\theta})| = \frac{|\zeta|}{|\bar{\zeta}|} = 1$, hvoraf $g(\partial B_1) \subseteq \partial B_1$. Skrives $\zeta = re^{i\varphi}$, er $g(e^{i\theta}) = e^{2i\varphi}$, så et udtryk for mulige værdier af φ ønskes. Da $\zeta = w_0 - e^{i\theta} = w_0 + e^{i(\theta+\pi)}$ for $\theta \in [0, 2\pi]$ og $|w_0| > 1$, ses det, at $\zeta(\theta)$ er en cirkel med centrum i w_0 og radius 1, der ikke indeholder 0. Men da er $\operatorname{Arg}\zeta = \varphi$ begrænset for alle θ ved

$$\operatorname{Arg}(w_0) - \nu \le \varphi \le \operatorname{Arg}(w_0) + \nu,$$

hvor ν er det halve af vinklen, som cirklen udspænder i forhold til origo. Se figur 2.3. Dermed varierer φ med 2ν, og da $\tan\nu = \frac{1}{\sqrt{|w_0|^2-1}}$, vil $g(e^{i\theta})$ udspænde en cirkelbue med vinkel $4\arctan\frac{1}{\sqrt{|w_0|^2-1}}$. Endepunkterne for cirkelbuen er hhv.

$$\frac{e^{i2\operatorname{Arg}w_0}}{e^{i2\arctan\frac{1}{\sqrt{|w_0|^2-1}}}} \quad \text{og} \quad e^{i2\operatorname{Arg}w_0}e^{i2\arctan\frac{1}{\sqrt{|w_0|^2-1}}}.$$



Figur 2.3: Vinklen ν til cirklen med centrum i w_0 og radius 1.

Hvis f.eks. $w_0 = 2$, betyder dette, at cirkelbuen starter i $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ og slutter i $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

For intervalafbildningen fås

$$h(e^{i\theta}) = \frac{(e^{i\theta} - w_0)(1 - \bar{w_0}e^{i\theta})}{4e^{i\theta}(|w_0| - 1)^2} = \frac{1 - 2\,\mathrm{Re}(w_0 e^{i\theta}) + |w_0|^2}{4(|w_0| - 1)^2},$$

da $\overline{w_0 e^{-i\theta}} = \bar{w_0}e^{i\theta}$. Heraf ses det, at $h(e^{i\theta})$ er reel, og da

$$-2|w_0| \leq 2\,\mathrm{Re}(w_0 e^{i\theta}) \leq 2|w_0|$$

for alle θ, er

$$\frac{1}{4} \leq h(e^{i\theta}) \leq \frac{(|w_0| + 1)^2}{4(|w_0| - 1)^2},$$

hvilket var det ønskede. $\square$

Sætning 2.29

Lad $\Omega \subset \mathbb{C}$ være kompakt og enkeltsammenhængende, og $\partial\Omega$ være en simpel, lukket kurve. For Ψ som givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, og ethvert $|w_0| > 1$ gælder

$$\frac{1}{2}(|w_0| - 1) \leq \frac{\mathrm{dist}(\Psi(w_0), \partial\Omega)}{|\Psi'(w_0)|} \leq 2(|w_0| - 1). \tag{2.9}$$

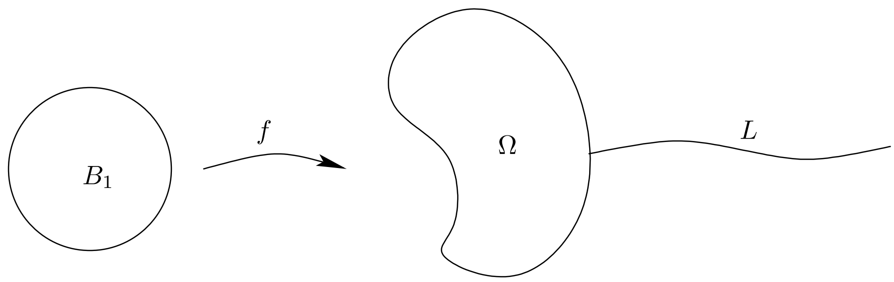
Hvis Ψ er en intervalafbildning, antages faktoren $\frac{1}{2}$ i venstre ulighed for $|w_0| \to 1$, og hvis Ψ er en cirkelbueafbildning, antages faktoren 2 i højre ulighed for $|w_0| \to 1$.

Bevis

Betragt først uligheden til højre. Lad $|w| = r$, og $1 < r < |w_0|$. Da randen af enhedskuglen bliver afbildet over på randen af Ω ifølge sætning 1.62, gælder der, at

$$\lim_{r\to 1} |\Psi(w) - \Psi(w_0)| = \lim_{r\to 1} |\Psi(w) - z_0| \geq \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Lad g være cirkelbueafbildningen fra lemma 2.28, og bemærk, at $|g(w)| = 1$ for



Figur 2.4: Afbildningen f fra den åbne enhedskugle til det ydre af $\Omega \cup L$.

$|w| = 1$, og på grund af kontinuiteten er så $\lim_{r\to 1} |g(w)| = 1$ for $|w| = r$. Dermed er

$$\lim_{r\to 1} \frac{|\Psi(w) - \Psi(w_0)|}{|g(w)|} \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) \tag{2.10}$$

for $|w| = r$. Da funktionen $\frac{\Psi(\cdot)-\Psi(w_0)}{g(\cdot)}$ er analytisk og ikke antager værdien nul i $\overline{B}_1^c$, kan minimumprincippet, lemma 1.38, anvendes, så $\left|\frac{\Psi(\cdot)-\Psi(w_0)}{g(\cdot)}\right|$ har minimum netop på randen. Dermed gælder (2.10) for alle w med $r > 1$, og ikke kun for w med $r \to 1$. Specielt gælder, at

$$\frac{|\Psi'(w_0)|}{|g'(w_0)|} = \lim_{w\to w_0} \left|\frac{\Psi(w) - \Psi(w_0)}{g(w)}\right| \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega),$$

hvor der opnås lighed, hvis Ψ er en cirkelbueafbildning, da der så gælder, at $z_0 = \Psi(w_0) = 0$, og $\partial\Omega \subseteq \partial B_1$. Bemærk, at

$$\begin{aligned} |g'(w_0)|^{-1} = \frac{|w_0|^2 - 1}{|w_0|} &= \frac{(|w_0| + 1)(|w_0| - 1)}{|w_0|} \\ &= |w_0| - 1 + \frac{1}{|w_0|}(|w_0| - 1) \leq 2(|w_0| - 1). \end{aligned}$$

Dermed er

$$\frac{\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)}{|\Psi'(w_0)|} \leq 2(|w_0| - 1),$$

hvor ligheden opnås for $|w_0| \to 1$, hvis Ψ er en cirkelbueafbildning.

Betragt nu den venstre ulighed i (2.9). Lad w_0 være fast, og h være intervalafbildningen fra lemma 2.28. Betragt den konforme afbildning $f = \Psi \circ h^{-1} \circ \kappa$, hvor den konforme afbildning $\kappa\colon B_1 \to \mathbb{C} \setminus [\frac{1}{4}, \infty)$ givet ved $\kappa(\xi) = \frac{-\xi}{(1-\xi)^2}$ er Koebefunktionen med modsat fortegn. Dermed afbilder f den åbne enhedskugle på det ydre af $\Omega \cup L$, hvor $L = \Psi \circ h^{-1}\left\{\left(\frac{(|w_0|+1)^2}{4(|w_0|-1)^2}, \infty\right)\right\}$ er en kurve fra randen af Ω til ∞. Se figur 2.4. Da f er en sammensætning af funktioner, der er konforme, og dermed analytiske, og injektive på passende mængder, er f univalent på B_1. Dermed fås fra Koebes $\frac{1}{4}$-sætning for univalente funktioner på B_1, korollar 2.27, at

$$\operatorname{dist}(f(0), \partial f(B_1)) \geq \frac{1}{4}|f'(0)|. \tag{2.11}$$

I dette tilfælde er

$$\begin{aligned} f(0) &= \Psi(h^{-1}(0)) = \Psi(w_0), \\ f'(0) &= \Psi'(h^{-1}(\kappa(0)))(h^{-1})'(\kappa(0))\kappa'(0) = -\frac{\Psi'(w_0)}{h'(w_0)}, \quad \text{og} \\ \partial f(B_1) &= \partial\Omega \cup L, \end{aligned}$$

hvor anden linje følger af, at $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(0))}$, og at $\kappa'(0) = -1$. Da $\operatorname{dist}(\Psi(w_0), \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(\Psi(w_0), \partial\Omega \cup L)$, fås ved indsættelse i (2.11), at

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\Psi(w_0), \partial\Omega) &\geq \frac{1}{4}\frac{|\Psi'(w_0)|}{|h'(w_0)|} \\ &= \frac{|\Psi'(w_0)|}{(1 + \frac{1}{|w_0|})}(1 - |w_0|) \\ &\geq \frac{1}{2}|\Psi'(w_0)|(1 - |w_0|). \end{aligned}$$

Hvis Ψ er en intervalafbildning, er $\operatorname{dist}(\Psi(w_0), \partial\Omega) = \frac{1}{4}$, da $\Psi(w_0) = 0$, og $\partial\Omega = \left[\frac{1}{4}, \frac{(|w_0|+1)^2}{4(|w_0|-1)^2}\right]$, så første ulighed i ovenstående dermed bliver en lighed. Ydermere er den sidste ulighed en lighed for $|w_0| \to 1$, hvormed sætningen er bevist. $\square$

Nu defineres den anden Kreisskonstant, der i følgende sætning vises at være ækvivalent med den første i passende forstand.

Definition 2.30 (Kreisskonstanten)
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ opfylde $\sigma(A) \subseteq \Omega \subset \mathbb{C}$, hvor Ω er enkeltsammenhængende og kompakt, og lad Φ være funktionen givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61. Da defineres Kreisskonstanten mht. Ω som

$$\mathcal{K}(\Omega) = \sup_{z \in \Omega^c} \frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)| - 1)}{|\Phi'(z)|}.$$

Sætning 2.31
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ med $\sigma(A) \subseteq \Omega$. Så er Kreisskonstanterne relaterede med

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)}{\mathcal{K}(\Omega)} \leq 2. \tag{2.12}$$

Hvis Ω er et interval, antages faktoren $\frac{1}{2}$ til venstre i grænsen, når Ω går mod et uendeligt langt interval i det komplekse plan. Hvis Ω er en cirkelbue, antages faktoren 2 til højre i grænsen, når Ω går mod en hel cirkel.

Bevis
Bemærk først de ækvivalente definitioner på Kreisskonstanterne:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}(\Omega) &= \inf_{z \in \Omega^c} \left\{ c : ||R_A(z)|| \leq \frac{c}{\operatorname{dist}(z, \Omega)} \right\} \\ &= \sup_{z \in \Omega^c} ||R_A(z)|| \operatorname{dist}(z, \Omega) \end{aligned}$$

og

$$\mathcal{K}(\Omega) = \inf_{z \in \Omega^c} \left\{ c : ||R_A(z)|| \leq \frac{c|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)| - 1} \right\}$$

$$= \sup_{z \in \Omega^c} \frac{||R_A(z)||(|\Phi(z)| - 1)}{|\Phi'(z)|}.$$

Lad $\Phi^{-1} = \Psi$, og $w = \Phi(z)$. Bemærk, at $\Phi'(z) = \frac{1}{\Psi'(\Phi(z))} = \frac{1}{\Psi'(w)}$. For et fast w_0 fås, at

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|\Phi(z_0)| - 1}{|\Phi'(z_0)| \operatorname{dist}(z_0, \Omega)} = \frac{|\Psi'(w_0)|(|w_0| - 1)}{\operatorname{dist}(\Phi(w_0), \partial\Omega)} \leq 2,$$

hvor ulighederne følger af sætning 2.29. Af dette og de ækvivalente definitioner på Kreisskonstanterne fås nu, at

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)}{\mathcal{K}(\Omega)} &= \frac{\sup_{z \in \Omega^c} ||R_A(z)|| \operatorname{dist}(z, \Omega)}{\inf_{z \in \Omega^c} \left\{ c : ||R_A(z)|| \leq \frac{c|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)| - 1} \right\}} \\ &\leq \frac{||R_A(z_0)|| \operatorname{dist}(z_0, \Omega)}{||R_A(z_0)||(|\Phi(z_0)| - 1)|\Phi'(z_0)|^{-1}} \leq 2 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)}{\mathcal{K}(\Omega)} &= \frac{\inf_{z \in \Omega^c} \left\{ c : ||R_A(z)|| \leq \frac{c}{\operatorname{dist}(z, \Omega)} \right\}}{\sup_{z \in \Omega^c} \frac{||R_A(z)||(|\Phi(z)| - 1)}{|\Phi'(z)|}} \\ &\geq \frac{||R_A(z_0)|| \operatorname{dist}(z_0, \Omega)}{||R_A(z_0)||(|\Phi(z_0)| - 1)|\Phi'(z_0)|^{-1}} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

KAPITEL 3

KREISS' MATRIXSÆTNING

Resultaterne givet i sætning 2.14 og sætning 2.16 gælder kun for begrænsede operatorer med spektrum i den lukkede enhedscirkel, og sætning 2.16 kun for endeligdimensionale Hilbertrum. I dette kapitel generaliseres disse resultater til også at give en normvurdering for begrænsede operatorer med spektrum i kompakte mængder på uendeligdimensionale Hilbertrum. Gennem kapitlet betegner Φ og Ψ afbildningerne givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, og Ψ benævnes den ydre afbildning. Det er en generel antagelse gennem kapitlet, at $\Omega \subset \mathbb{C}$ er enkeltsammenhængende og kompakt, og at $\partial\Omega$ er en simpel, lukket kurve. Kapitlet er hovedsageligt baseret på [Toh og Trefethen, 1999].

3.1 Generaliseringer

I dette afsnit gives en række generelle udvidelser af Kreiss' matrixsætning, der både involverer Faberpolynomier og polynomier generelt.

Definition 3.1
Givet Ω og den tilhørende konforme afbildning Φ givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, defineres følgende for ethvert $r \geq 1$:

- $\Omega_r = \Omega \cup \{z \in \mathbb{C} : |\Phi(z)| \leq r\}$
- $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |\Phi(z)| = r\}$.

Bemærk, at C_r er en simpel, lukket kurve, da den er billedet af en cirkel under den injektive og kontinuerte funktion Ψ. Tilsvarende er Ω_r kompakt, da den er foreningsmængden af den kompakte mængde Ω og billedet af ringområdet $A(1, r) = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq r\}$ under den kontinuerte funktion Ψ.

Sætning 3.2
Hvis $\partial\Omega$ er en simpel, lukket kurve, er Ω_r enkeltsammenhængende i $\mathbb{C}$.

Bevis
Det er tilstrækkeligt at vise, at Ω_r og Ω_r^c er sammenhængende i $\mathbb{C}^\infty$ ifølge [Conway, 1995, Proposition 13.1.1]. Der gælder $\Omega_r^c = \Psi(\overline{B}_r^c)$, og da $\overline{B}_r^c$ er sammenhængende, og Ψ er kontinuert, er Ω_r^c sammenhængende.

Bemærk, at $\Omega_r = \Omega \cup \Psi(A(1, r))$, hvor $A(1, r) = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq r\}$. Per antagelse er Ω sammenhængende, og da $A(1, r)$ er sammenhængende, og Ψ er kontinuert, er $\Psi(A(1, r))$ sammenhængende. Antag, at Ω_r ikke er sammenhængende. Da eksisterer der ikke-tomme relativt åbne mængder $A, B \subset \mathbb{C}$, så $\Omega_r \subseteq A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap \Omega_r \neq \emptyset$, og $\Omega_r \cap B \neq \emptyset$. Da Ω er sammenhængende, må denne være helt indeholdt i enten A eller B. Antag uden tab af generalitet, at $\Omega \subset A$. Ligeledes må $\Psi(A(1, r))$ være helt indeholdt i enten A eller B, men hvis $\Psi(A(1, r)) \subset A$, må der gælde $\Omega_r \cap B = \emptyset$, hvilket er en modstrid, så derfor er $\Psi(A(1, r)) \subset B$, men $\partial\Omega = \Omega \cap \Psi(A(1, r)) \subseteq A \cap B = \emptyset$, hvilket også er en modstrid. Dermed er Ω_r sammenhængende, hvilket viser det ønskede. $\square$

Følgende lemma er fra [Gaier, 1980]. For en kontinuert funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$, hvor $X \subset \mathbb{C}$, betegner $\|f\|_X = \sup_{z\in X} |f(z)|$ supremumsnormen.

Lemma 3.3 (Bernsteins lemma)
For ethvert polynomium p af grad højst n gælder

$$\|p\|_{\Omega_r} \leq r^n \|p\|_\Omega$$

for alle $r \geq 1$.

Bevis
Det antages først, at $|p(z)| \leq 1$ for $z \in \Omega$. Da $\Omega^c \cup \partial\Omega$ er kompakt i $\mathbb{C}_\infty$, vil funktionen $z \mapsto \left|\frac{p(z)}{\Phi(z)^n}\right|$ antage sit maksimum i et punkt $z_M \in \Omega^c \cup \partial\Omega$. Hvis z_M er et indre punkt, og $z_M \neq \infty$, er z_M et lokalt maksimum, og dermed gælder $p(z) = c\Phi(z)^n$ for et $c \in \mathbb{C}$ ifølge lokalt maksimumprincippet, lemma 1.36. Da funktionerne er holomorfe på Ω^c og kontinuerte på $\Omega^c \cup \partial\Omega$, udvider dette til hele $\Omega^c \cup \partial\Omega$, og der gælder dermed for $\zeta \in \partial\Omega$, at $|p(\zeta)| = |c||\Phi(\zeta)^n| = |c|$, da $\Phi(\partial\Omega) = \partial B_1$, og dermed er $|c| \leq 1$, da $|p(z)| \leq 1$ for $z \in \Omega^c \cup \partial\Omega$. Dermed fås

$$\left|\frac{p(z)}{\Phi(z)^n}\right| \leq 1 \text{ for } z \in \Omega^c. \tag{3.1}$$

Hvis $z_M = \infty$, må der gælde $p(z) \equiv 0$, da $\Phi(\infty) = \infty$, og Φ ikke er konstant, og dermed er $|p(z_M)| \leq 1$. Således gælder (3.1) altså også.

Hvis $z_M \in \partial\Omega$, gælder

$$\left|\frac{p(z)}{\Phi(z)^n}\right| \leq \frac{|p(z_M)|}{|\Phi(z_M)|^n} \leq 1,$$

da $|\Phi(z_M)| = 1$, og dermed gælder (3.1) generelt for alle $z \in \Omega^c \cup \partial\Omega$. For $z \in C_r$ gælder $|\Phi(z)^n| = r^n$, og ifølge absolut maksimumprincippet, lemma 1.37, gælder $\max_{z\in\Omega_r} |p(z)| = \max_{z\in C_r} |p(z)|$, og dermed $\|p\|_{\Omega_r} \leq r^n$. For et vilkårligt polynomium erstattes p med $\|p\|_\Omega^{-1} p$, hvilket giver det ønskede. □

Den følgende sætning er en udvidelse af sætning 2.14 til operatorer med spektrum i en vilkårlig kompakt og enkeltsammenhængende mængde Ω.

Sætning 3.4
Givet $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, så $\sigma(A) \subseteq \Omega$, gælder for ethvert polynomium p_n af grad n, at

$$\|p_n(A)\| \leq e(n+1)\mathcal{K}(\Omega)\|p_n\|_\Omega.$$

Bevis
Ifølge Dunfordkalkulen gælder

$$p_n(A) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_r} p_n(z)R_A(z)dz$$

for $r > 1$, og dermed

$$\|p_n(A)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_r} |p_n(z)|\|R_A(z)\||dz|.$$

Der gælder $|p_n(z)| \leq \|p_n\|_{\Omega_r}$ for $z \in C_r$, og ifølge definitionen på Kreisskonstanten fås $\frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)|-1)}{|\Phi'(z)|} \leq \mathcal{K}(\Omega)$, og dermed $\|R_A(z)\| \leq \frac{|\Phi'(z)|\mathcal{K}(\Omega)}{r-1}$ for $z \in C_r$. Dette giver

$$\|p_n(A)\| \leq \frac{\mathcal{K}(\Omega)\|p_n\|_{\Omega_r}}{2\pi(r-1)} \int_{C_r} |\Phi'(z)||dz|.$$

Der gælder $C_r = \Psi(\partial B_r)$, og dermed

$$\begin{aligned}
\int_{C_r} |\Phi'(z)||dz| &= \int_0^{2\pi} |\Phi'(\Psi(re^{it}))\Psi'(re^{it})ire^{it}|dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left|\frac{d}{dt}\Phi(\Psi(re^{it}))\right| dt \\
&= \int_0^{2\pi} |ire^{it}|dt \\
&= 2\pi r.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Deraf fås

$$\|p_n(A)\| \leq \frac{r}{r-1}\mathcal{K}(\Omega)\|p_n\|_{\Omega_r},$$

og ifølge Bernsteins lemma, lemma 3.3,

$$\|p_n(A)\| \leq \frac{r^{n+1}}{r-1}\mathcal{K}(\Omega)\|p_n\|_{\Omega}.$$

Vælg nu $r = 1 + (n+1)^{-1}$. Den reelle funktion $x \mapsto (1 + x^{-1})^x$ er voksende mod e, og der gælder dermed

$$\|p_n(A)\| \leq e(n+1)\mathcal{K}(\Omega)\|p_n\|_{\Omega}. \qquad \square$$

3.1.1 Faberpolynomier

Mange af kapitlets følgende resultater benytter Faberpolynomier, som defineres her. Disse har den egenskab, at de hører til et givet område, hvilket uddybes senere, og dette bliver nyttigt i forbindelse med Kreisskonstanten. Afsnittet er baseret på [Smirnov og Lebedev, 1968].

Definition 3.5 (Faberpolynomium)
Givet et kompakt og enkeltsammenhængende område $\Omega \subset \mathbb{C}$ med ydre afbildning $\Phi(z) = dz + d_0 + \frac{d_1}{z} + \cdots$ givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, defineres F_n som polynomialdelen af Φ^n.

Det ses, at F_n er et polynomium af grad n med højestegradskoefficienten d^n. Der gælder således $\Phi(z)^n = F_n(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{z^k}$, og dermed for $r > 1$, så $z \in \operatorname{int}\Omega_r$, og for $R > |z|$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw = F_n(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2\pi i}\int_{\partial B_R} \frac{1}{w^k(w-z)}dw,$$

hvor sum og integration kan ombyttes, da rækken er ligeligt konvergent. Disse integraler kan nu vurderes ved

$$\left|\int_{\partial B_R} \frac{1}{w^k(w-z)}dw\right| \leq \frac{2\pi R}{R^k(R-|z|)} \to 0 \text{ for } R \to \infty,$$

hvormed integralet er nul, og der gælder

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw, \tag{3.3}$$

når $z \in \operatorname{int}\Omega_r$. Dette kan omskrives til

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}w^n dw. \tag{3.4}$$

Funktionen $w \mapsto \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$ er holomorf for $|w| \geq r$, og der gælder

$$\lim_{w\to\infty} \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \frac{c - \frac{c_1}{w^2} - \cdots}{-z + cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \cdots} = 0,$$

og dermed indeholder Laurentrækken for $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$ kun led med negative eksponenter. Ifølge (3.4) er koefficienten til $w^{-(n+1)}$ givet ved $F_n(z)$, og der gælder dermed

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}. \tag{3.5}$$

Dermed er venstresiden en frembringerfunktion for Faberpolynomierne. Bemærk, at den følgende sætning sammen med rodkriteriet giver, at rækken er ligeligt konvergent for $|w| > |\Phi(z)|$.

Sætning 3.6
For $z \in \Omega_r^c$ og $r > 1$ gælder

$$|F_n(z)| \leq |\Phi(z)|^n + \frac{\mathcal{L}(C_r)r^n}{2\pi \operatorname{dist}(z, C_r)}, \tag{3.6}$$

hvor $\mathcal{L}(C_r)$ er længden af kurven C_r. Endvidere gælder

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n(z)} = \Phi(z). \tag{3.7}$$

Bevis
Lad R og r være valgt, så $R > r > 1$, og $z \in \Omega_r^c \cap \operatorname{int}\Omega_R$. Da gælder ifølge Cauchys integralformel [Conway, 1978, Theorem IV.5.6], at $\Phi(z)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{C_r}} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw$, hvor $\overleftarrow{C_r}$ er kurven C_r med modsat omløbsretning. Således giver (3.3), at

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw = \Phi(z)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw,$$

hvilket giver ligningen

$$F_n(z) = \Phi(z)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw \tag{3.8}$$

Normen af integralet kan nu vurderes ved

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw\right| \leq \frac{\mathcal{L}(C_r)r^n}{2\pi \operatorname{dist}(z, C_r)},$$

hvoraf (3.6) følger. Vælg nu $\widetilde{R}$, så $z \in C_{\widetilde{R}}$. Af (3.8) fås

$$\frac{F_n(z)}{\Phi(z)^n} = 1 + \frac{1}{\Phi(z)^n 2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw,$$

og ifølge ovenstående normvurdering fås

$$\left|\frac{1}{\Phi(z)^n 2\pi i}\int_{C_r} \frac{\Phi(w)^n}{w-z}dw\right| \le \frac{\mathcal{L}(C_r)}{2\pi \operatorname{dist}(z, C_r)}\left(\frac{r}{\widetilde{R}}\right)^n.$$

Således fås

$$1 - \frac{\mathcal{L}(C_r)}{2\pi \operatorname{dist}(z, C_r)}\left(\frac{r}{\widetilde{R}}\right)^n \le \frac{F_n(z)}{\Phi(z)^n} \le 1 + \frac{\mathcal{L}(C_r)}{2\pi \operatorname{dist}(z, C_r)}\left(\frac{r}{\widetilde{R}}\right)^n.$$

Deraf fås, at $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(z)}{\Phi(z)^n} = 1$, eller ækvivalent $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n(z)} = \Phi(z)$. □

Beviset for sætning 3.4 benytter sig af normvurdering af et integral, og for at lave tilsvarende for Faberpolynomier benyttes følgende omskrivning.

Lemma 3.7
For Faberpolynomiet F_n hørende til Ω gælder

$$F_n(A) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} w^n \Psi'(w) R_A(\Psi(w))dw$$

for $r > 1$.

Beviset forløber analogt med udregningerne ved (3.3) og (3.4).

Af frembringerfunktionen for Faberpolynomierne kan man også udlede en rekursionsformel for disse. For $\Psi(w) = cw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{w^n}$ er følgende udsagn ækvivalente:

$$\begin{aligned}
\frac{w\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^n} \\
cw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-nc_n}{w^n} &= \left(cw - z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{w^n}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^n} \\
cw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-nc_n}{w^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cF_n(z)}{w^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{zF_n(z)}{w^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k F_{n-k}(z)}{w^n} \\
cw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-nc_n}{w^n} &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{cF_{n+1}(z)}{w^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{zF_n(z)}{w^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k F_{n-k}(z)}{w^n},
\end{aligned}$$

hvor det benyttes, at begge rækker i den dobbelte række er ligeligt konvergente for store z, og formlen for produkt af rækker, [Wade, 2004, Theorem 7.33]. Ved at sammenligne potensrækkerne fås for $n \ge 1$, at $-nc_n = cF_{n+1}(z) - zF_n(z) + \sum_{k=0}^{n} c_k F_{n-k}(z)$, eller ækvivalent for $n \ge 2$, at $F_n(z) = \frac{z}{c}F_{n-1}(z) - n\frac{c_{n-1}}{c} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{c_k}{c} F_{n-k-1}(z)$, hvilket giver rekursionsformlen

$$\begin{aligned}
&F_0(z) \equiv 1, \quad F_1(z) = dz + d_0, \\
&F_n(z) = \frac{z}{c}F_{n-1}(z) - n\frac{c_{n-1}}{c} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{c_k}{c} F_{n-k-1}(z) \quad \text{for } n \ge 2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Det er klart, at ethvert Faberpolynomium er en hel funktion, uanset hvilket område og hvilken tilhørende ydre afbildning, det er defineret ud fra. At et Faberpolynomium hører til et bestemt område, bunder dog i det problem, som Georg Faber løste i [Faber, 1903], nemlig om der til et givet område i det komplekse plan eksisterer en følge af polynomier, så enhver funktion, der er holomorf på området, kan skrives som en række af disse polynomier, hvor kun koefficienterne afhænger af funktionen. Følgende sætning og bevis er dog fra [Smirnov og Lebedev, 1968, section 2.1.3, Theorem 1].

Sætning 3.8
Lad F_n betegne Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω, og lad f være holomorf på $\operatorname{int}\Omega_R$ for et $R > 1$, men ikke på $\operatorname{int}\Omega_{r'}$ for $r' > R$. Da gælder

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z) \text{ for } z \in \operatorname{int}\Omega_R, \text{ hvor} \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw \text{ for } 1 < r < R. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Denne Faberrække er entydigt bestemt ved (3.10) *og er ligeligt konvergent på enhver kompakt delmængde af* $\operatorname{int}\Omega_R$, *og divergent uden for.*

Ovenstående er opfyldt, hvis og kun hvis

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}. \tag{3.11}$$

Bevis
Vælg $z \in \operatorname{int}\Omega_R$, og bestem r_1 og r_2 ved $z \in C_{r_2}$ og $r_2 < r_1 < R$. Da gælder

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r_1}} f(\Psi(w)) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r_1}} f(\Psi(w)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r_1}} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw \, F_n(z), \end{aligned} \tag{3.12}$$

hvor ombytning af sum og integration er mulig, da den oprindelige række er ligeligt konvergent, hvormed Faberrækken også bliver det. Dette er netop (3.10). Bemærk, at integrationskurven kan vælges frit, så længe $1 < r_1 < R$. For $M(r_1) = \sup_{|w|=r_1} |f(\Psi(w))|$ gælder, at $|a_n| \le r_1^{-n} M(r_1)$, og dermed

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_1} \sqrt[n]{M(r_1)} = \frac{1}{r_1}.$$

Da dette gælder for alle $1 < r_1 < R$, fås

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{R}.$$

Antag nu, at uligheden er skarp. Da eksisterer et r_0, så $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r_0}$, og dermed $r_2 < R < r_0$. Da fås ifølge sætning 3.6, at

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n F_n(z)|} = \frac{1}{r_0}|\Phi(z)| = \frac{r_2}{r_0} < 1, \tag{3.13}$$

da $z \in C_{r_2}$. Vælg nu q, så $\frac{r_2}{r_0} < q < 1$. Da $\{|a_n F_n(z)|\}$ er voksende for store n, fås, at $|a_n F_n(z)| < q^n$. Ved sammenligning med den geometriske række fås dermed, at rækken i (3.10) er konvergent. Da dette argument kan gennemføres for alle $r_2 < r_0$, er rækken konvergent på $\operatorname{int}\Omega_{r_0}$, hvormed f er holomorf på $\operatorname{int}\Omega_{r_0}$, hvilket er en modstrid. Dermed må (3.11) være opfyldt. Bemærk, at hvis $z \in C_r$ for et $r > R$ gælder tilsvarende $\sqrt[n]{|a_n F_n(z)|} = \frac{r}{R} > 1$, og dermed $|a_n F_n(z)| > 1$ for store n, hvormed rækken divergerer.

Det vises nu, at rækkeudviklingen er entydig. Antag, at f er holomorf på $\operatorname{int}\Omega_R$ og har en Faberrække $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k F_k(z)$. Bemærk, at da F_k er polynomialdelen af Φ^k, gælder $F_k(z) = \Phi(z)^k + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{(k)} w^{-j}$, hvor rækken er ligeligt konvergent. Således fås

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{F_k(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_r} \frac{\Phi(\Psi(w))^k}{w^{n+1}}dw + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{(k)} \int_{\partial B_r} w^{-(j+n+1)}dw\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2\pi i}\int_{\partial B_r} w^{k-n-1}dw \\
&= \alpha_n,
\end{aligned}$$

da w^m har en stamfunktion for $m \neq -1$, og $\int_{\partial B_r} w^{-1}dw = 2\pi i$. Det er således vist, at rækken er entydig.

Antag nu, at f opfylder (3.11). Ved samme argument som ved (3.13) ses, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ konvergerer, og af (3.12) ses, at (3.10) er opfyldt. Det står nu tilbage at vise, at f ikke kan være holomorf uden for $\operatorname{int}\Omega_R$. Antag omvendt, at f er holomorf på $\operatorname{int}\Omega_r$, hvor $r > R$. Da gælder ifølge første del af beviset, at $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} \neq \frac{1}{R}$, hvilket er en modstrid. □

3.1.2 Generaliseringer med Faberpolynomier

Analogt med sætning 3.4 vises nu vha. lemma 3.7, at sætning 2.14 også har en anden udvidelse til operatorer med spektrum uden for enhedscirklen. Bemærk, at Faberpolynomiet af grad n hørende til enhedscirklen netop er z^n, da der i dette tilfælde gælder $\Phi(z) = z$.

Sætning 3.9
Hvis $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, så $\sigma(A) \subseteq \Omega$, og F_n er Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω, gælder, at

$$\|F_n(A)\| \le e(n+1)\mathcal{K}(\Omega).$$

Bevis
Fra lemma 3.7 fås, at

$$F_n(A) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} w^n \Psi'(w) R_A(\Psi(w)) dw$$

for $r > 1$. Da gælder

$$\begin{aligned} \|F_n(A)\| &\leq \frac{r^n}{2\pi} \int_{\partial B_r} |\Psi'(w)| \|R_A(\Psi(w))\| |dw| \\ &= \frac{r^n}{2\pi} \int_{C_r} \|R_A(z)\| |dz|, \end{aligned}$$

da $\Psi(\partial B_r) = C_r$. Ifølge definitionen på Kreisskonstanten, definition 2.30, gælder $\|R_A(z)\| \leq \frac{|\Phi'(z)|\mathcal{K}(\Omega)}{r-1}$ for $z \in C_r$, og ifølge udregningen ved (3.2) fås

$$\|F_n(A)\| \leq \frac{r^n \mathcal{K}(\Omega)}{2\pi(r-1)} \int_{C_r} |\Phi'(z)| |dz| = \frac{r^{n+1}\mathcal{K}(\Omega)}{r-1}.$$

Ved at vælge $r = 1 + (n+1)^{-1}$ fås

$$\|F_n(A)\| \leq e(n+1)\mathcal{K}(\Omega). \qquad \square$$

Analogt med Kreiss' matrixsætning, sætning 2.16, ønskes også en nedre grænse ved Kreisskonstanten. Faktisk benytter beviset for en sådan samme strategi som det oprindelige bevis. Følgende lemma benyttes.

Lemma 3.10
For $z \in \Omega^c$ gælder $(\xi - z)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)^{n+1}} F_n(\xi)$ for alle $\xi \in \Omega$, og dermed gælder for $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\sigma(A) \subseteq \Omega$, at

$$R_A(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)^{n+1}} F_n(A)$$

for alle $z \in \Omega^c$.

Bevis
Lad $z \in \Omega^c$ være fast. Funktionen $f(\xi) = (\xi - z)^{-1}$ er holomorf på Ω_r for $r > 1$. Ifølge sætning 3.8 gælder, at $f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(\xi)$ for alle $\xi \in \Omega_r \setminus C_r$, hvor

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw$$

for $1 < r_1 < r$. Således fås for $r_2 > r$, at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} \frac{1}{(\Psi(w) - z) w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{\Phi'(w)}{(w - z)\Phi(w)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{\Phi'(w)}{(w - z)\Phi(w)^{n+1}} dw \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{C_{r_2}}} \frac{\Phi'(w)}{(w - z)\Phi(w)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{C_{r_2}}} \frac{\Phi'(w)}{(w-z)\Phi(w)^{n+1}} dw.$$

Ved $\overleftarrow{C_{r_2}}$ forstås kurven C_{r_2} med modsat omløbsretning. Indekstallet for disse kurver skal nu vurderes. For alle $\zeta \in \Omega$ gælder

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{1}{w-\zeta} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(\zeta)} \frac{1}{w-\zeta} dw = 1$$

for et passende lille s, og tilsvarende

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{C_{r_2}}} \frac{1}{w-\zeta} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{\partial B_s(\zeta)}} \frac{1}{w-\zeta} dw = -1.$$

For z gælder endvidere $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{1}{w-z} dw = 0$ og $\frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{C_{r_2}}} \frac{1}{w-z} dw = -1$, jf. singulariteternes placering. Se figur 3.1. Således giver Cauchys integralformel [Conway, 1978, Theorem IV.5.6], at

$$a_n = -\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)^{n+1}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{C_{r_2}}} \frac{\Phi'(w)}{(w-z)\Phi(w)^{n+1}} dw.$$

Dette integral skal nu vurderes. Der gælder

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{C_{r_2}}} \frac{\Phi'(w)}{(w-z)\Phi(w)^{n+1}} dw \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\overleftarrow{\partial B_{r_2}}} \frac{1}{(\Psi(w)-z)w^{n+1}} dw \right| \\
&\leq r_2 \sup_{|w|=r_2} \frac{1}{|\Psi(w)-z| r_2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{r_2^n} \sup_{|w|=r_2} \frac{1}{|\Psi(w)-z|}.
\end{aligned}$$

Da $\Psi(w) \to \infty$ for $r_2 \to \infty$, går denne normvurdering mod nul, hvormed integralet er nul. Således fås

$$\frac{1}{\xi - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)^{n+1}} F_n(\xi),$$

og dermed for $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\sigma(A) \subseteq \Omega$,

$$R_A(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)^{n+1}} F_n(A),$$

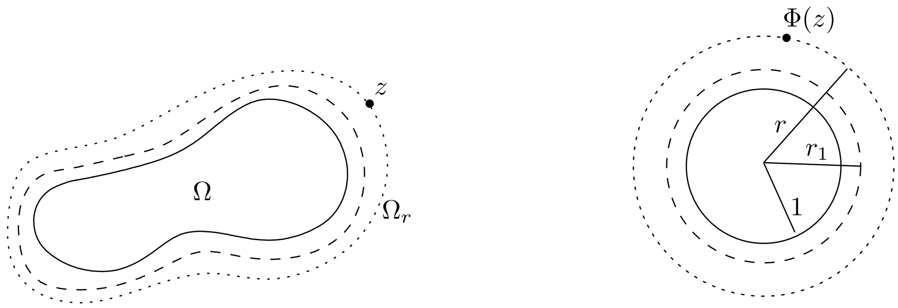
hvilket var det ønskede. □

Følgende sætning er en udvidelse af den venstre ulighed i Kreiss' matrixsætning, sætning 2.16, og benytter sig grundlæggende af samme ide.

Sætning 3.11
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Givet $\Omega \subset \mathbb{C}$, hvor $\sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\|$ er endelig, gælder $\sigma(A) \subseteq \Omega$, og

$$\mathcal{K}(\Omega) \leq \sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\|.$$

Bevis
Først vises $\sigma(A) \subseteq \Omega$. Antag omvendt, at der eksisterer et $\lambda \in \sigma(A) \cap \Omega^c$. Der gælder $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ for et vilkårligt polynomium p ifølge spektralafbild-



Figur 3.1: Illustration af kurverne i beviset for lemma 3.10.

ningssætningen [Reed og Simon, 1980], og dermed fås ifølge spektralradiusformlen, [Reed og Simon, 1980], at $\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\sigma(p(A))} |\lambda| \leq \|p(A)\|$, og dermed specielt, at $|F_n(\lambda)| \leq \|F_n(A)\|$. Dermed gælder $\sup_{n\geq 0} |F_n(\lambda)| \leq \sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\|$, hvilket viser, at venstresiden er endelig. Tillige gælder ifølge sætning 3.6, at $\lim_{n\to\infty} |F_n(\lambda)|^{1/n} = |\Phi(\lambda)|$, og da $|\Phi(\lambda)| > 1$, må der gælde $\sup_{n\geq 0} |F_n(\lambda)| = \infty$, hvilket er en modstrid, og dermed er $\sigma(A) \subseteq \Omega$. Ifølge lemma 3.10 gælder

$$\begin{aligned}\|R_A(z)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)^{n+1}}\right| \|F_n(A)\| \\ &\leq \left(\sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\|\right) \left|\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\Phi(z)|^n} \\ &= \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)|-1} \sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\|,\end{aligned}$$

og dermed

$$\frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)|-1)}{|\Phi'(z)|} \leq \sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\|,$$

hvormed det ønskede opnås ved at tage supremum over z. □

Ovenstående sætning findes i en analog udgave med vilkårlige polynomier i stedet for Faberpolynomier. For at vise dette kræves følgende tekniske lemma.

Lemma 3.12
Lad $\{p_k\}_{k\geq 0}$ være en følge af polynomier, så p_k er af grad k. Da eksisterer konstanter a_{kj}, så

$$p_k(A) = \sum_{j=0}^{k} a_{kj} F_j(A). \tag{3.14}$$

Lad nu $\mathbf{a}$ være den nedre trekantsmatrix $\mathbf{a} = [a_{kj}]_{n+1\times n+1}$ bestående af koefficienter til de $n+1$ første polynomier, og lad $\mathbf{b} = [b_{kj}]_{n+1\times n+1}$ betegne dens inverse. Da gælder

$$F_j(A) = \sum_{k=0}^{j} b_{jk} p_k(A). \tag{3.15}$$

Bevis
Ligning (3.14) er ækvivalent med

$$\begin{bmatrix} p_0(A) \\ \vdots \\ p_n(A) \end{bmatrix} = \mathbf{a} \begin{bmatrix} F_0(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{bmatrix}.$$

Hvis $\mathbf{a}$ er invertibel med invers $\mathbf{b} = [b_{kj}]_{n+1\times n+1}$, gælder dermed

$$\begin{bmatrix} F_0(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{bmatrix} = \mathbf{b} \begin{bmatrix} p_0(A) \\ \vdots \\ p_n(A) \end{bmatrix}.$$

Da $\mathbf{b}$ også er en nedre trekantsmatrix, giver dette (3.15). $\square$

Hvis p_n vælges til F_n, giver nedenstående sætning samme resultat som sætning 3.11. Det ses, at hvis p_n har netop grad n for alle n, så eksisterer $\mathbf{b}$, men dette sikrer ikke, at $\|\mathbf{b}\|_1 := \sup_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{j}|b_{jk}|$ er endelig.

Sætning 3.13
Lad $\{p_n\}_{n\geq 0}$ være en følge af polynomier, så p_n er af grad n, og lad $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være defineret som i lemma 3.12. Hvis der endvidere gælder $\|\mathbf{b}\|_1 := \sup_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{j}|b_{jk}| < \infty$ og $\sup_{n\geq 0}\|p_n(A)\| < \infty$ for $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da gælder

$$\mathcal{K}(\Omega) \leq \|\mathbf{b}\|_1 \sup_{n\geq 0}\|p_n(A)\|.$$

Da gælder, at $\sup_{n\geq 0}\|F_n(A)\| < \infty$, og endvidere er $\sigma(A) \subseteq \Omega$.

Bevis
Ifølge lemma 3.12 gælder

$$F_j(A) = \sum_{n=0}^{j} b_{jn}p_n(A),$$

og dermed

$$\|F_j(A)\| \leq \left(\sup_{n\geq 0}\|p_n(A)\|\right)\sum_{k=0}^{j}|b_{jk}|.$$

Ved at tage supremum over j opnås

$$\sup_{j\geq 0}\|F_j(A)\| \leq \sup_{n\geq 0}\|p_n(A)\| \sup_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{j}|b_{jk}|,$$

og dermed gælder ifølge sætning 3.11, at $\sigma(A) \subseteq \Omega$, og

$$\mathcal{K}(\Omega) \leq \sup_{n\geq 0}\|p_n(A)\|\|\mathbf{b}\|_1.$$ $\square$

At beregne Kreisskonstanten kræver kendskab til afbildningen Φ, og det kan derfor være en beregningsmæssig fordel at benytte uligheden $\mathcal{K}(\Omega) \leq 2\tilde{\mathcal{K}}(\Omega)$ givet i sætning 2.31. At bestemme den numeriske værdimængde kan gøres hurtigt og numerisk stabilt, så hvis man kan bestemme et $r \geq 1$, så $W(A) \subseteq \Omega_r$, kan $\mathcal{K}(\Omega_r)$ erstattes af 2 i den følgende sætning, jf. sætning 2.12.

Sætning 3.14
Hvis p_n er et polynomium af grad højst n, og F_n er Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω, gælder

(i) $\|p_n(A)\| \leq e(n+1)r^n\mathcal{K}(\Omega_r)\|p_n\|_\Omega$

(ii) $\|F_n(A)\| \leq e(n+1)r^n\mathcal{K}(\Omega_r)$,

og hvis $\sup_{n\geq 0}\frac{\|F_n(A)\|}{r^n}$ *er endeligt, gælder*

(iii) $\mathcal{K}(\Omega_r) \leq \sup_{n\geq 0}\frac{\|F_n(A)\|}{r^n}$.

Endvidere gælder

$$\mathcal{K}(\Omega_r) = \sup_{z\in\Omega_r^c}\frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)|-r)}{|\Phi'(z)|}.$$

Bevis
Da $\sigma(A) \subseteq \Omega \subseteq \Omega_r$, gælder ifølge sætning 3.4, at $\|p_n(A)\| \leq e(n+1)\mathcal{K}(\Omega_r)\|p_n\|_{\Omega_r}$, og dermed fås ifølge Bernsteins lemma, lemma 3.3,

$$\|p_n(A)\| \leq e(n+1)r^n\mathcal{K}(\Omega_r)\|p_n\|_\Omega,$$

hvilket er punkt *(i)*. For at vise punkt *(ii)* og *(iii)* benyttes, at afbildningen givet i Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, hørende til Ω_r, er $\frac{\Phi(\cdot)}{r}$. Det vises, at $\frac{\Phi(\cdot)}{r} : \Omega_r^c \to \overline{B}_1^c$ er en bijektion, hvormed det ønskede er opfyldt. For $z \in \Omega_r^c$ gælder $\frac{|\Phi(z)|}{r} > \frac{r}{r} = 1$, og da Φ er bijektiv, er $\frac{\Phi(\cdot)}{r}$ injektiv, og der eksisterer for ethvert $w \in \overline{B}_1^c$ et $z \in \Omega^c$, så $\Phi(z) = rw$. Bemærk, at $z \in \Omega_r^c$, da $|w| > 1$, og dermed er $\frac{\Phi(z)}{r} = w$, hvormed $\frac{\Phi(\cdot)}{r}$ er bijektiv. Lad i resten af beviset $F_n^{(\Omega)}$ betegne Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω, og $F_n^{(\Omega_r)}$ betegne Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω_r. Da $F_n^{(\Omega_r)}$ er polynomialdelen af $(\frac{d}{r}z + \frac{d_0}{r} + \frac{d_1}{rz} + \cdots)^n$, gælder $r^nF_n^{(\Omega_r)} = F_n^{(\Omega)}$. Da giver sætning 3.9, at $\|F_n^{(\Omega_r)}(A)\| \leq e(n+1)\mathcal{K}(\Omega_r)$, og dermed er

$$\|F_n^{(\Omega)}(A)\| \leq e(n+1)r^n\mathcal{K}(\Omega_r),$$

hvilket er punkt *(ii)*. Hvis $\sup_{n\geq 0}\frac{\|F_n^{(\Omega)}(A)\|}{r^n} = \sup_{n\geq 0}\|F_n^{(\Omega_r)}(A)\|$ er endelig, fås punkt *(iii)* direkte af sætning 3.11.

Da den konforme afbildning hørende til Ω_r er $\frac{\Phi(\cdot)}{r}$, gælder

$$\mathcal{K}(\Omega_r) = \sup_{z\in\Omega_r^c}\frac{\|R_A(z)\|\left(\frac{|\Phi(z)|}{r}-1\right)}{\frac{|\Phi'(z)|}{r}} = \sup_{z\in\Omega_r^c}\frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)|-r)}{|\Phi'(z)|}. \qquad \square$$

3.2 Resultater for endeligdimensionale rum

I dette afsnit bevises nogle udvidelser af Kreiss' matrixsætning, der kun gælder for operatorer på endeligdimensionale Hilbertrum. Således vil $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ofte blive betragtet som en matrix på $\mathbb{C}^N$. For disse resultater bliver det afgørende, hvor glat $\partial\Omega$ er. Afsnittet er baseret på [Toh og Trefethen, 1999].

Den totale rotation, V, af $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hvor $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, defineres som den totale variation af en kontinuert determination, ϑ, af argumentet langs γ. Dermed er

$$V = \int_a^b \left| \frac{d}{dt}\vartheta(\gamma(t)) \right| dt = \int_a^b \frac{|\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)|}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2} dt.$$

For en udvidet definition af den totale variation, se [Conway, 1978].

Lemma 3.15
For $f \in \mathcal{H}(\Omega^c)$ gælder

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r} |\Psi'(w)^2 f'(\Psi(w))||dw| \leq &\int_{\partial B_r} |\Psi''(w) f(\Psi(w))||dw| \\ &+ \int_0^{2\pi} \left| \Psi'(re^{it}) \frac{d}{dt}[h(re^{it})] f(\Psi(re^{it})) \right| dt\end{aligned}$$

for alle $r > 1$, hvor $h(re^{it}) = \vartheta(re^{it}\Psi'(re^{it})^2 f'(\Psi(re^{it})))$, hvor ϑ er en kontinuert determination af argumentet. Bemærk, at både Ψ' og Ψ'' er afledede i kompleks forstand, mens h kun er reelt differentiabel.

Bevis
Bemærk, at da $|w| = r > 1$, er integralet på venstre side veldefineret. Da gælder

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r} |\Psi'(w)^2 f'(\Psi(w))||dw| &= \int_0^{2\pi} |\Psi'(re^{it})^2 f'(\Psi(re^{it})) ire^{it}| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |i||\Psi'(re^{it})^2 f'(\Psi(re^{it})) re^{it}| dt \\ &= \int_0^{2\pi} -i^2 \Psi'(re^{it})^2 f'(\Psi(re^{it})) re^{it} e^{-ih(re^{it})} dt,\end{aligned}$$

hvor $h(re^{it}) = \vartheta(\Psi'(re^{it})^2 f'(\Psi(re^{it})) re^{it})$. Således fås

$$\int_{\partial B_r} |\Psi'(w)^2 f'(\Psi(w))||dw| = -i \int_0^{2\pi} \Psi'(re^{it}) e^{-ih(re^{it})} \frac{d}{dt}\left[f(\Psi(re^{it}))\right] dt,$$

og ved delvis integration opnås

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r} |\Psi'(w)^2 f'(\Psi(w))||dw| &= \left| i \int_0^{2\pi} \Psi''(re^{it}) ire^{it} e^{-ih(re^{it})} f(\Psi(re^{it})) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \Psi'(re^{it}) e^{-ih(re^{it})} \frac{d}{dt}[h(re^{it})] f(\Psi(re^{it})) dt \right| \\ &\leq \int_{\partial B_r} |\Psi''(w) f(\Psi(w))||dw| \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \left| \Psi'(re^{it}) \frac{d}{dt}[h(re^{it})] f(\Psi(re^{it})) \right| dt,\end{aligned}$$

hvilket er det ønskede. □

Følgende to lemmaer er anført uden bevis. For bevis, se [Toh og Trefethen, 1999].

Lemma 3.16
Lad $r = \frac{p}{q}$ være en rational funktion, så p og q er polynomier, hvor p er af grad højst $N-1$ og q er af grad N. Hvis q ikke har nogen rødder i Ω^c, da gælder

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h(\varrho e^{it}) \right| dt \leq (4N+1)V_\varrho$$

for alle $\varrho > 1$, hvor $h(\varrho e^{it}) = \vartheta(\varrho e^{it}\Psi'(\varrho e^{it})^2 r'(\Psi(\varrho e^{it})))$, og V_ϱ er den totale rotation af C_ϱ.

Lemma 3.17
For ethvert $\varrho > 1$ gælder

$$\int_{\partial B_\varrho} \left| \frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)} \right| |dw| \leq \frac{2V_\varrho}{\pi} \left(1 + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\varrho+1}{\varrho-1}\right)\right),$$

hvor V_ϱ er den totale rotation af C_ϱ.

Lemma 3.18
For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\dim \mathcal{H} = N < \infty$, og $u, v \in \mathcal{H}$, gælder, at funktionen givet ved $r(z) = \langle u, R_A(z)v\rangle$ er en rational funktion, der kan skrives som $r = \frac{p}{q}$, hvor p er et polynomium af grad højst $N-1$, og q er det karakteristiske polynomium for A, og dermed af grad N og med rødder i $\sigma(A)$.

Bevis
Ifølge [Reed og Simon, 1980, Theorem II.7] er $\mathcal{H}$ isomorf med $\mathbb{C}^N$ ved en unitær operator. Det er dermed tilstrækkeligt at vise resultatet for $\mathbb{C}^N$. Da $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$ gælder ifølge Cramers regel [Lay, 2002], at $R_A(z) = (\det(A - zI))^{-1}R$, hvor $R = [r_{ij}]_{N\times N}$, og $r_{ij} = (-1)^{i+j}\det((A-zI)_{ji})$, hvor $(A-zI)_{ji}$ er matricen hørende til operatoren $A - zI$, hvor række j og søjle i er fjernet. Bemærk, at $q = \det(A - zI)$ er det karakteristiske polynomium for A, og at r_{ij} er et polynomium af grad højst $N-1$. Da gælder for $u = (u_1, \ldots, u_N)$ og $v = (v_1, \ldots, v_N)$, at

$$\begin{aligned}\langle u, R_A(z)v\rangle &= q^{-1}\langle u, Rv\rangle \\ &= q^{-1}\sum_{i=1}^N \bar{u}_i \sum_{j=1}^N v_j r_{ij} \\ &= \frac{p}{q},\end{aligned}$$

hvor $p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{u}_i v_j r_{ij}$ er en sum af polynomier af grad højst $N-1$. □

Sætning 3.19
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\dim \mathcal{H} = N < \infty$, og $\sigma(A) \subseteq \Omega$. Lad V_ϱ betegne den totale rotation af C_ϱ. Da gælder for alle $n \geq 0$

$$\|F_n(A)\| \leq \frac{e\mathcal{K}(\Omega)V_{1+\frac{1}{n}}}{2\pi}(4N + 1 + \alpha_n),$$

hvor

$$\alpha_n = \frac{2}{V_{1+\frac{1}{n}}} \int_{|w|=1+\frac{1}{n}} \left| \frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)} \right| |dw| \leq \frac{4}{\pi}(1 + \operatorname{arcsinh}(2n+1)). \tag{3.16}$$

Bevis
Der gælder ifølge lemma 3.7, at

$$F_n(A) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho} w^n R_A(\Psi(w))\Psi'(w)dw$$

for $\varrho > 1$. Lad $u, v \in \mathcal{H}$ opfylde $\|u\| = \|v\| = 1$. Da gælder

$$\langle u, F_n(A)v\rangle = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho} w^n r(\Psi(w))\Psi'(w)dw,$$

hvor $r(z) = \langle u, R_A(z)v\rangle$ er uden poler i Ω^c ifølge lemma 3.18. Delvis integration giver

$$2\pi i\langle u, F_n(A)v\rangle = \frac{1}{n+1}\int_{\partial B_\varrho} w^{n+1}\frac{d}{dw}[r(\Psi(w))\Psi'(w)]dw,$$

og dermed er

$$2\pi|\langle u, F_n(A)v\rangle| \leq \frac{\varrho^{n+1}}{n+1}\left(\int_{\partial B_\varrho} |r'(\Psi(w))\Psi'(w)^2||dw| + \int_{\partial B_\varrho} |r(\Psi(w))\Psi''(w)||dw|\right).$$

Da kan lemma 3.15 benyttes, så

$$\begin{aligned}2\pi|\langle u, F_n(A)v\rangle| &\leq \frac{\varrho^{n+1}}{n+1}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{d}{dt}[h(\varrho e^{it})]\Psi'(\varrho e^{it})r(\Psi(\varrho e^{it}))\right|dt\right.\\ &\qquad\left. + 2\int_{\partial B_\varrho}|r(\Psi(w))\Psi''(w)||dw|\right)\\ &\leq \frac{\varrho^{n+1}}{n+1}\|r(\Psi(w))\Psi'(w)\|_{\partial B_\varrho}\\ &\qquad\cdot\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{d}{dt}h(\varrho e^{it})\right|dt + 2\int_{\partial B_\varrho}\left|\frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)}\right||dw|\right),\end{aligned}$$

hvor $h(\varrho e^{it}) = \vartheta(\varrho e^{it}\Psi'(\varrho e^{it})^2 r'(\Psi(\varrho e^{it})))$. For alle $w \in \partial B_\varrho$ eksisterer et $z \in C_\varrho$, så $w = \Phi(z)$, og dermed er

$$\begin{aligned}\sup_{w\in\partial B_\varrho}|\langle u, R_A(\Psi(w))v\rangle\Psi'(w)| &= \sup_{z\in C_\varrho}|\langle u, R_A(z)v\rangle\Psi'(\Phi(z))|\\ &\leq \sup_{z\in C_\varrho}\frac{\|R_A(z)\|}{|\Phi'(z))|}\\ &= \frac{1}{\varrho-1}\sup_{z\in C_\varrho}\frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)|-1)}{|\Phi'(z)|}\\ &\leq \frac{\mathcal{K}(\Omega)}{\varrho-1}.\end{aligned}$$

Da gælder

$$2\pi|\langle u, F_n(A)v\rangle| \leq \frac{\varrho^{n+1}\mathcal{K}(\Omega)}{(n+1)(\varrho-1)}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{d}{dt}h(\varrho e^{it})\right|dt + 2\int_{\partial B_\varrho}\left|\frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)}\right||dw|\right).$$

Vælg nu $\varrho = 1 + \frac{1}{n}$. Da fås ifølge lemma 3.16

$$2\pi|\langle u, F_n(A)v\rangle| \leq \frac{n(1+\frac{1}{n})^{n+1}\mathcal{K}(\Omega)}{n+1}\left((4N+1)V_{1+\frac{1}{n}} + 2\int_{|w|=1+\frac{1}{n}}\left|\frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)}\right||dw|\right)$$
$$= \frac{n(1+\frac{1}{n})^{n+1}\mathcal{K}(\Omega)V_{1+\frac{1}{n}}}{n+1}\left(4N+1+\alpha_n\right),$$

hvor $\alpha_n = \frac{2}{V_{1+\frac{1}{n}}}\int_{|w|=1+\frac{1}{n}}\left|\frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)}\right||dw|$. Bemærk, at uligheden i (3.16) opnås vha. lemma 3.17. Da den reelle funktion $x \mapsto (1+x^{-1})^x$ er voksende mod e, fås

$$|\langle u, F_n(A)v\rangle| \leq \frac{e\mathcal{K}(\Omega)V_{1+\frac{1}{n}}}{2\pi}(4N+1+\alpha_n).$$

Vælg nu $u = \|F_n(A)v\|^{-1}F_n(A)v$, og tag supremum over $\|v\| = 1$. Derved opnås det ønskede. □

Der er endnu ikke givet en øvre grænse for $\|F_n(A)\|$, der er uafhængig af n. Følgende resultat er af denne type, men forudsætter, af $\partial\Omega$ er passende glat.

Sætning 3.20
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\dim \mathcal{H} = N < \infty$. Antag, at $\sigma(A) \subseteq \Omega$, og $\partial\Omega$ er $\mathcal{C}^2$. Da gælder

$$\sup_{n\geq 0}\|F_n(A)\| \leq C_\Omega e N\mathcal{K}(\Omega),$$

hvor C_Ω er en konstant.

Bevis
Ifølge sætning 3.19 gælder

$$\|F_n(A)\| \leq \frac{e\mathcal{K}(\Omega)}{2\pi}\left(4NV_{1+\frac{1}{n}} + V_{1+\frac{1}{n}} + 2\int_{|w|=1+\frac{1}{n}}\left|\frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)}\right||dw|\right).$$

Ifølge [Kövari og Pommerenke, 1967, s. 197] vokser $V_{1+\frac{1}{n}}$ mod V, når n vokser. Ifølge [Gilbarg og Trudinger, 1983, Theorem 6.19] udvider Ψ' og Ψ'' kontinuert til $\partial\Omega$, når denne er $\mathcal{C}^2$. Da er $M = \max_{1\leq|w|\leq 2}\left|\frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)}\right|$ endelig, og der gælder således $\|F_n(A)\| \leq e\mathcal{K}(\Omega)NC_\Omega$, hvor

$$NC_\Omega = \frac{1}{2\pi}\left((4N+1)V + 4\pi M\right).$$ □

De to ovenstående sætninger kan, analogt med sætning 3.14, skaleres til Ω_r. Beviset forløber også analogt ved at benytte $r^n F_n^{(\Omega_r)} = F_n^{(\Omega)}$. Dette kan f.eks. være en fordel, hvis C_r har mindre total rotation end $\partial\Omega$. Selvom $C_r = \Psi(\partial B_r)$ er en $\mathcal{C}^2$-kurve, er det ved skalering ikke muligt at give en grænse, der er uafhængig af n, da skaleringen giver en faktor r^n.

3.3 Rational ydre afbildning

I dette afsnit vil Kreiss' matrixsætning og Faberpolynomierne blive kædet sammen med Chebyshevpolynomier, og beregneligheden af Faberpolynomier og Kreisskonstanten kommenteres også. Afsnittet er baseret på [Liesen, 2001], [Toh og Trefethen, 1999], [Mason og Handscomb, 2003] og [Achieser, 2003]. Kun når Ω er glat, er der indtil videre givet en øvre grænse, der er uafhængig af n, analogt med sætning 2.16. Her gives en anden grænse, der gælder, hvis Ψ er en rational funktion.

Sætning 3.21
Lad $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\dim \mathcal{H} = N < \infty$, opfylde, at $\sigma(A) \subseteq \Omega$. Hvis den ydre afbildning hørende til Ω er på formen

$$\Psi(w) = cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \cdots + \frac{c_m}{w^m} = \frac{w^{m+1} + \mu_m w^m + \cdots + \mu_0}{\nu w^m}, \tag{3.17}$$

gælder

$$\sup_{n \geq 0} \|F_n(A)\| \leq e\widetilde{N}\mathcal{K}(\Omega),$$

hvor $\widetilde{N} = \max\{(m+1)N, (N+1)m+1\}$.

Det ses af rækkeudviklingen af Ψ i sætning 1.61, punkt *(iv)*, at dette svarer til $c_n = 0$ for $n > m$, og at $\nu = c^{-1}$, der er positiv.

Bevis
Fra lemma 3.7 fås

$$F_n(A) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B_k} w^n \Psi'(w) R_A(\Psi(w)) dw$$

for $k > 1$, og dermed for enhedsvektorer $u, v \in \mathcal{H}$

$$\langle u, F_n(A)v \rangle = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B_k} w^n \Psi'(w) r(\Psi(w)) dw,$$

hvor $r(z) = \langle u, R_A(z)v \rangle = \frac{p(z)}{q(z)}$ er en rational funktion, hvor p er af grad højst $N-1$, og q er af grad N ifølge lemma 3.18. Ved delvis integration opnås

$$2\pi i \langle u, F_n(A)v \rangle = \frac{1}{n+1} \int_{\partial B_k} w^{n+1} \frac{d}{dw}[\Psi'(w) r(\Psi(w))] dw,$$

og dermed

$$2\pi |\langle u, F_n(A)v \rangle| \leq \frac{k^{n+1}}{n+1} \int_{\partial B_k} |R'(w)||dw|,$$

hvor $R(w) = \Psi'(w) r(\Psi(w))$. Af (3.17) ses, at Ψ er en rational funktion, hvor graden af tællerpolynomiet er $m+1$, og graden af nævnerpolynomiet er m, hvormed Ψ' også er en rational funktion, og ved udregning ses, at både tæller- og nævnerpolynomiet kan vælges af grad $m+1$. Således er $R = \frac{\rho}{\chi}$ en rational funktion, hvor ρ er af grad højst $m+1+(N-1)(m+1) = (m+1)N$, og χ er af grad $m+1+Nm = (N+1)m+1$. Da gælder ifølge [Spijker, 1991], at $\int_{\partial B_k} |R'(w)||dw| \leq 2\pi\widetilde{N}\|R\|_{\partial B_k}$. Der gælder

$$\begin{aligned}
\|R\|_{\partial B_k} &= \sup_{|w|=k} |\Psi'(w)\langle u, R_A(\Psi(w))v \rangle| \\
&\leq \sup_{z \in C_k} |\Psi'(\Phi(z))| \|R_A(z)\| \\
&= \frac{1}{k-1} \sup_{z \in C_k} \frac{\|R_A(z)\|(|\Phi(z)|-1)}{|\Phi'(z)|}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\mathcal{K}(\Omega)}{k-1}.$$

Således gælder

$$|\langle u, F_n(A)v\rangle| \leq \frac{k^{n+1}}{(n+1)(k-1)}\widetilde{N}\mathcal{K}(\Omega).$$

Vælg nu $k = 1 + \frac{1}{n}$. Da fås

$$\|F_n(A)\| \leq e\widetilde{N}\mathcal{K}(\Omega)$$

ved at vælge $u = \|F_n(A)v\|^{-1}F_n(A)v$ og tage supremum over $\|v\| = 1$. Da højresiden er uafhængig af n, fås det ønskede. $\square$

Polynomierne p og q defineres nu ved

$$\Psi(w) = \frac{p(w)}{q(w)} = \frac{w^{m+1} + \mu_m w^m + \cdots + \mu_0}{\nu w^m}. \tag{3.18}$$

Det ses, at p og q ikke har fælles faktorer. Hvis $z \in \Omega_r$, og w er rod i $p(w) - zq(w)$, gælder $\Psi(w) = z$, og dermed $|w| < r$. En sådan rod noteres $w_j(z)$. Der eksisterer følgende faktorisering

$$p(w) - zq(w) = \prod_{j=1}^{l(z)}(w - w_j(z))^{m_j(z)}, \quad m_j(z) \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{l(z)} m_j(z) = m+1. \tag{3.19}$$

Lemma 3.22
Med konventionerne (3.19) *opfylder Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω følgende*

$$F_n(z) = \sum_{j=1}^{l(z)} m_j(z)w_j(z)^n \quad \text{for } n \geq 1,$$

når Ψ er på formen (3.18).

Bevis
Givet $z \in \Omega_r$ bestemmes w, så $|w| > r$. Lad f være en kontinuert determination af logaritmen. Da fås

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} &= \frac{d}{dw} f(\Psi(w) - z) \\
&= \frac{d}{dw} f\left(\frac{p(w) - zq(w)}{q(w)}\right) \\
&= \frac{d}{dw} f(p(w) - zq(w)) - \frac{d}{dw} f\left(\frac{q(w)}{\nu}\right) \\
&= \frac{d}{dw} \sum_{j=1}^{l(z)} f((w - w_j(z))^{m_j(z)}) - \frac{d}{dw} f(w^m) \\
&= \sum_{j=1}^{l(z)} \frac{m_j(z)}{w - w_j(z)} - \frac{m}{w}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{l(z)} \frac{m_j(z)}{1 - w_j(z)/w} - \frac{m}{w} \\
&= \frac{1}{w}\sum_{j=1}^{l(z)} m_j(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_j(z)^n}{w^n} - \frac{m}{w}.
\end{aligned}
$$

Bemærk, at da $|w_j(z)| < |w|$, er rækken absolut konvergent, dermed kan summerne ombyttes. Således fås

$$
\begin{aligned}
\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} &= \sum_{j=1}^{l(z)} m_j(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_j(z)^n}{w^{n+1}} - \frac{m}{w} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{l(z)} m_j(z) w_j(z)^n \right) w^{-(n+1)} - \frac{m}{w}.
\end{aligned}
$$

Ved at sammenligne med (3.5) fås resultatet. □

Chebyshevpolynomier

Nogle rationale funktioner af ovenstående type har forbindelse til Chebyshevpolynomier, som defineres her. Nogle karakteristiske egenskaber for disse skal også bevises.

Definition 3.23 (Chebyshevpolynomier)
Chebyshevpolynomiet $T_n(x)$ af grad n defineres for $x \in [-1, 1]$ ved

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \text{ hvor } x = \cos\theta,$$

eller ækvivalent

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Det er ud fra definitionen ikke tydeligt, at T_n er et polynomium. Dette vises i en sætning for sig, hvorefter andre egenskaber udledes.

Sætning 3.24
Chebyshevpolynomiet T_n er et polynomium af grad n.

Bevis
Det ses, at sætningen gælder for $n = 0$ og $n = 1$. Det vises, at $\cos(n\theta)$ er et polynomium i $\cos\theta$. Hvis $n = 2k$, gælder

$$\cos(2k\theta) = 2\cos(k\theta)^2 - 1,$$

hvilket giver det ønskede, og hvis $n = 2k + 1$, gælder

$$
\begin{aligned}
\cos((2k+1)\theta) &= \cos(2k\theta)\cos\theta - \sin(2k\theta)\sin\theta \\
&= \cos(2k\theta)\cos\theta - \cos((2k-1)\theta) + \cos(2k\theta)\cos\theta,
\end{aligned}
$$

hvilket viser det ønskede. □

Den sidste udregning i beviset kan omskrives til

$$\cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta).$$

For $x = \cos\theta$ fås dermed rekursionsformlerne for Chebyshevpolynomierne

$$\begin{aligned} &T_0(x) \equiv 1, \qquad T_1(x) = x, \\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{for } n \geq 2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Det ses heraf, at højestegradskoefficienten er 2^{n-1} for $n \geq 1$, og at T_n er hhv. lige og ulige, når n er hhv. lige og ulige. Rødderne er givet ved $n\theta = \frac{\pi}{2} + j\pi$, eller ækvivalent

$$x = \cos\left(\frac{(j-\frac{1}{2})\pi}{n}\right), \text{ for } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Dette giver netop n forskellige rødder, og dermed alle rødderne i $\mathbb{C}$. Tilsvarende kan ekstremumspunkterne for $x \in (-1,1)$ beregnes ved $0 = \frac{d}{dx}\cos(n\arccos(x)) = \frac{\sin(n\arccos(x))n}{\sqrt{1-x^2}}$, og dermed $n\arccos x = j\pi$, eller ækvivalent

$$x = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \text{ for } j \in \{1, \dots, n-1\},$$

og da T_n er et polynomium af grad n, må dette være alle ekstremumspunkterne i $\mathbb{C}$. Det ses, at værdien i disse punkter er ± 1, hvilket er det absolutte maksimum for T_n på intervallet $[-1,1]$. Bemærk, at ekstremummet også antages for $x = \pm 1$, hvilket svarer til hhv. $j = 0$ og $j = n$.

I definitionen af Chebyshevpolynomier forudsættes, at $x \in [-1,1]$, men polynomierne kan naturligvis betragtes som funktioner af en kompleks variabel. Chebyshevpolynomierne kan også udledes ved at betragte enhedscirklen i det komplekse plan, hvilket også vil bidrage til at udlede sammenhængen mellem Chebyshevpolynomier og den ydre afbildning hørende til en ellipse, og dermed Faberpolynomier.

Betragt et $w = \cos\theta + i\sin\theta$ med realdel $\cos\theta = \frac{w}{2} + \frac{1}{2w} = z$. Således gælder for w på enhedscirklen

$$\frac{w^n}{2} + \frac{1}{2w^n} = \operatorname{Re} w^n = \cos(n\theta) = T_n(z).$$

Derfor kan Chebyshevpolynomierne ligeledes defineres ved, at der for w på enhedscirklen gælder

$$T_n(z) = \frac{w^n}{2} + \frac{1}{2w^n}, \text{ hvor } \frac{w}{2} + \frac{1}{2w} = z. \tag{3.21}$$

Ekstremumspunkterne for Chebyshevpolynomier kaldes Chebyshevpunkter, og det ses, at punkterne ligger tættere i enderne af intervallet $[-1,1]$, da punkterne kan betragtes som projektioner af punkter, der er ækvidistante på enhedscirklen, ned på den reelle akse. Benyttes disse som interpolationspunkter, svarer dette til en højere vægtning mod intervallets endepunkter.

Inden der udledes en sammenhæng mellem Chebyshevpolynomier og Faberpolynomier, vises en af Chebyshevpolynomiernes vigtigste egenskaber ved hjælp af de følgende to sætninger. I det følgende betegner $\|\cdot\|_\infty$ supremumsnormen på $[-1,1]$, og et polynomium siges at være monisk, hvis højestegradskoefficienten er 1.

Sætning 3.25
Lad $\mathcal{P}_n$ betegne mængden af moniske polynomier af grad n med reelle koefficienter. Der eksisterer et polynomium $T_n \in \mathcal{P}_n$, så

$$H = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|p\|_\infty = \|T_n\|_\infty. \tag{3.22}$$

Bevis
Lad $\{p_j\}$ være en følge i $\mathcal{P}_n$, så $\|p_j\|_\infty \to H$ for $j \to \infty$. Der eksisterer et $K > 0$, så der for store j gælder

$$H \leq \|p_j\|_\infty \leq K.$$

For $p_j(z) = z^n + a_{n-1,j}z^{n-1} + \cdots + a_{0,j}$ er følgen $\{a_{k,j}\}_{j\geq 1}$ dermed begrænset for $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Således eksisterer der en konvergent delfølge a_{k,j_i}, og dermed kan der konstrueres en diagonalfølge, så $a_{k,j_i} \to a_{k,\infty}$ for $i \to \infty$ og for alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$, og dermed gælder $\{p_{j_i}\} \to p$, hvor $p(x) = x^n + a_{n-1,\infty}x^{n-1} + \cdots + a_{0,\infty}$. Da $\lim \|p_{j_i}\|_\infty = \lim \|p_j\|_\infty = H$, gælder

$$\|p\|_\infty \leq \|p_{j_i}\|_\infty + \|p - p_{j_i}\|_\infty,$$

og dermed fås $\|p\|_\infty \leq H$ ved at lade $i \to \infty$. □

Sætning 3.26
Det polynomium T_n, der opfylder (3.22)*, er entydigt bestemt ved, at polynomiet skal antage sit absolutte maksimum $\|T_n\|_\infty$ mindst $n+1$ gange med skiftende fortegn på intervallet* $[-1, 1]$.

Bevis
Antag, at p opfylder (3.22), men kun antager sit maksimum $N < n+1$ gange. Da eksisterer et $a > 0$ og en opdeling $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N = 1$, så der gælder skiftevis

$$-H \leq p(x) \leq H - a \qquad \text{for } x \in [\xi_{j-1}, \xi_j] \tag{3.23}$$

$$-H + a \leq p(x) \leq H \qquad \text{for } x \in [\xi_{j-1}, \xi_j]. \tag{3.24}$$

Definer nu polynomiet $q(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{N-1})$, som er af grad højst $n-1$. Det ses, at dette skifter fortegn ved hver rod. Betragt nu polynomiet $p(x) + \omega q(x)$ for $\omega \in \mathbb{R}$, som er monisk og af grad n. Vælg ω, så $\omega q(x)$ er positiv i intervaller af typen (3.23), og dermed negativ i intervaller af typen (3.24). Tillige vælges ω så lille, at $|\omega q(x)| \leq \frac{a}{2}$ for $x \in [-1, 1]$. Da gælder for begge typer intervaller

$$-H + \frac{a}{2} \leq p(x) + \omega q(x) \leq H - \frac{a}{2},$$

hvormed p ikke kan opfylde (3.22). Bemærk, at for $n \geq 1$ svarer $n+1$ ekstremumspunkter til, at det absolutte maksimum skal antages i ± 1, hvor der ikke må gælde $p' = 0$, og derudover skal polynomiet antage sit absolutte maksimum, hver gang $p' = 0$, hvilket medfører, at p har n rødder i $[-1, 1]$, og at det absolutte maksimum må antages med skiftende fortegn.

Det skal nu vises, at polynomiet bestemmes entydigt ved ovenstående egenskab. Antag derfor omvendt, at både p og q opfylder (3.22). Begge polynomier må derfor antage sit absolutte maksimum mindst $n+1$ gange. Antag uden tab af generalitet, at p antager sit absolutte maksimum oftest, og benævn ekstremumspunkterne $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, hvor $N \geq n+1$, og definer $\Delta(x) = p(x) - q(x)$. Det skal nu vises, at Δ er nulfunktionen. Det ses, at hvis $\Delta(\lambda_j) \neq 0$, har $\Delta(\lambda_j)$ samme fortegn som $p(\lambda_j)$. Det vil sige, at hvis $\Delta(\lambda_j) \neq 0$, og $\Delta(\lambda_{j+1}) \neq 0$, så eksisterer der et nulpunkt mellem dem. Tilsvarende, hvis der gælder $\Delta(\lambda_j) \neq 0$, og $0 = \Delta(\lambda_{j+1}) = \cdots = \Delta(\lambda_{j+k})$, men $\Delta(\lambda_{j+k+1}) \neq 0$, eksisterer der mindst k nulpunkter mellem λ_j og λ_{j+k+1}. Således har Δ mindst n nulpunkter, men da det er et polynomium af grad højst $n-1$, da p og q er moniske, er det nulfunktionen. □

Korollar 3.27
Lad T_n betegne Chebyshevpolynomiet af grad n. Da er $2^{1-n}T_n$ monisk og opfylder

$$\inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|p\|_\infty = 2^{1-n}\|T_n\|_\infty.$$

Simpel ydre afbildning

I dette afsnit antages det, at Ψ er på formen

$$\Psi(w) = \frac{w^2 + \mu_1 w + \mu_0}{\nu w}. \tag{3.25}$$

For områder med sådanne ydre afbildninger er Faberpolynomierne skalerede Chebyshevpolynomier, som det vises i den følgende sætning. Rekursionsformlen svarer til den sædvanlige for Faberpolynomier (3.9) i tilfældet, hvor den ydre afbildning er på formen (3.25). Bemærk, at for Ψ på formen (3.17) har rekursionsformlen for Faberpolynomierne $m+1$ trin.

Sætning 3.28
Lad Ψ være på formen givet i (3.25)*. Faberpolynomierne hørende til Ω er givet ved*

$$F_n(z) = 2(\sqrt{\mu_0})^n T_n\left(\frac{z\nu - \mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right)$$

for $n \geq 1$, hvor T_n betegner Chebyshevpolynomiet af grad n.
Endvidere kan Faberpolynomier bestemmes rekursivt ved

$$\begin{aligned} F_0(z) &\equiv 1, \quad F_1(z) = z\nu - \mu_1, \\ F_n(z) &= (z\nu - \mu_1)F_{n-1}(z) - \mu_0 F_{n-2}(z) \quad \text{for } n \geq 2. \end{aligned}$$

Bevis
Når Ψ er givet som i (3.25), gælder ifølge lemma 3.22, at

$$F_n(z) = w_1(z)^n + w_2(z)^n \text{ for } n \geq 1. \tag{3.26}$$

Da $p(w) - zq(w) = w^2 + (\mu_1 - z\nu)w + \mu_0$, gælder

$$\begin{aligned} w_1(z) + w_2(z) &= z\nu - \mu_1 \\ w_1(z)w_2(z) &= \mu_0 \end{aligned}$$

Definer $\zeta_j(z) = \frac{w_j(z)}{\sqrt{\mu_0}}$ for $j \in \{1,2\}$. Der kan ikke gælde $\mu_0 = 0$, da p og q i så fald ville have en fælles rod i $z = 0$, hvilket er en modstrid. Der gælder $\zeta_1(z)\zeta_2(z) = 1$, og dermed $\zeta_1(z)^{-1} = \zeta_2(z)$. Således giver (3.26)

$$\begin{aligned} F_n(z) &= (\sqrt{\mu_0})^n(\zeta_1(z)^n + \zeta_1(z)^{-n}) \\ &= 2(\sqrt{\mu_0})^n \left(\frac{\zeta_1(z)^n + \zeta_1(z)^{-n}}{2}\right) \\ &= 2(\sqrt{\mu_0})^n T_n\left(\frac{\zeta_1(z) + \zeta_1(z)^{-1}}{2}\right) \\ &= 2(\sqrt{\mu_0})^n T_n\left(\frac{z\nu - \mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right), \end{aligned}$$

hvor (3.21) benyttes. Tilbage står nu at vise rekursionsformlen. For $n = 0$ gælder

$F_n(z) = 1 = T_n(z)$, og for $n = 1$ gælder $F_n(z) = 2\sqrt{\mu_0}T_n\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right) = z\nu - \mu_1$ ifølge rekursionsformlen for Chebyshevpolynomier (3.20). Denne giver endvidere for $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
F_n(z) &= 2(\sqrt{\mu_0})^n T_n\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right) \\
&= 2(\sqrt{\mu_0})^n \left(2\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right)T_{n-1}\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right) - T_{n-2}\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right)\right) \\
&= (z\nu-\mu_1)2(\sqrt{\mu_0})^{n-1}T_{n-1}\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right) - 2(\sqrt{\mu_0})^n T_{n-2}\left(\frac{z\nu-\mu_1}{2\sqrt{\mu_0}}\right) \\
&= (z\nu-\mu_1)F_{n-1}(z) - \mu_0 F_{n-2}(z). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ydre afbildning for ellipser

Det er i det foregående forudsat, at den ydre afbildning er af passende grad. Det vises nu, at der findes en klasse af interessante områder, der faktisk opfylder dette. Betragt afbildningen

$$\Psi(w) = \frac{r}{2}w + \frac{1}{2rw} \quad \text{for } r > 1.$$

Den afledede er $\Psi'(w) = \frac{r}{2} - \frac{1}{2rw^2}$, og dermed er Ψ konform for $w \neq \pm 1$. For $w = e^{i\theta}$ gælder

$$\begin{aligned}
\Psi(e^{i\theta}) &= \frac{r}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2r}e^{-i\theta} \\
&= \frac{r}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)\cos\theta + i\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)\sin\theta, \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

hvilket netop er en parametrisering af ellipsen med halvakser $\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)$ og $\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)$. Således er billedet af enhedscirklen under Ψ en ellipse med brændpunkter $\pm\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{r^2}{4} + \frac{1}{4r^2} - \frac{1}{2}\right)} = \pm 1$. Bemærk, at hvis $r = 1$, giver (3.27), at $\Psi(e^{i\theta}) = \cos\theta$, hvormed billedet af enhedscirklen bliver linjestykket $[-1, 1]$. Ovenstående udregning kan gentages for $ke^{i\theta}$ for alle $k \geq 1$, hvilket viser, at billedet af ∂B_k bliver ellipsen med brændpunkter ± 1 og halvakser $\left(\frac{kr}{2} + \frac{1}{2kr}\right)$ og $\left(\frac{kr}{2} - \frac{1}{2kr}\right)$. Dette viser, at billedet af $\overline{B}_1^c$ under Ψ er givet ved

$$\left\{u + iv : \frac{u^2}{\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)^2} > 1\right\} \text{ for } r > 1 \text{ eller } \{u + iv : u^2 > 1\} \text{ for } r = 1.$$

Lad nu Ψ være defineret for $|w| > 1$. Der gælder $z = \Psi(w)$, hvis og kun hvis $r^2w^2 - 2rzw + 1 = 0$. Da konstantleddet er 1, har dette enten to løsninger på enhedscirklen eller en løsning uden for og en inden for. Løsningerne er på formen $w = \frac{1}{r}z + \frac{1}{r}\sqrt{z^2 - 1}$. Da w ligger på enhedscirklen, hvis og kun hvis z ligger på ellipsen, vil der for z uden for ellipsen eksistere et entydigt bestemt w uden for enhedscirklen, så $z = \Psi(w)$. Endvidere vil w være på formen $w = \frac{1}{r}z + \sqrt{z^2 - 1}$. Det kan vises, at der eksisterer en rækkeudvikling

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = 2z + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} z^{1-2k} \text{ for } |z| > 1. \tag{3.28}$$

Det skal nu vises, at dette er den rigtige gren af kvadratroden, dvs. at $2z + z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{1/2}{k}z^{-2k}$ ligger uden for enhedscirklen. Det er nok at vise dette for $|z| > 2$, da funktionen er analytisk for alle $|z| > 1$. Der gælder

$$\left|(-1)^k \binom{1/2}{k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}\right| < 1,$$

da normen af den k'te faktor er mindre end k, og dermed

$$\left|z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{1/2}{k}z^{-2k}\right| \leq |z|\frac{\frac{1}{|z|^2}}{1-\frac{1}{|z|^2}} = \frac{|z|}{|z|^2-1}.$$

Således fås

$$\begin{aligned}\left|2z + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{1/2}{k}z^{1-2k}\right| &\geq 2|z| - \frac{|z|}{|z|^2-1} \\ &= \frac{2|z|^3 - 3|z|}{|z|^2-1} \\ &> |z|\end{aligned}$$

for $|z| > 2$, hvilket var det ønskede. Rækken (3.28) opfylder kravene til Riemanns afbildningssætning, sætning 1.61, hvilket viser, at Ψ er den ydre afbildning for ellipsen med halvakser $\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)$ og $\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2r}\right)$. Da Ψ er en rational funktion på formen (3.25), gælder følgende sætning.

Sætning 3.29

Lad Ω betegne ellipsen med halvakser $\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)$ og $\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2r}\right)$ for et $r > 1$, eller i grænsen $r = 1$ intervallet $[-1, 1]$. Faberpolynomiet af grad n hørende til Ω er givet ved

$$F_n(z) = 2T_n(rz).$$

For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hvor $\dim \mathcal{H} = N < \infty$, gælder

$$\sup_{n\geq 0} \|F_n(A)\| \leq e\widetilde{N}\mathcal{K}(\Omega), \tag{3.29}$$

hvor $\widetilde{N} = \max\{2N, N+2\}$, og endvidere

$$\sup_{n\geq 0} \|T_n(A)\| \leq \frac{e\widetilde{N}}{2}\mathcal{K}([-1,1]).$$

Uanset dimensionen af $\mathcal{H}$ gælder

$$\|T_n(A)\| \leq \frac{e(n+1)}{2}\mathcal{K}([-1,1]) \leq e(n+1)\tilde{\mathcal{K}}([-1,1]). \tag{3.30}$$

Bevis

Da den ydre afbildning for Ω er givet ved $\Psi(w) = \frac{r}{2}w + \frac{1}{2rw} = \frac{r^2w^2+1}{2rw}$, gælder ifølge sætning 3.28, at $F_n(z) = 2T_n(rz)$, og (3.29) fås ved indsættelse af $m = 1$ i sætning

3.21. For $r = 1$, svarende til $\Omega = [-1, 1]$, gælder $F_n(z) = 2T_n(z)$, og dermed ifølge sætning 3.21

$$\sup_{n\geq 0} \|T_n(A)\| \leq \frac{e\widetilde{N}}{2}\mathcal{K}([-1,1]),$$

og tilsvarende fra sætning 3.9 og sætning 2.31 fås (3.30). □

Kommentarer til normvurderingerne

Der er gennem dette kapitel givet en række resultater angående normvurderinger for forskellige operatorer. Disse resultater sigter efter to ting, nemlig at generalisere de oprindelige resultater fra Kreiss' matrixsætning, sætning 2.16, side 36, og generelt at give normvurderinger for en større klasse af operatorer. De fleste af resultaterne er for Faberpolynomier, der generelt er svære at beregne. For eksempel kan Faberpolynomier bestemmes vha. rekursionsformlen (3.9), selvom der for en række områder, f.eks. ellipser, findes lettere måder at bestemme dem på. Tilsvarende er generaliseringen af Kreisskonstanten heller ikke særlig beregningsvenlig. En noget simplere normvurdering er f.eks. følgende fra [Trefethen og Embree, 2005, s. 139], der benytter pseudospektrer.

Sætning 3.30
For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ med pseudospektralradius $r_\varepsilon(A) = \sup_{z\in\sigma_\varepsilon(A)} |z|$ gælder

$$\|f(A)\| \leq \frac{r_\varepsilon(A)}{\varepsilon} \max_{t\in[0,2\pi]} |f(r_\varepsilon e^{it})|$$

for alle $\varepsilon > 0$ og $f \in \mathcal{H}(\overline{B}_{r_\varepsilon})$.

Bevis
Da $\sigma(A)$ ligger inden for $B_{r_\varepsilon(A)}$, gælder ifølge Dunfordkalkulen

$$\begin{aligned}\|f(A)\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\partial B_{r_\varepsilon(A)}} f(z)R_A(z)dz\right\| \\ &\leq r_\varepsilon(A) \max_{z\in\partial B_{r_\varepsilon(A)}} |f(z)|\|R_A(z)\| \\ &\leq \frac{r_\varepsilon(A)}{\varepsilon} \max_{z\in\partial B_{r_\varepsilon(A)}} |f(z)|.\end{aligned}$$ □

Det ses af beviset, at dette resultat kan skærpes ved at vælge en kurve, der ligger tættere omkring pseudospektret, men grundet simpliciteten er ovenstående valgt. Ved hjælp af sætning 2.31 og sætning 2.13 kan sætning 3.4 skrives som

$$\|p_n(A)\| \leq 2e(n+1)\|p_n\|_\Omega \sup_{\varepsilon>0} \frac{\overrightarrow{\operatorname{dist}}(\sigma_\varepsilon(A),\Omega)}{\varepsilon},$$

som jo er klart mere kompliceret.

Dog er der ingen oplagt måde at lave en generel normvurdering for en følge af polynomier af stigende grad, der er uafhængig af graden. Resultaterne angående Faberpolynomier opnår dette i nogen grad, og generaliserer dermed Kreiss' matrixsætning på en måde, der er fint i tråd med den oprindelige, dog er afhængigheden af området blevet mere eksplicit, men at afgrænsningen af en givet operators spektrum indgår i en normvurdering, er selvsagt nødvendigt i en eller anden form. Der er ikke opnået en generel dobbeltulighed for $\sup_{n\geq 0} \|p_n(A)\|$, men en sådan ulighed kan heller ikke forventes for operatorer med spektrum uden for enhedscirklen.

KAPITEL 4

CHEBYSHEVDIFFERENTIATION

Dette kapitel omhandler Chebyshevdifferentiation som et eksempel på spektral differentiation. Metoden beskrives, og forskellige egenskaber ved Chebyshevdifferentiationsmatricer vises. Desuden betragtes forskellige implementeringer i Maple og MATLAB, og pseudospektrer for Chebyshevdifferentiationsmatricer både uden og med grænsebetingelser undersøges.

Kapitlet er baseret på [Jensen, 2008, afsnit 9.2], [Trefethen, 2000, kapitel 6] og [Trefethen og Embree, 2005, §30]. Til at udføre beregninger og fremstille figurer er der anvendt Maple 12 og MATLAB 7.6.0 (R2008a) med toolboxen EigTool, version 2.04 fra 20. december 2002. Der er også udgivet en version 2.1 beta af EigTool den 16. marts 2009, men da dette er en betaversion, er der her anvendt den sidste stabile udgave, version 2.04.

4.1 Chebyshevdifferentiationsmetoden

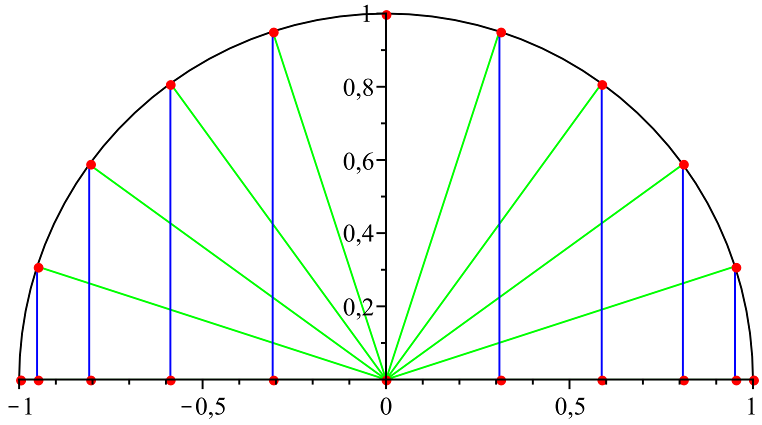
I numeriske beregninger indgår ofte numerisk differentiation, hvor den afledede af en funktion approksimeres ved en diskretisering. Et eksempel på anvendelse af numerisk differentiation er numerisk løsning af differentialligninger, hvor man er interesseret i at approksimere den afledede af en funktion i en række punkter, hvor man kender funktionsværdien. Nærmere bestemt er der givet en søjlevektor af punkter $x = (x_0, \dots, x_N)$ og en søjlevektor af funktionsværdier $u = (u_0, \dots, u_N)$, hvor $u_j = f(x_j)$ for $j \in \{1, \dots, N\}$, og man ønsker at approksimere $f'(x_j)$ for $j \in \{1, \dots, N\}$.

En type metoder til at løse denne opgave, som er effektive i den forstand, at der skal relativt få punkter til for at nedbringe fejlen i approksimationen, er spektrale differentiationsmetoder. Til gengæld anvender disse metoder punkter, der ikke er ækvidistante. Det viser sig, at differentiationsmatricer baseret på et gitter af sådanne punkter ofte er ikke-normale matricer, hvilket kan have stor indflydelse på metodens numeriske stabilitet og opførsel. Det var blandt andet dette, der i begyndelsen af 1990'erne gav anledning til øget interesse for ikke-normale matricer og pseudospektrer.

I det følgende betragtes intervallet $[-1, 1]$, som øvrige intervaller kan transformeres til ved et variabelskift. Et eksempel på spektrale differentiationsmetoder er Chebyshevdifferentiationsmetoden. I denne metode indgår Chebyshevpunkterne, som er ekstremumspunkterne for Chebyshevpolynomierne på intervallet $[-1, 1]$, der ifølge definition 3.23 er defineret som $T_N(x) = \cos(N \arccos(x))$. For $N = 0$, hvor Chebyshevpolynomiet er konstant 1, og alle punkter i intervallet $[-1, 1]$ dermed er ekstremumspunkter, er der dog kun det ene Chebyshevpunkt $x_0 = 1$. Chebyshevpunkterne er som beskrevet på side 69 givet ved

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{N} \text{ for } j \in \{0, \dots, N\}. \tag{4.1}$$

Argumentet til cosinus, det vil sige $\frac{j\pi}{N}$, varierer fra 0 til π, hvilket vil sige, at



Figur 4.1: Chebyshevpunkterne for $N = 10$.

$x_j = \cos\frac{j\pi}{N}$ varierer fra 1 til -1. Da cosinus er strengt aftagende på intervallet $[0, \pi]$, bliver Chebyshevpunkterne nummereret fra højre mod venstre på den reelle akse, og af samme grund er de også forskellige. Punkterne $\frac{j\pi}{N}$ er ligeligt fordelt på cirkelbuen af enhedscirklen med vinkler i intervallet $[0, \pi]$, hvilket betyder, at Chebyshevpunkterne, som er cosinus af disse punkter, ligger med mindre indbyrdes afstand ved endepunkterne af intervallet $[-1, 1]$. Dette ses på figur 4.1 for $N = 10$. Punkterne nummereres fra 0, men indgangene i vektorerne og matricerne i for eksempel Maple eller MATLAB nummereres fra 1. Det er imidlertid kun, når det er nødvendigt eksplicit at tilgå en indgang ved hjælp af dens nummer, at der direkte skal tages højde for dette.

En anden del af grundlaget for Chebyshevdifferentiationsmetoden er følgende sætning om det polynomium, der generelt kaldes det interpolerende polynomium. Beviset er baseret på [Turner, 2000, afsnit 4.2].

Sætning 4.1
Givet $N + 1$ forskellige punkter $x_0, \dots, x_N$ og $N + 1$ tilhørende funktionsværdier $u_0, \dots, u_N$ eksisterer der et polynomium af grad højst N, som interpolerer disse funktionsværdier i disse punkter, det vil sige, at $p(x_j) = u_j$ for $j \in \{0, \dots, N\}$. Dette polynomium er entydigt bestemt.

Bevis
Hvis der findes polynomier $l_j(x)$ for $j \in \{0, \dots, N\}$ af grad højst N, så

$$l_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{for } j = k \\ 0 & \text{for } j \neq k, \end{cases} \tag{4.2}$$

er polynomiet $p(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) l_j(x)$ af grad højst N og opfylder, at $p(x_k) = f(x_k)$ for $k \in \{0, \dots, N\}$. At p er af grad højst N, følger af, at p er en sum af polynomier af grad højst N, der hver især bliver ganget med en skalar. At $p(x_k) = f(x_k)$ for $k \in \{0, \dots, N\}$, følger af, at der ved indsættelse af x_k i udtrykket for $p(x)$ under udnyttelse af (4.2) fås $p(x_k) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) l_j(x_k) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) \delta_{jk} = f(x_k)$. Nu konstrueres polynomier, der opfylder (4.2). At $l_j(x_k) = 0$ for $j \neq k$, vil sige, at x_k

er et nulpunkt for l_j for $k \neq j$, hvilket svarer til, at der indgår faktoren $x - x_k$ i l_j for $k \neq j$. Der er N forskellige værdier af k, der opfylder, at $k \neq j$, så l_j er et polynomium af grad N givet ved

$$l_j(x) = c \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x - x_k) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_N),$$

der opfylder, at $l_j(x_k) = 0$ for $j \neq k$. For at opfylde den anden del af kravet i (4.2), skal konstanten c vælges, så $l_j(x_k) = 1$ for $j = k$. Ved at indsætte x_k i det netop fundne udtryk for l_j, sætte lig med 1 og isolere c fås, at

$$c = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k)}.$$

Dermed er l_j givet ved

$$l_j(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_N)}.$$

Disse polynomier kaldes Lagrangebasispolynomier, og polynomiet p, hvori de indgår, kaldes Lagrangeinterpolationspolynomiet.

Nu bevises det, at det nævnte polynomium er entydigt bestemt. Per konstruktion er Lagrangebasispolynomierne for et givet sæt af punkter og funktionsværdier lineært uafhængige og udspænder vektorrummet $\mathbb{P}_N$ af polynomier af grad N, og dermed udgør de en basis for $\mathbb{P}_N$. En liste af vektorer i et vektorrum er en basis for vektorrummet, hvis og kun hvis ethvert element i vektorrummet kan skrives entydigt som en linearkombination af elementerne i listen. I dette tilfælde betyder dette, at Lagrangeinterpolationspolynomiet for det givne sæt af punkter og funktionsværdier er entydigt bestemt. $\square$

Chebyshevdifferentiationsmetoden forløber på følgende måde. Lad der være givet punkter som Chebyshevpunkterne i (4.1) og funktionsværdier $u = (u_0, \ldots, u_N)$. Lad p være det entydige polynomium af grad højst N, der interpolerer (x_j, u_j) for $j \in \{0, \ldots, N\}$, det vil sige, at $p(x_j) = u_j$ for $j \in \{0, \ldots, N\}$. Søjlevektoren af afledede $w = (w_0, \ldots, w_N)$ bestemmes så ved at tage den afledede af det interpolerende polynomium i punkterne x_j, altså $w_j = p'(x_j)$ for $j \in \{0, \ldots, N\}$.

4.2 Chebyshevdifferentiationsmatricer

Da differentiation er lineært, og rummet af polynomier af grad N er et vektorrum af dimension $N+1$, findes der en $((N+1) \times (N+1))$-matrix D_N kaldet Chebyshevdifferentiationsmatricen, således at $w = D_N u$, hvor w er søjlevektoren af afledede, og u er søjlevektoren af funktionsværdier. Som et lettere alternativ til at udregne indgangene i denne matrix ved hjælp af Lagrangeinterpolationspolynomiet findes der formler for indgangene. Disse vil ikke blive udledt her, men ifølge [Trefethen, 2000, Theorem 7] gælder der for ethvert $N \geq 1$, at indgangene i Chebyshevdifferentiationsmatricen D_N med rækker og søjler nummereret fra 0 til N er givet ved følgende. Indgangene på diagonalen er givet ved

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2+1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2+1}{6}, \tag{4.3}$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} \text{ for } j \in \{1,\dots,N-1\}. \tag{4.4}$$

Indgangene uden for diagonalen er givet ved

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j}\frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \text{ for } i \neq j \text{ og } i,j \in \{0,\dots,N\}, \tag{4.5}$$

hvor $c_0 = c_N = 2$, og $c_i = 1$ for $i \in \{1,\dots,N-1\}$. For funktionsværdierne $u_j = 1$ for $j \in \{0,\dots,N\}$ er det interpolerende polynomium, der ifølge sætning 4.1 er af grad højst N, givet ved $p(x) = 1$. Den afledede af denne konstante funktion er $p'(x) = 0$ for alle x, hvilket i henhold til tidligere vil sige, at $w = 0$. Opskrevet for hver indgang i w vil dette for $i \in \{0,\dots,N\}$ i henhold til definitionen af matrix-vektor-multiplikation sige, at $0 = w_i = (D_N u)_i = \sum_{j=0}^{N}(D_N)_{ij}u_j = \sum_{j=0}^{N}(D_N)_{ij}$, altså at summen af indgangene i hver række skal være 0. Dette giver

$$(D_N)_{ii} = -\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N}(D_N)_{ij}, \tag{4.6}$$

der kan anvendes som en alternativ formel til at beregne indgangene på diagonalen. Denne formel er en lille smule nemmere at programmere, da der kun er én formel for alle indgangene på diagonalen og ikke tre forskellige tilfælde som med (4.3) og (4.4). For (2×2)-matricen er der dog kun de to tilfælde i (4.3).

For $N = 0$ fås fra (4.1) med konventionen $\frac{0}{0} = 0$, at $x_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{0} = \cos 0 = 1$. Summen af indgangene i en række i D_N skal være 0, så (1×1)-matricen D_0 er givet ved $D_0 = 0$, hvilket også følger af (4.6), som giver $(D_0)_{00} = 0$. Formlerne i (4.3) gælder som tidligere beskrevet ikke for $N = 0$. De ville nemlig give henholdsvis $(D_0)_{00} = \frac{2\cdot 0^2+1}{6} = \frac{1}{6}$ og $(D_0)_{00} = -\frac{2\cdot 0^2+1}{6} = -\frac{1}{6}$, hvilket dels ikke passer sammen, og dels ikke passer med, at summen af indgangene i en række skal være 0. Indgangene i Chebyshevdifferentiationsmatricerne D_N kan som tidligere nævnt efter at have fundet Chebyshevpunkterne ved hjælp af (4.1) findes ved at anvende (4.5) og derefter bestemme indgangene på diagonalen enten ved hjælp af (4.6) eller ved hjælp af (4.3) og (4.4). I begge tilfælde fås for de første $N \in \{1,2,\dots\}$ nedenstående resultater. For $N = 1$ er Chebyshevpunkterne $x_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{1} = 1$ og $x_1 = \cos\frac{1\cdot\pi}{1} = -1$. Chebyshevdifferentiationsmatricen bliver da

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

For $N = 2$ er Chebyshevpunkterne $x_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{2} = 1$, $x_1 = \cos\frac{1\cdot\pi}{2} = 0$ og $x_2 = \cos\frac{2\cdot\pi}{2} = -1$. Chebyshevdifferentiationsmatricen bliver da

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

For $N = 3$ er Chebyshevpunkterne $x_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{3} = 1$, $x_1 = \cos\frac{1\cdot\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $x_2 =$

$\cos\frac{2\cdot\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ og $x_3 = \cos\frac{3\cdot\pi}{3} = -1$. Chebyshevdifferentiationsmatricen bliver da

$$D_3 = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} & -4 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{19}{6} \end{bmatrix}.$$

Det ses ved udregning, at disse matricer ikke er normale, på nær for $N = 0$, og dermed heller ikke hverken symmetriske eller skævsymmetriske.

Ved at gange $(N + 1 \times N + 1)$-matricen D_N fra højre med en enhedssøjlevektor af længde $N + 1$ i $\mathbb{P}_N$ givet ved $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ fås en søjlevektor bestående af søjle 0 fra D_N. Ved derefter at tage det indre produkt af e_0 og denne søjlevektor fås indgang 0 i denne søjlevektor. En delmatrix bestående af række 0 og søjle 0 fra D_N er altså givet ved $D_N[0,0] = \langle e_0, D_N e_0\rangle$. Denne (1×1)-delmatrix er det samme som indgangen $(D_N)_{00}$, der ifølge (4.3) er givet ved $(D_N)_{00} = \frac{2N^2+1}{6}$ for $N \geq 1$. Dette giver tilsammen ved udnyttelse af egenskaber ved operatornormen og Cauchy-Schwarz-uligheden, at normen af D_N for $N \geq 1$ kan vurderes ved

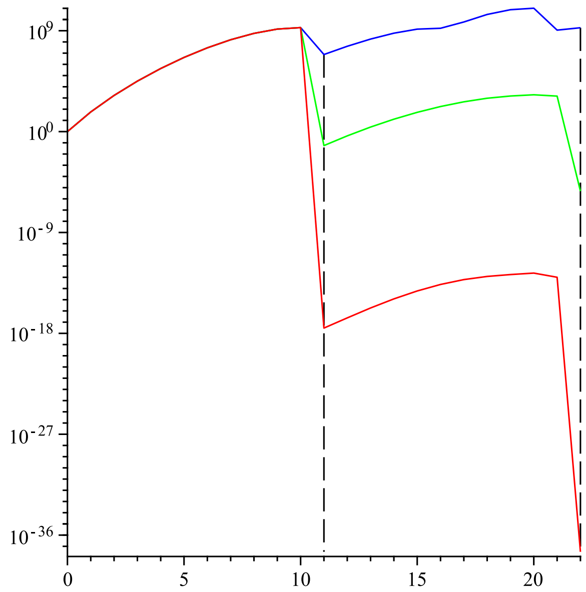
$$\begin{aligned} \|D_N\| &= \|e_0\|\|D_N\|\|e_0\| \geq |\langle e_0, D_N e_0\rangle| = |D_N[0,0]| \\ &= \frac{2N^2+1}{6} = \frac{N^2}{3} + \frac{1}{6} > \frac{N^2}{3}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Alle matricerne D_N er nilpotente, nærmere bestemt er $(D_N)^{N+1} = 0$, hvilket ses på følgende måde. Som tidligere nævnt er $D_N u$ den søjlevektor, der fremkommer ved at interpolere funktionsværdierne u og differentiere det fremkomne interpolerende polynomium. Ved at gange D_N på u i alt $N+1$ gange differentieres det interpolerende polynomium $N + 1$ gange. Ifølge sætning 4.1 er dette interpolerende polynomium højst af grad N, så denne afledede er 0, uanset hvad u er, hvilket viser resultatet.

Hvis man i for eksempel Maple eller MATLAB forsøger at verificere dette resultat ved at udregne $(D_N)^{N+1}$, eller ønsker at beregne $\|(D_N)^k\|$ som funktion af k, får man ikke de forventede resultater. Dette sker selv for forholdsvis små N. Maple og MATLAB repræsenterer tal med flydende komma, hvilket kort fortalt vil sige, at cifrene og kommaets placering lagres hver for sig, dette er nærmere omtalt i [Turner, 2000, Chapter 1]. Det er denne flydende regning, der giver anledning til forskellen, som illustreres i det følgende med figurer fremstillet i Maple, hvor det er nemmere at variere den beregningsmæssige præcision end i for eksempel MATLAB.

I Maple angiver variablen `Digits` som forklaret i hjælpefunktionen til Maple det antal cifre, Maple anvender ved udregninger i softwaren med tal med flydende komma, standardværdien af `Digits` er 10. På figur 4.2 ses et plot af $\|(D_N)^k\|$ som funktion af k for $N = 10$ med tre forskellige præcisioner, `Digits` $\in \{8, 16, 32\}$ repræsenteret med henholdsvis blå, grøn og rød, for $k \in \{0, \ldots, 22\}$. Bemærk, at andenaksen er logaritmisk inddelt, og at $k = 11$ og $k = 22$ er markeret med stiplede linjestykker. Værdien $k = 22$ er netop det dobbelte af $k = 11$, hvor matricen $(D_{10})^k$ skulle være nulmatricen. For $k = 22$ er $\|(D_{10})^k\|$ for `Digits` $\in \{16, 32\}$ mindre end udgangspunktet 1, selvom den for `Digits` $= 16$ er større end 1 for $k \in \{13, \ldots, 21\}$. For alle tre værdier af `Digits` aftager $\|(D_{10})^k\|$ fra $k = 10$ til $k = 11$, hvorefter den vokser. For `Digits` $= 8$ aftager $\|(D_{10})^k\|$ fra $k = 20$ til $k = 21$, hvorefter den vokser igen, mens den for de andre to værdier af `Digits` aftager fra $k = 21$ til $k = 22$.

Hvis man for den laveste præcision `Digits` $= 8$ fortsætter med at afbilde $\|(D_N)^k\|$



Figur 4.2: Plot af $\|(D_N)^k\|$ som funktion af k for $N = 10$ med tre forskellige præcisioner, `Digits` $\in \{8, 16, 32\}$ repræsenteret med henholdsvis blå, grøn og rød, for $k \in \{0, \ldots, 22\}$. Bemærk, at andenaksen er logaritmisk inddelt, og at $k = 11$ og $k = 22$ er markeret med stiplede linjestykker.

som funktion af k for $N = 10$ til højere k, for eksempel $k \in \{0, \ldots, 45\}$, som det ses på figur 4.3, igen med logaritmisk inddeling af andenaksen, ses det, at selvom $\|(D_{10})^k\|$ har lokale minima for $k \in \{11, 21, 31, 41\}$, er tendensen, at den vokser eksponentielt i stedet for at aftage.

Som tidligere vist er D_N nilpotent, så spektret af D_N kan bestemmes ved hjælp af følgende sætning, som gælder for alle matricer.

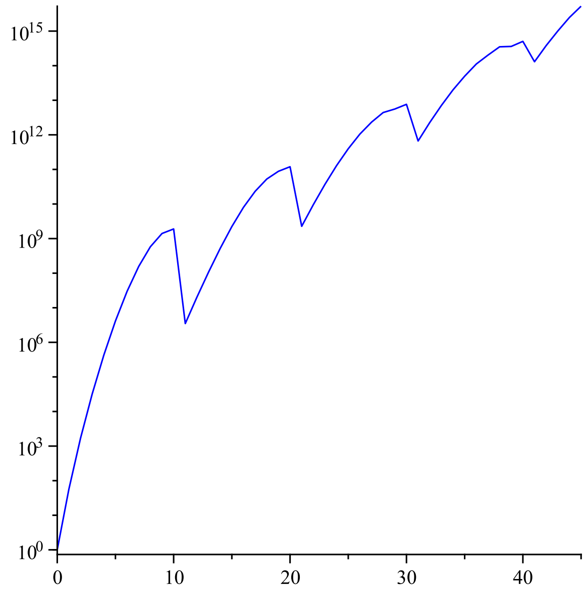
Sætning 4.2
Chebyshevdifferentiationsmatricen D_N er nilpotent, hvis og kun hvis $\sigma(D_N) = \{0\}$.

Bevis
Spektralafbildningssætningen [Reed og Simon, 1980, Theorem VII.1], der generelt lyder, at $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$, hvor $f(\sigma(A))$ er defineret som $\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$, giver i dette tilfælde $\sigma((D_N)^{N+1}) = (\sigma(D_N))^{N+1}$, hvor $(\sigma(D_N))^{N+1}$ er defineret som $\{\lambda^{N+1} : \lambda \in \sigma(D_N)\}$. Antag først, at D_N er nilpotent med $(D_N)^{N+1} = 0$. Så giver spektralafbildningssætningen, idet spektret af nulmatricen er $\{0\}$, at

$$\{0\} = \sigma(0) = \sigma((D_N)^{N+1}) = (\sigma(D_N))^{N+1} = \{\lambda^{N+1} : \lambda \in \sigma(D_N)\}.$$

Det eneste tal, der opløftet i $N + 1$ giver 0, er 0, så $\sigma(D_N) = \{0\}$.

Antag omvendt, at $\sigma(D_N) = \{0\}$. Ifølge [Axler, 1997, Theorem 8.47] kan enhver kvadratisk matrix i et komplekst vektorrum skrives på Jordan-normalform, det vil sige som summen af en diagonalmatrix med egenværdierne for matricen på diagonalen og en nilpotent matrix. Hvis alle egenværdierne er 0 som for D_N, er matricen lig med en nilpotent matrix, hvilket viser det ønskede. □



Figur 4.3: Plot af $\|(D_N)^k\|$ som funktion af k for `Digits` $= 8$ for $N = 10$ for $k \in \{0, \ldots, 45\}$. Bemærk, at andenaksen er logaritmisk inddelt.

Dermed er spektralradius $r(D_N) = \sup_{\lambda \in \sigma(D_N)} |\lambda| = 0$. Det følger af spektralradiusformlen, at $r(D_N) < 1$ medfører, at $\lim_{k \to \infty} \|(D_N)^k\| = 0$ [Meyer, 2000, (7.10.5)], hvilket ses at være noget ganske andet end den opførsel, der ses på figur 4.3.

4.3 Implementering

I dette afsnit kommenteres kildekode af forskellig oprindelse til implementering af Chebyshevdifferentiationsmatricer i dels Maple og dels MATLAB. Opsætningen af kildekoden er visse steder ændret lidt af pladshensyn.

Figur 4.2 på nær de to stiplede linjestykker samt figur 4.3 er dannet ved hjælp af følgende Maple-kildekode, der hører til [Jensen, 2008] og kan hentes fra `http://www.math.aau.dk/~matarne/traef08/`.

```
# Computations for exact Chebyshev matrix and plots of powers
# with varying value of Digits
> with(LinearAlgebra): with(plots):
> chebpoint:=proc(N)
> local k;
> Vector(N+1,[seq(cos(Pi*k/N),k=0..N)]);
> end proc;

> chebmatrix:=proc(N)
> local i,j,A,x,c,k;
> x:=chebpoint(N);
> c:=Vector(N+1,[2,seq(1,k=1..N-1),2]);
```

```
13 > A:=Matrix(N+1,N+1,fill=0);
14 > for i from 0 to N do
15 > for j from 0 to N do
16 > if not(i=j) then
17 > A[i+1,j+1]:=c[i+1]*(-1)^(i+j)/c[j+1]/(x[i+1]-x[j+1]);
18 > end if;
19 > end do;
20 > end do;
21 > for i from 0 to N do
22 > A[i+1,i+1]:=-add(A[i+1,j+1], j=0..i)-add(A[i+1,j+1],j=i+1..N);
23 > end do;
24 > A;
25 > end proc;

27 > chebpowerplot:=proc(ND,N,P,farve)
28 > # ND is the order of the Chebyshev diff matrix and
29 > # N the highest power computed.
30 > # P is the number of digets.
31 > #option autocompile;
32 > local A,Alist, k, A1;
33 > Digits:=P;
34 > A:=Map(evalf,chebmatrix(ND));
35 > Alist:=[[0,1]];
36 > A1:=IdentityMatrix(ND+1);
37 > for k from 1 to N do
38 > A1:=A.A1;
39 > Alist:=[op(Alist),[k,MatrixNorm(A1,2)]];
40 > end do;
41 > logplot(Alist,color=farve);
42 > end proc;

44 > p1:=chebpowerplot(10,22,2^3,blue);
45 > display([p1]);
46 > p2:=chebpowerplot(10,22,2^4,green);
47 > display([p2,p1]);
48 > p3:=chebpowerplot(10,22,2^5,red);
49 > display([p1,p2,p3]);
50 > q1:=chebpowerplot(10,45,2^3,blue);
51 > display([q1]);
```

Efter at have indlæst pakkerne `LinearAlgebra` og `plots` defineres tre procedurer, der tager et antal argumenter og har et antal lokale variable, som kun bruges internt i proceduren. Den første procedure `chebpoint` i linje 4–7 tager et argument `N` og danner en søjlevektor af længde $N+1$ indeholdende Chebyshevpunkterne udregnet i henhold til (4.1). For `N` lig med 0 divideres der med 0, hvilket gør, at Maple returnerer en fejl. Dette bevirker, at de næste to procedurer, der kalder `chebpoint`, også giver en fejlmeddelelse, når det tilsvarende argument er lig med 0 med henvisning til division med nul i `chebpoint`.

Den anden procedure `chebmatrix` i linje 9–25 tager også et argument `N` og danner først en søjlevektor `x` bestående af $N+1$ Chebyshevpunkter ved at kalde den foregående procedure `chebpoint` med argumentet `N`. Dernæst dannes en søjlevektor `c` af længde $N+1$ bestående af koefficienterne $c_0, \dots, c_N$ fra (4.5) samt en $(N+1 \times N+1)$-matrix `A` bestående af 0. I de følgende for-løkker i denne procedure, hvor indgangene tilgås enkeltvis, er der taget højde for, at rækkerne og søjlerne i Maple som tidligere nævnt nummereres fra 1 og ikke fra 0. Så gennemløbes alle indgangene i matricen `A` ved hjælp af to for-løkker over henholdsvis rækkeindeks `i` og søjleindeks `j`, og for de indgange, hvor `i` er forskellig fra `j`, overskrives indgangen med en værdi udregnet efter (4.5) ved hjælp af søjlevektorerne `c` og `x`. Efterfølgende gennemløbes indgangene på diagonalen af `A` ved hjælp af en for-løkke, og i overensstemmelse med (4.6) sættes $\mathtt{A}_{i+1,i+1} = -\sum_{j=0}^{i} \mathtt{A}_{i+1,j+1} - \sum_{j=i+1}^{N} \mathtt{A}_{i+1,j+1}$ svarende til $(D_N)_{ii} = -\sum_{j=0}^{i}(D_N)_{ij} - \sum_{j=i+1}^{N}(D_N)_{ij}$. Der kunne spares nogle enkelte beregninger ved ikke at fratrække diagonalindgangen, som ved summens udregning på grund af konstruktionen af `A` er 0, eller ved at samle de to summer i en sum. Til sidst kaldes `A`, så denne bliver outputtet fra proceduren.

Den tredje procedure `chebpowerplot` i linje 27–42 tager fire argumenter `ND`, `N`, `P` og `farve` og har en option `autocompile`, som dog er udkommenteret. Denne option ville bevirke, at proceduren ved første gennemløb ville blive kompileret til en rutine i programmeringssproget C, som derefter vil blive anvendt i stedet for proceduren. Proceduren sætter `Digits`, som er forklaret ovenfor, lig med `P`, hvorefter matricen `A` dannes ved med flydende regning numerisk at udregne hver af indgangene i Chebyshevdifferentiationsmatricen fremkommet ved at kalde proceduren `chebmatrix` med argumentet `ND`. Derefter dannes `Alist` som en liste, det vil sige en samling af ordnede elementer, bestående af en liste indeholdende elementerne 0 og 1 i nævnte rækkefølge, det vil sige $[[0,1]] = [[0, \|I\|]] = [[0, \|(\mathtt{A})^0\|]]$ svarende til $[[0, \|(D_{ND})^0\|]]$. Derudover dannes matricen `A1` som en identitetsmatrix af samme dimension som `A`.

Efter dette startes en for-løkke, som gennemløbes `N` gange. I denne løkke sættes matricen `A1` til at være produktet af matricen `A` og den aktuelle værdi af matricen `A1`, som ved første gennemløb er en identitetsmatrix, hvorefter `Alist` sættes til at være listen bestående af både elementerne i den aktuelle værdi af `Alist` og listen bestående af nummeret på gennemløbet og den euklidiske norm af matricen `A1`. Efter det sidste gennemløb af løkken er `Alist` en liste af koordinatsæt, der svarer til den numeriske udgave af $[[0,1], [1, \|(D_{ND})^1\|], \dots, [N, \|(D_{ND})^N\|]]$. Til sidst dannes et plot af disse koordinatsæt med farven `farve`, som skal være det engelske navn på en farve, som Maple genkender, i et todimensionalt koordinatsystem, hvor andenaksen er logaritmisk inddelt. Med proceduren `chebpowerplot` kan der således dannes plots af $\|(D_N)^k\|$ som funktion af k, som kan vises ved hjælp af kommandoen `display`, enten med et enkelt plot eller en liste af plots som argument.

Følgende er MATLAB-kildekoden fra [Trefethen, 2000] til at generere Chebyshevdifferentiationsmatricer.

```
% CHEB  compute D = differentiation matrix, x = Chebyshev grid

 function [D,x] = cheb(N)
 if N==0, D=0; x=1; return, end
 x = cos(pi*(0:N)/N)';
 c = [2; ones(N-1,1); 2].*(-1).^(0:N)';
 X = repmat(x,1,N+1);
 dX = X-X';
```

```
9   D  = (c*(1./c)')./(dX+(eye(N+1)));      % off-diagonal entries
10  D  = D - diag(sum(D'));                 % diagonal entries
```

I linje 3 defineres det, at funktionen hedder `cheb` og tager et argument `N` og giver et output bestående af `D` og `x`, der som forklaret i linje 1 er henholdsvis en differentiationsmatrix og et endimensionalt gitter bestående af Chebyshevpunkter. Indholdet af if-konstruktionen i linje 4 kommer kun i brug, hvis `N` er lig med 0. I så fald sættes differentiationsmatricen lig med 0, og `x` sættes lig med 1, svarende til at der kun er et Chebyshevpunkt, og at dette er lig med 1, hvorefter funktionen afsluttes. Uden denne håndtering af specialtilfældet `N` lig med 0 ville der blive divideret med 0 i linje 5. I sidstnævnte linje udregnes en rækkevektor bestående af de $N+1$ Chebyshevpunkter efter formlen i (4.1), og derefter transponeres rækkevektoren til en søjlevektor `x`. Chebyshevpunkterne er reelle, så der sker ikke noget ved at anvende `'`, som tager den kompleks konjugerede transponerede, i stedet for `.'`, som blot tager den transponerede.

I linje 6 ganges en søjlevektor bestående af $c_0, \ldots, c_N$ fra tidligere komponentvis med en søjlevektor bestående af $(-1)^i$ for $i \in \{0, \ldots, N\}$. Dette giver således en søjlevektor `c`, hvor den i'te indgang er givet ved $c_i(-1)^i$ for $i \in \{0, \ldots, N\}$. Dernæst dannes i linje 7 en matrix `X` bestående af søjlevektoren af Chebyshevpunkter `x` gentaget 1 gang lodret og $N+1$ gange vandret, hvilket giver en $(N+1 \times N+1)$-matrix med rækkevis ens indgange. Fra denne matrix trækkes i linje 8 dens transponerede, hvilket giver en matrix `dX` af differenser mellem Chebyshevpunkter, hvor der i indgang (i, j) står $x_i - x_j$, det vil sige, at der står 0 på diagonalen. Udregningen er

$$\begin{aligned}
\mathtt{dX} = \mathtt{X} - \mathtt{X'} &= \begin{bmatrix} x_0 & x_0 & \ldots & x_0 \\ x_1 & x_1 & \ldots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_N & \ldots & x_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_N \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_N \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & x_0 - x_1 & \ldots & x_0 - x_N \\ x_1 - x_0 & 0 & \ldots & x_1 - x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N - x_0 & x_N - x_1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

I linje 9 bliver søjlevektoren `c` fra linje 6 først ganget med en rækkevektor, hvor hver af indgangene er det reciprokke af den tilsvarende indgang i `c`, det vil sige, at den j'te indgang i rækkevektoren er givet ved $\frac{1}{c_j}(-1)^{-j}$ for $j \in \{0, \ldots, N\}$. Dette giver en $(N+1 \times N+1)$-matrix, hvor der i indgang (i, j) står $\frac{c_i}{c_j}(-1)^{i-j}$, hvilket betyder, at der på diagonalen står 1. Derefter divideres denne matrix komponentvis med summen af matricen `dX` og identitetsmatricen af samme størrelse. Ved at lægge identitetsmatricen til undgås der at dividere med 0, og der står også 1 på diagonalen af den resulterende matrix `D`. I de øvrige indgange i denne matrix, altså for $i \neq j$, står der $\frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i-j}}{x_i - x_j}$. Dette er ikke på samme form som i (4.5), men da $(-1)^j = (-1)^{-j}$, giver det samme resultat. Udregningen er

$$
\begin{aligned}
\mathtt{D} &= \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{N-1} \\ 2(-1)^{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{-1} & \frac{1}{1} & \cdots & \frac{1}{(-1)^{N-1}} & \frac{1}{2(-1)^{N}} \end{bmatrix} \right) \\
&\quad \mathtt{./} \begin{bmatrix} 1 & x_0 - x_1 & \dots & x_0 - x_N \\ x_1 - x_0 & 1 & \dots & x_1 - x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N - x_0 & x_N - x_1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{2}\frac{1}{1} & \frac{2}{-1}\frac{1}{x_0 - x_1} & \cdots & \frac{2}{2(-1)^N}\frac{1}{x_0 - x_N} \\ \frac{-1}{2}\frac{1}{x_1 - x_0} & \frac{-1}{-1}\frac{1}{1} & \cdots & \frac{-1}{2(-1)^N}\frac{1}{x_1 - x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2(-1)^N}{2}\frac{1}{x_N - x_0} & \frac{2((-1)^N)}{-1}\frac{1}{x_N - x_1} & \cdots & \frac{2(-1)^N}{2(-1)^N}\frac{1}{1} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

hvor `./` angiver komponentvis division. Endelig udregnes i linje 10 summen af indgangene i hver søjle i `D` efter transponering, svarende til at udregne summen af indgangene i hver række i `D`. En diagonalmatrix, hvor der på indgang (i, i) står summen af indgangene i den i'te række i `D`, trækkes fra `D` for at få den endelige Chebyshevdifferentiationsmatrix `D`, hvor der på diagonalen, altså for $i = j$, står

$$1 - \sum_{j=0}^{N} (D_N)_{ij} = 1 - (1 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} (D_N)_{ij}) = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} (D_N)_{ij}$$

i overensstemmelse med (4.6).

Kildekoden til MATLAB-funktionen `cheb` uden kommentarerne optræder også i let bearbejdet form i [Trefethen og Embree, 2005, s. 290]. Her er specialtilfældet `N` lig med 0 udeladt, hvilket resulterer i, at `cheb(0)` returnerer `x = NaN` (Not a Number) og en (2×2)-matrix `D` bestående af `NaN`, da argumentet til cosinus bliver $\frac{0}{0}$ ved udregningen af `x`. De øvrige forskelle mellem kildekoderne er, at linje 7 og 8 er samlet på en linje, stadig adskilt af semikolon, og at `sum(D')` i linje 10 er erstattet af `sum(D,2)`. Det vil sige, at i stedet for at transponere `D` og udregne summen af indgangene i hver søjle udregnes summen af indgangene i hver række af `D`, hvilket også er, hvad MATLAB foreslår.

I stedet for at generere Chebyshevdifferentiationsmatricerne ved hjælp af `cheb.m` ved at skrive `cheb(N)`, som giver matricen, eller `[D,x]=cheb(N)`, som giver både matricen og en søjlevektor bestående af Chebyshevpunkter, kan man anvende funktionen `gallery` i MATLAB ved at skrive `gallery('chebspec',N)`, hvor `N` er dimensionen af matricen og dermed 1 større end det `N`, der indgår i `cheb.m`. Dette er kildekoden til funktionen, der under `gallery` i MATLAB genererer Chebyshevdifferentiationsmatricer.

```
function C = chebspec(n, k, classname)
%CHEBSPEC Chebyshev spectral differentiation matrix.
%   C = GALLERY('CHEBSPEC',N,K) is a Chebyshev spectral
```

```
%      differentiation matrix of order N.
%   For K = 0 ("no boundary conditions", the default), C is
%      nilpotent, with C^N = 0 and it has the null vector
%      ONES(N,1). C is similar to a Jordan block of size N with
%      eigenvalue zero.
%   For K = 1, C is nonsingular and well conditioned, and its
%      eigenvalues have negative real parts.
%   For both K, the computed eigenvector matrix X from EIG is
%      ill-conditioned (MESH(REAL(X)) is interesting).

%   References:
%   [1] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni and T. A. Zang,
%       Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag,
%       Berlin, 1988, p. 69.
%   [2] L. N. Trefethen and M. R. Trummer, An instability
%       phenomenon in spectral methods, SIAM J. Numer. Anal.,
%       24 (1987), pp. 1008-1023.
%   [3] D. Funaro, Computing the inverse of the Chebyshev
%       collocation derivative, SIAM J. Sci. Stat. Comput.,
%       9 (1988), pp. 1050-1057.
%
%   Nicholas J. Higham
%   Copyright 1984-2005 The MathWorks, Inc.
%   $Revision: 1.10.4.1 $  $Date: 2005/11/18 14:14:43 $

if isempty(k), k = 0; end

% k = 1 case obtained from k = 0 case with one bigger n.
if k == 1, n = n + 1; end

n = n-1;
C = zeros(n+1,classname);

x = cos( (0:n)' * (pi/n) );
d = ones(n+1,1,classname); d(1) = 2; d(n+1) = 2;

% eye(size(C)) on next line avoids div by zero.
C = (d * (ones(n+1,1,classname)./d)') ./ (x(:,ones(1,n+1)) ...
    -x(:,ones(1,n+1))' + eye(size(C),classname));

%  Now fix diagonal and signs.
C(1,1) = (2*n^2+1)/6;
for i=2:n+1
    if rem(i,2) == 0
       C(:,i) = -C(:,i);
       C(i,:) = -C(i,:);
    end
    if i < n+1
```

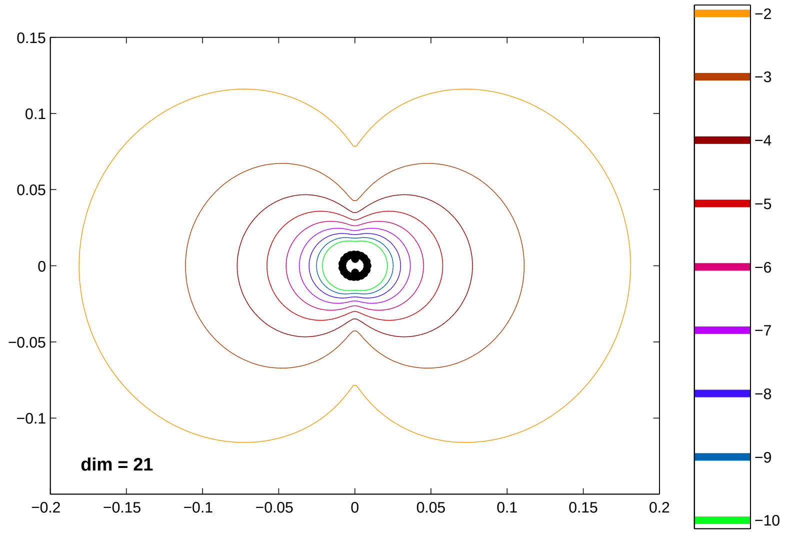
```
52         C(i,i) = -x(i)/(2*(1-x(i)^2));
53     else
54         C(n+1,n+1) = -C(1,1);
55     end
56 end

58 if k == 1
59     C = C(2:n+1,2:n+1);
60 end
```

I linje 1 defineres det, at funktionen hedder `chebspec`, tager argumenterne `n`, `k` samt `classname` og giver outputtet `C`, der som forklaret i kommentarerne i kildekoden er en Chebyshevdifferentiationsmatrix. Argumentet `n` angiver dimensionen af denne matrix, og argumentet `k` kan antage værdierne 0 eller 1, der angiver henholdsvis "uden grænsebetingelser" eller "med grænsebetingelser", hvilket forklares nærmere i afsnit 4.4. Argumentet `classname` kan antage værdierne `single` eller `double`, der angiver, at flydende komma-repræsentationen af matricen skal være henholdsvis enkelt præcision eller dobbelt præcision. Disse begreber er også forklaret i [Turner, 2000, Chapter 1].

I linje 29 sættes argumentet `k` lig med 0, hvis der ikke indtastes en værdi. Hvis argumentet `k` er lig med 1, sættes `n` dernæst lig med $\mathtt{n}+1$ med henblik på at konstruere den Chebyshevdifferentiationsmatrix, der har en række og en søjle mere. Uanset hvad `k` er, sættes `n` efterfølgende lig med $\mathtt{n}-1$, hvilket gør, at de sædvanlige formler for indgangene kan anvendes, men det `n`, der blev givet som argument, bliver størrelsen af matricen og ikke det tal, der indgår i symbolet for matricen. Derefter udregnes Chebyshevdifferentiationsmatricen, som her kaldes `C`, og søjlevektoren af Chebyshevpunkter `x`, som dog ikke bliver et output fra programmet. Dette sker dybest set på samme måde som i `cheb.m` indtil konstruktionen af diagonalelementerne, dog med den forskel, at fortegnene også først behandles til sidst.

I linje 45 udregnes indgangen øverst til venstre ved hjælp af (4.3), hvorefter den første række og den første søjle ikke betragtes i resten af programmet. Dernæst skiftes fortegn for indgangene i de søjler, der efter denne nummerering har indeks, der har rest 0 ved division med 2, altså søjler med lige indeks. Det samme gøres for de tilsvarende rækker, hvilket betyder, at nogle af indgangene får skiftet fortegn to gange. Dette har således den samme virkning som $(-1)^{i+j}$ i (4.5). Så udregnes de "indre" diagonalindgange ifølge (4.4), og indgangen nederst til højre sættes lig med indgangen øverst til venstre med modsat fortegn. Hvis `k` er lig med 1, fjernes første række og første søjle fra `C`, så dimensionen bliver den samme som for `k` lig med `0`.

For matricen af dimension 1, altså for `n` lig med 1, bliver `x` også i denne funktion `NaN`, men på grund af konstruktionen af vektoren med koefficienter, som her hedder `d`, bliver `X` en (1×1)-matrix, dog stadig i første omgang med indgangen `NaN`. Derefter overskrives denne indgang med resultatet af 0 indsat i (4.3), hvorefter første række og første søjle ikke betragtes mere. Den fejlagtige anvendelse af (4.3) betyder, at Chebyshevdifferentiationsmatricen `C` bliver $\frac{1}{6}$, men det ville selvfølgelig kræve ekstra programmering at håndtere dette forholdsvis ubetydelige specialtilfælde.

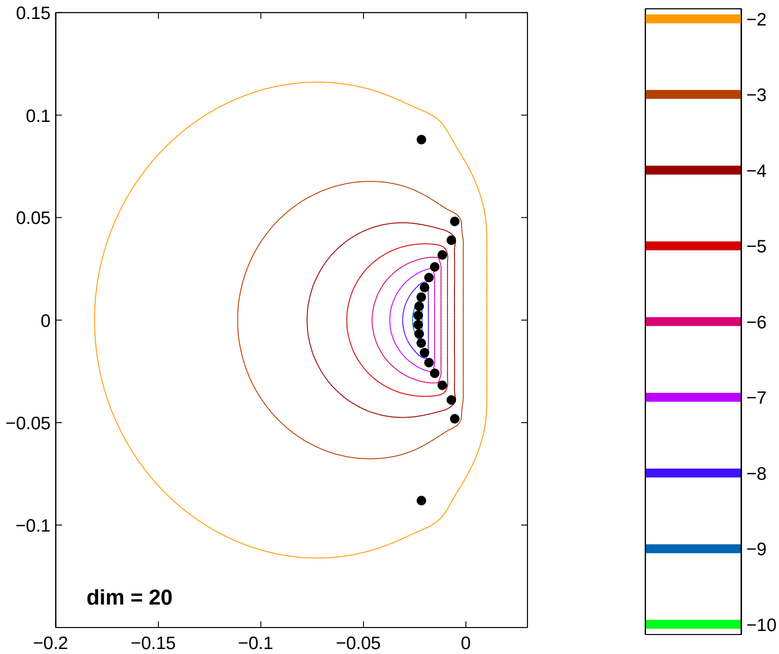


Figur 4.4: Pseudospektrer for $A_N = N^{-2}D_N$ for $N = 20$ for $\varepsilon \in \{10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$.

4.4 Pseudospektrer

Nu betragtes pseudospektrerne for D_N. Som det fremgår af (4.7), er $\|D_N\| > \frac{N^2}{3}$, det kan endda som nævnt på [Trefethen og Embree, 2005, s. 291] vises, at $\|D_N\|$ asymptotisk vokser i størrelsesordenen N^2 for $N \to \infty$. For tydeligere at kunne se egenskaber, der ikke hænger sammen med denne vækst, er det således en fordel at betragte en skaleret udgave af matricen ved beregning af pseudospektrer. På figur 4.4 ses pseudospektrer for matricen $A_N = N^{-2}D_N$ for $N = 20$ afbildet for $\varepsilon \in \{10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$ ved hjælp af toolboxen EigTool til MATLAB. Afbildes pseudospektrerne for den oprindelige Chebyshevdifferentiationsmatrix, ses det, at resolventnormen for D_N er stor langt væk fra spektret $\sigma(D_N) = \{0\}$. Det vil ifølge de to ækvivalente definitioner af pseudospektret i punkt *(i)* og *(ii)* i sætning 2.2 sige, at små perturbationer kan føre egenværdierne for D_N langt væk. De numerisk beregnede egenværdier for A_N ligger relativt langt væk fra 0, i EigTool med et gitter bestående af 200 gange 200 punkter fås spektralradius $r(A_{10}) = 2{,}943 \cdot 10^{-3}$, $r(A_{20}) = 8{,}260 \cdot 10^{-3}$ og $r(A_{30}) = 1{,}091 \cdot 10^{-2}$. Dette er således endnu et eksempel på forskellen mellem eksakt regning og flydende regning.

De hidtil betragtede differentiationer har været uden grænsebetingelser. Et eksempel på en grænsebetingelse er at sætte $u_0 = 0$ i $x = 1$ for den partielle differentialligning $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Dette kan indføres ved at fjerne den første række og den første søjle fra D_N, hvilket giver matricen $\tilde{D}_N$. På figur 4.5 ses pseudospektrer for matricen $\tilde{A}_N = N^{-2}\tilde{D}_N$ for $N = 20$ afbildet for $\varepsilon \in \{10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$ ved hjælp af toolboxen EigTool til MATLAB. Det bemærkes, at enkelte af egenværdierne ligger relativt langt væk fra 0 i forhold til de andre, samt at den højre del af randen af pseudospektrerne ligner lodrette linjestykker. Det kan vises [Trefethen og Embree, 2005, Theorem 5.1], at for differentialoperatoren $\frac{d}{dx}$ på intervallet $[-1, 1]$ med grænsebetingelsen $u(1) = 0$ er spektret den tomme mængde, mens pseudospektrerne er halvplaner afgrænset af lodrette linjer. Med denne approksimation af eksakt differentiation ved diskretisering



Figur 4.5: Pseudospektrer for $\tilde{A}_N = N^{-2}\tilde{D}_N$ for $N = 20$ for $\varepsilon \in \{10^{-2}, \dots, 10^{-10}\}$.

er det altså lykkedes at opnå en god tilnærmelse til pseudospektret.

Filen `cheb.m` indgår også i EigTool, hvor den dog kun bliver kaldt lokalt som led i dannelsen af matricerne i fire af de medfølgende eksempler. Chebyshevdifferentiationsmatricen D_N af dimension 19 med grænsebetingelser indgår også som et eksempel i EigTool, dog ikke dannet ved hjælp af `cheb.m`. Her er det imidlertid den sidste række og den sidste søjle, der bliver fjernet, så pseudospektret bliver spejlet i den imaginære akse i forhold til det generelle eksempel i [Trefethen og Embree, 2005, §30] anvendt på matricen af samme dimension, hvor det er den første række og den første søjle, der bliver fjernet. Pseudospektret for sidstnævnte svarer på nær forskellen i dimensionen af matricen og en skalering af matricen til figur 4.5.

I eksemplet i EigTool bliver den sidste række og den sidste søjle fjernet fra den matrix, der fremkommer ved at skrive `gallery('chebspec',N)`, grænsebetingelsen svarende til at fjerne den første række og den første søjle kan også opnås ved at skrive `gallery('chebspec',N,1)`. Der er dermed uoverensstemmelse mellem kommentarerne til eksemplet i filen `chebspec_demo.m` i EigTool og det faktiske output. Dels ved, at der står, at der er tale om grænsebetingelsen $u(1) = 0$, mens kommandoerne, der anvendes i eksemplet, som nævnt viser, at det er den sidste række og den sidste søjle, der fjernes. Dels ved, at der står, at den højre del af randen af pseudospektrerne er en ret linje, mens outputtet tydeligt viser, at det er den venstre del af randen, der ligner et lodret linjestykke. Outputtet er ikke afbildet her, men som tidligere nævnt minder det om pseudospektrerne i figur 4.5 spejlet i den imaginære akse.

Kapitel 5

Numerisk bestemmelse af pseudospektral abscisse

Dette kapitel omhandler numerisk bestemmelse af den pseudospektrale abscisse, der blandt andet er et værktøj til at opnå viden omkring et dynamisk systems transiente opførsel. Da kapitlet omhandler numeriske metoder betragtes ikke længere generelle begrænsede operatorer i separable Hilbertrum, men blot operatorer på $\mathbb{C}^n$. Kapitlet er primært baseret på [Burke et al., 2003b].

Ofte er det ikke nødvendigt at finde hele pseudospektret for en matrix. Betragt f.eks. vurderingen i sætning 2.7, s. 32, hvor det kun er nødvendigt at kende pseudospektralradius for at finde en øvre grænse for $||A^k||$. En anden vigtig værdi er den pseudospektrale abscisse.

Definition 5.1 (Spektral og pseudospektral abscisse)
For en operator $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ og $\varepsilon > 0$ kaldes

$$\alpha(A) = \max_{z \in \sigma(A)} \operatorname{Re} z \quad \textit{og} \quad \alpha_\varepsilon(A) = \max_{z \in \overline{\sigma_\varepsilon(A)}} \operatorname{Re} z$$

henholdsvis den spektrale og den pseudospektrale abscisse for A.

Bemærk, at $\alpha_\varepsilon(A) \to \alpha(A)$ for $\varepsilon \to 0$. Den spektrale abscisse anvendes ofte til at bestemme, om et dynamisk system er stabilt. Da $\|\exp(tA)\|$ for store t opfører sig som $e^{t\alpha(A)}$ ifølge [Trefethen og Embree, 2005, Theorem 15.3], vil et system netop stabilisere sig, hvis den spektrale abscisse er negativ. Den spektrale abscisse udtaler sig dog ikke om, hvor store udsving der kan komme, før systemet stabiliserer sig. Dette kan den pseudospektrale abscisse derimod udtale sig om, som for eksempel i følgende sætning fra [Trefethen og Embree, 2005, Theorem 15.4].

Sætning 5.2
For $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ og $\varepsilon > 0$ gælder der, at

$$\sup_{t \geq 0} \|\exp(tA)\| \geq \frac{\alpha_\varepsilon(A)}{\varepsilon}.$$

Målet er nu at finde algoritmer, der kan finde punkterne med størst realdel på randen af ε-pseudospektret, $\partial\sigma_\varepsilon(A)$. De såkaldte criss-cross-algoritmer udviklet af Burke, Lewis, Overton og Mengi er procedurer til numerisk at finde pseudospektral abscisse og radius [Burke et al., 2003b, Mengi og Overton, 2005]. Netop disse algoritmer er implementeret i MATLAB's EigTool-toolbox. Criss-cross-algoritmerne gør brug af at finde skæringer mellem linjer i det komplekse plan og randen af pseudospektret, hvortil de i stor stil anvender singulære værdier og hamiltoniske matricer.

5.1 Singulære værdier

For at opnå viden omkring matricer er det nærliggende at diagonalisere dem, hvilket for kvadratiske matricer ofte foregår ved en egenværdidekomposition, så $A = P\Lambda P^{-1}$, hvor alle matricer er kvadratiske, og Λ er en diagonalmatrix bestående af egenværdier. Der er dog visse ulemper her, da ikke alle matricer har en egenværdidekomposition, og P og P^{-1} ikke nødvendigvis er unitære. Derimod vil en singulær værdi-dekomposition altid eksistere, hvorfor denne er mere anvendelig. Dertil kommer, at blandt andet den største og mindste singulære værdi indeholder megen information om matricen. Afsnittet er primært baseret på [Trefethen og Bau, 1997].

Definition 5.3
De singulære værdier for $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ defineres som kvadratroden af egenværdierne for A^*A.

Lemma 5.4
Egenværdierne forskellige fra nul for A^*A er de samme som for AA^*, det vil sige, at $\sigma(A^*A) \setminus \{0\} = \sigma(AA^*) \setminus \{0\}$.

Bevis
Lad A være en $(m \times n)$-matrix, og $\lambda \in \sigma(A^*A) \setminus \{0\}$. Da eksisterer der en vektor $u \neq 0$, så

$$A^*Au = \lambda u. \tag{5.1}$$

Multiplikation med A fra venstre giver

$$AA^*(Au) = \lambda(Au).$$

Hvis $Au \neq 0$, er λ netop en egenværdi for AA^*. Hvis $Au = 0$, er enten $\lambda = 0$ eller $u = 0$ ifølge (5.1), hvilket strider mod antagelsen. Lignende udregninger kan foretages for AA^*. □

De singulære værdier forskellige fra nul for A kan da netop beregnes som kvadratroden af egenværdierne forskellige fra nul for enten A^*A eller AA^*.

Sætning 5.5
Om de singulære værdier gælder:

(i) *De singulære værdier er ikke-negative.*

(ii) $s_{\max}(A) = \|A\|$.

Hvis A er invertibel, gælder desuden

(iii) $(s_{\min}(A))^{-1} = \|A^{-1}\|$,

hvor $s_{\max}(A)$ og $s_{\min}(A)$ betegner hhv. den største og den mindste singulære værdi.

Bevis
Hvis $\lambda v = A^*Av$ for et v med $||v|| = 1$, er

$$\lambda = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = ||Av||^2 \geq 0,$$

hvilket viser punkt *(i)*. Lad $\lambda_{\max}(A^*A)$ være den største egenværdi for A^*A. Da A^*A er normal, fås vha. spektralradiusformlen [Reed og Simon, 1980], at

$$s_{\max}^2 = \lambda_{\max}(A^*A) = r(A^*A) = ||A^*A|| = ||A||^2.$$

Antag nu, at A er invertibel, og $v \neq 0$. Da er $Av = \lambda v$, hvis og kun hvis $\lambda^{-1}v = A^{-1}v$. Således fås $\sigma((A^{-1})^*A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A^*A)\}$, og dermed er $\|A^{-1}\| = (s_{\min}(A))^{-1}$ ifølge punkt *(ii)*. $\square$

Definition 5.6 (Singulær værdi-dekomposition)
For en matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ kaldes faktoriseringen

$$A = U\Sigma V^*, \tag{5.2}$$

hvor

$$\begin{array}{ll} U \in \mathbb{C}^{m\times m} & \textit{er unitær,} \\ V \in \mathbb{C}^{n\times n} & \textit{er unitær, og} \\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n} & \textit{er en diagonalmatrix,} \end{array}$$

en singulær værdi-dekomposition.

Følgende sætning omkring eksistens og entydighed af singulær værdi-dekomposition anføres uden bevis. Sætning med tilhørende bevis findes i [Trefethen og Bau, 1997, Theorem 4.1].

Sætning 5.7
Enhver matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ har en singulær værdi-dekomposition på formen (5.2). *Ydermere er indgangene, s_i, i Σ entydigt bestemte, ikke-negative og i ikke-voksende rækkefølge, dvs. $s_1 \geq \cdots \geq s_p \geq 0$, hvor $p = \min(m, n)$.*

At indgangene i Σ netop er de singulære værdier, eftervises let.

Sætning 5.8
Lad $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, og $A = U\Sigma V^*$ være den tilhørende singulær værdi-dekomposition. Da er indgangene i Σ netop de singulære værdier for A.

Bevis
Da

$$A^*A = (U\Sigma V^*)^*U\Sigma V^* = V(\Sigma^*\Sigma)V^*,$$

er A^*A similær med $\Sigma^*\Sigma$ og har derfor de samme egenværdier. Egenværdierne for diagonalmatricen $\Sigma^*\Sigma$ er $s_1^2, \ldots, s_p^2$ med yderligere $n - p$ egenværdier på nul, hvis $n > p$. Lignende udregning gælder for AA^*, hvorved der findes m egenværdier. $\square$

I resten af kapitlet betragtes kun kvadratiske matricer, hvoraf det blandt andet følger, at $\Sigma^* = \Sigma$.

Lemma 5.9
Lad $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, og H være givet ved

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Da er de singulære værdier for A absolutværdien af egenværdierne for H.

Bevis
Da $A = U\Sigma V^*$, fås, at $AV = U\Sigma$ og $A^*U = V\Sigma$, da $\Sigma^* = \Sigma$. Men da er

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Da U og V begge er unitære $(n \times n)$-matricer, er

$$\begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^* & U^* \\ V^* & -U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{bmatrix},$$

så

$$\left| \det \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix}^2 \right| = \det \begin{bmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{bmatrix} = 2^{2n} \neq 0.$$

Dermed er matricen invertibel, så (5.3) svarer til en egenværdidekomposition af H, hvor egenværdierne for H er indgangene i $\left[\begin{smallmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{smallmatrix}\right]$. Absolutværdien af disse er netop de singulære værdier for A. $\square$

5.2 Hamiltoniske matricer

I det følgende betragtes en speciel klasse af matricer, de såkaldte hamiltoniske matricer. Disse har visse egenskaber, der udnyttes i criss-cross-algoritmerne, for eksempel at egenværdierne for hamiltoniske matricer er symmetriske omkring den imaginære akse. Det er i [Van Loan, 1984] vist, at der til reelle hamiltoniske matricer findes algoritmer, der kan udregne egenværdier for disse således, at små perturbationer såsom afrundingsfejl ikke ødelægger symmetrien i de fundne egenværdier.

Definition 5.10 (Hamiltoniske matricer)
Lad $J \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ være givet ved

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

En matrix $H \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ kaldes hamiltonisk, hvis $(HJ)^* = HJ$. En matrix $N \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ kaldes skæv-hamiltonisk, hvis $(NJ)^* = -NJ$.

Følgende sætning anvendes ofte som definition på hamiltoniske og skæv-hamiltoniske matricer.

Sætning 5.11
En matrix $H \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ er hamiltonisk, hvis og kun hvis H er på formen

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}, \quad \textit{hvor} \quad A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}, B = B^*, \textit{ og } C = C^*.$$

En matrix $N \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ er skæv-hamiltonisk, hvis og kun hvis N er på formen

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A^* \end{bmatrix}, \quad \textit{hvor} \quad A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}, B = -B^*, \textit{ og } C = -C^*. \tag{5.4}$$

Bevis
Lad H være en $(2n \times 2n)$-blokmatrix dannet af fire $(n \times n)$-matricer, så $H = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$. Ved direkte udregninger fås, at

$$HJ = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B & A \\ -D & C \end{bmatrix},$$

og

$$(HJ)^* = \begin{bmatrix} -B & A \\ -D & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} -B^* & -D^* \\ A^* & C^* \end{bmatrix}.$$

Det følger nu, at $(HJ)^* = HJ$, hvis og kun hvis $B = B^*$, $C = C^*$, og $D = -A^*$. Lignende udregninger kan foretages for skæv-hamiltoniske matricer. □

Lemma 5.12
Lad H og N være hhv. en hamiltonisk og en skæv-hamiltonisk matrix. Da gælder følgende:

(i) Multiplikation med i er en isomorfi mellem hamiltoniske og skæv-hamiltoniske matricer.

(ii) Hvis λ er en egenværdi for H, er også $-\bar{\lambda}$ en egenværdi for H. Dermed er egenværdierne symmetriske omkring den imaginære akse.

(iii) Hvis λ er en egenværdi for N, er også $\bar{\lambda}$ en egenværdi for N. Dermed er egenværdierne symmetriske omkring den reelle akse.

Bevis
Per definition opfylder H, at $(HJ)^* = HJ$. Deraf fås, at $(iHJ)^* = -iHJ$, hvorfor iH per definition er skæv-hamiltonisk. Ligeledes fås, at $(iNJ)^* = iNJ$, således at iN er hamiltonisk.

Det følger af opbygningen af J i definition 5.10, at $J^{-1} = J^* = -J$, og af at $(HJ)^* = HJ$, at $H = J^{-1}(-H)^*J$, så H er similær med $-H^*$. De har dermed samme egenværdier. Resultatet i punkt *(ii)* følger nu, da en egenværdi for H^* er den kompleks konjugerede af en egenværdi for H. Ligeledes er N similær med N^*, hvoraf punkt *(iii)* følger. □

Korollar 5.13
Hvis λ er en egenværdi for en reel hamiltonisk matrix H, er også $-\bar{\lambda}, -\lambda$ og $\bar{\lambda}$ egenværdier for H.

Artiklen [Van Loan, 1984] udtaler sig om at finde egenværdier for reelle hamiltoniske matricer og kvadratet på sådanne. Kvadratet på en reel hamiltonisk matrix er på formen

$$\widetilde{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} A^2 + BC & AB - BA^T \\ CA - A^TC & CB + (A^T)^2 \end{bmatrix}.$$

Det ses, at

$$N_{22} = N_{11}^T, \quad N_{12} = -N_{12}^T \quad \text{og} \quad N_{21} = -N_{21}^T.$$

Dermed er $\{H^2 : H \text{ er reel og hamiltonisk}\}$ en delmængde af de reelle skæv-hamiltoniske matricer. I [Faßbender et al., 1999] vises det, at de to mængder er ens, hvoraf det følger, at der for reelle skæv-hamiltoniske matricer findes egenværdisolvere, der bevarer egenværdiernes symmetri. Dette vil blive anvendt til at finde egenværdier for komplekse hamiltoniske matricer. Det følgende er inspireret af [Benner et al., 1999]. Lad N være en skæv-hamiltonisk $(2n \times 2n)$-matrix, og opdel hver blok i N i realdel og imaginærdel. Da N kan skrives på formen (5.4), fås

$$N = \begin{bmatrix} A_R + iA_I & B_R + iB_I \\ C_R + iC_I & A_R^T - iA_I^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R + iA_I & -B_R^T + iB_I^T \\ -C_R^T + iC_I^T & A_R^T - iA_I^T \end{bmatrix},$$

hvorfor $B_R = -B_R^T$, $B_I = B_I^T$, $C_R = -C_R^T$, og $C_I = C_I^T$. Ved at indføre den unitære matrix

$$Y_{4n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_{2n} & iI_{2n} \\ I_{2n} & -iI_{2n} \end{bmatrix}$$

og permutationsmatricen

$$P = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$$

fås, at

$$\mathcal{N} := P^* Y_{4n}^* \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{bmatrix} Y_{4n} P = \left[\begin{array}{cc|cc} A_R & -A_I & B_R & -B_I \\ A_I & A_R & B_I & B_R \\ \hline C_R & -C_I & A_R^T & A_I^T \\ C_I & C_R & -A_I^T & A_R^T \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{A}^T \end{array}\right].$$

Det ses, at $\mathcal{B} = -\mathcal{B}^T$, og $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^T$, således at $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ er en reel skæv-hamiltonisk matrix. På grund af blokstrukturen med de to nulmatricer er en egenværdi for $\mathcal{N}$ netop en egenværdi for både N og $\bar{N}$. Dermed findes egenværdisolvere for N, der bevarer symmetrien af egenværdierne. Jævnfør lemma 5.12, punkt *(i)*, gør multiplikation med i en hamiltonisk matrix til en skæv-hamiltonisk matrix. Sættes $N = iH$, fås, at $\sigma(N) = \sigma(iH) = i\sigma(H)$, således at $\sigma(H) = -i\sigma(N)$. Dermed findes egenværdisolvere for en generel kompleks hamiltonisk matrix, der bevarer egenværdiernes symmetri. Bemærk, at symmetriegenskaben for H omkring den imaginære akse er bevaret, da $\sigma(N) = \sigma(\bar{N})$.

5.3 Skæringer med pseudospektret

Der indføres først en hjælpefunktion for at lette senere beregninger.

Definition 5.14 (Funktionen $h_\varepsilon(x, y)$)
Lad $h_\varepsilon \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$h_\varepsilon(x, y) = s_{\min}(A - (x + iy)I) - \varepsilon,$$

hvor $s_{\min}$ angiver den mindste singulære værdi.

Med indførelsen af h_ε kan pseudospektret og aflukningen af dette ækvivalent med definition 2.1 skrives

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_\varepsilon(x, y) < 0\} \quad \text{og}$$
$$\overline{\sigma_\varepsilon(A)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_\varepsilon(x, y) \le 0\},$$

da $s_{\min}(A - (x + iy)I) = ||(A - (x + iy)I)^{-1}||^{-1}$. Med denne notation er den pseudospektrale abscisse givet ved

$$\alpha_\varepsilon = \max\{x : (x, y) \in \mathbb{R}^2, h_\varepsilon(x, y) \le 0\}.$$

De første skæringer, der ønskes fundet, er skæringer mellem lodrette linjer i det komplekse plan og randen af pseudospektret, hvilket svarer til, for et fast reelt x, at finde reelle nulpunkter for $h_\varepsilon(x, \cdot)$. Hertil er følgende lemma fundamentalt.

Lemma 5.15 (Lodret søgning)
For reelle tal x og y har matricen $A - (x + iy)I$ en singulær værdi $\varepsilon > 0$, hvis og kun

hvis iy er en egenværdi for den hamiltoniske matrix

$$H(x) = \begin{bmatrix} xI - A^* & \varepsilon I \\ -\varepsilon I & A - xI \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Resultatet gælder specielt, hvis $h_\varepsilon(x, y) = 0$.

Bevis
Hvis iy er en rent imaginær egenværdi for (5.5), eksisterer der en vektor u, så $(H(x)-iyI)u = 0$, der er rækkeækvivalent med systemet

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon I & A - (x+iy)I \\ A^* - (x-iy)I & -\varepsilon I \end{bmatrix} u = 0.$$

Men så er ε en egenværdi for matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & A - (x+iy)I \\ A^* - (x-iy)I & 0 \end{bmatrix},$$

hvilket er ækvivalent med, at ε er en singulær værdi for $A - (x+iy)I$ ifølge lemma 5.9. Hvis $h_\varepsilon(x, y) = 0$, er ε netop den mindste singulære værdi, og resultatet følger klart. □

Lad nu x være et fast reelt tal. Fra lemmaet fås, at $h_\varepsilon(x, \cdot)$ højst kan have $2n$ reelle nulpunkter, da $H(x)$ er en $(2n \times 2n)$-matrix. For at finde nulpunkterne beregnes alle de rent imaginære egenværdier $\{iy_j\}$ for $H(x)$. De y_j'er, hvorom der gælder, at $s_{\min}(A - (x + iy_j)I) < \varepsilon$ er uden interesse, da det er lighed, der søges. Der eksisterer ikke y_j'er, hvor $s_{\min}(A - (x + iy_j)I) > \varepsilon$, da ε netop er en singulær værdi.

Der skelnes mellem to typer nulpunkter for den kontinuerte funktion $y \mapsto h_\varepsilon(x, y)$. Ved krydsende nulpunkter skifter funktionen fortegn, og ved ikke-krydsende nulpunkter gør den ikke. Bemærk, at da $s_{\min}(A-(x+iy)I) = ||(A-(x+iy)I)^{-1}||^{-1}$, er $h_\varepsilon(x, y) > 0$, når $|y|$ er tilstrækkelig stor. Dermed kan der opskrives en ikke-aftagende liste af lige længde, $2m(x)$, hvis ikke-krydsende nulpunkter skrives to gange, dvs. listen kan skrives som

$$l_1(x) \le u_1(x) \le l_2(x) \le u_2(x) \le \cdots \le u_{m(x)}(x). \tag{5.6}$$

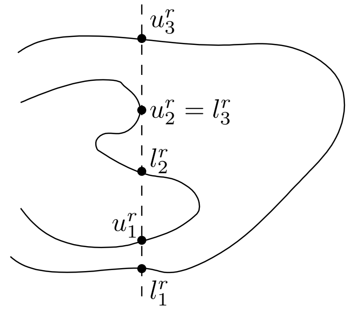
Det ses umiddelbart, at $h_\varepsilon(x, y) < 0$ for

$$y \in \bigcup_{j=1}^{m(x)} (l_j(x), u_j(x)),$$

der netop er de lodrette linjestykker indeholdt i pseudospektret for et fast x. Ligeledes er $h_\varepsilon(x, y) > 0$ for

$$y \in (-\infty, l_1(x)) \cup \bigcup_{j=1}^{m(x)-1} (u_j(x), l_{j+1}(x)) \cup (u_{m(x)}, \infty).$$

På figur 5.1 ses et eksempel på et område opdelt i intervaller. Det skraverede svarer til et pseudospektrum. Følgende lemma bestemmer, om et nulpunkt er krydsende eller ej, og anføres uden bevis. Sætning og bevis findes i [Burke et al., 2003b, Lemma 2.4]. Bemærk, at en singulær værdi s for en kvadratisk matrix B er simpel, hvis s^2 er en simpel egenværdi for B^*B, det vil sige har algebraisk multiplicitet 1. Hvis $s > 0$,



Figur 5.1: Eksempel på et område opdelt i intervaller som i (5.6).

er dette ækvivalent med, at s er en simpel egenværdi for den selvadjungerede matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Lemma 5.16
Lad $x, y_0 \in \mathbb{R}$, og antag, at iy_0 er en rent imaginær egenværdi for den hamiltoniske matrix $H(x)$, og at den singulære værdi $s_{\min}(A - (x + iy_0)I) = \varepsilon$ er simpel. Så er y_0 et krydsende nulpunkt for funktionen $h_\varepsilon(x, \cdot)$, hvis og kun hvis egenværdien iy_0 har ulige algebraisk multiplicitet.

Ud over den lodrette søgning efter skæringer er der også brug for en vandret søgning. Her er følgende lemma fundamentalt.

Lemma 5.17 (Vandret søgning)
For reelle tal x og y har matricen $A - (x + iy)I$ en singulær værdi $\varepsilon > 0$, hvis og kun hvis ix er en egenværdi for den hamiltoniske matrix

$$\widetilde{H}(y) = \begin{bmatrix} iA^* - yI & \varepsilon I \\ -\varepsilon I & iA + yI \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Resultatet gælder specielt, hvis $h_\varepsilon(x, y) = 0$. Ydermere er x det største reelle nulpunkt for $h_\varepsilon(\cdot, y)$ hvis og kun hvis ix er den rent imaginære egenværdi for $\widetilde{H}(y)$ med størst imaginærdel.

Bevis
De singulære værdier for $A - (x + iy)I$ er de samme som for

$$i(A - (x + iy)I) = iA - (-y + ix)I,$$

da multiplikation med en konstant på enhedscirklen ikke påvirker de singulære værdier, da $\sigma((e^{i\theta}A)^* e^{i\theta}A) = \sigma(A^*A)$. Anvendes lemma 5.15 med A, x og y erstattet med hhv. $iA, -y$ og x er første del af lemmaet bevist, og at det gælder for $h_\varepsilon(x, y) = 0$, følger som en direkte konsekvens.

Lad ix' være en rent imaginær egenværdi for $\widetilde{H}(y)$, så ε er en singulær værdi for $A - (x' + iy)I$. Da er

$$\varepsilon \geq s_{\min}(A - (x' + iy)I) = h_\varepsilon(x', y) + \varepsilon,$$

så $h_\varepsilon(x', y) \leq 0$. Men da funktionen $x \mapsto h_\varepsilon(x, y)$ er kontinuert og positiv for store x, må der findes et $x \geq x'$, så $h_\varepsilon(x, y) = 0$.

Antag nu, at x er det største reelle nulpunkt for $h_\varepsilon(\cdot, y)$, hvorved ix er en rent imaginær egenværdi for $\widetilde{H}(y)$. Af ovenstående fås, at for enhver anden rent imaginær egenværdi ix' findes et andet nulpunkt $x'' \geq x'$. Men per antagelse er $x \geq x''$, så ix må være den rent imaginære egenværdi med størst imaginærdel.

Antag omvendt, at ix' er den rent imaginære egenværdi for $\widetilde{H}(y)$ med størst imaginærdel. Igen fås af ovenstående, at $h_\varepsilon(\cdot, y)$ har et reelt nulpunkt $x \geq x'$. Men dermed er ix en rent imaginær egenværdi for $\widetilde{H}(y)$, så per antagelse er $x = x'$. Men dermed er x' netop et reelt nulpunkt for $h_\varepsilon(\cdot, y)$. Hvis x'' er et vilkårligt reelt nulpunkt, er ix'' en rent imaginær egenværdi for $\widetilde{H}(y)$, så per antagelse er $x'' \leq x$. □

Som forlængelse af lemma 5.15 kan det med samme bevisstrategi som til lemma 5.17 vises, at $y \in \mathbb{R}$ er det største hhv. mindste reelle nulpunkt for $h_\varepsilon(x, \cdot)$, hvis og kun hvis iy er den rent imaginære egenværdi for $H(x)$ med størst hhv. mindst imaginærdel. Dermed er det ikke nødvendigt at undersøge, hvorvidt den største og mindste egenværdi for $H(x)$ skal frasorteres, da disse to netop er de to ekstreme skæringer.

Følgende to intuitive lemmaer anføres uden bevis. Disse kan findes som [Burke et al., 2003a, Theorem 4.4 og 5.1].

Lemma 5.18
Givet $z_0 \in \overline{\sigma_\varepsilon(A)}$ eksisterer der en reel-analytisk kurve $p\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, så $p(0) = z_0$, og $p(t) \in \sigma_\varepsilon(A)$ for alle $t \in (0,1]$.

Lemma 5.19
Enhver åben og sammenhængende delmængde af pseudospektret for A bestående af alle punkter, der kan forbindes med en kontinuert kurve, indeholder en egenværdi for A.

Følgende tekniske sætning bekræfter blot den intuitive tanke, at enhver lodret linje af punkter med førstekoordinat mellem den spektrale abscisse og den pseudospektrale abscisse vil skære pseudospektret.

Sætning 5.20
For ethvert reelt x i intervallet $(\alpha, \alpha_\varepsilon)$ eksisterer et reelt y, så $h_\varepsilon(x, y) < 0$.

Bevis
Ifølge lemma 5.18 og lemma 5.19 eksisterer der en kontinuert kurve i det komplekse plan fra en egenværdi for A til et endepunkt med realdel α_ε. Fraregnet dette endepunkt ligger kurven helt i pseudospektret. Dermed vil en lodret linje af punkter med førstekoordinat x skære denne kurve, og resultatet følger, da $h_\varepsilon(x, y) < 0$ netop i pseudospektret. □

5.4 Beregning af pseudospektral abscisse

Værktøjerne til criss-cross-algoritmen er nu indført.

Algoritme 5.21 (Criss-cross-metoden)
(i) **Initialisering:** Sæt $x^1 = \alpha$, og $r = 1$.

(ii) **Lodret søgning:** Find alle nulpunkterne

$$l_1^r \leq u_1^r \leq l_2^r \leq u_2^r \leq \cdots \leq u_{m^r}^r$$

for funktionen $h_\varepsilon(x^r, \cdot)$, hvor ikke-krydsende nulpunkter skrives to gange.

(iii) **Vandret søgning:** Sæt for ethvert $j \in \{1, \ldots, m^r\}$

$$y_j^r = \frac{l_j^r + u_j^r}{2},$$

og find herefter det største nulpunkt x_j^r for funktionen $h_\varepsilon(\cdot, y_j^r)$.

(iv) **Opdatering:** Sæt

$$x^{r+1} = \max\{x_j^r : j \in \{1, \ldots, m^r\}\}, \quad \text{og} \quad r = r + 1,$$

og fortsæt ved punkt (ii).

Bemærk, at denne notation stemmer overens med (5.6), med $l_j^r = l_j(x^r)$, $u_j^r = u_j(x^r)$ og $m^r = m(x^r)$. Bemærk også, at hvis $x^{r+1} = x_k^r$ er blevet udvalgt i trin (iv), vil y_k^r optræde som nulpunkt for $h_\varepsilon(x^{r+1}, \cdot)$ i trin (ii) ved næste iteration.

Som nævnt i forrige afsnit foretages en lodret søgning ved først at beregne de rent imaginære egenværdier for $H(x^r)$, hvorefter de værdier, der ikke har mindste singulær værdi lig ε, fjernes. Den vandrette søgning foretages ved at beregne de rent imaginære egenværdier for $\widetilde{H}(y_j^r)$. Her er det dog ikke nødvendigt at analysere hver udvalgt værdi, da den rent imaginære egenværdi med størst imaginærdel er den ønskede i henhold til lemma 5.17.

Følgende sætning sikrer konvergens af algoritmen.

Sætning 5.22 (Global konvergens)
Criss-cross-metoden genererer en voksende følge af reelle værdier x^r med den pseudospektrale abscisse α_ε som grænseværdi.

Bevis
Bemærk, at $x^1 = \alpha \leq \alpha_\varepsilon$, og antag, at $x^r \leq \alpha_\varepsilon$. Da en itereret værdi x^{r+1} er et nulpunkt for $h_\varepsilon(\cdot, y_j^r)$ for et indeks j, er $x^{r+1} \leq \alpha_\varepsilon$, hvorfor $x^r \leq \alpha_\varepsilon$ for alle r.

Hvis $l_j^r = u_j^r$ for alle j, vil den lodrette linje af punkter med førstekoordinat x_j^r ikke ramme pseudospektret. Dermed er $x^r = \alpha_\varepsilon$ ifølge sætning 5.20, og der er ikke mere at vise. Omvendt, hvis $l_j^r < u_j^r$ for et j, er $h_\varepsilon(x^r, y_j^r) < 0$, så $x^{r+1} > x^r$. Dermed er $\{x^r\}$ strengt voksende og opadtil skarpt begrænset ved α_ε.

Antag nu, at $\{x^r\}$ konvergerer mod en grænse $x^\infty < \alpha_\varepsilon$. Da de naturlige tal m^r er ligeligt begrænsede ved n, da $h_\varepsilon(x^r, \cdot)$ højst har $2n$ nulpunkter, findes en delfølge S af de naturlige tal, så $2m^r = m$ for alle $r \in S$, og så der for fortætningspunkter l_j^∞, u_j^∞ og y_j^∞ gælder, at

$$l_j^r \to l_j^\infty, \quad u_j^r \to u_j^\infty, \quad \text{og} \quad y_j^r \to y_j^\infty$$

for $r \to \infty$ i S og for $j \in \{1, \ldots, m\}$. For ethvert reelt $\mu \in [0, 1]$ er

$$h_\varepsilon(x^r, \mu l_j^r + (1 - \mu)u_j^r) \leq 0,$$

hvoraf det pga. kontinuiteten af h følger, at

$$h_\varepsilon(x^\infty, \mu l_j^\infty + (1 - \mu)u_j^\infty) \leq 0,$$

så

$$h_\varepsilon(x^\infty, y) \leq 0 \quad \text{for } l_j^\infty \leq y \leq u_j^\infty.$$

Hvis $l_j^\infty < u_j^\infty$ for et indeks j, er $l_j^\infty < y_j^\infty < u_j^\infty$, og dermed

$$l_j^\infty < y_j^r < u_j^\infty \quad \text{for alle store } r \in S.$$

For et sådant r må $h_\varepsilon(x^\infty, y_j^r) \leq 0$. Men derved vil x^{r+1} som minimum være det største nulpunkt for $h_\varepsilon(\cdot, y_j^r)$, så $x^{r+1} \geq x^\infty$. Men dette strider mod, at $\{x^r\}$ er en strengt voksende følge med grænseværdi x^∞. Dermed kan det antages, at

$$l_j^\infty = u_j^\infty \quad \text{for ethvert } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{5.8}$$

Per antagelse er $\alpha < x^\infty < \alpha_\varepsilon$, så ifølge sætning 5.20 eksisterer der et reelt y^∞, så $h_\varepsilon(x^\infty, y^\infty) < 0$. Dermed vil der pga. kontinuitet eksistere et $\delta > 0$, så

$$h_\varepsilon(x, y) < 0 \quad \text{for } |x - x^\infty| < \delta, \text{ og } |y - y^\infty| < \delta.$$

Da $x^r \to x^\infty$, vil der for alle store r gælde, at

$$h_\varepsilon(x^r, y) < 0 \quad \text{for } |y - y^\infty| < \delta,$$

hvorfor der må eksistere et indeks j, så $l_j^r < y < u_j^r$, hvoraf det fås, at $u_j^r - l_j^r > 0$ for alle store r. Men der gælder ligeledes vha. (5.8), at

$$|u_j^r - l_j^r| \leq |u_j^r - u_j^\infty| + |l_j^r - l_j^\infty| \to 0 \quad \text{for } r \to \infty,$$

hvorfor der opstår en modstrid. Dermed er første antagelse forkert, så $\{x^r\}$ kan ikke konvergere mod en grænse mindre end α_ε. □

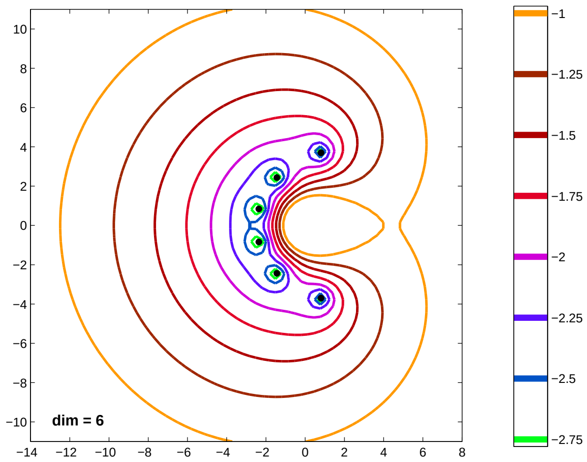
Det kan ydermere vises, at konvergensen er kvadratisk. Sætning og bevis findes i [Burke et al., 2003b, Theorem 5.2].

5.5 Numerisk implementering

Dette afsnit omhandler implementeringen af criss-cross-algoritmen til bestemmelse af den pseudospektrale abscisse i MATLAB. Implementeringen vil blive eksemplificeret med (6×6)-matricen givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -30 & -120 & -360 & -720 & -720 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Pseudospektrer for A kan ses på figur 5.2. Den betragtede implementering er en udvidelse af den, der findes i EigTool-toolboxen. Forskellen på de to er, at den simple udgave kun anvender MATLAB's egen `eig`-funktion til at finde egenværdier for de hamiltoniske matricer. Denne implementering bestemmer egenværdier op til en given tolerance. Herved kan der opstå problemer med at finde de rent imaginære egenværdier, der ifølge lemma 5.15 og lemma 5.17 skal bruges i bestemmelsen af skæringspunkter mellem rette linjer og pseudospektrets rand. Den udvidede udgave giver muligheden for at anvende egenværdisolvere specielt udviklet til hamiltoniske



Figur 5.2: Pseudospektrer for A.

matricer. Disse bevarer den hamiltoniske struktur, og de rent imaginære egenværdier vil derfor selv med afrundingsfejl stadig være rent imaginære. Den udvidede kode kan findes på `http://www.cs.nyu.edu/faculty/overton/software/`, og er sidst opdateret 10. marts 2005.

Antag, at samtlige nulpunkter til en given iteration r alle er krydsende nulpunkter, og dermed forskellige. Antag ydermere, at nulpunkterne ligger med en vis afstand, og at den tilhørende rent imaginære egenværdi $H(x^r)$ er simpel. Da vil en hamiltonisk egenværdisolver som output give de rent imaginære egenværdier med realdel lig 0, upåvirket af afrundingsfejl, da perturbationer af x^r ikke flytter en simpel, rent imaginær egenværdi for $H(x^r)$ væk fra den imaginære akse. Dette gælder dog ikke i grænsen, når algoritmen konvergerer. Lad $(\alpha_\varepsilon, \tilde{y})$ være et maksimum over den reelle akse i det aflukkede pseudospektrum. Dermed er $\tilde{y}$ et ikke-krydsende nulpunkt for $h_\varepsilon(\alpha_\varepsilon, \cdot)$, hvorfor den rent imaginære egenværdi $i\tilde{y}$ for $H(\alpha_\varepsilon)$ har lige algebraisk multiplicitet jævnfør lemma 5.16. For alle $x^r < \alpha_\varepsilon$ findes et par af krydsende nulpunkter l^r, u^r, for hvilket der gælder, at $u^r - l^r \to 0$ for $r \to \infty$. Dermed bliver det sværere og sværere numerisk at bestemme, om den hamiltoniske matrix har to forskellige, men tætte egenværdier, en dobbelt rent imaginær egenværdi eller, grundet afrundingsfejl, et par af tætliggende egenværdier med samme imaginærdel. Dette vil ske, selvom en hamiltonisk egenværdisolver er valgt. Derfor er implementeringen af criss-cross-algoritmen indrettet således, at den terminerer, enten når egenværdisolveren ikke kan returnere en rent imaginær egenværdi i den lodrette søgning i punkt (ii) i algoritmen, eller når den vandrette søgning i punkt (iii) returnerer et $x^{r+1} \leq x^r$. Hvis et af tilfældene opstår, indikerer dette, at programmets præcision er nået. Et af tilfældene vil opstå på et tidspunkt, da $\{x^r\}$ er monotont voksende mod α_ε, og typisk sker dette inden for 3 til 5 iterationer ifølge [Burke et al., 2003b].

Implementeringen er delt op i tre filer. En hovedfil `pspa.m` og to beregningsfiler `pspa_imag.m` og `pspa_real.m`, der er hhv. lodret og vandret søgning. Begge disse filer bliver kaldt af hovedfilen. Hovedfilen tager op til 6 argumenter, hvor de første selvfølgelig er matricen A, for hvilken den pseudospektrale abscisse ønskes fundet, og det valgte ε. De resterende argumenter angiver blandt andet, om der skal plottes, og ikke mindst hvilken egenværdisolver der skal anvendes. Hvis ingen egenværdisolver angives, benyttes MATLAB's egen `eig`. I dette afsnit omtales de dele af koden, der indeholder plotfunktioner og -kommandoer ikke, da disse ikke har beregningsmæssig interesse. Hovedfilen består primært af initialiseringer, som for eksempel $x^1 = \alpha$, og det er blandt andet i denne fil, at det bliver kontrolleret om argumenterne er på korrekt form, som for eksempel om en matrix er kvadratisk. Derudover er det denne fil, der kalder de to beregningsfiler, der er den interessante del af implementeringen. Hovedfilen kalder først `pspa_imag.m`, der er den lodrette søgning til en given x-værdi. Følgende kode anvendes til at bestemme egenværdierne for den hamiltoniske matrix $M = \left[\begin{smallmatrix} -B^* & E \\ -E & B \end{smallmatrix}\right]$, hvor $B = A - xI$, og $E = \varepsilon I$, svarende til $H(x)$ fra lemma 5.15, alt efter hvilken egenværdisolver der er valgt. Der er 3 valgmuligheder, hvor 0 er MATLAB's egen `eig`, 1 er en hamiltonisk egenværdisolver udviklet af Benner, Mehrmann og Xu [Benner et al., 1998], og 2 er en metode baseret på [Van Loan, 1984].

```
if eigsolver == 0
    eM = eig([-B'  E;  -E   B]);
else
    [Am,QG] = haconv(-B',E,-E);
    if eigsolver == 1
        eM = haeig(Am,QG);
    else
        eM = Hameig(Am,QG);
    end
end
```

Matricen A i (5.9) har $x^1 = \alpha \approx 0{,}80$, og med ovenstående fås de 12 egenværdier

$$\sigma(H(\alpha)) = \texttt{eM} \approx \{\pm 4{,}63i; \pm 3{,}02i; \pm 3{,}27 \pm 0{,}77i; \pm 2{,}24 \pm 2{,}27i\}.$$

Den numerisk mindste værdi af realdelen af egenværdierne findes ved `minreal = min(abs(real(eM)))`. Hvis `minreal` er større end tolerancen `imagtol` ved første iteration, der er 0, med mindre MATLAB's egenværdisolver er valgt, sættes tolerancen op til `minreal+imagtol`. De egenværdier, hvor `minreal` er mindre end tolerancen, betragtes fremover som værende rent imaginære. Den resterende del af `pspa_imag.m` er en if-else-løkke, der terminerer med en tom vektor, hvis `minreal>imagtol`. Else-delen indeholder udvælgelse og sortering af de fundne egenværdier. Den starter med først at indeksere og sortere egenværdierne med absolutværdi af realdelen mindre end eller lig `imagtol`.

```
indx = find(abs(real(eM)) <= imagtol);
y = sort(imag(eM(indx)));
```

For matricen A fås i første iteration af dette, at $y \approx \{-4{,}63; -3{,}02; 3{,}02; 4{,}63\}$.

En stor fordel ved de hamiltoniske egenværdisolvere er egenskaben, at antallet af rent imaginære egenværdier er lige på trods af afrundingsfejl. Dette er vigtigt for criss-cross-algoritmen, for hvis ikke par-strukturen fra (5.6), s. 97, er bevaret, kan algoritmen fejle. Den lodrette søgning i den ideelle algoritme uden afrundingsfejl vil frasortere alle de rent imaginære egenværdier iy_j, for hvilke $s_{\min}(A - (x + iy_j)I) < \varepsilon$. For at frasortere egenværdierne kan der indføres en tolerance i denne ulighed, men dette kan give problemer, hvis flere singulære værdier ligger tæt på ε. Derfor undersøges i stedet for, om $s_{\min}(A-(x+iy_j)I)$ er den singulære værdi, der er tættest på ε. De iy_j, hvor dette ikke gælder, frasorteres. Implementeringen gør brug af blandt andet `s=svd()`, der her returnerer en vektor bestående af singulære værdier, og `[C,I]=min()`, der returnerer argumentets mindste værdi `C` og dets indeks `I`. Hvis minimum antages flere steder, angives kun det første sted, det optræder. Det bemærkes, at `n` svarer til n'et i $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

```
13 indx2 = 1;
14 for check = 2: length(indx)-1
15     j = check;
16     Ashift = A - (x + i*y(j))*eye(n);
17     s = svd(Ashift);
18     [minval,minind] = min(abs(s-epsln));
19     if (minind == n)
20         indx2 = [indx2; j];
21     end
22 end
23 indx2 = [indx2; length(indx)];
24 removed = length(indx) - length(indx2);
25 if removed > 0
26     y = y(indx2);
27 end
```

Bemærk i linje 19–20, at der bliver tilføjet et element til `indx2`, dvs. en egenværdi bliver accepteret, netop hvis den singulære værdi, der er tættest på ε, er den mindste. Dermed består `y` nu af de y-værdier, der er blevet accepteret. For matricen A er ingen værdier blevet sorteret fra, hvorfor y er den samme som før.

Det sikres nu, at der er fundet et lige antal skæringer, og at der i det hele taget er fundet skæringer. Bemærk, at et ikke krydsende nulpunkt giver anledning til et lige antal skæringer pga. egenværdiens lige algebraiske multiplicitet, jævnfør lemma 5.16. Ellers returneres en fejlmeddelelse.

Der er endnu et tilfælde, der bør tages højde for. Antag, at den første lodrette søgning ved matricen A for $\varepsilon = 0{,}1$ kun finder et enkelt sæt af skæringer, således at midtpunktet af intervallet er $y_1^1 = 0$, da matricen er reel. Dermed vil den efterfølgende vandrette søgning finde punktet $(x^2, 0)$, hvor $x^2 \approx 4{,}82$. Hvis den efterfølgende lodrette søgning igen kun finder et enkelt par af skæringer, er $y_1^2 = 0$, og den efterfølgende vandrette søgning finder derfor $x^3 = x^2$, og algoritmen terminerer med det forkerte resultat. For at sikre mod tilfælde som dette indføres en simpel foranstaltning, efter de lodrette intervaller er fundet. Lad y_k^r være y-værdierne til x^{r+1} fundet ved en lodret søgning, og kontroller, om y_k^r er et nulpunkt i den efterfølgende lodrette søgning. Grundet afrundningsfejl skal det mere præcist undersøges, hvorvidt mængden af nulpunkter ved iteration $r+1$ er ikke-tom, og om

$$y_k^r \in [l_j^{r+1} + \delta_j^{r+1}, u_j^{r+1} - \delta_j^{r+1}],$$

hvor $\delta_j^{r+1} = \tau(u_j^{r+1} - l_j^{r+1})$ for et $j \in \{1, \ldots, m^{r+1}\}$ og et fast $\tau \ll 1$. Hvis det er tilfældet, splittes intervallet $[l_j^{r+1}, u_j^{r+1}]$ op i de to intervaller $[l_j^{r+1}, y_k^r]$ og $[y_k^r, u_j^{r+1}]$, hvortil midtpunktet af hvert findes. Ifølge [Burke et al., 2003b] er 0,01 et fornuftigt valg for τ, da dette er lille nok til at bryde et interval i to om nødvendigt, men stort nok til kun at bryde intervallet, hvis det er nødvendigt. Dette foregår i følgende del af implementeringen, hvor `npairs` er antallet af intervaller.

```
28 ind = 0;
29 for j=1:npairs
30    ylow = y(2*j-1);
31    yhigh = y(2*j);
32    inttol = .01 * (yhigh - ylow);
33    if ywant > ylow + inttol & ywant < yhigh - inttol
34       ind = ind + 1;
35       ynew(ind,1) = (ylow + ywant)/2;
36       ind = ind + 1;
37       ynew(ind,1) = (ywant + yhigh)/2;
38    else
39       ind = ind + 1;
40       ynew(ind,1) = (ylow + yhigh)/2;
41    end
42 end
```

Det sidste, der sker i `pspa_imag.m`, er, at symmetrien af pseudospektret for reelle matricer udnyttes. Det vil sige, at hvis A er reel, er det kun nødvendigt at betragte y-værdier fra den øvre halvplan.

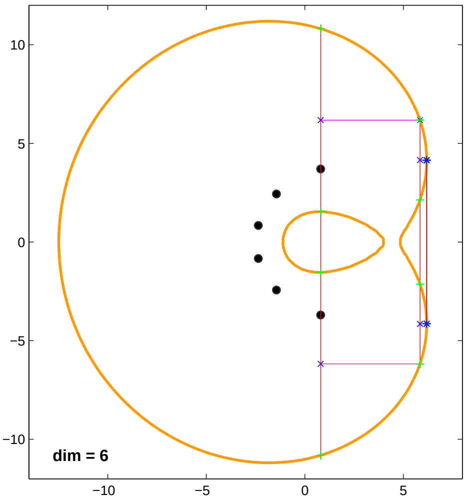
```
43 if Areal
44    indx = find(ynew >= 0);
45    ynew = ynew(indx);
46 end
```

Hovedfilen gemmer `ynew` som `y`, så der eksisterer nu en vektor `y` bestående af y-værdier, der til det givne x er midtpunkter af lodrette linjestykker i pseudospektret. Disse y-værdier anvendes nu som argument i `pspa_real.m`. I henhold til teorien findes nu de rent imaginære egenværdier for $\widetilde{H}(y_j^r)$, hvor y_j^r er elementerne i `y`. På samme måde som i den lodrette søgning kan der her vælges, hvilken egenværdisolver der ønskes anvendt. Egenværdierne gemmes som `eM2`. Følgende løkke udføres også for hvert element i `y`.

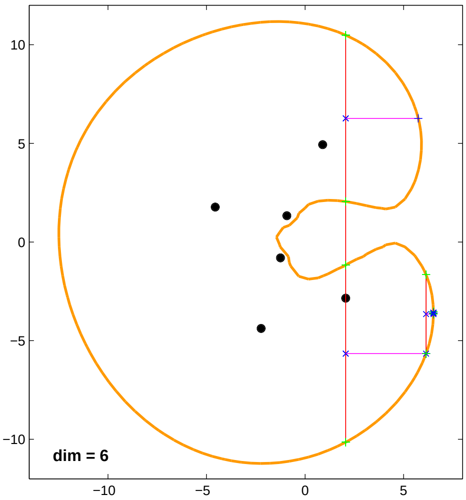
```
47 if min(abs(real(eM2))) <= imagtol
48    indx = find(abs(real(eM2)) <= imagtol);
49    xnew(j) = max(imag(eM2(indx)));
50 else
51    xnew(j) = -inf;
52 end
```

Hvis der netop findes rent imaginære egenværdier indekseres disse i linje 48 og den største gemmes som et element i `xnew`, således at `xnew` kommer til at bestå af den største x-værdi i det aflukkede pseudospektrum på en vandret linje ud fra hver y-værdi fundet ved `pspa_imag.m`. Til sidst findes den største af disse x-værdier og den tilhørende y-værdi.

```
53 [xbest,ind] = max(xnew);
54 ybest = y(ind);
```



(a) A.



(b) A'.

Figur 5.3: Pseudospektrer for matricerne A og A' med $\varepsilon = 0{,}1$ med tilhørende plot fra criss-cross-algoritmen til bestemmelse af pseudospektral abscisse.

Hovedfilen kører de to beregningsfiler, så længe der findes rent imaginære egenværdier for $H(x)$, det nyfundne x er skarpt større end det tidligere, og der ikke opstår fejl. Derudover er algoritmen sat til at terminere med en fejl, hvis et resultat ikke er opnået efter 20 iterationer. Pseudospektret for A med $\varepsilon = 0{,}1$ med tilhørende plot fra criss-cross-algoritmen kan ses på figur 5.3(a), og de numeriske værdier for de tilhørende iterationer kan ses i tabel 5.1. Der er anvendt både den hamiltoniske egenværdisolver udviklet af Benner, Mehrmann og Xu og MATLAB’s egen egenværdisolver. Det ses, at med den hamiltoniske egenværdisolver terminerer algoritmen efter 4 iterationer, hvor den anden skal bruge 7, og her er forskellen mindre end 10^{-13}. Det ses også, at uden hamiltonisk egenværdisolver findes flere skæringer ved de lodrette søgninger, når algoritmen nærmer sig α_ε. Det bemærkes, at med den hamiltoniske egenværdisolver er algoritmen termineret, da den ikke længere fandt rent imaginære egenværdier til $H(x^r)$, hvor den i det andet tilfælde er termineret, da $x^{r+1} \leq x^r$. Sidstnævnte skyldes med stor sandsynlighed, at der efter iteration 6 er fundet en for høj x-værdi på grund af afrundingsfejl.

Som et sidste eksempel betragtes en kompleks perturbation af matricen A. Lad A' være (6×6)-matricen A fra (5.9) med indgang $(4, 3)$ perturberet fra 0 til i. Dermed er pesudospektret ikke længere symmetrisk omkring den reelle akse. Pseudospektret for A' med $\varepsilon = 0{,}1$ med tilhørende plot fra criss-cross-algoritmen kan ses på figur 5.3(b), og de numeriske værdier for de tilhørende iterationer kan ses i tabel 5.2, hvor der igen både er anvendt hamiltonisk egenværdisolver og MATLAB’s egen `eig`. Ved begge egenværdisolvere er algoritmen termineret, da der er fundet et $x^{r+1} \leq x^r$. Det ses, at forskellen på de to i dette tilfælde giver en differens på mindre end 10^{-13}. Dog har algoritmen med den hamiltoniske egenværdisolver brugt en iteration færre.

Hamiltonisk egenværdisolver				
r	x^r	m^r	y_1^r	y_2^r
1	0,803611571031847	1	6,173287203322284	-
2	5,842966386848187	1	4,156182973663508	-
3	6,181597017738199	1	4,142563524599984	-
4	6,181612089038407	1	4,142562887808657	-
5	6,181612089038424	0	-	-
MATLAB's egenværdisolver				
r	x^r	m^r	y_1^r	y_2^r
1	0,803611571031847	1	6,173287203322282	-
2	5,842966386848172	1	4,156182973663518	-
3	6,181597017738196	1	4,142563524599986	-
4	6,181612089038379	2	4,142562840897468	4,142563571511165
5	6,181612089038423	2	4,142562806231783	4,142562922474343
6	6,181612089038425	1	4,142562887808653	-
7	6,181612089038435	2	4,142562866205854	4,142562909411446
8	6,181612089038435	0	-	-

Tabel 5.1: De numeriske værdier for iterationerne til bestemmelse af $\alpha_\varepsilon(A)$.

Hamiltonisk egenværdisolver				
r	x^r	m^r	y_1^r	y_2^r
1	2,062075012029518	2	−5,658703480680666	5,241063217289241
2	6,138847493891285	1	−3,656209665611319	-
3	6,513210712938557	1	−3,591852430025272	-
4	6,513584679801937	1	−3,591792498437352	-
5	6,513584680126223	1	−3,591792578941133	−3,591792417881605
6	6,513584680126223	0	-	-
MATLAB's egenværdisolver				
r	x^r	m^r	y_1^r	y_2^r
1	2,062075012029518	2	−5,658703480680648	6,268294852535324
2	6,138847493891275	1	−3,656209665611323	-
3	6,513210712938542	1	−3,591852430025273	-
4	6,513584679801937	1	−3,591792498437356	-
5	6,513584680126216	2	−3,591792652324909	−3,591792344497834
6	6,513584680126234	1	−3,591792498385379	-
7	6,513584680126234	0	-	-

Tabel 5.2: De numeriske værdier for iterationerne til bestemmelse af $\alpha_\varepsilon(A')$.

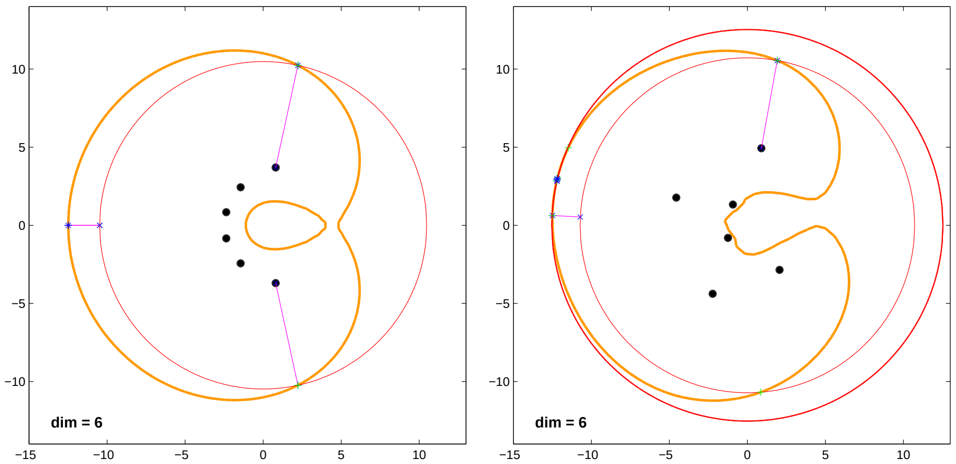
5.6 Perspektivering

Criss-cross-algoritmen konvergerer hurtigt, og beregningsmæssigt er det beregningerne af egenværdierne for $H(x)$ og $\widetilde{H}(y)$, der tager tid. Der kan dog være beregninger at spare ved først at foretage en vandret søgning, da α_ε ofte antages i området ud for egenværdien med størst realdel, som er tilfældet ved både A og A'. Dette er ligeledes tilfældet for alle normale matricer, da pseudospektrerne ligger som cirkler med samme radius omkring hver egenværdi ifølge sætning 2.3 punkt *(ii)*.

Criss-cross-algoritmen kan også med modifikationer anvendes til at beregne pseudospektralradius. Her er det dog ikke lodrette og vandrette søgninger, men radiære og cirkulære søgninger, der skal anvendes. Algoritmen initialiseres med $\rho^1 = r_\varepsilon$ og med θ_1^1, der er hovedargumentet til egenværdien, hvortil spektralradius antages. Derefter findes skæringen med randen af pseudospektret på linjen ud fra origo igennem egenværdien. Herefter foretages en cirkulær søgning ud fra skæringen, dvs. alle skæringer mellem cirklen med centrum i origo og den fundne radius og randen af pseudospektret. Til hver cirkelbue i pseudospektret findes midtpunktet θ_j^r, og der foretages nu en ny radiær søgning efter skæringspunkter mellem linjestykket fra origo igennem midtpunkterne og det aflukkede pseudospektrum. Dette fortsættes, indtil pseudospektralradius er fundet op til en given tolerance.

På figur 5.4 ses pseudospektrer for A og A' med $\varepsilon = 0{,}1$ med tilhørende plot fra criss-cross-algoritmen til bestemmelse af pseudospektralradius. De tilhørende numeriske værdier for iterationerne findes i tabel 5.3 og 5.4.

Søgningerne foregår, som ved algoritmen for bestemmelse af pseudospektral abscisse, ved at finde egenværdier for hamiltoniske matricer, men modsat bestemmelse af pseudospektral abscisse kan der ved en cirkulær søgning findes uendeligt mange skæringer, hvilket der skal tages højde for. Implementeringen i EigTool anvender i øjeblikket, ligesom implementeringen for bestemmelse af pseudospektral abscisse, MATLAB's egen egenværdisolver, og udnytter derfor ikke den hamiltoniske struktur af matricerne.



(a) A. (b) A'.

Figur 5.4: Pseudospektrer for matricerne A og A' med $\varepsilon = 0{,}1$ med tilhørende plot fra criss-cross-algoritmen til bestemmelse af pseudospektralradius.

r	ρ^r	m^r	θ_1^r
1	3,784017681762119	0	1,356796751660823
2	10,47717409593682	1	−3,141592653589793
3	12,48598739423252	0	-

Tabel 5.3: De numeriske værdier for iterationerne til bestemmelse af $r_\varepsilon(A)$.

r	ρ^r	m^r	θ_1^r
1	5,012522020849668	0	1,391383295988042
2	10,71816304001210	1	3,091584166702382
3	12,50731411608825	1	2,912658763122895
4	12,54632997579909	1	2,903800832735430
5	12,54642933487869	1	2,903779823189943
6	12,54642933543778	0	-

Tabel 5.4: De numeriske værdier for iterationerne til bestemmelse af $r_\varepsilon(A')$.

Litteratur

[Achieser, 2003] Achieser, N. I. (2003). *Theory of Approximation*. Dover Phoenix Editions. Dover, Mineola. Genudgivelse af 1956-udgaven. ISBN 0-486-49543-4.

[Apostol, 1974] Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley, 2. udgave. ISBN 0-201-00288-4.

[Axler, 1997] Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2. udgave. ISBN 0-387-98258-2.

[Benner et al., 1998] Benner, P., Mehrmann, V. og Xu, H. (1998). A numerically stable, structure preserving method for computing the eigenvalues of real hamiltonian or symplectic pencils. *Numerische Mathematik*, 78(3):329-358.

[Benner et al., 1999] Benner, P., Mehrmann, V. og Xu, H. (1999). A note on the numerical solution of complex hamiltonian and skew-hamiltonian eigenvalue problems. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 8:115-126.

[Burke et al., 2003a] Burke, J. V., Lewis, A. S. og Overton, M. L. (2003a). Optimization and Pseudospectra, with Applications to Robust Stability. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25(1):80-104.

[Burke et al., 2003b] Burke, J. V., Lewis, A. S. og Overton, M. L. (2003b). Robust stability and a criss-cross algorithm for pseudospectra. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 23(3):359-375.

[Conway, 1978] Conway, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable*. Nr. 11 i Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2. udgave. ISBN 0-387-90328-3.

[Conway, 1995] Conway, J. B. (1995). *Functions of One Complex Variable II*. Nr. 159 i Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-94460-5.

[Faber, 1903] Faber, G. (1903). Über polynomische Entwickelungen. *Mathematische Annalen*, 57(3):389-408.

[Faßbender et al., 1999] Faßbender, H., Mackey, D. S., Mackey, N. og Xu, H. (1999). Hamiltonian square roots of skew-Hamiltonian matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 287(1-3):125-159.

[Gaier, 1980] Gaier, D. (1980). *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*. Birkhäuser, Basel. ISBN 3-7643-1161-4.

[Gilbarg og Trudinger, 1983] Gilbarg, D. og Trudinger, N. S. (1983). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Nr. 224 i Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 2. udgave. ISBN 3-540-13025-X.

[Jensen, 2008] Jensen, A. (2008). Spectra and Pseudospectra of Matrices and Operators. Forelæsningsnoter, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University. Lecture Notes for DMF Sommertræf August 2008. URL `http://www.math.aau.dk/~matarne/traef08/AJnotes.pdf`.

[Kövari og Pommerenke, 1967] Kövari, T. og Pommerenke, C. (1967). On Faber Polynomials and Faber Expansions. *Mathematische Zeitschrift*, 99(3):193-206.

[Lay, 2002] Lay, D. C. (2002). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Higher Education, Boston, 3. udgave. ISBN 0-321-14992-0.

[Liesen, 2001] Liesen, J. (2001). Faber Polynomials Corresponding to Rational Exterior Mapping Functions. *Constructive Approximation*, 17(2):267-274.

[Mason og Handscomb, 2003] Mason, J. C. og Handscomb, D. C. (2003). *Chebyshev Polynomials*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton. ISBN 0-8493-0355-9.

[Mengi og Overton, 2005] Mengi, E. og Overton, M. L. (2005). Algorithms for the computation of the pseudospectral radius and the numerical radius of a matrix. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(4):648-669.

[Meyer, 2000] Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia. ISBN 0-89871-454-0.

[Reed og Simon, 1980] Reed, M. og Simon, B. (1980). *Functional Analysis*, bind 1 af *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, San Diego. ISBN 0-12-585050-6.

[Rudin, 1987] Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3. udgave. ISBN 0-07-100276-6.

[Smirnov og Lebedev, 1968] Smirnov, V. I. og Lebedev, N. A. (1968). *Functions of a Complex Variable: Constructive Theory*. Iliffe Books, London.

[Spijker, 1991] Spijker, M. N. (1991). On a Conjecture by Le Veque and Trefethen Related to the Kreiss Matrix Theorem. *BIT*, 31(3):551-555.

[Toh og Trefethen, 1999] Toh, K.-C. og Trefethen, L. N. (1999). The Kreiss Matrix Theorem on a General Complex Domain. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(1):145-165.

[Trefethen, 2000] Trefethen, L. N. (2000). *Spectral Methods in MATLAB*. Nr. 10 i Software, Environments, and Tools. SIAM, Philadelphia. ISBN 0-89871-465-6.

[Trefethen og Bau, 1997] Trefethen, L. N. og Bau, III, D. (1997). *Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia. ISBN 0-89871-361-7.

[Trefethen og Embree, 2005] Trefethen, L. N. og Embree, M. (2005). *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton University Press, Princeton. ISBN 0-691-11946-5.

[Turner, 2000] Turner, P. R. (2000). *Guide to Scientific Computing*. Palgrave, Basingstoke, 2. udgave. ISBN 0-333-79450-8.

[Van Loan, 1984] Van Loan, C. (1984). A Symplectic Method for Approximating All the Eigenvalues of a Hamiltonian Matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 61:233-251.

[Wade, 2004] Wade, W. R. (2004). *An Introduction to Analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 3. udgave. ISBN 0-13-124683-6.