Indhold

Α	Dynamiske systemer A.1 SDOF-system	3 4 11 12				
В	Logaritmisk dekrement 1					
С	Random data C.1 Stationær stokastisk proces C.2 Ikke-stationær stokastisk processer og behandling C.3 Stationære stokastisk processer og behandling	17 17 18 18				
D	Fast Fourier Transformation (FFT)D.1Diskret dataD.2FourierserierD.3Kontinuert fouriertransformD.4Diskret fouriertransformD.5Basis FFT algoritme	 25 25 27 28 29 29 				
	Random Decrement - RD 3					
\mathbf{E}	Random Decrement - RD	31				
E F	Random Decrement - RD Korrelationsfunktion via FFT	$\frac{31}{35}$				
E F G	Random Decrement - RD Korrelationsfunktion via FFT Stochastic Subspace Identification - SSI	31 35 39				
E F G H	Random Decrement - RD Korrelationsfunktion via FFT Stochastic Subspace Identification - SSI Frequency Domain Decomposition - FDD	31 35 39 43				
E F G H I	Random Decrement - RD Korrelationsfunktion via FFT Stochastic Subspace Identification - SSI Frequency Domain Decomposition - FDD Autoregressive Moving Average - ARMA I.1 Præsentation af AR-model I.2 Præsentation af ARMA-model I.3 Stabilitet af ARMA-parametre I.4 Systemindentifikation ved ARMA	 31 35 39 43 47 49 51 54 56 				
E F G H I	Random Decrement - RD Korrelationsfunktion via FFT Stochastic Subspace Identification - SSI Frequency Domain Decomposition - FDD Autoregressive Moving Average - ARMA I.1 Præsentation af AR-model	 31 35 39 43 47 49 51 54 56 67 				
E F G H I S K	Random Decrement - RD Korrelationsfunktion via FFT Stochastic Subspace Identification - SSI Frequency Domain Decomposition - FDD Autoregressive Moving Average - ARMA 1.1 Præsentation af AR-model 1.2 Præsentation af ARMA-model 1.3 Stabilitet af ARMA-parametre 1.4 Systemindentifikation ved ARMA Reverse arrangement test Numerisk Newmark integration	 31 35 39 43 47 49 51 54 56 67 69 				

Dynamiske systemer

Menneskelige aktiviteter og naturfænomener giver i mange tilfælde anlæg til tidsafhængig belastning på konstruktioner som simple elementære bjælker eller avancerede multietage bygninger. Ved tidsafhængig belastning eller rettere dynamisk belastning, f(t), pålagt en konstruktion, forekommer der tidsafhængige inertikræfter, hvormed det er muligt, at gøre overvejelser omkring analyse og design af en given konstruktion. Design og analyse af en konstruktion sker med henblik på modstandsevnen mod flytningsresponset, x(t), hvilket må inkludere kræfter, der er funktion af flytningsresponset og evt. andre responstyper, såsom hastighed, $\dot{x}(t)$, og acceleration, $\ddot{x}(t)$. Ovenstående er defineret ved den såkaldt *sv*-ingningsanalyse, hvor formålet er at bestemme f.eks. x(t) på baggrund af ydre belastning eller anden form for betingelse med anledning til svingninger.

Det er muligt, at beskrive et svingende massesystem ved brug af bevægelsesligninger beskrevet ved lineære partielle differentialligninger, der rent matematisk er besværlige at bestemme. Disse er i stand til, at beskrive et fysiske system repræsenteret ved et idealiseret system. Normalt omtales SDOF-systemer (Single Degree Of Freedom) og MDOF-systemer (Multi Degree Of Freedom), hvor et SDOF-system er det simpleste tilfælde. De to typer systemer er beskrevet i kommende afsnit, hvor sammenhængen mellem et dæmpet og udæmpet system er beskrevet.

For et idealiseret system er der foretaget en række antagelser omkring:

- 1. Materialer
- 2. Belastning
- 3. Geometri

Materialeantagelser er baseret på hvorvidt materialeegenskaber er defineret som homogent, isotropt eller på anden måde karakteriseret. Desuden spiller det en rolle om et materiales opførsel er beskrevet som lineær-elastisk. Antagelser ved belastning er overvejelser omkring, hvordan eksempelvis belastning antages at virke på konstruktionen i et geometrisk henseende. Ydermere hvordan belastningen tænkes at virke ved pludselig påvirkning samt om belastningen er karakteriseret som konstant, periodisk eller tilfældig. Den fysiske geometri for en given konstruktion er idealiseret til, at bestå af enkelte elementer sammensat i *knuder*, hvori flytninger, belastninger og retninger er beskrevet. Dette er gennemgået i afsnit A.1 og A.2. Ved betragtning af en kontinuert bjælke, er det nødvendigt ved overgangen til en idealiseret model, at foretage en diskretisering af systemet.

A.1 SDOF-system

Beskrivelsen af SDOF-systemet er gennemført med udgangspunkt i en fysisk konstruktion. I det følgende er betragtet en simpelt understøttet og kontinuert bjælke, som illustreret på figur A.1, hvilken det i grove træk er mulig at ækvivalere til en idealiseret matematisk model, et SDOF-system. Et SDOF-system eller ét frihedsgrads-system er f.eks. karakteriseret ved, at besidde kun ét knude-koordinat og dermed ét enkelt flytningskoordinat.



Figur A.1: Simpelt understøttet og kontinuert bjælke.

Den kontinuerte bjælke, figur A.1, er i den idealiserede model, illustreret på figur A.2, ækvivaleret til at bestå af, en masse, m, der repræsenterer inerti-karakteristikken i systemet, et fjederelement med en fjederkonstant, k, der repræsenterer konstruktionens ophobning af potentiel energi og en dæmpningskonstant, c, der repræsenterer f.eks. konstruktionens friktionskarakteristik samt energidissipationen.



Figur A.2: To eksempler på et idealiseret ét frihedsgrads-system af en kontinuert bjælke. a) Eksempel 1. b) Eksempel 2.

Figur A.2b illustrerer et linear dæmpet SDOF-system, hvor massen angiver den dynamiske frihedsgrad. Massen er pålagt en fjeder samt en lineær viskos dæmper og systemet er antaget at være lineart. Hastighed og acceleration er forudsat virkende i samme positivretning, illustreret på figur A.2b, som flytningen. Systemets energidissipation er proportional med hastigheden af masse og stivheden med flytningen af massen. Den lineare viskose dæmper repræsenterer også dissipationen af mekanisk energi, der bliver til varme, når fjederen forlænges. For det beskrevne system er bevægelsesligningen givet ved følgende kraftligevægt:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad \text{for} \quad t > 0 \tag{A.1}$$

Systemet er hidtil defineret som dæmpet. Ved at betragte tilfældet, hvor c = 0, er systemet karakteriseret som udæmpet. Hermed er der set bort fra dissipation af energi i systemet,

hvilket betyder mulighed for energibevarelse i systemet. Er f(t) = 0 således, at systemet er fri for ydre belastning, så er systemet karakteriseret som værende i *fri vibration*. Flytning af massen og dermed et svingende system er kun forårsaget af *begyndelsesbetingelsen* til tiden t = 0, hvor massen er flyttet afstanden x_0 i positiv-retningen. Et sådant SDOFsystem er beskrevet som den *simple udæmpede oscillator*.

A.1.1 Egensvingninger af udæmpet system

Bevægelsesligningen, formel (A.1), for et udæmpet system, er ved antagelserne for den simple udæmpede oscillator, omskrevet til:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{for} \quad t > 0 \tag{A.2}$$

Udtrykket for bevægelsen, beskrevet ved formel (A.2), er klassificeret som en homogen differentialligning med konstante koefficienter. Formel (A.2) er også beskrevet ved:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{for} \quad t > 0 \tag{A.3}$$

I formel (A.3) er ω_0 defineret som den *cirkulære egenfrekvens* eller den *naturlige frekvens*, og er givet ved:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{A.4}$$

For ligningen, formel (A.2), gælder følgende to antagelser for løsninger til den homogene differentialligning.

$$x = A\cos\omega t \qquad \forall \qquad x = B\sin\omega t \tag{A.5}$$

Løsningerne antaget i formel (A.5), er defineret som *harmoniske*, og konstanterne, A og B, er afhængige af begyndelsesbetingelserne. Systemet er tidligere defineret til at være lineært, hvorfor *superpositionsprincippet* er gældende, og formel (A.5) er omskrevet til:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{A.6}$$

Hermed er den generelle løsning for en 2. ordens partiel differentialligning defineret, [Zill & Cullen 2005]. Vha. formel (A.6) er \dot{x} bestemt til:

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{A.7}$$

Konstanterne, A og B, er bestemt ved begyndelsesbetingelserne for t = 0, hvor følgende er defineret:

$$[x(0), \dot{x}(0)] = [x_0, \dot{x}_0] \tag{A.8}$$

Det beskrevne problem er karakteriseret som et *begyndelsesværdiproblem* (BVP) og ved substitution af formel (A.8) i formel (A.6) og (A.7), hvoraf følgende er bestemt:

$$[A, B\omega] = [x_0, \dot{x}_0] \tag{A.9}$$

Ved substitution af formel (A.9) i formel (A.6) er x(t) for det definerede system bestemt ved:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega t \quad \text{for} \quad t \ge 0$$
(A.10)

A.1.2 Egensvingninger af dæmpet system

Er systemet i afsnit A.1.1 udvidet til også at være dæmpet, er bevægelsesligningen, formel (A.1), givet ved:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{for} \quad t > 0 \tag{A.11}$$

Formel (A.11) er omskrevet til:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
 for $t > 0$ (A.12)

Parameteren, ζ , er karakteriseret som *dæmpningsforholdet*, som er defineret på følgende vis, [Nielsen 2004]:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{c}{m} \Rightarrow \qquad \qquad \zeta = \frac{c}{2\omega_0 m} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$
 (A.13)

For den, i formel (A.11) definerede differentialligning, er det givet, at formel (A.5) og (A.6), ikke er løsninger til formel (A.11), hvorimod $x = Ce^{zt}$ er en løsning, [Zill & Cullen 2005]. Ved substitution er følgende bestemt:

$$mCz^2e^{zt} + cCze^{zt} + kCe^{zt} = 0 (A.14)$$

$$mz^2 + cp + k = 0 (A.15)$$

Af formel (A.15) ses det, at resultatet er den *karakteristiske ligning*, der simpelt er løst ved:

$$z_1 \\ z_2 \\ \} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right) - \frac{k}{m}}$$
 (A.16)

Det er således muligt, at opskrive løsningen til formel (A.11) vha. superpositionsprincippet, [Zill & Cullen 2005]:

$$x(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} \tag{A.17}$$

Konstanterne, C_1 og C_2 , er bestemt vha. begyndelsesbetingelserne. Formuleringen af formel (A.17) er ikke endegyldig, idet værdien under rodtegnet kan antage tre forskellige værdier - nul, positiv eller negativ. Tilfældene karakteriserer systemet som værende hhv. kritisk dæmpet, overkritisk dæmpet og underkritisk dæmpet, hvor sidstnævnte er at betragte i den virkelige verden, hvorfor det alene i det følgende er detaljeret beskrevet. Ved kritisk dæmpning antager c den kritiske værdi, c_{cr} , hvorfor forholdet imellem værdierne er defineret som *dæmpningsforholdet*, ζ . Hermed er de tre tilfælde formuleret ved:

$c = c_{cr}$	\wedge	$\zeta = 1$	kritisk dæmpet	
$c > c_{cr}$	\wedge	$\zeta\in]1,\infty[$	overkritisk dæmpet	(A.18)
$c < c_{cr}$	\wedge	$\zeta \in]0,1[$	underkritisk dæmpet	

For det underkritiske tilfælde, $c < c_{cr}$, er det givet, at værdien under rodtegnet, formel (A.17), er negativ, hvorfor rødderne, z_1 og z_2 , til den karakteristiske ligning er kompleks konjugerede, og formel (A.16) er omskrevet:

Rødderne er således givet på formen, $z_1 = \alpha + i\beta$ og $z_2 = \alpha - i\beta$. Der er indført det komplekse tal, $i = \sqrt{-1}$, hvoraf det følger at løsningen er givet ift. *Eulers formel*, [Zill & Cullen 2005]. Eulers formel er givet ved:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow$$

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t \qquad \land \qquad e^{-i\beta t} = \cos \beta t - i \sin \beta t \qquad (A.20)$$

Ved substitution af de komplekse rødder, og formel (A.20) indsat i formel (A.17), er følgende løsning for responset givet:

$$x(t) = e^{-\alpha t} (A\cos\beta t + B\sin\beta t) \tag{A.21}$$

Ved substitution af formel (A.4), (A.13) og (A.19) i formel (A.21) er følgende bestemt:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(A \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t\right) + B \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t\right) \right)$$
(A.22)

Konstanterne, A og B, i formel (A.22), er ud fra begyndelsesbetingelserne, formel (A.8), for t = 0 bestemt til:

$$[A, B] = \left[x_0, \frac{\dot{x}_0 + x_0 \zeta \omega_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}\right]$$
(A.23)

Flytningsresponset, x(t), for det underkritisk dæmpede SDOF-system er således endegyldigt defineret:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(x_0 \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\dot{x}_0 + x_0 \zeta\omega_0}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right)$$
(A.24)

A.1.3 Frekvens og periode

I det følgende er der kort redegjort for egenfrekvenser og *egensvingningsperioder*. Svingningsperioden er defineret ud fra den cirkulære egenfrekvens:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{A.25}$$

I afsnit A.1.2 blev det dæmpede system introduceret, hvorfor definitionen på den dæmpede egensvingningsperiode, T_d , er givet som en harmoniske varierende faktor i udtrykket for det underkritisk dæmpede respons, formel (A.24). T_d er defineret på følgende vis:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{A.26}$$

Af formel (A.26) er den *cirkulære dæmpede egenfrekvens* givet ved:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{A.27}$$

A.1.4 Tvungne harmoniske svingninger

Betragtes et af de illustrerede SDOF-systemer på figur A.2, givet som lineære og fysisk realisable, er det muligt at beskrive de dynamiske karakteristika ved den såkaldte *frekven*sresponsfunktion, $H(\omega)$, hvilket er beskrevet i det følgende. I dette tilfælde er bevægelsen af det dæmpede system, formel (A.12), styret af en lastvektor, f(t), som er givet ved:

$$f(t) = Re\left(\frac{F}{m}e^{i\omega t}\right) \tag{A.28}$$

Det er givet, at F i formel (A.28) er en kompleks lastamplitude. Denne tvungne bevægelse af systemet er således givet ved:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Re\left(\frac{F}{m}e^{i\omega t}\right) \quad \text{for} \quad t > 0$$
 (A.29)

Der er søgt en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning på følgende form, [Nielsen 2004]:

$$x(t) = Re(Xe^{i\omega t}) \tag{A.30}$$

Her er X en kompleks flytningsamplitude. Formel (A.30) indsat i formel (A.29) giver følgende:

$$Re\left(\left[(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i)X - \frac{F}{m}\right]e^{i\omega t}\right) = 0$$
(A.31)

Det er således vist, at det mulige respons, formel (A.30), er en løsning til formel (A.29), hvis, og kun hvis argumentet i de kantede paranteser i formel (A.31) er lig nul hvormed amplituden X er givet ved:

$$X = H(\omega)F \tag{A.32}$$

Hvormed frekvensresponsfunktionen, af formel (A.31) og (A.32), er defineret som:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_0\omega i)}$$
(A.33)

Formel (A.33) er omskrevet til følgende frekvensnormaliserede udtryk.

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{k}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} i}$$
(A.34)

Frekvensresponsfunktionen skrevet på kompleks-polær form er givet ved en forøgelsesfaktor, $|H(\omega)|$, samt fasefaktor, $\phi(\omega)$, og er givet ved:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{-i\phi(\omega)} \tag{A.35}$$

hvor

$$|H(\omega)| = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}i\right)^2}}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$
(A.36)

Ved udtrykkene givet i formel (A.36), er det muligt at beskrive især tre vigtige karakteristika. Forøgelsesfaktoren, $|H(\omega)|$, opnår maksimum ved en cirkulær frekvens mindre end ω_0 for $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$. At den er mindre introducerer en fejl, der ifølge [Nielsen 2004], er negligibel for let dæmpede konstruktioner, $\zeta \ll 1$. Frekvensen, hvor $|H(\omega)|$ opnår maksimum, er den såkaldte *resonansfrekvens*. Desuden angiver $|H(\omega)|$ den relative forøgelse af den komplekse amplitude, X, idet belastningen har indflydelse på flytningsresponset. Maksimum er opnået ved $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, gældende for $\zeta^2 < 0, 5$, hvormed resonansfrekvensen er givet ved:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{A.37}$$

På figur A.3 er der vist et plot af $|H(\omega)|$ for forskellige værdier af ζ til at illustrere ovenstående beskrivelse.



Figur A.3

Næste karakteristika er halvbåndsbredden, B_r , for $|H(\omega)|$, og er givet ved:

$$B_r = \omega_2 - \omega_1 \tag{A.38}$$

hvor

$$|H(\omega_1)|^2 = |H(\omega_2)|^2 = \frac{1}{2}|H(\omega)|^2$$
(A.39)

Vha. formel (A.38), (A.39) og (A.34) er det ifølge [Bendat & Piersol 2000] muligt at definere det modale dæmpningsforhold ved følgende:

$$\zeta = \frac{B_r}{2\omega} \tag{A.40}$$

Dæmpningsforholdet bestemt af formel (A.40) er gældende for let dæmpede konstruktioner, hvor $\zeta < 0, 1$. på figur A.4 er definitionen af halvbåndsbredden vist.



Figur A.4

Sidste karakteristika er fasevinklen $\phi(\omega)$, varierende fra 0 til 180°, for cirkulære frekvenser, som er hhv. mindre eller større end den cirkulære egenfrekvens. Fasen er ved resonansfrekvensen 90° grader, hvor $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$. Hvor forholdet, $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$, er bevægelsen af systemet i fase med eksitationen, og modsat er bevægelsen af systemet i modfase idet $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$. Fasevinklen er illustrativt vist på figur A.5.



Figur A.5

A.2 MDOF-system

MDOF-systemet er opstillet analogt med SDOF-systemet beskrevet i afsnit A.1. Med udgangspunkt i figur A.6 er MDOF-systemet i dette afsnit beskrevet. Figur A.6 illustrerer et 2DOF-system svarende til systemet vist på figur A.2b, der er dog pålagt systemet en ekstra dimension i form af en masse, et fjederelement og en viskos dæmper.



Figur A.6: Idealiseret 2 DOF-system.

Systemet har som beskrevet to frihedsgrader, valgt som flytninger i de to massers positivretning, som illustreret på figur A.6. Ved fritskæring af masserne i systemet, er bevægelsesligningerne opstillet ved brug af $D'Alemberts \ princip$ og Newtons 2. lov, [Nielsen 2004]. For senere opbygning af systemer på matriceform er systemets bevægelse opstillet for hver af de to masser:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_2(t)$$
(A.41)

Systemet, formel (A.41), er skrevet på følgende matriceform:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$$
(A.42)

De styrende matricer (systemmatricer) i formel (A.41), er $n \times n$ matricer samt respons- og lastvektorer har dimensionen $n \times 1$, hvor n repræsenterer antallet af frihedsgrader. **M** er en diagonal *positiv definit* massematrice. Stivhedsmatricen, **K**, er symmetrisk og positiv definit. Dæmpningsmatricen, **C**, der repræsenterer dissipationen af energi fra systemet er *positiv semi-definit*. Matricer og vektorer er skrevet som følger:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} , \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$
(A.43)
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

A.2.1 Egensvingninger af udæmpet 2 DOF-system

Egensvingningerne bestemt for et 2DOF-system tager udgangspunkt i matrice differentialligningen givet ved formel (A.42). For det udæmpede system er $\mathbf{C} = 0$ og $\mathbf{f}(t) = 0$, hvorfor eneste indflydelse er begyndelsesbetingelserne x_0 og \dot{x}_0 . Differentialligningen er nu beskrevet ved:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$$
(A.44)

For det udæmpede system, er det muligt opstille et udtryk for et harmonisk respons på kompleks notation, [Nielsen 2004], hvor notationen har udgangspunkt i Eulers formel, formel (A.20):

$$x(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{B}e^{i\omega t})$$

= Re(**B**) cos(\omega t) - Im(**B**) sin(\omega t) for **B** \in Cⁿ (A.45)

Som løsning til formel (A.44) er benyttet formel (A.45) samt indførelsen af en ukendt kompleks amplitude vektor, Φ , og hermed er følgende løsning til systemet søgt:

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{\Phi}e^{i\omega t}) \tag{A.46}$$

Amplitudevektoren, Φ , angiver ligeledes formen på systemets svinging. Ved substitution af formel (A.46) i formel (A.44) er følgende bestemt:

$$\operatorname{Re}\left((-\omega^{2}\mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\Phi}e^{i\omega t}\right) = 0 \tag{A.47}$$

Det ses af formel (A.47), at formel (A.46) er en løsning for $\forall t \in R$, hvis og kun hvis følgende er gældende:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{\Phi} = 0 \tag{A.48}$$

Hermed repræsenterer formel (A.48) et system af n lineære ligninger til bestemmelse af systemets egensvingningsformer. En nødvendig betingelse for ikke at opnå den *trivielle løsning*, $\mathbf{\Phi} = 0$, er at *determinanten* af koefficientmatricen, formel (A.48), er lig nul:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \tag{A.49}$$

Ved formel (A.49) er der således opnået et *egenværdiproblem* (EVP) af orden n med *egenværdierne*, ω^2 , der er bestemt ud fra det opnåede *karakteristiske polynomium* også benævnt *frekvensbetingelsen*. Ikke-trivielle løsninger, bestemt af formlerne (A.48) og (A.49), giver, at der eksisterer $\mathbf{\Phi}^{(n)}$ egensvingningsformer for det givne system.

A.3 Rayleigh dæmpning

Generering eller bestemmelse af dæmpningsmatricen, \mathbf{C} , er muligt ved brug af forskellige dæmpningsmodeller afhængig af bl.a. antallet af det betragtede systems frihedsgrader. I det følgende er betragtet *Rayleighs dæmpnings model*, for hvilken der indledningsvist er foretaget nogle antagelser for et givet system. Ved udvikling af formel (A.48), er det muligt at opstille de såkaldte *ortogonalitetsbetingelser*, [Nielsen 2004], for et udæmpet MDOF-system.

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ M_i & \text{for } i = j \end{cases}$$

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{K} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ \omega_i^2 M_i & \text{for } i = j \end{cases}$$
(A.50)

Disse betingelser, formel (A.50), angiver hvorvidt den *i*'te egensvingningsform, $\Phi^{(i)}$, er associeret med den *i*'te egenværdi, ω_i^2 , bestemt af frekvensbetingelsen, formel (A.49). Rayleighs dæmpningsmodel er defineret ved, at to eller flere dæmpningsforhold, ζ_i er tilgængelige, hvilke evt. er bestemt af målinger fra eksisterende bygninger ved brug af passende systemidentifikationsmetode. Dæmpningsmodellen er givet ved:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \tag{A.51}$$

Modellen, formel (A.51), er beskrevet ved systemmatricerne samt dæmpningskonstanterne a_0 og a_1 . Af formel (A.50) og (A.51) følger det:

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} = a_0 \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} + a_1 \Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^j = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ a_0 M_i + a_1 \omega_i^2 M_i & \text{for } i = j \end{cases}$$
(A.52)

Introduktion af *modal dekobling*, der om muligt kan beskrives fysisk. *Dekoblingsbetingelsen* er skrevet:

$$\mathbf{\Phi}^{(i)T} \mathbf{C} \mathbf{\Phi}^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 2\zeta_i \omega_i M_i & \text{for } i = j \end{cases}$$
(A.53)

Af formel (A.52) og (A.53) er det givet, at dæmpningsmodellen tillader modal dekobling, hvorfor de tilhørende egensvingningsformer orthogonalt til alle tre systemmatricer \mathbf{M} , \mathbf{C} og \mathbf{K} . Ved sammenligning af de to formler er det muligt at beskrive de modale dæmpningsforhold, hvilket er givet ved følgende:

$$\zeta_i = \frac{1}{2\omega_i} (a_0 + a_1 \omega_i^2) = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1}{2} \omega_i \quad \text{for} \quad i = 1, ..., n$$
(A.54)

Idet dæmpningsforholdene ζ_1 og ζ_2 er kendt, er konstanterne, a_0 og a_1 , bestemt af formel (A.54):

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$
(A.55)

Den beskrevne Rayleighs dæmpningsmodel er begrænset ved, at den estimerer eksakte dæmpningsforhold for de to første egensvingningsformer. Er et system med flere end to modes defineret vil resultatet for disse ikke have nogen fysisk signifikans ift. målte eller på anden vis beregnede former.

Logaritmisk dekrement

Det logaritmiske dekrement, δ , er en metode, der ofte er anvendt i praktisk henseende til bestemmelse af dæmpningsforhold. Metoden er brugbar for fysiske systemer, der kan ækvivaleres til et idealiseret fritsvingende dæmpet SDOF-system, hvilket er beskrevet i afsnit A.1.2 og repræsenteret ved formel (A.24). Definitionen af δ er givet ved den naturlige logaritme af forholdet mellem to successive amplituder, som vist på figur B.1.



Figur B.1: Flytningsrespons fra et fritsvingende underkritisk dæmpet system.

Ved beskrivelsen af det logaritmiske dekrement er formel (A.24) alternativt omskrevet til:

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_d t - \Psi) \tag{B.1}$$

I formel (B.1) er Ψ systemets *fase*, der er gældende for alle *t*, givet ved:

$$\tan \Psi = \frac{\dot{x} + \zeta \omega_0 x_0}{x_0 \omega_d} \tag{B.2}$$

Konstanten, C, i formel (B.1) er givet ved:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x} + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d}\right)^2} \tag{B.3}$$

Cosinus-leddet i formel (B.1) ses, at være harmonisk varierende, hvorimod faktoren, $e^{-\zeta \omega_0 t}$, giver en formindskelse af amplituden, C, angivet i formel (B.3). Den harmonisk varierende del er således periodisk med T_d , hvilket har muliggjort erstatning af t med $t + nT_d$, hvor n angiver antal dæmpede perioder. Flytningsresponset, formel (B.1), er ved erstatning af t reformuleret til:

$$\begin{aligned} x(t+nT_d) &= Ce^{-\zeta\omega_0(t+nT_d)}\cos(\omega_d(t+nT_d)-\Psi) \\ &= x(t)e^{-\zeta\omega_0 nT_d} \\ &= x(t)e^{\left(-2\pi n\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \end{aligned}$$
(B.4)

Ved reformuleringen, formel (B.4), er amplituden aftaget med en faktor:

$$\frac{x(t+nT_d)}{x(t)} = e^{\left(-2\pi n \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$
(B.5)

Det logaritmiske dekrement er af formel (B.5) bestemt som funktion af ζ , og er bestemt for tiden $t + nT_d$:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+nT_d)} \right) = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$
(B.6)

Dæmpningsforholdet er bestemt vha. formel (B.6):

$$\zeta = \frac{\frac{\delta}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}} \tag{B.7}$$

Som det blev beskrevet i starten af afsnittet, er δ også defineret ved et forhold mellem to på hinanden følgende amplituder i det betragtede flytningsrespons. Betragtes figur B.1, er det illustreret, hvordan amplituden aftager eksponentielt ved funktionen, $x(t) = Ce^{-\zeta \omega_0 t}$. Det er antaget, at denne kurve *skærer* responset i amplitude peak-værdierne, hvilket ikke er tilfældet, da kurven tangerer i et punkt, $\cos(\omega_d t - \Psi)$, lige til højre for peak-værdien. Denne introducerede fejl er antaget negligibel, [Paz & Leigh 2004]. Det logaritmiske dekrement er således også med udgangspunkt i figur B.1 defineret ved:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{C_0}{C_n} \right) \tag{B.8}$$



Dette kapitel omhandler random data eller rettere tilfældige data. Random data er det modsatte af deterministisk data, der indbefatter, at noget er deterministisk bestemt, eksempelvis et svingende pendul, som explicit er repræsenteret ved en matematisk formulering. Det er givet, at data, der repræsenterer et tilfældigt fysisk fænomen (bølgeaktivitet), ikke kan beskrives explicit ved matematisk formulering. I det følgende er betragtet et fysisk og tilfældigt fænomen, der er repræsenteret ved en enkelt tidsserie eller rettere tidshistorie, som er defineret over et begrænset tidsinterval. Ved opsamling af alle mulige tidsserier det tilfældige fænomen er i stand til at producere, er den såkaldte random proces eller en stokastiske proces defineret. Det er normalt anvendt, at en tidsserie for et tilfældigt fysisk fænomen er givet og realiseret som en stokastisk proces. For senere tolkning er introduceret ensemble af tidsserier, hvilket er en samling af tidsserier der repræsenterer den stokastiske proces. En stokastisk proces er karakteriseret som enten stationær eller ikke-stationær.

C.1 Stationær stokastisk proces

Betragtes et fysisk fænomen i form af en stokastisk proces, er det hypotetisk muligt, at bestemme fænomenets egenskaber til en given tid ved beregning af gennemsnitsværdier for tidsserier, som udgør den stokastiske proces. Givet en stokastisk proces, $\{x(t)\}$, for hvilken der til tiden, t_1 , er bestemt en middelværdi, $\mu_x(t_1)$, (første moment) er det betragtet, at middelværdien varierer som tiden varierer, er processen defineret som ikkestationær. Er tilfældet det modsatte, at $\mu_x(t_1)$ ikke varierer, når t_1 varierer, er processen defineret som svag stationær eller stationær i vid forstand. Det samme er gældende, hvis en auto-korrelationsfunktion, $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$, (joint moment) defineret mellem tiden, t_1 og $t_1 + \tau$. For $\{x(t)\}$ er det muligt at bestemme højere ordens momenter og joint momenter, der tilsammen kan etablere en komplet familie af sandsynlighedsfordelingsfunktioner, der beskriver processen. For tilfældet, hvor alle disse momenter og joint momenter er tidsinvariante, er $\{x(t)\}$ defineret som stærk stationær eller stationær i streng forstand. I praktisk henseende er det ofte benyttet, at verificering af svag stationær proces godtgør antagelsen omkring stærk stationær proces.

For en ensemble proces er det givet, at de stokastiske processer er defineret som ergodisk

og stationær, hvis den n'te tidsserie giver værdier for $\mu_x(n)$ og $R_{xx}(\tau, n)$, som ikke varierer sammenlignet med andre tidsserier. Yderligere er der en definition kaldet *Gaussisk proces*, for hvilken det er gældende, at et sæt af tider, t_n , givet ved tilfældige variabler $x_k(t_n)$ følger en multidimensional normalfordeling.

C.2 Ikke-stationær stokastisk proces

Den ikke-stationære stokastiske process er i afsnit C.1 kort defineret som en proces for hvilken egenskaberne umiddelbart er tidsvarierende. Egenskaberne er tilsyneladende kun mulige at bestemme for et fysisk ikke-stationært fænomen ved, at betragte et øjebliksbillede, hvor der foretages midling over tidsserierne, der repræsenterer den stokastiske proces. Denne tilgang til problemet er i praksis ofte ikke opnåelig, hvorfor en ikke-stationær stokastisk proces, $\{y(t)\}$, om muligt er beskrevet ved tidsserier givet ved y(t) = a(t)u(t), hvor u(t) er en tidsserie svarende til en stationær proces, og a(t) er en deterministisk multiplikator. Med nævnte fremgangsmåde er det givet, at ikke-stationær data repræsenterer en passende model af denne beskrevne type, er det om muligt ikke nødvendigt med en ensemble proces, men derimod en enkelt tidsserie.

C.3 Stationære stokastisk processer og behandling

Følgende afsnit er givet som en opfølgning og videreudvikling af omtalte stationære processer. Der vil fortløbende være en gennemgang af *korrelationsfunktioner* og *spektraltæthedsfunktioner*. Med disse egenskaber er det muligt at repræsentere og analysere stationære stokastiske processer.

Der er i det følgende betragtet samplerum med mængden k tidsserier, hvortil der tilhører to stokastiske processer, $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$, for hvilke det er ønsket at estimere statistisk brugbare egenskaber. Er $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$ betragtet som et par arbitrære processer, er den første statistiske egenskab af interesse middelværdier til tiden, t. Betragtes tidsserierne, x(t) og y(t), indeholdt i parret af stokastiske processer, er middelværdierne givet ved:

$$\mu_x(t) = E[x_k(t)]$$

$$\mu_y(t) = E[y_k(t)]$$
(C.1)

Ved normal betragtning af middelværdierne i formel (C.1) er disse karakteriseret ved at variere idet t varierer, for hvilket følgende er gældende:

$$\mu_x(t_1) \neq \mu_x(t_2) \quad \text{for} \quad t_1 \neq t_2$$

$$\mu_y(t_1) \neq \mu_y(t_2) \quad \text{for} \quad t_1 \neq t_2$$
(C.2)

Kovariansfunktioner for tiderne, $t_1 = 1$ og $t_2 = t + \tau$, er den næste statistiske størrelse og er givet ved:

$$C_{xx}(t,t+\tau) = E[(x_k(t) - \mu_x(t))(x_k(t+\tau) - \mu_x(t+\tau))]$$

$$C_{yy}(t,t+\tau) = E[(y_k(t) - \mu_y(t))(y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau))]$$

$$C_{xy}(t,t+\tau) = E[(x_k(t) - \mu_x(t))(y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau))]$$
(C.3)

For størrelserne i formel (C.3) er det givet, at de normalt vil variere ved forskellige kombinationer af t_1 og t_2 . Det ses, at for $\tau = 0$ er $t_1 = t_2 = t$, hvilket medfører følgende:

$$C_{xx}(t,t) = E[(x_k(t) - \mu_x(t))^2] = \sigma_x^2(t)$$

$$C_{yy}(t,t) = E[(y_k(t) - \mu_y(t))^2] = \sigma_y^2(t)$$

$$C_{xy}(t,t) = E[(x_k(t) - \mu_x(t))(y_k(t) - \mu_y(t))] = C_{xy}(t)$$
(C.4)

Af formel (C.4) ses det, at $C_{xx}(t,t)$ og $C_{yy}(t,t)$ repræsenterer den ordinære varians af $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$, hvorimod $C_{xy}(t,t)$ direkte repræsenterer kovariansen mellem $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$. Er det tilfældet, at $x_k(t)$ og $y_k(t)$ udspænder en to-dimensional Gaussisk fordeling til tiden t, er $x_k(t)$ og $y_k(t)$ også seperat defineret som Gaussiske.

C.3.1 Korrelationsfunktioner

For de stokastiske processer, $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$, er middelværdierne givet ved formel (C.1), hvor de ifølge afsnit C.1 er konstante for alle t. Yderligere er det givet at kovariansfunktionerne, formel (C.3), er uafhængige af t. Sammenhængen mellem kovariansfunktionerne og korrelationsfunktionerne er senere vist. Korrelationsfunktionerne er givet ved følgende, og det ses, at der let drages parallel mellem kovariansfunktionerne:

$$R_{xx}(\tau) = E[x_k(t)x_k(t+\tau)]$$

$$R_{yy}(\tau) = E[y_k(t)y_k(t+\tau)]$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x_k(t)y_k(t+\tau)]$$
(C.5)

Det er givet af formel (C.3) og (C.5), at de er identiske for middelværdier lig nul. $R_{xx}(\tau)$ og $R_{yy}(\tau)$ er de såkaldte *auto-korrelationsfunktioner* for $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$ og $R_{xy}(\tau)$ er defineret som *kryds-korrelationsfunktionen* mellem $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$. Sammenhængen mellem kovarians- og korrelationsfunktionerne for arbritrære værdier af μ_x og μ_y , forskellige fra nul, er givet ved:

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2$$

$$C_{yy}(\tau) = R_{yy}(\tau) - \mu_y^2$$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y$$
(C.6)

Korrelationsegenskaberne for $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$ er i det følgende defineret. De to processer er ukorrelerede hvis $C_{xy}(\tau) = 0$ for alle τ , hvilket ses af formel (C.6) idet $R_{xy} = \mu_x \mu_y$ for alle τ , og samme definition er givet for $R_{xy} = 0$ for alle τ hvis og kun hvis $\mu_x = \mu_y = 0$. Auto-korrelationsfunktionerne er *lige* funktioner af τ og er givet ved følgende relationer:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$$

$$R_{yy}(-\tau) = R_{yy}(\tau)$$
(C.7)

Herimod er kryds-korrelationsfunktionen hverken en lige eller *ulige* funktion af τ , men er givet ved følgende relation:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \tag{C.8}$$

C.3.2 Spektraltæthedsfunktioner

I det følgende er der taget udgangspunkt i to metoder til bestemmelse af spektraltæthedsfunktioner. Første metode er ved brug af korrelationsfunktioner beskrevet i afsnit C.3.1 og anden metode er ved brug af *Fourier Transformation* beskrevet i afsnit D.

Spektra ved korrelationsfunktioner

Følgende metode er en matematisk metode, hvor der er foretaget en enkelt Fourier transform af en korrelationsfunktion. For denne fremgangsmåde er der bestemt *to-sidet* spektraltæthedsfunktioner, S(f), i intervallet $[-\infty, \infty]$. Relationerne mellem funktionerne i formel (C.5) og den transformerede er givet ved:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

(C.9)

Ovenstående integraler er altid gældende for begrænsede tidsserier. Størrelserne S_{xx} og S_{yy} er i lighed med R_{xx} og R_{yy} kaldet *auto-spektraltæthedsfunktioner* for $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$ og således er S_{xy} kaldet for *kryds-spektraltæthedsfunktionen* mellem $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$. Den inverse relation mellem $R(\tau)$ og S(f) er givet ved:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{-i2\pi f\tau} df$$

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) e^{-i2\pi f\tau} df$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{-i2\pi f\tau} df$$
(C.10)

Relationerne, formel (C.9) og (C.10), er de såkaldte Wiener-Khintchine relationer. Egenskaber og symmetri for spektraltæthedsfunktionerne er givet i lighed med formel (C.7) og (C.8), dog er S_{xy} en kompleks funktion af f.

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}^{*}(f) = S_{xx}(f)$$

$$S_{yy}(-f) = S_{yy}^{*}(f) = S_{yy}(f)$$

$$S_{xy}(-f) = S_{xy}^{*}(f) = S_{xy}(f)$$

(C.11)

Relationerne for auto-spektraltæthedsfunktionerne i formel (C.9) er simplificeret til følgende:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau = 2 \int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau$$

$$S_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau = 2 \int_{0}^{\infty} R_{yy}(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau$$
(C.12)

Hvoraf den inverse relation af formel (C.12) er givet ved:

$$R_{xx}(\tau) = 2 \int_0^\infty S_{xx}(f) \cos 2\pi f \tau \, df$$

$$R_{yy}(\tau) = 2 \int_0^\infty S_{yy}(f) \cos 2\pi f \tau \, df$$
(C.13)

Af formel (C.12) og (C.13) er de såkaldte *en-sidet* spektraltæthedsfunktioner udledt. De en-sidet auto-spektraltæthedsfunktioner er givet ved følgende:

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) \quad \text{for} \quad f \in]0, \infty[$$

$$G_{yy}(f) = 2S_{yy}(f) \quad \text{for} \quad f \in]0, \infty[$$
(C.14)

Den en-sidet kryds-spektraltæthedsfunktion er ligeledes givet ved:

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f) \quad \text{for} \quad f \in]0, \infty[\tag{C.15}$$

På figur C.1 er sammenhængen mellem S(f) og G(f) illustreret.



Figur C.1: Sammenhængen mellem en-sidet og to-sidet spektraltæthedsfunktion.

Spektra ved Fourier transformationer

Følgende metode, hvilken er en anden metode, er også af matematisk ophav. Metoden er baseret på Fourier transformation af ubehandlede tidsserier, hvorfor der er taget udgangspunkt i to tidsserier, $x_k(t)$ og $y_k(t)$, tilhørende to stokastiske processer, $\{x_k(t)\}$ og $\{y_k(t)\}$, i tidsintervallet [0, T]. Ved introduktion af størrelserne $X_k(f, T)$ og $Y_k(t)$, der repræsenterer de Fourier transformerede af $x_k(t)$ og $y_k(t)$, heraf er spektraltæthedsfunktionen, S_{xy} , givet ved:

$$S_{xy}(f,T,k) = \frac{1}{T} X_k^*(f,T) Y_k(f,T)$$
(C.16)

hvor

$$X_{k}(f,T) = \int_{0}^{T} x_{k}(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$Y_{k}(f,T) = \int_{0}^{T} y_{k}(t)e^{-i2\pi ft} dt$$
(C.17)

Idet $x_k(t)$ og $y_k(t)$ er begrænset i tidsintervallet [0, T], er der tale om begrænset Fourier transformation, idet der ikke eksisterer ubegrænset eller rettere normal Fourier transformation for stationær data, eftersom denne er ubegrænset/uendelig, og er dermed ikke periodisk, som er en af flere restriktioner for brugen af Fourier transformation. Heraf er det givet at følgende tilgang til problemet er utilfredsstillende i statistisk sammenhæng:

$$S_{xy}(f,k) = \lim_{T \to \infty} S_{xy}(f,T,k) \tag{C.18}$$

Istedet er benyttet følgende formulering:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \to \infty} E[S_{xy}(f, T, k)]$$
(C.19)

I det følgende er sammenhængen mellem formel (C.9) og (C.19) vist. Formel (C.17) indsat i formel (C.16) samt nyindførte integrationsgrænser (α, β) , og formel (C.16) er således bestemt til:

$$S_{xy}(f,T,k) = \frac{1}{T} \int_0^T x_k(\alpha) e^{-i2\pi f\alpha} \, d\alpha \int_0^T y_k(\beta) e^{-i2\pi f\beta} \, d\beta$$

$$= \frac{1}{T} \iint_0^T x_k(\alpha) y_k(\beta) e^{-i2\pi f(\beta-\alpha)} \, d\alpha d\beta$$
 (C.20)

Ifølge [Bendat & Piersol 2000] er det muligt at ændre integrationsgrænserne fra (α, β) til (α, τ) , hvor $\tau = \beta - \alpha$ og $d\tau = d\beta$, illustreret på figur C.2, og stadig få samme resultat. Hermed er formel (C.20) omskrevet til:

$$S_{xy}(f,T,k) = \int_{-T}^{0} \left[\frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T} x_k(\alpha) y_k(\alpha+\tau) \, d\alpha \right] e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$
$$+ \int_{0}^{T} \left[\frac{1}{T} \int_{0}^{T-\tau} x_k(\alpha) y_k(\alpha+\tau) \, d\alpha \right] e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$
(C.21)



Figur C.2: Ændring af integrationsgrænser fra (α, β) til (α, τ) , hvor $\tau = \beta - \alpha$ og $d\tau = d\beta$

Af formel (C.5) er $R_{xy}(\tau)$ givet ved følgende forventningsværdi:

$$R_{xy}(\tau) = E[x_k(\alpha)y_k(\alpha + \tau)] \tag{C.22}$$

Der er taget forventningsværdien på begge sider af lighedstegnet i formel (C.21) samt indsat formel (C.22), for hvilket følgende er bestemt:

$$E[S_{xy}(f,T,k)] = \int_{-T}^{0} \left[\frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T} R_{xy}(\tau) \, d\alpha\right] e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau + \int_{0}^{T} \left[\frac{1}{T} \int_{0}^{T-\tau} R_{xy}(\tau) \, d\alpha\right] e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau$$
(C.23)
$$= \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} \, d\tau\right)$$

For $T \to \infty$ er det givet, at:

$$\lim_{t \to \infty} E[S_{xy}(f,T,k)] = \int_{-infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$
(C.24)

Det ses af venstresiden i formel (C.24), at denne er lig $S_{xy}(f)$, hvormed sammenhængen mellem formel (C.9) og (C.19) er bestemt. Heraf er det muligt, at beskrive den en-sidet kryds-spektraltæthedsfunktion, $G_{xy}(f)$, ud fra formel (C.16) og (C.19), er bestemt til:

$$G_{xy}(f) = 2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E[X_k^*(f, T) Y_k(f, T)]$$
(C.25)

Auto-spektraltæthedsfunktionerne, $G_{xx}(f)$ og $G_{yy}(f)$, er således to specialtilfælde bestemt af formel (C.25) til:

$$G_{xx}(f) = 2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E[|X_k(f,T)|^2]$$

$$G_{yy}(f) = 2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E[|Y_k(f,T)|^2]$$
(C.26)

Af formel (C.9) er følgende givet:

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy} e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

= $C_{xy}(f) - iQ_{xy}(f)$ (C.27)

Her er $Q_{xy}(f)$ defineret som den kvadratiske-spektraltæthedsfunktion, og $C_{xy}(f)$ den co-spektraltæthedsfunktionen. Disse funktioner er ligeledes defineret som hhv. reelle- og imaginære del af krydsspektret, og er givet ved:

$$C_{xy}(f) = \frac{1}{2} [G_{xy}(f) + G_{yx}(f)] = |G_{xy}(f)| \cos \theta_{xy}(f)$$

$$Q_{xy}(f) = \frac{i}{2} [G_{xy}(f) - G_{yx}(f)] = |G_{xy}(f)| \sin \theta_{xy}(f)$$
(C.28)

Af formel (C.28), er givet fasevinklen, $\theta_{xy}(f)$, som således er defineret ved relation ift. $C_{xy}(f)$ og $Q_{xy}(f)$, hvilket er givet ved:

$$\theta_{xy}(f) = \tan^{-1} \frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)}$$
(C.29)

I forbindelse med teorien krydsfunktioner, er følgende defineret kohærensfunktionen, $\gamma_{xy}(f)$, som angiver den statistiske afhængighed mellem to processer. Den såkaldte kvadrerede kohærensfunktion er givet ved:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}|^2}{G_{xx}G_{yy}} = \frac{|S_{xy}|^2}{S_{xx}S_{yy}}$$
(C.30)

I det følgende er det valgt kort, og definere en række fejlparametre for spektralestimeringer

behandlet i dette kapitel. Fejlparametrene, ϵ_r og ϵ_b , er hhv. statistiske og systematiske fejl i de spektrale estimater. De statiske fejl er givet ved:

$$\epsilon_{r}[\hat{S}_{xx}(f)] = \frac{1}{\sqrt{n_{d}}}$$

$$\epsilon_{r}[|\hat{S}_{xy}(f)|] = \frac{1}{|\hat{\gamma}_{xy}(f)|\sqrt{n_{d}}}$$

$$\epsilon_{r}[\hat{\gamma}_{xy}^{2}(f)] = \frac{\sqrt{2}(1 - \hat{\gamma}_{xy}^{2}(f))}{|\hat{\gamma}_{xy}(f)|\sqrt{n_{d}}}$$
(C.31)

I formel (C.31) er n_d svarende til antallet af spektrale midlinger.

$$\epsilon_b[\hat{S}_{xx}(f)] = -\frac{1}{3} \left(\frac{B_e}{B_r}\right)^2$$

$$\epsilon_b[|\hat{S}_{xy}(f)|] = -\frac{1}{3} \left(\frac{B_e}{B_r}\right)^2$$
(C.32)

Som det fremgår i formel (C.32) er den systematiske fejlparameter for auto- og krydsfunktionerne defineret som forhold mellem båndbredden, B_e , af signalet samt halvbåndsbredden, B_e , defineret i afsnit A.1.4.

D

Fast Fourier Transformation (FFT)

Fouriertransformation er et stykke værktøj, som er benyttet inden for al signalbehandling. Fouriertransformationen af f.eks. et datasignal, beskriver frekvensgangen i selve signalet, hvorfor fouriertransformationen giver mulighed for tolkning af egenskaber fra et evt. fysisk fænomen, hvorfra datasignalet stammer. I dette kapitel er det *Fast Fourier Transform* (FFT) med udgangspunkt i standard fourierserier, som er betragtet. Der er skelnet mellem begrænset og ubegrænset fouriertransform, hvilket kommer af, at et datasignal altid vil være begrænset. Yderligere skelnes mellem den *kontinuerte* og den *diskrete* fouriertransform, der kommer af at datasignalet ikke er kontinuert i f.eks. tid, men derimod bestående af en lang række datapunkter. Et af hovedområderne omkring FFT er, at det er muligt at bestemme spektraltætheds- og korrelationsfunktioner, kapitels C.3. I afsnit D.1 er beskrevet processen omkring sampling af data til analyse bl.a. igennem fouriertransformation. Det er også denne data der, er repræsenteret ved de forskellige typer af data i afsnit C.

D.1 Diskret data

Sampling af responset fra et fysisk fænomen, er udført digitalt til brug ved diskret signalanalyse. Signalet er dermed af endelig udstrækning og diskret med datasæt samplet ved et passende tidsinterval, Δt , i tiden $t \in [0, T]$. Tidsintervallet, Δt , for samplingen er bestemt vha. Nyquist-frekvensen, $f_{nyquist}$, som er den maksimale frekvens, der om muligt kan detekteres ved en fourieranalyse. Yderligere ved implementering af Nyquist-frekvensen er det muligt at forebygge foldningsproblemer kaldet *aliaserings*. Det er på figur D.1 illustreret, hvordan målingen af det diskrete signal er foretaget.



Figur D.1: Sampling af respons i regulære intervaller, Δt .

Betragtes samplingsfrekvensen, f_s , er tidsintervallet bestemt af:

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \tag{D.1}$$

Dette svarer til et total antal af datapunkter, N, når samplingsperioden er T, der er givet ved:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \tag{D.2}$$

Samplingsfrekvensen er hovedsageligt valgt ud fra Nyquist-frekvensen, som ofte er defineret ved, at være den halve af samplingsfrekvensen. Derpå er valget af Nyquist-frekvensen ofte givet ud fra forskellige valg afhængig af signalets egenskaber. Det er muligt at vælge Nyquist-frekvensen som den højeste frekvens i et signal. Idet en frekvens i et diskret tidssignal overstiger Nyquist-frekvensen, men stadig befinder sig under den faktiske samplefrekvens, optræder der en foldning af frekvensen i det samplede signal, tidligere defineret som aliasing. Det er således muligt, ved beregning af f.eks. auto-spektraltæthedsfunktioner vha. fouriertransform, at dele frekvensbåndet op i to lige store dele, Nyquist-båndet. Her repræsenterer den første del de *virkelige* data og anden del foldningsdata. De to dele er definerede intervaller ud fra N, første $n = 0, 1, 2, ..., \frac{N}{2} - 1$ og anden $n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, ..., N - 1$, hvilket er illustreret på figur D.2b.



Figur D.2: Princippet for korrekt opsamling af data. tekst a) To typer respons repræsenteret ved samme tidsskridtinddeling. b) Foldet spektralestimering.

På figur D.2a er det yderligere illustreret, hvordan et samplet signal kan repræsentere to forskellige responstyper i form af aliasing.

Konklusionen heraf er således, at korrekt sampling er nødvendig. For høj samplefrekvens resulterer i kraftigt korrelerede data samt *overflødig* data der giver anledning til forlænget beregningstid. En for lav samplefrekvens giver anledning til overlapning ved foldningen omkring Nyquist-frekvensen, figur D.2c.

D.2 Fourierserier

Indledende forudsætning for brugen af fouriertransformation og fourierserier er, at det repræsenterede data x(t) er kontinuert og stationær, afsnit C, og periodisk med perioden, T_p , og dermed har den fundamentale frekvens, $f_p = \frac{1}{T_p}$. Herved er x(t) givet ved følgende fourierserie:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k f_p t + b_k \sin 2\pi k f_p t)$$
(D.3)

 hvor

$$a_{k} = \frac{2}{T_{p}} \int_{0}^{T_{p}} x(t) \cos 2\pi k f_{p} t \, dt \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, 2...$$

$$b_{k} = \frac{2}{T_{p}} \int_{0}^{T_{p}} x(t) \sin 2\pi k f_{p} t \, dt \qquad \text{for} \quad k = 1, 2, 3...$$
(D.4)

I det følgende er der betragtet en begrænset tidsserie, x(t), med tidslængde svarende til T_p og et lige antal, N, af datapunkter lige fordelt med tidsskridtet, Δt , svarende til en passende Nyquist-frekvens, afsnit D.1. Første datapunkt er passende defineret til tiden Δt . Herved er det muligt at beskrive den begrænsede fourierserie ved udtryk af summe af cosinus- og sinusfunktioner. Den begrænsede fourierserie for $t \in [0, T_p]$ er givet ved:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_p}\right) + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_p}\right)$$
(D.5)

Igen er det muligt, for $t = n\Delta t$, n = 1, 2, 3, ..., N og $T_p = N\Delta t$, at beskrive den begrænsede fourierserie for x(t):

$$x(n\Delta t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} B_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$
(D.6)

hvor

$$A_{0} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{n} = 0 \quad \text{for} \quad x_{n} = x(n\Delta t)$$

$$A_{k} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{n} \cos n\pi \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3, ..., \frac{N}{2} - 1 \quad (D.7)$$

$$B_{k} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{n} \sin n\pi \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3, ..., \frac{N}{2} - 1$$

D.3 Kontinuert fouriertransform

Den kontinuerte fouriertransform er den teoretiske tilgang til emnet, hvor der f.eks. er betragtet en tidsserie, x(t), af ubegrænset længde samt endvidere antaget at være numerisk integrabel, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dx < \infty$. Den kontinuerte fouriertransformerede af x(t), $F\{x(t)\} = X(f)$, er på kompleks form givet ved:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$
(D.8)

Det er heraf også muligt, at beregne den inverse fouriertransform, $x(t) = F^{-1}\{X(f)\}$, hvilket er givet ved:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$
(D.9)

Idet X(f) er kompleks, er denne også givet på formen:

$$X(f) = Re(X(f)) + iIm(X(f))$$
(D.10)

Heraf er det muligt, at skrive fasevinklen ved følgende:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Im(X(f))}{Re(X(f))} \tag{D.11}$$

D.4 Diskret fouriertransform

For den diskrete fouriertransform er det givet, at formel (D.8) ikke vil eksistere for en tidsserie, x(t), med ubegrænset mængde data. Betragtet en stationær stokastisk proces givet ved x(t) i intervallet $t \in [0,T]$, hvorved de ubegrænsede integrationsgrænser er ændret til at være begrænset, er det muligt at skrive den begrænsede fouriertransform ved:

$$X(f,T) = \int_0^T x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$
 (D.12)

Analogt med den begrænsede fourierserie, afsnit D.2, haves N datapunkter med tidsskridtet, Δt . Det er benyttet, at de individuelle datatider er $t_n = n\Delta t$, samt at starttid for første datapunkt er n = 0 modsat n = 1. Den diskrete omformulering af formel (D.12) er givet ved:

$$X(f,T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi f n \Delta t} \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1$$
(D.13)

Den normalt valgte måde, hvorpå de diskrete frekvenser, f_k , er bestemt, er ud fra den fundamentale frekvens, $f = \frac{1}{T}$, hvilket er defineret som følgende:

$$f_k = kf = k\frac{1}{T} = k\frac{1}{N\Delta t}$$
 for $k = 1, 2, 3, ..., N - 1$ (D.14)

Resultatet af de diskrete frekvenser er sigende ift. $k = \frac{N}{2}$, hvilket svarer til Nyquistfrekvensen. Nedenstående udtryk er for den diskrete fouriertransform (DFT), og de diskrete fourier koefficienter er givet ved:

$$X_k = \frac{X(f_k)}{\Delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3, ..., N-1$$
(D.15)

D.5 Basis FFT algoritme

Fast Fourier Transform også kaldet FFT, har sin bund i, hvordan den programmel implementerede FFT algoritme opererer i kontrast til den diskrete fouriertransform DFT. Algoritmer for FFT i den digitale verden, har det hovedmål at reducere antallet af summationer samt multiplikationer foretaget ved DFT. En af de mest anvendte algoritmer, er den såkaldte radix-2 algoritme, som er baseret på, at antallet af datapunkter i en tidsserie, er en potens, r, af 2, $N = 2^r$. Radix-2 algoritmen opdeler en betragtet tidsserie, x_k , i to dele, en sum over de *lige* diskrete tidsværdier, og ligeledes en sum over de *ulige* diskrete tidsværdier. Herefter er der foretaget DFT på de to tidsserier i intervallet, $k = 0, 1, 2, ..., \left(\frac{N}{2} - 1\right)$, eftersom der efterfølgende er foretaget en spejling af de komplekst konjugerede komponeneter. Ved inførelse af $W_N^k = e^{i\frac{2\pi}{N}}$, er den transformerede defineret ved følgende:

$$X(k) = X_{lige}(k) + W_N^k X_{ulige}(k)$$
(D.16)

Herved er antallet, N^2 , af multiplikationer ved DFT reduceret til $N \log_2(N)$, for radix-2 algoritmen svarende til ca. en faktor 100. [2008a].

E

Random Decrement - RD

En alternativ metode til dataanalyse, i kontrast til FFT, er RD-metoden <u>R</u>andom <u>D</u>ecrement, som er en metode til analyse af stationære stokastiske processer. Betragtes to stationære stokastisk processer, x(t) og y(t), af en eksiteret konstruktion, er essensen i RD-metoden, at den transformerer den stokastiske proces til et *frit henfald* af konstruktionen, indeholdende information omkring konstruktionens egenskaber. Det gør det let tilgængeligt at bestemme modale parametre vha. af f.eks. logaritmisk dekrement. Der er i afsnittet givet en gennemgang af den matematiske baggrund for RD-metoden samt den teoretiske implementering i et praktisk henseende.

RD-metoden tager udgangspunkt i stokastiske stationære processer, der ofte er antaget ergodiske eller Gaussiske, der efterfølgende er udsat for midling og resulterer i et estimat af korrelationsfunktioner. RD-metoden transformerer således stokastiske processer til korrelationsfunktioner. Betragtes x(t) opdelt i tidssegmenter eller såkaldte tidsvinduer af længden τ , udtaget på baggrund af en triggerbetingelse, T(t), er den matematiske udformning af RD-signaturen for auto- og krydsfunktioner formuleret ved følgende forventningsværdi operationer:

$$D_{xx}(\tau) = E[x(t+\tau)|T_x(t)]$$

$$D_{yy}(\tau) = E[y(t+\tau)|T_y(t)]$$

$$D_{xy}(\tau) = E[x(t+\tau)|T_y(t)]$$
(E.1)

Det ses af formel (E.1), at D_{xy} er defineret som en midling af en proces, x(t), betinget af en anden proces, y(t). Ved praktisk implementering af formel (E.1) er estimater af RD-signaturen, $\hat{D}(\tau)$, bestemt ved midling af N tidssegmenter, svarende til antallet af ...

gange triggerbetingelsen er opfyldt. RD-signaturen er givet ved:

$$\hat{D}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(t_i + \tau) |T_x(t_i)$$

$$\hat{D}_{yy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y(t_i + \tau) |T_y(t_i)$$

$$\hat{D}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(t_i + \tau) |T_y(t_i)$$
(E.2)

I det følgende er triggerbetingelsen valgt til at være et niveau, a, i den betragtede process, mere specifikt én niveau-krydsningsbetingelse. a er ofte valgt til et multiplum af standardafvigelsen, σ_x , af x(t). Der er således udtaget et datasegment af længden τ , idet processen har enten op- eller nedkrydsning ift. valgte niveau. På figur E.1 er princippet for RD-metoden illustreret.



Figur E.1: Princip for bestemmelse af RD-signaturen. a) Stokastisk proces, x(t), med udvalgt triggerbetingelse, $T_x(t_i) = x(0) = a = b$ N Tidssegmenter betinget af a og af længden τ . c) RD-signatur ved midling af N segmenter.

Det er nødvendigt, at antallet af tidssegmenter, N, er tilstrækkelig stor. Dette bevirker, at den stokastiske del fra belastningen, hidrørende det frie henfald, er midlet væk for til sidst antaget negligibel. Det er heraf ønsket formel (E.2) konvergerer mod formel (E.1). Dette er skrevet ved:

$$\hat{D}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(t_i + \tau) | T_y(t_i) = D_{xy}$$
(E.3)

Det er vigtig, at der ikke er introduceret bias i formel (E.2), hvilket af formel (E.3) er vist

ikke at være tilfældet.

Implementering af andre alternativer for triggerbetingelse er muligt. Eksempelvis er det muligt at benytte en middel op- eller nedkrydsningsbetingelse. Problemet med disse, og tidligere nævnte betingelser, er at de i praksis skal tilpasses et diskret signal, hvilket giver anledning til bias, idet tidssegmenterne i signalet vil variere, og det vil sjældent være tilfældet, at et datapunkt vil være i overensstemmelse med triggerbetingelsen.

Af Wiener-Khintchine relationerne, formel (C.9) og (C.10), er det givet, at der er fuld sammenhæng mellem Rd-signaturen og korrelations- og spektraltæthedsfunktionerne. Det er muligt at skrive formel (E.1) som funktion af korrelationsfunktioner, hvor σ^2 er variansen af den stokastiske proces:

$$D_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} a$$

$$D_{yy}(\tau) = \frac{R_{yy}(\tau)}{\sigma_y^2} a$$

$$D_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_y^2} a$$
(E.4)

Korrelationsfunktion via FFT

Dette afsnit omhandler estimering af korrelationsfunktioner uden introduktion af bias. Dette kan dog afhjælpes ved, at tillægge det betragtede datasignal nuller (*zero-padding*), som det vil fremgå senere. Betragtet de to stokastiske processer, x(t) og y(t), begrænset i tidsintervallet, [0, T]. Korrelationsfunktionerne er for stationære stokastiske processer som beskrevet i formel (C.5) givet ved:

$$R_{xx}(\tau) = E[x_k(t)x_k(t+\tau)]$$

$$R_{yy}(\tau) = E[y_k(t)y_k(t+\tau)]$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x_k(t)y_k(t+\tau)]$$
(F.1)

For at benytte er FFT eller rettere DFT er det antaget, at de betragtede data er periodisk, herved er det periodiske estimat for korrelationsfunktionerne udtrykt ved, [Brincker, Krenk, Kirkegaard & Rytter 1992]:

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t+\tau)x(t) dt$$

$$\hat{R}_{yy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} y(t+\tau)y(t) dt$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t+\tau)y(t) dt$$
(F.2)

Problemet ved formel (F.2) er, at der er introduceret bias idet antagelsen omkring periodicitet sjældent er opfyldt i praksis. Det hjælper heller ikke, at grundideen omkring zero-padding sammen med DFT er, at opdele den betragtede proces N lige store segmenter, hver med længden T, efterfulgt af estimerede spektraltæthedsfunktioner, $S_N(f)$, for hvert datasegment og følgende midlet for at negligere upålidelig data. Dette efterfulgt af invers DFT af den midlede S(f) og hermed bestemte korrelationsfunktion. Er der først introduceret bias, vil det altid være der, afhængig af, hvor god antagelsen er omkring periodicitet er det muligt, at benytte et passende vindue, som kan reducere, men ikke fjerne den introducerede bias. Hvis argumentet $t + \tau$, ift. formel (F.1) er større end T, er argumentet erstattet med $t + \tau - T$, hvilket medfører wrap around bias omkring enderne i det periodiske estimat af korrelationsfunktionen. Det er muligt at erstatte dette estimat med introduceret wrap around bias med et andet estimat, $\hat{R}^w(\tau)$, hvor der dog også er introduceret bias, men det er muligt at fjerne ved division med det såkaldte *basic lag vindue*. Metoden, hvorpå det sidstnævnte estimat er bestemt, er ved brug af zero-padding-metoden, hvor følgende er introduceret:

$$[x_0(t), y_0(t)] = \begin{cases} [x(t), y(t)]t \in [0, T] \\ 0t \in [T, 2T] \end{cases}$$
(F.3)

Ved introduktionen af formel (F.3) er længden af korrelationsfunktionen fordoblet, hvilket giver den nævnte $\hat{R}^w(\tau)$, som er givet ved:

$$\hat{R}_{xx}^{w}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T-\tau} x(t+\tau)x(t) dt$$

$$\hat{R}_{yy}^{w}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T-\tau} y(t+\tau)y(t) dt$$

$$\hat{R}_{xy}^{w}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T-\tau} x(t+\tau)y(t) dt$$
(F.4)

Argumentet $T - \tau$ i den øvre integrationsgrænse er indført for et tilsvarende estimat, ikke udsat for bias, og er givet ved følgende:

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t + \tau) x(t) dt$$

$$\hat{R}_{yy}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} y(t + \tau) y(t) dt$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t + \tau) y(t) dt$$
(F.5)

Af formel (F.4) og (F.5) ses det, at de er givet ved relationen, $\hat{R}^w(\tau) = w(\tau)\hat{R}(\tau)$, hvor $w(\tau)$ er basic-lag vinduet givet ved:

$$w(\tau)\frac{T-\tau}{T} \tag{F.6}$$

Forløbet af denne proces med zero-padding er illustreret på figur F.1.


Figur F.1: Forløb for bestemmelse af korrelationsfunktion via. FFT.

På figur F.1 er det desuden illustreret, hvordan en af enderne i estimatet af korrelations-funktionen er mulig og kassere.

Stochastic Subspace Identification - SSI

Der er taget udgangspunkt formuleringen af et MDOF-system, som det er vist i afsnit A.2. Resultaterne er her medtaget til fremstilling af SSI-metodikken. State space repræsentationen er givet i afsnit I.4.2. Den generelle løsning til repræsentationen er givet ved følgende:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k} &= \exp \boldsymbol{A}_{c} \boldsymbol{k} \Delta t \boldsymbol{x}_{0} = \boldsymbol{A}_{d}^{k} \boldsymbol{x}_{0} \\ \boldsymbol{y}_{k} &= \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}_{d}^{k} \boldsymbol{x}_{0} \end{aligned} \tag{G.1}$$

Løsningen i formel (G.1) er givet i diskret tid, hvor $y_k = y(k\Delta t)$.

I diskret tid, hvor antallet af datapunkter er N, er systemets response givet ved følgende:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 y_2 \cdots y_n \end{bmatrix} \tag{G.2}$$

Af responset i formel (G.2) er Block Hankel-matricen givet ved følgende:

$$\mathbf{Y}_{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(1:N-2s)} \\ \mathbf{Y}_{(2:N-2s+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{(2s:N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{hp} \\ \mathbf{Y}_{hf} \end{bmatrix}$$
(G.3)

En Block Hankel-matrice, er en kvadratisk matrice med konstant skævdiagonal. Skævdiagonalen er opbygget af blokke. I formel (G.3) er den øverste halvdel af matricen tidligere værdier, "the past", som er benævnt Y_{hp} , og nederste halvdel er fremtidige værdier, "the future", som er benævnt Y_{hf} . Det totale dataskift er 2s.

Følgende matrice er projektionen af fremtidige værdier på tidligere værdier:

$$\boldsymbol{O} = E(\boldsymbol{Y}_{hf}|\boldsymbol{Y}_{hp}) \tag{G.4}$$

Det er også muligt, at bestemme projektionen ved følgende:

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{Y}_{hf} \boldsymbol{Y}_{hp}^{T} (\boldsymbol{Y}_{hp} \boldsymbol{Y}_{hp}^{T})^{-1} \boldsymbol{Y}_{hp}$$
(G.5)

De første fire matricer giver covariancen mellem målekanalerne ved forskellige tider og den sidste matrice definerer betingelserne. Ved brug af formel (G.1) er de enkelte kolonner i formel (G.5) givet ved følgende:

$$\boldsymbol{o}_{col} = \boldsymbol{\Gamma}_{s} \boldsymbol{x}_{0}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{s} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}_{d} \\ \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}_{d}^{2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}_{d}^{s-1} \end{bmatrix}$$
(G.6)

Kendes Γ , er det muligt at beregne startbetingelserne x_0 ved brug af formel (G.6). Umiddelbart kendes denne matrice ikke, hvorfor den er søgt estimeret.

Kalman states, X_0 , er startbetingelserne for alle kolonner i O. Dermed er følgende gældende:

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{\Gamma}_s \boldsymbol{X}_0 \tag{G.7}$$

Ved en singular value decomposition af *O*-matricen er følgende gældende:

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T \tag{G.8}$$

Estimater af Γ og Kalman state-matricen, X_0 , er givet ved følgende:

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_0 = \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T$$
(G.9)

 X_0 er Kalman state-matricen for tidsforsinkelsen nul. Ved at fjernes en blok-række fra toppen af O og en blok-række fra bunden af Γ_s , er det muligt at bestemme Kalman state-matricen til tidsforsinkelsen en, \hat{X}_1 . Det er dermed muligt at bestemme Kalman states. På samme måde er det muligt, at estimere system-matricen A_d ved at fjerne en blok-række fra toppen og en blok-række fra bunden:

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(2:s)}\hat{\boldsymbol{A}}_d = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(1:s-1)} \tag{G.10}$$

Ligeledes er det muligt at estimere observationsmatricen, \hat{C} , ved den første blok-række af $\hat{\Gamma}$:

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}_{(1:1)} \tag{G.11}$$

Ved en egenværdi dekomposition af den estimerede system-matrice, \hat{A}_d , ved følgende:

$$\hat{A}_d = \boldsymbol{\Phi}[\mu_i] \boldsymbol{\Phi}^T \tag{G.12}$$

Sammenkoblingen mellem egenværdierne bestemt af den diskret system-matrice, \hat{A}_d , og egenværdierne til det kontinuerte system, λ_i , er bestemt efter samme princip som ved

ARMA, ved formel (I.93). Egenfrekvensen og dæmpningsforholdet er bestemt ved brug af hhv. formel (I.96) og (I.97), som er angivet i afsnit I.4.4.

Som ved ARMA-modelleringen er det muligt, at ændre antallet af egenværdiløsninger til systemet. Ved ARMA øges ARMA-ordnen, indtil en god, stabil løsning er sikret. Som beskrevet tidligere angiver s størrelse af Block Hankel-matricen og dermed også størrelsen af projektionsmatricen, O. Antallet af egenværdier er givet ved sM, hvor M er antallet af målekanaler, og sM angiver dermed model-ordnen. Istedet for at varierer størrelsen af Block Hankel-matricen af singulære værdier i formel (G.9), hvormed størrelsen af Block Hankel-matricen angiver den maksimale orden, og den aktuelle orden er givet ved antallet af singulære værdier, ved den singulære dekomposition af projektionsmatricen. Den maksimale orden, sM, skal justeres, således at et passende range af modeller er valgt.

Frequency Domain Decomposition - FDD

I det følgende er FDD teknikken beskrevet for modal identificering af output-only systemer. Denne teknik er en udvidelse af den klassiske *Basic Frequency Domain* (BFD) teknik. Fordelen ved den forbedrede FDD teknik er, at den er i stand til estimering af frekvens og egensvingningsformer, når sidstnævnte er tæt placerede. FDD teknikken tager udgangspunkt i estimerede spektraltæthedsfunktioner eller spektraltæthedsmatrice, $G(i\omega)$, hvor der er taget en *Single Value Decomposition* (SVD) af denne. Dette resulterer i en række auto-spektraltæthedsfunktioner, hver svarende til ét SDOF-system, dog under den forudsætning, at der er belastet med hvid støj. Den teoretiske baggrund for dette kapitel er baseret på [2008b].

I det følgende er betraget den ukendte lastproces, x(t), samt det opsamlede respons, y(t), hvor relationen imellem disse er givet ved:

$$G_{yy}(i\omega) = H^*(iw)G_{xx}(i\omega)H(i\omega)^T$$
(H.1)

Af formel (H.1), er $G_{xx}(i\omega)$ defineret som energi spektraltæthedsmatricen af inputet, som har dimensionen $r \times r$, svarende til antallet af lastinput i systemet. Ligeledes er det givet for $G_{yy}(i\omega)$ som har dimensionen $m \times m$, svarende til antallet af output. Sidste er H(iw), som er frekvensresponsfunktionsmatricen med dimensionen $m \times r$. Følgende er H(iw)givet ved:

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{i\omega - \lambda_k^*}$$
(H.2)

Af formel (H.2) er n antallet af egensvingningsformer, og λ_k er den såkaldte pol og R_k residualen, hvor sidstnævnte er defineret ved:

$$R_k = \Phi_k \gamma_k^T \tag{H.3}$$

Her er γ_k defineret som den participationsvektoren tilhørende Φ_k . Er det betragtet, at lastinputet er ren hvidstøtjsbelastning, svarende til konstant spektraltæthed over hele

frekvensområdet, er det følgende givet at $G_{xx}(i\omega) = C$, hvormed formel (H.1), idet formel (H.2) er medregnet, er omskrevet til:

$$G_{yy}(i\omega) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{R_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{i\omega - \lambda_k^*} \right] C \left[\frac{R_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{i\omega - \lambda_k^*} \right]^H$$
(H.4)

Ved multiplicering af to partielle brøker og samtidig gør brug af det såkaldte *Heaviside* partial fraction teorem, er det muligt at reducere formel (H.4) til følgende:

$$G_{yy}(i\omega) = \frac{A_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{A_k^*}{i\omega - \lambda_k^*} + \frac{B_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{i\omega - \lambda_k^*}$$
(H.5)

Af formel (H.5), er A_k den k'te residualmatrice af dimension $m \times m$ og er Hermitisk, samt givet ved:

$$A_{k} = R_{k}C\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{R_{k}^{H}}{-\lambda_{k} - \lambda_{s}} + \frac{R_{k}^{H}}{-\lambda_{k} - \lambda_{s}}\right) \Rightarrow$$

$$= \frac{R_{k}CR_{k}^{H}}{2\alpha_{k}}$$
(H.6)

Af formel (H.6) er α_k den negative realdel af polen, $\lambda_k = -\alpha_k + i\omega_k$, som er dominerende for tilfældet ved let dæmpning, hvilket resulterer i, at residualen, A_k , bliver proportional med Φ_k , hvormed følgende er defineret, hvor der er indført en skalar konstant d_k :

$$A_k \propto R_k C R_k^* = \Phi_k \gamma_k^T C \gamma_k \Phi_k^T \Rightarrow$$

= $d_k \Phi_k \Phi_k^T$ (H.7)

Er det betragtet, at ω definerer et frekvensområde, hvor kun et begrænset antal egensvingningsformer har bidrag af karakter, er disse defineret ved $Sub(\omega)$. Hermed er, under forudsætning af let dæmpede konstruktioner, responsets spektraltæthed givet ved:

$$G_{yy}(i\omega) = \sum_{k \in Sub(\omega)} \frac{d_k \Phi_k \Phi_k^T}{i\omega - \lambda_k} + \frac{d_k^* \Phi_k^* \Phi_k^H}{i\omega - \lambda_k}$$
(H.8)

Den essentielle formel (H.8), er således defineret som den modale dekomposition af spektraltæhedsmatricen. Efter som dette er den teoretiske udledning for output spektraltæhedsmatricen, er denne istedet søgt på formen:

$$\hat{G}_{yy}(i\omega_i) = U_j S_j U_j^H \tag{H.9}$$

Af formel (H.9) er U_i en matrice defineret ved $[u_{j1}, u_{j2}, ..., u_{jm}]$, hvor u_{jl} er de singulære vektorer og S_j er diagonalmatrice indeholdende de skalære singulære værdier s_{jl} . Er der betragtet en klokke svarende til den k'te egensvingningsform vil denne være dominerende, hvorfor formel (H.8) af denne grund er reduceret til ét led. Heraf er det givet, at den første singulære vektor, u_{j1} , er et estimat af egensvingningsformen:

$$\hat{\Phi} = u_{j1} \tag{H.10}$$

Den til formel (H.10) tilhørende singulære værdi, er auto-energitæthedsspektret svarende

til SDOF-systemet for en betraget klokke. Spektret omkring denne klokke, er identificeret ved sammenligning af $\hat{\Phi}$ med de singulære vektorer for frekvenslinierne omkring klokken. Hertil kommer det såkaldte *Modal Assurance Criterion* (MAC), som angiver væriden for størrelsen af de singulære værdier der er medtaget auto funktionen for SDOF systemet. Efter sidstnævnte er bestemt, er denne transformeret tilbage til tidsdomænet, hvormed denne er defineret som en korrelationsfunktion givet ved et frit henfald. Af denne korrelationsfunktion er de modale parametre estimeret.

Autoregressive Moving Average - ARMA

ARMA-modellering er analysemetode af en given tidsserie og er i denne rapport anvendt som en systemidentifikationsmetode af responset fra dynamisk påvirkede konstruktioner. Modellen består af en *autoregressive*, AR(n) og en *moving average*, MA(m), del, hvor ordnen for AR-delen er givet ved n og for MA-delen er givet ved m. Der er i dette kapitel redegjort for den grundlæggende teori for ARMA-modeller og hvordan systemidentifikation af responset fra dynamiske påvirkede konstruktioner er foretaget. Som udgangspunkt er der på figur I.1 illustreret responset, \dot{X}_t , fra et dækelement, som er påvirket af et frit henfald.



Figur I.1: Response af dækelement påvirket af frit henfald.

Ved en ARMA-modellering er det normalt at fratrække middelværdien af det datasæt, som der analyseres på. I [og Shien Ming Wu 1983] er det vist, hvordan den fratrukkede middelværdi simplificerer regressionen. På figur I.2 er der illustreret afhængigheden mellem to forskellige responsdata, \dot{X}_t og \dot{Y}_t .



Figur I.2: Afhængighed mellem responsedata, \dot{X}_t og \dot{Y}_t .

Ved normal linear regression er muligt at udtrykke et response, \dot{Y}_t , som funktion af et andet response, \dot{X}_t , ved følgende:

$$\dot{Y}_t = \beta_0 + \beta_1 \dot{X}_t + \varepsilon_t \quad \text{for} \quad t = 1, 2, \dots, N$$
 (I.1)

Skæringen med \dot{Y}_t -aksen er givet ved følgende:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_t - \hat{\beta}_1 \bar{Y} \tag{I.2}$$

Hældningen på fittet er givet ved følgende *least square* estimat:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^N (\dot{Y}_t - \bar{Y}_t)(\dot{X}_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (\dot{X}_t - \bar{X})^2}$$
(I.3)

Middelværdierne er givet ved:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \dot{X}_{t}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \dot{Y}_{t}$$
(I.4)

Umiddelbart er det muligt at forsimple metoden, ved at fratrække middelværdien, hvormed responset, \dot{X}_t og \dot{Y}_t , er ændret til følgende:

$$\begin{aligned} X_t &= \dot{X}_t - \bar{X} \\ Y_t &= \dot{Y}_t - \bar{Y} \end{aligned} \tag{I.5}$$

Dermed er formel (I.1), omskrevet til følgende, da $\beta_0 = 0$:

$$Y_t = \beta_1 X_t + \varepsilon_t \tag{I.6}$$

hvor

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^N (Y_t X_t)}{\sum_{t=1}^N X_t^2}$$
(I.7)

I.1 Præsentation af AR-model

Som det fremgår af figur I.1, er det ikke muligt at tyde en direkte tendens for kurven, men umiddelbart forekommer det, at punkterne i kurven fluktuerer omkring et givet niveau. Ligeledes er der et overordnet mønster i responset, da de enkelte målinger ikke ikke er hhv. over eller under niveauet, men at flere på hinanden følgende målinger kan være over niveauet, før kurven falder under. Dette viser, at der mulighed for afhængighed mellem de enkelte data. Dermed er det ikke muligt at anvende normale statistiske metoder, som eks. liniær regression, da disse metoder antager at de enkelte data er statistisk uafhængige. En ARMA-model tager hensyn til tidligere værdier for responset, idet modellen er autoregressive. Det følgende er baseret på [og Shien Ming Wu 1983], som anvender at responset til tiden t er givet ved X_t og tidligere målinger af responset er givet ved X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots , som X_t er af statistisk afhængig af. På figur I.3 er det illustreret, hvordan X_t afhænger af den tidligere værdi X_{t-1} , hvoraf det fremgår at datapunkterne fluktuerer omkring en ret linie.



Figur I.3: Afhængighed mellem X_t og X_{t-1} .

Linien er givet ved formel (I.6) og angiver en AR(1)-model, hvor de enkelte fluktationer er medregnet og modellen er givet ved følgende:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t \tag{I.8}$$

Det er muligt at øge ordenen for AR(n)-modellen, n, hvormed flere af tidligere værdier er medtaget. Dermed er værdien X_t afhængige af flere tidligere værdier og er dermed bedre bestemt. AR(n)-model er dermed givet ved følgende formel:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_n X_{t-n} + a_t \tag{I.9}$$

Formel (I.9) er en muliregressionsmetode, idet afhængigheden mellem flere af de tidligere værdier for responset er medtaget. Bemærk, at der ingen afhængighed mellem X_t og tidligere fluktuationer, a_{t-1} .

I.1.1 Parameterestimering ved AR-model

For en AR(1)-model er parameteren ϕ_1 givet som hældningen af middelværdikurven på figur XXX og er relativ let at bestemme. Anderledes er det for AR(n)-modeller, hvor n > 1. Her er parametrene ikke muligt at bestemme ved samme fortolkning af grafer, men er bestemt som et least square-minimum af fluktuationerne på estimatet af parametrene, som beskrevet i [og Shien Ming Wu 1983]. For en tidsserie med N målinger er AR(n)-modellen i formel (I.9) omskrevet til følgende:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{a} \tag{I.10}$$

hvor

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$$
(I.11)
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_n & X_{n-1} & \cdots & X_1 \\ X_{n+1} & X_n & \cdots & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{N-1} & X_{N-2} & \cdots & X_{N-n} \end{bmatrix}$$
(I.12)
$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$
(I.13)

Den rigtige parametervektor, ϕ , vil indeholde de parametre, som giver den mindste fejl, hvilket i dette tilfælde er fluktuationerne. Som angivet i [og Shien Ming Wu 1983] er det muligt at bestemme least square-estimatet, ved at omskrive formel (I.10) til følgende sum af fluktuationerne:

$$\sum a_t^2 = \mathbf{a}' \mathbf{a}$$

= $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\phi)' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\phi)$ (I.14)

Den mindste fejl er givet, hvor formel (I.14) har opnået minimumsværdi. Formel (I.14) er differentieret mht. parameterne i parametervektoren og sat lig nul:

$$\frac{\partial \sum a_t^2}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\mathbf{Y}' \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{X} \phi - \phi' \mathbf{X}' \mathbf{Y} + \phi' \mathbf{X}' \mathbf{X} \phi \right]$$
(I.15)

$$= -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\phi} \tag{I.16}$$

$$= 0$$
 (I.17)

Af formel (I.17) er estimatet på parametervektoren, $\hat{\phi}$, bestemt ved følgende:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{I.18}$$

Formel (I.18) er et estimat på parametervektoren, da der er søgt et minimum af fejlen på parametervektoren ved least square-metoden. Andre metoder kan give et andet resultat og den valgte metode kan derfor afvige ift. disse. Estimatet givet ved formel (I.18) er et hurtigt estimat på parametervektoren og der er ikke søgt andre løsninger herpå.

I.2 Præsentation af ARMA-model

AR-modellen tager hensyn til den afhængighed, der er mellem responset til forskellige tidspunkter, men ikke den afhængighed der er mellem fluktuationerne til forskellige tidspunkter. På figur I.4a) er det vist, hvordan fluktuationerne er afhængig af hinanden til forskellige tidspunkter. Som vist på figur I.3 er tendensen illustreret med en ret linie, som her har en positiv hældning. På figur I.4b) er det vist, hvordan fluktuationerne a_t , afhænger af responset, X_{t-2} , og der er ligeledes en afhængig mellem de enkelte data.



Figur I.4: a) Afhængighed mellem a_t og a_{t-1} . b) Afhængighed mellem a_t og X_{t-2} .

Med udgangspunkt i en AR(1)-model [og Shien Ming Wu 1983] er formel (I.8) omskrevet til følgende:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a'_t \tag{I.19}$$

Den eneste forskel mellem formel (I.8) og (I.19) er at a_t er erstattet med a'_t , hvor a'_t er afhængig af såvel tidligere fluktuationer som tidligere værdier for responset. Som i formel (I.9) er der udført en multiregression af a'_t , hvor dennes afhængighed mellem hhv. X_{t-2} og a_{t-1} er defineret. Ligeledes er medregnet en del a_t , som ikke har afhængighed:

$$a_t' = \phi_2 X_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \tag{I.20}$$

Formel (I.20) er indsat i formel (I.8), hvilket giver følgende model:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \theta_1 a_{t-1} + a_t \tag{I.21}$$

Ved at sammenligne formel (I.21) med formel (I.8) er AR(2)-modellen nu udvidet til at omfatte afhængighed mellem X_t og to tidligere værdier for responset, X_{t-1} og X_{t-2} , dvs. en AR-orden, n = 2. Ligeledes er afhængigheden mellem X_t og den fluktuation, a_{t-1} , dvs. en MA-orden, m = 1. Modellen er dermed en ARMA(2, 1)-model, men kan udvides til en model af vilkårlig orden n og m ved følgende:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_n X_{t-n} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_m a_{t-m}$$
(I.22)

I.2.1 Parameterestimering af ARMA-model

Parametrene i en ARMA-model er ikke umiddelbart til at bestemme, som det er tilfældet med en AR(n)-model, hvor formel (I.18) er anvendt. Idégrundlaget er dog det samme, idet det er ønsket, at minimere fejlen på estimatet af parametrene og least squarer-metoden er ligeledes anvendelig. Fejlen på estimatet er betemt ved formel (I.14), hvormed udfordringen er at bestemme størrelserne af fluktuationerne ved estimatet. Ved at omskrive formel (I.21) er fluktuationen for det aktuelle tidsskridt bestemt ved følgende:

$$a_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} + \theta_1 a_{t-1} \tag{I.23}$$

Som det fremgår af formel (I.23) er det nødvendigt at kende a_{t-1} for at bestemme a_t . Det er derfor nødvendigt at anvende en ikke-liniær least square-metode til estimering af ARMA-parametrene.

I [og Shien Ming Wu 1983] er det angivet, at det er muligt at bestemme parametrene ved en kombineret least square og retningsangivelse ved eks. *steepest descent*-metoden. Som udgangspunkt er der valgt et begyndelsesgæt på ARMA-parametrene, ϕ_1 , ϕ_2 og θ_1 , ved følgende parametervektor:

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}^0 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \theta_1 \end{bmatrix}^T \tag{I.24}$$

Den tidligere fluktuation, a_{t-1} , er bestemt af $\hat{\Phi}^0$ ved at omskrive formel (I.23) til følgende:

$$a_{t-1} = X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} - \phi X_{t-3} + \theta_1 a_{t-2} \tag{I.25}$$

Umiddelbart er det ikke mulig at løse formel (I.25), da hverken Xt - 1, X_{t-2} , X_{t-3} eller a_{t-2} er kendte. Problemet fortsætter derfor indtil den første måling. For at kunne starte iterationen, er det i [og Shien Ming Wu 1983] angivet, at $a_1 = 0$ kan anvendes, hvilket er dermed er anvendt og øvrige værdier af fluktuationerne er bestemt ved formel (I.23) og fejlen på estimatet er bestemt ved formel (I.14). Umiddelbart kan startgættet være godt som dårligt, hvorfor det er nødvendigt at varierer parametrene mod en bedre værdi. Hertil er der anvendt steepest descent-metoden, som anvender en retning for ændringen af det oprindelige parametergæt. Retningsvektoren, **c**, er givet ved følgende:

$$\mathbf{c} = \nabla a_t \tag{I.26}$$

hvor

$$\nabla a_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial \phi_1} & \frac{\partial a_t}{\partial \phi_2} & \frac{\partial a_t}{\partial \theta_1} \end{bmatrix}^T$$
(I.27)

Den normaliserede retningsvektor er givet ved følgende:

$$\bar{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}} \tag{I.28}$$

Det nye parametergæt, $\hat{\Phi}^1$, er bestemt ved følgende:

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^1 = \hat{\mathbf{\Phi}}^0 + \alpha \bar{\mathbf{c}} \tag{I.29}$$

Der er i formel (I.29) anvendt step-størrelsen, α , som angiver, hvor meget retningsvektoren, $\bar{\mathbf{c}}$, skal ændre på det tidligere parametergæt. Umiddelbart skal α vælges med stor forsigtighed, da en for lille værdi vil give en langsommere konvegens, mens en for stor værdi vil medføre, at parametergættet bliver overestimeret og iterationen derfor bevæger sig fra de rigtige parametre. Fremgangsmåden for parameterestimering ved steepest descent metoden er illustreret på figur I.5. Som det fremgår, er målet at bestemme den mindste fejl på estimatet, hvilket dermed vil give den bedste løsning til ARMA-parametrene.



Figur I.5: Fremgangsmåde ved estimering af ARMA-parametre ved steepest descent metoden.

Umiddelbart har startgættet også betydning, da iterationen ellers kan gå mod en forkert værdi. I [og Shien Ming Wu 1983] er der redegjort for, hvordan det er muligt at beregne et startgæt på ARMA-parametrene, ud fra en parametrene i en AR-model, da det er muligt at beregne disse ved en linear least-square metode. Metoden kræver, at AR-modellen, der anvendes, er af orden p = max(n,m) + m. Dermed er det for en ARMA(2, 1)-model gældende, at p = 3.

ARMA(2, 1)-modellen i formel (I.21) er omskrevet til følgende:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = (1 - \theta_1 B) a_t \tag{I.30}$$

Der er i formel (I.30) anvendt en backshift-operator, B, som angiver sammenhænget mellem det tidligere response, X_{t-1} , og responset til den aktuelle tidspunktgivet, X - t, ved følgende:

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$B^2 X_t = X_2$$
(I.31)

I I.4.6 er Greens funktion for en ARMA(2, 1)-model udledt. Den inverse funktion af Greens funktion, I_j , er givet ved følgende:

$$X_{t} = \sum_{j=1}^{\infty} I_{j} X_{t-j} + a_{t}$$
(I.32)

Det er dermed muligt at beskrive fluktuationerne, a_t , ved følgende:

$$a_t = (1 - I_1 B - I_2 B^2) X_t \tag{I.33}$$

Formel (I.33) er indsat i formel (I.30), som dermed er omskrevet til følgende:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \equiv (1 - \theta_1 B) (1 - I_1 B I_2 B^2)$$
 (I.34)

De led som indeholder samme B-værdi, er sat lig hinanden, hvormed er AR-parametrene givet ved følgende:

$$\phi_1 = \theta_1 + I_1
\phi_2 = \theta_2 - \theta_1 I_1 + I_2$$
(I.35)

Det er dermed muligt, at bestemme AR-parametrene, ϕ_1 og ϕ_2 , som funktion af MAparameteren, θ_1 . I en ARMA(n, m)-model er $\theta_j = 0$ for j > m og $\phi_j = 0$ for j > n, dermed er det for en ARMA(2, 1)-model gældende, at:

$$(1 - \theta_1 B) I_j = 0 I_3 - \theta_1 I_2 = 0$$
 (I.36)

Der er i formel (I.36) anvendt backshift-operatoren, B, som er defineret i formel (I.98). Dermed er MA-parameteren givet ved følgende:

$$\theta_1 = \frac{I_3}{I_2} \tag{I.37}$$

I.3 Stabilitet af ARMA-parametre

Umiddelbart har beregningen af parametrene givet det bedste fit til datasættet, men parametrene i sig selv, giver ikke en fortolkning af systemets dæmpning og egenfrekvens, hvilket inddragelsen af ARMA-modellen har være grunden til. De bestemte parametre kan derfor have misfortolket systemet og give forkerte fysiske resultater. Det er derfor undersøgt om parametrene ligger indenfor et stabilt område, som er nærmere defineret i [og Shien Ming Wu 1983], og er efterfølgende beskrevet.

I afsnit A.1 angiver formel (A.1) bevægelsesligningen for et SDOF-system. Formel (A.12), afsnit A.1, er i det følgende anvendt, dog på følgende form, hvor D angiver første afledede, $\frac{d}{dt}$, og D^2 angiver anden afledede, $\frac{d^2}{dt^2}$:

$$\left(D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2\right)X(t) = \frac{1}{M}f(t) \tag{I.38}$$

Det homogene ligningssystem af formel (I.38) er givet ved følgende:

$$\left(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0\right) X(t) = 0 \tag{I.39}$$

hvor

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\zeta\omega_n\\ \alpha_0 &= \omega_n^2 \end{aligned} \tag{I.40}$$

Formel (I.39) er en anden ordens liniær differentialligning med konstante koefficienter, som har følgende løsning:

$$X(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} \tag{I.41}$$

hvor

- C_i er arbitrære konstanter, som kan løses ved at indsætte randbetingelser
- μ_i er distinkte karakteristiske rødder til løsningen af den karakteristiske ligning

Den karakteristiske ligning for formel (I.41) er givet ved følgende:

$$\left(D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2\right) = \left(D - \mu_1\right)\left(D - \mu_2\right) = 0 \tag{I.42}$$

hvor

$$\mu_1 = -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{I.43}$$

$$\mu_2 = -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{I.44}$$

Rødderne, μ_1 og μ_2 , er kompleks konjugerede rødder, hvormed:

$$\mu_1, \bar{\mu_1} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{I.45}$$

For $\zeta \neq 1$, dvs. hvor dæmpningen ikke er lig den kritiske dæmpningen, og hvor rødderne, μ_1 og μ_2 , er distinkte, er løsningen i formel (I.41) omskrevet til følgende ved at indsætte formel (I.44):

$$X(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 e^{\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t} + C_2 e^{\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t} \right)$$
(I.46)

For bygningskonstruktioner er $0 < \zeta < 1$, hvormed løsningen i formel (I.46) skal være begrænset heraf. Af formel (I.46) fremgår det, at løsningen går asymptotisk mod nul, når t stiger og $\omega_n \zeta > 0$. Dette er forventet, da udsvingene i konstruktionen med tiden skal være nul pga. dæmpning. Systemet vil dermed være asymptotisk stabil. Ligeledes fremgår det af realdelen i formel (I.60), at følgende er gældende:

$$\zeta \omega_n = -Re(\mu_1) = -Re(\mu_2) \tag{I.47}$$

Da det kræves, at $\zeta > 0$ må det kræves, at følgende er gældende for at løsningen til parametrene er asymptotisk stabil:

$$Re(\mu_1) < 0$$
, $Re(\mu_2) < 0$ (I.48)

Formel (I.48) angiver dermed, at stabiliteten af løsningen kommer til udtryk i realdelen af rødderne.

I.4 Systemindentifikation ved ARMA

Såfremt et minimum af fejlen på parameterestimatet er opnået, har modellen opnået et godt fit til det aktuelle datasæt og fysikken i parametrene skal beregnes. I dette tilfælde er det dæmpningsforholdet og den dæmpede egenfrekvens, som er interessante. Der er i denne rapport anvendt såvel ARV(n)- som ARMA(n, n - 1)-modeller for sammenligninghedens skyld mellem de forskellige modelopbygninger. For at identificere systemparametrene er der i denne rapport anvendt state space, som er nærmere beskrevet i det følgende. I afsnit I.4.2 er den velkendte bevægelsesligning for et et-frihedsgradssystem opskrevet til state space og en egenværdiløsning er bestemt. I afsnit I.4.3 er både ARV(n)- og ARMA(n, n-1) defineret i state space og egenværdiløsning er ligeledes bestemt. Sammenligningen mellem egenværdiløsningerne er foretaget i afsnit I.4.4.

I.4.1 Definition af state space

En state space (tilstandsrum) repræsentation er en matematisk model af et fysisk system, som udgøres af et sæt af input, output og state variable, og som er udtrykt af første ordens differentialligninger. Metoden er særligt anvendeligt, når et system er bestående af multi-input og -output, eks. m input og p output, hvor det med normal bevægelsesteori vil kræve $m \times p$ Laplace transformationer at afkode systemet og dermed fremskaffe de søgte informationer omkring systemet. Med state space er det muligt at opstille state variable i vektorform og differentialligningerne er opstillet i matriceform. Navnet "state space"hentyder til det rum, hvor akserne er state variablene, og hvor tilstanden af systemet er repræsenteret som en vektor i rummet. State variablene behøver dermed ikke at være målbare eller have en fysisk mening for at rummet er anvendeligt, men der er i det følgende anvendt flytningsmålinger som state variable. Antallet af state variable, og dermed også antallet af indgange i statevektoren, angiver dimensionen af state rummet. Består statevektoren af m indgange er state rummet m-dimensional. En linear og tidsinvariant, diskret system er repræsenteret i state space, med dimensionen m, ved følgende opbygning [Pandit 1991]:

Første ligning i formel (I.51) kaldes stateligningen, da ligningen beskriver den dynamiske opførelse i det diskrete tidssystem. Anden ligning er observationsligningen, da denne del af ligningen kontrollerer hvilken del af repræsentationen, der er observeret. A er en overgangsmatrice, også kaldet transitionmatricen, som har dimensionen, $m \times m$. B er inputmatricen, som har dimensionen $m \times p$, hvor p er størrelsen på inputvektoren u(t). Cer observationsmatricen, som har dimensionen $p \times m$. D er en matrice indeholdende direkte term, som oftest sættes lig nul, medmindre systemet er påvirket af Gausisk hvidstøj.

Det er muligt at bestemme systemparametre, som eksempelvis dæmpningsforhold og egenfrekvens, ved en ARMA-modellering. Systemparametrene er oftest defineret i et kontinuert system og det er muligt at opstille udtryk for disse ved en egenværdiløsning. Dog er det ikke muligt, at bestemme de søgte systemparametre, da disse indgår i løsningen, og dermed er kun den trivielle løsning tilgængeligt. ARMA-modellen er defineret i et diskret system og det er også muligt at bestemme en egenværdiløsning til dette system. Sammenkoblingen mellem disse to systemer, og dermed de to egenværdiløsninger, er essentiel og sikrer, at det er muligt at bestemme systemparametrene ved en ARMA-modellering. I det følgende er SDOF-system opstillet i state space, og der er bestemt en egenværdiløsning for dette system.

I.4.2 Et-frihedsgradssytem i state space

Definitionen af et SDOF-system er givet ved formel (A.1) i afsnit A.1 er omskrevet til følgende form [Pandit 1991]:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} = \frac{1}{m}f(t) \tag{I.50}$$

Det er muligt, at omskrive formel (I.50) til state space ved følgende:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{I.51}$$

Af formel (I.50) fremgår det, at de enkelte dele af formel (I.51) er givet ved følgende:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x\\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} f(t)\\ 0 \end{bmatrix}$$
(I.52)

State variablene er indeholdt i statevektoren, x, og som det fremgår af formel (I.51) giver første ligning af bestanddelene i (I.52) flytningen som funktion af tiden, men giver ikke megen information, da den blot udtrykker at x = x. Første ligning er derfor reelt overflødig, men giver sammen med anden ligning, som udtrykker hastigheden som funktion af tiden, fysisk mening.

På matrice- og vektorform er første del af formel (I.50) omskrevet til følgende [Andersen 1997]:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \tag{I.53}$$

Fordelen ved at anvende matriceform af formel (I.50) er, at det er muligt, at beskrive systemer med m frihedsgrader. Formel (I.53) i state space er givet ved følgende:

$$A\dot{x} + Bx = u \tag{I.54}$$

De enkelte bestanddele af formel (I.54) er givet ved følgende:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{M} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} f(t) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$
(I.55)

Frie vibrationer af systemet givet i formel (I.55), dvs. hvor u = 0, er givet ved:

$$A\dot{x} + Bx = 0 \tag{I.56}$$

Løsningen til formel (I.56) er givet på følgende form:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{e}^{\mu t} \tag{I.57}$$

 ψ , er en kompleks vektor og μ er en kompleks konstant. Formel (I.57) kun er en løsning til formel (I.56), hvis og kun hvis ψ er en løsning til følgende første ordens egenværdiproblem:

$$(\mu A + B)\psi = 0 \tag{I.58}$$

Formel (I.58) har følgende karakteristiske ligning:

$$\det\left(\mu A + B\right) = 0\tag{I.59}$$

Bestemmelse af rødderne, μ , er givet ved en polynomie af 2p orden, som har 2m rødder, μ_i , hvor i = 1, 2...2p. For hver af disse egenværdier findes en ikke-triviel løsning, ψ_i , som er egenvektoren. Egenværdierne og dermed egenvektorerne kan være reelle eller komplekse, men hvis alle egenværdierne er givet som kompleks konjugerede par, er systemet underkritisk dæmpet, hvilket er tilfældet for stort alle bygningskonstruktioner. De kompleks konjugerede egenværdipar er tidligere givet ved følgende:

$$\mu_{i}, \bar{\mu}_{i} = -\zeta_{i}\omega_{i} \pm \omega_{i}\sqrt{\zeta_{i}^{2} - 1} \text{ for } i = 1, 3...(2m - 1)$$

= $a_{i} \pm jb_{i}$ (I.60)

De enkelte størrelser i formel (I.60) er den cirkulære egenfrekvens, ω , og dæmpningsforholdet, ζ , for den *i*'te underdæmpede egenmode af systemet. Umiddelbart må egenvektorerne have formen:

$$\psi_i = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \lambda_i \Phi_i \end{bmatrix} \text{ for } i = 1, 2, \dots, 2m$$
(I.61)

 Φ_i er den dæmpede, komplekse modeshape vektor, og alle egenvektorer, ψ_i , er samlet i følgende komplekse modalmatrice:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{2m} \\ \mu_1 \Phi_1 & \mu_2 \Phi_2 & \cdots & \mu_{2m} \Phi_{2m} \end{bmatrix}$$
(I.62)

Den komplekse modalmatrice opfylder ortogonal betingelserne:

$$\Psi^T A \Psi = M_d, \quad \Psi^T B \Psi = -\mu M_d, \tag{I.63}$$

 M_d er en diagonalmatrice, som indeholder de 2m dæmpede modalmasser og μ er en diagonalmatrice, som indeholder de 2m egenværdier.

I.4.3 ARMA-modeller i state space

En AR(1)-model er givet ved formel (I.8), hvoraf det fremgår at X til t = 1 er givet ved følgende [Pandit 1991]:

$$X_1 = \phi_1 X_0 + a_1 \tag{I.64}$$

Det er muligt at beskrive X til højereliggende tider, t = 2, 3..., ved formel (I.64) ved følgende:

$$X_{2} = \phi_{1}X_{1} + a_{2} = \phi_{1}^{2}X_{0} + \phi_{1}a_{1} + a_{2}$$

$$X_{3} = \phi_{1}X_{2} + a_{3} = \phi_{1}^{3}X_{0} + \phi_{1}^{2}a_{1} + \phi_{1}a_{2} + a_{3}$$
(I.65)

Dermed er følgende generalisering muligt for AR(1)-modellen:

$$X_t = \phi_1^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi_1^j a_{t-j}$$
(I.66)

Formel (I.66) er den komplette løsning til den ikke-homogene lineare differens ligning angivet i formel (I.8). Første del af formel (I.66) er betegnet som homogen, transient deterministisk støj, og anden del er partikulær, påtvunget stokastisk støj. Umiddelbart er en muligt løsning af formel (I.66) i state space givet ved følgende:

$$\boldsymbol{X}_{t} = \boldsymbol{\phi}_{1}^{t} \boldsymbol{X}_{0} + \sum_{j=0}^{t-1} \boldsymbol{\phi}_{1}^{j} \boldsymbol{a}_{t-j}$$
(I.67)

På standard, diskret form er formel (I.67) givet ved følgende i state space:

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t \tag{I.68}$$

Formel (I.68) er gældende for en vilkårlig AR(n)-model, hvilket er vist ved følgende, hvor indholdet af matricerne og vektorerne i formel (I.68) er givet ved følgende:

$$\boldsymbol{X}_{t} = \begin{bmatrix} X_{t} \\ X_{t-1} \\ X_{t-2} \\ \vdots \\ X_{t-n+1} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1} & \phi_{2} & \cdots & \phi_{n-1} & \phi_{n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_{t} = \begin{bmatrix} a_{t} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
(I.69)

Som det fremgår af formel (I.69) er første række blot den alm. ligning for en AR(n)model, mens de øvrige rækker blot udtrykker, at $X_{t-1} = X_{t-1}$, $X_{t-2} = X_{t_2}$ osv. Dette er naturligvis sandt, men er en overflødig information. Som det fremgår, er det nødvendigt med en state space-dimension af n, for at repræsentere systemet for AR(n)-model. State variablene er indholdet i statevektoren X_t . Modellen i formel (I.69) er en univariate model, hvilket betyder, at modellen udelukkende bygger på responsedata, X - t, fra en enkelte måling, eller målekanal. Bi- og multivariate modeller er muligt at anvende for en AR(n)model, blot kaldes de ARV(n)-modeller, hvor V'et står for variate. Med en ARV(n)-model med p målinger til stede er følgende ligningssystemer gældende:

$$X_{1t} = \phi_{11}X_{1t-1} + \phi_{12}X_{1t-2} + \dots + \phi_{1n}X_{1t-n} + a_{1t}$$

$$X_{2t} = \phi_{21}X_{2t-1} + \phi_{22}X_{2t-2} + \dots + \phi_{2n}X_{2t-n} + a_{2t}$$

$$\vdots$$

$$X_{pt} = \phi_{p1}X_{pt-1} + \phi_{p2}X_{pt-2} + \dots + \phi_{pn}X_{pt-n} + a_{pt}$$
(I.70)

Der er i formel (I.75) anvendt, at første indices angiver målenummeret, målingen eller målekanelen, dvs. at eks. ϕ_{p1} angiver AR-parameteren ϕ_1 for målenummer p. Formel (I.70) er opskrevet på vektor- og matriceform ved følgende:

$$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + \phi_{2}X_{t-2} + \dots + \phi_{n}X_{t-n} + a_{t}$$
(I.71)

Det er muligt, at omskrive formel (I.71) til formel (I.67), således at formel (I.71) er repræsenteret i state space. De enkelte matricer i formel (I.67) er omskrevet til følgende:

$$\boldsymbol{X}_{t} = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{pt} \\ X_{1t-1} \\ X_{2t-1} \\ \vdots \\ X_{pt-n+1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1} & \phi_{2} & \phi_{3} & \cdots & \phi_{n-1} & \phi_{n} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_{t} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{p-1t} \\ a_{pt} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
(I.72)

Som det fremgår indeholder parametermatricen i formel (I.72) en række nye parametermatricer, men har samme opbygning som i formel (I.69), gældende for en AR(n)-model. Hver enkelte parametermatrice, ϕ_i , i formel (I.72) har størrelsen $p \times p$ og indeholder ARparametrene for de enkelte målenumre. Dermed vil de enkelte parametrematricer have følgende opbygning:

$$\phi_{i} = \begin{bmatrix} \phi_{11i} & \phi_{12i} & \cdots & \phi_{1p-1i} & \phi_{1pi} \\ \phi_{21i} & \phi_{22i} & \cdots & \phi_{2p-1i} & \phi_{2pi} \\ \phi_{31i} & \phi_{32i} & \cdots & \phi_{1p-1i} & \phi_{1pi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{p1i} & \phi_{p2i} & \phi_{p3i} & \cdots & \phi_{ppi} \end{bmatrix}$$
for $i = 1, 2 \dots n$ (I.73)

De enkelte værdier i parametermatricen, i formel (I.73), anvender samme fremgangsmåde for indices, som for formel (I.70). *i* hvilken angiver AR-orden, der er betragtet, og *p* angiver målenummeret. Parametermatricen i formel (I.73) er gyldig for alle parametermatricer, men for de enkelte AR(*n*)-modeller i formel (I.70) er gældende, er en del af indgangene i formel (I.73) nødvendigvis 0. Eksempelvis vil ϕ_1 have følgende indgange:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \phi_{21} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{p1} \end{bmatrix}$$
(I.74)

Det er også muligt at udtrykke en ARMA(n, n - 1)-model i state space, efter samme princip som i formel (I.69). Den generelle ARMA(n, m)-model er angivet i formel (I.22), men for en ARMA(n, n-1)-model, hvor m = n-1, er formel (I.68) omskrevet til følgende:

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{a}_t \tag{I.75}$$

Det fremgår af formel (I.75), at opbygningen foregår efter samme princip som for en

AR(n)-model, men der er tilføjet moving average-delen. Ændringen er givet ved følgende:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_t = \begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ a_{t-2} \\ \vdots \\ a_{t-n+1} \end{bmatrix}$$
(I.76)

Som det fremgår af formel (I.76) er den nødvendigt dimension for state space repræsentation n, ligesom for en AR(n)-model.

Egenværdiløsning

På samme måde som for det kontinuert, et-frihedsgradssystem er det muligt at bestemme en egenværdiløsning for ARMA-modellerne. For at kunne sammenholde det diskret system, givet ved ARMA-modellerne, med det kontinuerte system, givet ved SDOF-systemet, følgende omskrivning af ARMA-modellen nødvendigt, hvor der er taget udgangspunkt i formel (I.51):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_{t-1} \\ \boldsymbol{y}_{t-1} &= \boldsymbol{C} \boldsymbol{x}_{t-1} \end{aligned} \tag{I.77}$$

Løsningen på denne problemstilling er antaget at være på følgende form:

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\lambda}^{t-1} \tag{I.78}$$

 $\pmb{\psi}$ er en kompleks vektor med størrelsen
 $m\times 1$ og λ er en kompleks konstant. Der
med haves, at:

$$\psi \boldsymbol{\lambda}^{t} = \boldsymbol{A} \psi \boldsymbol{\lambda}^{t-1}$$

$$\boldsymbol{y}_{t-1} = \boldsymbol{C} \psi \boldsymbol{\lambda}^{t-1}$$
 (I.79)

Som det fremgår af formel (I.79) er formel (I.78) er kun en løsning, såfremt at ψ er en løsning til følgende førsteordens egenværdiproblem:

$$(I\mu - A)\psi = \mathbf{0} \tag{I.80}$$

Ikke-trivielle løsninger findes kun hvis den karakteristiske polynomie opfylder følgende betingelse:

$$\det(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{A}) = 0 \tag{I.81}$$

Den komplekse modalmatrice, Ψ , er givet ved følgende:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_m \end{bmatrix}$$
(I.82)

Den karakteristiske ligning for formel (I.71) er givet ved følgende:

$$|\boldsymbol{\phi} - \lambda \mathbf{I}| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda) \tag{I.83}$$

Egenværdierne, λ_i , som er givet ved formel (I.83), er samlet i en diagonalmatrice, λ , som følgende:

$$\boldsymbol{\lambda} = diag\{\lambda_i\} \text{ for } i = 1, 2 \dots p \tag{I.84}$$

Dermed haves: at:

$$\Psi^{-1}A\Psi\lambda, \ \lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_i\} \text{ for } j = 1, 2, \dots, p$$
(I.85)

Den modale dekomposition af A er dermed givet følgende, hvor formel (I.85) er omskrevet;

$$A = \Psi \mu \Psi^{-1} \tag{I.86}$$

I.4.4 Sammenkobling mellem kontinuert og diskret system

I afsnit (I.4.2) er det vist, at for et kontinuert, et-frihedsgradssystem er det muligt at bestemme en egenværdiløsning, men at denne løsning indeholder de søgte parametre. I afsnit I.4.3 er det vist at det er muligt, at bestemme en egenværdiløsning af ARMA-modellerne, men at dette er bestemt for et diskret system. Da begge systemer indeholder transitionsmatricen, A, kræves det, at:

$$\boldsymbol{A}_{\text{diskret}} = \boldsymbol{A}_{\text{kontinuert}} \tag{I.87}$$

Sammenkoblingen sker ved transition
matricen, A, for det kontinuerte system også kan skrives:

$$\boldsymbol{A}_{\text{kontinuert}} = e^{\boldsymbol{F}\Delta t} \tag{I.88}$$

 Δt er tidsintervallet mellem hver sampling og F defineret ved følgende:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{I.89}$$

Af formel (I.63) fremgår det, at følgende er gældende for det kontinuerte system:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{M}_{d}^{-1} \boldsymbol{\Psi}^{T}, \ \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\Psi}^{-T} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{M}_{d} \boldsymbol{\Psi}^{-1}$$
(I.90)

Ved anvendelse af formel (I.90) er det muligt at bestemme F som følgende:

$$F = \Psi \lambda \Psi^{-1} \tag{I.91}$$

Ved at indsætte formel (I.91) i formel (I.88), og anvende at A er defineret i formel (I.86) er defineret for det diskrete system, er formel (I.87) omskrevet til følgende:

$$\Psi \lambda \Psi^{-1} = e^{\Psi \mu \Psi^{-1} \Delta t}$$

= $\Psi e^{\mu \Delta t} \Psi^{-1}$ (I.92)

Af formel (I.92) er sammenkoblingen mellem det diskret og det kontinuerte system givet ved følgende relation mellem egenværdierne:

$$\mu_i = \frac{1}{\Delta} \ln \lambda_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, m$$
(I.93)

Formel (I.93) er den vigtigste formel for ARMA-modelleringen, da denne netop sikrer denne sammenkobling mellem det kontinuerte og diskrete system, hvilket sikrer, at det er muligt at anvende egenværdierne bestemt ved en ARMA-model til bestemmelse af systemparametre i en kontinuert model. Af formel (I.60) og (I.93) er det muligt at bestemme real- og imaginærdelen af formel (I.60), hhv. a_i og b_i ved følgende:

$$a_i = \frac{1}{2\Delta} \ln(\lambda_i \bar{\lambda}_i) \tag{I.94}$$

$$b_i = \frac{1}{\Delta} \tan^{-1} \left[\frac{Im(\lambda_i)}{Re(\lambda_i)} \right]$$
(I.95)

Dæmpningsforholdet og den dæmpede egenfrekvens er bestemt ved følgende:

$$\omega_{ni} = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \tag{I.96}$$

$$\zeta_i = \frac{a_i}{\omega_{ni}} \tag{I.97}$$

I.4.5 ARV eller ARMA?

Spørgsmålet hvorvidt der skal anvendes en ARMA(n, n-1) eller en ARV(n)-model afhænger af, hvorvidt flere målekanaler er tilgængeligt. Da begge modeltyper anvende state space, er spørgsmålet dermed begrænset til hvilken metode giver den bedste repræsentation af den målte tidsserie. Som det fremgår af afsnit I.4.3 vil en ARMA(n, n-1)-model i state space være 2-dimensional, hvor den første dimension er den aktuelle tidsserie, X-t, mens den anden dimension er tidsserien til det foregående tidsskridt, X_{t-1} . Ved en ARV(n)-model udgøres de øvrige dimensioner af andre, forskellige måleserier. En pvariate ARV(1)-model, dvs. med p målekanaler tilgængeligt, vil være ækvivalent til en ARMA(p, p-1)-model for hver enkel målekanal. Dermed vil det kræve en betydelig større ARMA-model, som jo ligeledes skal modelleres for alle målekanaler, at beskrive dette p-variate system. Dermed bør der anvendes en ARV(n)-model, når der er flere målekanaler tilgængeligt. Omvendt er en ARMA(n, n-1)-model bedre såfremt der kun er en målekanal tilgængeligt, hvilket skyldes, at ARV(n)-modellen reduceres til en AR(n)model, når p = 1. I dette tilfælde vil en ARMA(n, n-1)-model bedre repræsentere systemet, da der er medtaget moving average-delen, hvilket er en konsekvens af at den anden dimension i state space er den tidsserien til det foregående tidsskridt [Pandit 1991].

I.4.6 Greens funktion for ARMA(2,1)-model

Greens funktion for en ARMA(2, 1)-model er i det følgende udledt efter [og Shien Ming Wu 1983]. Af formel (I.21) fremgår det, hvordan en ARMA(2, 1)-model er opbygget af hhv. en AR- og MA-del. I det følgende er anvendt en backshift-operator, B, som angiver sammenhænget mellem det tidligere response, X_{t-1} , af responset til den aktuelle tidspunktgivet, X - t, ved følgende:

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$B^2 X_t = X_2$$
(I.98)

Formel (I.21) er dermed omskrevet til følgende, ved brug af formel (I.98):

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta a_{t-1} \tag{I.99}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = (1 - \theta_1 B) a_t \tag{I.100}$$

Afsnit I.4.6 angiver sammenhæng mellem Greens funktion og ϕ_1 for AR(1)-modellen. Ved anvendelse af backshift-operatoren er formel (I.108) omskrevet til følgende:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} B^j\right) a_t \tag{I.101}$$

Formel (I.101) er indsat i formel (I.100), som dermed er omskrevet til følgende:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \left(\sum_{j=0}^{\infty} B^j\right) a_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$
(I.102)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(G_0 + G_1 B + G_2 B^2 + G_3 B^3 + \dots) = (1 - \theta_1 B)$$
(I.103)

Alle led, som har samme potens for B, er sat lig hinanden, hvormed det er muligt at beregne de enkelte komponenter i Greens funktion som følgende:

$$G_0 = 1$$

 $G_1 = \phi_1 - \theta_1$ (I.104)
 $G_2 = \phi_1 G_1 - \phi_2$

Det fremgår af formel (I.104), at der er følgende sammenhæng for G_j for $j \ge 3$:

$$G_j = \phi_1 G_{j-1} + \phi_2 G_{j2} \tag{I.105}$$

For $j \ge 2$ er formel (I.103) reduceret til følgende:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)G_j = 0 \tag{I.106}$$

Formel (I.106) er en homogen differentialligning af orden n med begyndelsesbetingelserne

som angivet i formel (I.105). Løsningen til formel (I.106) er givet som en linearkombination af exponentialfunktioner. Ligeledes er det gældende, at løsningen til en differensligning af orden n er en linearkombination af led indeholdende de karakteristiske rødder. De karakteristiske rødder for formel (I.106) er givet ved λ_1 og λ_2 , hvormed Greens funktion er givet som følgende:

$$G_j = g_1 \lambda_1^j + g_2 \lambda_2^j \tag{I.107}$$

Konstanterne, g_1 og g_2 , er bestemt ved begyndelsesbetingelserne angivet i formel (I.104):

$$G_0 = g_1 + g_2 = 1$$

$$G_1 = g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 = \phi_1 - \theta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1$$
(I.108)

Løsningen af formel (I.108) er dermed bestemt til:

$$g_1 = \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$g_2 = \frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
(I.109)

Greens funktion dermed bestemt ved at indsætte formel (I.109) i formel (I.107) til følgende:

$$G_j = \left(\frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \lambda_1^j + \left(\frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \lambda_2^j \tag{I.110}$$

Reverse arrangement test

Reverse arrangement testen, [Bendat & Piersol 2000], behandlet i det følgende, er en stationaritetstest der illustrerer om det er muligt, og betragte en given tidsserie som værende stationær. Testen er ikke-parametrisk, og er i stand til vise hvis der er skjulte tendenser i en målt tidsserie. Betragtes en tidsserie, x(t), og denne delt op i N segmenter, hvor der for hvert segment er estimeret mean square værdier, ψ^2 , givet ved:

$$\psi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{J.1}$$

Ved efterfølgende plotte en sekvens af disse mean square værdier, for antallet af segmenter, N, er det visuelt muligt, at bedømme om der er en skjult tendens i x(t). Dette er umiddelbart en lille test, hvor reverse arrangement testen tager udgangspunkt i disse N mean square værdier, ψ_i . Ved at tælle antallet af gange $\psi_i > \psi_j$ for i < j, er én reverse arrangement opfyldt for hver gang dette er tilfældet. Det totale antal reverse arrangements er defineret A, som er givet ved:

$$A = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} h_{ij}$$
(J.2)

Af formel (J.2) fremgår h_{ij} , som er defineret ved:

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \psi_i > \psi_j \\ 0 & ellers \end{cases}$$
(J.3)

Er mean square værdierne betragtet at være tilfældige uafhængige observationer, for hvilke der ikke er observeret nogen tendens, er intervallet for det totale antal reverse arrangements givet ved:

$$\left[A_{N,1-\frac{\alpha}{2}} < A \le A_{N,\frac{\alpha}{2}}\right] \tag{J.4}$$

Intervallet der fremgår af formel (J.4), er baseret på en normalfordeling, hvor α er sig-

nifikansniveauet. I denne sammenhæng er middelværdi, μ_A , og varians, σ_A^2 , givet ved:

$$\mu_A = \frac{N(N-1)}{4}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{N(2N+5)(N-1)}{72}$$
(J.5)

K

Numerisk Newmark integration

I det følgende er der kort redegjort for hvordan bevægelsesligningerne er løst numerisk vha. Newmark algoritmen. Algoritmen er anvendt som integrationsfunktion i forbindelse med integrering af acceleratoinsdata til flyningsdata, Bilag 5. Især er algoritmen anvendt i forbindelse med FEM-programmet, $[DVD \ sti... \ dynbeam.m]$, beskrevet i Bilag 4. I Newmark algoritmen er det forudsat at flytningen, x_0 , og hastigheden, \dot{x}_0 , til tiden t_0 er kendt. Hvoraf følgende er gældende:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{x}_0 \tag{K.1}$$

Den indledende værdi $\ddot{\mathbf{x}}_0$ er bestemt af formel (K.1), og med denne som yderligere input er bevægelsesligningen løst. Det er følgende delt op i tre step, som alle er udført for j = 0, 1, ..., n, hvor n er antallet af datapunkter og dermed tidsskridt, Δt . For den numeriske Newmark integration er stabilitetsværdierne, β og γ , fastsat således den numeriske stabilitet og nøjagtighed er mest fordelagtig. Disse værdier indikerer accelerationens variation for ét tidsskridt. Værdierne er valgt til $\beta = \frac{1}{4}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$, svarende til konstant acceleration og betinget stabilitet. Følgende er baseret på [Nielsen 2005]. Første step er hvor såkaldte predictors for flytning og hastighed er bestemt:

$$\bar{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \dot{\mathbf{x}}_j \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_j$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{j+1} = \dot{\mathbf{x}}_j + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_j$$
 (K.2)

Andet step er estimeringen af en ny værdi for accelerationen, hvilket er givet ved:

$$\left(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}\right) \ddot{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{j+1} - \mathbf{K} \bar{\mathbf{x}}_{j+1}$$
(K.3)

Ved tredje og sidste step er ny flytning og hastighed bestemt, hvilket er givet ved:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \bar{\mathbf{x}}_{j+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_{j+1}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{j+1} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{j+1} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{j+1}$$
(K.4)

I ovenstående er fremgangsmåden for Newmark algoritmen defineret, og stabilitetsværiderne, β og γ , er holdt fast for alle tilfælde.



Der er i denne rapport anvendt diskrete datasæt og resultater, hvorfor følgende gennemgang af anvendte statistiske metoder er beskrevet ud fra dette. Der er skelnet mellem estimater, som er vægtet ens og estimeter, som er vægtet ifht. hinanden.

For n antal estimater x_i , som er vægtet lige, er middelværdien, \bar{X} , givet ved:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{L.1}$$

Variansen på middelværdien bestemt ved formel (L.1) er givet ved følgende:

$$\sigma^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}\bar{x})$$
(L.2)

Middelværdien bestemt ved formel (L.1) er baseret på, at alle estimater er vægtet ens. I denne rapport er middelværdien af flere estimater ligeledes bestemt ved en vægtet midling, dvs. hvor estimaterne ikke er vægtet ens, hvilket er vist på figur L.



Figur L.1: Vægtning af estimaterne x_1 , x_2 og x_3 .

Som det fremgår af figur L har estimater, x_i , hver en fejlfaktor, $error_i$, som kan være spredningen på estimaterne, σ_i , regressionskoefficienten, R_i , eller anden fejlparameter. En midling ved brug af formel (L.1) vil medføre, at de estimater bliver vægtet ens. Er

eksempelvis $error_2$ betydelig større end $error_1$ og $error_3$, bør midlingen ikke baseres ligeligt mellem de tre estimater. Derfor er der anvendt en vægtningsfaktor, Λ_i , for hvert estimat, hvormed formel (L.1) er omskrevet til følgende:

$$\bar{X}_{vagt} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i x_i \tag{L.3}$$

Ligeledes er en vægtet spredning bestemt ved følgende:

$$\sigma_{vagt}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Lambda_i \left(x_i \bar{x} \right) \tag{L.4}$$

Vægtningsfaktoren vægter værdier, der er godt bestemt, højere end værdier der er mindre godt bestemt. Såfremt estimaterne er bestemt som middelværdi af flere underliggende værdier og en spredning for hver værdi, σ_i , er bestemt ved formel (L.2), er vægtningsfaktoren, Λ_i , for de enkelte estimater givet ved følgende:

$$\Lambda_{i_{spred}} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sum_{i=1}^n \sigma_i} \right) \tag{L.5}$$

Formel (L.5) er opbygget således, at en lille spredning medfører en stor vægtningsfaktor og en stor spredning medfører en lille vægtningsfaktor. Vægtningsfaktoren for de enkelte værdier er beregnet i forhold til de øvrige, hvorfor vægtningsfaktoren kan være større end 1, hvorimod værdier med en stor spredning kan have vægtningsfaktorer mindre end 1.

En anden mulighed er, at værdierne, hvortil der skal bestemmes en vægtet middelværdi, er bestemt ved en linear regression, med en tilhørende regressionskoefficient, R_i , hvormed vægtningsfaktoren er bestemt ved følgende:

$$\Lambda_{i_{regres}} = \frac{nR_i}{\sum_{i=1}^n R_i} \tag{L.6}$$

Formel (L.6) er opbygget således, at en stor regressionskoefficient giver en stor vægtningsfaktor, da tættere regressionskoefficienten er på 1, desto bedre er den lineare regression. Dermed giver små regressionskoefficienter også små vægtninger.
Litteratur

- [2008a]. http://cnx.org/content/m12016/latest/.
- Andersen, P. [1997]. Identification of Civil Structures sing Vector ARMA Models, PhD thesis, Aalborg University.
- Bendat, J. S. & Piersol, A. G. [2000]. Random Data Analysis and Measurement Procedures, 3rd edn, A Wiley-Interscience Publication.
- Brincker, R., Krenk, S., Kirkegaard, P. H. & Rytter, A. [1992]. Identification of dynamical proberties from correlation function estimates, Danish Society for Structural Science and Engineering.
- Nielsen, S. R. K. [2004]. Vibration Theory, Vol. 1 Linear Vibration Theory, Aalborg tekniske Universitetsforlag.
- Nielsen, S. R. K. [2005]. Structural Dynamics, Vol. 9 Computational Dynamics, 1th edn, Aalborg tekniske Universitetsforlag.
- og Shien Ming Wu, S. M. P. [1983]. *Time Serie And System Analysis With Applications*, 1th edn, John Wiley og Sons.
- Pandit, S. M. [1991]. Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space, Jonh Wiley and Sons, INC.
- Paz, M. & Leigh, W. [2004]. Structural Dynamics Theory and Computation, 5th edn, Kluwer Academic Publishers.
- Zill, D. G. & Cullen, M. R. [2005]. Differential Equations with Boundary-Value Problems, 6th edn, Thomsom Learning, Inc. - Brooks/Cole.