



AERDELASTISK STABILITET AF LANGE HÆNGBROER

- RAPPORT -

**DET INGENIØR-, NATUR- OG SUNDHEDSVIDENSKABELIGE FAKULTET
AALBORG UNIVERSITET
B-SEKTOREN**

**10. SEMESTER
MORTEN GROTKJÆR HANSEN**

© Morten Grotkjær Hansen 2008

Dette projekt er trykt med Computer Modern 11pt / 13.6pt
Layout og typografi af forfatteren ved hjælp af L^AT_EX
Alle illustrationer er lavet med AutoCAD[®] samt Corel Draw[®]
Grafer og konturplot er fremstillet vha. MatLAB[®] eller
ANSYS CFX-Post[®]

Billeder på for- og bagside: [Sund & Bælt Holding A/S, 2007]

Titel: Aeroelastisk stabilitet af lange hængebroer
Projektperiode: 4. februar 2008 - 12. juni 2008
Årgang: 10. Semester, Bygge- og Anlægskonstruktion, Aalborg Universitet

SYNOPSIS

Dette projekt omhandler beregning af den kritiske flutter-hastighed for hængebroer med langt spænd vha. CFD-simuleringer. Som case er data fra Storebæltsbroen anvendt til sammenligning af de opnåede resultater.

Lasterne på broen beskrives vha. 6 flutter-afledede. Der anvendes et brotværnsnit med 2 frihedsgrader svarende til det som er anvendt i det oprindelige design af Storebæltsbroen. De 6 flutter-afledede bestemmes vha. CFD og det konkluderes at der er god sammenhæng med flutter-afledede bestemt vha. vindtunnelforsøg i forbindelse med projekteringen af broen.

Modellen udvides til at omfatte 3 frihedsgrader og lasterne beskrives vha. 18 flutter-afledede. Igen passer resultaterne godt med de oprindelige beregninger for Storebæltsbroen.

Det konkluderes, at CFD-simuleringer i fremtiden kan blive et af de primære værktøjer til at udføre strømningsberegninger for broer. I første omgang til at minimere antallet af vindtunnelforsøg og på længere sigt kan det tænkes, at vindtunnelforsøg helt afløses af CFD-simuleringer.

Morten Grotkjær Hansen

Vejledere: Jesper Winther Stærdahl
Niels N. Sørensen

Rapport: 146 sider
Oplag: 5 stk.

Forord

Dette projekt er udarbejdet af Morten Grotkjær Hansen på B-sektorens 10. semester ved Aalborg Universitets Ingeniør-, Natur- og Sundhedsvidenskabelige Fakultet. Rapporten er udarbejdet i forbindelse med specialisering omkring vindpåvirkning af slanke hængebroer med lange spænd. Rapporten henvender sig til læsere med erfaring indenfor strømningsberegninger vha. CFD samt strukturel dynamik.

I forbindelse med projektet er tekniske data fra Storebæltsbroen anvendt til validering af de opnåede resultater. Dataene er gjort tilgængelige af Lars Tørrild Thorbek, Rambøll A/S. En speciel tak til Lars for de udleverede rapporter og tilbudet omkring yderligere assistance.

Kildehenvisninger er udført vha. Harvard-metoden på følgende måde:

- [*Forfatterens efternavn, udgivelsesår, p. xx*]

Til rapporten er vedlagt en DVD som der er henvist til på følgende måde:

- [*DVD\sti\filnavn*], hvor "sti" er stien af mappen til den henviste fil, "filnavn" er det fulde navn af filen

I de tilfælde hvor der er henvist til flere filer, er der kun henvist til den sti hvor filerne befinder sig.

Den vedlagte DVD indeholder:

- Rapporten og udvalgte referencer fra litteraturlisten
- Alle definitionsfiler fra de anvendte simuleringer
- Udvalgte resultatfiler fra simuleringerne
- Enkelte animationer af resultaterne fra CFD simuleringerne
- Alle programmer som er fremstillet til databehandling i forbindelse med dette projekt
- Alle grafer som er fremstillet i forbindelse med databehandlingen

Indhold

1	Summary	1
2	Indledning	3
2.1	Tidligere forskning	4
2.2	Formål	5
3	Storebæltsbroen	7
3.1	Konstruktioner og geometri	7
3.2	Dynamiske data	8
I	Plant tværsnit med 2 frihedsgrader	13
4	Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader	15
4.1	Teori	16
4.2	Simpelt flytningsfelt	23
4.3	Flutter-afledede	25
5	Modelopbygning - Grundmodel	27
5.1	Net	28
5.2	Simulering	31
5.2.1	Randbetingelser	36
5.2.2	Begyndelsesbetingelser	39
5.2.3	Løsningsbetingelser	41
6	Resultater - Grundmodel	45
6.1	Stationær simulering	45
6.2	Tidsafhængige simuleringer	49
6.3	Flutter-afledede	55
7	Parametervariation	59
7.1	Inflations Layers	59
7.1.1	Modelopbygning - Inf1 og Inf2	60
7.1.2	Resultater - Inf1 og Inf2	60
7.2	Forfinet net omkring broen	64
7.2.1	Modelopbygning - BroRef1 og BroRef2	64
7.2.2	Resultater - BroRef1 og BroRef2	68
7.3	Forfinet net nedstrøms fra broen	70
7.3.1	Modelopbygning - DowRef1 og DowRef2	70

7.3.2	Resultater - DowRef1 og DowRef2	73
7.4	Generel forfining af nettet	76
7.4.1	Modelopbygning - GenRef1 og GenRef2	76
7.4.2	Resultater - GenRef1 og GenRef2	77
7.5	Størrelsen på domænet	78
7.5.1	Modelopbygning - Dom1 og Dom2	78
7.5.2	Resultater - Dom1 og Dom2	79
7.6	Sammenfatning	81
8	Endelig model	83
8.1	Indstillinger for den endelige model	83
8.2	Flutter-afledede	86
8.3	Kritisk hastighed	94
8.4	Sammenfatning	97
II	Plant tværsnit med 3 frihedsgrader	99
9	Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader	101
9.1	Simpelt flytningsfelt	107
9.2	Flutter-afledede	108
10	Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader	111
10.1	Flutter-afledede	113
10.2	Kritisk hastighed	123
10.3	Sammenfatning	128
III	Konklusion	131
11	Konklusion	133

1

Summary

In this project the critical flutter velocity for long span suspension bridges are calculated on the basis of a linearized description of the wind loads, using flutter derivatives as first proposed by R. H. Scanlan [Scanlan, 1978]. The flutter derivatives are calculated from the wind-generated forces on the bridge cross-section. The forces on the bridge are evaluated by CFD-simulations with full turbulent flow around the bridge.

In part I of this report the cross-section of the bridge is described by 2 degrees of freedom (DOF) which leads to a need for a linearized description of the 2 matching forces. The forces are described by 6 flutter derivatives which is calculated on the basis of 2 types of CFD-simulations with respectively forced vertical translation or forced rotation of the cross-section. The results are compared with results from windtunnel tests from the Great Belt Bridge.

In part II the model is expanded by a third DOF and the linearized description of the 3 loads are expanded to contain all 18 flutter derivatives. This new model also requires an extra type of simulation with forced horizontal translation of the cross-section.

By using an expression with a simple displacement field the critical velocity is calculated from both the CFD-models. It shows good agreement with the windtunnel results from the Great Belt Bridge. It also shows that the most significant part of the load is described by the first 6 flutter derivatives.

It is concluded that CFD is a strong tool which may play an important role in the design of suspension bridges in the future. In the short term CFD may be used to test different cross-sections in the early design phases thus leading to a significant reduction of the number of windtunnel tests. In the long term CFD might be the primary design tool for aeroelastic stability analyses of bridge cross-sections and similar projects.

2

Indledning

I forbindelse design af hængebroer gennemføres flere forskellige aeroelastiske stabilitetsanalyser for både pyloner, bærekabler og brodækket. De forøgede spænd samt de stadig stigende krav til slanke og optimerede konstruktioner medfører, at nye hængebroer bliver mere følsomme overfor aeroelastiske instabilitet.

Dette projekt omhandler en aeroelastisk stabilitetsanalyse af fænomenet "flutter". Flutteranalyser udføres i dag vha. en ingeniørmodel som første gang blev beskrevet af R. H. Scanlan [Scanlan, 1978]. Stabilitetsanalyserne udføres ofte ved at broen beskrives med en simpel modalmodel med relativt få egensvingningsformer. R. H. Scanlan introducerede en linearisering af lastledet, som er afhængigt af brodækkets bevægelser. Han foreslog at lasten kunne beskrives som en sum af led med modalkoordinaterne multipliceret med forskellige faktorer, de såkaldte "flutter-afledede".

De flutter-afledede som Scanlan har foreslået er afhængige af vindens hastigheden og frekvens samt broens geometri og flytninger. Traditionelt er de flutter-afledede blevet bestemt vha. vindtunnelforsøg. I vindtunnelen udsættes en skaleret model af brodækket for en tvungen harmonisk bevægelse, enten translation eller rotation, mens kræfterne, lift, drag og moment, på brosektionen måles. Der registreres kun kræfter og flytninger i broens tværsnitsplan, hvilket betyder at der reelt kun tages højde for en 2D-strømning vinkelret på broen.

Teknikken har været udsat for et stort antal analyser og er blevet udvidet med flere led og dermed også flere flutter-afledede, men er ellers blevet anvendt til flutteranalyser af broer uden ændringer i forhold til det oprindelige forslag. I sin simpleste form medtages bidrag fra lift-kraften og momentet samt de tilhørende flytninger. Hver kraft er beskrevet vha. min. 3 flutter-afledede og kræver en separat forsøgsserie med en tvungen flytning svarende til den enkelte kraft. Dermed indeholder modellen mindst 6 flutter-afledede og der skal mindst udføres målinger med 2 forskellige tvungne flytninger (lodret translation og rotation).

2 Indledning

Et vindtunnel forsøgsprogram for en ny hængebro kan indeholde mange forskellige tværsnit, som alle skal testes. Hvert tværsnit skal testes ved flere forskellige vindhastigheder eller frekvenser, for at give mulighed for at etablere et funktionsudtryk for hver af de flutter-afledede. Funktionsudtrykkene for de flutter-afledede anvendes i løsningen af flutter-betingelsen. Dermed stiger antallet af nødvendige vindtunnelforsøg kraftigt, for hvert tværsnit der skal testes.

Hvis modellen gøres mere kompliceret f.eks. ved at inkludere drag-kraften i beregningerne, øges antallet af forsøg med 50%. De tidligere omtalte udvidelser af R. H. Scanlans oprindelige forslag inkluderer flere led i beskrivelsen af hver kraft og dermed øges antallet af flutter-afledede hurtigt fra 6 til 12 eller 18. Forøgelsen af antallet af flutter-afledede gør målingerne i hvert vindtunnelforsøg mere komplicerede og dermed øges usikkerheden på målingerne. Derfor anvendes modellen næsten altid på den simpleste form, som R. H. Scanlan foreslog i 1978.

2.1 Tidligere forskning

Aeroelastiske stabilitets analyser af lange hængebroer er traditionelt udført vha. vindtunnelforsøg, men specielt indenfor de sidste 10 år er forskellige forskere begyndt at se på alternativer. Alternativerne kan deles ind i 3 hovedgrupper: Discrete Vortex metoder, FEM-analyser med tids- eller frekvensdomæne analyser af vinden og CFD-analyser med eller uden "Fluid Structure Interaction" (FSI). Derudover er der enkeltstående tilfælde hvor forskerne har udviklet egne analytiske metoder til beregning af vindfeltet omkring broen. Generelt er de alternative metoder blevet testet på eksisterende konstruktioner, som er dimensioneret på baggrund af vindtunnel forsøg, eller på idealiserede tværsnit som ikke er anvendt i praksis.

Som et eksempel på anvendelse af Discrete Vortex metoden har [Larsen and Walther, 1998] testet 5 forskellige brodæk, som tidligere er blevet testet i en vindtunnel. Larsen og Walther har anvendt en model med 8 flutter-afledede samt både tvungen bevægelse af brodækket og et frit bevægeligt brodæk.

Tids- og frekvensdomæne analyser er velkendte indenfor bølgeteori og sammen med 3D FEM-modeller af broerne, er der flere eksempler på gode resultater i forhold til vindtunnel forsøg. Generelt er der anvendt en fuld beskrivelse af lastern med alle 18 flutter-afledede i de efterfølgende eksempler. For Tsing Ma broen i Hong Kong, med et spænd på 1.377 m, har [Zhu and Xu, 2005] udført beregninger på en fuld 3D model af broen med kobling af egensvingningsformer. Forskningens formål var at beskrive de effekter som opstår når broen påvirkes af vind fra skæve angrebsvinkler f.eks. under tyfoner. I et andet eksempel implementeres en ikke lineær relation for bro-vind interaktionen idet der tages højde for strukturens deformationer med dertil hørende ændrede dæmpning, stivheder og angrebsvinkler [Zhang et al., 2002]. Resultaterne er valideret i forhold til vindtunnel forsøg på en unavngiven bro med et spænd 1.490 m. Det kunne være Runyang broen over floden Yangtze, som blev vedtaget i 2002 og bygget færdig i 2005. Som et sidste eksempel har [Katsuchi et al., 1998] laver multi-mode analyser, med kobling mellem de enkelte modes, på verdens længste hængebro, Akashi-Kaikyo broen i Japan, med et spænd på 1.990 m.

CFD simuleringer er en anden fremgangsmåde som er ved at vinde indpas og som specielt indenfor de sidste 5 år er blevet mere populær hos forskellige forskere. Der skelnes generelt mellem to metoder: tvungen bevægelse af brodækket eller et frit bevægeligt brodæk. De følgende eksempler er alle udført på 2D udsnit af broen, ligesom dette projekt. For et frit bevægeligt brotværnsnit fra Storebæltsbroen har [Frandsen, 2004] udført analyser med implementering af FSI for et laminært flow, i et domæne på $100\text{ m} \times 200\text{ m}$, med et groft net på 3.438 elementer. Parallelt med dette projekt har [Simonsen and Stevens, 2008] arbejdet med et projekt vedr. flow i et 3D-domæne med FSI omkring Storebæltsbroen. For den tvungne bevægelse af tværsnittet er der i de følgende to eksempler anvendt 6 flutter-afledede til beskrivelse af lasten. [Shirai and Ueda, 2003] har testet en revideret udgave af $k-\varepsilon$ modellen for et fuldt turbulent flow i et domæne af størrelsen $16B \times 7B$. For Storebæltsbroen har [Stærdahl et al., 2007] udført en analyse med et stort beregningsdomæne og et meget fint net omkring brotværnsnittet. Der blev anvendt et turbulent flow, styret af en $k-\omega$ model.

2.2 Formål

Formålet med dette projekt er at simulere de tidligere omtalte vindtunnelforsøg vha. CFD beregninger for en simpel model med 2 frihedsgrader svarende til en lift-kraft og et moment, beskrevet ved 6 flutter-afledede ialt. Resultaterne valideres i forhold til målinger fra en vindtunnel på en kendt konstruktion. Når CFD-modellen giver resultater, som er sammenlignelige med tidligere opnåede resultater skal denne udvides til at inkludere en 3. frihedsgrad svarende til drag-kraften.

Dermed er alle påvirkninger af den plane brosektion inkluderet i modellen og det er muligt at vise, om den fulde beskrivelse af lasten ændrer resultatet af beregningerne væsentligt. Samtidigt gives et indblik i computermodellernes styrke i forhold til model-forsøg, når modellerne bliver mere komplicerede.

Som case anvendes data fra Storebæltsbroen til sammenligning af de opnåede resultater. Det er udført et stort og grundigt arbejde i forbindelse med vindtunnelanalyser af det endelige brotværnsnit på Storebæltsbroen, hvilket giver et godt sammenligningsgrundlag.

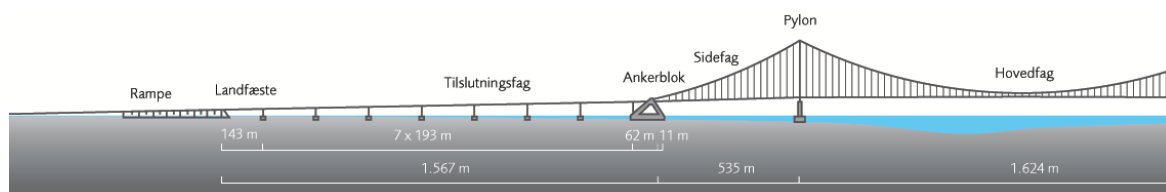
3

Storebæltsbroen

Da Storebæltsbroen anvendes som case i dette projekt, er det muligt at sammenligne resultaterne fra dette projekt, med de aktuelle data som er anvendt til at designe broen ud fra. Kapitlet beskriver generelt broens konstruktioner og geometri, samt de dynamiske data som er anvendt til beregningerne i dette projekt.

3.1 Konstruktioner og geometri

Dette afsnit bygger på [Sund & Bælt Holding A/S, 2007] hvis ikke andet er nævnt. Storebæltsbroen består af 2 pyloner konstrueret af armeret beton og pylonerne bærer de to hovedkabler over det frie spænd. Hovedkablerne er fastgjort til ankerblokke konstrueret af beton 535 m fra pylonerne. Fra ankerblokkene ind mod land findes på østsiden et 1.567 m tilslutningsfag inkl. landfæste, som er understøttet af 7 bropillere af beton. På vestsiden er tilslutningsfaget 2.529 m og står på 12 bropillere. Brodrageren hænger i hængeskaber over hele spændet fra ankerblok til ankerblok. Hovedspændet mellem de 2 pyloner er 1.624 m. Broens frie spænd mellem de to ankerblokke er symmetrisk omkring midten.



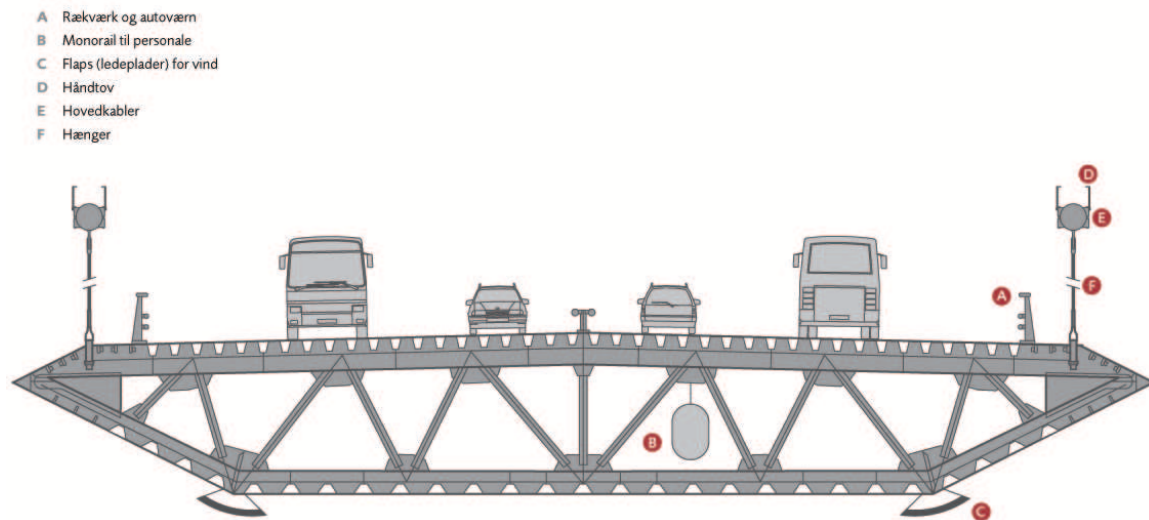
Figur 3.1: Illustration af den østlige del af Storebæltsbroens spænd [Sund & Bælt Holding A/S, 2007, p. 22]

Med en højde på 254 m over havet er pylonerne det højeste punkt i Danmark. Pylonerne bærer de 2 hovedkabler med en diameter på 820 mm via kabelsadler, som er placeret i affugtede kabelhuse. Hovedkablerne er i hver ende fastgjort til en ankerblok som vejer 325.000 ton inkl. ballast i form af sand og jernmalm. Ankerblokkene er designet som

3 Storebæltsbroen

meget luftige konstruktioner, for at bevare det slanke indtryk af den samlede bro og derfor er ca. halvdelen af "selve massivet" [Sund & Bælt Holding A/S, 2007, p. 24] placeret under vand.

Brodrageren er udført som en lukket stålkonstruktion med alle afsvtninger udført indvendigt. Således er det kun ca. 20 – 25% af det samlede stålareal som er udsat for vind og vejr og derfor skal overfladebehandles med maling. Brodrageren hænger i parvise hængeskabler pr. 24 m over hele det frie spænd. Diameteren for hængeskablene varierer fra 65 mm til 98 mm.



Figur 3.2: Illustration af Storebæltsbroens tværsnit i brodrageren [Sund & Bælt Holding A/S, 2007, p. 26]

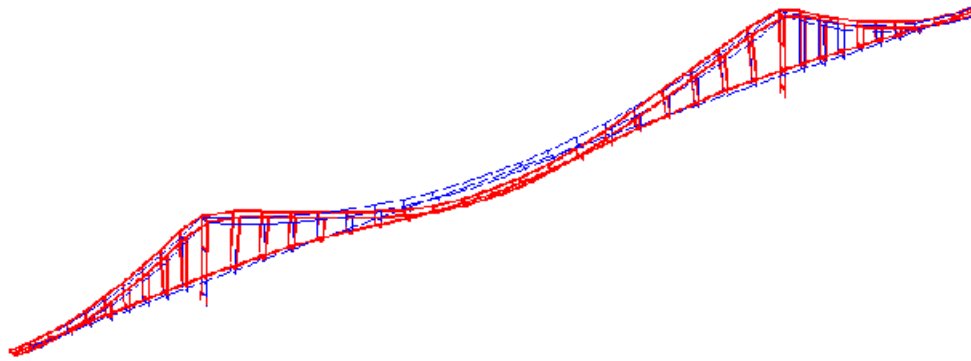
Brodragerens indvendige hulrum er affugtet for at beskytte konstruktionen mod rust og der er monteret en monorail som bruges af servicepersonalet under vedligeholdelse. På ydersiden er der monteret "flaps" til at ødelægge hvirvler og dermed undgå ryt-misk hvirvelafløsning. Brodrageren er udført i et stykke for hele det 2,7 km lange spænd mellem de to ankerblokke. Over ankerblokkene er der placeret to dilatationsfuger som kan optage bevægelser på op til ± 1 m. Brodrageren over de to sidefag er ligeledes udført i et stykke med dilatationsfuger ved ramperne. Dermed er de i alt 6,8 km brodrager udført i 3 stykker med 4 dilatationsfuger, som er verdens største af sin art.

Yderligere detaljer samt figurer og billeder findes i [Sund & Bælt Holding A/S, 2007] som ligger på den vedlagte DVD: [DVD\Litteratur\].

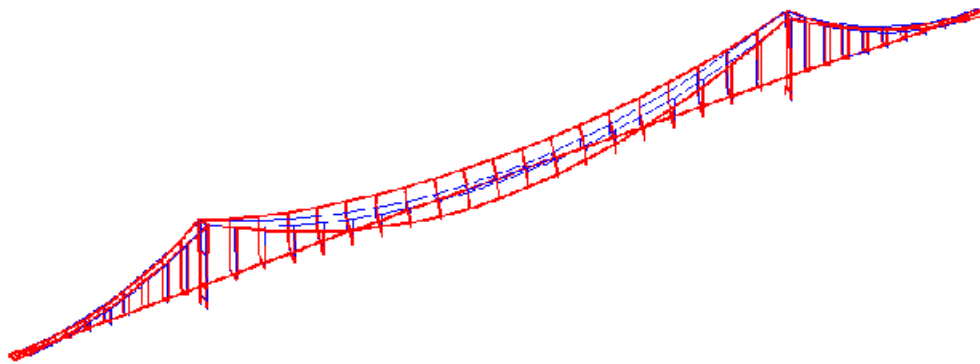
3.2 Dynamiske data

I dette afsnit er de tilgængelige dynamiske data for Storebæltsbroen præsenteret. Afsnittet bygger på [Thorbek, 1997], hvis der ikke er angivet andet. Der er kun præsenteret data som kan anvendes i forbindelse med beregning af den kritiske hastighed for broen i de senere afsnit.

De dynamiske data er knyttet til broens forskellige egensvingningsformer. Egensvingningsformerne er defineret vha. programmet [*DVD\Programmer\bridge_plotting\Plot_bridge.m*] som er udviklet af J. W. Stærdahl i 2007. Programmet anvendes data fra programmet BEASTS som ligeledes findes på [*DVD\Programmer*] og som er udviklet af L. Andersen og C. J. C. Jones, ISVR, i 2001.



(a) Første symmetriske translations-egensvingningsform



(b) Første symmetriske rotations-egensvingningsform

Figur 3.3: De første symmetriske egensvingningsformer (—) med udeformeret geometri (— —)

Den første symmetriske vertikale translations og rotations egensvingningsform er vist på figur 3.3. For både den første symmetriske og asymmetriske translations- og rotations-egensvingsform er der genereret en animation, som viser bevægelsen. Animationerne findes på [*DVD\Video\Egensvingninger*].

De svingende masser og de tilhørende frekvenser for de vertikale translations-egensvingningsformer er givet i tabel 3.1

3 Storebæltsbroen

Tabel 3.1: Svingende masser og frekvenser for de vertikale translations-egensvingsformer [Thorbek, 1997, p. 26, A3]

Egensvingsningsform	Masse, [$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$]	Frekvens, [Hz]
1. symmetriske	19.562	0,0985
1. asymmetriske	21.310	0,0814
2. symmetriske	19.145	0,1308
2. asymmetriske	21.701	0,1301

Tilsvarende er de svingende masser og de tilhørende frekvenser for de for de roterende egensvingsformer givet i tabel 3.2.

Tabel 3.2: Svingende masser og frekvenser for de roterende egensvingsformer [Thorbek, 1997, p. 26, A3]

Egensvingsningsform	Masse, [$\frac{\text{kg m}^2}{\text{m}}$]	Frekvens, [Hz]
1. symmetriske	2.342.625	0,2549
1. asymmetriske	2.645.065	0,2984

I del II af dette projekt anvendes en 3. frihedsgrad i form af vandret translation. Frekvenserne for de horisontalt translaterende egensvingsformer er givet i tabel 3.3.

Tabel 3.3: Frekvenser for de horisontale translations-egensvingsformer [Thorbek, 1997, p. A3]

Egensvingsningsform	Masse, [$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$]	Frekvens, [Hz]
1. symmetriske	-	0,0378
1. asymmetriske	-	0,0466
2. symmetriske	-	0,0449
2. asymmetriske	-	0,1324

Som det fremgår af tabel 3.3 er der ikke opgivet nogle svingende masser for den horisontale translationsbevægelse i de tilgængelige kilder.

Konstruktionens dæmpning, ζ , består af summen af den strukturelle dæmpning, ζ_s , og de aerodynamiske dæmpning, ζ_a . På baggrund af [Thorbek, 1997] og [Thorbek and Hansen, 1996] er dæmpningen vurderet til $\zeta = \zeta_s + \zeta_a = 0,01$ for alle egensvingsformer. De to enkelte bidrag fra strukturel- og aerodynamisk dæmpning er ikke specificeret i de angivne kilder.

I forbindelse med et møde hos Rambøll A/S fredag d. 14. marts 2008 har [Thorbek and Bennetsen, 2008] udtalt at den kritiske hastighed for Storebæltsbroen er ca. $73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

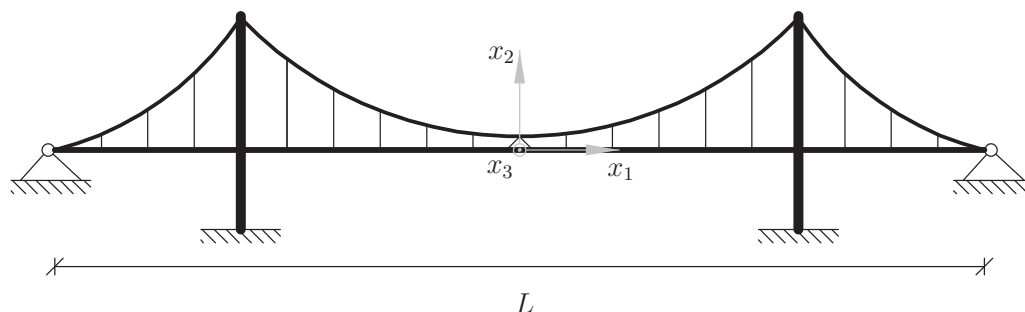
Del I

Plant tværsnit med 2 frihedsgrader

4

Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader

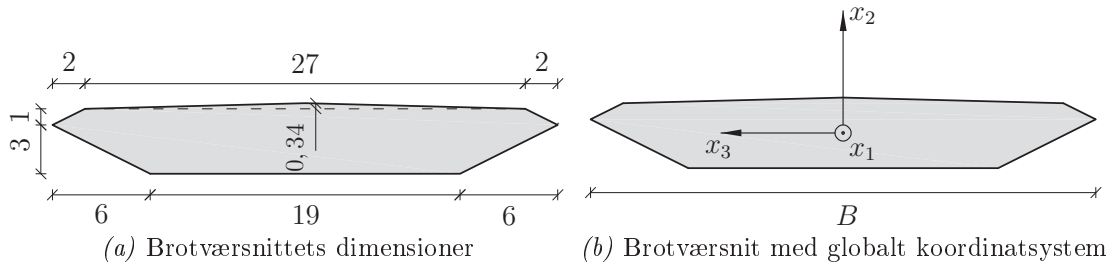
Det følgende kapitel omhandler udledningen af de dynamiske ligninger for et brotværsnit med 2 frihedsgrader. Som nævnt i afsnit 2.2 anvendes data fra Storebæltsbroen som case i dette projekt. Dermed er egensvingsningsformer, svingende masser, geometri mv. kendt i forvejen. Figur 4.1 viser en skematisk tegning af broens frie spænd med angivelse af det globale koordinatsystem samt de modellerede understøtninger.



Figur 4.1: Skematisk tegning af Storebæltsbroen med angivelse af globalt koordinatsystem

Symmetriplanet for broens egensvingninger er x_2x_3 -planet som skærer broen på midten. Tværsnittet i x_2x_3 -planet er anvendt som udgangspunkt for beregningerne i hele dette projekt.

Ligningerne tager udgangspunkt i det generelle tilfælde med 6 frihedsgrader for hele tværsnittets stivlegeme bevægelse omkring origo. Tværsnittet er vist på figur 4.2.



Figur 4.2: Brotværnsnit med angivelse af globalt koordinatsystem og dimensioner, mål i [m]

I den følgende beskrivelse af de aeroelastiske laster ses der bort fra laster på kabler og pyloner. Der inkluderes masse-, stivheds- og dæmpningsbidrag fra pyloner og kabler i systemmatricerne.

4.1 Teori

Følgende afsnit bygger på [Stærdahl et al., 2007], som er baseret på de oprindelige ligninger af [Scanlan, 1978], formuleret i generaliserede koordinater, medmindre andet er angivet. Ud fra det globale koordinatsystem defineret på figur 4.2b er de globale flytnings- og rotationskomponenter $u_k(x_1, t)$ og $\theta_k(x_1, t)$ samlet i vektoren $u(x_1, t)$:

$$u^T(x_1, t) = [u_1(x_1, t), u_2(x_1, t), u_3(x_1, t), \theta_1(x_1, t), \theta_2(x_1, t), \theta_3(x_1, t)] \quad (4.1)$$

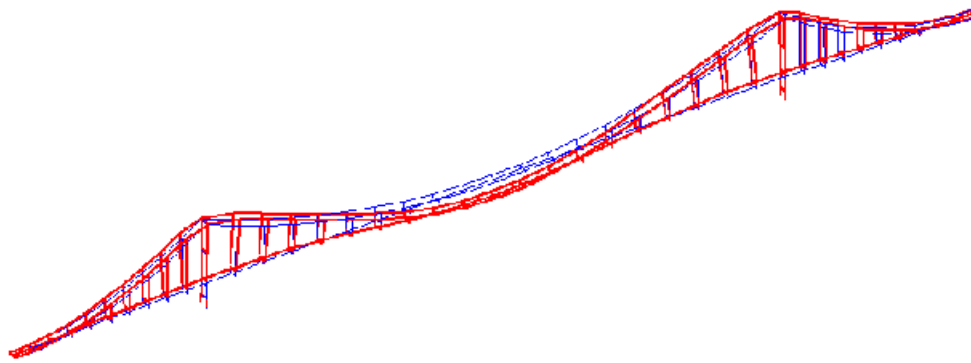
Flytningsvektoren opløses vha. de udæmpede modalkoordinater $q_j(t)$ og egensvingsningsformerne $\Phi^{(j)}(x_1)$:

$$u(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(x_1) q_j(t) \quad [\text{Nielsen, 2004, p. 133}] \quad (4.2)$$

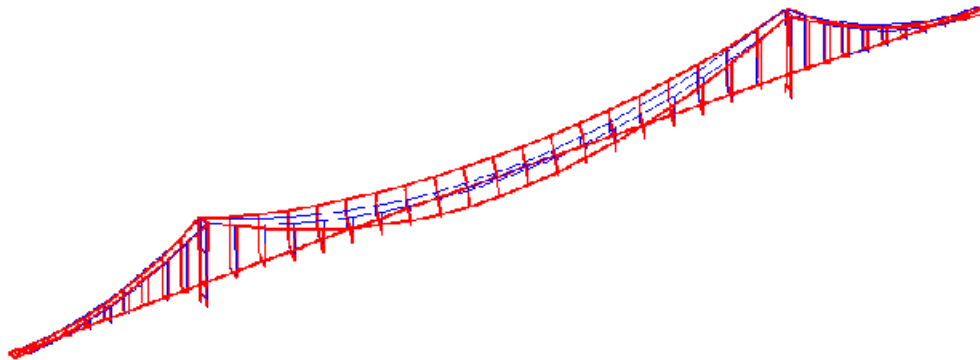
hvor den j 'te egensvingsningsform er givet ved følgende flytnings- og rotationskomponenter:

$$\Phi^{(j)}(x_1) = [U_1^{(j)}(x_1), U_2^{(j)}(x_1), U_3^{(j)}(x_1), \Theta_1^{(j)}(x_1), \Theta_2^{(j)}(x_1), \Theta_3^{(j)}(x_1)] \quad (4.3)$$

På figur 4.3 er den første symmetriske translations- og rotations-egensvingsningsform vist. Egensvingsningsformerne er symmetriske omkring x_2x_3 -planet.



(a) Første symmetriske translations-egensvingningsform



(b) Første symmetriske rotations-egensvingningsform

Figur 4.3: De første symmetriske egensvingningsformer (—) med udeformeret geometri (— —)

Idet der er antaget modal dekobling, svarende til $\zeta_{ij} = 0$, bestemmes de udæmpede modelkoordinater som løsningen til den følgende ordinære partielle differentialligning [Nielsen, 2004, p. 133] :

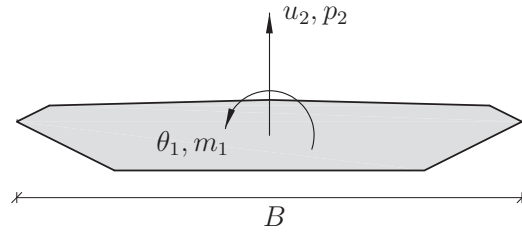
$$\ddot{q}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = \frac{1}{M_j}F_j(t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, \quad t > 0 \quad (4.4)$$

hvor

ω_j	er den udæmpede cirkulære egenfrekvens
ζ_j	er dæmpningsforholdet
M_j	er modalmassen
F_j	er modallasten
$()_j$	repræsenterer j'th egensvingningsform

Pga. lav strukturel dæmpning i broen og god adskillelse mellem de væsentlige egenfrekvenser er modal dekobling antaget [Nielsen, 2004, p. 76]. Broen betragtes som et plant tværsnit beskrevet ved de 2 frihedsgrader $u_2(x_1, t)$ og $\theta_1(x_1, t)$. Brotværsnittet med de 2 frihedsgrader er vist på figur 4.4.

4 Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader



Figur 4.4: Brotværnsnit med angivelse af frihedsgrader

Som vist på figur 4.4 er det kun den lodrette last pr. længdeenhed, $p_2(x_1, t)$, og vridningsmomentet pr. længdeenhed, $m_1(x_1, t)$ som medtages i beregningerne. Dermed reduceres udtrykket for modallasten til følgende:

$$F_j(t) = \int_0^L (U_2^{(j)}(x_1)p_2(x_1, t) + \Theta_1^{(j)}(x_1)m_1(x_1, t))dx_1 \quad (4.5)$$

hvor L er den fulde længde af brodækket som er defineret på figur 4.1. Lasterne er antaget selvforstærkende af brodækkets bevægelse. De angivne laster beskrives vha. de såkaldte flutter-afledede og en 2D linearisering af strømmingen foreslået af R. H. Scanlan [Scanlan, 1978]:

$$p_2(x_1, t) = \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(K H_1^*(K) \frac{\dot{u}_2}{V} + K H_2^*(K) B \frac{\dot{\theta}_1}{V} + K^2 H_3^*(K) \theta_1 \right) \quad (4.6)$$

$$m_1(x_1, t) = \frac{1}{2}\rho V^2 B^2 \left(K A_1^*(K) \frac{\dot{u}_2}{V} + K A_2^*(K) B \frac{\dot{\theta}_1}{V} + K^2 A_3^*(K) \theta_1 \right) \quad (4.7)$$

hvor

- ρ er densiteten af luft
- V er middelvindhastigheden
- B er bredden af brodækket jf. figur 4.2
- $H_i^*(K)$ er flutter-afledede for den lodrette translation, $i = 1, 2, 3$
- $A_i^*(K)$ er flutter-afledede for rotationen, $i = 1, 2, 3$

Den reducerede frekvens, K , er beskrevet ved følgende formel:

$$K = \frac{B\omega}{V} \quad (4.8)$$

De to flytningskomponenter $u_2(x_1, t)$ og $\theta_1(x_1, t)$ fra formel (4.2) er givet ved:

$$u_2(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_2^{(j)}(x_1)q_j(t) \quad (4.9)$$

$$\theta_1(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_1^{(j)}(x_1)q_j(t) \quad (4.10)$$

Formel (4.9) og (4.10) indsættes i formel (4.6) hvorefter leddene ordnes efter modalkoordinaterne:

$$\begin{aligned} p_2(x_1, t) &= \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(KH_1^*(K) \frac{\sum_{j=1}^{\infty} U_2^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} \right. \\ &\quad \left. + KH_2^*(K)B \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \Theta_1^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} + K^2 H_3^*(K) \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_1^{(j)}(x_1)q_j(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}\rho V^2 BK \left(H_1^*(K) \frac{U_2^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} + BH_2^*(K) \frac{\Theta_1^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} \right. \\ &\quad \left. + KH_3^*(K)\Theta_1^{(j)}(x_1)q_j(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\dot{q}_j(t) \frac{1}{2}\rho VBK \left(H_1^*(K)U_2^{(j)}(x_1) + BH_2^*(K)\Theta_1^{(j)}(x_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_j(t) \frac{1}{2}\rho V^2 BK^2 H_3^*(K)\Theta_1^{(j)}(x_1) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tilsvarende er formel (4.9) og (4.10) indsat i formel (4.7):

$$\begin{aligned} m_1(x_1, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\dot{q}_j(t) \frac{1}{2}\rho VB^2 K \left(A_1^*(K)U_2^{(j)}(x_1) + BA_2^*(K)\Theta_1^{(j)}(x_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_j(t) \frac{1}{2}\rho V^2 B^2 K^2 A_3^*(K)\Theta_1^{(j)}(x_1) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Formel (4.11) og (4.12) indsættes i formel (4.5):

$$F_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k_{jk}(\omega, V)q_k(t) + c_{jk}(\omega, V)\dot{q}_k(t) \quad (4.13)$$

4 Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader

hvor

$$\begin{aligned}
 k_{jk}(\omega, V) &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} \rho V^2 B K^2 H_3^*(K) \Theta_1^{(k)}(x_1) U_2^{(j)}(x_1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 K^2 A_3^*(K) \Theta_1^{(j)}(x_1) \Theta_1^{(k)}(x_1) \right) dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \rho V^2 B K^2 \left(H_3^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1) \Theta_1^{(k)}(x_1) dx_1 \right. \\
 &\quad \left. + B A_3^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1) \Theta_1^{(k)}(x_1) dx_1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 c_{jk}(\omega, V) &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} \rho V B K \left(H_1^*(K) U_2^{(k)}(x_1) + B H_2^*(K) \Theta_1^{(k)}(x_1) \right) U_2^{(j)}(x_1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \rho V B^2 K \left(A_1^*(K) U_2^{(k)}(x_1) + B A_2^*(K) \Theta_1^{(k)}(x_1) \right) \Theta_1^{(j)}(x_1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \rho V B K \left(H_1^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1) U_2^{(k)}(x_1) dx_1 \right. \\
 &\quad + B \left(H_2^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1) \Theta_1^{(k)}(x_1) dx_1 \right. \\
 &\quad \left. \left. + A_1^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1) U_2^{(k)}(x_1) dx_1 + B A_2^* \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1) \Theta_1^{(k)}(x_1) dx_1 \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Som tidligere nævnt er broen, og dermed også nogle af egensvingsningsformerne, symmetriske omkring x_2x_3 -planet. Integralerne af symmetriske og asymmetriske egensvingsningsformer annullerer hinanden i formel (4.14) og (4.15). Yderligere er $\Theta_1^{(j)}(x_1) \equiv 0$ for symmetriske eller asymmetriske translations-egensvingsningsformer og tilsvarende er $U_2^{(j)}(x_1) \equiv 0$ symmetriske eller asymmetriske rotations-egensvingsningsformer. Bidragene fra de første 8 egensvingsningsformer er illustreret i tabel 4.1.

Tabel 4.1: Rækkefølgen af de første 8 egensvingsformer

Egensvingsningsform	$U_2^{(j)}(x_1)$	$\Theta_1^{(j)}(x_1)$
1	1. symmetriske	0
2	0	1. symmetriske
3	1. asymmetriske	0
4	0	1. asymmetriske
5	2. symmetriske	0
6	0	2. symmetriske
7	2. asymmetriske	0
8	0	2. asymmetriske

På matrix-form ser bevægelsesligningerne, som følge af de ovenstående udregninger, således ud:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{q}(t) = \mathbf{c}_0(\omega, V)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{k}_0(\omega, V)\mathbf{q}(t) \quad (4.16)$$

hvor

$$\mathbf{q}^T(t) = [q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t), \dots] \quad (4.17)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots \\ 0 & M_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 M_1 & 0 & \dots \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 M_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2^2 M_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Hvis der tages højde for tabel 4.1 samt integration af symmetriske og asymmetriske

4 Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader

egensvingningsformer reduceres $\mathbf{c}_0(\omega, V)$ og $\mathbf{k}_0(\omega, V)$ til:

$$\mathbf{k}_0(\omega, V) = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & 0 & 0 & 0 & k_{16} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & k_{26} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & k_{34} & 0 & 0 & 0 & k_{38} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 & 0 & k_{48} & \\ 0 & k_{52} & 0 & 0 & 0 & k_{56} & 0 & 0 & \\ 0 & k_{62} & 0 & 0 & 0 & k_{66} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & k_{74} & 0 & 0 & 0 & k_{78} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{84} & 0 & 0 & 0 & k_{88} & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{c}_0(\omega, V) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} & 0 & 0 & \dots \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & c_{25} & c_{26} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & c_{37} & c_{38} & \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 & c_{47} & c_{48} & \\ c_{51} & c_{52} & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & \\ c_{61} & c_{62} & 0 & 0 & c_{65} & c_{66} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & c_{73} & c_{74} & 0 & 0 & c_{77} & c_{78} & \\ 0 & 0 & c_{83} & c_{84} & 0 & 0 & c_{87} & c_{88} & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$\mathbf{c}_0(\omega, V)$ og $\mathbf{k}_0(\omega, V)$ repræsenterer lastled som er proportional med hhv. hastigheden og flytningen. Yderligere er $\mathbf{k}_0(\omega, V)$ og $\mathbf{c}_0(\omega, V)$ afhængige af ω og V samt af lasten på tværsnittet, som er repræsenteret ved de 2 laster hørende til de 2 frihedsgrader, der er vist på figur 4.4. Lasterne er beskrevet vha. de 6 flutter-afledede H_1^* , H_2^* , H_3^* , A_1^* , A_2^* og A_3^* som er udledt senere i dette kapitel. Alle matricerne fra formel (4.16) har dimensionen $n \times n$, hvor n er antallet af egensvingningsformer som er medtaget i beregningen.

Ved små vindhastigheder er systemet stabilt således at afvigelser fra ligevægtstilstanden $\mathbf{q}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ dæmpes bort som harmoniske svingninger med faldende amplitude pga. den strukturelle dæmpning. Ved store vindhastigheder er systemet ustabil og svinger med en harmonisk svingning med stigende amplitude. Dermed findes der et kritisk punkt hvor systemet bevæges med en harmonisk svingning med konstant amplitude. For denne tilstand defineres en kritisk hastighed, V_c . I den kritiske tilstand har løsningen til modalkoordinaterne formen:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (4.23)$$

hvor

\mathbf{q}_0 er svingningens konstante amplitude
 ω er den cirkulære flutter frekvens

Formel (4.23) indsættes i formel (4.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\mathbf{q}_0 \frac{\partial^2 e^{i\omega t}}{\partial t^2} + \mathbf{c}\mathbf{q}_0 \frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} + \mathbf{k}\mathbf{q}_0 e^{i\omega t} &= \mathbf{c}_0(\omega, V)\mathbf{q}_0 \frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} + \mathbf{k}_0(\omega, V)\mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \\ \left(\frac{\partial^2 e^{i\omega t}}{\partial t^2} \mathbf{m} + \frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0(\omega, V)) + e^{i\omega t} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0(\omega, V)) \right) \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0} \\ \left(-\omega^2 \mathbf{m} + i\omega (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0(\omega, V)) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0(\omega, V)) \right) \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Den kritiske vindhastighed V_c med tilhørende cirkulær flutter frekvens kan bestemmes ved løsning af det ikke-liniære egenverdiproblem fra formel (4.24). Ikke-trivielle løsninger findes kun når $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}$, hvilket fører frem til flutter-betingelsen:

$$\det \left(-\omega^2 \mathbf{m} + i\omega (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0(\omega, V_c)) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0(\omega, V_c)) \right) = 0 \quad (4.25)$$

Af formel 4.25 findes to ikke-liniære ligninger af hhv. den reelle og den imaginære del til løsning af de to ubekendte, V_c og ω .

4.2 Simpelt flytningsfelt

For det simple tilfælde hvor broens antages at bevæge sig som et sift legeme falder afhængigheden af x_1 ud af ligningerne. Dermed kan bevægelsesligningerne opstilles direkte uden omskrivning til modalkoordinater. Bevægelsesligningerne er derefter givet ved:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.26)$$

hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \theta_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ m_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4 Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 M_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 M_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Lastvektoren fra formel (4.28) skrives på følgende form:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ m_1(t) \end{bmatrix} = \mathbf{c}_0 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_0 \mathbf{u} \quad (4.32)$$

\mathbf{c}_0 og \mathbf{k}_0 opstilles på baggrund af udtrykkene for lift-kraften og momentet i hhv. formel (4.6) og (4.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \frac{1}{2}\rho V^2 B \begin{bmatrix} KH_1^*(K)\frac{1}{V} & KH_2^*(K)\frac{B}{V} \\ KA_1^*(K)\frac{B}{V} & KA_2^*(K)\frac{B^2}{V} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\rho V B K \begin{bmatrix} H_1^*(K) & BH_2^*(K) \\ BA_1^*(K) & B^2 A_2^*(K) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= \frac{1}{2}\rho V^2 B \begin{bmatrix} 0 & K^2 H_3^*(K) \\ 0 & BK^2 A_3^*(K) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 B K^2 \begin{bmatrix} 0 & H_3^*(K) \\ 0 & BA_3^*(K) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Nullerne i første kolonne af \mathbf{k}_0 skyldes at lasterne er beskrevet uden et flytningsled med en ekstra tilhørende flutter-afledede.

Som tidligere antages det at bevægelsen er harmonisk med konstant amplitude og kan beskrives ved:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} \quad (4.35)$$

hvor

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

\tilde{u}_2 og $\tilde{\theta}_1$ er de konstante reelle amplituder for hhv. translations- og rotationsbevægelserne. Ved indsættelse af formel (4.35) i formel (4.26) reduceres bevægelsesligningerne til følgende determinant:

$$\det\left(-\omega^2\mathbf{m} + i\omega(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0(\omega, V)) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0(\omega, V))\right) = 0 \quad (4.37)$$

Formel (4.37) er magen til formel (4.25) bortset fra at til formel (4.37) anvendes systemmatricerne fra formel (4.29) til (4.31) samt formel (4.33) og (4.34) frem for matricerne angivet tidligere.

4.3 Flutter-afledede

For at kunne løse formel (4.25) kræves et funktionsudtryk for hver af de 6 flutter-afledede. Disse funktionsudtryk findes numerisk ved hjælp af CFD-modellen, idet det antages at broens bevægelser er harmoniske:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \tilde{u}_2 e^{i\omega t} \\ \theta_1(t) &= \tilde{\theta}_1 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.38)$$

hvor

$$\begin{aligned} \omega &\text{ er bevægelsens cirkulære egenfrekvens} \\ \tilde{u}_2, \tilde{\theta}_1 &\text{ er bevægelsens konstante reelle amplitude} \end{aligned}$$

Idet formel (4.38) indsættes i formel (4.6) og (4.7) og det antages at lasterne varierer harmonisk med samme frekvens som bevægelsen og faseforskudt med ϕ , i forhold til bevægelsen, findes følgende:

$$\begin{aligned} p_2(x_1, t) &= \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(KH_1^*(K) \frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{u}_2 e^{i\omega t}}{\partial t} + KH_2^*(K) B \frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{\theta}_1 e^{i\omega t}}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + K^2 H_3^*(K) \tilde{\theta}_1 e^{i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(KH_1^*(K) \frac{\tilde{u}_2 i\omega}{V} + KH_2^*(K) B \frac{\tilde{\theta}_1 i\omega}{V} + K^2 H_3^*(K) \tilde{\theta}_1 \right) e^{i\omega t} \quad (4.39) \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 B K^2 \left(iH_1^*(K) \frac{\tilde{u}_2}{B} + iH_2^*(K) \tilde{\theta}_1 + H_3^*(K) \tilde{\theta}_1 \right) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 B_{CL} \end{aligned}$$

4 Dynamiske ligninger for 2 frihedsgrader

$$\begin{aligned}
 m_l(x_1, t) &= \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 \left(K A_1^*(K) \frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{u}_2 e^{i\omega t}}{\partial t} + K A_2^*(K) B \frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{\theta}_1 e^{i\omega t}}{\partial t} \right. \\
 &\quad \left. + K^2 A_3^*(K) \tilde{\theta}_1 e^{i\omega t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 c_M
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

hvor

$$\begin{aligned}
 c_L &= K^2 \left(i H_1^*(K) \frac{\tilde{u}_2}{B} + \tilde{\theta}_1 \left(i H_2^*(K) + H_3^*(K) \right) \right) e^{i\omega t} \\
 c_M &= K^2 \left(i A_1^*(K) \frac{\tilde{u}_2}{B} + \tilde{\theta}_1 \left(i A_2^*(K) + A_3^*(K) \right) \right) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Idet det tidligere er antaget at kræfterne varierer harmonisk med konstant amplitude vil Liftkoefficienten, c_L , og momentkoefficienten, c_M , ligeledes variere harmonisk med konstant amplitude. c_L og c_M kan derfor i lighed med tidligere beskrives af følgende udtryk, idet faseforskydningen, ϕ , i forhold til bevægelsen, indføres:

$$\begin{aligned}
 c_L &= \tilde{c}_L e^{i(\omega t - \phi_L)} \\
 c_M &= \tilde{c}_M e^{i(\omega t - \phi_M)}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

hvor

\tilde{c}_L, \tilde{c}_M er koefficienternes konstante amplituder

Ved indsættelse af formel (4.42) i (4.41) findes følgende udtryk for de 6 flutter-afledede:

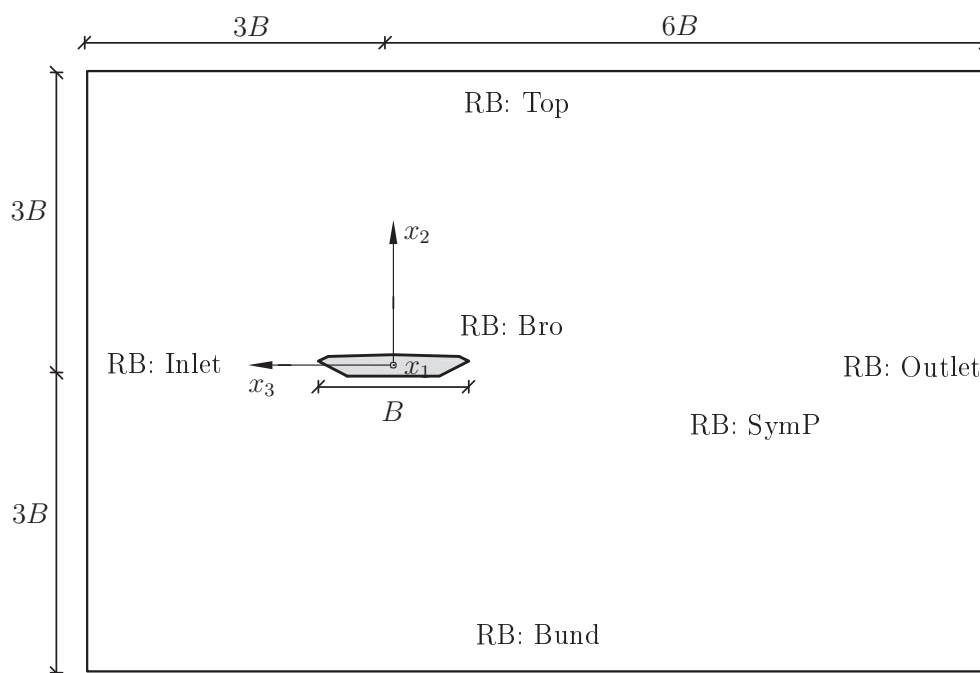
$$\begin{aligned}
 H_1^* &= \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_L B e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad H_2^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_L e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right), \quad H_3^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_L e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right) \\
 A_1^* &= \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_M B e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad A_2^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_M e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right), \quad A_3^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_M e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right)
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

De første 2 udtryk, H_1^* og A_1^* , beregnes ud fra en simulering med lodret translation af tværsnittet, mens de resterende 4 udtryk beregnes vha. en simulering med rotation af tværsnittet.

5

Modelopbygning - Grundmodel

Det følgende kapitel omhandler beskrivelsen af CFD-modellen, som anvendes til de numeriske simuleringer af vindfeltet omkring broen. Kapitlet beskriver de nødvendige input til netgenereringsprogrammet samt simuleringsprogrammet. Yderligere præsenteres geometrien for den plane virtuelle vindtunnel. Det anvendte brotværsnit er vist på figur 4.2. Dette tværsnit anvendes til alle simuleringer i hele dette projekt. Grundmodellen er bygget op med et beregningsdomæne af størrelsen $9B \times 6B$ hvor tværsnittets center er placeret $3B$ fra hhv. Inlet RB, top og bund af domænet samt $6B$ fra Outlet RB. Randbetingelserne er nærmere beskrevet i afsnit 5.2.1. Det aktuelle domæne er vist på figur 5.1.



Figur 5.1: Grundmodellens beregningsdomæne

5 Modelopbygning - Grundmodel

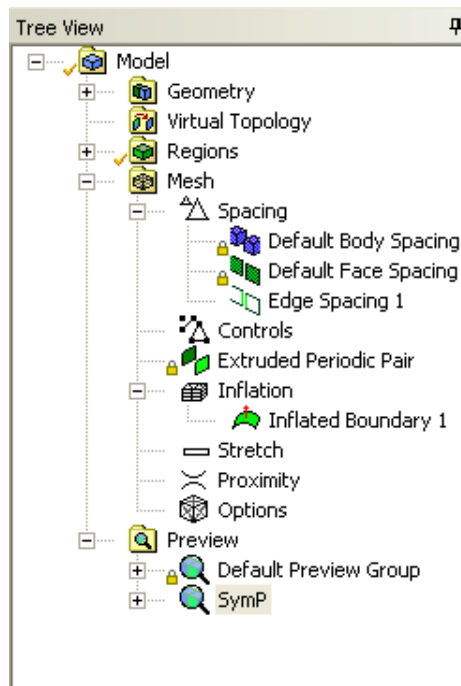
Det er valgt at anvende et "skævt" domæne efter indspiration fra [Frandsen, 2004]. Dermed er der mulighed for at se broens effekt på strømmingen længere nedstrøms fra denne.

Geometrien til modellen er bygget op med programmet Designmodeller, som er et standard program under ANSYS Workbench. Med indstillingerne beskrevet i dette kapitel kan resultaterne fra de beskrevne simuleringer genskabes. Filen som er anvendt til at definere modellens geometri, findes på den vedlagte DVD under:

[DVD\CFD\01 Geometri\SB_1m_3B_6B.agdb].

5.1 Net

Genereringen af net foregår ligeledes med et ANSYS Workbench standard program kaldet Meshing. Som net-type vælges "CFX-Mesh" hvormed er underprogram, med træstrukturen som er vist på figur 5.2, åbnes.



Figur 5.2: Grundmodellens beregningsdomæne

Indstillingerne for nettet tages ind under punktet "Mesh". I de følgende tabeller er de enkelte indstillinger listet en af gangen. Både standard og ikke standard indstillinger er listet så der senere kan henvises til disse tabeller når der foretages yderligere ændringer. I tabel 5.4 er indstillingerne for de første underpunkt, "Spacing", listet:

Tabel 5.1: Indstillinger for "Spacing"

Punkt	Indstilling	Værdi
Default Body Spacing	Maximum Spacing [m]	15
Default Face Spacing	Option	Angular Resolution
	Angular Resolution [Degree]	10
	Minimum Edge Length [m]	0,01
	Maximum Edge Length [m]	15
Edge Spacing 1	Option	Constant
	Constant Edge Length [m]	0,2
	Radius of Influence [m]	0
	Expantion Factor	1,2
	Location	7 Edges*

* De "7 Edges" er de 7 steder hvor brotværsnittet skærer et af symmetriplanerne

De indtastede værdier for "Default Body Spacing" og "Default Face Spacing" angiver standard værdier som programmet bruger til at definere nettet ud fra. "Edge Spacing 1" definerer nogle specielle forhold omkring brotværsnittet.

Tabel 5.2 viser indstillingerne for underpunktet "Inflation", som ligeledes definerer nogle specielle forhold omkring brotværsnittet. Begrebet "Inflation" dækker over et regulært net af elementer med rektangulære endeflader og som gradvist bliver højere.

Tabel 5.2: Indstillinger for "Inflation"

Punkt	Indstilling	Værdi
Inflation	Number of Inflation layers	15
	Expansion Factor	1,2
	Number of Spreading Iterations	0
	Minimum Internal Angle [Degree]	2,5
	Maximum Internal Angle [Degree]	10
Inflation Option	Option	First Layer Thickness
	Define First Layer By	First Prism Height
	First Prism Height [m]	0,01
	Extended Layer Growth	Yes
	Layer By Layer Smoothing	No
Inflated Boundary 1	Location	1 Composite Region*

* Skal være tilføjet de 7 flader som udgør brotværsnittet

5 Modelopbygning - Grundmodel

Som det fremgår af tabel 5.2 er det første lag af elementer sat til at være 10 mm tykt. Da værdien for "Expansion factor" er sat til 1,2, er det næste lag af elementer ca. $1,2 \cdot 10$ mm tykt. Med "Extended Layer Growth" slået til sikres det at alle de ønskede lag kan genereres ved at den maksimale højde af elementerne låses til at være lig bredden af elementerne. Dermed vil de yderste lag evt. blive dannet af elementer med kvadrater som endeflader.

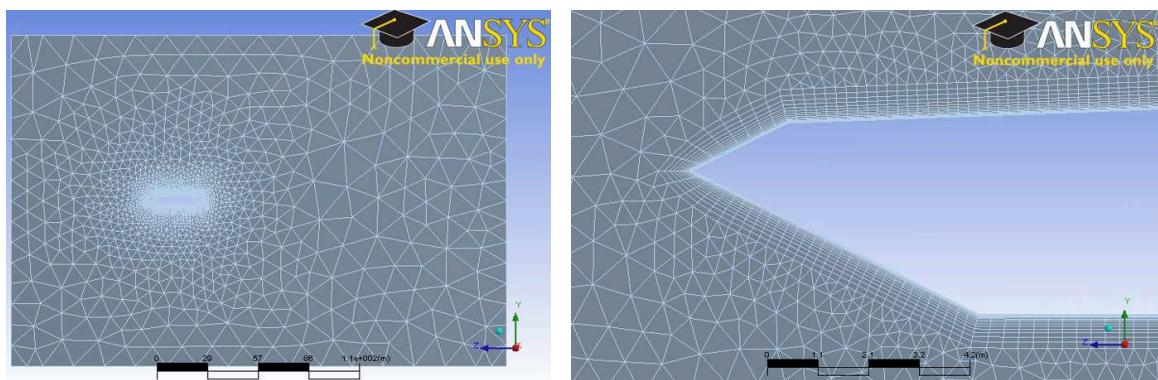
Tabel 5.3 refererer til de generelle indstillinger som defineres under "Options".

Tabel 5.3: Indstillinger for "Options"

Punkt	Indstilling	Værdi
Options	Global Mesh Scaling	1
Surface Meshing	Option	Delaunay
Meshing Strategy	Option	Extruded 2D Mesh
2D Extrusion Option	Option	Full
2D Extrusion Option	Number of Layers	1

Fra tabel 5.3 er den væsentligste indstilling at "Meshing Strategy" er sat til "Extruded 2D Mesh" hvilket bevirker at nettet genereres på symmetrifladerne og derefter ekstruderes til et 2D Mesh af et elements tykkelse. "2D Extrusion Option" er sat til "Full" og "Number of Layers" er sat til 1 lag, hvilket bevirker at den ekstruderede tykkelse af nettet bliver lig dybden af geometrien som er defineret vha. Design modeller. Dvs. i dette tilfælde bliver nettet 1 m tykt.

Med disse indstillinger er der genereret et groft net med 8.694 elementer. Nettet er vist på figur 5.3.



(a) Net af prismatiske elementer omkring brotværnsnittet

(b) Inflation layer omkring brotværnsnittet

Figur 5.3: Grundmodellens beregningsnet bestående af 8.694 elementer

På den vedlagte DVD findes netfilen som er anvendt til grundmodellen under: [DVD\CFD\02 Mesh\GM.gtm]. I samme bibliotek findes filen "GM.cmdb" som er filen

med indstillingerne til programmet "CFX-Mesh" hvormed "GM.gtm" kan genereres.

5.2 Simulering

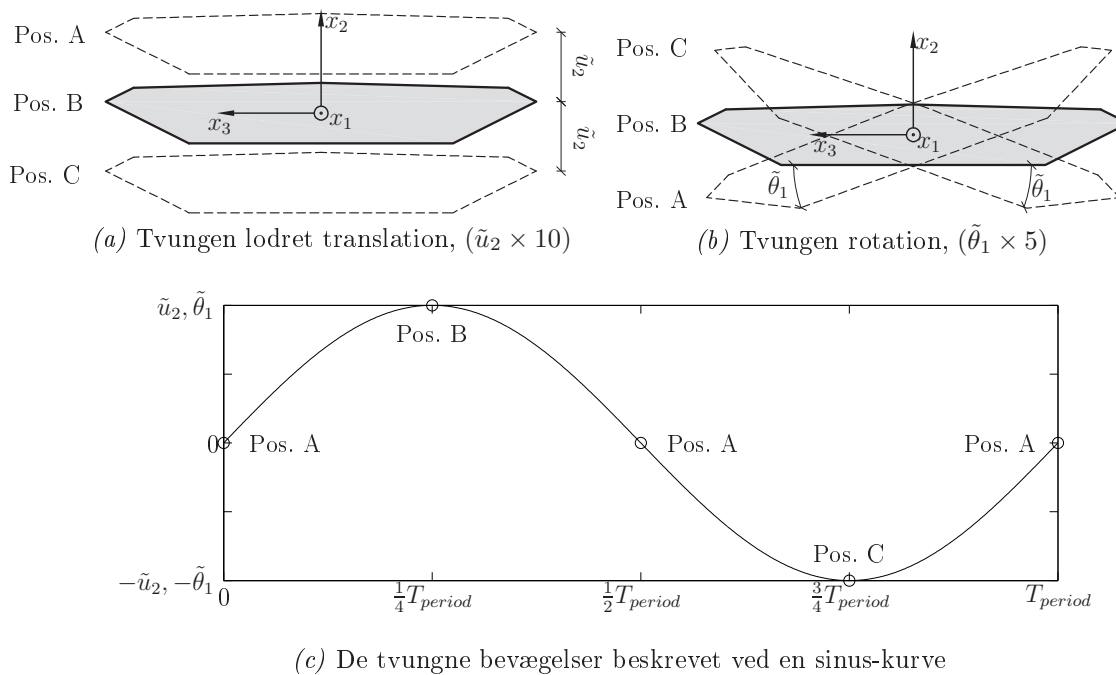
Simuleringerne defineres vha. ANSYS CFX, som er et selvstændigt program til løsning af strømning ligningerne. CFX består af 3 dele: CFX-Pre, CFX-Solver og CFX-Post. CFX-Solver og CFX-Post er hhv. selve beregningsprogrammet samt en del til efterbehandling af de opnåede resultater. CFX-Pre anvendes til at definere alle indgangsparametre til simuleringen og CFX-Solver.

Til styring af forskellige bruger-input i simuleringerne er det såkaldte CFX Expression Language (CEL) udviklet. Det giver mulighed for at definere ekstra udtryk, variable og funktioner, som f.eks. kan styre bevægelsen af brotværnsnittet.

Der findes to forskellige typer af simuleringer: Stationære og tidsafhængige simuleringer. De mest interessante simuleringer i sammenhæng med dette projekt er de tidsafhængige, da de styrende ligninger for broens bevægelser er dynamiske. De stationære simuleringer anvendes som begyndelsesbetingelser for de tidsafhængige simuleringer. Dermed opnås bedre startgæt på begyndelsesbetingelserne hvilket kan forbedre konvergensten og øge robustheden af simuleringen [ANSYS Inc., 2006a, p. 14]. Begyndelsesbetingelserne beskrives nærmere, senere i dette afsnit.

I dette kapitel er der omtalt 2 typer af tidsafhængige simuleringer som indeholder en tvungen bevægelse af tværnsnittet. De to typer af simuleringer benævnes i det efter følgende efter den tvungne bevægelse af tværnsnittet, som er: Lodret translation eller rotation. De tvungne bevægelser for de to typer af simuleringer er vist på figur 5.4.

5 Modelopbygning - Grundmodel



Figur 5.4: Illustration af de tvungne bevægelser af tværsnittet med forskellig skalering af translationen og rotationen

Som illustreret på figur 5.4 er de tvungne bevægelser beskrevet ved en sinuskurve på formen $a = \tilde{a} \sin(\omega t)$. Bevægelsernes amplituder er omtalt senere i dette afsnit. Frekvensen, ω , og dermed også periodetiden, T_{period} , varierer for de forskellige simuleringer. Simuleringerne med bevægeligt brotværsnit bruges til at beregne flutter-afledede, ved forskellige frekvenser, efter formlerne beskrevet i afsnit 4.3. Simulerings-filerne til grundmodellen findes på `[DVD\CFD\2DOF\Grundmodel\SIM*.cfx]`.

Indstillingerne for de forskellige typer af simuleringer vil nu blive præsenteret i den rækkefølge, som de opstår i træstrukturen i CFX-Pre. I det følgende er det kun de indstillinger, som afviger fra standardindstillingerne der er præsenteret. Det første punkt er "Simulation Type", som har forskellige indstillinger for stationære og tidsafhængige simuleringer. For de stationære simuleringer anvendes standardindstillingerne, mens der for tidsafhængige simuleringer anvendes indstillingerne listet i tabel 5.1.

Tabel 5.4: Indstillinger for "Simulation Type" ved tidsafhængige simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic Settings	Simulation type > Option	Transient
	Simulation type > Time duration > Option	Total time
	Simulation type > Time duration > Total time	t_{max}
	Simulation type > Time steps > Option	Timestep
	Simulation type > Time steps > Timestep	dt
	Simulation type > Initial Time > Option	Automatic with Value
	Simulation type > Initial Time > Time	0 [s]

Værdierne for t_{max} og dt er importeret via CEL og for grundmodellen er de:

$$\begin{aligned}
 t_{max} &= 8 T_{period} \\
 dt &= \frac{\Delta t^* B}{V} = 0,03 \text{ s}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

hvor

- T_{period} er periodetiden for de tvungne harmoniske svingninger,
 $T_{period} = 15, 20, 25 \text{ s}$
- Δt^* er et dimensionsløst tidsstep, $\Delta t^* = 0,01$
- B er brotværsnittets bredde, jf. figur 4.2a er $B = 31 \text{ m}$
- V er hastigheden i det uforstyrrede vindfelt, $V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Det dimensionsløse tidsstep sikrer at en luftpartikels passage af brotværsnittet sker over $(\Delta t^*)^{-1} = 100$ tidsstep. Dermed sikres det at luftpartiklen "opdager" brotværsnittet inden den er passeret.

Det andet punkt i træstrukturen er "Default Domain" hvor indstillinger for strømningensdomænet skal defineres. Indstillingerne for strømningensdomænet er listet i tabel 5.2:

5 Modelopbygning - Grundmodel

Tabel 5.5: Indstillinger for "Default Domain" for både stationære og tidsafhængige simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Generel Option	Basic Setting > Domain Type	Fluid Domain
	Basic Setting > Fluids List	Air at 25 C
	Domain Models > Pressure > Reference Pressure	1 [atm]
	Domain Models > Mesh Deformation > Option	Regions of Motion Specified*
	Domain Models > Mesh Deformation > Mesh Motion Model > Option	Displacement Diffusion**
	Domain Models > Mesh Deformation > Mesh Motion Model > Mesh Stiffness > Option	Value**
	Domain Models > Mesh Deformation > Mesh Motion Model > Mesh Stiffness > Mesh Stiffness	$\frac{1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\text{Wall Distance}}$ **
Fluid Models	Heat Transfer > Option	Isothermal
	Heat Transfer > Fluid Temperature	25 [C]
	Turbulence > Option	Shear Stress Transport
	Turbulence > Transitional Turbulence > Option	Fully Turbulent
	Additional Variables Details > Lift	Selected**†
	Additional Variables Details > Lift > Option	Algebraic Equation**†
	Additional Variables Details > Lift > Value	p_2 **†
	Additional Variables Details > Lodret flytning	Selected**†
	Additional Variables Details > Lodret flytning > Option	Algebraic Equation**†
Additional Variables Details > Lodret flytning > Value	u_2 **†	

* For stationære simuleringer samt simuleringer med fastholdt tværsnit vælges standardindstillingen: None

** Skal ikke defineres for stationære simuleringer

† Indstillingen gælder kun for tværsnit udsat for lodret translation. For andre bevægelser se tabel 5.6

Variablerne "Lift" og "Lodret flytning" er defineret vha. CEL. Ved at tildele dem værdier fra en algebraisk ligning inkluderes disse variabler i resultatfilerne og kan dermed eksporteres. Variablerne tildeles udtrykkene p_2 og u_2 der ligeledes er defineret vha. CEL til:

$$p_2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n F_y \tag{5.2}$$

$$u_2 = \tilde{u}_2 \sin(\omega t) \quad \text{for } 0 < t < t_{max}$$

hvor

d er dybden af den virtuelle vindtunnel i x_1 -retningen, [m]

F_y er x_2 komponenten af den aeroelastiske kraft på brotværsnittet i de enkelte elementer, [N]

n er antallet af elementer langs brotværsnittet, [-]

\tilde{u}_2 er amplituden for translationen, $\tilde{u}_2 = 0,5$ m

ω er den cirkulære frekvens, $\omega = \frac{2\pi}{T_{period}}$, [rad]

t er tiden, [s]

Indstillingerne fra tabel 5.2 gælder kun for lodret translation af tværsnittet. For simuleringer med roterende bevægelse af tværsnittet skal punkterne markeret med "†" i tabel 5.5 erstattes med indstillingerne defineret i tabel 5.6:

Tabel 5.6: Indstillinger for "Default Domain" for tidsafhængige simuleringer med rotation af tværsnittet

Faneblad	Indstilling	Værdi
Fluid Models	Additional Variables Details > Moment	Selected
	Additional Variables Details > Moment > Option	Algebraic Equation
	Additional Variables Details > Moment > Value	m_1
	Additional Variables Details > Rotation	Selected
	Additional Variables Details > Rotation > Option	Algebraic Equation
	Additional Variables Details > Rotation > Value	θ_1

Udtrykkene for m_1 og θ_1 er vha. CEL defineret til:

$$m_1 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n (F_z x_2 - F_y x_3) \tag{5.3}$$

$$\theta_1 = \tilde{\theta}_1 \sin(\omega t) \quad \text{for } 0 < t < t_{max}$$

hvor

x_2, x_3	er koordinaterne til brotværsnittet, [m]
F_z	er x_3 komponenten af den aeroelastiske kraft på de enkelte elementer langs brotværsnittet, [N]
$\tilde{\theta}_1$	er amplituden for den roterende bevægelse, $\tilde{\theta}_1 = 0,07$ rad

5.2.1 Randbetingelser

Randbetingelserne til modellen defineres som underpunkter til "Default Domain". Til modellen er der defineret 6 randbetingelser som er listet herunder:

- Bro
- Bund
- Inlet
- Outlet
- SymP
- Top

Af de seks randbetingelser er "Bund" og "Top" ens. Indstillingerne for randbetingelserne følger i de næste 5 tabeller.

Tabel 5.7: Indstillinger for randbetingelsen "Bro" for både stationære og tidsafhængige simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Boundary Type	Wall
Boundary Details	Wall Influence On Flow > Option	No Slip
	Wall Influence On Flow > Wall Velocity > Option	Cartesian Components
	Wall Influence On Flow > Wall Velocity > Wall U	$0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
	Wall Influence On Flow > Wall Velocity > Wall V	$0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
	Wall Influence On Flow > Wall Velocity > Wall W	$0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
	Mesh Motion > Option	Specified Displacement*
	Mesh Motion > X Component	$0 \text{ [m]}^{*\dagger}$
	Mesh Motion > Y Component	$u_2^{*\dagger}$
Mesh Motion > Z Component	$0 \text{ [m]}^{*\dagger}$	

* Skal ikke defineres for stationære simuleringer samt simuleringer uden bevægelse af tværsnittet

† Indstillingen gælder kun for simuleringer med lodret translation af tværsnittet

Indstillingerne i tabel 5.7 gælder ikke for simuleringer hvor tværsnittet udsættes for en rotation. For simuleringer med roterende tværsnit skal punkterne markeret med "†" erstattes med indstillingerne i tabel 5.8:

Tabel 5.8: Indstillinger for randbetingelsen "Bro" ved tidsafhængige simuleringer med rotation af tværsnittet

Faneblad	Indstilling	Værdi
Boundary Details	Mesh Motion > X Component	0 [m]
	Mesh Motion > Y Component	$x_{2,Rot}$
	Mesh Motion > Z Component	$x_{3,Rot}$

Udtrykkene $x_{2,Rot}$ og $x_{3,Rot}$ er defineret vha. CEL til:

$$\begin{aligned} x_{2,Rot} &= x_2 \cos(\theta_1) - x_3 \sin(\theta_1) - x_2 \\ x_{3,Rot} &= x_2 \sin(\theta_1) + x_3 \cos(\theta_1) - x_3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

5 Modelopbygning - Grundmodel

Randbetingelserne "Top" og "Bund" er defineret på domænets øverste og nederste vandrette flade med følgende indstillinger:

Tabel 5.9: Indstillinger for randbetingelserne "Top" og "Bund" gældende for alle typer af simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Boundary Type	Wall
Boundary Details	Wall Influence On Flow > Option	Free Slip
	Mesh Motion > Option	Stationery*

* Skal ikke defineres for stationære simuleringer samt simuleringer uden bevægelse af tværsnittet

For inløb og udløb er indstillingerne for randbetingelserne defineret i tabel 5.10 og tabel 5.11:

Tabel 5.10: Indstillinger for randbetingelsen "Inlet" gældende for alle typer af simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Boundary Type	Inlet
Boundary Details	Flow Regime > Option	Subsonic
	Mass And Momentum > Option	Cart. Vel. Components
	Mass And Momentum > U	$0 \left[\frac{m}{s} \right]$
	Mass And Momentum > V	$0 \left[\frac{m}{s} \right]$
	Mass And Momentum > W	$-V$
	Turbulence > Option	k and Omega
	Turbulence > Turb. Kinetic Energy	$0,005 \frac{m^2}{s^2}$
	Turbulence > Turb. Eddy Frequency	$500.000 s^{-1}$
	Mesh Motion > Option	Stationary*

* Skal ikke defineres for stationære simuleringer samt simuleringer uden bevægelse af tværsnittet

Tabel 5.11: Indstillinger for randbetingelsen "Outlet" gældende for alle typer af simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Boundary Type	Outlet
Boundary Details	Flow Regime > Option	Subsonic
	Mass And Momentum > Option	Average Static Pressure
	Mass And Momentum > Relative Pressure	0 [Pa]
	Pressure Averaging > Option	Average Over Whole Outlet
	Mesh Motion > Option	Stationary*

* Skal ikke defineres for stationære simuleringer samt simuleringer uden bevægelse af tværsnittet

For de to symmetriplaner er der ligeledes defineret en randbetingelse kaldet "SymP".

Tabel 5.12: Indstillinger for randbetingelsen for de to symmetriplaner "SymP" gældende for alle typer af simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Boundary Type	Symmetry
Boundary Details	Mesh Motion > Option	Unspecified*

* Skal ikke defineres for stationære simuleringer samt simuleringer uden bevægelse af tværsnittet

5.2.2 Begyndelsesbetingelser

Som tidligere beskrevet anvendes løsningen fra en konvergeret stationær simulering som begyndelsestilstand for de tidsafhængige simuleringer. Alternativt skal alle løste variable have defineret en begyndelsesværdi vha. indstillingen "Automatic with Value" for tidsafhængige simuleringer [ANSYS Inc., 2006b, p. 83]. Dvs. der skal manuelt defineres en værdi. Hvis der defineres en værdi som ikke passer til den aktuelle simulering ved $t = 0$, kan de første dele af resultaterne ikke bruges. Resultaterne kan først bruges, når effekten af begyndelsesværdien er dæmpet væk. Hvis der defineres en begyndelsesværdi som ikke passer til den aktuelle situation, er der risiko for at simuleringen bliver ustabil.

For at undgå disse problemer kan der anvendes en konvergeret løsning fra en stationær simulering som begyndelsesbetingelser [ANSYS Inc., 2006b, p. 83]. Konvergens for den stationære løsning opstår når alle værdier i beregningen har "normaliseret" sig og indflydelsen af evt. forkert definerede begyndelsesbetingelser er dæmpet bort. For at en konvergeret løsning fra en stationær simulering med succes kan anvendes som begyndel-

5 Modelopbygning - Grundmodel

sesbetingelser til en tidsafhængig simulering skal følgende være overholdt [ANSYS Inc., 2006b, pp. 94 - 95]:

1. Antallet af definerede randbetingelser i den nye simulering skal være det samme som i resultatfilen
2. Navne og placeringer for randbetingelserne skal være ens
3. Det anvendte beregningsnet skal være det samme
4. Referencetrykket skal være ens i begge modeller

Der findes dog en undtagelse fra punkt 3, hvis nettet f.eks. er blevet forfinet men domænerne ellers er ens. I dette tilfælde har CFX-Solver en mulighed for at interpolere begyndelsesbetingelserne fra den stationære løsning over på det nye net til den tidsafhængige løsning.

For den stationære løsning er begyndelsesbetingelserne lidt mindre væsentlige da en konvergeret løsning ikke skulle være påvirket af begyndelsesbetingelserne [ANSYS Inc., 2006b, p. 83]. Derimod kan der hurtigere opnås konvergens med fornuftige begyndelsesbetingelser. For de stationære simuleringer er der anvendt følgende begyndelsesbetingelser:

Tabel 5.13: Begyndelsesbetingelser for de stationære simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Global settings	Initial Conditions > Velocity Type	Cartesian
	Initial Conditions > Cartesian Velocity Components > Option	Automatic with Value
	Initial Conditions > Cartesian Velocity Components > U	$0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
	Initial Conditions > Cartesian Velocity Components > V	$0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
	Initial Conditions > Cartesian Velocity Components > W	$-V$
	Initial Conditions > Static Pressure > Option	Automatic with Value
	Initial Conditions > Static Pressure > Relative pressure	1 [Pa]
	Initial Conditions > Turbulence Kinetic Energy > Option	Automatic with Value
	Initial Conditions > Turbulence Kinetic Energy > Turbulence Kinetic Energy	Selected
	Initial Conditions > Turbulence Kinetic Energy > Turbulence Kinetic Energy > Value	$10^{-5} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$
	Initial Conditions > Turbulence Eddy Dissipation	Selected
	Initial Conditions > Turbulence Eddy Dissipation > Option	Automatic with Value
	Initial Conditions > Turbulence Eddy Dissipation > Omega	Selected
	Initial Conditions > Turbulence Eddy Dissipation > Omega > Turb. Eddy Frequency	$10^7 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$

5.2.3 Løsningsbetingelser

Til styring af CFX-Solver skal der defineres forskellige løsningsbetingelser som bl.a. inkluderer et konvergenzkriterie. For de tidsafhængige simuleringer anvendes indstillingerne i tabel 5.14:

5 Modelopbygning - Grundmodel

Tabel 5.14: Indstillinger for "Solver Control" gældende for alle tidsafhængige simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Advection Scheme > Option	High Resolution
	Transient Scheme > Option	Second Order Backward Euler
	Transient Scheme > Timestep Initialization > Option	Automatic
	Convergence Control > Max. Coeff. Loops	5
	Convergence Control > Fluid Timescale Control > Timescale Control	Coefficient Loops
	Convergence Criteria > Residual Type	RMS
	Convergence Criteria > Residual Tangent	10^{-5}

For de stationære simuleringer anvendes indstillingerne i tabel 5.15:

Tabel 5.15: Indstillinger for "Solver Control" gældende for stationære simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Basic settings	Advection Scheme > Option	High Resolution
	Convergence Control > Max. Iterations	100
	Convergence Control > Fluid Timescale Control > Timescale Control	Auto Timescale
	Convergence Control > Fluid Timescale Control > Length Scale Option	Conservative
	Convergence Control > Fluid Timescale Control > Timescale Factor	1, 0
	Convergence Criteria > Residual Type	RMS
	Convergence Criteria > Residual Tangent	10^{-5}

For de tidsafhængige simuleringer er det yderligere nødvendigt at definere indstillinger for "Output Control", som styrer hvilke output der skal være for hvert tidsstep.

Tabel 5.16: Indstillinger for "Output Control" gældende for tidsafhængige simuleringer

Faneblad	Indstilling	Værdi
Trn Results	Transient Results > Add New Item	Transient Results 1
	Transient Results > Transient Results 1 > Option	Selected Variables
	Transient Results > Transient Results 1 > File Compression	Default
	Transient Results > Transient Results 1 > Output Variables List	*
	Transient Results > Transient Results 1 > Output Frequency > Option	Time Interval
	Transient Results > Transient Results 1 > Output Frequency > Time Interval	10dt

* Density, Dynamic Viscosity, Eddy Viscosity, Lift, Moment, Lodret flytning**, Pressure, Turbulence Eddy Dissipation, Turbulence Eddy Frequency, Turbulence Kinetic Energy, Velocity, Vorticity X og Yplus

** Gælder kun for lodret translation af tværsnittet. For rotation af tværsnittet vælges: Rotation

6

Resultater - Grundmodel

Dette kapitel omhandler behandling af resultaterne fra simuleringerne med grundmodellen som er beskrevet i Bilag 5. Der er lavet 3 typer af simuleringer med grundmodellen: En stationær og to tidsafhængige simuleringer med tvungne bevægelser af brotværnsnittet, som er hhv. lodret translation og rotation. I det efterfølgende er nogle resultaterne fra de 3 typer af simuleringer præsenteret. Yderligere vises resultatet af beregningen af de 6 flutter-afledede, som er beskrevet i afsnit 4.3.

Hver af de 3 typer af simuleringer er udført med de 3 værdier af T_{period} , som er beskrevet i forbindelse med formel (5.1), $T_{period} = 15, 20, 25$ s. Det er nødvendigt med flere periodetider for at kunne beregne flere punkter på kurven for hver enkelt af de 6 flutter-afledede. Derimod er resultaterne fra de enkelte simuleringer af samme type (Stationær, lodret translation eller rotation) næsten ens for de 3 periodetider og der vil generelt kun blive præsenteret resultater for en af periodetiderne. I det følgende er der udelukkende præsenteret resultater fra simuleringerne med $T_{period} = 15$ s. For de resterende 2 periodetider er tendenserne de samme som for de præsenterede resultater.

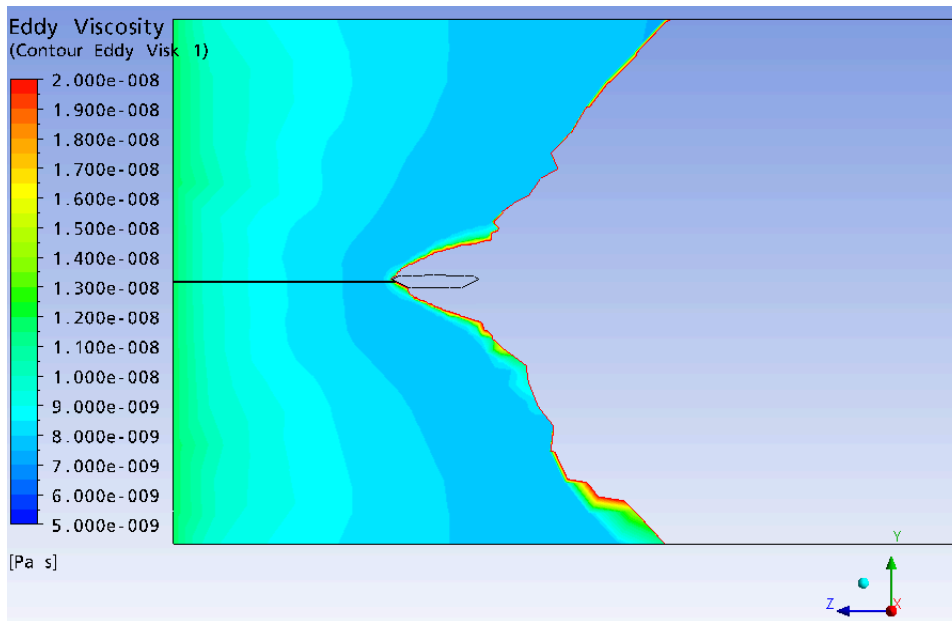
6.1 Stationær simulering

Som beskrevet i afsnit 5.2.2 anvendes den stationære simulering som begyndelsesbetingelser for de tidsafhængige simuleringer. De stationære simuleringer er yderligere et godt værktøj til at kontrollere at alt er som det skal være, uden forstyrrelserne fra et brodæk som bevæger sig.

Et af de væsentlige forhold som skal kontrolleres er den indkomne turbulens omkring brotværnsnittet. Turbulensen er væsentlig fordi den påvirker luftens egenskaber omkring broen. I simuleringerne beskrives turbulens vha. den såkaldte Eddy Viskositet, μ_T , som adderes til luftens molekyllære viskositet, μ . Hvis der er en høj turbulensintensitet i den indkomne luftstrøm vil brodækket reagere, som om den omstrømmende fluid har en højere viskositet end luft, hvilket f.eks. kunne være olie. Derfor kontrolleres det at μ_T er

6 Resultater - Grundmodel

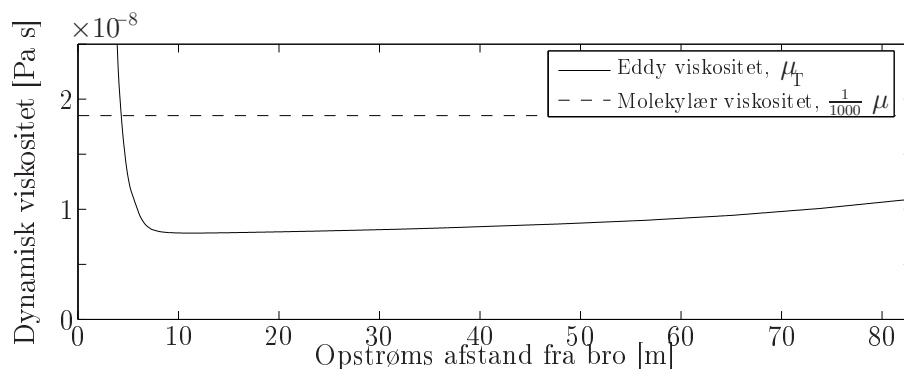
væsentlig mindre end μ opstrøms fra brotværsnittet. Figur 6.1 viser et konturplot af Eddy Viskositeten fra $5 \cdot 10^{-9}$ Pa s til $2 \cdot 10^{-8}$ Pa s.



Figur 6.1: Eddy viskositet, μ_T , som konturplot fra $5 \cdot 10^{-9}$ Pa s til $2 \cdot 10^{-8}$ Pa s

Som det fremgår af figur 6.1, er der et stort område bag ved broen, i forhold til strømretningen, som falder udenfor det plottede interval. Det skyldes turbulens genereret af brotværsnittet, som er væsentlig højere end turbulensen i den indkomne vind. Foran broen er der et svagt henfald af Eddy Viskositeten, som sikrer en lav værdi umiddelbart før broen.

Rent numerisk kontrolleres turbulensen i den indkomne vind ved at eksportere μ_T langs en ret linie fra Inlet RB til brotværsnittets forkant. Linien er markeret med sort på figur 6.1. På figur 6.2 er μ_T plottet langs linien fra figur 6.1 sammen med $\frac{\mu}{1000}$.

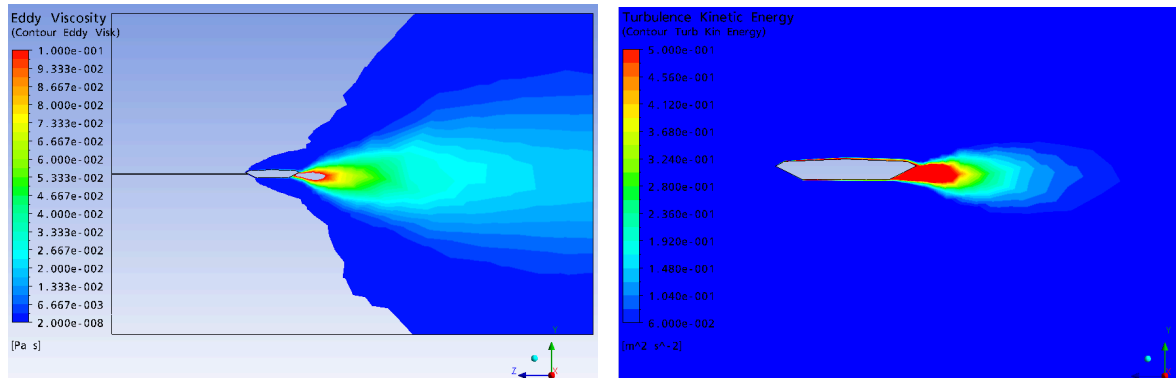


Figur 6.2: Eddy viskositet, μ_T , fra Inlet RB til broen forkant

Som det fremgår af figur 6.2, er μ_T mindre end $\frac{1}{1000}$ af μ hele vejen fra Inlet RB indtil ca. 7,5 m før broen. Den øgede Eddy Viskositet nær broen skyldes, som tidligere nævnt, broens forstyrrelser af strømningen. Da $\mu_T \ll \mu$, indtil kort før broen kan turbulensen

i den indkomne vind negligeres og dermed måles kun turbulens, som er genereret af brotværnsnittet.

Bag broen stiger Eddy Viskositeten hurtigt, hvilket fremgår af konturplottet på figur 6.3a, som viser Eddy Viskositeten fra $2 \cdot 10^{-8}$ Pa s til $0,1$ Pa s. Det skal bemærkes at det mørkeblå område dækker over et relativt stort interval, $2 \cdot 10^{-8}$ Pa s til $6,667 \cdot 10^{-3}$ Pa s, hvilket indikerer at der, specielt i nærheden af broen, findes høje gradienter i dette område.



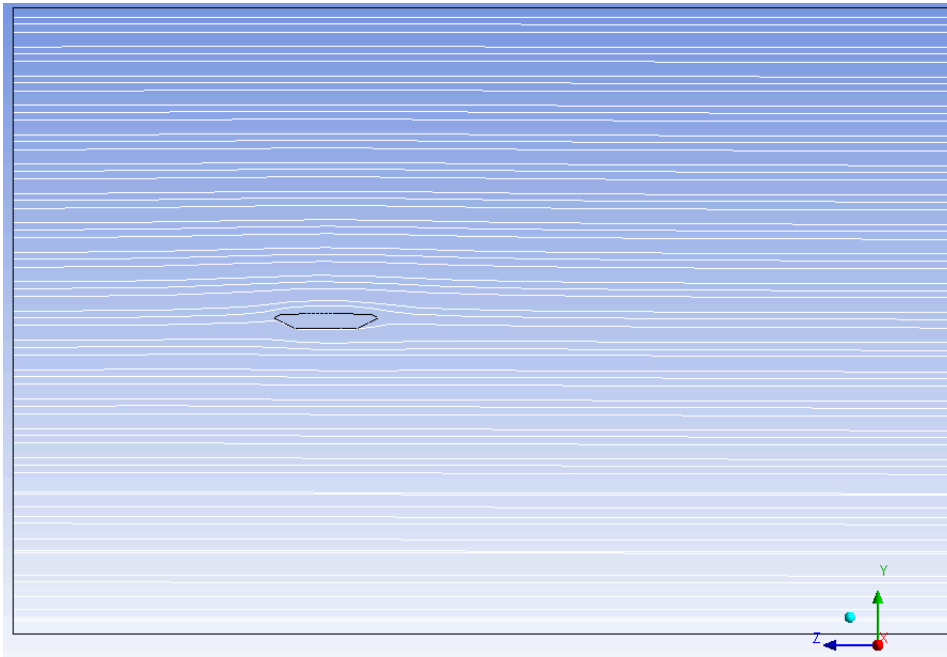
(a) Konturplot af Eddy Viskositeten fra $2 \cdot 10^{-8}$ Pa s til $0,1$ Pa s

(b) Konturplot af den turbulente kinetiske energi for et udsnit af domænet

Figur 6.3: Eddy viskositet og turbulent kinetisk energi

Yderligere bemærkes det, at lige bag broen findes et område, hvor Eddy Viskositeten er højere end $0,1$ Pa s som er den maksimale grænse for plottet. Sammenlignes dette område med det røde område på figur 6.3b, fremgår det at det er i dette område at den turbulente kinetiske energi er koncentreret.

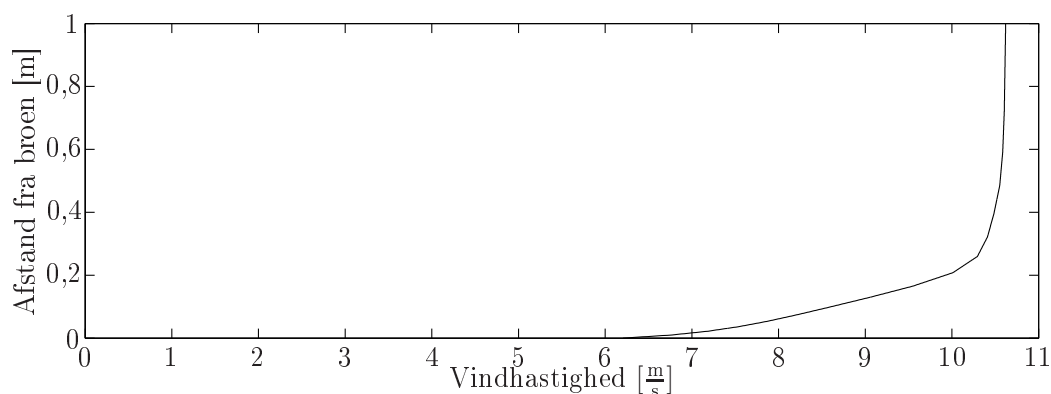
Dernæst er det kontrolleret om vindens hastighed forløber som forventet gennem hele domænet. På figur 6.4 er strømlinierne plottet med det formål at kontrollere strømningens forløb.



Figur 6.4: Strømlinier gennem hele domænet

Som forventet er strømlinierne vandrette i toppen og bunden af domænet. Omkring broen krummer strømlinierne lidt op eller ned hhv. over eller under broen. Dermed er det konstateret at der ikke er væsentlige forstyrrelser i middelvindhastigheden og dennes retning.

Efterfølgende er det kontrolleret, om modellen udvikler et tilfredsstillende hastighedsprofil i grænselaget omkring brodækket. Vindhastighederne til fremstilling af hastighedsprofilen er udtaget langs en linie vinkelret på en af brodækkets overflader, langt fra hjørner eller andre uregelmæssigheder i profilet.



Figur 6.5: Hastighedsprofil vinkelret på brodækkets overflade

Af figur 6.5 fremgår det, at hastighedsprofilet ikke umiddelbart rammer $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ved broens overflade. Det skyldes kun, at den første værdi som er eksporteret til plottet er hastigheden i det første element udenpå broprofilet. Tykkelsen af dette element er, jf. tabel 5.2, 10 mm og den høje værdi som beregnes i det første element skyldes de høje hastighedsgradierer der findes så tæt på broens overflade. Vindens hastighed på broens overflade

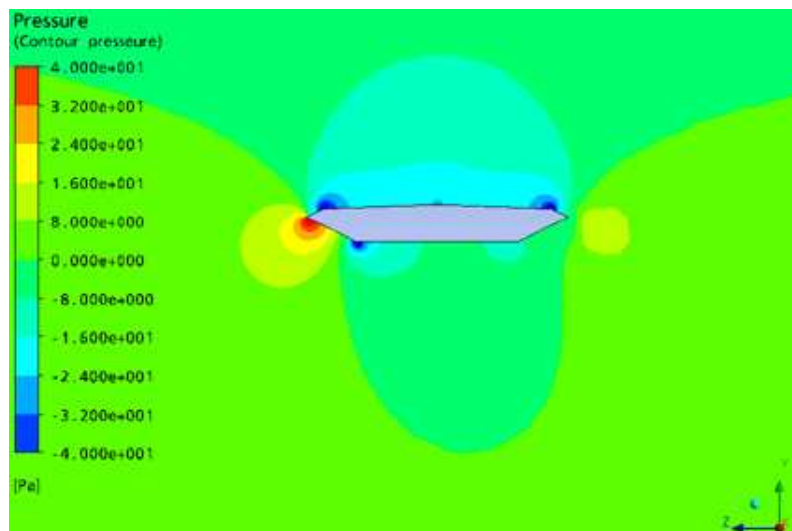
er specificeres til $0 \frac{m}{s}$ vha. Bro RB fra tabel 5.7.

Derudover kan det konstateres at hastighedsprofilen har den form som det var forventet i ud fra grænselagsteori, eksempelvis [Brorsen, 2005, kap. 4]. Med de indstillinger for "Inflation Layer" som er defineret i tabel 5.2 er dette $\simeq 0,7$ m tykt. Da hastighedsprofilen på figur 6.5 har næsten lodret tangent i en afstand af 0,7 m fra brotværsnittet er hastighedsgradienterne små og dermed betragtes tykkelsen af "Inflation Layer" som tilstrækkelig.

Når beskrivelsen af hastighederne tæt på brodækket er gode antages det at beskrivelsen af lasterne på broen også er gode. Når lasterne er godt beskrevet kan der beregnes præcise parametre på baggrund af simuleringen.

6.2 Tidsafhængige simuleringer

Som tidligere beskrevet er der udført to forskellige typer af tidsafhængige simuleringer med grundmodellen: Lodret translation og rotation. Tværsnittet tvinges til at udføre bevægelserne og hvilket medfører at strømmingen omkring tværsnittet ændres og dermed også lasterne på tværsnittet. Kræfterne på brosektionen fremkommer ved at integrere trykket omkring brosektionen over arealet. På figur 6.6 er trykket omkring brosektionen vist for simuleringen med lodret translation til $t = 0$ s.



Figur 6.6: Trykfordeling i domænet for simuleringen med lodret translation til $t = 0$ s

Som forventet opstår der områder med forøget tryk umiddelbart foran og bag ved brotværsnittet. Foran broen, hvor trykforøgelsen er størst, skyldes det at vinden bremses når den skal forsøge at komme udenom broen. Bag broen opstår der en forøgelse af trykket når strømningerne fra over- og undersiden af broen støder sammen. Figur 6.6 viser yderligere at der opstår områder med undertryk omkring tværsnittets hjørner samt at trykket over profilet er mindre end trykket under profilet. Dermed forventes det at den totale lift-kraft på tværsnittet er positiv for $t = 0$ s. Da trykfordelingen ikke er symmetrisk omkring x_2 -aksen forventes yderligere at $m_1 \neq 0$.

6 Resultater - Grundmodel

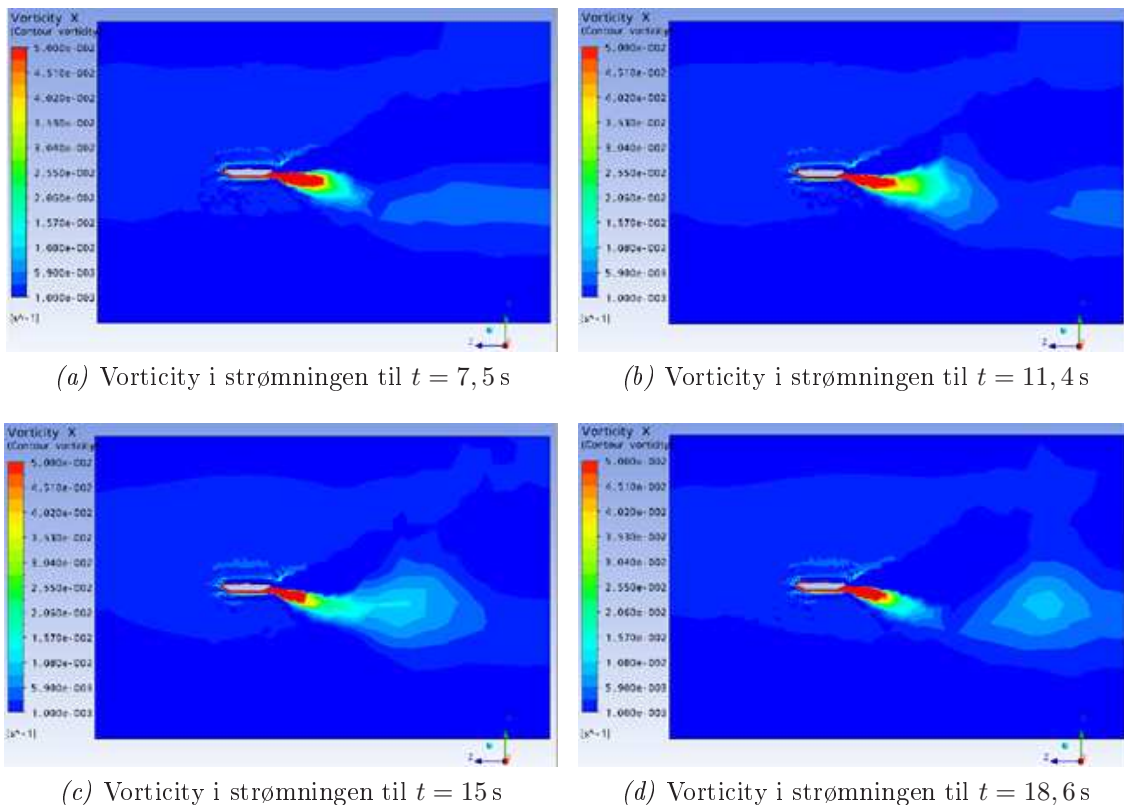
Når tværsnittet bevæges i strømmingen ændres trykfordelingen og der genereres turbulens i form af store eller små hvirvler i strømmingen. Hvirvlerne beskrives ved parameteren vorticity, w , som er givet ved:

$$w = \left| \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right| \quad (6.1)$$

hvor

V_2, V_3 er vindhastighedens komponenter i hhv. x_2 - og x_3 -retningen

Figur 6.7 viser et kontorplot af w i strømmingen for simuleringen med lodret translation til 4 forskellige tider.

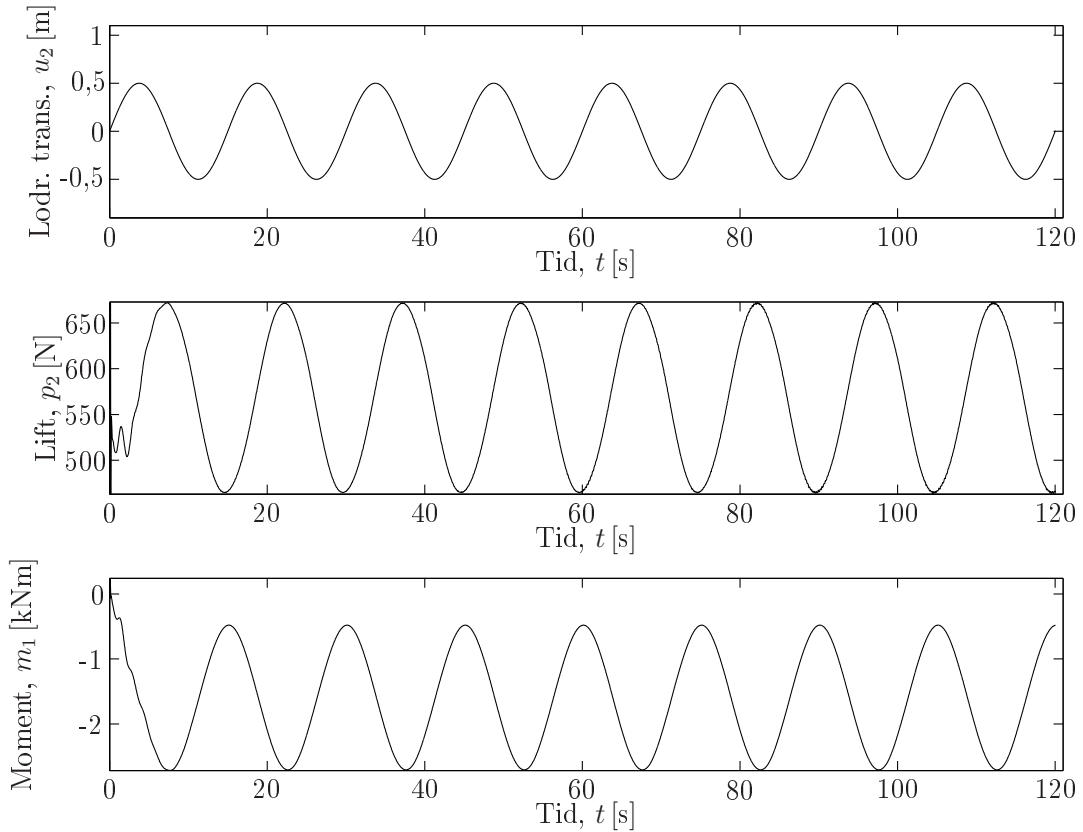


Figur 6.7: De turbulensgenererede hvirvler i strømmingen beskrevet ved vorticity, w , for simulering med lodret translation

Til $t = 7,5$ s er bevægelsen af tværsnittet halvvejs gennem første periode og har dermed nået nulpunktet for flytningen. Herfra fremgår det af figur 6.7 at hvirvlerne begynder at vandre væk fra broen i strømmingens retning samt at intensiteten langsomt mindskes. Hvirvlen dannes ved maksimal negativ flytning, svarende til $t = 11,4$ s, og vandrer bagud mens broen bevæges opad igen. Da der ikke opstår en tilsvarende hvirvel ved maksimal positiv flytning, er der ikke tale om rytmisk hvirvelafføsnig. På

[DVD\Video\Grundmodel\] findes videoklip med trykfordeling og vorticity for simuleringerne med lodret translation og rotation. Af disse videoklip fremgår det tydeligt at der ikke er tale om rytmisk hvirvelafløsning.

For simuleringen med lodret translation af brotværsnittet er følgende signaler plottet på figur 6.8: Den beregnede tvungne translationsbevægelse, $u_2 = \tilde{u}_2 \sin(\omega t)$, den simulerede lift-kraft, p_2 , og det simulerede moment, m_1 . Den cirkulære frekvens ω er givet ved:

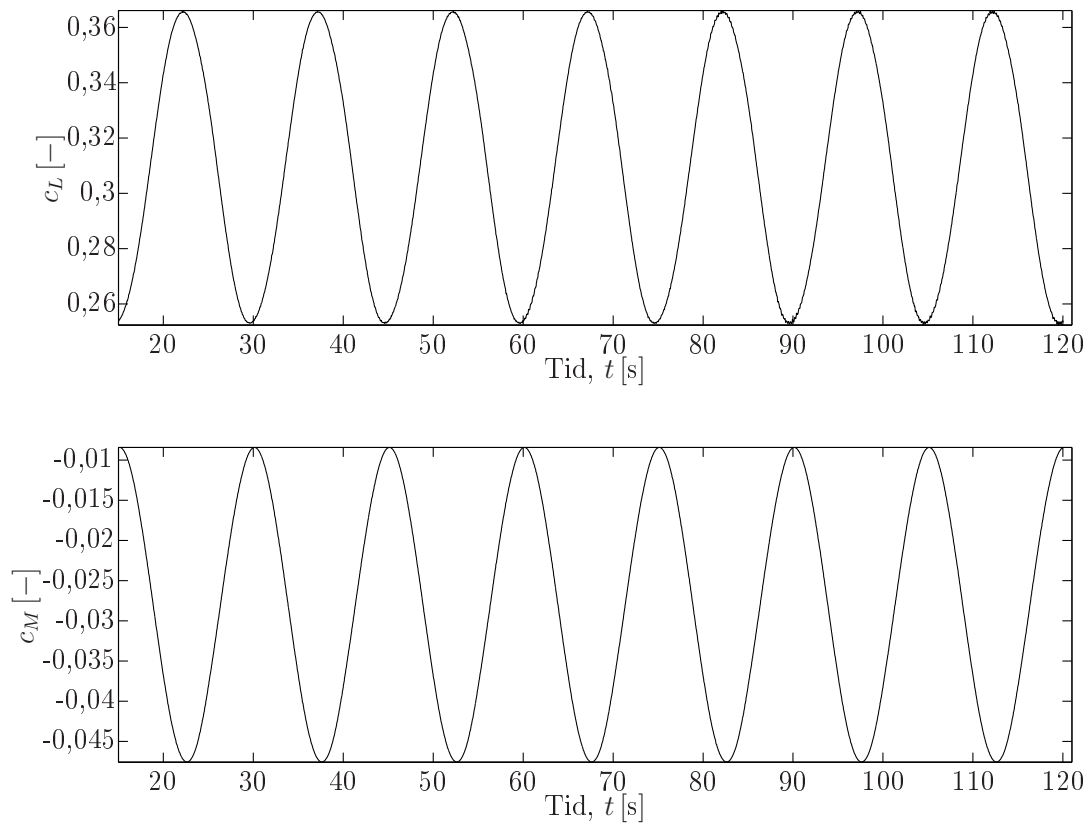
$$\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{period}}}.$$


Figur 6.8: Lodret translation, u_2 , lift-kraft, p_2 , og momentet, m_1

Som det fremgår af figur 6.8 er p_2 - og m_1 -signalerne uregelmæssige i starten af simuleringen. For at undgå at disse uregelmæssigheder fører til fejl i de videre beregninger, er alle registreringer indenfor den første periodetid udeladt i den videre behandling af resultaterne. Det bemærkes at lift-kraften, p_2 , ser ud til at svinge sammen med bevægelsen af tværsnittet, u_2 , blot med lille faseforskydning. Derudover svinger momentet, m_1 , modsat p_2 og dermed også u_2 .

Da figur 6.8 viser, at både p_2 og m_1 varierer harmonisk med konstant amplitude, er antagelserne beskrevet i forbindelse med afsnit 4.3 gyldige. Ud fra p_2 - og m_1 -signalerne er lift- og moment-koefficienten bestemt vha. formel (4.39). Lift- og moment-koefficienten er plottet på figur 6.9.

6 Resultater - Grundmodel

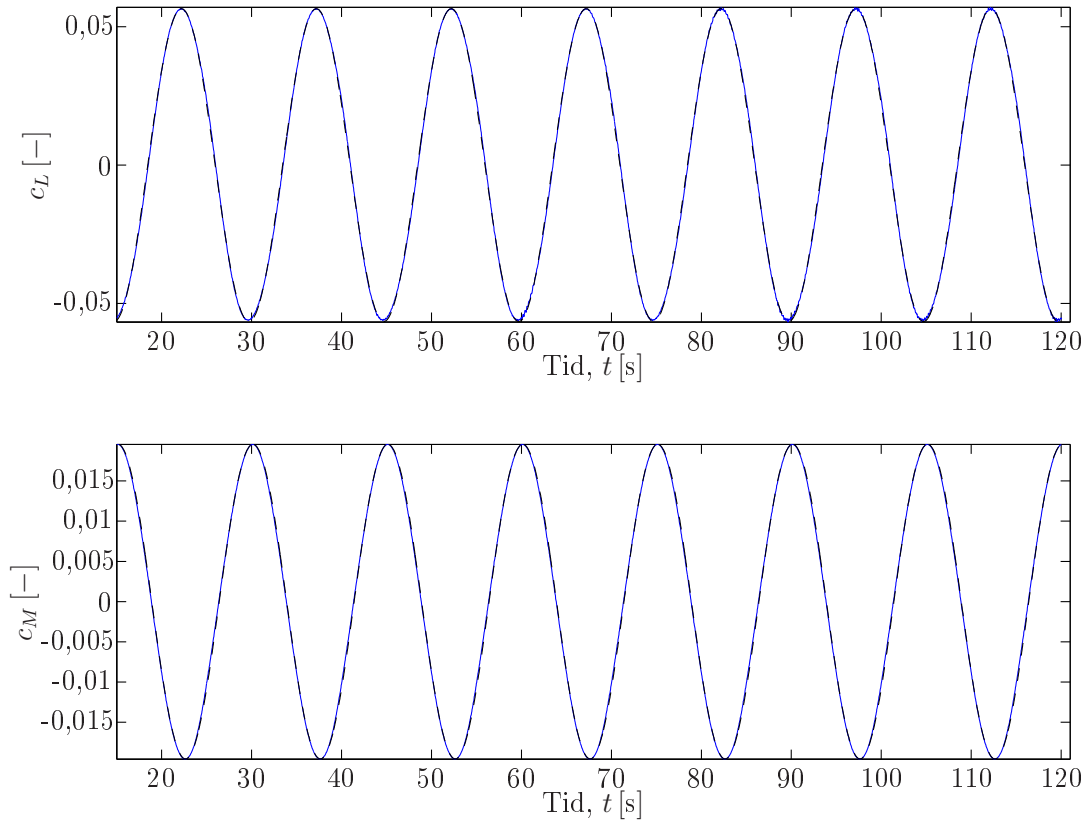


Figur 6.9: Lift- og moment-koefficienterne c_L og c_M

Den konstante amplitude for hhv. lift- og momentkoefficienten, \tilde{c}_L og \tilde{c}_M , bestemmes ud fra kurverne på figur 6.9. Amplituden bestemmes som den halve forskel mellem det maksimale og det minimale udslag indenfor en periode. Herefter midles amplituderne fra hver periode, hvilket giver en mulighed for at kontrollere, om signalet virkelig har tilnærmelsesvis konstant amplitude inden for det betragtede tidsinterval. Amplituden for den lodrette translation, \tilde{u}_2 , er defineret som input til simuleringen: $\tilde{u}_2 = 0,5$ m. Den reducerede frekvens, K , beregnes ud fra formel (4.8) vha. 3 andre inputparametre: $B = 31$ m, jf. figur 4.2, $V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, jf. kommentarer til formel (5.1) og $\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{period}}}$.

Således resterer der kun 2 parametre fra formel (6.3) som ikke er defineret: faseforskydningerne, ϕ_L og ϕ_M . Faseforskydningerne bestemmes ved fitning af en kurve på samme form som bevægelsen er defineret ud fra. Dermed er formen på den fittede kurve:

$c = \pm\tilde{c} \sin(\omega t - \phi)$. Som det også fremgår af figur 6.10 svinger c_L og c_M næsten modfase mens c_L svinger tilsvarende bevægelsen. Således fittes signalet for c_L til en kurve på formen $c_L = \tilde{c}_L \sin(\omega t - \phi_L)$, mens signalet fra c_M (som er i modfase) fittes til en kurve på formen $c_M = -\tilde{c}_M \sin(\omega t - \phi_M)$. De fittede kurver er vist på figur 6.10 sammen med signalerne fra c_L og c_M , som er fratrukket deres respektive middelværdier.



Figur 6.10: Kurvefit (—) til c_L og c_M (—)

Kurverne er fittes vha. mindste kvadraters metode og det giver følgende faseforskydninger:

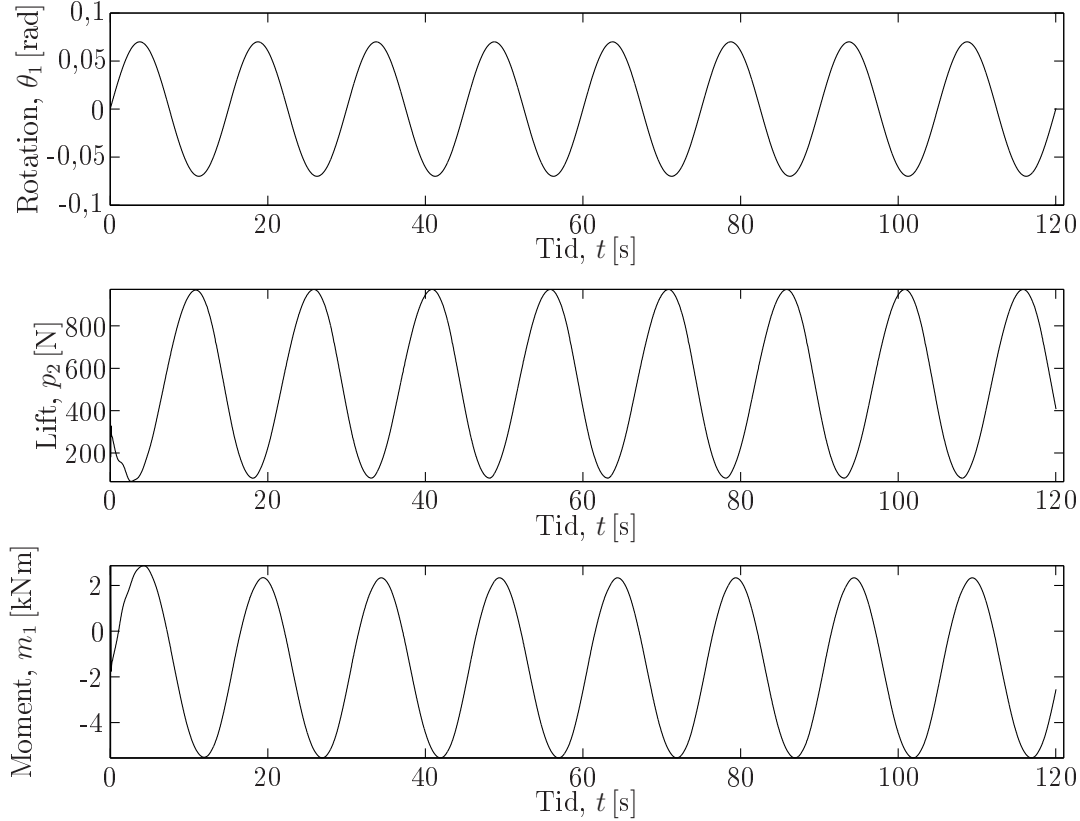
$$\begin{aligned}\phi_L &= 1,15 \text{ rad} \\ \phi_M &= 1,63 \text{ rad}\end{aligned}\tag{6.2}$$

Ud fra resultaterne af simuleringerne med lodret translation er de første 2 flutter-afledede fra formel (4.43) beregnet. Det er H_1^* og A_1^* som er givet ved:

$$\begin{aligned}H_1^* &= \text{Im}\left(\frac{\tilde{c}_L B e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{u}_2}\right) \\ A_1^* &= \text{Im}\left(\frac{\tilde{c}_M B e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{u}_2}\right)\end{aligned}\tag{6.3}$$

6 Resultater - Grundmodel

For simuleringen med rotation af tværsnittet er signalerne for rotationen, θ_1 , lift-kraften, p_2 , og momentet, m_1 , plottet på figur 6.11.



Figur 6.11: Rotation, θ_1 , lift-kraft, p_2 , og moment, m_1

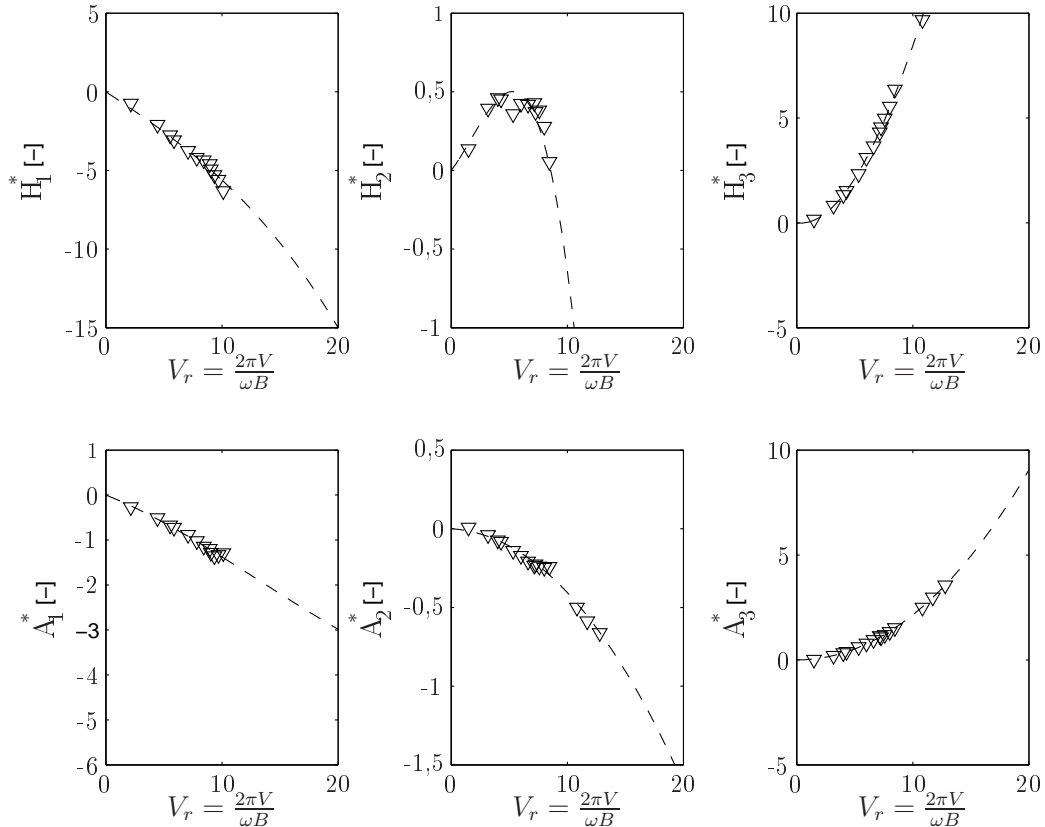
Af figur 6.11 fremgår det at lift-kraften, p_2 , næsten svinger i modfase med bevægelse mens momentet, m_1 , næsten svinger i fase med bevægelsen. Det er således lift-koefficienten, c_L , som skal fittes til en kurve på formen $c_L = -\tilde{c}_L \sin(\omega t - \phi_L)$ mens moment-koefficienten, c_M , fittes til en kurve på formen $c_M = \tilde{c}_M \sin(\omega t - \phi_M)$. Ellers er fremgangsmåden i databehandlingen den samme som beskrevet for simuleringen med lodret translation. De resterende 4 udtryk fra formel (4.43) anvendes til at beregne H_2^* , H_3^* , A_2^* og A_3^* :

$$\begin{aligned} H_2^* &= \text{Im}\left(\frac{\tilde{c}_L e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{\theta}_1}\right), & H_3^* &= \text{Re}\left(\frac{\tilde{c}_L e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{\theta}_1}\right) \\ A_2^* &= \text{Im}\left(\frac{\tilde{c}_M e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{\theta}_1}\right), & A_3^* &= \text{Re}\left(\frac{\tilde{c}_M e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{\theta}_1}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Værdierne til formel (6.4) findes på tilsvarende vis som værdierne til formel (6.3).

6.3 Flutter-afledede

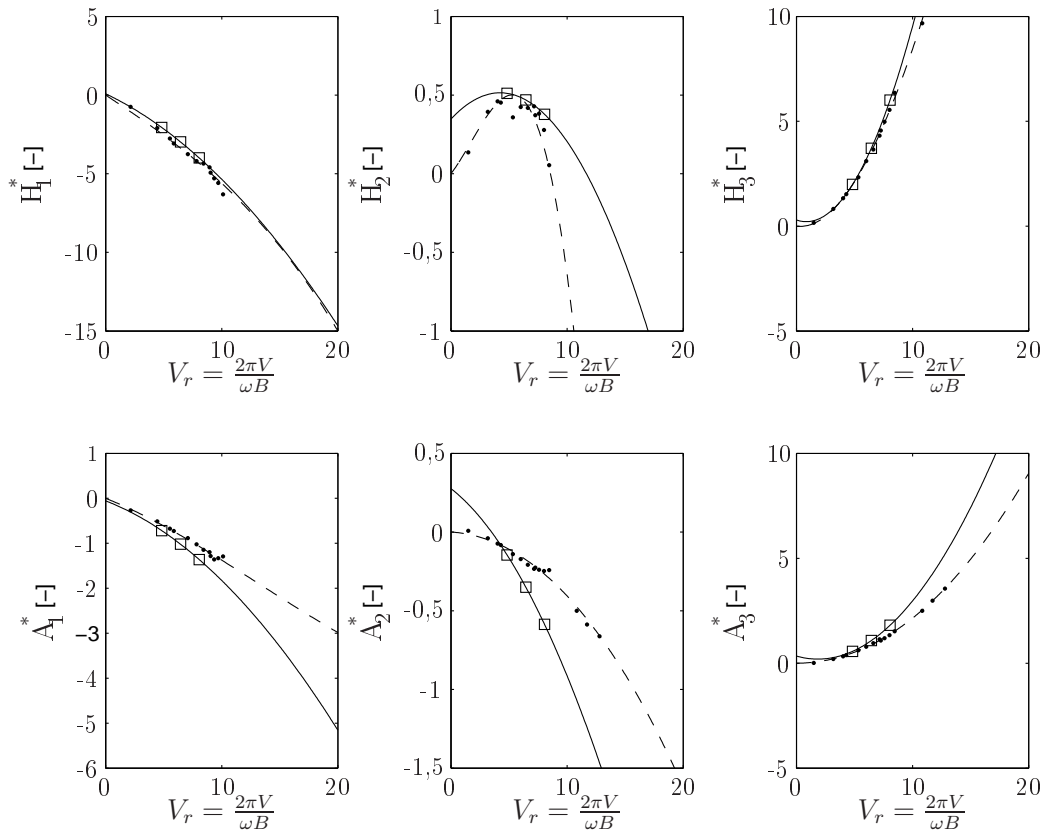
De flutter-afledede som er beregnet vha. formel (6.3) og (6.4), er sammenlignet med de aktuelle flutter-afledede fra projekteringen af Storebæltsbroen. De oprindelige flutter-afledede fra projekteringen af Storebæltsbroen er beregnet på baggrund af vindtunnelforsøg udført hos Danish Maritime Institute (DMI). Vindtunnelforsøgene er udført på en 1:100-model og udleveret som bilag til [Thorbek, 1997]. De oprindelige flutter-afledede fra Storebæltsbroen er i det efterfølgende omtalt som DMI's resultater.



Figur 6.12: DMI's flutter-afledede, (∇) samt et 3. grads polynomiefit til data fra DMI ($- -$) [Thorbek, 1997]

På figur 6.12 er der ligeledes plottet et 3. grads polynomiumfit til DMI's data. Koefficienterne til polynomiet er ligeledes udleveret som bilag til [Thorbek, 1997].

På figur 6.13 er de beregnede flutter-afledede fra formel (6.3) og (6.4) plottet. På samme figur er resultater fra vindtunnelforsøg udført af DMI plottet incl. det tilhørende fittede polynomium. Figur 6.13 viser ligeledes polynomiefit til de nye CFD data, som er udført vha. mindste kvadraters metode.



Figur 6.13: Flutter-afledede for grundmodellen. (\square) CFD-resultater fra dette projekt, (—) 2. grad polynomiefit til CFD-resultater fra dette projekt, (\bullet) Vindtunneldata fra DMI, (---) 3. grads polynomiefit til data fra DMI

Som det fremgår af figur 6.13, er der forskel på hvor godt de beregnede flutter-afledede ligger i forhold til DMI's resultater. De fleste punkter fra CFD-simuleringerne ligger tæt på resultaterne fra vindtunnelen. For A_1^* , A_3^* og specielt A_2^* stiger afvigelsen fra DMI's resultater med øgede værdier af V_r . De fittede kurver afviger mere, men det skyldes det få antal punkter kurverne er fittet efter.

Som et mål for nøjagtigheden af de opnåede resultater er punkterne, som er beregnet vha. CFD, fittet til kurverne fra DMI's resultater vha. mindste kvadraters metode. I tabel 6.1 er den samlede fejl for hver af de 6 flutter-afledede samt deres sum listet.

Tabel 6.1: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM) i forhold til DMI's data

	GM (\square)
H_1^*	0,43
H_2^*	0,05
H_3^*	0,22
A_1^*	0,14
A_2^*	0,13
A_3^*	0,23
Total	1,20

Som det fremgår af tabel 6.1 stammer det væsentligste bidrag til den totale fejl fra H_1^* . Det skyldes at intervallet på akse er højere end eksempelvis akse for A_2^* som umiddelbart har den største afvigelse. Forskellen på akse betyder f.eks., at fejlen for punktet svarende til $V_r = 8,06$ er af samme størrelsesorden for A_1^* end for A_2^* . Derfor beregnes fejlen for H_1^* større, selvom punkterne umiddelbart ligger tættere på DMI's resultter end punkterne for A_2^* . Den totale fejl giver således et mål for forskellen mellem de beregnede punkter, men samtidig skal det kontrolleres, om tendenserne i de fittede kurver er de samme.

En eksporteret light udgave af resultatfilerne samt programmet der er anvendt til databehandling findes på: `[DVD\CFD\2DOF\Grundmodel\RES\]`. Her findes ligeledes alle de grafer som er fremstillet under databehandlingen.

7

Parametervariation

Dette kapitel behandler resultaterne af forskellige ændringer i de inputparametre, som er defineret i kapitel 5. Ændringerne sker i forhold til indstillingerne defineret i afsnit 5.1 for at optimere beregningsnettet. De parametre som varieres er listet herunder:

1. Tæthed af beregningsnet
 - (a) Inflation Layers omkring broen
 - (b) Forfinet net omkring broen
 - (c) Forfinet net nedstrøms fra broen
 - (d) Generel forfining af hele nettet
2. Domænets størrelse

Generelt udføres parametervariationen således at for hvert nyt punkt i ovenstående liste defineres 2 nye CFD-modeller som sammen med grundmodellen giver i alt 3 resultater at sammenligne. For hver model køres der simuleringer med 3 forskellige cirkulære frekvenser svarende til de 3 som blev anvendt til grundmodellen der er beskrevet i kapitel 5.

7.1 Inflations Layers

Den første input parameter som kontrolleres er, jf. punkt 1.a i ovenstående liste, det såkaldte Inflation Layer omkring broen. Da hastighedsprofilen fra grundmodellen, figur 6.5, har en relativt høj værdi som første punkt over overfladen på broen er det valgt at definere to modeller med en finere inddeling af Inflation Layer. Det kan således vurderes om elementstørrelsen fra grundmodellen er tilstrækkelig eller om den skal gøres mindre. De to modeller omtales i det følgende som "Inf1" og "Inf2". De præsenterede resultater i dette afsnit er, ligesom i kapitel 6, fra simuleringen med $T_{period} = 15$ s.

7 Parametervariation

7.1.1 Modelopbygning - Inf1 og Inf2

Ændringerne i forhold til grundmodellen hører alle under punktet "Inflation", som er defineret i tabel 5.2. Da der er tale om ændringer af nettet, defineres de nye indstillinger i programmet "CFX-Mesh". De nye indstillinger er listet i tabel 7.1 og 7.2 for hhv. Inf1 og Inf2. Tabellerne viser kun de punkter, som skal ændre i forhold til grundmodellen.

Tabel 7.1: Nye indstillinger for "Inflation" for Inf1

Punkt	Indstilling	Værdi
Inflation	Number of Inflation layers	20
Inflation Option	First Prism Height [m]	0,005

Tabel 7.2: Nye indstillinger for "Inflation" for Inf2

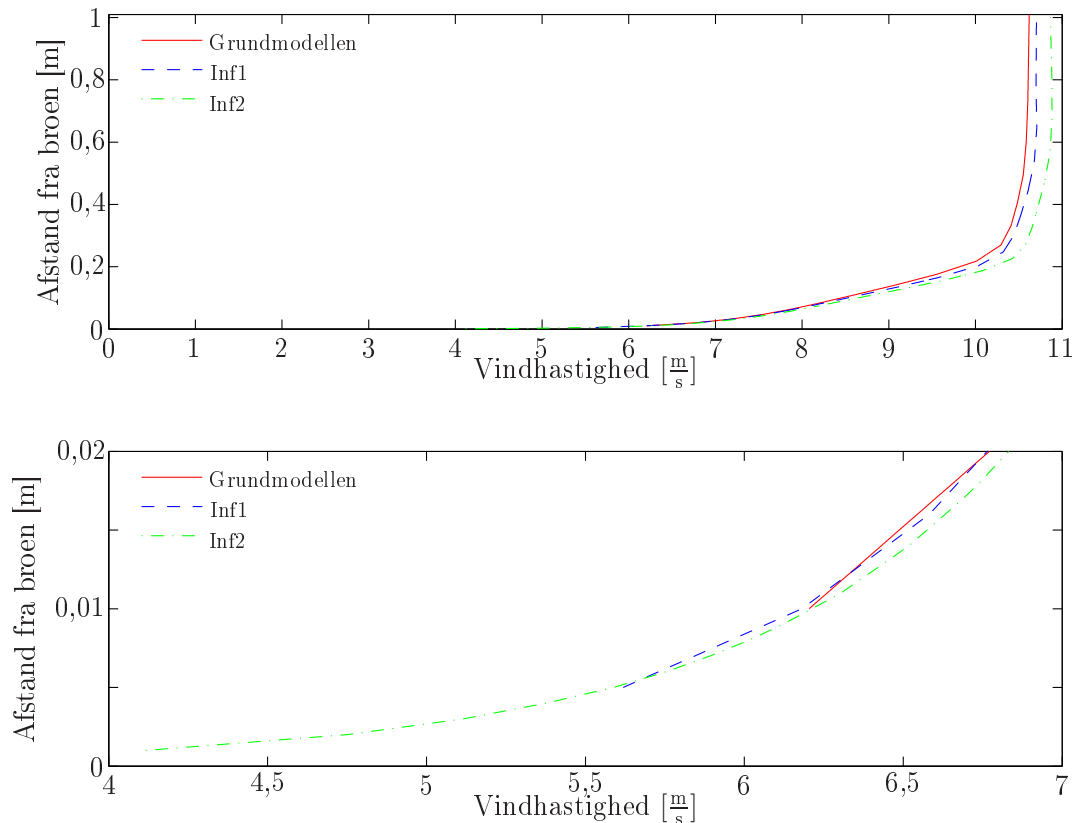
Punkt	Indstilling	Værdi
Inflation	Number of Inflation layers	30
Inflation Option	First Prism Height [m]	0,001

I forhold til grundmodellen er tykkelsen for det første lag ændret fra 10 mm til 5 mm og 1 mm for hhv. Inf1 og Inf2. For at bevare en samlet tykkelse af Inflation layer på ~ 1 m er antallet af lag øget fra 15 til 20 og 30 for de to nye modeller. Dermed øges antallet af elementer fra 8.694 til 10.052 og 12.708. Alle resterende indstillinger er de samme som der er defineret for grundmodellen i kapitel 5.

7.1.2 Resultater - Inf1 og Inf2

For de stationære simuleringer består kontrollen af resultaterne hovedsageligt i at kontrollere, om løsningen er konvergeret tilfredsstillende, samt om Eddy viskositeten er henfaldet til en værdi, som er væsentlig lavere end den molekylære viskositet. Begge disse forhold er overholdt for de stationære simuleringer og føres dermed videre over i de tidsafhængige simuleringer.

Den væsentligste forskel mellem grundmodellen og Inf1 samt Inf2 er at antallet af meget tynde lag tæt ved brotværsnittet er forøget væsentligt, hvilket giver en bedre beskrivelse af hastighedsprofilen tæt ved tværsnittet.

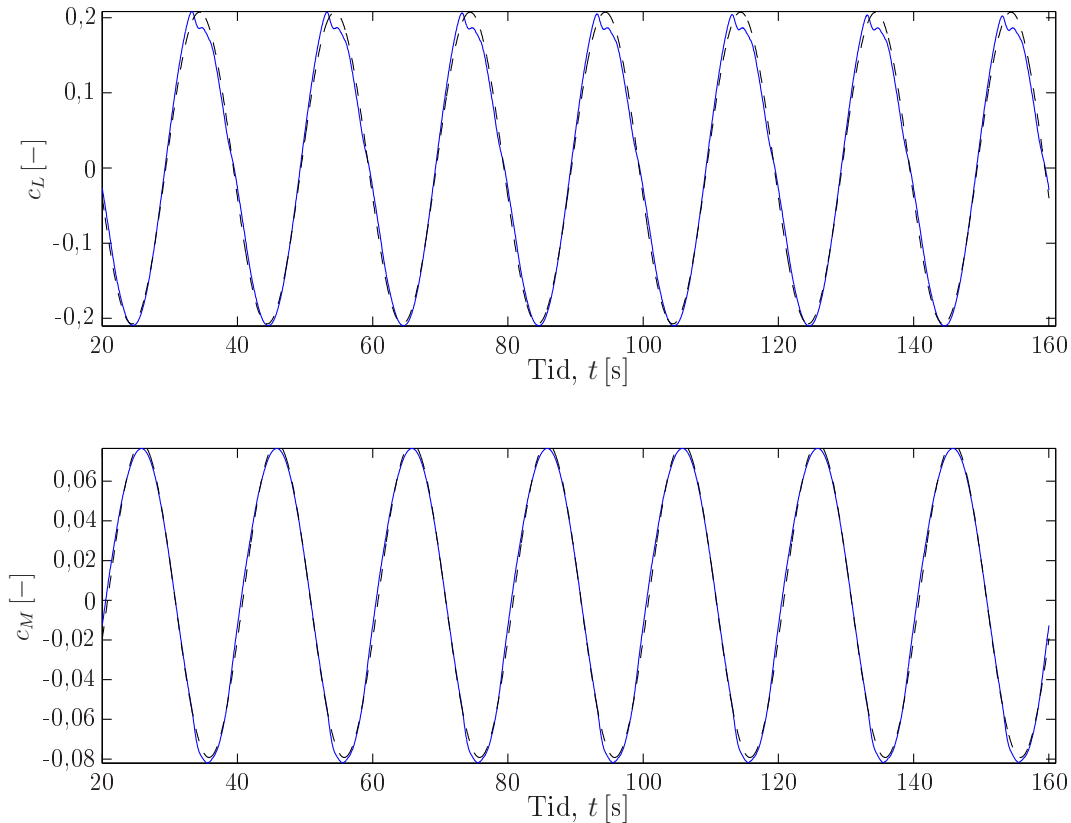


Figur 7.1: Hastighedsprofiler fra grundmodellen, Inf1 og Inf2

På figur 7.1 er hastighedsprofilerne fra grundmodellen, Inf1 og Inf2 plottet. Effekten af at minimere tykkelsen af det første Inflation layer betyder umiddelbart at det første punkt på hastighedsprofilerne kommer tættere på $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uden helt at blive det. Umiddelbart ser alle 3 kurver dog ud til at kunne fortsætte mod $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hvis der blev foretaget en yderligere forfining af nettet i dette område. I den anden ende af kurverne er der til gengæld forskel på den maksimale hastighed som de 3 modeller beregner. Grundmodellen beregner en maksimal hastighed på $10,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mens Inf1 og Inf2 beregner den maksimale hastighed til hhv. $10,71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ og $10,88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ indenfor det betragte område.

CFD-modellens væsentligste formål er, i dette projekt, at supplere data til beregningen af flutter-afledede for den betragtede bro. Til denne beregning anvendes signaler fra lift-kraften og momentet til beregning af c_L og c_M . Det væsentligste for simuleringerne er således at kunne beregne pæne harmonisk svingende kraftsignaler svarende til den harmoniske bevægelse som tværsnittet udsættes for. For Inf1 og Inf2 er kraftsignalerne generelt pæne med et par enkelte undtagelser. Det drejer sig om lift-kraften for simuleringerne med roterende tværsnit ved periodetiderne 15 s og 20 s for Inf1. Et eksempel på de omtalte signaler er vist på figur 7.2.

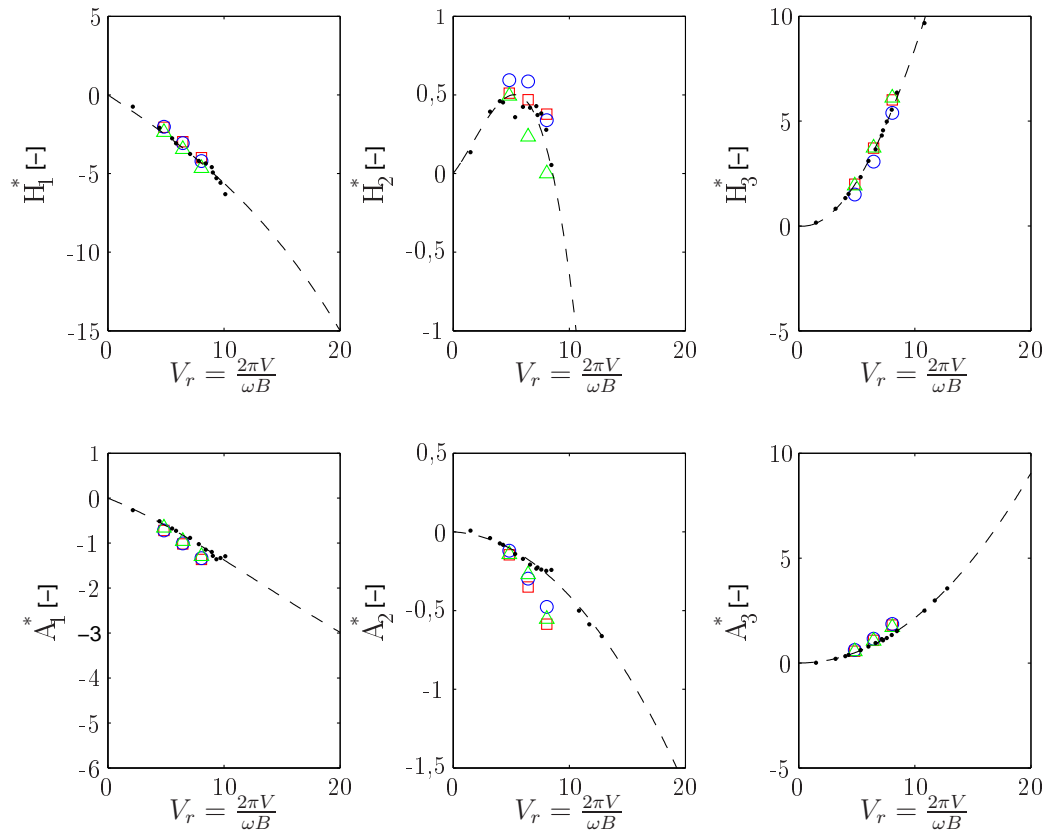
7 Parametervariation



Figur 7.2: Kraftkoefficienter fra simuleringen med roterende tværsnit (-) for $Inf1$ ved $T_{period} = 20$ s samt en fittet kurve (- -) på formen $c = \pm \tilde{c} \sin(\omega t - \phi)$. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Som det fremgår af figur 7.2 er der nogle uregelmæssigheder i signalet fra lift-kraften omkring den maksimale positive udsving. Det ses at uregelmæssigheden er tilnærmelsesvis ens for alle 8 perioder samt at amplituden passer med den maksimale negative amplitude. Derfor ligger den fittede kurve godt i forhold til de målepunkter som passer med et harmonisk forløb for c_L . Da signalet for c_L er godt nok til at fitte en kurve med det forventede udseende forventes det ikke, at uregelmæssighederne har indflydelse på resultaterne. De samme betragtninger gælder for det resterende tilfælde, hvor der er observeret uregelmæssigheder i signalet fra c_L for roterende tværsnit.

På baggrund af de udførte simuleringer er der beregnet et sæt flutter-afledede for hver af de to modeller. De nye flutter-afledede er plottet på figur 7.3, sammen med de flutter-afledede som er beregnet på baggrund af grundmodellen og er vist på figur 6.13.



Figur 7.3: Flutter-afledede fra grundmodellen (\square), Inf1 (\circ) og Inf2 (\triangle) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($- -$)

Af figur 7.3 fremgår det at de flutter-afledede beregnet på baggrund af Inf1 og Inf2 er stort set identiske med resultaterne fra grundmodellen for H_1^* , A_1^* og A_3^* som i forvejen ligger ret tæt på DMI's resultater. For H_3^* og A_2^* ligger punkterne fra specielt Inf1 lidt bedre end dem fra grundmodellen. For H_2^* er der ikke noget generelt billede af resultaterne. For at kunne vurdere det samlede billede er der foretaget en omvendt fitning af punkterne (\square), (\circ) og (\triangle) til kurven ($- -$) vha. mindste kvadraters metode. Dermed er fejlen fra de 3 simuleringer i forhold til DMI's data beregnet. Resultatet er vist i tabel 7.3.

7 Parametervariation

Tabel 7.3: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM), Inf1 og Inf2 i forhold til DMI's data

	GM (□)	Inf1 (○)	Inf2 (△)
H_1^*	0,43	0,30	0,12
H_2^*	0,05	0,06	0,07
H_3^*	0,22	0,50	0,34
A_1^*	0,14	0,12	0,07
A_2^*	0,13	0,06	0,09
A_3^*	0,22	0,32	0,14
Total	1,20	1,36	0,83

Af tabel 7.3 fremgår det at den totale fejl for Inf2 er den mindste, mens Inf1 giver den største fejl. Det fremgår også at det hovedsageligt er for H_3^* , at Inf1 taber terræn i forhold til de andre modeller. Inf1 har yderligere den største fejl på A_3^* . Inf2 har en væsentlig lavere fejl for H_1^* og A_3^* i forhold til Inf1. For de resterende flutter-afledede er fejlen for Inf2 af samme størrelsesorden som Inf1.

Der er altså ikke noget generelt billede, men det er væsentligt at bemærke, at for Inf2 er tendensen for de tre punkter for H_2^* en kurve som krummer den forkerte vej i forhold til DMI's resultater. Grundmodellen og Inf1 får kurver med krumning den samme vej og derfor er der større sandsynlighed, for at disse modeller giver bedre resultater for H_2^* ved udførelse af flere simuleringer med forskellige værdier af V_r .

Definitionsfilerne til simuleringerne samt en eksporteret light-udgave af resultatfilerne findes på [DVD\CFD\2DOF\Mesh Inf\]. Her findes yderligere programmet, som er anvendt til databehandlingen samt de grafer som er genereret under databehandlingen.

7.2 Forfinet net omkring broen

Det næste punkt på listen over parametre som varieres, er jf. punkt 1.b forfining af nettet omkring brotværnsnittet. Det er altså de prismatiske elementer udenom broens Inflation layer som forfines. Mange af de hvirvler som dannes omkring broen, findes udenfor Inflation layer og derfor er der brug for et relativt fint net udenpå Inflation layer, for at kunne beskrive disse hvirvler. Igen defineres de nye modeller med udgangspunkt grundmodellen, som er beskrevet i afsnit 5. Da nettet omkring broen betragtes som relativt groft oprettes 2 nye modeller, som begge har finere net end den nuværende model. De 2 nye modeller kaldes i det efterfølgende "BroRef1" og "BroRef2".

7.2.1 Modelopbygning - BroRef1 og BroRef2

Ændringerne i forhold til grundmodellen sker i forhold til tabel 5.1. Yderligere defineres ekstra "Controls" til at definere størrelsen af elementerne lokalt. Da der er tale om

ændringer af nettet defineres de nye indstillinger i programmet "CFX-Mesh". De nye indstillinger for "Spacing" er listet i tabel 7.4 og 7.5 for hhv. BroRef1 og BroRef2.

Tabel 7.4: Nye indstillinger for "Spacing" for BroRef1

Punkt	Indstilling	Værdi
Edge Spacing 1	Radius of Influence [m]	5

Tabel 7.5: Nye indstillinger for "Spacing" for BroRef2

Punkt	Indstilling	Værdi
Edge Spacing 1	Radius of Influence [m]	7

Ved at øge "Radius of Influence" fra 0 m i grundmodellen til 5 m og 7 m i hhv. BroRef1 og BroRef2, øges indflydelsen af indstillingerne for "Edge Spacing 1" fra kun at gælde lige omkring brotværnsnittets overflade til at gælde nogle meter ud i domænet. Dermed genereres mindre elementer i det påvirkede område.

Yderligere er der defineret nogle indstillinger under punktet "Controls" i træstrukturen i programmet. I grundmodellen er der ikke defineret nogle indstillinger for dette punkt i træstrukturen. Til punktet "Controls" findes ikke som standard nogle underpunkter så disse må tilføjes først. Underpunkter tilføjes ved at klikke med højre musetast på "Controls" og vælge "Insert". Der indsættes 2 gange "Point Spacing" kaldet "Point Spacing 1" og "Point Spacing 2" samt 2 gange "Line Control" kaldet "Line Control 1" og "Line Control 2". Af de to typer underpunkter som der er defineret for disse modeller, er det "Point Spacing", som styrer elementernes størrelse samt i hvor stort et område at indstillingerne skal gælde. "Line Control" underpunkterne definerer hvor i geometrien det valgte "Point Spacing" skal gælde. Indstillingerne for de 4 underpunkter er listet i tabel 7.6 og 7.7 for hhv. BroRef1 og BroRef2.

7 Parametervariation

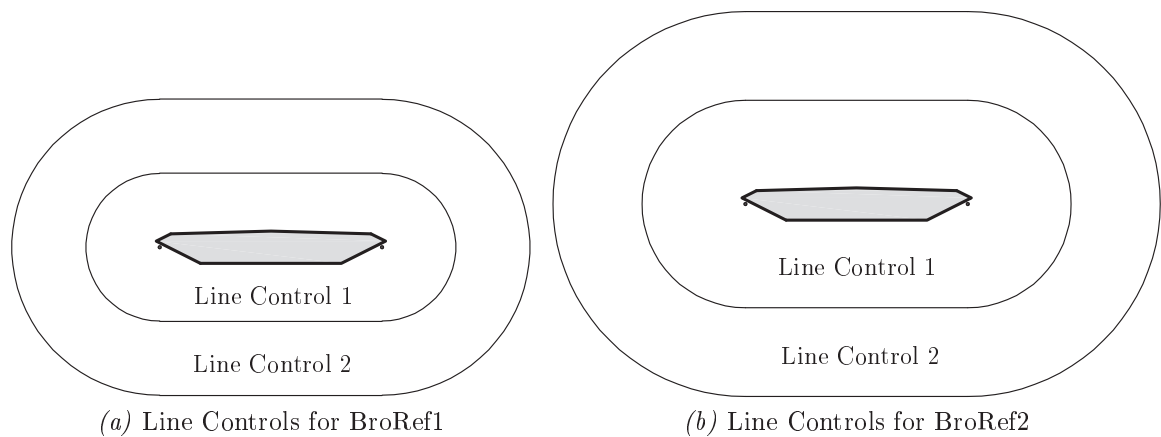
Tabel 7.6: Nye indstillinger for "Controls" for BroRef1

Punkt	Indstilling	Værdi
Point Spacing 1	Length Scale [m]	0,5
	Radius of Influence [m]	10
Line Control 1	Point	0, 0, -15 [m]
	Point	0, 0, 15 [m]
	Spacing	Point Spacing 1
Point Spacing 2	Length Scale [m]	1
	Radius of Influence [m]	20
Line Control 2	Point	0, 0, -15 [m]
	Point	0, 0, 15 [m]
	Spacing	Point Spacing 2

Tabel 7.7: Nye indstillinger for "Controls" for BroRef2

Punkt	Indstilling	Værdi
Point Spacing 1	Length Scale [m]	0,5
	Radius of Influence [m]	14
Line Control 1	Point	0, 0, -15 [m]
	Point	0, 0, 15 [m]
	Spacing	Point Spacing 1
Point Spacing 2	Length Scale [m]	1
	Radius of Influence [m]	26
Line Control 2	Point	0, 0, -15 [m]
	Point	0, 0, 15 [m]
	Spacing	Point Spacing 2

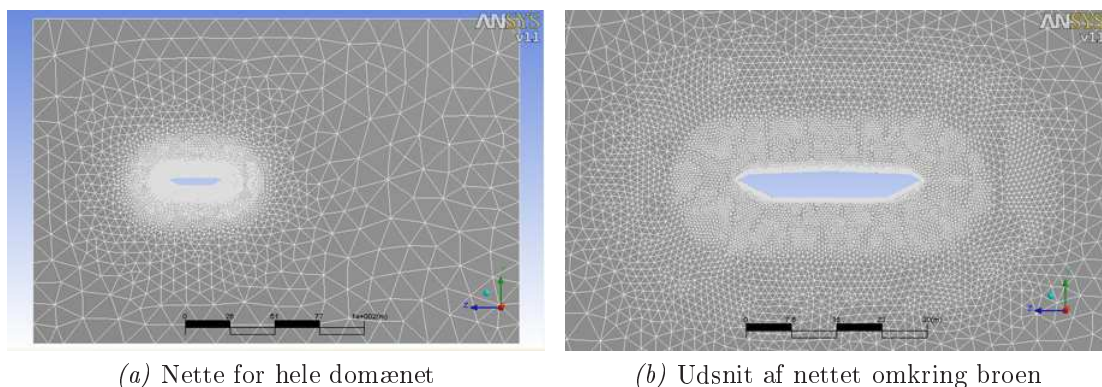
Med de indstillinger som er defineret i tabel 7.4 og 7.6, er der defineret 2 områder omkring brotværsnittet, hvor elementstørrelsen er styret af de pågældende Controls. Figur 7.4 viser områderne i forhold til brotværsnittet for BroRef1 og BroRef2.



Figur 7.4: Illustration af de områder omkring brotværsnittet som styres af Line Controls

På figur 7.4a ses området, som er defineret af Line Control 1 svarende til indstillingerne i tabel 7.6. Selve Line Control 1 er defineret mellem de to punkter, som er centrum for de 2 cirkelstykker. Udbredelsen herfra er defineret i Point Spacing 1, som har defineret en Radius of Influence på 10 m, jf. tabel 7.6. I området kontrolleret af Line Control 1 har elementerne en størrelse på 0,5 m, jf. tabel 7.6. Line Control 2 er defineret ud fra samme geometriske punkter som Line Control 1, mens Point Spacing 2 har defineret en radius på 20 m og en elementstørrelse på 1 m, jf. tabel 7.6.

På figur 7.4b er de tilsvarende områder vist for BroRef2. De to områder har en radius på 14 m og 26 m med de samme elementstørrelser for hhv. Line Control 1 og Line Control 2. Figur 7.5 viser et eksempel på et net genereret med line controls som beskrevet ovenfor.

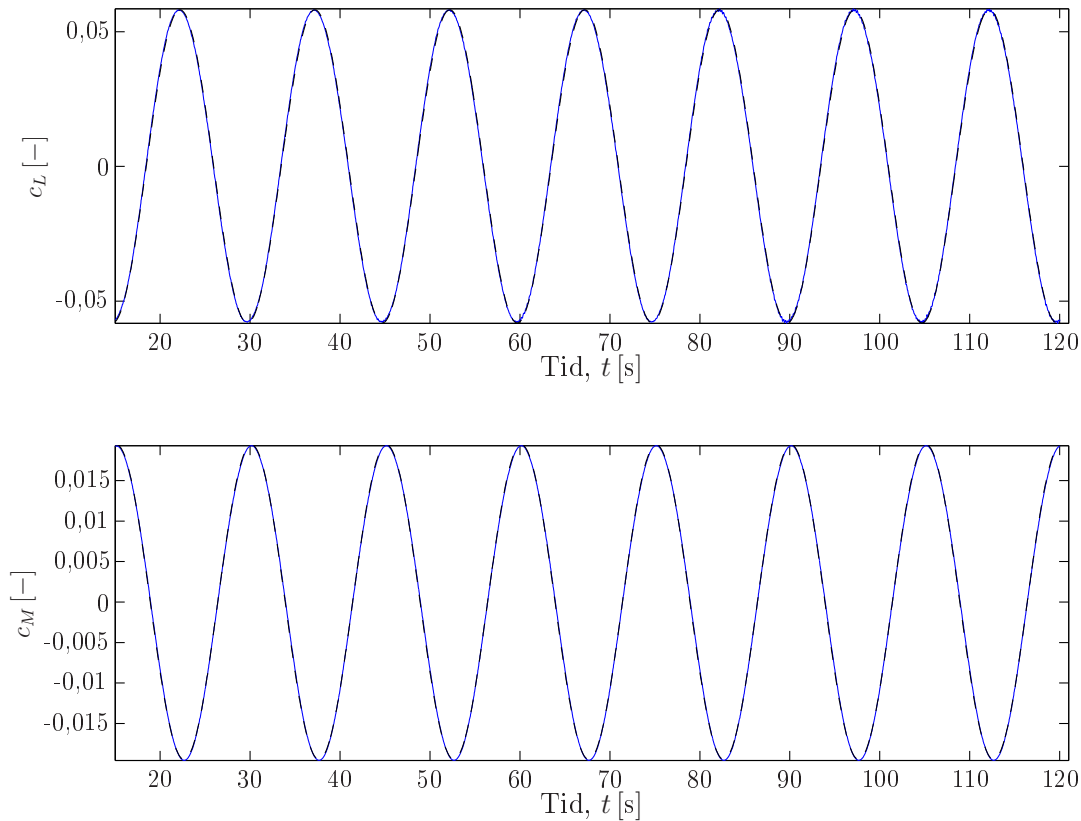


Figur 7.5: Net genereret til BroRef1 med indstillingerne fra tabel 7.4 og 7.6

Figur 7.5 viser tydeligt de to områder, svarende til Line Control 1 og Line Control 2, hvor elementerne er af samme størrelse. Udenfor disse områder vokser elementerne op mod den maksimalt tilladte størrelse som, jf. tabel 5.1, er 15 m. På figur 7.5b kan Inflation layer ses helt tæt omkring brotværsnittet. Med indstillingerne beskrevet i dette afsnit genereres et net med 18.132 og 24.474 elementer for hhv. BroRef1 og BroRef2. Til sammenligning har grundmodellen et net med 8.694 elementer.

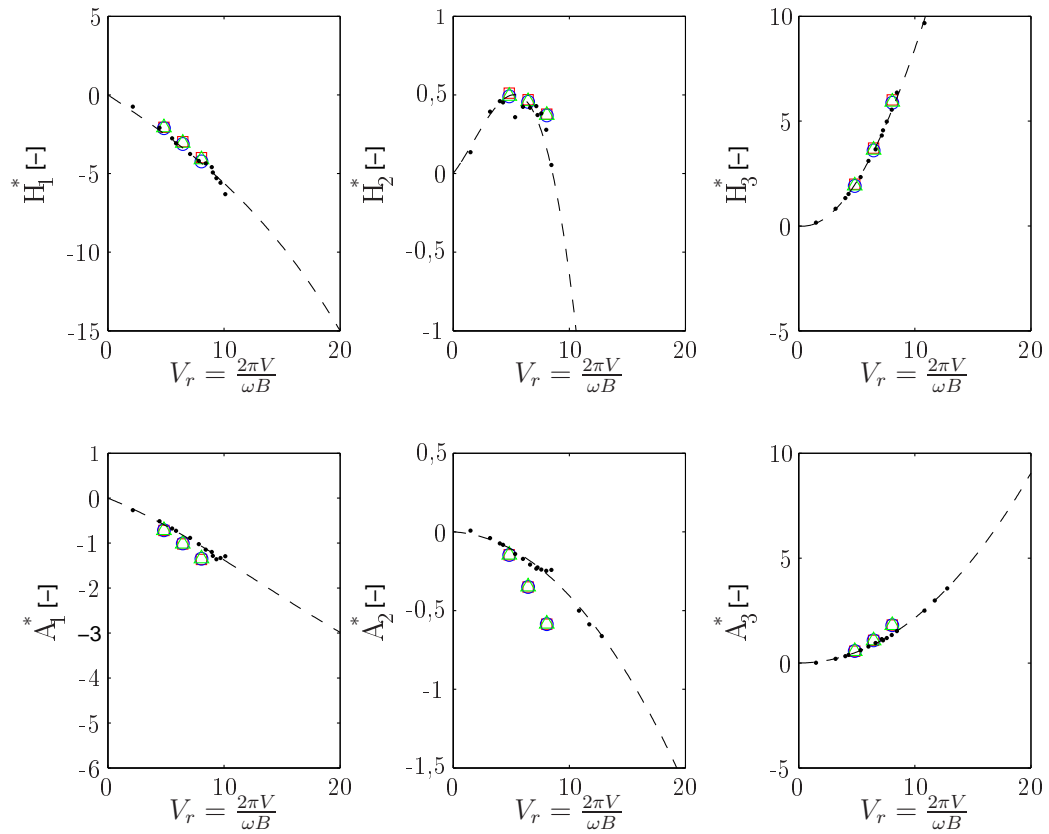
7.2.2 Resultater - BroRef1 og BroRef2

For de stationære simuleringer er der udført de samme kontroller som er beskrevet tidligere. Der er ikke konstateret nogle afvigelser i forhold til de ønskede resultater af disse simuleringer. For de tidsafhængige simuleringer er det specielt kontrolleret at kraftsignalerne er harmoniske og at de udførte kurvefit ligger godt og dermed giver nogle brugbare værdier.



Figur 7.6: Kraftkoefficienter fra simuleringen med lodret translation af tværsnittet (-) for BroRef1 ved $T_{period} = 15\text{s}$ samt en fittet kurve (- -) på formen $c = \pm\tilde{c}\sin(\omega t - \phi)$. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Som det fremgår af figur 7.6, er der god overensstemmelse mellem de målte kraftsignaler og de fittede kurver for det viste eksempel. Det samme er gældende for resterende simuleringer med BroRef1 og BroRef2. Ud fra de fittede kurver er der beregnet flutter-afledede efter samme fremgangsmåde som beskrevet i afsnit 6.3.



Figur 7.7: Flutter-afledede fra grundmodellen (\square), BroRef1 (\circ) og BroRef2 (\triangle) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($--$)

Figur 7.7 viser de flutter-afledede, som er beregnet vha. simuleringerne BroRef1 og BroRef2 samt fra grundmodellen. Umiddelbart er der ikke nogen synlig forskel mellem resultaterne fra de 3 modeller. Som tidligere er fejlen i forhold til DMI's fittede kurve beregnet og resultatet af denne beregning, er listet i tabel 7.8.

Tabel 7.8: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM), BroRef1 og BroRef2 i forhold til DMI's data

	GM (\square)	BroRef1 (\circ)	BroRef2 (\triangle)
H_1^*	0,43	0,19	0,31
H_2^*	0,05	0,05	0,05
H_3^*	0,22	0,10	0,13
A_1^*	0,14	0,13	0,13
A_2^*	0,13	0,13	0,13
A_3^*	0,22	0,22	0,22
Total	1,20	0,82	0,96

Som det fremgår af tabel 7.8, er der en lille forbedring at hente ved at foretage en forfi-

ning af nettet omkring broen. Igen er det den model, som har den mindste fejl på H_1^* , der har den totalt mindste fejl. Alle de andre flutter-afledede ligger næsten oven i hinanden bortset fra H_3^* , hvor der er en lille afvigelse.

Generelt er der meget lidt at vinde ved at forfine nettet omkring broen. Når den forøgede beregningstid tages i betragtning, er det tvivlsomt om det kan betale sig at indføre et finere net omkring broen.

Igen findes de anvendte definitionsfiler, resultatfiler og databehandlingsprogrammer på: `[DVD\CFD\2DOF\BroRef\]` sammen med graferne, som er generet under databehandlingen.

7.3 Forfinet net nedstrøms fra broen

Som defineret i punkt 1.c er der foretaget en vurdering af, om resultaterne bliver forbedret, hvis der indføres et finere net nedstrøms i forhold til brotværnsnittet. Det forfinede net bag broen giver modellen mulighed for en bedre beskrivelse af turbulenseffekterne fra broen, i det område hvor de er størst. Som tidligere defineres to nye modeller på baggrund af grundmodellen. Modellerne betegnes DowRef1 samt DowRef2 og de har begge et finere net end grundmodellen.

7.3.1 Modelopbygning - DowRef1 og DowRef2

Indstillingerne fra grundmodellens net, som er beskrevet i afsnit 5.1, implementeres også i DowRef1 og DowRef2. Derudover tilføjes, som i afsnit 7.2, et antal ekstra Controls. Underpunkterne til Controls tilføjes efter samme fremgangsmåde som beskrevet i afsnit 7.2. Indstillingerne for de nye Controls er listet i tabel 7.9 og 7.10 for hhv. DowRef1 og DowRef2.

Tabel 7.9: Nye indstillinger for "Controls" for DowRef1

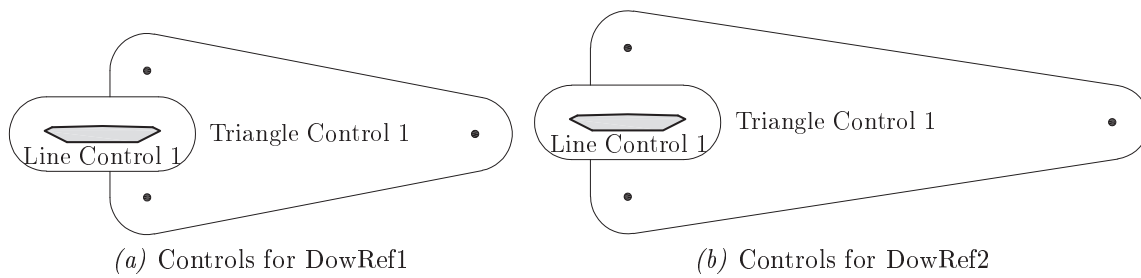
Punkt	Indstilling	Værdi
Point Spacing 1	Length Scale [m]	0,5
	Radius of Influence [m]	10
Line Control 1	Point	0, 0, -15 [m]
	Point	0, 0, 15 [m]
	Spacing	Point Spacing 1
Point Spacing 2	Length Scale [m]	2
	Radius of Influence [m]	10
Triangle Control 1	Point	0, 0, -100 [m]
	Point	0, 17, -12 [m]
	Point	0, -17, -12 [m]
	Spacing	Point Spacing 2

Tabel 7.10: Nye indstillinger for "Controls" for DowRef2

Punkt	Indstilling	Værdi
Point Spacing 1	Length Scale [m]	0,5
	Radius of Influence [m]	10
Line Control 1	Point	0, 0, -15 [m]
	Point	0, 0, 15 [m]
	Spacing	Point Spacing 1
Point Spacing 2	Length Scale [m]	2
	Radius of Influence [m]	10
Triangle Control 1	Point	0, 0, -130 [m]
	Point	0, 20, 0 [m]
	Point	0, -20, 0 [m]
	Spacing	Point Spacing 2

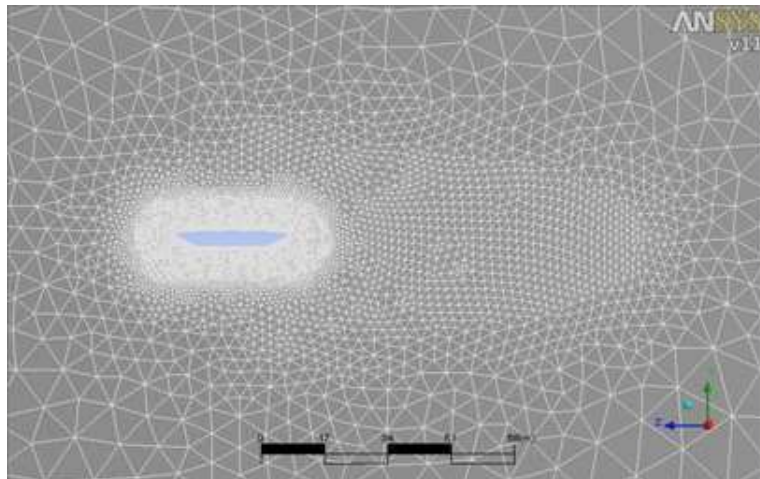
Med indstillingerne defineret i tabel 7.9 og 7.10 er der genereret 2 net efter principperne vist på figur 7.8. Punkterne defineret for Triangle Control i tabel 7.9 og 7.10 er markeret med ●.

7 Parametervariation



Figur 7.8: Illustration af de definerede Controls for DowRef1 og DowRef2

Som for BroRef1- og BroRef2-modellerne er der defineret en Line Control hen over broen og elementstørrelsen i området styret af Line Control 1 er igen 0,5 m. I områderne styret af Triangle Control 1 er elementstørrelsen 2 m. Forskellen mellem de to modeller er hvor stort et område som Triangle Control 1 dækker. Figur 7.9 viser et net som er genereret med indstillingerne beskrevet i dette afsnit.



Figur 7.9: Det genererede net for DowRef1

Af figur 7.8 ses det tydeligt, at nettet er finere i de områder som er kontrolleret af Line Control 1 og Triangle Control 1. Udenfor de beskrevne områder vokser elementstørrelsen ud mod domænets grænser. Med indstillingerne beskrevet i dette afsnit genereres et net med 17.310 og 18.436 elementer for hhv. DowRef1 og DowRef2. Til sammenligning har grundmodellen et net med 8.694 elementer.

Ud over de beskrevne ændringer i forhold til grundmodellen er der foretaget yderligere en ændring. Denne ændring falder udenfor systemet mht. parametervariation og er derfor ikke nævnt tidligere. Det er antallet af simulerede perioder, som er sat ned fra 8 til 4 stk. Det sker ud fra en forventning om at de fremtidige simuleringer giver pæne harmoniske kraftsignaler allerede efter første periode, som de tidligere præsenterede resultater har gjort. For grundmodellen er antallet af simulerede perioder defineret i formel (5.1) i form af:

$$t_{max} = 8 T_{period} \quad (7.1)$$

Formel (7.1) ændres altså til:

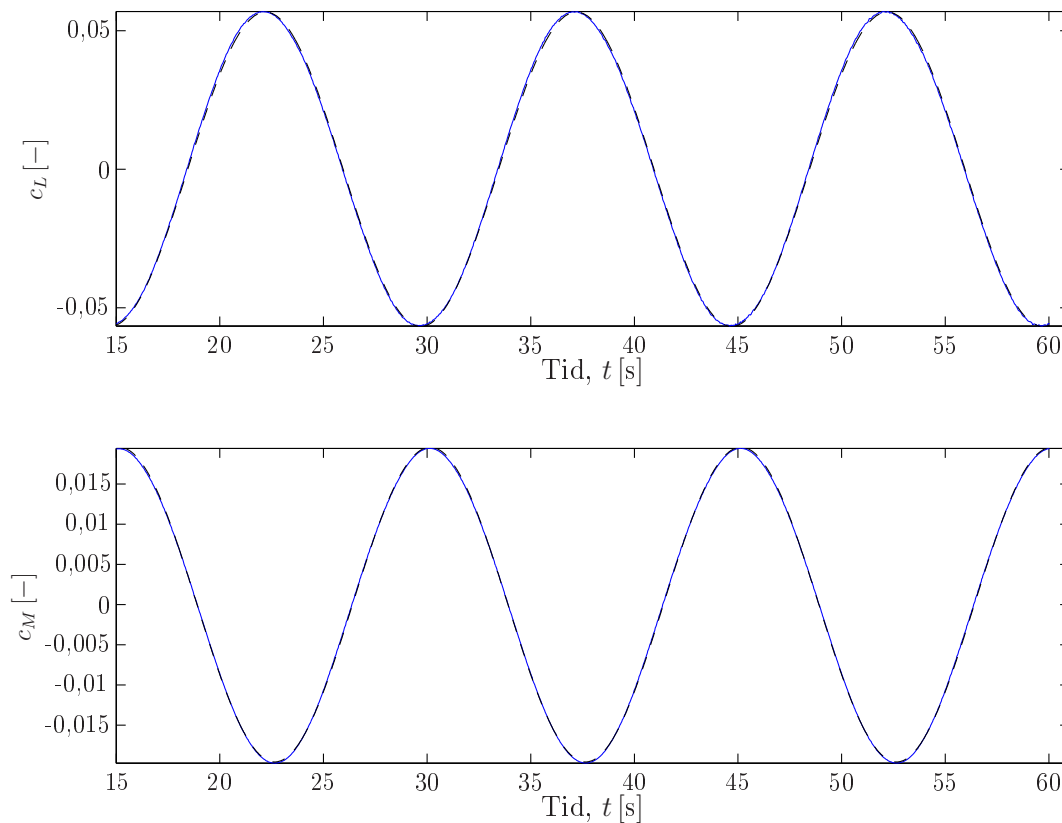
$$t_{max} = 4 T_{period} \quad (7.2)$$

Dermed spares ca. halvdelen af simuleringstiden uden at resultaterne påvirkes når blot de simulerede perioder er så ens som de hidtidige resultater har vist.

7.3.2 Resultater - DowRef1 og DowRef2

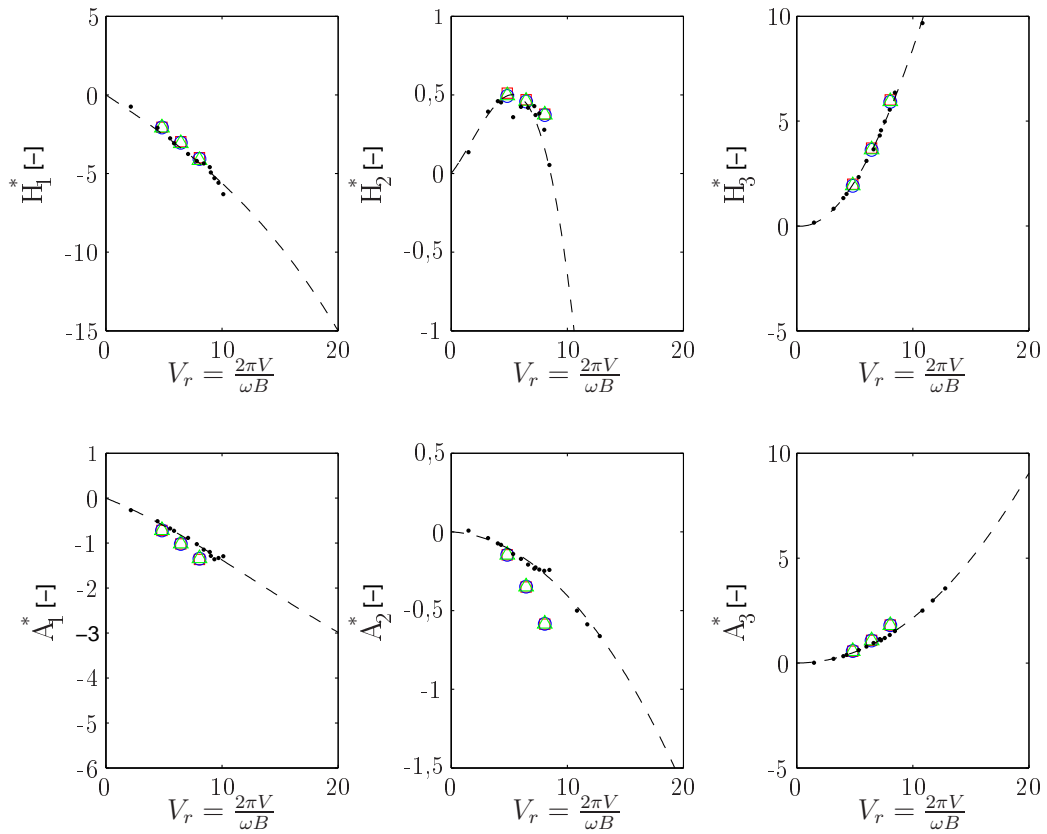
Igen er det kontrolleret at resultaterne af de stationære simuleringer er konvergeret til-fredsstillende, samt at turbulens, hastighed og strømmer giver de forventede resultater. Der ikke fundet nogle uoverensstemmelser for simuleringerne med DowRef1 og DowRef2. For de tidsafhængige simuleringer er der, som tidligere beskrevet, blevet skåret ned på antallet af simulerede perioder. Et eksempel på et kraftsignal og en fittet kurve er vist på figur 7.10.

7 Parametervariation



Figur 7.10: Kraftkoefficienter fra simuleringen med lodret translation af tværsnittet (-) for DowRef1 ved $T_{period} = 15$ s samt en fittet kurve (- -) på formen $c = \pm \tilde{c} \sin(\omega t - \phi)$. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Som det fremgår af figur 7.10 er kurvefittet lige så godt som i de tidligere præsenterede resultater. Igen er de flutter-afledede beregnet efter samme fremgangsmåde som tidligere beskrevet.



Figur 7.11: Flutter-afledede fra grundmodellen (\square), DowRef1 (\circ) og DowRef2 (\triangle) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($--$)

Af figur 7.11 fremgår det, at resultaterne fra simuleringerne med DowRef1 og DowRef2 er næsten identiske med resultaterne fra grundmodellen. Overblikket over den enkelte flutter-afledede's afvigelse fra DMI's resultater findes igen ved at beregne fejlen vha. mindste kvadraters metode. Resultatet er listet i tabel 7.11.

Tabel 7.11: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM), DowRef1 og DowRef2 i forhold til DMI's data

	GM (\square)	DowRef1 (\circ)	DowRef2 (\triangle)
H_1^*	0,43	0,33	0,26
H_2^*	0,05	0,05	0,05
H_3^*	0,22	0,13	0,15
A_1^*	0,14	0,13	0,12
A_2^*	0,13	0,13	0,13
A_3^*	0,22	0,22	0,22
Total	1,20	0,99	0,93

Af tabel 7.11 fremgår det et der næsten ingen forbedring er sket ved at definere en finere net nedstrøms fra broen. Den totale fejl er reduceret lidt for både DowRef1 og DowRef2

7 Parametervariation

men kun til omkring samme niveau som BroRef2. Forbedringen kan derfor skyldes den forfining som også er lave omkring broen.

Forskellen i den totale fejl skyldes hovedsageligt en reduktion i fejlen for H_1^* . Fejlen for der resterende flutter-afledede er næsten ens for alle 3 modeller, bortset fra H_3^* som er lidt mindre for DowRef1 og DowRef2. I forhold til forøgelsen af antallet af elementer er forbedringerne på den totale fejl igen for små.

Filerne som er anvendt i forbindelse med DowRef modellerne findes på den vedlagte DVD under: [DVD\CFD\2DOF\DowRef\].

7.4 Generel forfining af nettet

Jf. punkt 1.d er den næste parameter som skal testes en generel forfining af nettet i hele domænet. Igen defineres 2 nye modeller med et finere net end grundmodellens net da dette som tidligere nævnt betragtes som groft. De nye modeller betegnes i det efterfølgende GenRef1 og GenRef2.

7.4.1 Modelopbygning - GenRef1 og GenRef2

Som generelt mål for forfiningen af nettet er det valgt at reducere elementstørrelserne med 10% for GenRef1 og 20% for GenRef2. Da der ikke er defineret lokale Controls sker ændringerne i forhold til grundmodellen i forhold til tabel 5.1. De nye indstillinger for "Spacing" er listet i tabel 7.12 og 7.13 for hhv. GenRef1 og GenRef2.

Tabel 7.12: Nye indstillinger for "Spacing" for GenRef1

Punkt	Indstilling	Værdi
Default Body Spacing	Maximum Spacing [m]	13,5
Default Face Spacing	Maximum Edge Length [m]	13,5
Edge Spacing 1	Constant Edge Length [m]	0,18

Tabel 7.13: Nye indstillinger for "Spacing" for GenRef2

Punkt	Indstilling	Værdi
Default Body Spacing	Maximum Spacing [m]	12
Default Face Spacing	Maximum Edge Length [m]	12
Edge Spacing 1	Constant Edge Length [m]	0,16

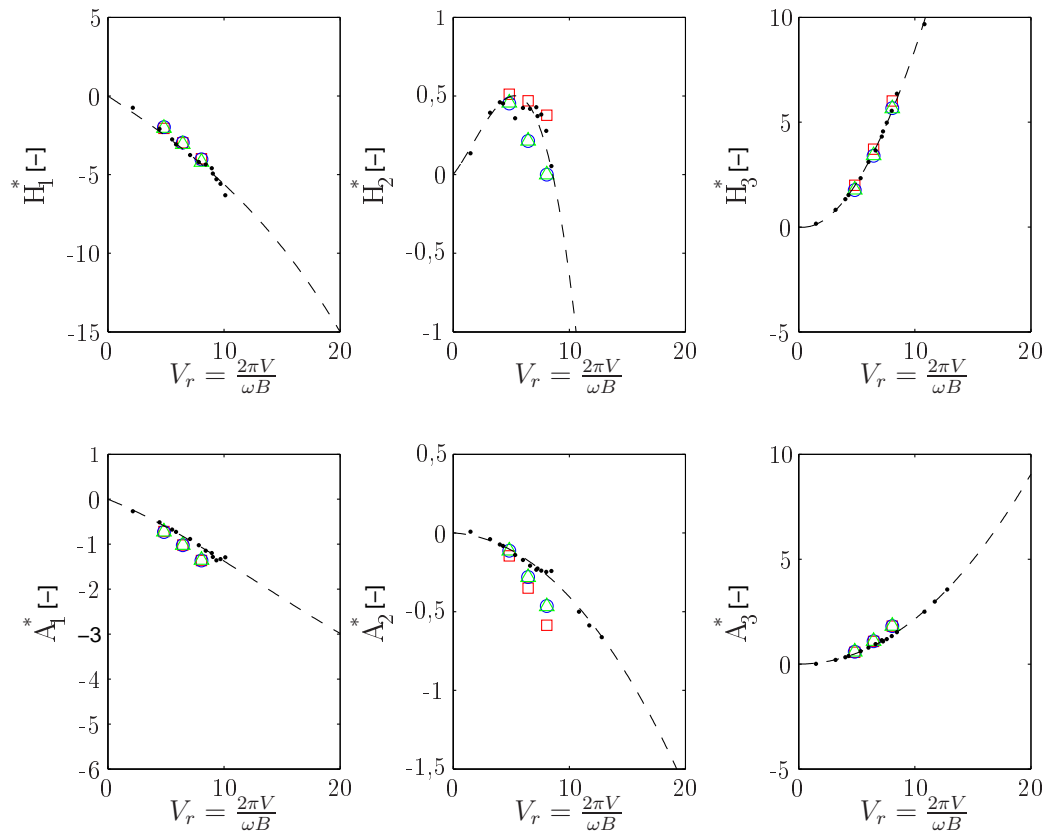
Med indstillingerne defineret i tabel 7.12 og 7.13 reduceres den maksimale elementstørrelse i domænet fra 15 m i grundmodellen til 13,5 m og 12 m i hhv. GenRef1 og GenRef2.

Den mindste elementstørrelse, som er defineret omkring broen vha. Edge Spacing 1, reduceret fra 0,2 m i grundmodellen til 0,18 m og 0,16 m i hhv. GenRef1 og GenRef2.

Resultatet af ændringerne er et net med generelt mindre elementer men ellers samme udseende som grundmodellens net, som er vist på figur 5.3. Antallet af elementer for GenRef1 og GenRef2 er hhv. 11.174 og 11.258.

7.4.2 Resultater - GenRef1 og GenRef2

For de stationære simuleringer er der igen konstateret tilfredsstillende konvergens samt forventede tilstande mht. turbulens og hastigheder. For de tidsafhængige simuleringer er det konstateret af der optaget nogle fine harmoniske kraftsignaler samt nogle gode fit til disse signaler. Således er de flutter-afledede beregnet ud fra de opnåede resultater.



Figur 7.12: Flutter-afledede fra grundmodellen (\square), GenRef1 (\circ) og GenRef2 (\triangle) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($--$)

Af figur 7.12 fremgår det, at de flutter-afledede som er beregnet med de to nye modeller, ligger meget tæt på grundmodellens flutter-afledede for H_1^* , A_1^* og A_3^* . For H_3^* og A_2^* ligger resultaterne lidt bedre, mens de for H_2^* er dårligere. Igen er der risiko for at kurvefittet for H_2^* krummer den forkerte vej i forhold til DMI's resultater. Afvigelsen i forhold til DMI's resultater er igen beregnet vha. mindste kvadraters metode og listet i tabel 7.14.

7 Parametervariation

Tabel 7.14: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM), GenRef1 og GenRef2 i forhold til DMI's data

	GM (\square)	GenRef1 (\circ)	GenRef2 (\triangle)
H_1^*	0,43	0,49	0,29
H_2^*	0,05	0,08	0,08
H_3^*	0,22	0,08	0,07
A_1^*	0,14	0,15	0,13
A_2^*	0,13	0,05	0,05
A_3^*	0,20	0,24	0,25
Total	1,20	1,08	0,87

Af tabel 7.14 fremgår det, at GenRef1 og GenRef2 giver en forbedring på den samlede fejl. Forbedringen i forhold til grundmodeller hentes hovedsageligt ved H_3^* og A_2^* hvor både GenRef1 og GenRef2 er væsentlig bedre. GenRef2 har yderligere en væsentlig forbedring på H_1^* i forhold til både grundmodellen og GenRef1. Fejlen for de resterende flutter-affledede er af samme størrelsesorden.

Med modellerne GenRef1 og GenRef2 er der hentet en lille forbedring i forhold til grundmodellen med en relativ lille forøgelse af antallet af elementer.

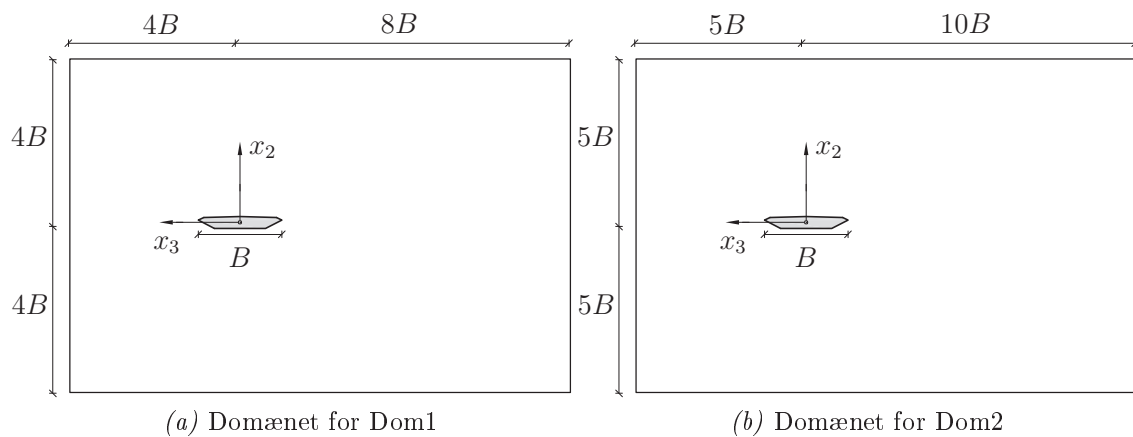
Filerne tilhørende GenRef-modellerne findes på: [DVD\CFD\2DOF\GenRef\].

7.5 Størrelsen på domænet

Det sidste punkt i parametervariationen gælder størrelsen på strømningdomænet. Ved at øge størrelsen på domænet kan det kontrolleres om randbetingelserne har indflydelse på resultaterne. Der er defineret 2 modeller med større strømningdomæne end grundmodellen. Modellerne er i det efterfølgende benævnt Dom1 og Dom2.

7.5.1 Modelopbygning - Dom1 og Dom2

I modsætning til tidligere ændres ikke på indstillingerne for nettet til disse modeller. Derimod ændres de geometriske størrelse på domænet. Ændringerne udføres med programmet Design Modeller, som anvendes til at definere geometri for CFD-beregningene. De to nye beregningsdomæner er vist på figur 7.13.



Figur 7.13: Beregningsdomæne for Dom1 og Dom2

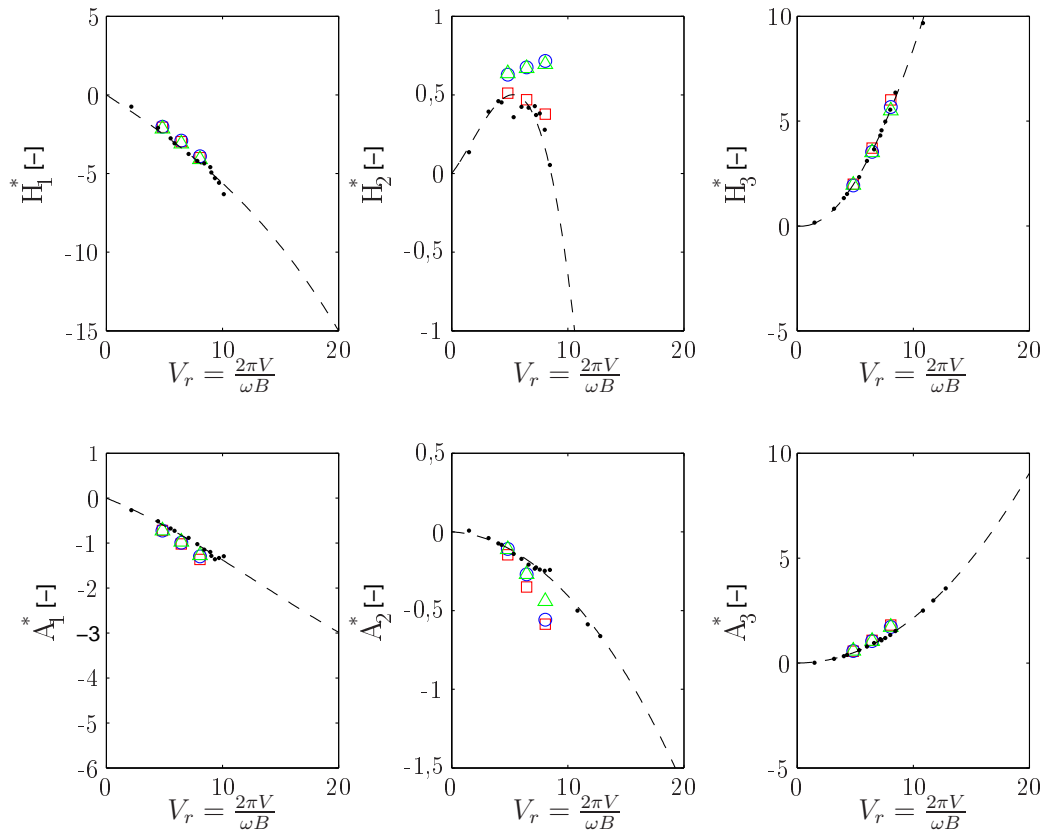
Af figur 7.13a fremgår det at for Dom1 er den nye afstand fra origo til Output RB er øget til $8B$. Tilsvarende er afstanden til Inlet RB, Top RB og Bund RB er øget til $4B$. Det giver en samlet længde på 372 m og en samlet højde på 248 m. For Dom2, figur 7.13b, er afstanden fra origo til Outlet sat til $10B$, mens afstanden til de andre kanter er sat til $5B$. De totale dimensioner på domænet er 310 m \times 465 m.

Til generering af nettet anvendes de samme indstillinger, som er defineret for grundmodellen i afsnit 5.1. Dermed genereres et net med samme udseende som grundmodellens, blot med den forskel at der er plads til lidt flere store elementer rundt langs yderkanten af domænet. For Dom1 og Dom2 er der generet net med hhv. 9.292 og 9.692 elementer.

7.5.2 Resultater - Dom1 og Dom2

Som tidligere er de stationære resultater kontrolleret for konvergens, turbulens osv. Som for de tidligere simuleringer er resultaterne af de stationære simuleringer fundet tilfredsstillende. For de tidsafhængige simuleringer er det kontrolleret om kraftkoefficienterne har pæne harmoniske forløb og om de fittede kurver ligger godt i forhold til de målte signaler. Da kontrollerne har vist tilfredsstillende resultater, er de flutterafledede beregnet og vist på figur 7.14.

7 Parametervariation



Figur 7.14: Flutter-aftledede fra grundmodellen (\square), Dom1 (\circ) og Dom2 (\triangle) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($- -$)

Som det fremgår af figur 7.14 er der god overensstemmelse mellem resultaterne af grundmodellen og Dom1 samt Dom2 for H_1^* , A_1^* og A_3^* . For H_3^* og A_2^* er ligger punkterne fra Dom1 og Dom2 lidt bedre, mens de for H_2^* ligger lidt dårligere i forhold til DMI's resultater. Som tidligere er fejlen i forhold til DMI's resultater blevet beregnet og disse er listet i tabel 7.15.

Tabel 7.15: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM), Dom1 og Dom2 i forhold til DMI's data

	GM (\square)	Dom1 (\circ)	Dom2 (\triangle)
H_1^*	0,43	0,59	0,23
H_2^*	0,05	0,38	0,36
H_3^*	0,22	0,01	0,01
A_1^*	0,14	0,10	0,08
A_2^*	0,13	0,09	0,04
A_3^*	0,22	0,15	0,15
Total	1,20	1,33	0,86

Af tabel 7.15 fremgår det at den totale fejl er blevet forbedret for Dom2, mens Dom1

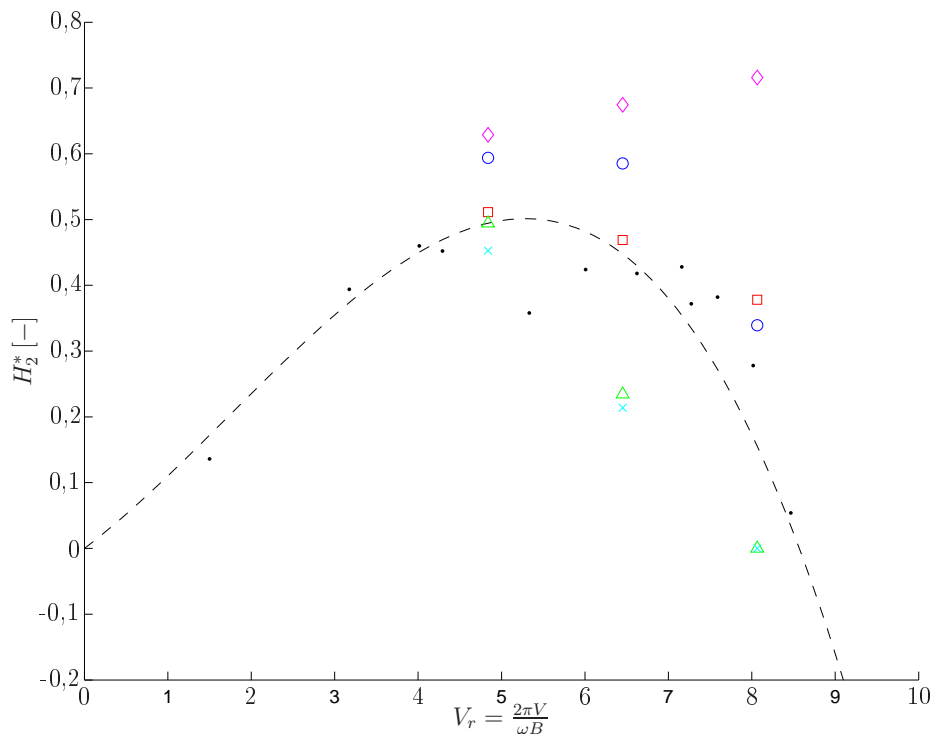
er lidt dårligere end grundmodellen. Dom2 er væsentlig bedre end de to andre modeller H_1^* , mens de 3 modeller er næsten ens for A_1^* , A_2^* og A_3^* . Dom1 og Dom2 er begge meget bedre end grundmodellen for H_3^* og meget dårligere end grundmodellen for H_2^* .

For Dom2 er der hentet en forbedring på den totale fejl med en relativ lille forøgelse af antallet af elementer. Det er sket trods den dårlige placering af punkterne for H_2^* som fitter til en kurve, der ikke ligner DMI's resultater.

Filerne som hører til Dom-modellerne er placeret på: `[DVD\CFD\2DOF\Dom\]`.

7.6 Sammenfatning

I dette afsnit gives en sammenfatning af resultaterne, som er opnået ved variation af de forskellige parametre, som er beskrevet tidligere i dette kapitel. Generelt for alle de præsenterede resultater er der flere flutter-afledede som ligger tæt på DMI's resultater og alle flutter-afledede, bortset fra H_2^* , har samme tendens som DMI's resultater. H_2^* er den parameter som i DMI's resultater, som har den største spredning og dermed også usikkerhed. Den store spredning antyder også på forhånd, at H_2^* kan være den sværeste parameter at simulere. Det kommer også til udtryk i de præsenterede resultater. På figur 7.15 er resultaterne fra H_2^* plottet fra udvalgte modeller.



Figur 7.15: H_2^* fra grundmodellen (\square), Inf1 (\circ), Inf2 (\triangle), GenRef1 (\times) og Dom1 (\diamond) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($- -$)

Som det fremgår af figur 7.15, er der store forskelle på placeringen af punkterne fra de forskellige modeller. Ved beregning af fejlen for H_2^* er det grundmodellen og Inf1 som har den mindste fejl i forhold til DMI's resultater. Det er ligeledes disse som kunne have ten-

7 Parametervariation

dens til at give et kurvefit som krummer på samme måde som fittet til DMI's resultater. Grundet de få antal punkter kan der ikke drages nogle sikre konklusioner mht. hvorledes en kurve, som er fittet til et større antal punkter vil se ud. Måske vil modellerne Inf2, GenRef1 og Dom1 give en kurve med toppunktet placeret udenfor det simulerede interval af V_r .

For de resterende flutter-afledede ser tendensen for de beregnede punkter ud til at følge DMI's resultater mere eller mindre. Der er forskel på hvor meget de forskellige modeller afviger fra DMI's resultater, men punkterne ligger alle så de kan fittes til en kurve som krummer på samme måde som fittet til DMI's resultater. Specielt for A_2^* ligger nogle af punkterne "lidt ved siden af" DMI's punkter. Tendensen for de beregnede kurver er derimod generelt den samme som fittet til DMI's resultater, men det er ønskeligt at A_2^* kommer lidt tættere på DMI's kurve.

For Inf-, GenRef-, og Dom-modellerne er der en forbedring af A_2^* -punkternes placering i forhold til DMI's resultater. For de resterende 4 flutter-afledede, H_1^* , H_3^* , A_1^* og A_3^* , ligger de simulerede punkter stort set oven i DMI's resultater for alle de anvendte modeller.

Det er vist, at med det grove net fra grundmodellen kan der simuleres nogle relativt gode flutter-afledede. Det skyldes at de væsentligste parametre til beregning af flutter-afledede er amplituderne fra kraft-koefficienterne og bevægelserne samt faseforskydningen mellem bevægelse af krafterne. Amplituden for bevægelsen er defineret som input til hver simulering og da nettet er fint nok til at fange de harmoniske variationer af kræfterne i forhold til bevægelsens frekvens, bliver resultaterne gode.

Yderligere er det vist at den samlede fejl kan mindskes ved at definere finere net. Der er ikke vist nogen tydelig generel sammenhæng for alle 6 flutter-afledede for bestemte forfininger af nettet.

I forbindelse med et andet speciale som er udført sideløbende med dette projekt, har [Simonsen and Stevens, 2008] konkluderet, at resultatet af CFD-simuleringerne er meget følsomme overfor størrelsen af bevægelsesamplituden. Ved forøgelse af bevægelsesamplituden øges spredningen og dermed usikkerheden af resultaterne. Det er derfor valgt, at bibeholde de relativt små bevægelsesamplituder som er anvendt tidligere.

8

Endelig model

Dette kapitel beskriver indstillingerne for den endelige model, som skal anvendes til beregning af den kritiske hastighed for broen. Ud fra resultaterne af parametervariationen, kapitel 7, er der valgt nogle ændringer i forhold til grundmodellen, som er beksrevet i kapitel 5. Med den nye model er der udført simuleringer nok til at fitte en kurve til resultaterne af simuleringerne. Funktionerne for de fittede kurver er efterfølgende anvendt til beregning af den kritiske hastighed for broen. Den endelige model benævnes i det efterfølgende EM.

8.1 Indstillinger for den endelige model

I afsnit 7.6 er det konkluderet at de opnåede resultater af parametervariationen, ikke giver noget generelt billede af, hvilke indstillinger som skal justeres for at der generelt beregnes bedre flutter-afledede. Det er ligeledes konkluderet at flere af modellerne giver en mindre afvigelse i forhold til DMI's resultater.

Den bedste model må være den som giver den mindste fejl med det færrest mulige antal elementer. Hvis fejlen for denne model er større end 0, skal det kontrolleres om punkterne har tendens til at fitte til kurver med samme krumning som kurverne fra DMI's resultater. For at udvælge hvilke indstillinger som skal føres med over til den endelige model, er den totale fejl samt antal elementer fra alle modellerne i parametervariationen, kapitel 7, listet i tabel 8.1.

8 Endelig model

Tabel 8.1: Den totale fejl samt antal elementer fra alle modellerne omtalt i parametervariationen, kapitel 7, samt grundmodellen (GM)

Model	Total fejl	Antal elementer
GM	1,20	8.694
Inf1	1,36	10.052
Inf2	0,83	12.708
BroRef1	0,82	18.132
BroRef2	0,96	24.474
DowRef1	0,99	17.310
DowRef2	0,93	18.436
GenRef1	1,08	11.174
GenRef2	0,87	11.258
Dom1	1,33	9.292
Dom2	0,86	9.692

Af tabel 8.1 fremgår det at 3 af de modeller med flest elementer, BroRef2, DowRef1 og DowRef2 giver de mindste reduktioner af den totale fejl i forhold antallet af elementer. Den mindre reduktion i fejlen for disse modeller kunne skyldes, at nettene er så fine at de kan beskrive mindre hvirvler som optræder i strømmingen. Hvis dette var tilfældet, skulle der have været en variation af kraftsignalerne svarende til en anden frekvens end bevægelsesfrekvensen. Da dette ikke er observeret anses dette ikke for at være sandsynligt. Inf1 og Dom1 afviger lidt fra de andre modeller ved at være de eneste modeller som giver en større fejl end grundmodellen. De resterende modeller giver en god reduktion i den totale fejl med relativ få elementer, bortset fra BroRef1 der har mere end dobbelt så mange elementer som grundmodellen.

I afsnit 7.6 er der redegjort for hvorfor det skulle være muligt at få gode resultater med modeller hvor nettet består af relativt få elementer. Det er derfor valgt at implementere indstillingerne fra Inf1 samt noget af GenRef1. GenRef1 giver en reduktion i den totale fejl med en forholdsvis lille forøgelse af antallet af elementer mens Inf1 giver en forøgelse af fejlen. Den er valgt på trods af dette faktum da den giver et bedre resultat for H_2^* end Inf2. Indstillingerne fra Inf1 er gengivet i tabel 8.2.

8.1 Indstillinger for den endelige model

Tabel 8.2: Nye indstillinger for "Inflation" for EM

Punkt	Indstilling	Værdi
Inflation	Number of Inflation layers	21*
Inflation Option	First Prism Height [m]	0,005

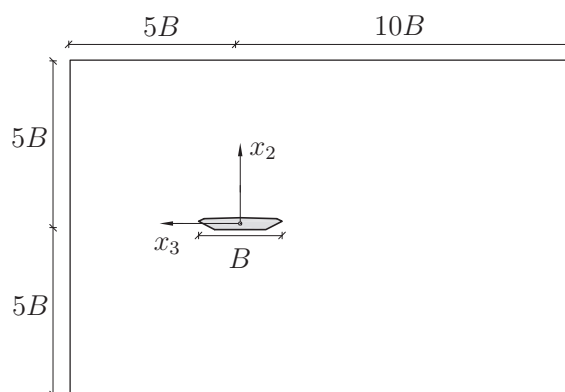
* Indstillingen for Inf1, tabel 7.1, er 20. Her er tallet øget til 21 for at opnå en total tykkelse af inflation layer på $\simeq 1$ m

Fra GenRefl er elementstørrelsen omkring broen implementeret i EM, mens den maksimale elementstørrelse ved randen af domænet er bibeholdt. Indstillingerne er vist i tabel 8.3.

Tabel 8.3: Nye indstillinger for "Spacing" for EM

Punkt	Indstilling	Værdi
Default Body Spacing	Maximum Spacing [m]	15
Default Face Spacing	Maximum Edge Length [m]	15
Edge Spacing 1	Constant Edge Length [m]	0,18

Yderligere implementeres størrelsen på domænet fra Dom2. For Dom2 opnås forbedringer af den totale fejl i forhold til grundmodellen og dermed kan det ikke helt udelukkes, at randbetingelserne har lidt indflydelse på resultatet. Da længden af Dom2 nærmer sig den maksimale længde, som det er muligt at bruge med den givne licens (studie licens) til ANSYS CFX, 500 m, kan domænet ikke forøges ret meget mere. Størrelsen af det anvendte domæne er vist på figur 8.1.

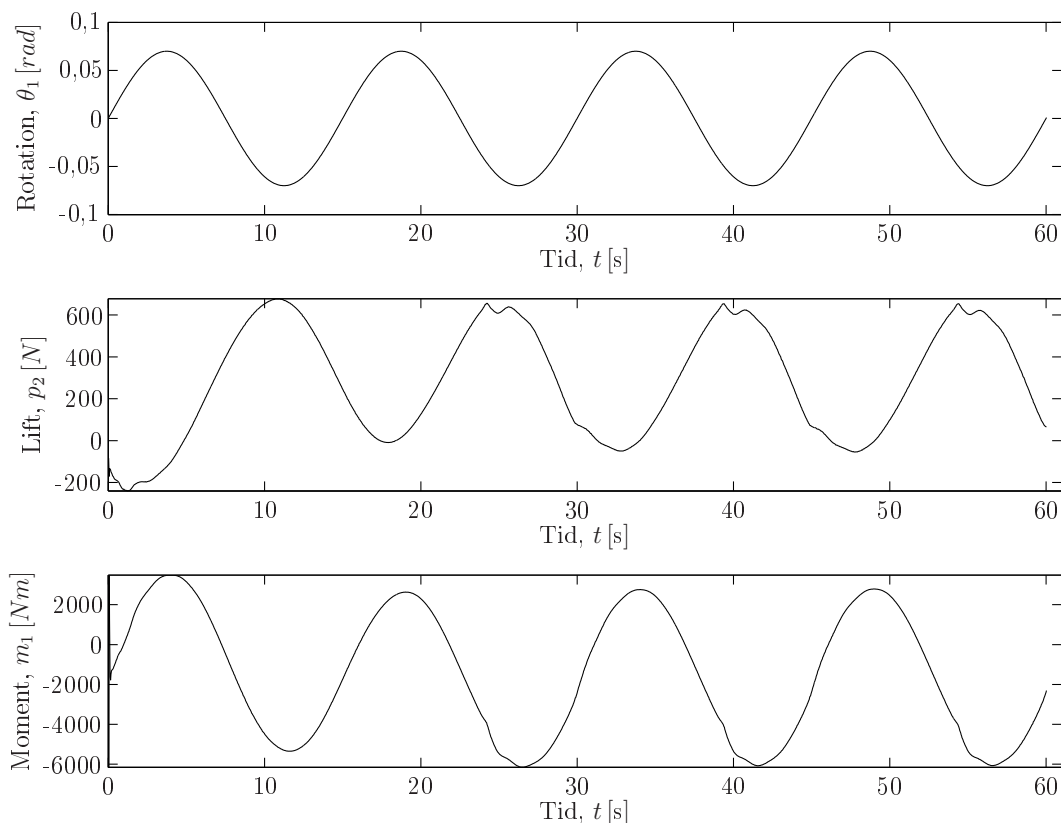


Figur 8.1: Beregningsdomæne for EM

De resterende indstillinger for EM er lig indstillingerne defineret for grundmodellen i kapitel 5.

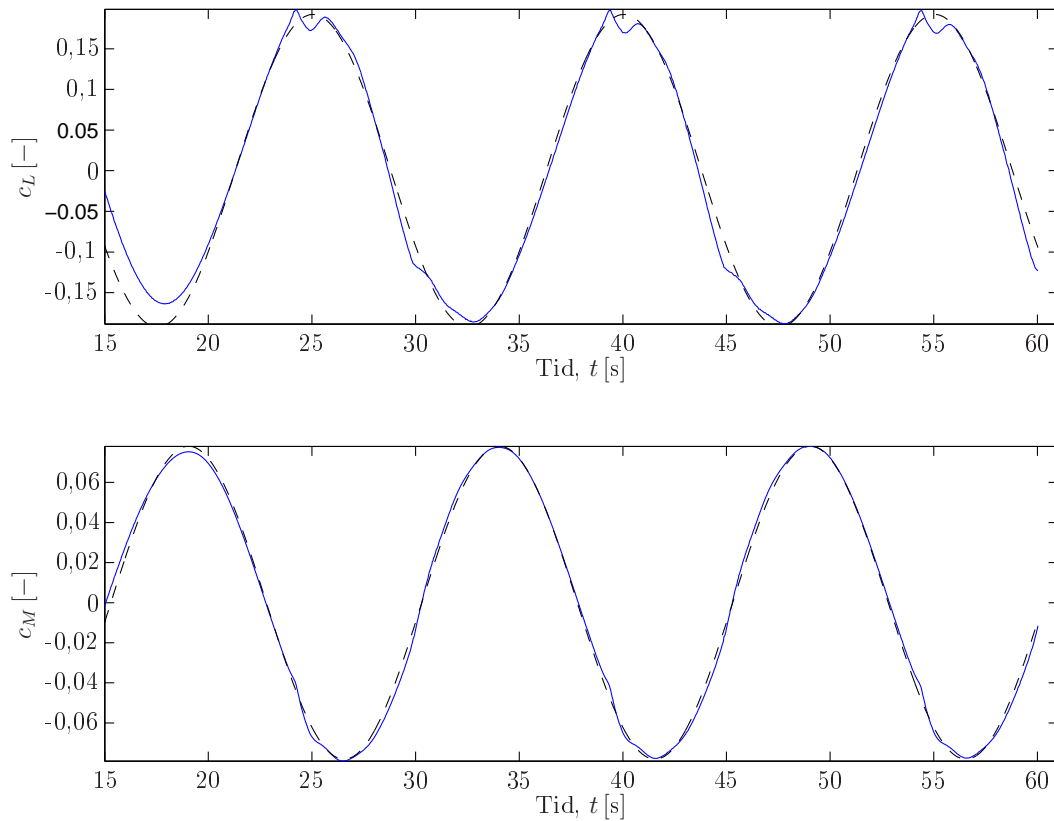
8.2 Flutter-afledede

For at kontrollere den forbedrede model i forhold til de tidligere resultater er der først kørt simuleringer med $T_{period} = 15, 20, 25$ s. Dermed kan de opnåede resultater sammenlignes direkte med de tidligere resultater. Som tidligere er de stationære simuleringer kontrolleret og det er konstateret at alt er som forventet. For de tidsafhængige simuleringer er det observeret at kraftsignalerne for simuleringen med $T_{period} = 15$ s ikke er så pænt harmoniske som hovedparten af de tidligere signaler.



Figur 8.2: Bevægelses-, Lift- og moment-signalerne fra den endelige model (EM) for simuleringen med rotation af tværsnittet ved $T_{period} = 15$ s

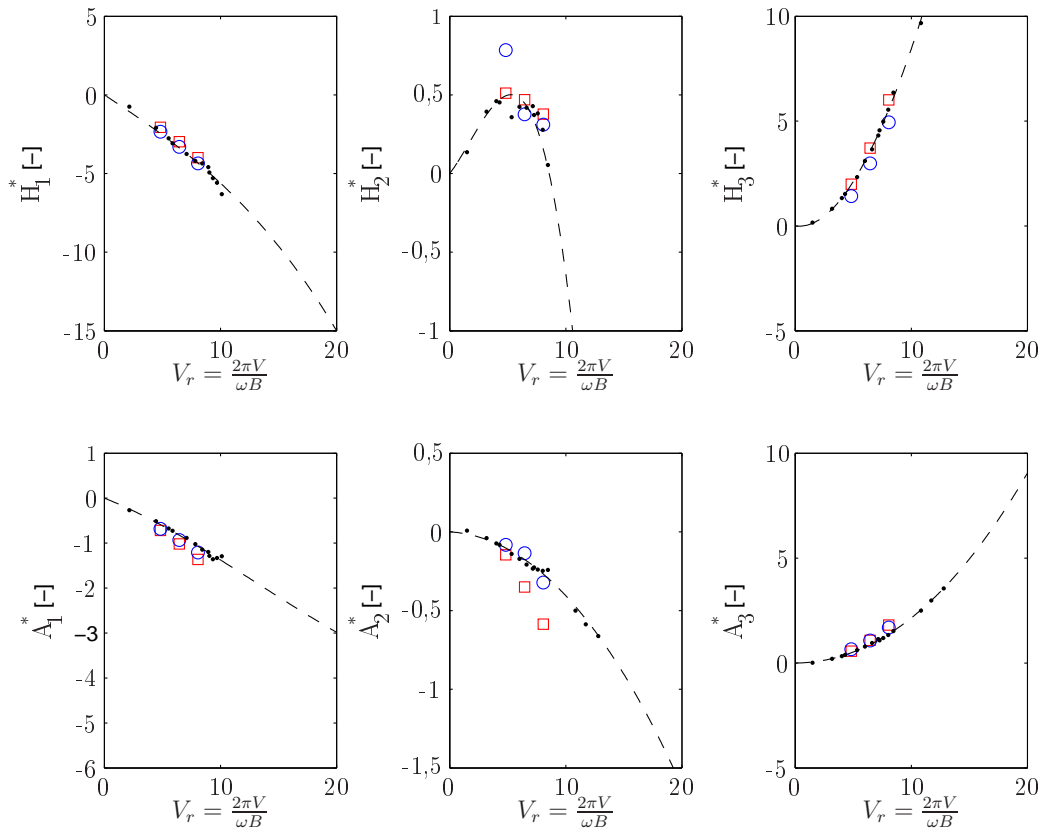
Som det fremgår af figur 8.2, er der nogle hakker i kurven for lift-kraften og momentet. Kurverne er stadig periodiske men ikke helt harmoniske. Det kan skyldes at nettet er blevet fint nok til at beskrive forskellige mindre hvirvler omkring brotværsnittet. Disse hvirvler kan forårsage lokale trykændringer, som kan aflæses i den totale kraft på tværsnittet. Disse mindre forstyrrelser i signalet har ikke betydning, hvis signalet kan fittes til en kurve med samme frekvens som bevægelsen. Yderligere skal amplituden og fasen svare til bevægelsens frekvens.



Figur 8.3: Kraftkoefficienter fra simuleringen med roterende tværsnit (—) for EM ved $T_{period} = 15$ s samt en fittet kurve (---) på formen $c = \pm\tilde{c}\sin(\omega t - \phi)$. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Som det fremgår af figur 8.3, er de fittede kurver harmoniske med samme frekvens som bevægelsen. Dermed kan resultaterne bruges til beregning af flutter-afledede. For simuleringerne med større periodetider observeres ikke disse uregelmæssigheder hvilket kan skyldes at bevægelserne er langsommere og dermed ikke så følsomme overfor små lokale variationer i trykket. Ud fra de første simuleringer med den endelige model, er de flutter-afledede beregnet og plottet sammen med resultaterne fra grundmodellen.

8 Endelig model



Figur 8.4: Flutter-afledede fra grundmodellen (\square) og den endelige model (\circ) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($- -$)

Umiddelbart ser det ud til at den forbedrede model giver næsten det samme som grundmodellen for A_3^* , hvilket også har været tilfældet for flere af modellerne i parametervariationen. Derudover er der forbedringer for både H_1^* , A_1^* og A_2^* med A_2^* som den mest forbedrede. For H_3^* ligger punkterne derimod dårligere, end det tidligere er set. For H_2^* ligger det ene punkt langt fra noget som er set tidligere. Værdien er højere end det er set tidligere for både Inf1, Dom1 og Dom2, der alle har punkter som ligger deropad.

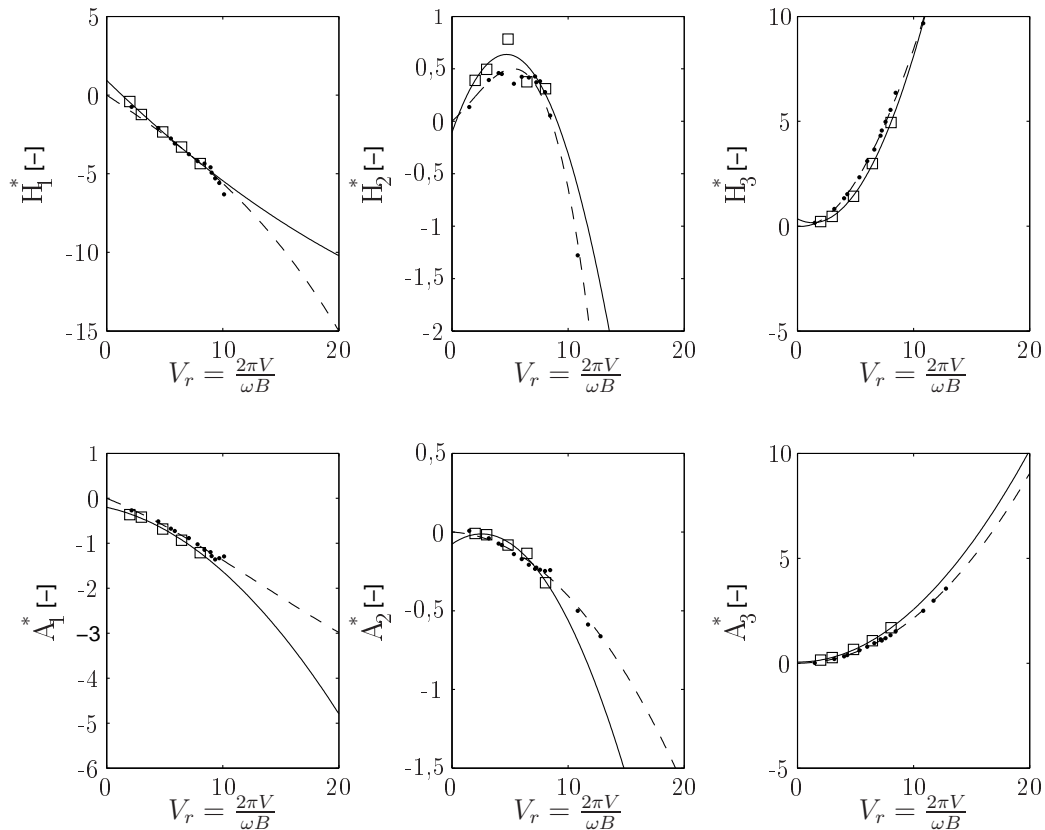
Hvis det første punkt for H_2^* udelades er resultatet generelt bedre end grundmodellen og mange af de andre modeller fra parametervariationen. Det fremgår også tydeligt når fejlen i forhold til kurven som er fittet til DMI's resultater beregnes vha. mindste kvadraters metode.

Tabel 8.4: Fejlen fra simuleringerne med grundmodellen (GM) og den endelige model (EM) i forhold til DMI's data

	GM (\square)	EM (\circ)
H_1^*	0,43	0,02
H_2^*	0,05	0,11
H_3^*	0,22	1,01
A_1^*	0,14	0,04
A_2^*	0,13	0,01
A_3^*	0,22	0,16
Total	1,20	1,35

Som det fremgår af tabel 8.4, er den samlede fejl øget til næsten det samme som for Inf1, jf. tabel 8.1. Det skyldes hovedsageligt, at fejlen på H_3^* er øget væsentligt. Punkterne ligger kun lidt under den fittede linie fra DMI's resultater, men den drastiske forøgelse af fejlen skyldes, at kurven har en større tangenthældning end de andre kurver. Tallene for de resterende flutter-afledede viser markant forbedring for H_1^* og A_2^* samt mindre forbedringer for A_1^* og A_3^* . Derudover er der en forøgelse af fejlen for H_2^* , som hovedsageligt stammer fra den ene punkt som ligger relativt langt fra de andre.

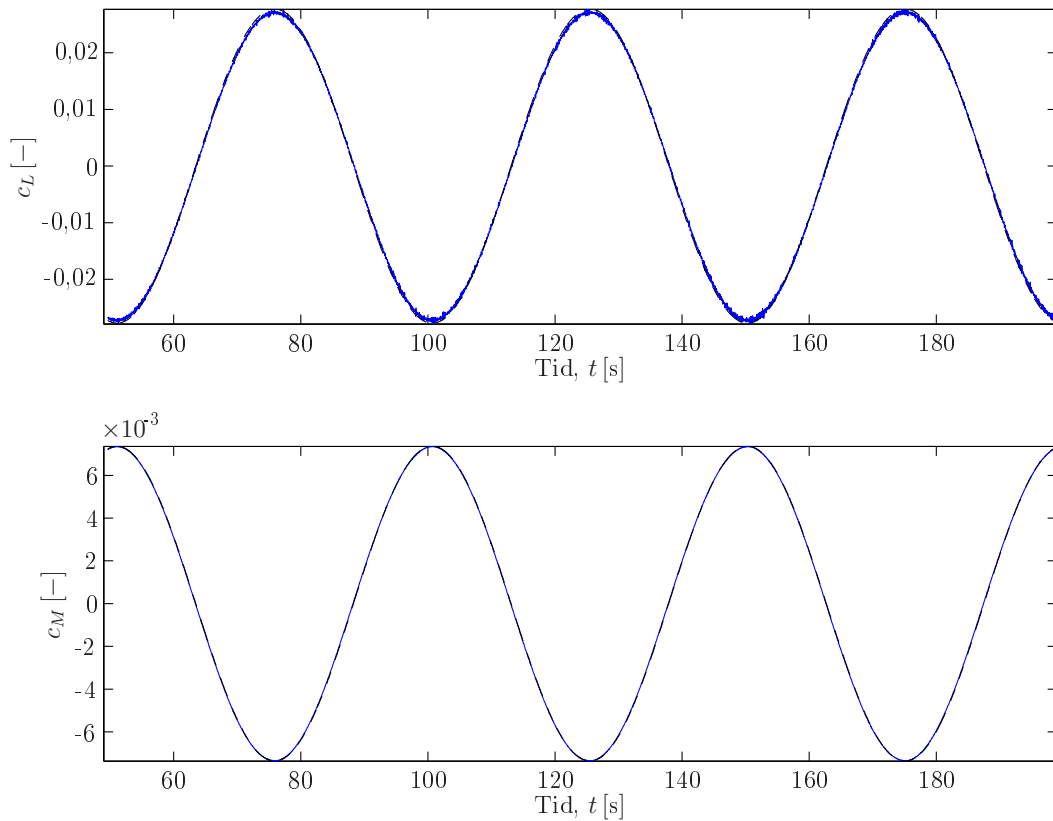
Derfor er det valgt at køre nogle flere simuleringer med relative små værdier af V_r , for at kontrollere om punkterne for H_2^* kan fittes til en acceptabel kurve. I det efterfølgende er der tilføjet værdier for $V_r = 2$ og $V_r = 3$.



Figur 8.5: Flutter-afledede fra den endelige model (\square) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($--$)

Af figur 8.5, fremgår det at kurven for H_2^* bliver væsentlig bedre med de ekstra punkter som er tilføjet. Dermed vælges det er bibeholde modellen som den er. For at få et pålideligt kurvefit til indenfor det viste interval af V_r udføres yderligere 4 simuleringer. Indtil nu er simuleringen med $T_{period} = 25$ s, den simulering som giver den største værdi af V_r som er 8,06. Derudover udføres simuleringer for $V_r = 10, 12, 14, 16$.

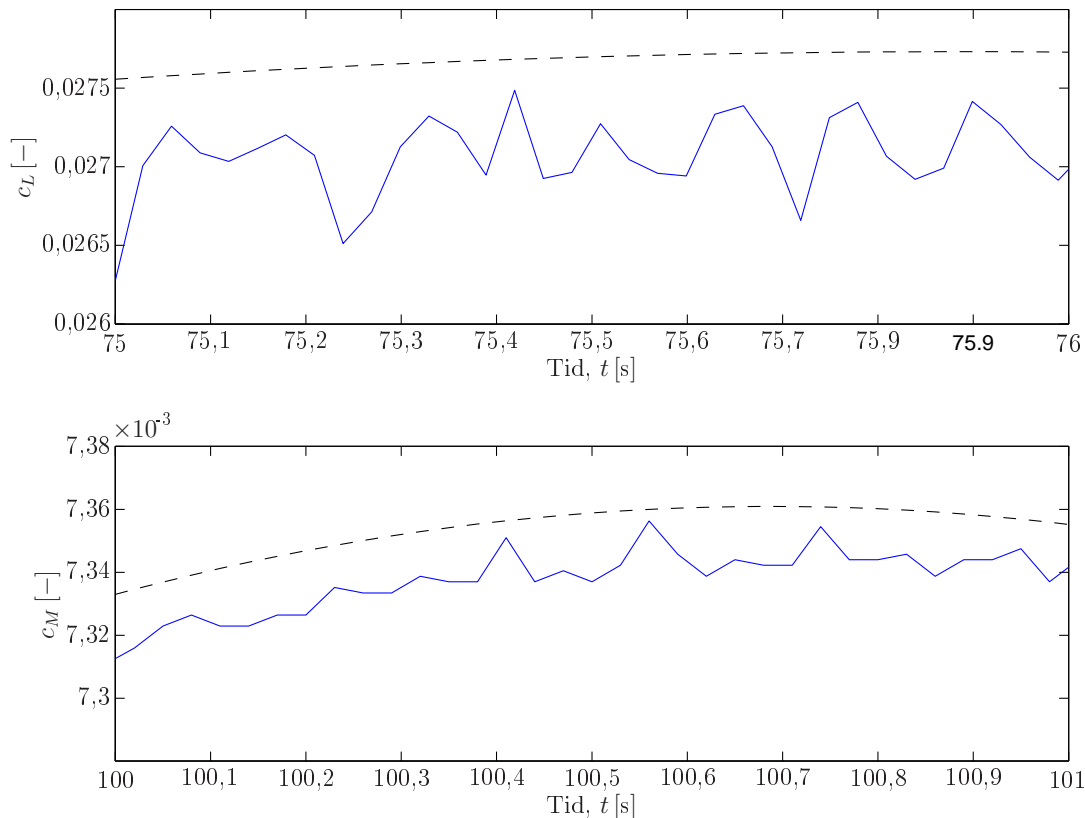
For 3 af de nye simuleringer er der observeret synlige udslag fra en højfrekvent variation i lift-kraften. Der er tilfældet for simuleringerne med $V_r = 12, 14, 16$ og et eksempel er vist på figur 8.6.



Figur 8.6: Kraftkoefficienter fra simuleringen med lodret translation tværsnittet (—) for EM ved $V_r = 16$ samt en fittet kurve (---) på formen $c = \pm \tilde{c} \sin(\omega t - \phi)$. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Udslagene af de højfrekvente variationer kan ses på figur 8.6, ved at kurven for c_L er tykkere end kurven for c_M . De højfrekvente variationer kan enten skyldes at nettet er blevet fint nok til at beskrive små hvirvler, som opstår rundt lang overfladen af brotværsnittet eller numerisk støj. Numerisk støj findes på alle signaler fra simuleringerne, men i de fleste tilfælde giver det ikke synlige udslag på de plottede figurer. For at kontrollere om udslagene skyldes numeriske støj eller hvirvler, er et udsnit af kurverne fra figur 8.6 plottet. Udsnittet dækker en periode på 1 s omkring et af kurvernes toppunkter.

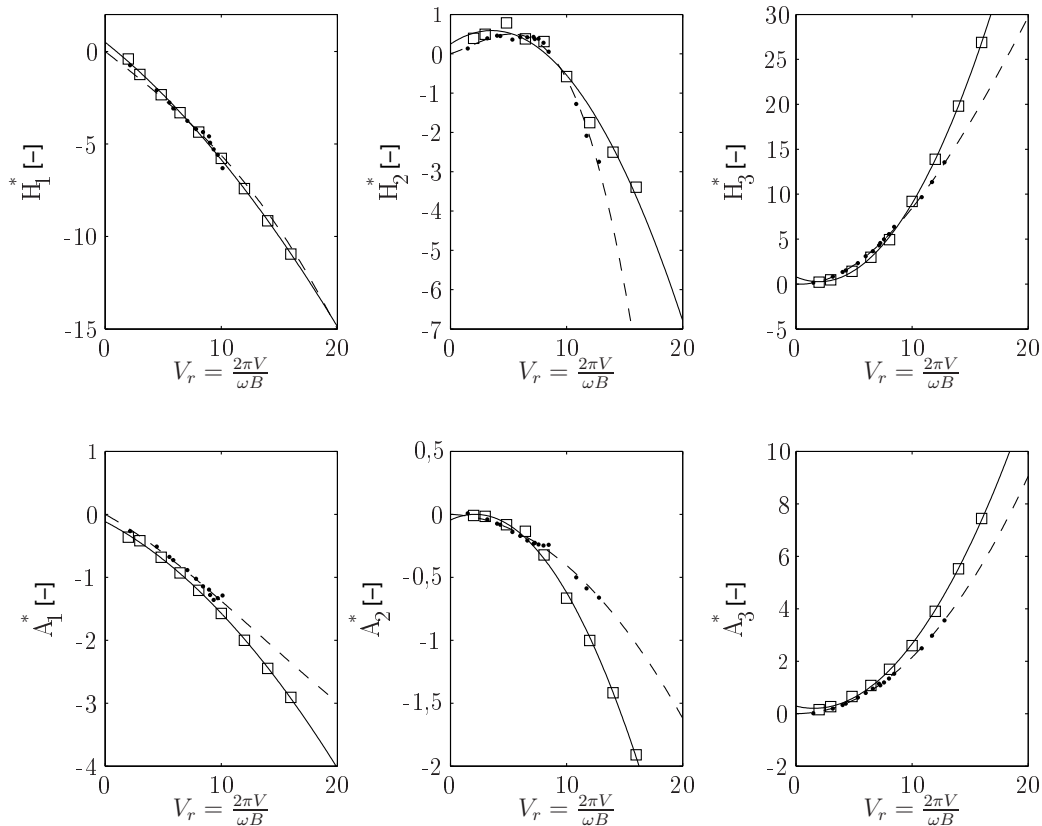
8 Endelig model



Figur 8.7: Udsnit af kraftkoefficienternes kurver fra simuleringen med lodret translation tværsnittet (-) for EM ved $V_r = 16$ samt en fittet kurve (- -) på formen $c = \pm \tilde{c} \sin(\omega t - \phi)$. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Som udsnittet på figur 8.7 viser, er der det samme antal udsving på de to kurver. Hvis udsvingene skyldes numerisk støj skal der på et sekund være $\frac{1}{dt} = \frac{1}{0,03} = 33,3333$ udslag. Ved optælling er der ca. 33 udsving på de viste udsnit for både c_L og c_M . For yderligere at kontrollere om der er tale om numerisk støj, er der kørt en simulering med $V_r = 16$ og $dt_{ny} = \frac{dt}{2} = 0.015$ s. Ud fra tilsvarende udsnit af kurverne fra den nye simulering er det konstateret, at de samme udslag kan registreres, blot med den dobbelte frekvens. Dermed kan det endeligt konkluderes, at udslagene skyldes numerisk støj som øges sammen med V_r for lift-kraften.

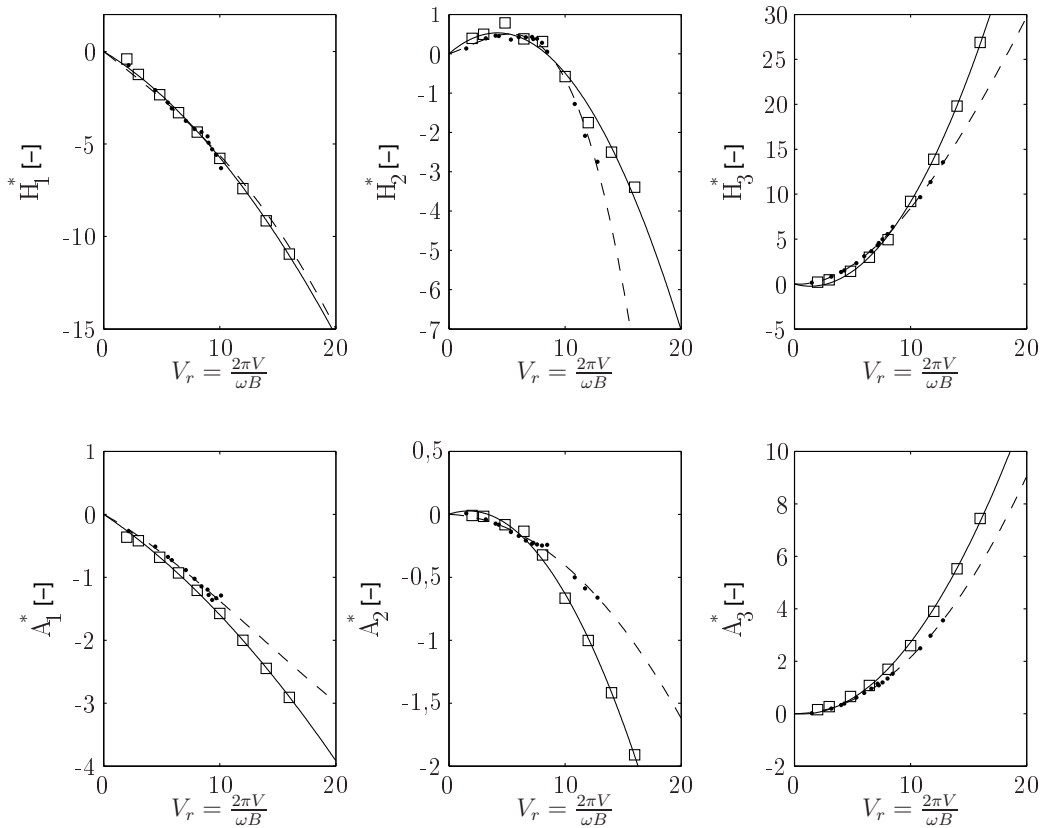
Af figuren fremgår det yderligere, at kurven som er fittet til signalet ligger lidt over signalet. Det skyldes den metode, som er anvendt til bestemmelse af amplituden med hvor det maksimale- og minimale udslag indenfor hver periode midles. For c_L er udslagene fra den numeriske støj af størrelsesordenen 0,0005, hvilket svarer til $\approx 1,8\%$ af amplituden $\tilde{c}_L = 0,0277$. For c_M er svarer udsvingene fra den numeriske støj til $\approx 2,7\%$. Den numeriske støj udgør altså en meget lille del af den samlede amplitude. Dermed er resultaterne af beregningerne næsten ikke påvirket af de højfrekvente variationer fra den numeriske støj. Alle de beregnede punkter for de 6 flutter-afledede er plottet på figur 8.8, hvor akserne på de enkelte diagrammer er ændret i forhold til tidligere figurer. Det er sket, for at alle punkterne kan være inden for de viste intervaller.



Figur 8.8: Flutter-afledede fra den endelige model (\square) med tilhørende kurvefit (-) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data (- -)

Af figur 8.8 ses det, at de fittede kurver for de forskellige flutter-afledede passer bedst til DMI's resultater for $V_r < 12$. Den eneste undtagelse er H_1^* som ligger tættest på DMI's resultater for de højeste værdier af V_r . Kurven som er fittet til værdierne fra CFD-simuleringerne, er fittet vha. mindste kvadraters metode til polynomier af forskellige ordner. Der er udført test med 2. grads-, 3. grads-, 4. grads- og 5. grads-polynomier og den gennemsnitlige forskel mellem de fittede polynomier og DMI's resultater er beregnet. Af denne beregning fremgår det at det er 2. grads-polynomiet som ligger tættest på så derfor er det valgt. Forskellen mellem kurverne er beregnet vha. mindste kvadraters metode på 200 punkter mellem $V_r = 0$ og $V_r = 20$.

De fittede kurver har en tendens til enten at "bøje af" lige før de når 0 eller ramme direkte forbi 0. Det er en væsentlig fejl at de flutter-afledede ikke giver 0 for $V = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ da broen vil generere laster og dermed bevægelser selv uden vind. Kurvefittet er derfor udført endnu en gang, hvor kurven er tvunget gennem nulpunktet. Igen er 2., 3., 4. og 5. grads polynomier testet og igen er det 2. grads polynomiet som ligger tættest på DMI's resultater.



Figur 8.9: Flutter-afledede fra den endelige model (\square) med tilhørende kurvefit (—) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data (—)

Med de nye kurvefit er forskellen mellem DMI's resultater og resultaterne fra dette projekt blevet mindsket omkring de små værdier af V_r , mens der ikke er nogen forskel at se for de høje værdier. Specielt H_2^* ligger bedre, efter kurven er blevet tvunget gennem nulpunktet.

8.3 Kritisk hastighed

I det efterfølgende afsnit er broens kritiske flutter-hastighed beregnet vha. metoden beskrevet i afsnit 4.2. Den kritiske flutterhastighed er sammenlignet med flutterhastigheden, som er beregnet på begrund af DMI's resultater, som tidligere er blevet præsenteret.

Ud fra de polynomiefit som er lavet i forrige afsnit, er der bestemt et funktionsudtryk for hver af de 6 flutter-afledede. Funktionsudtrykkene for de 6 flutter-afledede er:

$$\begin{aligned}
 H_1^*(K) &= -0,01944V_r^2 - 0,379V_r \\
 H_2^*(K) &= -0,03024V_r^2 + 0,2534V_r \\
 H_3^*(K) &= 0,126V_r^2 - 0,3459V_r \\
 A_1^*(K) &= -0,003614V_r^2 - 0,1235V_r \\
 A_2^*(K) &= -0,009481V_r^2 + 0,03173V_r \\
 A_3^*(K) &= 0,03097V_r^2 - 0,03764V_r
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

hvor

$$V_r = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi V}{\omega B} \tag{8.2}$$

Udtrykkene for de 6 flutter-afledede fra formel (8.1) indsættes i udtrykkene for \mathbf{c}_0 og \mathbf{k}_0 fra formel (4.33) og (4.34).

Systemmatricerne fra formel (4.29) til (4.31) har som \mathbf{c}_0 og \mathbf{k}_0 dimension efter antallet af frihedsgrader. Da der er anvendt 2 frihedsgrader til at beskrive systemet er alle 3 systemmatricer 2×2 -matricer. Matricerne opstilles ud fra oplysningerne i afsnit 3.2 idet den første symmetriske egensvingningsform anvendes både for translations- og rotations-frihedsgraden. Dermed bliver følgende værdier:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 19.562 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \\
 M_2 &= 2.342.625 \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}} \\
 \omega_1 &= 2\pi f_1 = 0,6189 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
 \omega_2 &= 2\pi f_2 = 1,6016 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
 \zeta_1 &= \zeta_2 = 0,01
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Der giver følgende 3 systemmatricer:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 19.562 & 0 \\ 0 & 2.342.625 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

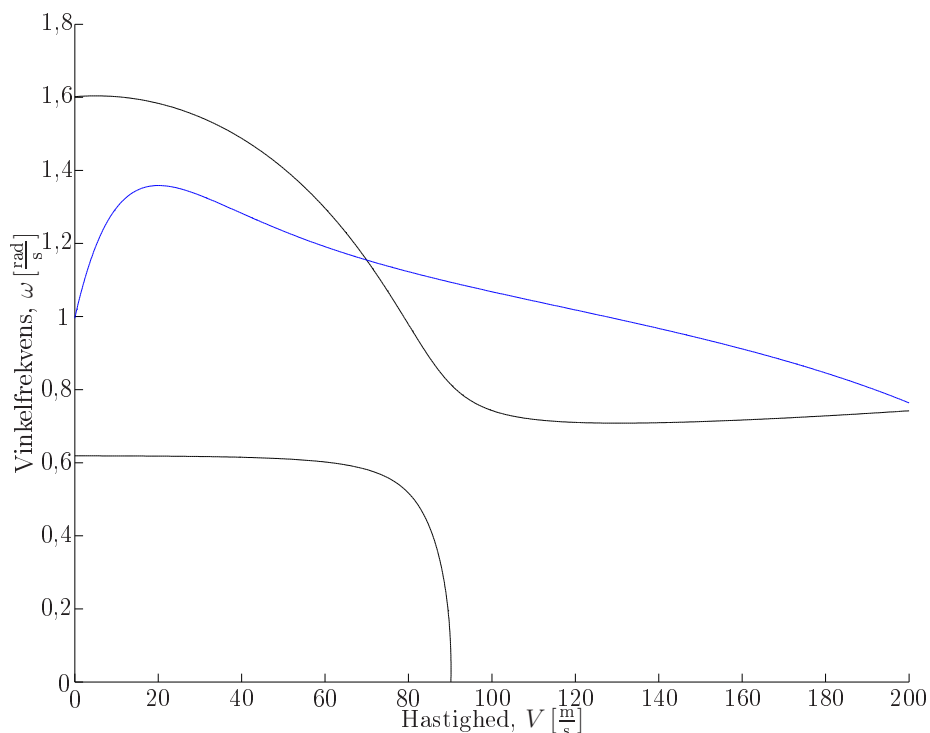
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 242,14 & 0 \\ 0 & 75.038,21 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 7.492,82 & 0 \\ 0 & 6.008.999,68 \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

8 Endelig model

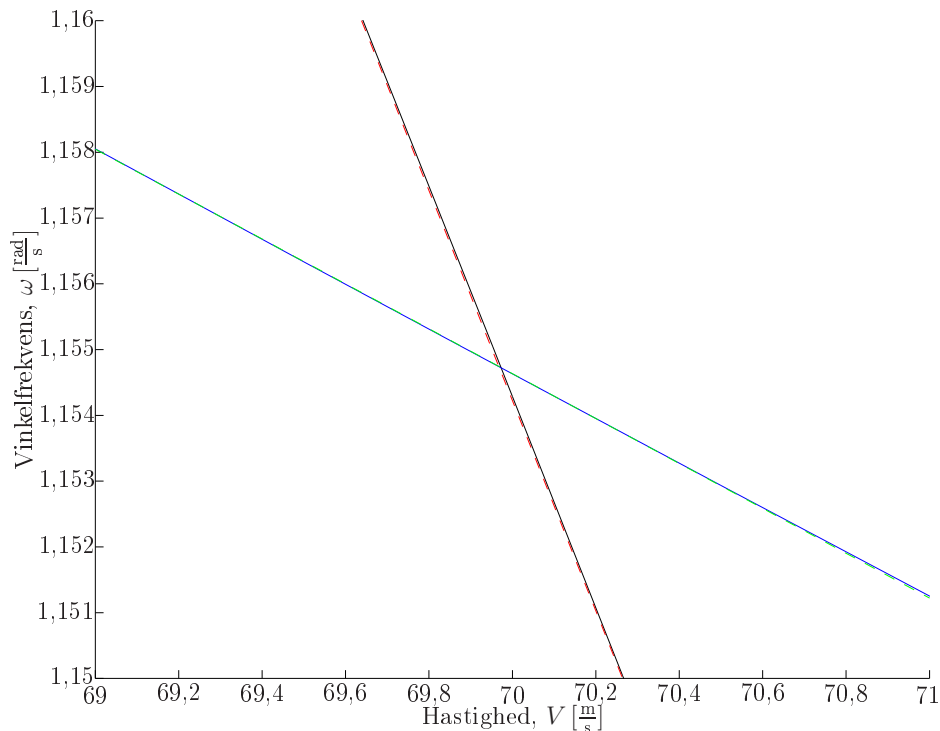
Flutter-betingelsen fra formel (4.37) er hermed løst for forskellige kombinationer af V og ω indenfor intervallerne $V \in [1; 200] \frac{\text{m}}{\text{s}}$ og $\omega \in [0, 1; 2] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Flutter-betingelsen indeholder komplekse tal, hvorfor den kan opdeles i 2 ligninger for hhv. real- og imaginær-delen af determinanten. Når værdien af de to ligninger beregnes inden for de to intervaller, som er givet ovenfor, kan det plottes som to flader i rummet. Ved at optegne fladernes 0-konturer findes områderne, hvor real- og imaginær-delen hver for sig opfylder flutterbetingelsen. Hvor konturerne skærer hinanden er flutter-betingelsen opfyldt for begge flader.



Figur 8.10: 0-konturer for den reelle del af determinantbetingelsen (—) og for den imaginære del (- -)

Skæringen mellem de to kurver er beregnet ved at lave et kurvefit indenfor et lille interval omkring skæringen og derefter beregne den faktiske skæring. Hvis intervallet for V er tilstrækkeligt lille, kan kurverne beskrives vha. et 1. grads polynomium som vist på figur 8.11.



Figur 8.11: Udsnit af 0-konturerne for den reelle del af determinantbetingelsen (—) med tilhørende kurvefit (- -) og for den imaginære del (—) med tilhørende kurvefit (- -)

Ud fra kurvefittene på figur 8.11 er den kritiske hastighed beregnet til $V_c = 69,97 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ med en tilhørende frekvens på $\omega_c = 1,1547 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Beregningen er kontrolleret ved at udføre en tilsvarende beregning med de flutter-afledede, som er udført af DMI og som tidligere har været anvendt til sammenligning af de flutter-afledede, der er beregnet vha. CFD i forbindelse med dette projekt. Beregningen udføres med det samme program efter den samme procedure og giver en kritisk hastighed på $V_c = 69,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ med en tilhørende frekvens på $\omega_c = 1,2585 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Definitionsfiler til simuleringerne, resultatfiler og programmet til databehandling findes på: [DVD\CFD\2DOF\Endelig model\].

8.4 Sammenfatning

I afsnit 8.1 er der beskrevet forskellige ændringer som er implementeret i den endelige model på baggrund af parametervariationen fra kapitel 7. Det har resulteret i af beregningsdomænet er blevet næsten 3 gange større i forhold til GM. Yderligere er der indført forfininger af nettet omkring brotværnsnittet.

Med den nye model (EM) er der først udført 3 simuleringer som er kontrolleret i forhold til DMI's resultater. Desværre er den totale fejl øget i forhold til udgangspunktet, men

8 Endelig model

forøgelsen dækker over forbedringer for 4 af de flutter-afledede, en mindre forringelse for H_2^* samt en væsentlig forringelse af H_3^* . Det er valgt at bibeholde den nye model, selvom det umiddelbart ser ud til at resultatet er lidt dårligere end tidligere modeller. Det skyldes at hovedparten af fejlen kommer fra flutter-afledede, som ligger på kurver som ligner kurverne fra DMI mere end tidligere.

Ved udførelse af flere simuleringer og etablering af kurvefit som skærer ordinat-aksen i nulpunktet, er det konstateret, at for $V_r < 12$ er der god sammenhæng mellem de flutter-afledede beregnet vha. CFD og DMI's flutterafledede. DMI's resultater dækker oprindeligt kun intervallet for $V_r \leq 12$. Det er yderligere konstateret at vha. 2. grads polynomier, er der opnået de bedste fit.

Ud fra de beregnede flutter-afledede er den kritiske hastighed beregnet vha. et simpelt flytningsfelt, som er beskrevet i afsnit 4.2. Ud fra denne metode antages det at hele brodækket bevæges som et stift legeme, hvilket er en grov tilnærmelse. Alligevel beregnes kritiske flutter hastigheder som minder om de resultater som broen er projekteret ud fra.

Tabel 8.5: Den kritiske fluter hastighed med tilhørende kritisk vinkelfrekvens beregnet vha. flutter-afledede fra DMI og CFD

	Kritisk hastighed, $V_c [\frac{m}{s}]$	Kritisk frekvens, $\omega_c [\frac{rad}{s}]$	Reduceret hastighed, $V_r [-]$
CFD	69,97	1,1547	12,28
DMI	69,74	1,2585	11,23

Tabel 8.5 viser, at de kritiske hastigheder som er beregnet på baggrund af de 2 sæt af flutter-afledede er næsten ens, mens de tilhørende frekvenser afviger lidt mere. De reducerede hastigheder som er beregnet ud fra de kritiske værdier ligger lidt over 12 for CFD beregningerne, men da der er udført CFD simuleringer op til $V_r = 16$ er der ikke tale om ekstrapoleringer, hvorfor resultatet betragtes som gyldigt. De kritiske værdier beregnet vha. DMI's flutterafledede giver en reduceret hastighed lige under 12 og dermed er der heller ikke her tale om ekstrapolerede værdier for V_r . Det bemærker at store dele af det testede interval op til $V = 200 \frac{m}{s}$ og $\omega = 2 \frac{rad}{s}$ ligger udenfor det simulerede interval for V_r .

Del II

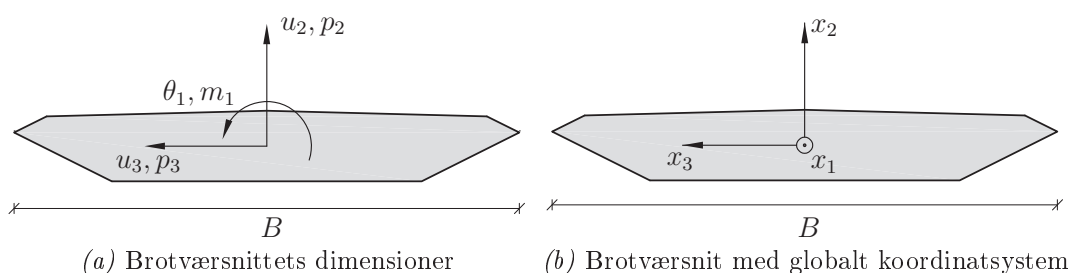
Plant tværsnit med 3 frihedsgrader

9

Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader

Dette kapitel omhandler de dynamiske ligninger for et brotværsnit med 3 frihedsgrader. Brotværsnittet er det samme som er anvendt tidligere i dette projekt. Dermed findes tværsnittets dimensioner på figur 4.2a. Flyttingsvektoren beskrevet ved modalkoordinaterne og egensvingningsformerne, som vist i formel (4.2), er stadig de samme. Komponenterne i egensvingningsformerne, formel (4.3), er ligeledes ens. Dermed kan bevægelsesligningerne for det generelle tilfælde med 6 frihedsgrader opstilles som i formel (4.4).

Som antydnet med overskriften anvendes i dette kapitel et tværsnit med 3 frihedsgrader. Tværsnittet med 3 frihedsgrader er vist på figur 9.1a.



Figur 9.1: Brotværsnit med angivelse af de 3 frihedsgrader samt det globale koordinatsystem

Som angivet på figur 9.1a er de 3 frihedsgrader: $u_2(x_1, t)$, $u_3(x_1, t)$ og $\theta_1(x_1, t)$, hvilket svarer til lift- og drag-kræfterne samt momentet hhv. $p_2(x_1, t)$, $p_3(x_1, t)$ og $m_1(x_1, t)$ i forhold til tværsnittets stivlægemebævegelse med origo som udgangspunkt. Det globale koordinatsystem med origo placeret centralt i tværsnittet er vist på figur 9.1b.

Modallasten fra bevægelsesligningerne, formel (4.4), er vist for 3 frihedsgrader:

9 Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader

$$F_j(t) = \int_0^L (U_2^{(j)}(x_1)p_2(x_1, t) + U_3^{(j)}(x_1)p_3(x_1, t) + \Theta_1^{(j)}(x_1)m_1(x_1, t))dx_1 \quad (9.1)$$

hvor L som tidligere er den fulde længde af brodækket og er defineret på figur 4.1. Som tidligere er lasterne antaget at være selvforstærkende af brodækkets bevægelser. Igen adopteres R. H. Scanlans notation for de 2D-lineariserede laster beskrevet ved flutter-afledede. For 3 frihedsgrader er der principielt 18 flutter-afledede til beskrivelse af de 3 laster, som eksempelvis beskrevet af [Zhu and Xu, 2005]:

$$p_2(x_1, t) = \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(KH_1^*(K) \frac{\dot{u}_2}{V} + KH_2^*(K) B \frac{\dot{\theta}_1}{V} + K^2 H_3^*(K) \theta_1 \right. \\ \left. + K^2 H_4^*(K) \frac{u_2}{B} + KH_5^*(K) \frac{\dot{u}_3}{V} + K^2 H_6^*(K) \frac{u_3}{B} \right) \quad (9.2)$$

$$p_3(x_1, t) = \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(KP_1^*(K) \frac{\dot{u}_3}{V} + KP_2^*(K) B \frac{\dot{\theta}_1}{V} + K^2 P_3^*(K) \theta_1 \right. \\ \left. + K^2 P_4^*(K) \frac{u_3}{B} + KP_5^*(K) \frac{\dot{u}_2}{V} + K^2 P_6^*(K) \frac{u_2}{B} \right) \quad (9.3)$$

$$m_1(x_1, t) = \frac{1}{2}\rho V^2 B^2 \left(KA_1^*(K) \frac{\dot{u}_2}{V} + KA_2^*(K) B \frac{\dot{\theta}_1}{V} + K^2 A_3^*(K) \theta_1 \right. \\ \left. + K^2 A_4^*(K) \frac{u_2}{B} + KA_5^*(K) \frac{\dot{u}_3}{V} + K^2 A_6^*(K) \frac{u_3}{B} \right) \quad (9.4)$$

hvor

- ρ er densiteten af luft
- V er middelvindhastigheden
- B er bredden af brodækket jf. figur 4.2
- K er den reducerede frekvens jf. formel (4.8)
- $H_i^*(K)$ er flutter-afledede for den lodrette translation, $i = 1, 2, 3$
- $P_i^*(K)$ er flutter-afledede for den vandrette translation, $i = 1, 2, 3$
- $A_i^*(K)$ er flutter-afledede for rotationen, $i = 1, 2, 3$

De 3 flytningskomponenter svarende til de 3 frihedsgrader er vha. egensvingningsformer og modalkoordinater givet ved:

$$u_2(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_2^{(j)}(x_1)q_j(t) \quad (9.5)$$

$$u_3(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_3^{(j)}(x_1)q_j(t) \quad (9.6)$$

$$\theta_1(x_1, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_1^{(j)}(x_1)q_j(t) \quad (9.7)$$

Formel (9.5) til (9.7) indsættes i formel (9.2) hvorefter leddene ordnes efter modalkoordinaterne:

$$\begin{aligned} p_2(x_1, t) &= \frac{1}{2}\rho V^2 B \left(KH_1^*(K) \frac{\sum_{j=1}^{\infty} U_2^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} + KH_2^*(K) B \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \Theta_1^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} \right. \\ &\quad + K^2 H_3^*(K) \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_1^{(j)}(x_1)q_j(t) + K^2 H_4^*(K) \frac{\sum_{j=1}^{\infty} U_2^{(j)}(x_1)q_j(t)}{B} \\ &\quad \left. + KH_5^*(K) \frac{\sum_{j=1}^{\infty} U_3^{(j)}(x_1)\dot{q}_j(t)}{V} + K^2 H_6^*(K) \frac{\sum_{j=1}^{\infty} U_3^{(j)}(x_1)q_j(t)}{B} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\dot{q}_j(t) \frac{1}{2}\rho V B K \left(H_1^*(K) U_2^{(j)}(x_1) + B H_2^* \Theta_1^{(j)}(x_1) + H_5^* U_3^{(j)}(x_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_j(t) \frac{1}{2}\rho V^2 K^2 \left(B H_3^* \Theta_1^{(j)}(x_1) + H_4^* U_2^{(j)}(x_1) + H_6^* U_3^{(j)}(x_1) \right) \right) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Tilsvarende indsættes formel (9.5) til (9.7) ind i formel (9.3):

$$\begin{aligned} p_3(x_1, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\dot{q}_j(t) \frac{1}{2}\rho V B K \left(P_1^*(K) U_3^{(j)}(x_1) + B P_2^* \Theta_1^{(j)}(x_1) + P_5^* U_2^{(j)}(x_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_j(t) \frac{1}{2}\rho V^2 K^2 \left(B P_3^* \Theta_1^{(j)}(x_1) + P_4^* U_3^{(j)}(x_1) + P_6^* U_2^{(j)}(x_1) \right) \right) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Endelig indsættes formel (9.5) til (9.7) ind i formel (9.4):

$$\begin{aligned} m_1(x_1, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\dot{q}_j(t) \frac{1}{2}\rho V B^2 K \left(A_1^*(K) U_2^{(j)}(x_1) + B A_2^* \Theta_1^{(j)}(x_1) + A_5^* U_3^{(j)}(x_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_j(t) \frac{1}{2}\rho V^2 B K^2 \left(B A_3^* \Theta_1^{(j)}(x_1) + A_4^* U_2^{(j)}(x_1) + A_6^* U_3^{(j)}(x_1) \right) \right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

9 Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader

Formel (9.8) til (9.10) indsættes i modallasten fra formel (9.1):

$$F_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k_{jk}(\omega, V)q_k(t) + c_{jk}(\omega, V)\dot{q}_k(t) \quad (9.11)$$

hvor

$$\begin{aligned} k_{jk}(\omega, V) = & \frac{1}{2}\rho V^2 K^2 \left(H_4^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1)U_2^{(k)}(x_1)dx_1 \right. \\ & + P_4^*(K) \int_0^L U_3^{(j)}(x_1)U_3^{(k)}(x_1)dx_1 + H_6^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1)U_3^{(k)}(x_1)dx_1 \\ & + P_6^*(K) \int_0^L U_3^{(j)}(x_1)U_2^{(k)}(x_1)dx_1 + B \left(A_4^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1)U_2^{(k)}(x_1)dx_1 \right. \\ & + A_6^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1)U_3^{(k)}(x_1)dx_1 + H_3^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1)\Theta_1^{(k)}(x_1)dx_1 \\ & \left. \left. + P_3^*(K) \int_0^L U_3^{(j)}(x_1)\Theta_1^{(k)}(x_1)dx_1 + BA_3^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1)\Theta_1^{(k)}(x_1)dx_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} c_{jk}(\omega, V) = & \frac{1}{2}\rho VBK \left(H_1^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1)U_2^{(k)}(x_1)dx_1 \right. \\ & + P_1^*(K) \int_0^L U_3^{(j)}(x_1)U_3^{(k)}(x_1)dx_1 + H_5^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1)U_3^{(k)}(x_1)dx_1 \\ & + P_5^*(K) \int_0^L U_3^{(j)}(x_1)U_2^{(k)}(x_1)dx_1 + B \left(A_1^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1)U_2^{(k)}(x_1)dx_1 \right. \\ & + A_5^*(K) \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1)U_3^{(k)}(x_1)dx_1 + H_2^*(K) \int_0^L U_2^{(j)}(x_1)\Theta_1^{(k)}(x_1)dx_1 \\ & \left. \left. + P_2^*(K) \int_0^L U_3^{(j)}(x_1)\Theta_1^{(k)}(x_1)dx_1 + BA_2^* \int_0^L \Theta_1^{(j)}(x_1)\Theta_1^{(k)}(x_1)dx_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Af indgangene i k_{jk} og c_{jk} kan flere defineres som 0 vha. reglen om integration af symmetriske og asymmetriske egensvingningsformer, samt ud fra ordningen af de første 12 egensvingningsformer som vist i tabel 9.1.

Tabel 9.1: Rækkefølgen af de første 12 egensvingsformer

Egensvingsningsform	$U_2^{(j)}(x_1)$	$U_3^{(j)}(x_1)$	$\Theta_1^{(j)}(x_1)$
1	1. symmetriske	0	0
2	0	1. symmetriske	0
3	0	0	1. symmetriske
4	1. asymmetriske	0	0
5	0	1. asymmetriske	0
6	0	0	1. asymmetriske
7	2. symmetriske	0	0
8	0	2. symmetriske	0
9	0	0	2. symmetriske
10	2. asymmetriske	0	0
11	0	2. asymmetriske	0
12	0	0	2. asymmetriske

Ud fra ovenstående kan bevægelsesligningerne opskrives på matrixform som vist i afsnit 4.1 fra formel (4.16) til (4.20). $\mathbf{k}_0(\omega, V)$ og $\mathbf{c}_0(\omega, V)$ fra formel (4.21) og (4.22) erstattes med følgende matricer:

$$\mathbf{k}_0(\omega, V) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 & k_{17} & k_{18} & k_{19} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 & k_{27} & k_{28} & k_{29} & 0 & 0 & 0 & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 & k_{37} & k_{38} & k_{39} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & k_{45} & k_{46} & 0 & 0 & 0 & k_{410} & k_{411} & k_{412} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} & 0 & 0 & 0 & k_{510} & k_{511} & k_{512} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} & 0 & 0 & 0 & k_{610} & k_{611} & k_{612} & \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & 0 & 0 & 0 & k_{77} & k_{78} & k_{79} & 0 & 0 & 0 & \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & 0 & 0 & 0 & k_{87} & k_{88} & k_{89} & 0 & 0 & 0 & \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & 0 & 0 & 0 & k_{97} & k_{98} & k_{99} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & k_{104} & k_{105} & k_{106} & 0 & 0 & 0 & k_{1010} & k_{1011} & k_{1012} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{114} & k_{115} & k_{116} & 0 & 0 & 0 & k_{1110} & k_{1111} & k_{1112} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{124} & k_{125} & k_{126} & 0 & 0 & 0 & k_{1210} & k_{1211} & k_{1212} & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

9 Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader

$$\mathbf{c}_0(\omega, V) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} & c_{19} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & c_{27} & c_{28} & c_{29} & 0 & 0 & 0 & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & c_{37} & c_{38} & c_{39} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & c_{410} & c_{411} & c_{412} & \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & c_{510} & c_{511} & c_{512} & \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} & 0 & 0 & 0 & c_{610} & c_{611} & c_{612} & \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & 0 & 0 & 0 & c_{77} & c_{78} & c_{79} & 0 & 0 & 0 & \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & 0 & 0 & 0 & c_{87} & c_{88} & c_{89} & 0 & 0 & 0 & \\ c_{91} & c_{92} & c_{93} & 0 & 0 & 0 & c_{97} & c_{98} & c_{99} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & c_{104} & c_{105} & c_{106} & 0 & 0 & 0 & c_{1010} & c_{1011} & c_{1012} & \\ 0 & 0 & 0 & c_{114} & c_{115} & c_{116} & 0 & 0 & 0 & c_{1110} & c_{1111} & c_{1112} & \\ 0 & 0 & 0 & c_{124} & c_{125} & c_{126} & 0 & 0 & 0 & c_{1210} & c_{1211} & c_{1212} & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

Som tidligere beskrevet repræsenterer $\mathbf{c}_0(\omega, V)$ og $\mathbf{k}_0(\omega, V)$ lastled som er proportionale med hhv. modalhastigheden og modalflytningen. Alle matricerne fra bevægelsesligningen på matrixform, formel (4.16), har dimensionen $n \times n$, hvor n er antallet af egensvingningsformer som er medtaget i beregningen.

Også for 3 frihedsgrader findes en kombination af den cirkulære frekvensen og hastigheden som genererer en harmonisk bevægelse for et frit bevægeligt tværsnit. Dermed vil kombinationer af hastigheder og cirkulære frekvenser over det kritiske niveau gøre systemet ustabil mens det er stabilt for kombinationer under det kritiske niveau. For at beregne det kritiske niveau antages flytningerne at være harmoniske på følgende form:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (9.16)$$

hvor

- \mathbf{q}_0 er svingningens konstante amplitude
- ω er den cirkulære flutter frekvens

Ved indsættelse af formel (9.16) i bevægelsesligningerne, formel (4.16), kan disse reduceres til det ikke-lineære egenverdiproblem som har følgende ikke trivielle løsning:

$$\det\left(-\omega^2 \mathbf{m} + i\omega(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0(\omega, V_c)) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0(\omega, V_c))\right) = 0 \quad (9.17)$$

Formel (9.17) betegnes også flutter betingelsen og giver de 2 ligninger $\text{Re}(\det(A)) = 0$ og $\text{Im}(\det(A)) = 0$ til at bestemme V_c og ω ud fra.

9.1 Simpelt flytningsfelt

Som det er tilfældet for beregningerne med 2 frihedsgrader kan et simpelt flytningsfelt antages. Dermed simplificeres nogle af ligningerne. Først opskrives bevægelsesligningerne som funktion af de kartesiske koordinater frem for modalkoordinater:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (9.18)$$

hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ \theta_1(t) \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_3(t) \\ m_1(t) \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_3\omega_3M_3 \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \omega_1^2M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2M_3 \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

Lastvektoren fra formel (9.20) skrives på følgende form:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_3(t) \\ m_1(t) \end{bmatrix} = \mathbf{c}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_0\mathbf{u} \quad (9.24)$$

\mathbf{c}_0 og \mathbf{k}_0 opstilles på baggrund af udtrykkene for lift-kraften, drag-kraften og momentet

9 Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader

i hhv. formel (9.2), (9.3) og (9.4):

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{2}\rho V B K \begin{bmatrix} H_1^*(K) & H_5^*(K) & B H_2^*(K) \\ P_5^*(K) & P_1^*(K) & B P_2^*(K) \\ B A_1^*(K) & B A_5^*(K) & B^2 A_2^*(K) \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

$$\mathbf{k}_0 = \frac{1}{2}\rho V^2 K^2 \begin{bmatrix} H_4^*(K) & H_6^*(K) & B H_3^*(K) \\ P_6^*(K) & P_4^*(K) & B P_3^*(K) \\ B A_4^*(K) & B A_6^*(K) & B^2 A_3^*(K) \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

Igen antages det at bevægelsen er harmonisk med konstant amplitude hvilket svarer til systemets kritiske tilstand. Bevægelsen beskrives ved:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} \quad (9.27)$$

hvor

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

\tilde{u}_2 , \tilde{u}_3 og $\tilde{\theta}_1$ er de konstante reelle amplituder for hhv. translations- og rotationsbevægelserne. Ved indsættelse af formel (9.27) i formel (9.18) reduceres bevægelsesligningerne til følgende determinant:

$$\det\left(-\omega^2 \mathbf{m} + i\omega(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0(\omega, V)) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0(\omega, V))\right) = 0 \quad (9.29)$$

Formel (9.29) er magen til formel (9.17) bortset fra at til formel (9.29) anvendes systemmatricerne fra formel (9.21) til (9.23) samt formel (9.25) og (9.26) frem for matricerne angivet tidligere.

9.2 Flutter-afledede

For at kunne løse determinaterne fra formel (9.17) eller (9.29) kræves funktionsudtryk for de 18 flutterafledede som, indgår i formel (9.25) og (9.26). Disse bestemmes i lighed med tidligere vha. CFD simuleringer med antagelse af at broens bevægelser er harmoniske:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \tilde{u}_2 e^{i\omega t} \\ u_3(t) &= \tilde{u}_3 e^{i\omega t} \\ \theta_1(t) &= \tilde{\theta}_1 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (9.30)$$

hvor

ω er bevægelsernes cirkulære egenfrekvenser
 $\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\theta}_1$ er bevægelsernes konstante reelle amplituder

Som tidligere antages det at lasterne varierer harmonisk med samme frekvens som bevægelsen, samt at lasterne evt. er faseforskuet med ϕ i forhold til bevægelsen. Således kan formel (9.30) indsættes i formel (9.2), (9.3) og (9.4):

$$p_2(x_1, t) = \frac{1}{2} \rho V^2 B c_L \quad (9.31)$$

$$p_3(x_1, t) = \frac{1}{2} \rho V^2 B c_D \quad (9.32)$$

$$m_1(x_1, t) = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 c_M \quad (9.33)$$

hvor

$$\begin{aligned} c_L(x_1, t) &= K^2 e^{i\omega t} \left(\frac{\tilde{u}_2}{B} (iH_1^*(K) + H_4^*(K)) + \frac{\tilde{u}_3}{B} (iH_5^*(K) + H_6^*(K)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\theta}_1 (iH_2^*(K) + H_3^*(K)) \right) \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned} c_D(x_1, t) &= K^2 e^{i\omega t} \left(\frac{\tilde{u}_2}{B} (iP_5^*(K) + P_6^*(K)) + \frac{\tilde{u}_3}{B} (iP_1^*(K) + P_4^*(K)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\theta}_1 (iP_2^*(K) + P_3^*(K)) \right) \end{aligned} \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} c_M(x_1, t) &= K^2 e^{i\omega t} \left(\frac{\tilde{u}_2}{B} (iA_1^*(K) + A_4^*(K)) + \frac{\tilde{u}_3}{B} (iA_5^*(K) + A_6^*(K)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\theta}_1 (iA_2^*(K) + A_3^*(K)) \right) \end{aligned} \quad (9.36)$$

Da det tidligere er antaget at kræfterne varierer harmonisk vil kraft-koefficienterne fra formel (9.34) til (9.36) også være harmoniske. Kraft-koefficienterne kan dermed beskrives vha.:

9 Dynamiske ligninger for 3 frihedsgrader

$$\begin{aligned}
 c_L &= \tilde{c}_L e^{i(\omega t - \phi_L)} \\
 c_D &= \tilde{c}_D e^{i(\omega t - \phi_D)} \\
 c_M &= \tilde{c}_M e^{i(\omega t - \phi_M)}
 \end{aligned} \tag{9.37}$$

Ved at indsætte det første udtryk fra formel (9.37) i formel (9.34), kan der udledes udtryk for de flutter-afledede H_j^* hvor $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\begin{aligned}
 H_1^* &= \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_L B e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad H_5^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_L B e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{u}_3} \right), \quad H_2^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_L e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right) \\
 H_4^* &= \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_L B e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad H_6^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_L B e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{u}_3} \right), \quad H_3^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_L e^{-i\phi_L}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right)
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

Det andet udtryk fra formel (9.37) indsættes i formel (9.35), hvorved udtryk for de flutter-afledede P_j^* for $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ er udledt:

$$\begin{aligned}
 P_5^* &= \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_D B e^{-i\phi_D}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad P_1^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_D B e^{-i\phi_D}}{K^2 \tilde{u}_3} \right), \quad P_2^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_D e^{-i\phi_D}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right) \\
 P_6^* &= \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_D B e^{-i\phi_D}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad P_4^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_D B e^{-i\phi_D}}{K^2 \tilde{u}_3} \right), \quad P_3^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_D e^{-i\phi_D}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right)
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

For at udlede formlerne for de sidste 6 flutter-afledede, A_j^* for $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, er det sidste udtryk fra formel (9.37) indsat i formel (9.36):

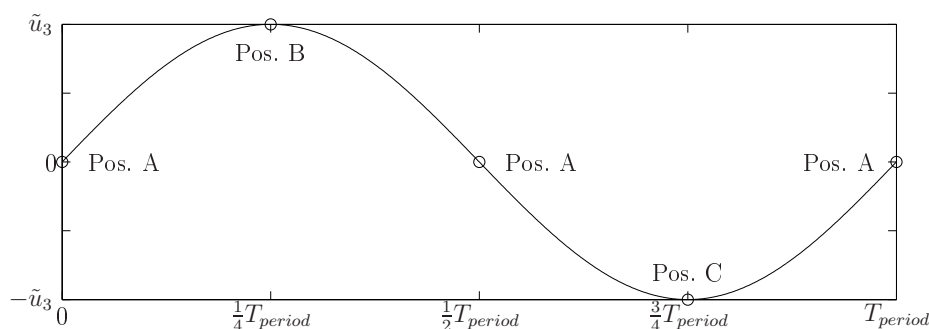
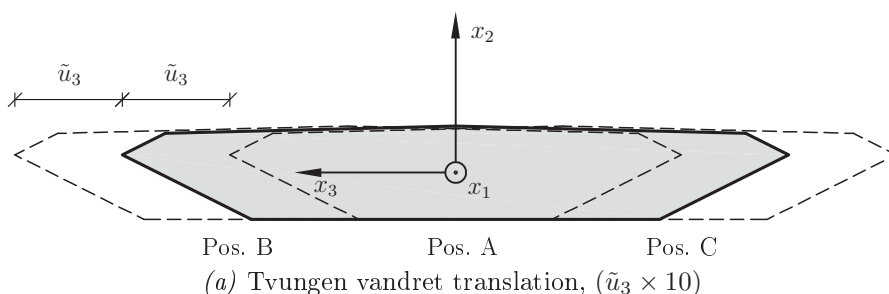
$$\begin{aligned}
 A_1^* &= \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_M B e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad A_5^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_M B e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{u}_3} \right), \quad A_2^* = \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}_M e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right) \\
 A_4^* &= \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_M B e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{u}_2} \right), \quad A_6^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_M B e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{u}_3} \right), \quad A_3^* = \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}_M e^{-i\phi_M}}{K^2 \tilde{\theta}_1} \right)
 \end{aligned} \tag{9.40}$$

Vha. en simulering med lodret translation af tværsnittet beregnes de første to flutter-afledede i hver af formlerne (9.38) til (9.40), H_1^* , H_4^* , P_5^* , P_6^* , A_1^* og A_4^* . For simuleringer med vandret translation af tværsnittet beregnes de midterste 2 flutter-afledede fra hver af formlerne (9.38) til (9.40), H_5^* , H_6^* , P_1^* , P_4^* , A_5^* og A_6^* . De sidste 6 flutter-afledede, H_2^* , H_3^* , P_2^* , P_3^* , A_2^* og A_3^* , beregnes vha. en simulering med rotation af tværsnittet.

10

Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader

For modellen med 3 frihedsgrader anvendes generelt de samme indstillinger, som er defineret for den endelige model, beskrevet i afsnit 8.1. Derudover er der indført en ny type simulering i overensstemmelse med den ekstra frihedsgrad, u_3 , som er vist på figur 9.1a. I den nye type af simuleringer udsættes tværsnittet for tvungen vandret translation og dermed kan drag-effekten inkluderes i beregningerne. Den tvungne bevægelse er vist på figur 10.1.



(b) De tvungne bevægelser beskrevet ved en sinus-kurve

Figur 10.1: Tvungen vandret translation af brotværsnittet

Som tidligere anvendes en sinus-kurve til beskrivelse af den tvungne flytning og amplituden for den vandrette translation betegnes \tilde{u}_3 . Bevægelsen ser dermed således ud:

10 Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader

$$u_3 = \tilde{u}_3 \sin(\omega t) \quad (10.1)$$

Amplituden for bevægelsen er $\tilde{u}_3 = 0,5$ m og ω defineres enten vha. en værdi for T_{period} eller V_r . Selve simuleringen defineres på baggrund af simuleringen med lodret translation som er beskrevet i afsnit 5.2. Ændringerne i forhold til afsnit 5.2 er beskrevet i tabel 10.1 og 10.2.

Tabel 10.1: Nye indstillinger for "Default Domain" for simuleringerne med tvungen vandret translation

Faneblad	Indstilling	Værdi
Fluid Models	Additional Variables Details > Drag	Selected
	Additional Variables Details > Drag > Option	Algebraic Equation
	Additional Variables Details > Drag > Value	p_3
	Additional Variables Details > Vandret flytning	Selected
	Additional Variables Details > Vandret flytning > Option	Algebraic Equation
	Additional Variables Details > Vandret flytning > Value	u_3

Variablerne "Drag" og "Vandret flytning" er defineret vha. CEL. Ved at tildele dem værdier fra en algebraisk ligning, inkluderes disse variabler i resultatfilerne og kan dermed eksporteres. Variablerne tildeles udtrykkene p_3 og u_3 , der ligeledes er defineret vha. CEL. Drag-kraften er beregnet vha.:

$$p_3 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n F_z \quad (10.2)$$

hvor

- d er dybden af den virtuelle vindtunnel i x_1 -retningen, [m]
- F_z er x_3 komponenten af den aeroelastiske kraft på brotværsnittet i de enkelte elementer, [N]
- n er antallet af elementer langs brotværsnittet, [–]

For randbetingelserne er det kun Bro RB, som skal ændres, idet det er her at selve den tvungne bevægelse af brotværsnittet defineres i modellen. Ændringerne af Bro RB er vist i tabel 10.2.

Tabel 10.2: Nye indstillinger for randbetingelsen "Bro" for simuleringerne med tvungen vandret translation

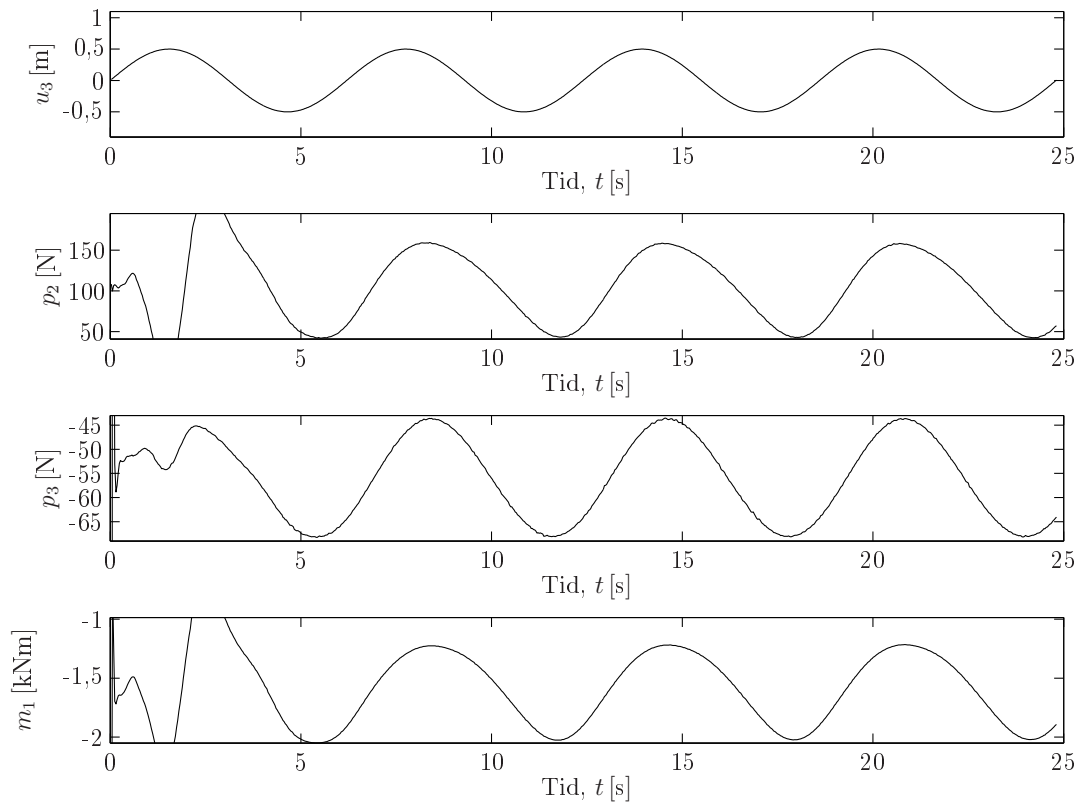
Faneblad	Indstilling	Værdi
Boundary Details	Mesh Motion > Y Component	0 [m]
	Mesh Motion > Z Component	u_3

Ud fra indstillingerne beskrevet i afsnit 5.2 og ændringerne fra tabel 10.1 og 10.2 er der defineret forskellige simuleringer med forskellige frekvenser for bevægelsen. Frekvenserne svarer til de frekvenser, der tidligere er benyttet i forbindelse med den endelige model i afsnit 8.2.

10.1 Flutter-afledede

Simuleringerne fra afsnit 8.2 kan genbruges med en lidt ændret databehandling. Således er det kun nødvendigt at køre nye simuleringer med vandret translation af tværsnittet. Som beskrevet i afsnit 9 ændres databehandlingen således, at nu udtages 3 kraft-signaler fra hver simlering: p_2 , p_3 og m_1 . Et eksempel hvor alle 3 kraftsignaler er plottet sammen, er vist på figur 10.2.

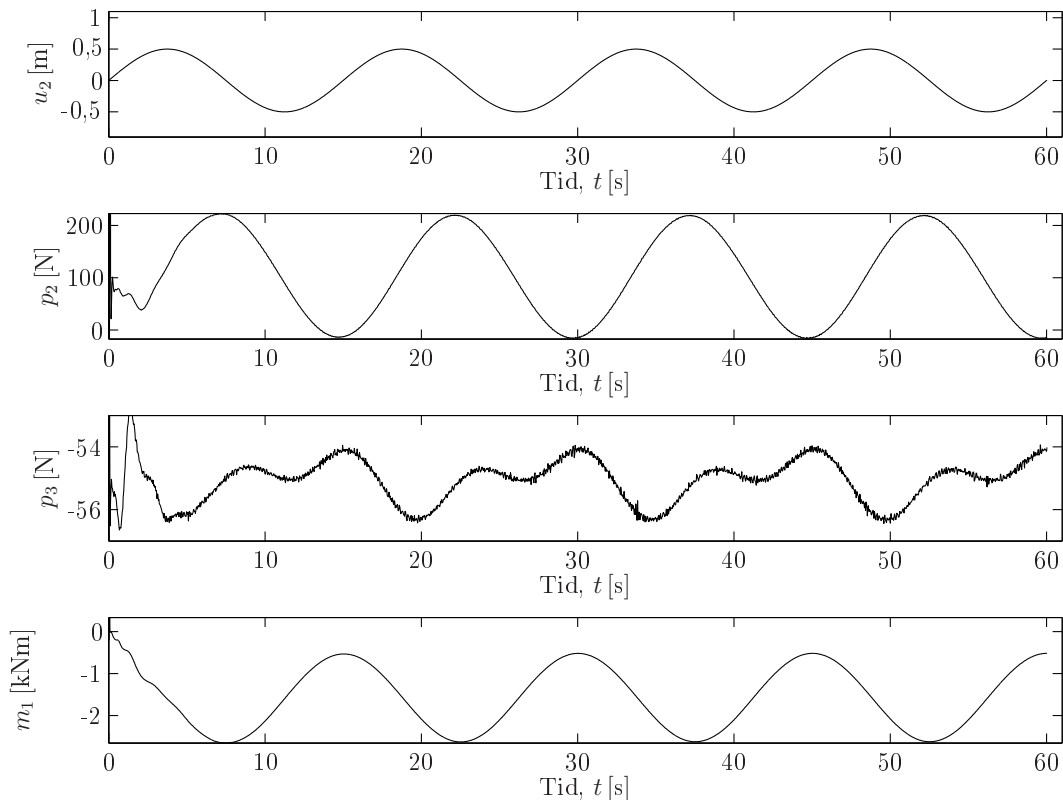
10 Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader



Figur 10.2: Vandret translation, u_3 , lift-kraft, p_2 , drag-kraft, p_3 , og momentet, m_1 for simuleringen med $V_r = 2$

Figur 10.2 er et eksempel på en simulering hvor signalerne fra alle 3 kræfter svinger pænt harmonisk og næsten i fase med bevægelsen, u_3 , bortset fra nogle store udsving inden for den første periode. Derudover bemærkes det at p_2 -signalet er lidt "skævt" i forhold til en sinuskurve.

For de pæne signaler som eksempelvis dem der er vist på figur 10.2, ligger de fittede kurver pænt i forhold til de målte signaler. Derimod er der en del signaler, specielt for drag-kraften, p_3 , som ikke ser så pæne ud som signalerne vist på figur 10.2. Et eksempel herpå er vist på figur 10.3.



Figur 10.3: Lodret translation, u_2 , lift-kraft, p_2 , drag-kraft, p_3 , og momentet, m_1 for simuleringen med $V_r = 4,84$ ($\Rightarrow T_{period} = 15$ s)

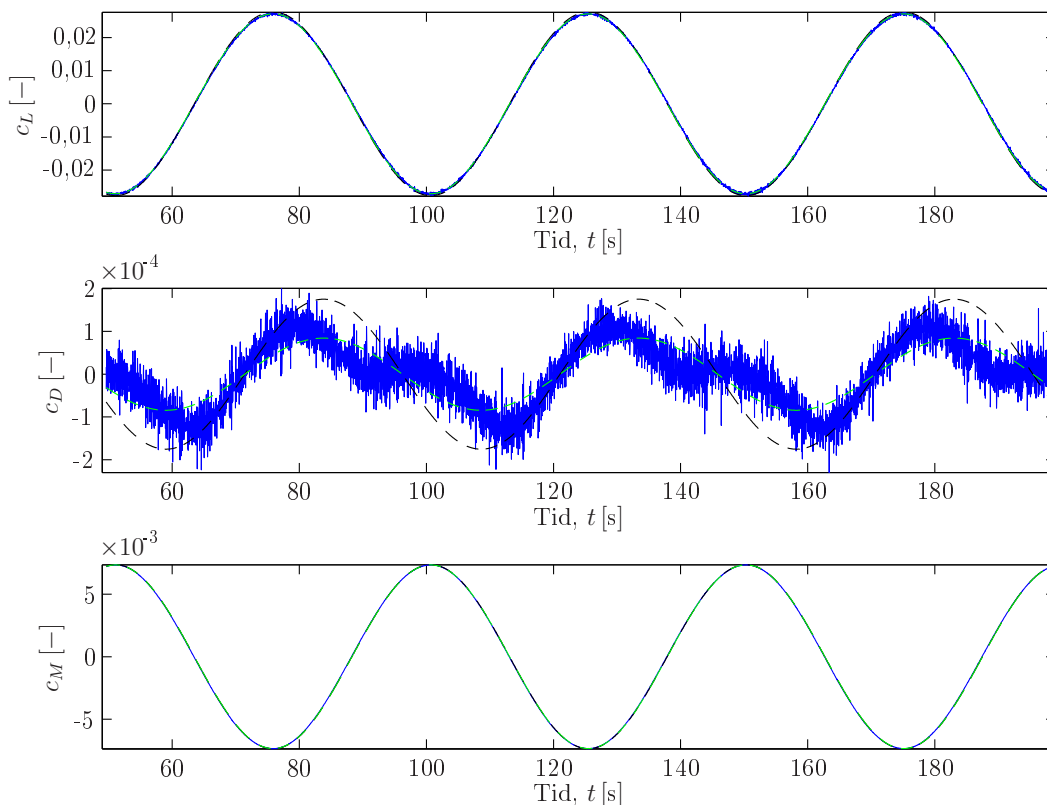
Figur 10.3 viser et eksempel på er der registreret et højfrekvent bidrag til variationen af drag-kraften, p_3 for simuleringen med lodret translation af tværsnittet. Dette er tidligere set for lift-kraften ved samme type simulering med for høje værdier af V_r , som beskrevet i forbindelse med figur 8.6 hvor det blev fastslået at variationen skyldes numerisk støj. For signaler på figur 10.3 er variationerne fra den numeriske støj blevet lidt større end det tidligere er set.

Tidligere har signalet været harmonisk og periodisk og derfor har det været muligt at lave gode kurve-fit til signalerne på trods af den numeriske støj. Signalet for p_3 er derimod ikke harmonisk, hvilket adderer yderligere usikkerheder til den simple metode, som hidtil er blevet anvendt til at bestemme amplituden med. Generelt er der ikke observeret betydende numerisk støj på moment-signalerne, m_1 , mens lift-kraften, p_2 , er påvirket af udsving af betydende størrelse for simuleringerne med lodret- og vandret translation. For p_2 er udsvingene fra numerisk støj stigende med værdierne af V_r . Signalerne for m_1 og p_2 er altid tilnærmelsesvis harmoniske og periodiske for alle 3 typer af simuleringer. For drag-kraften, p_3 , er signalet harmonisk og periodisk for simuleringerne med vandret translation, mens det er inharmonisk og periodisk for simuleringerne med lodret translation og rotation af tværsnittet. Derudover er signalet for p_3 påvirket af betydelige udslag fra numerisk støj for simuleringerne med lodret- og vandret translation af tværsnittet. Som for p_2 er størrelsen af udslagene for p_3 stigende med værdien af V_r .

10 Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader

For de harmoniske signaler med meget numerisk støj er der risiko for at overvurdere amplituden, ved at anvende det halve af forskellen mellem maksimalt og minimalt udslag, som det er beskrevet i afsnit 6.2. For de relativt små højfrekvente udslag i forhold til bevægelsen, som det har været tilfældet før dette afsnit, er fejlen relativt lille i forhold til den samlede fejl. Når udslagene fra den numeriske støj bliver en større procentdel af amplituden, bliver fejlen ved max-min-metoden også større og begynder at få væsentlig indflydelse på resultaterne.

Et andet problem opstår når signalerne ikke længere er harmoniske. Så er det ikke længere sikkert at det største udslag svarer til den ønskede frekvens, som er bevægelsesfrekvensen. Derfor er der indført en mere avanceret analyse af kraftsignalerne i form af en "Discrete Fourier Transformation" (DFT). DFT udføres bl.a. i MatLAB vha. en FFT-rutine, som er en hurtig måde at beregne DFT på for regnemaskiner eller programmer. Ud fra FFT kan signalets variation bestemmes som funktion af frekvensen. Dermed kan den ønskede amplitude hørende til den ønskede frekvens bestemmes, når bevægelsen er kendt i forvejen. Figur 10.4 viser et eksempel på et kraftsignal som både har en stor mængde numerisk støj og er inhomogent. På figuren er kraftsignalerne omregnet til kraft-koefficienter.

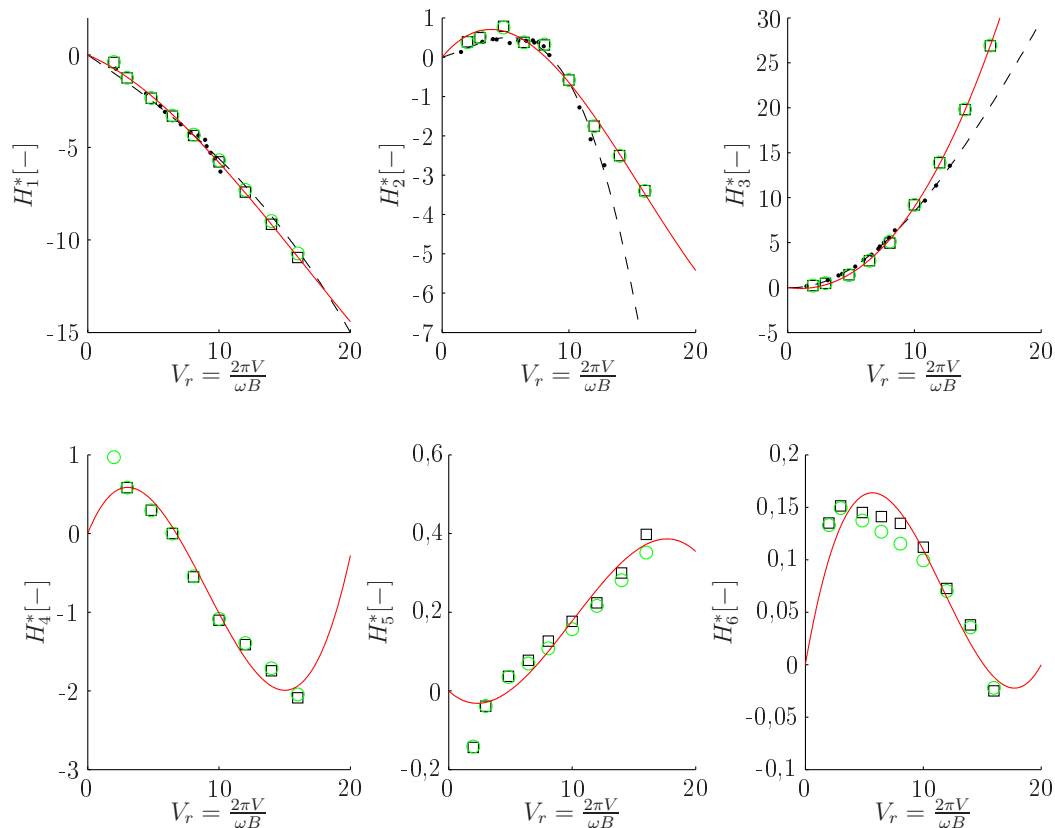


Figur 10.4: Kraftkoefficienter fra simuleringen med lodret translation af tværsnittet (-) for EM ved $V_r = 16$ s samt en fittet kurve (- -) hvor amplituden er bestemt som tidligere og en fittet kurve (- -) hvor amplituden er bestemt vha. FFT. Kurvefit er foretaget med mindste kvadraters metode

Af figur 10.4 fremgår det tydeligt, at der er betydelig udslag af numerisk støj for c_D , samt at der er væsentlig forskel den fittede kurve som er bestemt vha. max-min-metoden (—) og den fittede kurve bestemt vha. FFT (---). Frekvenserne er ens men amplituden fra FFT analysen er væsentlig mindre. Yderligere bemærkes det at drag-koefficienten er væsentligt mindre end lift-koefficienten, hvilket gør den mere følsom overfor numerisk støj.

For c_L er forskellen mellem max-min-metoden og FFT så lille, at de fittede kurver ligger oveni hinanden på det aktuelle plot. Dermed har max-min-metoden været tilstrækkelig til behandling af resultaterne indtil nu. For c_M er der ligeledes ingen forskel mellem de fittede kurver hvor amplituden er bestemt ved de to omtalte metoder.

Ud fra kurverne som er fittet vha. de to forskellige metoder, er de 18 flutter-afledede beregnet. I forhold til tidligere er de fittede kurver ændret fra 2. grads polynomier til 3. grads polynomier. Det skyldes at flere af de flutter-afledede fittede bedre til 3. grads polynomierne. Da 18 flutter-afledede ikke kan være på en figur er de fordelt over 3 figurer. Figur 10.5 viser de 6 flutter-afledede til beskrivelse af p_2 , jf. formel (9.2), H_i^* hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:



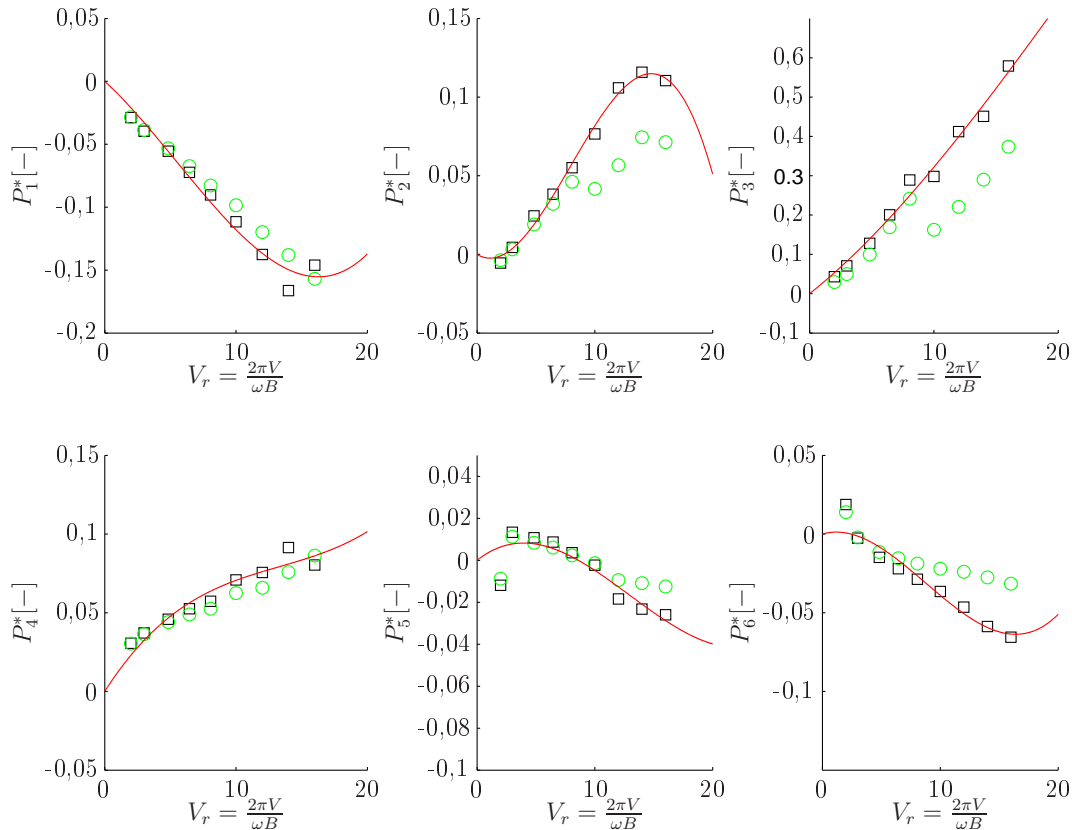
Figur 10.5: Flutter-afledede fra den endelige model hvor amplituderne er beregnet som tidligere (\square) med en fittet kurve (—) og hvor amplituderne er beregnet vha. FFT (\circ) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data (---)

10 Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader

For de første 3 flutter-afledede, H_1^* , H_2^* og H_3^* er der ikke forskel på hvilken metode, som er anvendt til bestemmelse af amplituderne. Yderligere er forskellen mellem et kurvefit med et 2. eller et 3. grads polynomium ikke synlig på de aktuelle plot. Ved beregning ligger 2. grads polynomiet lidt bedre, som det tidligere er beskrevet. For H_4^* det kun for det første punkt at der er forskel mellem resultaterne fremkommet vha. de to metoder til bestemmelsen af amplituderne. For H_5^* og H_6^* er der flere punkter som afviger fra hinanden. Som beskrevet i forbindelse med formel (9.38) er H_5^* og H_6^* beregnet ud fra lift-kraften i simuleringen med vandret translation. Som tidligere beskrevet er signalet for lift-kraften ved simuleringerne med vandret translation påvirket af betydende numerisk støj og det er derfor forventeligt at der er forskelle i resultaterne fra de to metoder til beregning af amplituden.

Derudover observeres det at for H_4^* , H_5^* og H_6^* har den fittede kurve tendens til at have en vendetangent lige omkring det sidste punkt fra beregningerne. Da denne ændring i tangenthældningen ikke er underbygget af nogle punkter, kan disse kurver ikke bruges til at ekstrapolere resultater ud over det sidste punkt ($V_r = 16$). Yderligere ser det ud til at H_4^* , H_5^* og H_6^* ikke rammer 0 for $V_r = 0$, hvilket så medvirker til at etablere de toppunkter som findes for lave værdier af V_r , når kurven tvinges til at skære gennem 0.

De næste 6 flutter-afledede, til beskrivelse af p_3 jf. formel (9.3), P_i^* hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, er vist på figur 10.6.

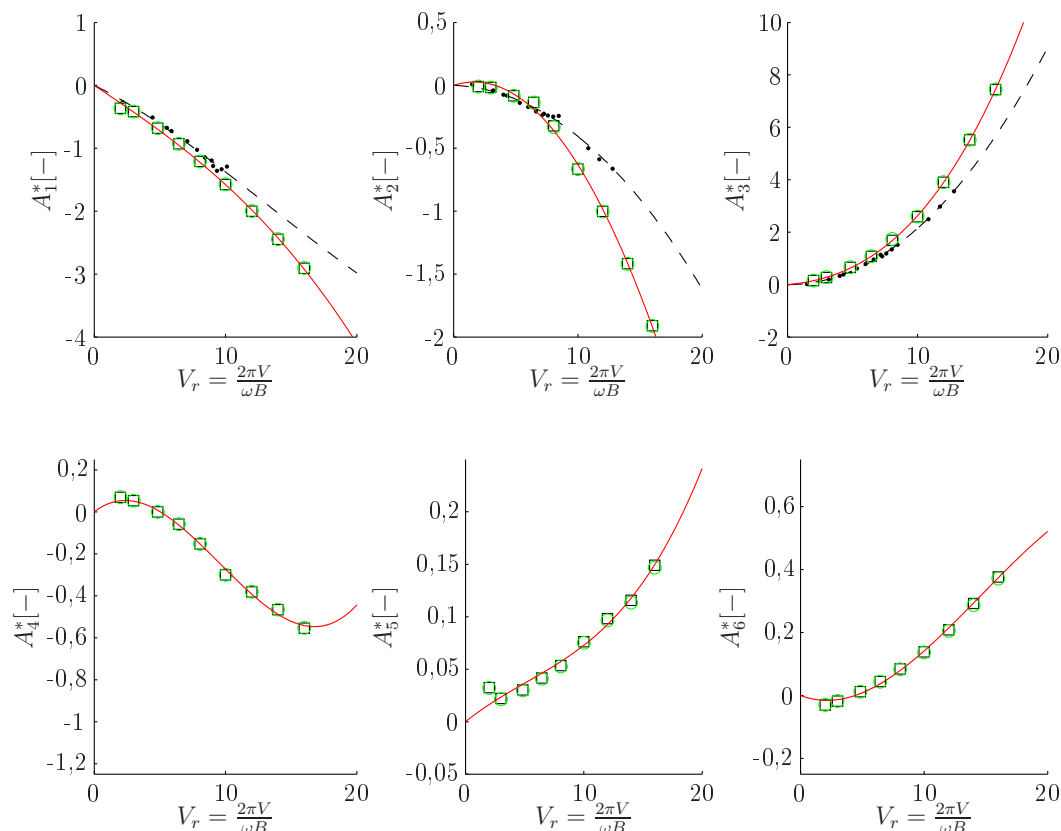


Figur 10.6: Flutter-afledede fra den endelige model hvor amplituderne er beregnet som tidligere (\square) med en fittet kurve ($-$) og hvor amplituderne er beregnet vha. FFT (\circ)

For de flutter-afledede fra P_1^* til P_6^* er det hovedsageligt for de sidste 4 punkter, hvor der er afvigelse mellem de to metoder til bestemmelse af amplituden. Igen observeres vendetangenter for flere kurver omkring det sidste punkt. Dermed er det igen meget usikkert at ekstrapolere data ud over det sidste punkt ved $V_r = 16$. P_2^* er en af de flutter-afledede, som har fået et væsentligt bedre fit efter skiftet fra 2. til 3. grads polynomier. For P_2^* og P_3^* skyldes de store afvigelser, at drag-koefficienten for simuleringerne med rotation af tværsnittet og V_r mellem 10 og 16 giver et signal, som svinger næsten med den halve periode i forhold til bevægelsen. Dermed gælder den grundlæggende antagelse om at kræfterne og bevægelsen varierer med samme frekvens ikke længere, hvilket bevirker at punkterne ligger dårligt.

For P_1^* til P_4^* er der tendens til at en fittet kurve kunne skære ordinat-aksen omkring 0, uden at være tvunget til det. For P_5^* og P_6^* ser det ud til at punktet for $V_r = 2$ falder udenfor tendense af de resterende punkter. For begge disse flutter-afledede ville det sidste punkt dreje den fittede kurve væk fra 0 på ordinat-aksen, hvilket ville være en væsentlig fejl.

De sidste 6 flutter-afledede, A_i^* hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, som anvendes til beskrivelsen af momentet, m_1 , jf. formel (9.3), er vist på figur 10.7.



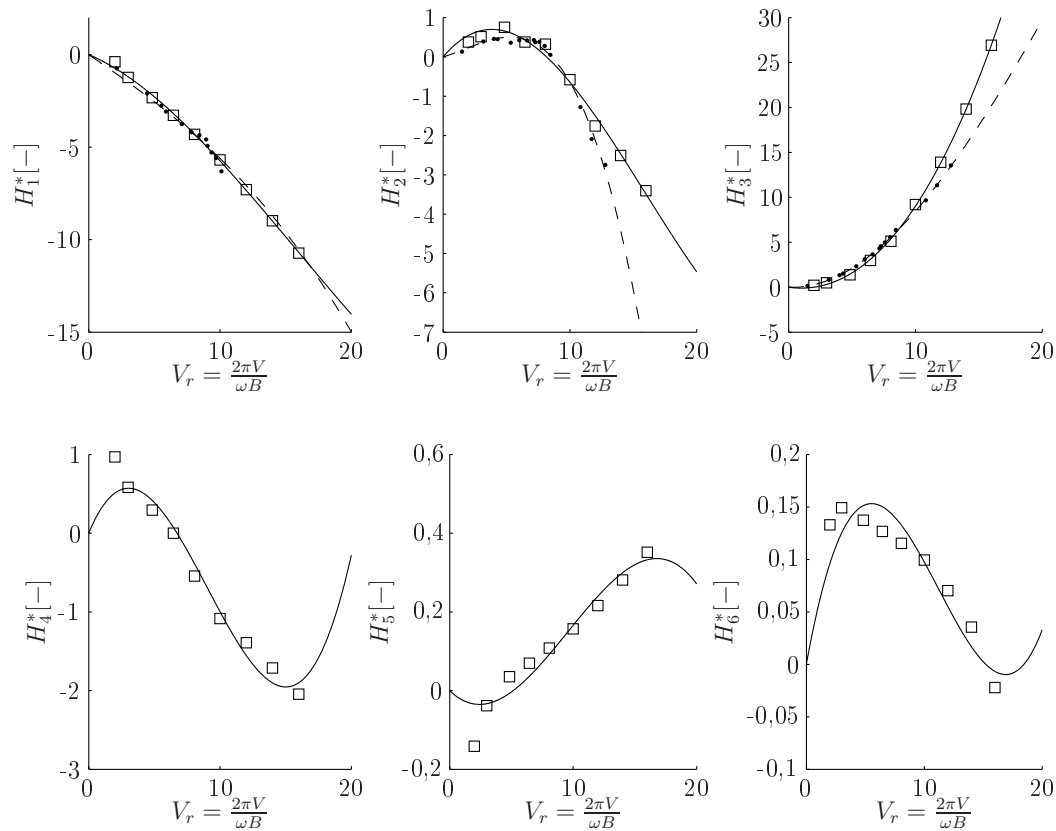
Figur 10.7: Flutter-afledede fra den endelige model hvor amplituderne er beregnet som tidligere (\square) med en fittet kurve ($-$) og hvor amplituderne er beregnet vha. FFT (\circ) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($- -$)

For alle de flutter-afledede som er vist på figur 10.7, er der ingen afvigelse mellem punkterne bestemt ved de to metoder, som er anvendt til at beregne amplituden. For de fittede kurver fra A_1^* , A_2^* og A_3^* er der ingen synlig forskel mellem fittet med et 2. eller 3. grads polynomium. For A_4^* observeres igen en vendetangent efter det sidste punkt, som kurven er fittet til og igen betyder det, at evt. ekstrapolerede værdier kan være behæftet med store fejl. For A_5^* observeres igen, at punktet svarende til $V_r = 2$ ligger lidt udenfor tendensen fra de andre punkter.

Generelt kan der ikke siges noget om modellens nøjagtighed, men da det er den samme model, som i Del I er blevet vurderet som acceptabel, ud fra sammenligninger med DMI's resultater, er det valgt at bibeholde modellen. Det bedste mål for hvor god modellen er, er derfor hvor godt den kan reproducere den del af resultaterne, som i forvejen er kendt. De ændringer som er blevet indført i dette kapitel, har ikke ændret forskellen væsentligt mellem DMI's resultater og de flutter-afledede, som kan sammenlignes med disse. Derimod er der flere af punktserierne fra figur 10.5, 10.6 og 10.7, som ikke har tendens til at skære ordinat-aksen i nulpunktet, hvilket kunne tyde på at alt ikke er som det skal være. Da der ikke er flere resultater at holde modellen op imod og beregningsmetode er blevet forfinet på de punkter hvor der er identificeret problemer, kan modellen ikke verificeres

bedre i forbindelse med dette projekt.

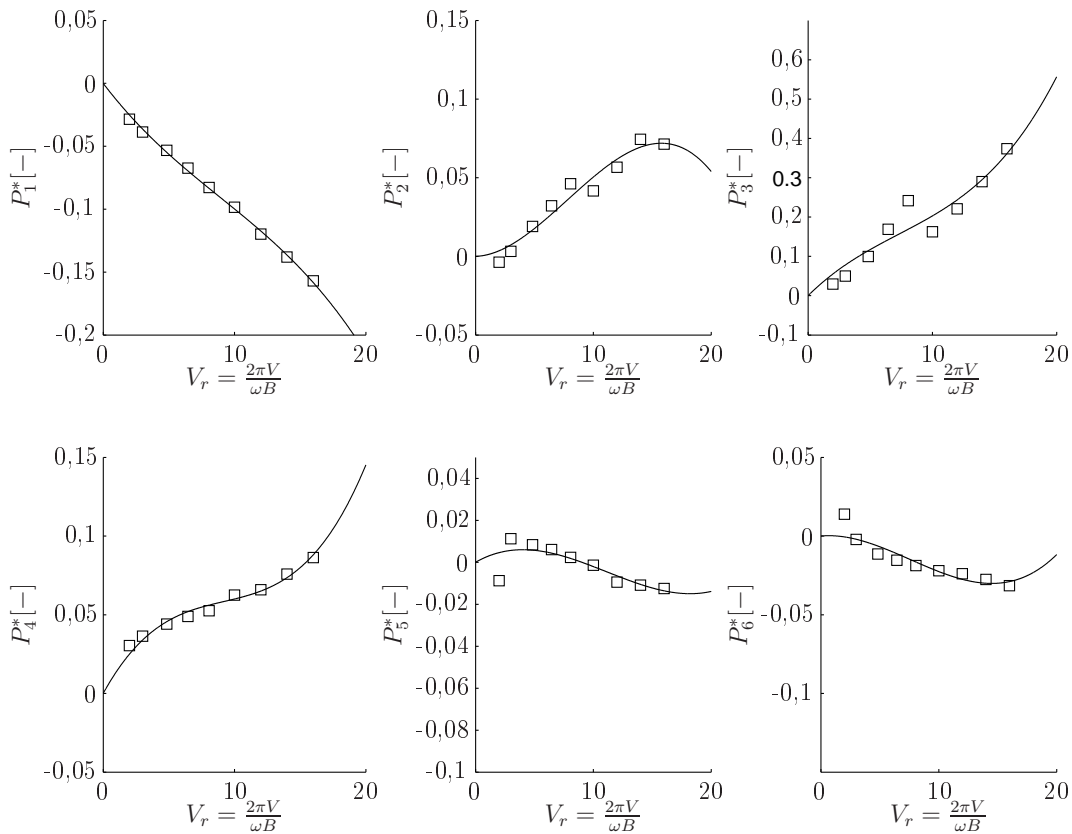
Det er verificeret, at de to metoder til at bestemme amplituden for kraftsignalet giver samme resultat for signaler uden højfrekvente variationer. Derudover er det vurderet at FFT analysen giver de bedste resultater for signaler, hvor der er højfrekvente variationer. Derfor er modellen ændret permanent til at beregne flutter-afledede på baggrund af amplituder som er beregnet vha. FFT analyser. På de efterfølgende 3 figurer er de 18 flutter-afledede, som er beregnet på baggrund af amplituder fra FFT analyser, vist med tilhørende fittede kurver.



Figur 10.8: De 6 flutter-afledede, H_i^* , beregnet ud fra CFD-simuleringerne (\square) med en fittet kurve (—) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data (—)

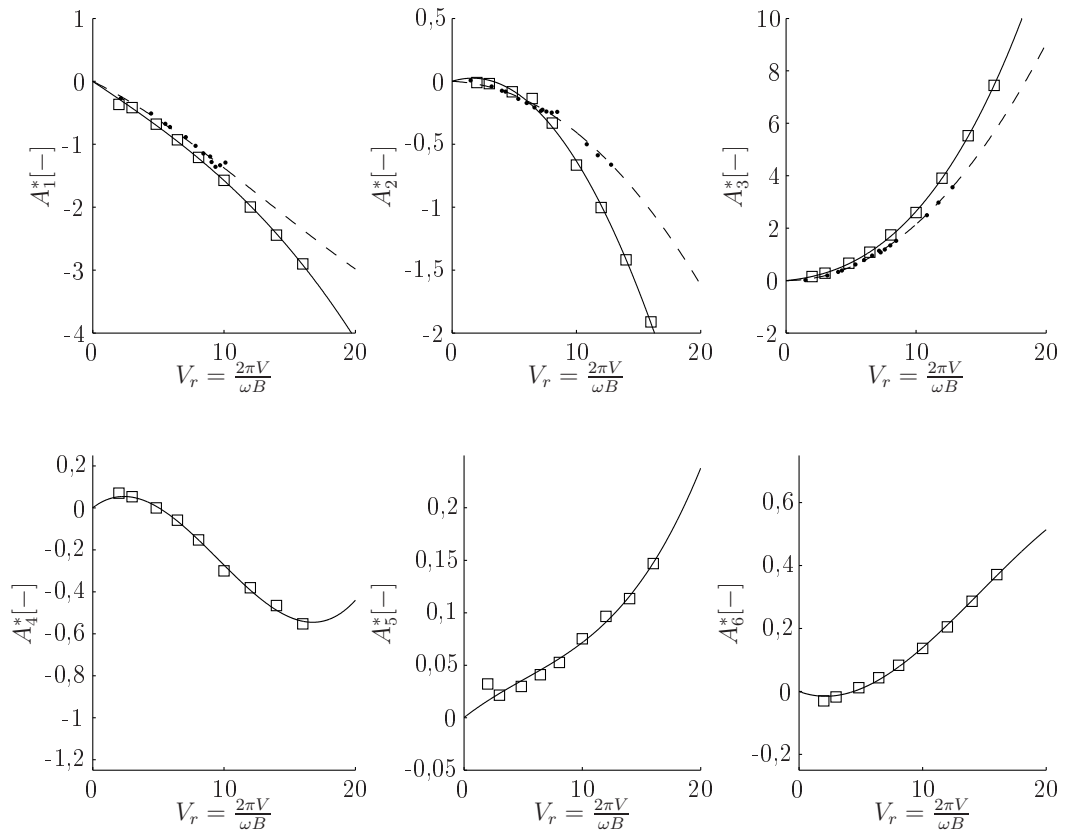
Af resultaterne fra figur 10.8 er det H_6^* som har det dårligste fit, mens både H_4^* , H_5^* og H_6^* er uegnede til ekstrapolering af resultater ud over $V_r = 16$. Yderligere viser punkterne svarende til $V_r = 2$ for H_4^* og H_5^* , at der er usikkerhed omkring bestemmelsen af nogle flutter-afledede for små værdier af V_r .

10 Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader



Figur 10.9: De 6 flutter-afledede, P_i^* , beregnet ud fra CFD-simuleringerne (\square) med en fittet kurve (—) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data (—)

For de 6 flutter-afledede P_i^* er der ingen resultater at sammenligne med, men umiddelbart ligger flere af punkt-serierne på nogle pæne kurver som fint skærer ordniataksen omkring nulpunktet uden tvang. Igen observeres det at punkterne for $V_r = 2$ for P_5^* og P_6^* samt delvist for P_2^* ligger så kurverne drejes væk fra nulpunktet. Der er igen flere af de flutter-afledede som ikke egner sig til ekstrapolering ud over $V_r = 16$.



Figur 10.10: De 6 flutter-afledede, A_i^* , beregnet ud fra CFD-simuleringerne (\square) med en fittet kurve ($—$) plottet sammen med data fra DMI (\bullet) og en kurve fittet til DMI's data ($- -$)

For de 6 flutter-afledede, A_i^* , fremgår det, at de fleste ligger pænt på kurver som kunne skære ordinat-aksen i nulpunktet uden tvang. A_5^* afviger fra denne opførsel da punktet svarende til $V_r = 2$ ligger udenfor denne tendens. For A_4^* er det endvidere ikke tilrådigt at foretage en ekstrapolering ud over $V_r = 16$.

10.2 Kritisk hastighed

I dette afsnit er den kritiske hastighed for broen beregnet for tilfældet med 3 frihedsgrader ud fra metoden, som er beskrevet i afsnit 9.1. I det foregående afsnit er der redegjort for hvorledes de følgende udtryk for de 18 flutter-afledede er beregnet på baggrund af CFD-simuleringer. Udtrykkene fra formel (8.1) er blevet modificeret så alle 18 flutter-afledede er beskrevet ved 3. grads polynomier.

$$\begin{aligned}
 H_1^*(K) &= 0,000734V_r^3 - 0,03472V_r^2 - 0,3007V_r \\
 H_2^*(K) &= 0,00118V_r^3 - 0,05632V_r^2 + 0,3811V_r \\
 H_3^*(K) &= 0,001312V_r^3 + 0,09675V_r^2 - 0,1978V_r \\
 H_4^*(K) &= 0,002941V_r^3 - 0,07964V_r^2 + 0,4027V_r \\
 H_5^*(K) &= -0,0002504V_r^3 + 0,00721V_r^2 - 0,03047V_r \\
 H_6^*(K) &= 0,0002212V_r^3 - 0,007449V_r^2 + 0,06213V_r
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned}
 P_1^*(K) &= -0,00002221V_r^3 + 0,0005913V_r^2 - 0,01368V_r \\
 P_2^*(K) &= -0,00003564V_r^3 + 0,0008351V_r^2 + 0,0002553V_r \\
 P_3^*(K) &= 0,00009283V_r^3 - 0,00203V_r^2 + 0,03129V_r \\
 P_4^*(K) &= 0,00005204V_r^3 - 0,001435V_r^2 + 0,01515V_r \\
 P_5^*(K) &= 0,00001466V_r^3 - 0,0004889V_r^2 + 0,003219V_r \\
 P_6^*(K) &= 0,00002302V_r^3 - 0,0005242V_r^2 + 0,0006837V_r
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned}
 A_1^*(K) &= -0,0001439V_r^3 - 0,0003952V_r^2 - 0,1393V_r \\
 A_2^*(K) &= -0,000003588V_r^3 - 0,009372V_r^2 + 0,03079V_r \\
 A_3^*(K) &= 0,0007427V_r^3 + 0,01434V_r^2 + 0,04643V_r \\
 A_4^*(K) &= 0,0004023V_r^3 - 0,01154V_r^2 + 0,04792V_r \\
 A_5^*(K) &= 0,00003224V_r^3 - 0,0004943V_r^2 + 0,008878V_r \\
 A_6^*(K) &= -0,00008396V_r^3 + 0,003699V_r^2 - 0,01471V_r
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

hvor

$$\begin{aligned}
 K & \text{ er den reducerede frekvens, } K = \frac{B\omega}{V} \\
 V_r & \text{ er de reducerede hastighed, } V_r = \frac{2\pi V}{\omega B} = \frac{2\pi}{K} \quad \text{for } V_r \leq 16
 \end{aligned}$$

Vha. udtrykkene for de 18 flutter-afledede fra formel (10.3) til (10.5) beregnes \mathbf{c}_0 og \mathbf{k}_0 fra lastudtrykket i formel (9.24) ud fra formel (9.25) og (9.26).

De 3 systemmatricer opstilles vha. af oplysningerne i afsnit 3.2 idet værdierne anvendt i afsnit 8.3 genanvendes. For tilfældet med 3 frihedsgrader ændres indekset for rotationsfrihedsgraden fra 2 til 3 jf. lastvektoren fra formel (9.20).

Som beskrevet i forbindelse med tabel 3.3 er der ikke opgivet nogle svingende masser for de horisontale egensvingningsformer. Det er i det efterfølgende valgt at anvende den samme masse, som der er anvendt for den vertikale egensvingningsform.

Tabel 10.3: Værdier til opstilling af systemmatricerne fra formel (9.18)

Frihedsgrad	Indeks, i	Masse, M_i	Frekvens, f_i [Hz]	Dæmpning, ζ_i
u_2	1	$19.562 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$	0,0985	0,01
u_3	2	$19.562 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$	0,0378	0,01
θ_1	3	$2.342.625 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{m}}$	0,2549	0,01

Værdierne præsenteret i tabel 10.3 svarer til første symmetriske egensvingningsform for både vertikal og horisontal translation samt rotation. Vinkelfrekvensen er givet ved:

$$\omega_i = 2\pi f_i \quad (10.6)$$

Ud fra værdierne i tabel 10.3 samt formel (10.6) er systemmatricerne fra formel (9.21) til (9.23) opstillet:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 19.562 & 0 & 0 \\ 0 & 19.562 & 0 \\ 0 & 0 & 2.342.625 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

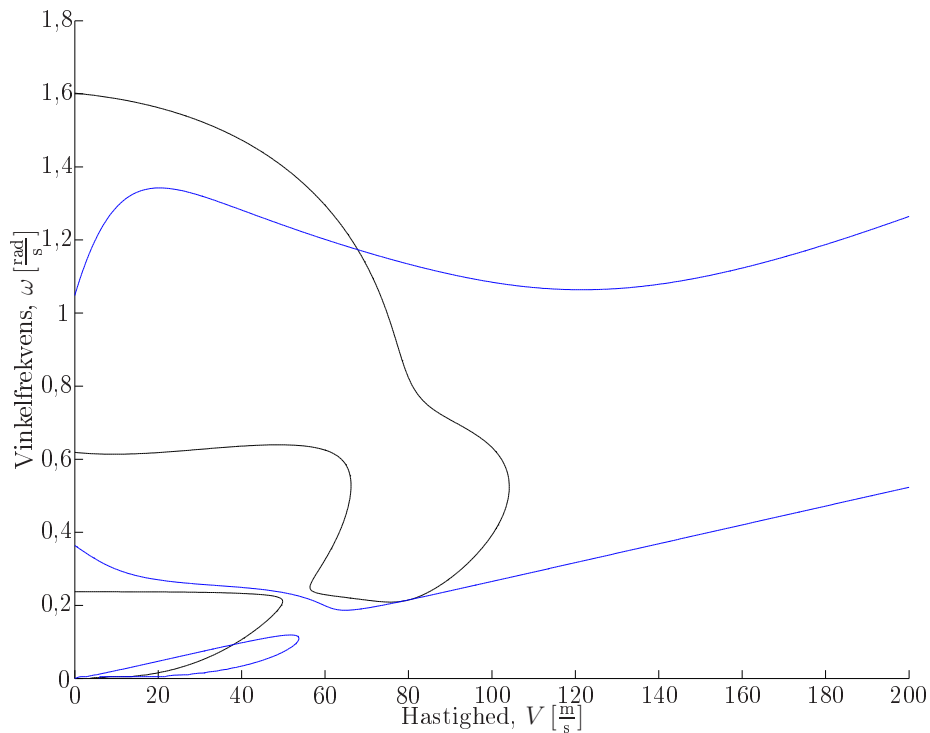
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 242,14 & 0 & 0 \\ 0 & 92,92 & 0 \\ 0 & 0 & 75.038,21 \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 7.492,82 & 0 & 0 \\ 0 & 1.103,46 & 0 \\ 0 & 0 & 6.008.999,68 \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

Flutter-betingelsen fra formel (9.29) er løst vha. de opstillede matricer. Løsningen er etableret ved at beregne værdien af determinanten for alle par af V og ω indenfor intervallerne $V \in [1; 200] \frac{\text{m}}{\text{s}}$ og $\omega \in [0, 1; 2] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Hvert interval har været delt op i 400 punkter.

Pga. indholdet af komplekse tal i flutterbetingelsen er der beregnet punkter på to flader i rummet svarende til hhv. real- og imaginær-delen af determinanten fra formel (9.29). Vha. interpolation mellem punkterne er 0-konturerne fra de to flader beregnet og plottet på følgende figur. Flutter-betingelsen er opfyldt for skæringerne af 0-konturerne.

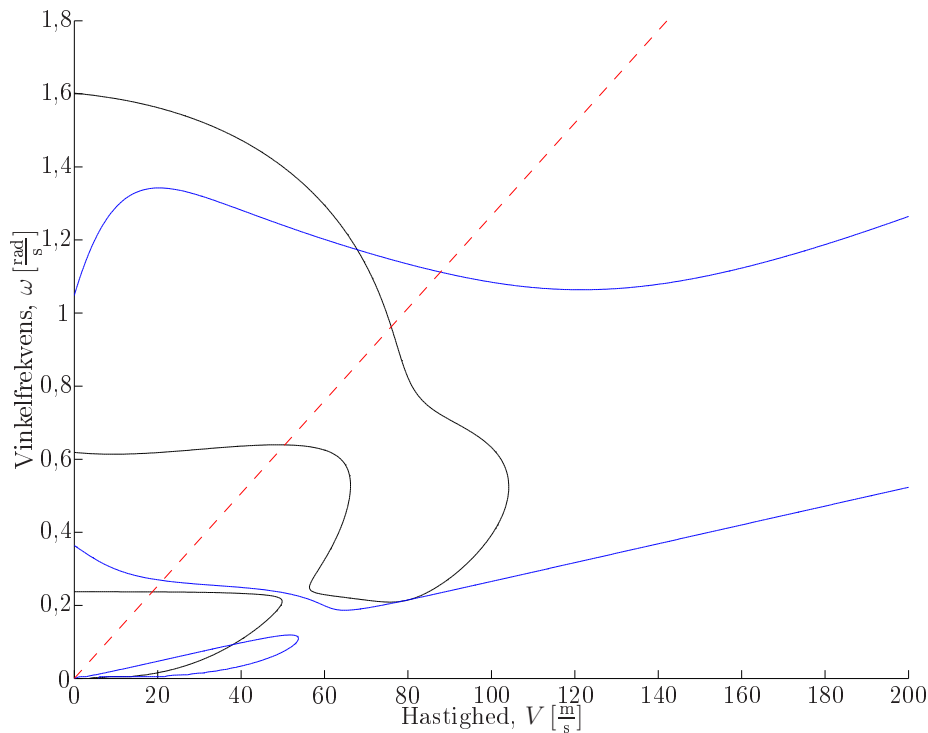
10 Tvungne flytninger med 3 frihedsgrader



Figur 10.11: 0-konturer for den reelle del af determinantbetingelsen (—) og for den imaginære del (—) for 3 frihedsgrader

Som det fremgår af figur 10.11 er der umiddelbart 3 skæringer mellem 0-konturerne for den reelle og den imaginære del af determinanten fra flutter-betingelsen. Der er skæringer ved $\omega \approx 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ og $\omega \approx 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ for $V \approx 38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ og $V \approx 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ samt en skæring for $\omega \approx 1,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ og $V \approx 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Umiddelbart betyder det at den kritiske hastighed ligger omkring $38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, men ved beregning af den reducerede hastighed for $V \approx 38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ og $\omega \approx 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ findes $V_r = 77$, hvilket er langt over den største simulerede værdi på $V_r = 16$. Endvidere skal den kritiske frekvens ligge mellem den mindste, $\omega_2 = 0,24 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, og største, $\omega_3 = 1,60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, frekvens, som er anvendt til at definere systemmatricerne ud fra.

Det er tidligere beskrevet at værdierne for nogle af de 18 flutter-afledede ikke kan betragtes som pålidelige hvis de reducerede hastighed overskrider 16, som er den maksimale værdi der er anvendt i simuleringerne. På figur 10.12 er grænsen for $V_r = 16$ vist oveni 0-konturerne.

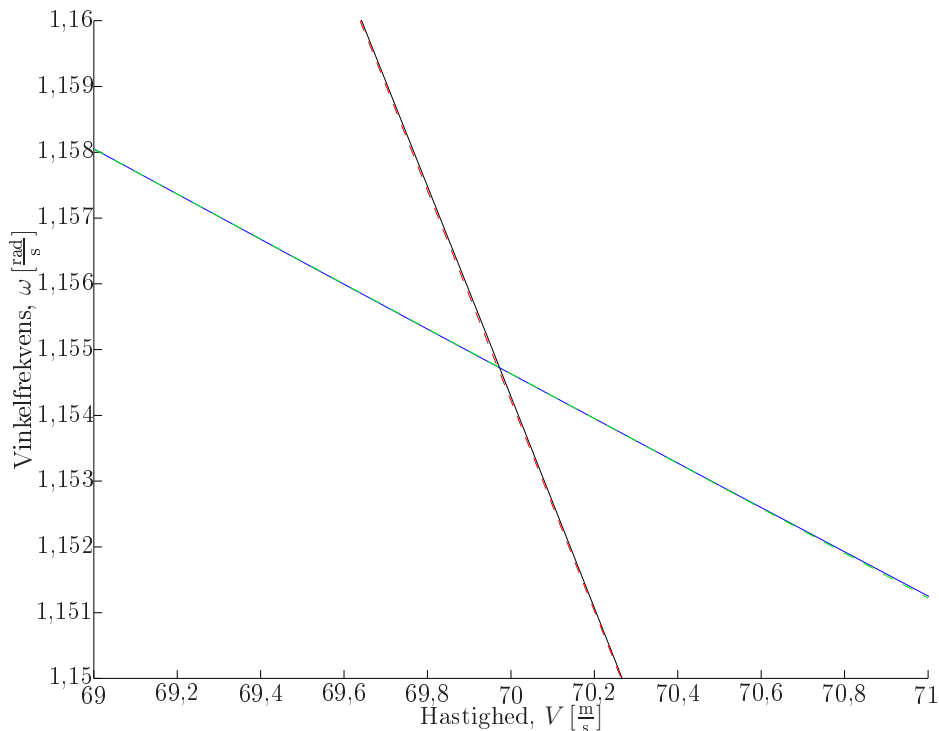


Figur 10.12: 0-konturer for den reelle del af determinantbetingelsen (—) og for den imaginære del (—) for 3 frihedsgrader samt angivelsen af grænsen for $V_r = 16$ (—)

Af figur 10.12 fremgår det at den eneste skæring som ligger over grænsen for $V_r = 16$ (—) er skæringen omkring $V \approx 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Den del af 0-konturerne som ligger under grænsen for $V_r = 16$ (—), er i princippet ikke gyldig, idet det tidligere er fastslået at de bestemte udtryk for de flutter-afledede ikke kan ekstrapoleres ud over denne grænse. Flere af graferne for de flutter-afledede viser markant ændrede tendenser for værdier over $V_r = 16$, hvilket gør værdierne under (—) upålidelige.

Problemet kan løses på to måder: Enten øges antallet af simuleringer så et større interval for V_r dækkes ind ellers vurderes det at skæringen omkring $V \approx 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ er den løsning, som giver den laveste kritiske hastighed. Det er valgt at anvende det sidste alternativ og dermed beregne den kritiske hastighed for skæringen omkring $V \approx 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Som tidligere beregnes den kritiske hastighed ved at fitte en kurve til punktserien indenfor et lille udsnit af 0-konturerne, hvor kurver tilnærmelsesvis kan beskrives som rette linier. Resultater af dette fit er vist på figur 10.13.



Figur 10.13: Udsnit af 0-konturerne for den reelle del af determinantbetingelsen (—) med tilhørende kurvefit (---) og for den imaginære del (—) med tilhørende kurvefit (---)

Da kurvefittene fra figur 10.13 ligger pænt oveni hinanden, er den kritiske hastighed beregnet. Den kritiske hastighed er beregnet til $V_c = 67,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ med en tilhørende kritisk frekvens på $\omega_c = 1,1735 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. De beregnede værdier svarer til $V_r = 11,72$.

10.3 Sammenfatning

Formålet med denne del af projektet er at indføre en 3. frihedsgrad og undersøge indflydelsen af dette på det endelige resultat. I starten af dette kapitel blev den nye type af simuleringer defineret og alle de praktiske foranstaltninger for at indføre den 3. frihedsgrad blev beskrevet. Den teoretiske udledning af ligningerne er beskrevet i kapitel 9.

Det blev konstateret at et nyt problem omkring kraftsignalerne knytter sig til dragkraften, idet denne generelt er mindre end lift-kraften og dermed mere følsom overfor numerisk støj. Yderligere har drag-kraften en tendens til ikke at være harmonisk for simuleringerne med lodret translation og rotation af tværsnittet.

For bedre at kunne håndtere udseendet af den stigende indflydelse fra numerisk støj og de inharmoniske signaler fra drag-kraften, blev metoden til beregning af amplituderne for kraftsignalerne forbedret. Det blev konstateret, at for de tidligere behandlede resultater var forskellen mellem de to anvendte metoder ubetydelig, men for signalerne med meget numerisk støj er det vurderet, at resultaterne blev forbedret.

For de 18 flutter-afledede som er beregnet på baggrund af de nye simuleringer og den nye metode til at beregne amplituden for kraftsignalerne er det konstateret at flere har et dårligt fit til 2. gradspolynomiet. Derfor er det valgt at implementere et fit til 3. gradspolynomiet, hvilket så bevirker at mange af de flutter-afledede fitter til kurver som har vendetangent efter det sidste punkt fra simuleringerne ($V_r = 16$). Dermed er det konstateret at de bestemte udtryk for de 18 flutter-afledede ikke egnet sig til ekstrapolering ud over $V_r = 16$.

Ved beregning af den kritiske hastighed blev det konstateret at flutter-betingelsen tilsyneladende har 2 løsninger udenfor gyldighedsområdet af udtrykkene for de 18 flutter-afledede fra formel (10.3) til (10.5). Da udtrykkene for de flutter-afledede ikke gælder udenfor det angivne interval, må der udføres flere simuleringer, for at kunne endegyldigt konstatere, om der findes løsninger til flutter-betingelsen for $V_r > 16$.

Indenfor det gyldige interval for udtrykkene for de 18 flutter-afledede er der beregnet en kritisk hastighed på $V_c = 67,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ med en tilhørende kritisk frekvens på $\omega_c = 1,1735 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Del III

Konklusion

11

Konklusion

I del I af dette projekt er der beregnet en kritisk hastighed for et brotværnsnit med 2 frihedsgrader. Den kritiske hastighed er beregnet på baggrund af en simpel model, hvor det er antaget at brodækket bevæger sig som et stift legeme. Til beregningen af den kritiske hastighed er der bestemt udtryk for 6 flutter-afledede på baggrund af CFD-simuleringer. CFD-simuleringerne er sammenlignet med resultaterne fra vindtunnelforsøg på det samme brotværnsnit, som er anvendt til CFD-simuleringerne.

Det kan konkluderes at der er god overensstemmelse mellem de 6 flutter-afledede som er bestemt vha. CFD og dem som er bestemt vha. vindtunnelforsøg. Dermed er det vist at CFD-simuleringer kan være et alternativ til anvendelse af vindtunnelforsøg i designfasen for en bro. Indtil der er udført et større valideringsarbejde, kan CFD-simuleringer anvendes til at kontrollere forskellige tværsnit i forhold til hinanden, hvorefter den endelige kontrol af et eller få af tværsnittene kan udføres vha. vindtunnelforsøg. Dermed er der sparet væsentlige udgifter på projektet.

Den kritiske hastighed som er beregnet på baggrund af et simpelt flytningsfelt er $69,97 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, hvilket er ganske tæt på de $73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ som jf. [Thorbek and Bennetsen, 2008] er den kritiske hastighed, som er beregnet i forbindelse med projekteringen af broen. Det meste af afvigelsen skyldes sandsynligvis, at der er anvendt forskellige antagelser i forbindelse med de dynamiske ligninger eftersom det beregnede flutter-afledede ligger meget tæt på hinanden.

I del II af dette projekt er der implementeret en ekstra frihedsgrad for brotværnsnittet. Samtidig er den fulde beskrivelse af lasterne vha. 18 flutter-afledede inddraget i beregningen. For CFD-simuleringerne medfører denne forøgelse af frihedsgraderne og de flutter-afledede ikke nogen væsentlig forøgelse af kompleksiteten. Der skal udføres en ekstra simulering for hver punkt i diagrammet med flutter-afledede og der skal behandles et ekstra data-signal. Det er begge to relativt simple ændringer, som forholdsvis hurtigt kan implementeres i det samlede beregningsapparat. Derudover skal der beregnes

11 Konklusion

12 flutter-afledede mere i forhold til tidligere, hvilket igen er forholdsvist simpelt. Når disse ændringer er indført, skal flutter-betingelsen løses med nogle matricer som er lidt større end tidligere, men det er stadig ikke noget som ikke kan håndteres af de samme beregningsalgoritmer som tidligere er anvendt.

Hvis en tilsvarende udvidelse skal udføres for vindtunnelforsøg, skal der selvfølgelig også her laves et ekstra forsøg, for hvert punkt i diagrammerne med flutter-afledede. Derudover skal der tilføjes ekstra måleudstyr og bro-ophænget i vindtunnelen skal laves om, så det kan håndtere den ekstra frihedsgrad. Det er begge ting som øger kompleksiteten af forsøgene. Yderligere medfører de ekstra forsøg en væsentlig forøgelse af udgiften til forsøg.

Resultatet beregningerne med 3 frihedsgrader er meget tæt på resultatet fra beregningerne med 2 frihedsgrader, idet den kritiske hastighed er beregnet til $67,83 \frac{m}{s}$. Igen er antagelsen omkring stivlegeme bevægelse af broen anvendt og igen er den kritiske hastighed lidt mindre end de $73 \frac{m}{s}$.

Den kritiske hastighed fra beregningen med 3 frihedsgrader er lidt mindre end den tilsvarende fra beregningen, med 2 frihedsgrader, men ellers er de tæt på hinanden. Det kunne tyde på at de væsentligste bidrag til lasten er medtaget i de første 6 flutter-afledede, som er anvendt i del I. Dermed kan det diskuteres om det er nødvendigt at medtage alle 18 flutter-afledede i beskrivelsen af lasten. Det skal også bemærkes, at der er et væsentligt større kontrolarbejde at udføre når der er 18 flutter-afledede som skal kontrolleres mht. kurvefit og andet.

For at CFD-simuleringer kan blive en del af fremtiden indenfor design og analyse af broen skal der udføres flere validerings- og sammenligningsprojekter på forskningsniveau evt. i samarbejde med de rådgivende virksomheder så tilliden til CFD øges. På relativt kort sigt kan CFD overtage udskillelsen af nogle få tværsnit fra en større mængde således at der udføres færre forsøg evt. kun på det endeligt valgte tværsnit til et nyt projekt. På længere sigt kan CFD blive det endelige dimensioneringsværktøj mht. aeroelastisk respons både for modeller som bygger på flutter-afledede, som er beregnet på baggrund af tvungne bevægelser, men også for design på baggrund af et frit bevægeligt broelement placeret i strømmingen. Dette kan ske vha. kobling mellem strømningsløseren og en strukturløser, som for hvert tidsstep kan beregne konstruktionens deformationer. Så længe lastbeskrivelsen baseres på flutter-afledede kan der relativt let indføres flere flutter-afledede i CFD-modellerne som det tidligere er beskrevet.

Konceptet med det frit bevægelige broelement kan relativt let udvides til 3D da både strømningsløseren og strukturløseren er udviklet til det fulde 3D tilfælde. Den frit bevægelige 3D model er naturligvis det optimale dimensioneringsværktøj i fremtiden, forhåbentlig ikke så fjern en fremtid!

Litteratur

- ANSYS Inc. (2006a, December). *ANSYS CFX-Solver Manager User's Guide* (Release 11.0 ed.). Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317: ANSYS Inc.
- ANSYS Inc. (2006b, December). *ANSYS CFX-Solver Modeling Guide* (Release 11.0 ed.). Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317: ANSYS Inc.
- Brorsen, M. (2005). *Strømningslære*. Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.
- Frandsen, J. B. (2004). Numerical bridge deck studies using finite elements. Part I: flutter. *Journal of Fluids and Structures* 19(1), 171 – 191.
- Katsuchi, H., N. P. Jones, R. H. Scanlan, and H. Akiyama (1998). Multi-mode flutter and buffeting analysis of the akashi-kaikyo bridge. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 77 & 78(1), 431 – 441.
- Larsen, A. and J. H. Walther (1998). Discrete vortex simulation of flow around five generic bridge deck sections. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 77(8), 591 – 602.
- Nielsen, S. R. K. (2004). *Vibration Theory, Vol. 1 - Linear Vibration Theory*. Aalborg Tekniske Universitetsforlag.
- Scanlan, R. H. (1978). The Action of Flexible Bridges under Wind, I: Flutter Theory. *Journal of Sound and Vibration* 60(2), 187 – 199.
- Shirai, S. and T. Ueda (2003). Aerodynamic simulation by CFD on flat box girder of super-long-span suspension bridge. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 91(1), 279 – 290.
- Simonsen, K. and R. Stevens (2008). Investigation an aerodynamic stability of long-span suspension bridges under erection. Technical report, Aalborg Universitet.
- Stærdahl, J. W., N. N. Sørensen, and S. R. K. Nielsen (2007). Aeroelastic Stability of Suspension Bridges using CFD. *Not published*.
- Sund & Bælt Holding A/S (2007, August). *To broer og en tunnel 2007*. Sund & Bælt. <http://www.sundogbaelt.dk/dk/Menu/Publikationer/Tobroer2007>, hentet d. 12.05.08.
- Thorbek, L. T. (1997, Maj). Buffeting response of the great belt suspension bridge during construction. Technical report, Svend Ole Hansen APS.

-
- Thorbek, L. T. and J. C. Bennetsen (14. marts 2008). Møde hos Rambøll A/S.
- Thorbek, L. T. and S. O. Hansen (1996, August). Analyses of critical flutter wind velocities during construction. Technical report, Svend Ole Hansen APS.
- Zhang, X., H. Xiang, and B. Sun (2002). Nonlinear aerostatic and aerodynamic analysis of long-span suspension bridges considering wind-structure interactions. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 90(1), 1065 – 1080.
- Zhu, L. D. and Y. L. Xu (2005). Buffeting response of long-span cable-supported bridges under skew winds. Part 1: theory. *Journal of Sound and Vibration* 281(1), 647 – 673.

