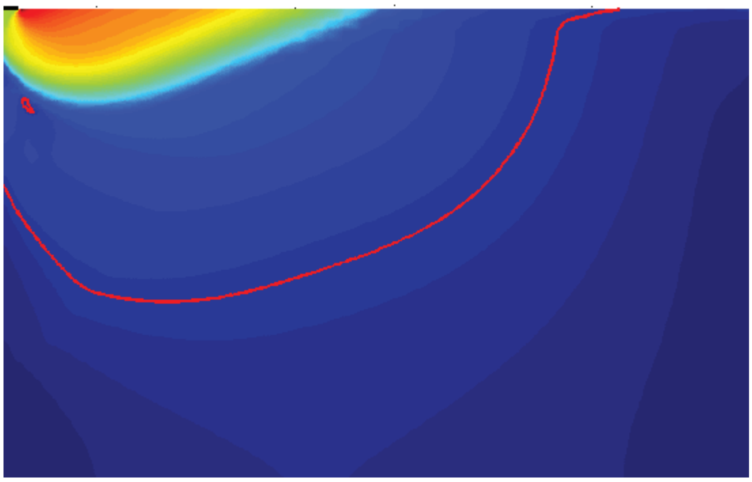
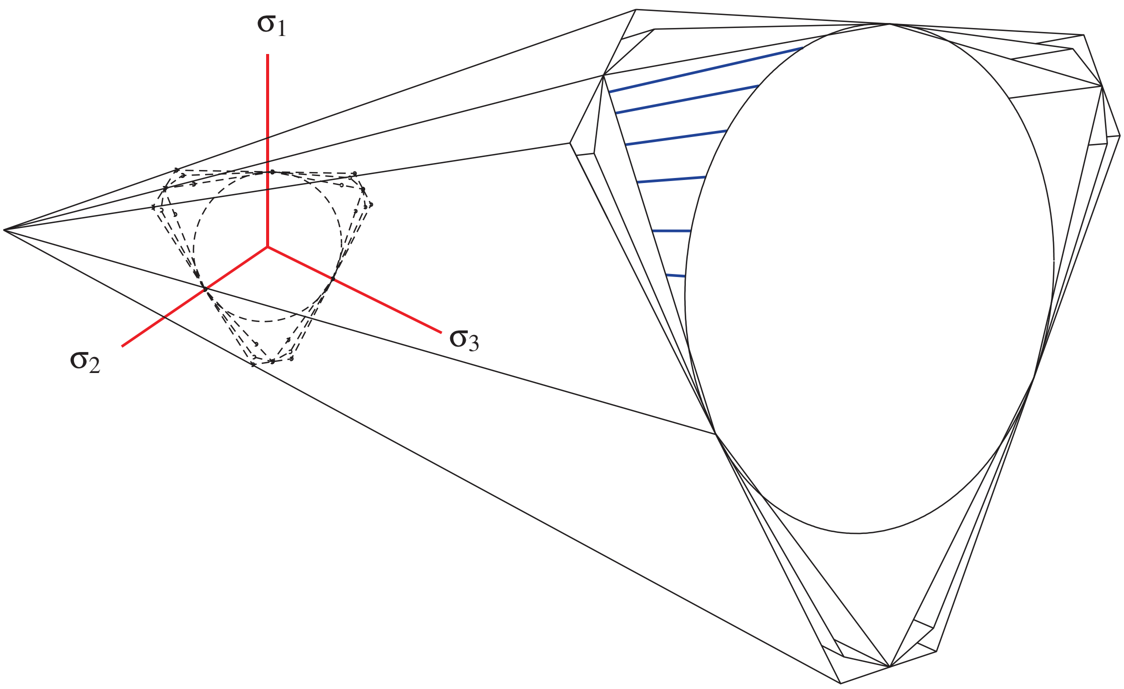
Implementering af plasticitet i en FEM-model: Unified Strengt Theory

B10k, 10-07-2013

Emil A. Demeny





Afgangsprojekt på civilingeniøruddannelsen
Byggeri og Anlæg, Aalborg Universitet

Aalborg Universitet
School of Engineering and Science
Sohngårdsholmsvej 57
Phone 99 40 85 30
http://www.bsn.aau.dk

Projektets titel: Implementering af plasticitet i en FEM-model: Unified Strength Theory

Projektperiode: Efteråret 2012 til sommeren 2013

Forfatter:

Emil Attila Demeny

Synopsis:

I rapporten er Unifiedkriteriet blevet implementeret i et FEM-program i MATLAB, med henblik på at undersøge forskellene mellem den og materialemodellerne: Mohr-Coulomb og Drucker-Prager. Til dette er der blevet anvendt en model af et simpelt fundament i plan tøjning og aksesymmetri. Indflydelsen fra Unifiedkriteriets materialekonstant, *b*, er også blevet undersøgt, og forsøgt at finde en realistisk størrelse på den.

Vejleder: Johan Clausen

Antal printede kopier: 3
Sideantal: 39
Antal vedhæftninger: 1 CD
Afsluttet: 10. Juni 2013

Indhold

1 Forord

Denne rapport er resultatet af et langt afgangsprojekt på Aalborg Universitet på linjen: Civilingeniør i Byggeri og Anlæg. Titlen på projektet er: *Implementering af plasticitet i en FEM-model: Unified Strength Theory*. Rapporten vil omhandle forskellige aspekter indenfor FEM og kontinuummekanik.

Hovedvægten i rapporten vil ligge i implementeringen af materialemodellen, Unified flydekritteriet, til et eksisterende FEM program. Materialemodellen bruges til implementeringen af et friktionsmateriale, som f.eks. jord eller sten.

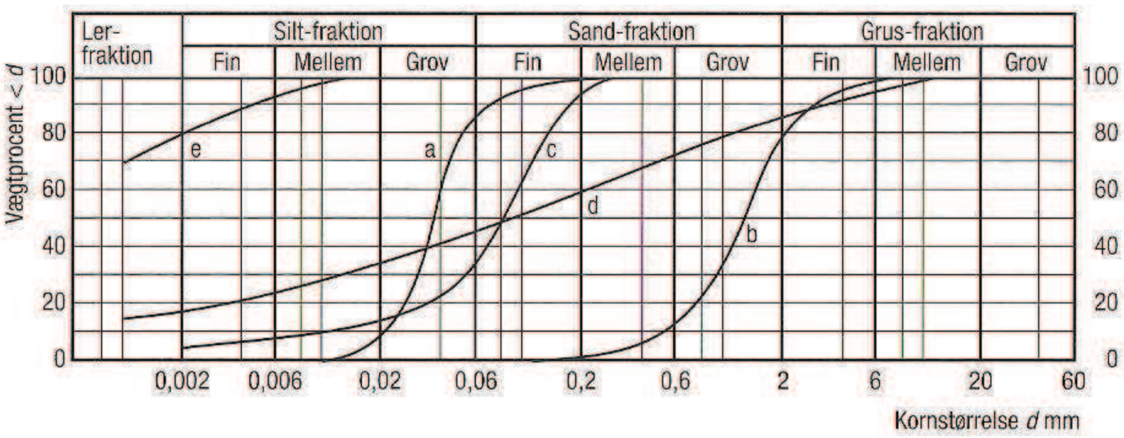
Læsevejledning

Projektet består af en hovedrapport med en tilhørende CD, hvor alle programkoder og resultatsfiler er vedlagt.

Igennem rapporten vil der være henvisninger til kilder, som alle er samlet i en litteraturliste bagerst i rapporten. Harvard-metoden anvendes til kildehenvisning, hvilket vil sige, at kilder angives som (Efternavn, År). Henvisningen refererer til litteraturlisten, hvor bøger er angivet med forfatter, titel, udgave, forlag og ISBN, mens internetsider er angivet med forfatter, titel, dato og webadresse. Er kilden angivet før punktum refereres til den pågældende sætning, er kilden angivet efter punktum refereres til hele afsnittet. Figurer, tabeller og ligninger er nummereret i henhold til deres respektive kapitler, hvilket vil sige, at eksempelvis den første figur i kapitel 3 har nr. 3.1, den anden figur har nr. 3.2 osv. Forklarende tekst til figurer og tabeller vil være angivet under dem. Fortegnet på spændninger angives for positiv i træk.

Jords opførsel 2

Jord er sammensat af partikler med forskellige kornstørrelser og hulrum af enten vand eller luft. Dette er illustreret på en kornkurve på fig. 2.1, hvor 5 forskellige jordklassifikationer er illustreret.

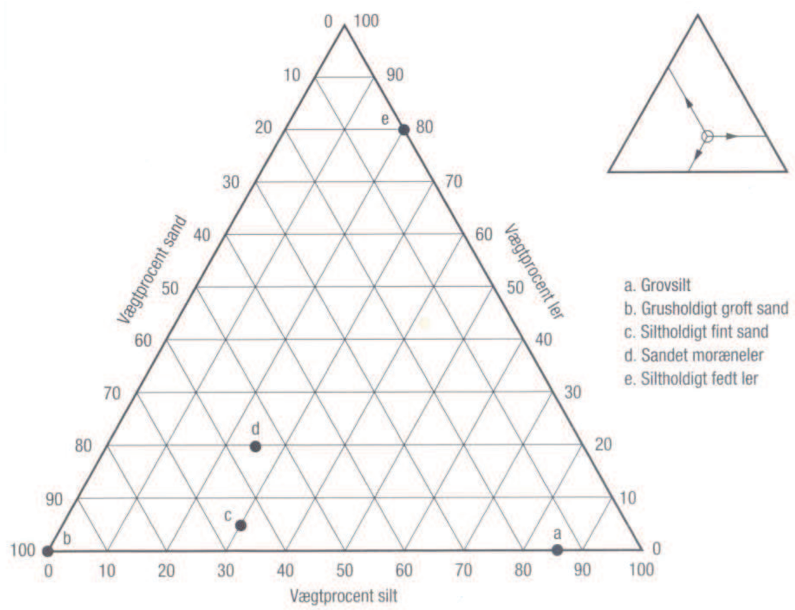


Figur 2.1: *Kornkurve. (Ovesen et al., 2007)*

De 5 forskellige jordklassifikationer kan derefter plottes i et trekantsdiagram som vist på fig. 2.2 . Det ses at vægten på jord er en kombination af tre forskellige hovedbestanddele, nemlig sand, silt og ler.

Det der karakteriser ler er, at styrken kommer fra dens kohæsion. Dens evne til at holde på vand er god, og vil derfor kunne overføre spændninger igennem et poreovertryk. Tiden på frigivelsen af poreovertrykket vil kunne måles i år, og spændingerne vil i den forbindelse begynde at overføres til de enkelte korn. Denne proces kaldes en konsolidering.

Sand derimod, har ingen kohæsion, og har derfor ingen trækstyrke. Dens evne til at holde på vand er ringe, og vil derfor bortdræne omgående ved en belastning. Dens styrke vil derfor altid findes i de effektive spændinger. Styrken findes i friktionen imellem de enkelte korn, og vil derfor være trykafhængig. Derfor kategoriseres sand for et friktionsmateriale.



Figur 2.2: *Trekantsdiagram over kornfordelingen for en jordprøve. (Ovesen et al., 2007)*

2.1 Spændinger

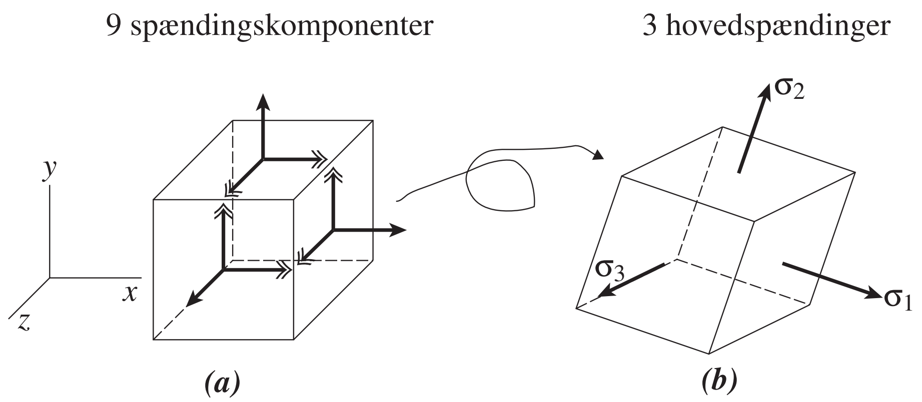
Spændningerne fra en belastning i jorden kan enten overføres gennem de enkelte partikler, poreovertrykket, eller en kombination af disse. Dette afhænger af partikkelsammensætningen og konsolideringsgraden.

En computersimulering af denne proces vil være umuligt at gennemføre, og derfor vil en simplificeret matematisk model blive betraget, hvor jorden anses for et kontinuum. Til dette anvendes et FEM-program, som er beskrevet yderligere i kapitel 3.

2.1.1 Spændningspunkt

I kontinuummekanik defineres den komplekse spændingstilstand i et punkt med en spændingstensor. Denne har i alt 9 komponenter, som repræsenterer 3 tilstødende flader på en infinitesimal terning, se fig. 2.3a. Pga. af en spændingsligevægt ses der bort fra de tre modstående flader. Derudover observeres der momentligevægt hvilket tillader problemet reduceret til 6 uafhængige spændingskomponenter. Spændingstensoren kan yderligere transformeres til en hovedspændingstensor med 3 unikke spændingskomponenter. Disse kan også blive kaldt for triaxialspændinger, og kan ses på fig. 2.3b.

Når jord udsættes for lastændringer, vil det resultere i små flytning, som på dets molekylære niveau vil resultere i proportionele elastiske tøjninger. Hvis lastændringerne og flytningerne bliver for store, vil jordmaterialet opnå flydning, og til sidst bryde. I det følgende afsnit vil der blive set nærmere på hvornår plasticiteten indtræder i et punkt.



Figur 2.3: *(a) Spændingskomponenterne på en infinitesimalterning. (b) Infinitesimalterningen roteres til hovedspændingsrummet.*

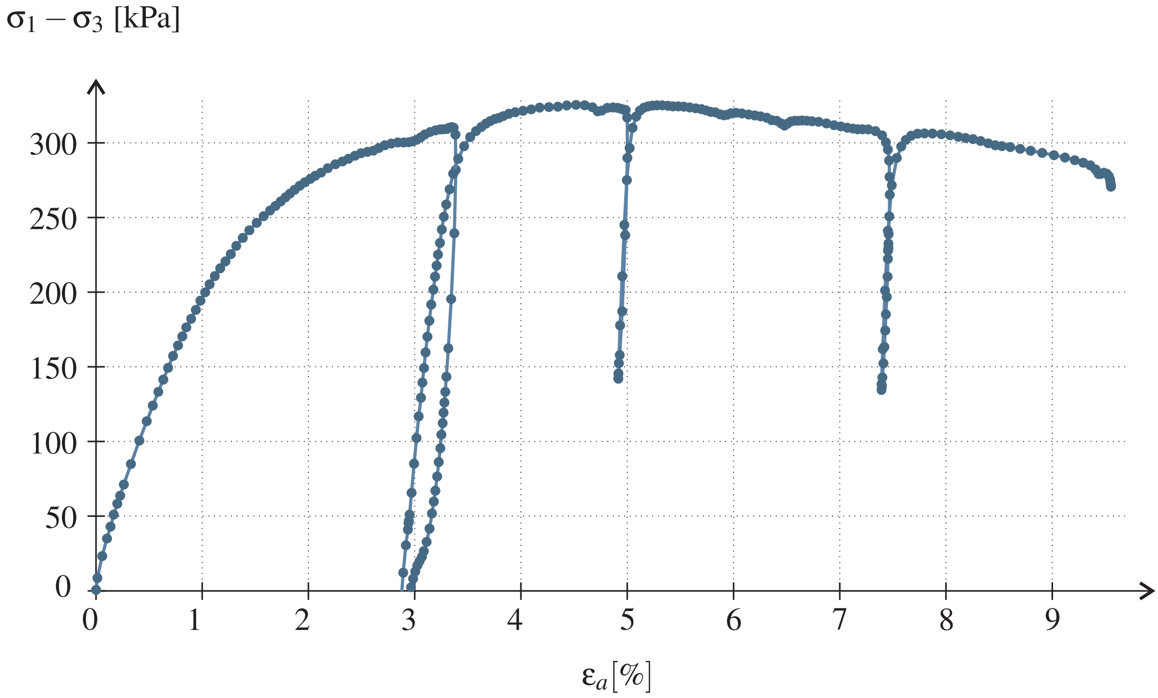
2.1.2 Arbejdskurven

På fig. 2.4 kan arbejdskurven ses fra et triaksialforsøg. Princippet for dette er illustrativt på fig. 2.5 hvor et eksempel på en arbejdskurve ses sammen med en simplifiseret arbejdskurve som kan bruges i forbindelse med en materialemodel. Den *originale arbejdskurve* for det pågældende materiale viser tøjnings- og spændningsforholdet, og viser desuden indflydelsen på spændingshistorien. Dvs. at tøjningerne vil være reversible i det elastiske område, men vil være irreversible når påbegyndt flydning, σ_0, er indtruffet. Herefter opnår materialet en hærdning, indtil den til sidst vil bryde.

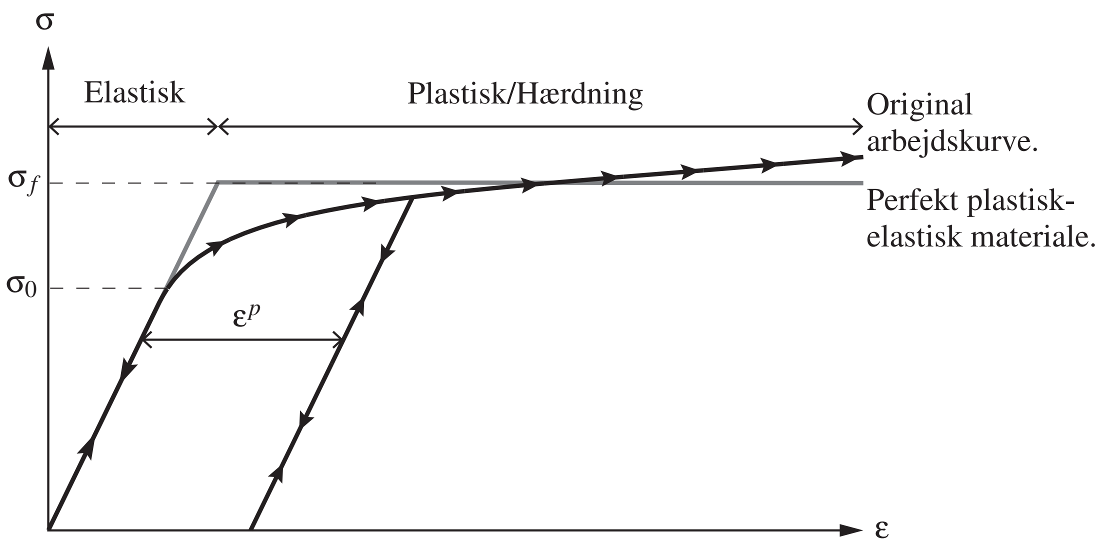
En sådan arbejdskurve vil typisk blive simplificeret i forbindelse med defineringen af en matematisk materialemodel. På samme figur er en *Perfekt plastisk elastisk* materialemodel blevet skitseret. Her indtræder flydning ved en lidt højere spænding, σ_f, men vil til gengæld ikke opleve en hærdning. I dette projekt vil FEM-programmet blive begrænses til kun at håndtere perfekt plasticitet.

2.2 Flydekriterier

Efter et spændningspunkt er transformeret til dens hovedspændinger, se fig. 2.3, kan værdierne plottes på det deviatoriske plan som er lagt i hovedspændningsrummet, se fig. 2.6a. Her ses et vilkårligt flydekriterie for jord, som danner en matematisk grænse for om et spændningspunkt befinder sig i den elastiske eller plastiske tilstand, se fig. 2.5. Flydekriteriet karakteriseres så trykmeridianen i punkt C er større end trækmeridianen i punkt T. For et isotrop materiale vil flydekriteriet indeholde en 60°-symmetri, og kan derfor karakteriseres i meridianerne der afgrænses af $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$, hvis hovedspændninger arrangeres



Figur 2.4: *En arbejdskurve fra et triaksialforsøg. (Clausen, 2007)*



Figur 2.5: *Arbejdskurven for et vilkårligt materiale samt en simplificering af dette.*

så $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ er opfyldt. θ angiver vinklen fra σ_1-aksen til et vilkårligt punkt mod uret, se. fig. 2.6a. Fordi θ er en invariant, vil vinklen kunne findes udfra andre invarianter:

$$\theta = 30^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right)\frac{1}{3}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{s}$$

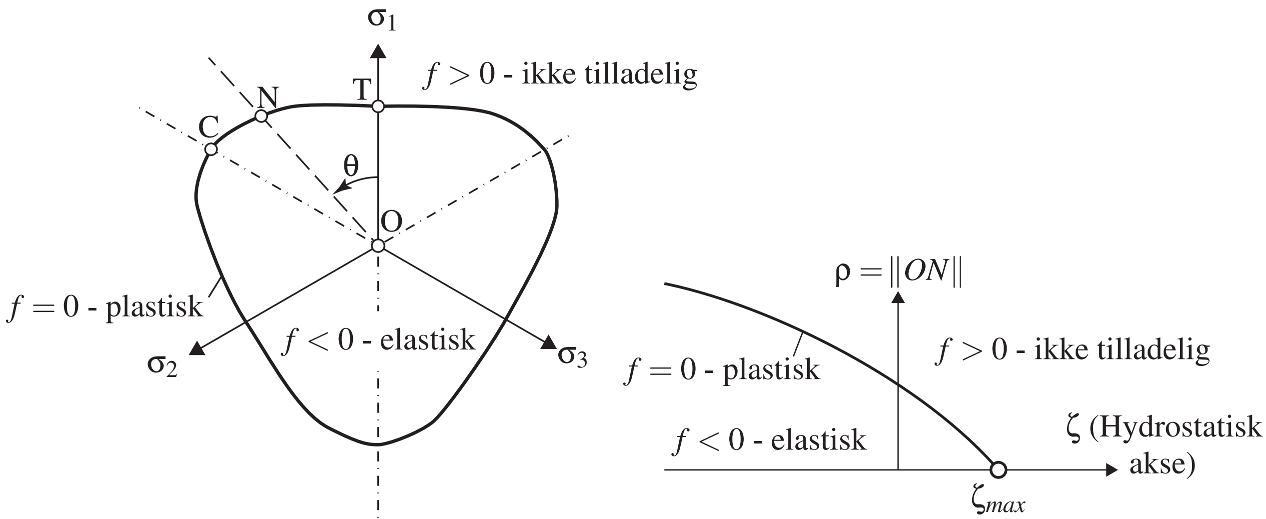
$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \frac{I_1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{s})$$

hvor,

I_1, J_2 og J_3	Invarianter
$\boldsymbol{s}$	Deviatoriske spændningstensor



(a) Flydekriteriet på det deviatoriske plan, hvor koordinaten på den hydrostatisk akse er mindre end ζ_{max}.

(b) Meridianplanet dannet af tværsnittet mellem punkt N på flydefladen og den hydrostatiske akse.

Figur 2.6: *Et eksempel på et flydekriterie for et kohesions- og friktionsafhængigt materiale. Dette karakteriserer jord. Ide efter (Ottosen og Ristinmaa, 2005)*

Friktionsjords styrke afhænger af koordinaten på den hydrostatisk akse, ζ, som er en invariant. Denne findes som:

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \tag{2.1}$$

ζ er illustreret på fig. 2.6b hvor et eksempel på flydekriteriet for jord kan ses i et meridianplan. Meridianplanet er dannet af tværsnittet mellem punktet N på flydefladen og den hydrostatiske akse, se fig. 2.6a. Her er afstanden $\|ON\|$ defineret som:

$$\|ON\| = \rho = \sqrt{2J_2} \tag{2.2}$$

Påvirkningen af ζ på flydekriteriet er tydelig, og viser at jorden har en begrænset trækstyrke, og opnår en plastisk tilstand ved ζ_{max}.

Det generelle matematiske udtryk for flydekriteriet kan opstilles som:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_p, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \tag{2.3}$$

hvor,

f	Flydekriterie
$\boldsymbol{\sigma}_p$	Hovedspændinger
$\boldsymbol{\kappa}$	Hærdeparametre

Flydekriteriet i (2.3) er opfyldt, og spændningspunktet er derfor i en plastisk tilstand. Hvis $f < 0$ vil den stadig være elastisk, og $f > 0$ er ikke muligt da den allerede vil have oplevet flydning. Hovedspændningerne i et spændingspunkt vil derfor bevæge sig i den elastiske tilstand, indtil de møder grænsen på flydekriteriet, hvorefter de enten vil begynde at glide på den eller vende tilbage til den elastiske tilstand.

Hærdeparametrerne $\boldsymbol{\kappa}$, har en indflydelse på hvordan flydekriteriet vil opføre sig, efter et spændningspunkt har nået sin plastiske grænse. Enten kan flydekriteriet begynde at flytte sig, *kinematisk hærdning*, eller også kan den begynde at ændre form og størrelse, *isotrop hærdning*. I virkeligheden vil der opstå en kombination af disse to hærdningstyper. Da resten af rapporten kun vil beskæftige sig med lineære elastisk-perfekt plastiske materialemodeller, vil hærdeparametrerne ikke blive omtalt yderligere.

Igennem tiden er der blevet udviklet en lang række flydekriterier, som hver især vil være gode for nogle typer materialer og dårlige for andre. Én af ingeniørens opgaver vil derfor være at anvende dert bedst egnede flydekriterie. I det følgende vil der blive set på forskellige velkendte flydekriterier, og en relativ ny én.

2.2.1 Drucker-Prager

Drucker-Pragerkriteriet bruges til at finde flydning i trykafhængige materialer, som f.eks. friktionsafhængig jord, sten og beton. Flydekriteriet er dog ikke så udbredt blandt geoteknikere. Drucker-Pragerkriteriet er en udvidelse af von Mises-kriteriet, som ikke er trykafhængig. Den kan tilpasses på tre forskellige måder til Mohr-Couloumb kriteriet, hhv. med en træk-, tryk- og indskrevet fit. Disse kan ses på fig. 2.10 hvor de sammenholdes med andre forskellige flydekriterier. Flydekriteriet kan skrives på følgende måde:

$$f_{dp} = 0 = \sqrt{2J_2} + \lambda I_1 - \beta \tag{2.4}$$

hvor,

f_{dp}	Drucker-Prager flydekriteriet.
λ	Parameter som er afhængig af friktionsvinklen.
β	Kohæsionen.

Fittingsparametrene kan beregnes på følgende måde:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} \lambda = &\quad (k-1)(k+2)^{-1} \\ \beta = &\quad \sigma_c(1-\lambda) \end{aligned}\right\}\text{Tryk-fit} \\
&\left.\begin{aligned} \lambda = &\quad (k-1)(2k+1)^{-1} \\ \beta = &\quad \sigma_c(1-2\lambda) \end{aligned}\right\}\text{Træk-fit} \\
&\left.\begin{aligned} \lambda = &\quad (k-1)\left(2\sqrt{1+k+k^2}\right)^{-1} \\ \beta = &\quad \sigma_c 3\lambda(k-1)^{-1} \end{aligned}\right\}\text{Indskrevent-fit}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

hvor friktionskoefficienten, k, og den enaksede trykstyrke, σ_c, kan findes som:

$$k = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$$
$$\sigma_c = 2c\sqrt{k}$$

hvor,

c	Kohæsion

2.2.2 Trescakriteriet

Trescakriteriet bruges mest på materialer, hvor styrken er uafhængig af det hydrostatiske tryk. Dette gør sig gældene for de fleste metalliske materialer og udrænet ler, men udelukker drænet ler og sand.

Kontinuumelementet med hovedspændningerne, hvor $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, kan betrages på fig. 2.7a. Denne kan roteres $\alpha = 45^\circ$ omkring σ_2-aksen, hvor den største forskydningsspænding, τ_{13}, og dets tilhørende normalspændning, σ_{13}, blotlægges. Dette roterede element kaldes for et Trescaelement. Størrelsen på spændingerne τ_{13} og σ_{13} kan også findes udfra Mohrs cirkel, som kan ses på fig. 2.7b.

Trescakriteriet beskriver brud når den maksimale forskydningspændning bliver overskredet. Dvs:

$$f_{tr} = \tau_{13} - C = 0 \qquad \text{når} \qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \tag{2.6}$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{2.7}$$

hvor,

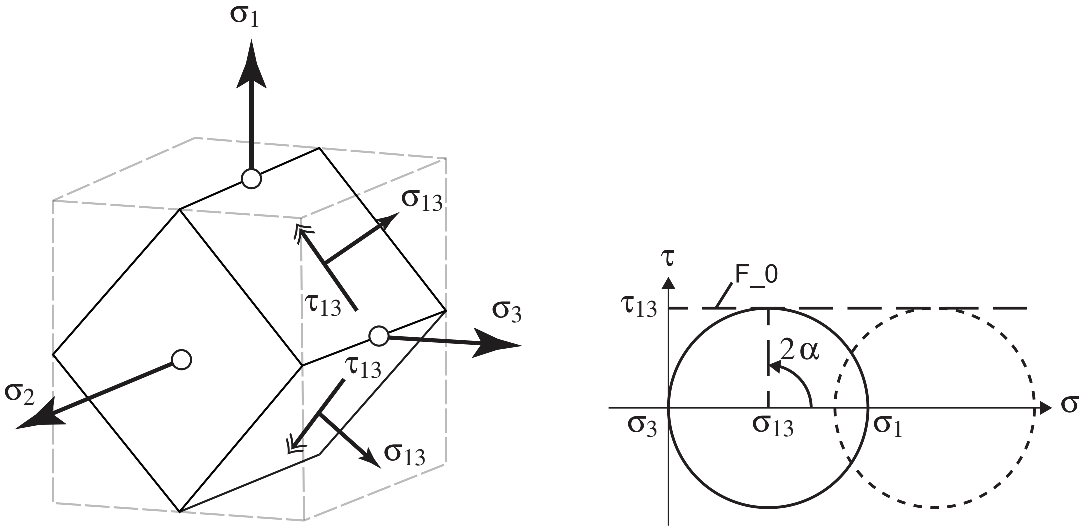
f_{tr}	Trescakriteriet.
C	Materialekonstant.
$\sigma_{1,2,3}$	Hovedspændninger.
$\tau_{13,23,12}$	Maksimale forskydningsspændninger.
$\sigma_{13,23,12}$	Normalspændninger relativt til de maksimale forskydningsspændninger.

Materialekonstanten C kan findes ved enakset træk, hvor følgende betingelse gør sig gældende:

$$\sigma_1 = \sigma_t$$
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

hvor σ_t er den aksial træksstyrke. Materialekonstanten findes til $C = \sigma_t/2$, og derved kan Trescakriteriet defineres på følgende måde:

$$f_{tr} = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_t = 0 \tag{2.8}$$



(a) Spændninger på Trescaelementet.

(b) Trescaspændninger på Mohrs cirkler.

Figur 2.7: *Trescaelement*

Bemærk at Trescakriteriet i (2.8) ikke afhænger af den hydrostatiske tryk. Dette kan yderligere visualiseres på fig. 2.7b, hvor τ_{13} er konstant, fordi den er uafhængig af σ_{13}. Dette gør Trescakriteriet uegnet til modellering af jord.

2.2.3 Mohr-Coulombkriteriet

Med udgangpunkt i Trescakriteriet i (2.6) og fig. 2.7, kan Mohr-Coulombkriteriet beskrives på følgende måde:

$$f_{mc} = \tau_{13} + \mu\sigma_{13} - C = 0 \qquad \text{når} \qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \tag{2.9}$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \tag{2.10}$$

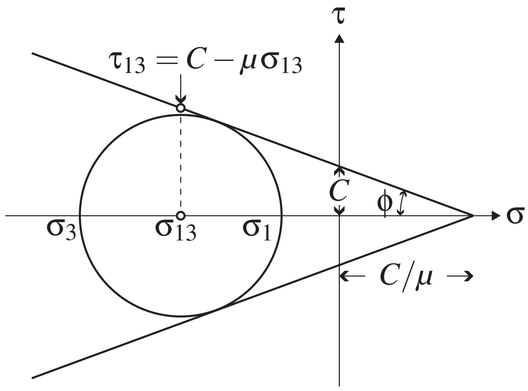
$$\mu = \frac{k-1}{k+1} \tag{2.11}$$

$$k = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$$

hvor,

f_{mc}	Mohr-Coulomb flydekriteriet.
μ	Positiv materialekoefficient der beskriver effekten på den hydrostatiske spændning.
k	Friktionskoefficient.
$\sigma_{1,2,3}$	Hovedspændninger.
ϕ	Friktionsvinkel.

Bemærk forskellen i (2.6) og (2.9), hvor normalspændningen, σ_{13}, og derfor den hydrostatiske spændning i Mohr-Coulombkriteriet er med til at afgøre styrken for materialemodellen. Dette kan også ses i et Mohrdiagram på figur 2.8.



Figur 2.8: *Mohr diagram*

Én af metoderne til at finde konstanten C, er ved et standart triaksialforsøg, som vist på fig. 2.9a. Her skal de følgende betingelser opfyldes:

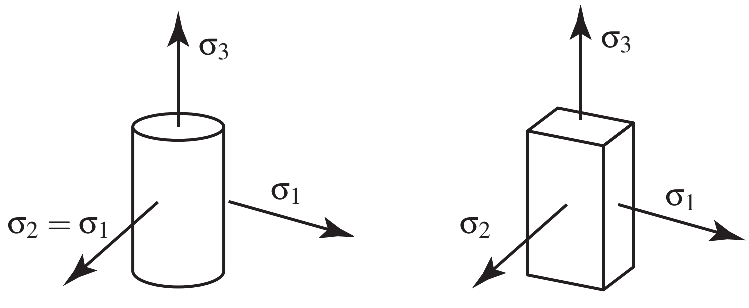
$$\sigma_3 = -\sigma_c \tag{2.12}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \tag{2.13}$$

hvor,

σ_c	Aksial trykstyrke

I praksis gøres dette ved at installere en cylindrisk jordprøve i en gummimembran, med et lille undertryk. Jordprøvens ender vil herefter blive lastet til brud, hvor lasten σ_c noteres. Konstanten C findes herved som:



(a) Cylindrisk/standart triaksialforsøg.

(b) Ægte triaksialforsøg.

Figur 2.9: *Principdiagram for betingelserne i to forskellige triaksialforsøg.*

$$
\begin{aligned}
&(2.9)\Big|_{(2.7),(2.10),(2.12),(2.13)} \\
&\Updownarrow \\
&C = \frac{1}{2}\sigma_c\,(\mu - 1)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Hvorefter Mohr-Coulombkriterriet kan udtrykkes ved en trykstyrke og friktionskoefficient:

$$
f_{mc} = (2.9)\Big|_{(2.14),(2.11)} = k\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c \tag{2.15}
$$

Friktionskoefficient, k, kan findes ved enten et triaxial- eller skæreboksforsøg. På fig. 2.10 er (2.15) plottet i det deviatoriske spændingsplan.

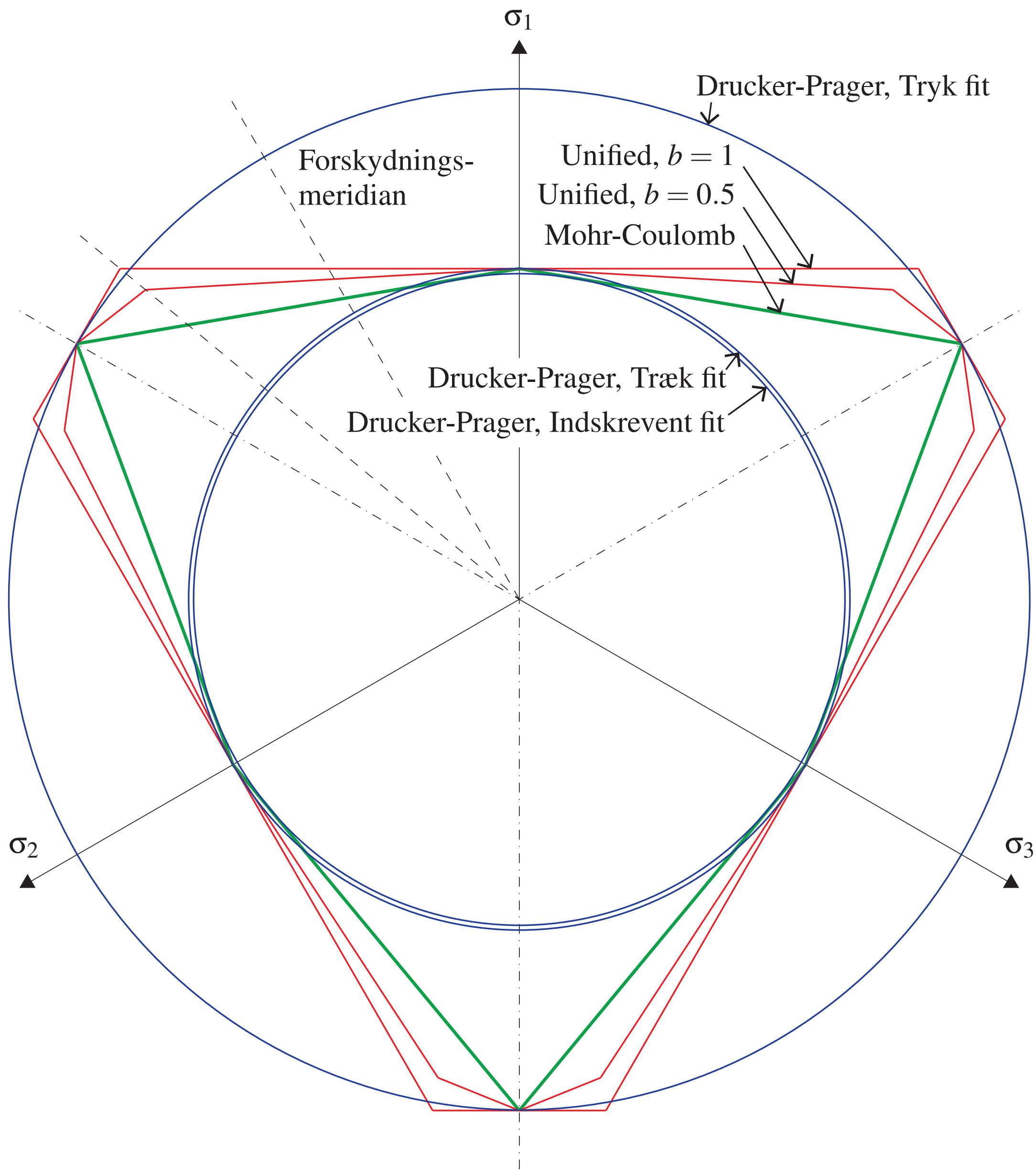
Blandt geoteknikere er anvendelsen af Mohr-Coulombkriteriet mest udbredt, når styrken for jord og sten skal findes. Flydekriteriet tager hensyn til forskellen på træk- og trykstyrken, samt effekten af det hydrostatiske tryk.

En af ulemperne ved flydekriteriet er at den mellemste hovedspænding, σ_2, anses for ubetydelig og derfor udelades. Dette har simplifiseret flydekriteriet til at undervurdere styrken, fordi jorden i virkeligheden har større styrker i forskydningsmeridianen. De konventionelle triaksialforsøg bruger cylindriske jordprøver som vist på fig. på fig. 2.9a, men ved anvendelsen af et ægte triaksialforsøg, se fig. 2.9b, vil vise at σ_2 ikke er ubetydelig. På fig. 2.11 kan effekten af dette ses, hvor styrkerne fra et standart og ægte triaksialforsøg er sammenholdt med Mohr-Coulombkriteriet (Lade, 2002). Bemærk at på figuren anses tryk for positiv. I Danmark er det derfor en udbredt praksis at øge friktionsvinklen med 10 % (Ovesen et al., 2007, s. 167).

2.2.4 Twin shear

Fra kontinuummekanik er det velkendt at den maksimale forskydningsspændning i et kontinuumelement er summen af de to andre, se fig. 2.12. Dvs at:

$$
\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23} \qquad \text{når} \qquad \tau_{13} > \tau_{12} \wedge \tau_{13} > \tau_{23}
$$

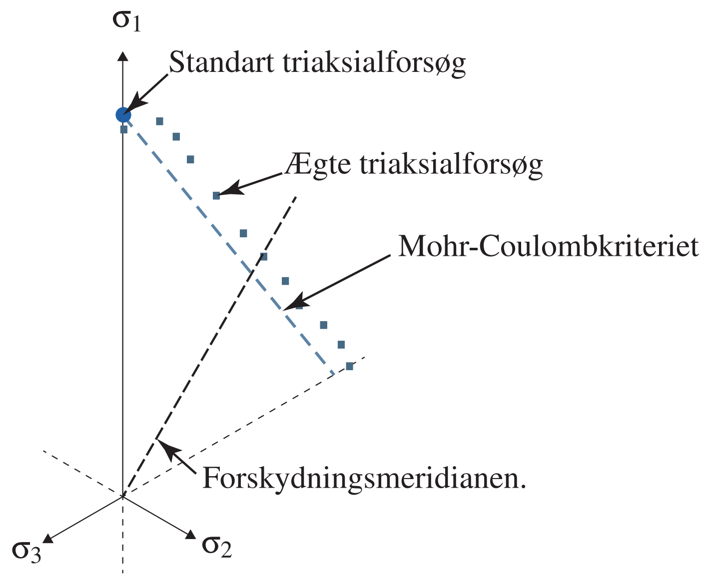


Figur 2.10: *Flydekriterier i det deviatoriske plan.*

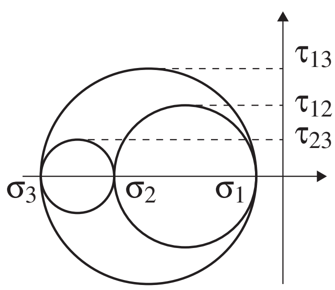
Twin shear flydekriteriet definerer således et brud ud fra de to største forskydningsspændninger. Dvs.:

$$f_{Twin} = C = \begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} & \text{når} \quad \tau_{12} > \tau_{23} \\ \tau_{13} + \tau_{23} & \text{når} \quad \tau_{12} < \tau_{23} \end{cases} \tag{2.16}$$

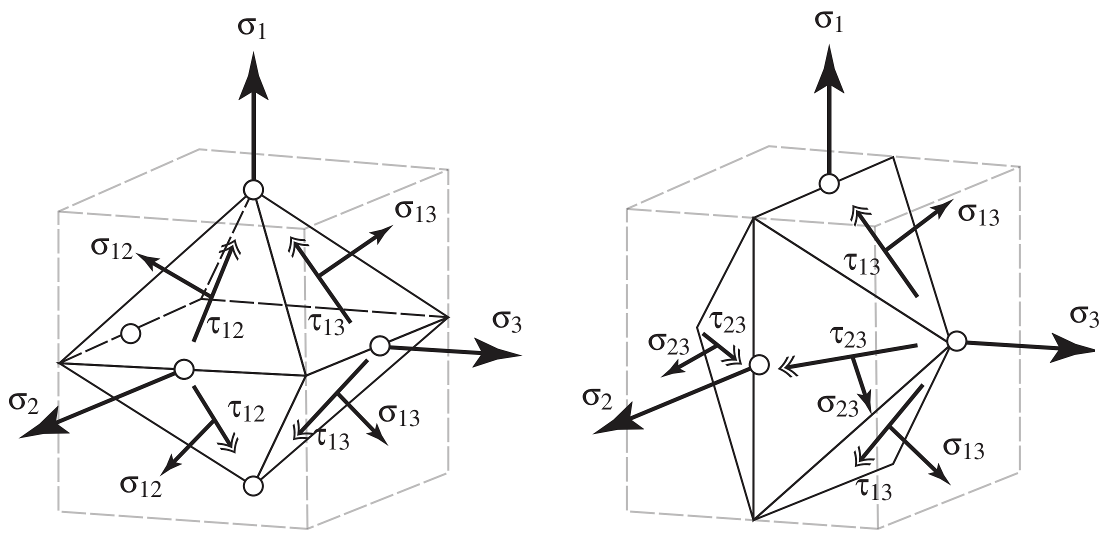
Den kubisk kontinuumelement kan dissekeres til et twin-shear element, som består af de to største forskydningsspændninger og deres tilhørende normalspændninger. På fig. 2.13



Figur 2.11: *Mohr-Coulombkriteriet sammenlignet med triaksialforsøg på det deviatoriske spændningsplan. Bemærk at trykspændninger er angivet som positiv. Efter (Lade, 2002)*



Figur 2.12: *Relationen mellem de maksimale forskydningsspændninger vist med Mohrs cirkler.*



(a) $\tau_{12} > \tau_{23}$ ***(b)*** $\tau_{12} < \tau_{23}$

Figur 2.13: *Twin-shear element*

kan Twin-shear elementerne betragtes, hvilket danner princippet for (2.16).

Twin-shear flydekriteriet er således en udvidelse af Trescabetingelsen, og er derfor ikke afhængig af det hydrostatiske tryk. Laboratorieforsøg har vist at den kun kan anvendes i meget speciele tilfælde, som f.eks. ved beregning af tynde titaniumrør (Yu, 2004, s.67).

2.2.5 Unified

I bogen (Yu, 2004) foreslåes det at skabe et flydekriterie, “Unified Yield Criterion”, som afgrænses af Twin-shear elementet som ses på fig. 2.13 og Trescaelementet som ses på fig. 2.7.

Denne er blevet udviklet yderligere til at kunne håndtere forskellen mellem tryk- og trækstyrken, og bliver kaldt for “Unified Streng Theory”. I resten af rapporten vil denne kaldes for Unifiedkriteriet eller UYC. Dette dikterer brud når summen af de to største forskydningsspændinger og en del af de korresponderende normalspændninger når størrelsesordenen C.

$$f_{ust} = C = \begin{cases} \tau_{13} + b\tau_{12} + \mu(\sigma_{13} + b\sigma_{12}) & \text{, når } \tau_{12} + \mu\sigma_{12} >= \tau_{23} + \mu\sigma_{23} \\ \tau_{13} + b\tau_{23} + \mu(\sigma_{13} + b\sigma_{23}) & \text{, når } \tau_{12} + \mu\sigma_{12} <= \tau_{23} + \mu\sigma_{23} \end{cases} \tag{2.17}$$

hvor,

f_{uyt}	Unified flydekriteriet
b	Unified parameter

Parameteren b bestemmer indflydelsen af σ_2 på flydekriteriet. Denne sættes til at være mellem 0 og 1, hvorved flydekriteriet vil være konveks i hovedspændningsrummet. På fig. 2.10 kan flydekriteriet ses i det deviatoriske plan med to forskellige b-værdier. Unifiedkriteriet i (2.17) vil være sammenfaldende med Mohr-Coulombkriteriet i (2.9) hvis $b = 0$.

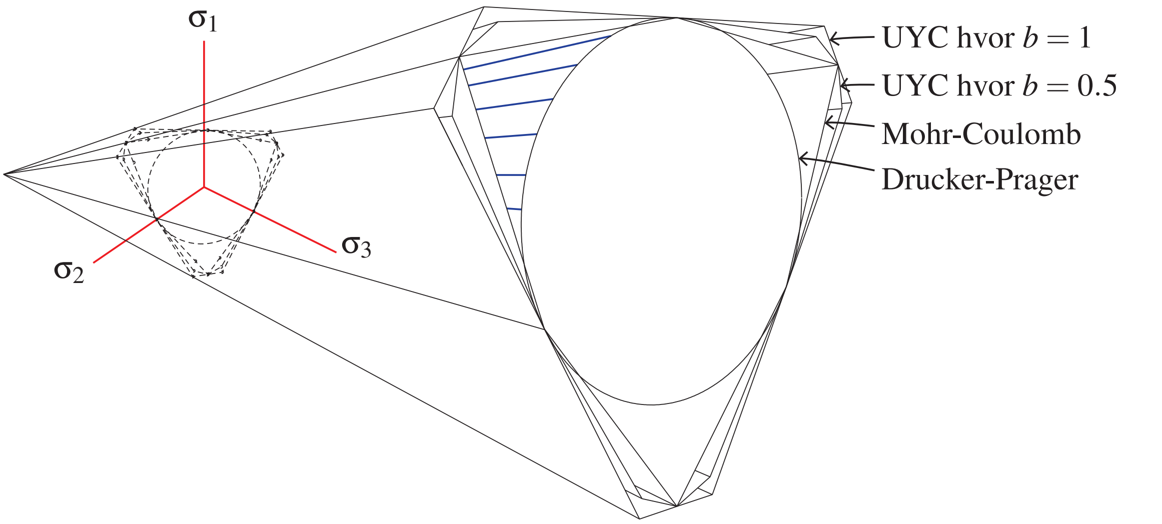
(2.17) kan omskrives, så den afhænger af hovedspændningerne, friktionstallet og trykstyrken. Dette ses i (2.18).

$$f_{uyt} = 0 = \begin{cases} k\sigma_1 - \dfrac{b\sigma_2}{1+b} - \dfrac{\sigma_3}{1+b} - \sigma_c & \text{, når } \sigma_2 \leq \dfrac{\sigma_1 k + \sigma_3}{k+1} \\[2ex] \dfrac{k\sigma_1}{1+b} + \dfrac{kb\sigma_2}{1+b} - \sigma_3 - \sigma_c & \text{, når } \sigma_2 > \dfrac{\sigma_1 k + \sigma_3}{k+1} \end{cases} \tag{2.18}$$

I modsætning til Mohr-Coulombkriteriet, vil Unifiedkriteriet give en forøget styrke i forskydningsmeridianen. Dette er tydeligt på 2.10. Hvis b-værdien estimeres realistisk, vil den derfor stemme bedre overfor laboratorieforsøgende i fig. 2.11, end MohrCoulombkriteriet gør.

Det er derfor interesant at finde ud af hvor stor forskellen vil være ved anvendelsen af Unifiedkriteriet frem for MohrCoulombkriteriet, samt hvilket værdi materialeparameteren b skal sættes til.

På fig. 2.14 kan en sammenholdning af Unifiedkriteriet, Mohr-Coulombkriteriet og Drucker-Pragerkriteriet ses i hovedspændningsrummet.



Figur 2.14: *Flydekriterier.*

2.3 Plastiske tøjninger

Som det blev vist på fig. 2.5, er der er ingen unikke sammenhænge mellem spændninger og totale tøjninger når spændningspunktet befinder sig i den plastiske zone. Derfor betragtes den totale tøjning i inkrementer, som deffineres på følgende måde:

$$d\varepsilon^t = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

hvor,

$d\varepsilon^t$	Total tøjningsinkrement.
$d\varepsilon^e$	Elastisk tøjningsinkrement.
$d\varepsilon^p$	Plastisk tøjningsinkrement.

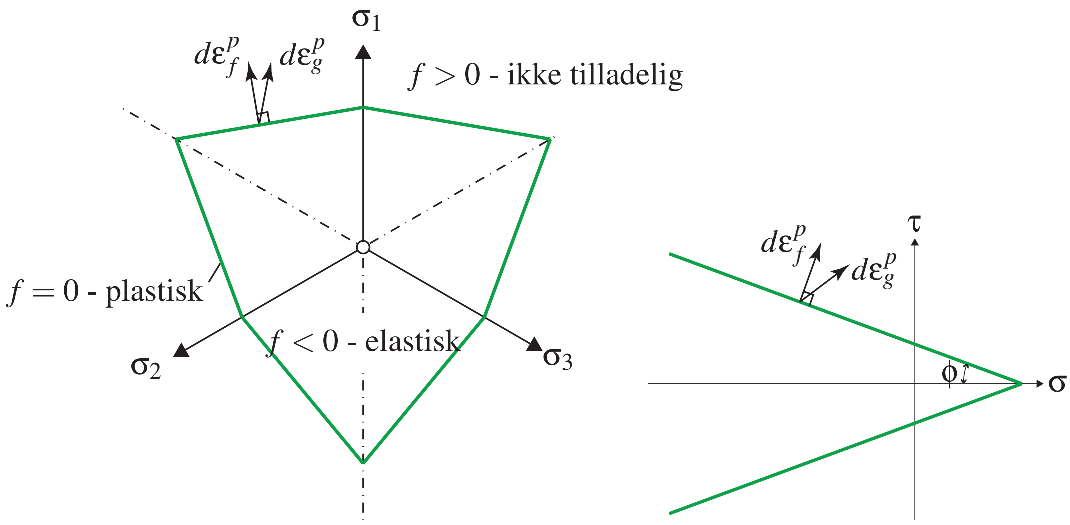
Spændningsinkrementerne skabt af $d\varepsilon^e$ kan findes vha. de konstitutive relationer. Spændingsinkrementerne skabt af $d\varepsilon^p$ skal derimod findes vha. flydereglen:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = d\lambda \nabla g \tag{2.19}$$

hvor,

g	Plastiske potentiale.
$d\lambda$	Positiv scalar

(2.19) kaldes for den ikke-associerede flyderegel hvis $g \neq f$, og den associerede flyderegel hvis $g = f$. Ved den associerede flyderegel, bruges flydekriteriets tangenthældning til at finde størrelsen og retningen på den plastiske tøjning. På fig. 2.15 ses det at tøjningsinkrementet står vinkelret på flydekriteriet pga. normalvektoren ∇f. Den associerede flyderegel bruges mest til mataliske materialer, fordi den foreskriver ingen volumetiske tøjninger fra de plastiske tøjninger.



(a) Flydereglen på Mohr-Coulombkriteriet i det deviatoriske plan.

(b) Flydereglen på Mohr-Coulombkriteriet i $\sigma - \tau$-planet.

Figur 2.15: *Et eksempel på den associerede og ikke associerede flyderegel på Mohr-Coulombkriteriet.*

I jord opstår der volumetisk dilitation. Dette kan enten beskrives med en hærdeparameter, eller med en ikke associeret flyderegel. Ved brug af en hærdeparameter i f.eks. Drucker-Pragerkriteriet, vil den den give større volumetiske tøjninger, end der sker i virkeligheden. Derfor bruges bruges en ikke associeret flyderegel. På fig. 2.15 ses det at tøjningsinkrementet for en ikke associeret flyderegel, står ikke vinkelret på flydekriteriet.

3 Simulering af jord

Et FEM-program kan bruges til at simulere reaktionerne i et materiale når den bliver udsat for en last eller tvungen flytning. Det gør den ved at dele geometrien op i et net af elementer, hvis placeringer og egenskaber hver især vil kunne udtrykkes matematisk.

Denne rapport tager udgangspunkt i et FEM-program som er blevet skrevet specifikt til at kunne beregne spændingerne og deformationerne under et stribefundament eller et punktfundament. Dvs. at den kan håndtere både plane tøjninger og aksesymmetri. Programmet er blevet udleveret af Johan Clausen. (Clausen, 2007)

På tabel 3.1 er den overordnede algoritme blevet skitseret for FEM-programmet. Den virker ved at sætte flytnings- eller lastinkrementer på et fundament, indtil det ønskede resultat er opnået. Under hver af disse inkrementer er der blevet brugt en Newton-Raphson iteration, som har bragt den globale kraftsresidual til et minimum. Som det kan ses i tabellen, er en af opgaverne i denne iteration, en spændningsopdatering som ikke overskrider flydekriteriet.

Flydekriteriet afgør om de komplekse spændninger i gauspunkterne befinder sig i den elastiske eller plastiske tilstand, eller om de overtræder flydekriteriet. Hvis flydekriteriet er overtrådt, bruges spændingsopdateringen til at ændre på spændingerne, så de ikke overtræder flydebetingelsen. Flydereglen bruges derefter til at bestemme forholdet mellem tøjningerne og spændinger.

3.1 Implementering af Unifiedkriteriet i spændningsopdateringen

De traditionelle metoder brugt til spændningsopdateringen af et punkt, vil kræve en simplificering af de flydekriterier som ikke er differentiabel over hele fladen. Dette er tilfældet for Mohr-Coulomb- og Unifiedkriteriet, fordi de indeholder kanter hvor retningen på det plastiske tøjningsinkrement, $d\varepsilon^p$, ikke kan findes éntydigt. Istedet for at afrunde kanterne på Unifiedkriteriet, hvilket ville løse problemet, er der blevet brugt en metode som kan returnere de komplekse spændninger på flydekriterier bestående af sammensatte plane flader. Algoritmen for spændningsopdateringen er blevet skitseret i tabel 3.2, og kan studeres nærmere i (Clausen, 2007). Det bemærkes at algoritmen arbejder i ho-

Tabel 3.1: *Skematisk princip for en Global Newton-Raphson ligevægtsiteration for en plastisk elastisk FEM beregning. (Clausen, 2007)*

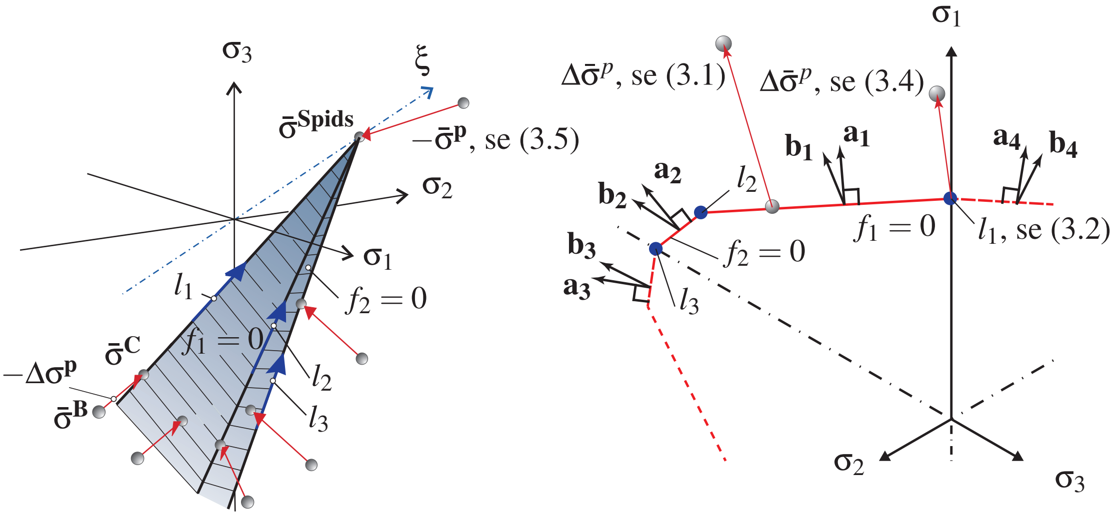
Last trin $k = 1, 2, \ldots$	
$\quad \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_{k-1} + \Delta \boldsymbol{p}_k$	Initiering af den k'ende lastvektor.
$\quad \Delta \boldsymbol{u}_k^0 = \mathbf{0}$	Initiering af den k'ende flytningsinkrement.
$\quad$ **Global ligevægtsiteration** $j = 1, 2, \ldots$	
$\quad\quad \boldsymbol{K}_k^j = \boldsymbol{K}_k^j \left(\boldsymbol{D}_k^{epc,j} \right)$	Opstil den globale stivhedsmatrice.
$\quad\quad \boldsymbol{r}_k^j = \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{q} \left(\boldsymbol{u}_k + \Delta \boldsymbol{u}_k^j \right)$	Kraftresidualen, $\boldsymbol{r}_k^j$, beregnes udfra de ydre og indre kræfter.
$\quad\quad \delta \boldsymbol{u}_k^j = \left(\boldsymbol{K}_k^j \right)^{-1} \boldsymbol{r}_k^j$	Løs FEM ligningen.
$\quad\quad \Delta \boldsymbol{u}_k^{j+1} = \Delta \boldsymbol{u}_k^j + \delta \boldsymbol{u}_k^j$	Opdater spændingsinkrementet.
$\quad\quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^{j+1} = \boldsymbol{B} \Delta \boldsymbol{u}_k^{j+1}$	Beregn tøjningsinkrementet.
$\quad\quad \boldsymbol{\sigma}_i^{j+1} \left(\boldsymbol{\sigma}_i^j, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^{j+1} \right)$	Opdater spændningen.
$\quad\quad \boldsymbol{D}_k^{epc,j+1} \left(\sigma_i^{j+1} \right)$	Opdater den konstitutive matrix
$\quad$ **Stop iterationen når** $\lVert \boldsymbol{r}_k \rVert < tolerance$	
$\quad \boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_k + \Delta \boldsymbol{u}_k^{j+1}$	Opdater flytningen
Lasttrin slut	

vedspændningsrummet, hvilket symboliseres med en bar over en vektor, så f.eks. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ er en hovedspændningsvektor. I dette afsnit vil spændningsopdateringen blive beskrevet for Unifiedkriteriet.

Tabel 3.2: *Skematisk algoritme over spændningsopdateringen brugt i tabel 3.1. (Clausen, 2007)*

1.	Transformer predictoren, $\sigma^{\mathbf{B}}$, til dens hovedspændninger, $\bar{\sigma}^{\mathbf{B}}$.
2.	Bestem spændningsregionen, som $\bar{\sigma}^{\mathbf{B}}$ skal returneres til.
3.	Bestem den opdaterede hovedspændning, $\bar{\sigma}^{\mathbf{C}}$.
4.	Beregn den infinitesimale konstitutive matrix i hovedspændningsrummet, $\bar{\mathbf{D}}^{\mathbf{ep}}$.
5.	Beregen den konsistente konstitutive matrix i hovedspændingsrummet, $\bar{\mathbf{D}}^{\mathbf{epc}}$.
6.	Transformer $\bar{\sigma}^{\mathbf{C}}$ og $\bar{\mathbf{D}}^{\mathbf{epc}}$ tilbage til det originale spændningsrum.

På fig. 3.1 kan et udsnit af Unifiedkriteriet ses i to forskellige koordinatsystemer, som er afgrænset af betingelsen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. På fig 3.1a bemærkes det at den lineære Unifiedflydekriterie består af to forskellige planer, tre forskellige linjer og et spidspunkt. Tilsammen udgør disse 6 forskellige regioner, hvor returneringsspændningen $\bar{\sigma}^{\mathbf{C}}$ kan returneres til hvis $f\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^B\right) > 0$, hvor $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^B$ er predictorspændningen. Bestemmelsen af disse regioner og den valgte returneringstype bliver bestemt senere i afsnit 3.1.4.



(a) 6 Forskellige spændningsreturneringer i hovedspændningsrummet. Efter (Clausen, 2007)

(b) Deviatoriske plan.

Figur 3.1: *Vektorer og planer på Unifiedkriteriet. Der refereres til de respektive vektorer, punkter og linjer.*

3.1.1 Returnering til en flade

Hvis det findes at $\bar{\sigma}^{\mathbf{B}}$ skal returneres til en flade, kan følgende formler anvendes:

$$\bar{\sigma}^C = \bar{\sigma}^B - \Delta\bar{\sigma}^p$$
$$\Delta\bar{\sigma}^p = f\left(\bar{\sigma}^{\mathbf{B}}\right)\bar{\mathbf{r}}^{\mathbf{p}} \tag{3.1}$$

hvor,

$\bar{\sigma}^C$	Returneringsspændning i hovedspændningsrummet.
$\bar{\sigma}^B$	Predictorspændning i hovedspændningsrummet.
$\Delta\bar{\sigma}^p$	Plastisk correctorspændning i hovedspændningsrummet.
$\bar{\mathbf{r}}^{\mathbf{p}}$	Skaleret plastisk corrector i hovedspændningsrummet.

$\bar{\mathbf{r}}^{\mathbf{p}}$ vil have samme retning som den plastiske corrector, $\Delta\bar{\sigma}^p$, for en flade på fig. 3.1, og kan findes med følgende formler:

$$\bar{\mathbf{r}}^{\mathbf{p}} = \frac{\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{b}}}{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{a}}}$$
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$$
$$\bar{\mathbf{b}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}}$$

hvor,

$\bar{\mathbf{a}}$	Normalvektor til flydekriteriet, f.
$\bar{\mathbf{b}}$	Normalvektor til potentialfunktionen, g.
$\bar{\mathbf{D}}$	Elastisk konstitutive matrix.

Normalvektorerne $\bar{\mathbf{a}}$ og $\bar{\mathbf{b}}$ er blevet udledt til:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} k \\ \\ \frac{-b}{1+b} \\ \\ \frac{-1}{1+b} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{k}{1+b} \\ \\ \frac{kb}{1+b} \\ \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{kb}{1+b} \\ \\ \frac{k}{1+b} \\ \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{bmatrix} k \\ \\ \frac{-1}{1+b} \\ \\ \frac{-b}{1+b} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{b}}_{i=1..4} = \bar{\mathbf{a}}_{i=1..4}\Big|_{k=m}$$

hvor,

m	Faktor der beskriver dilatation.

De geometriske fortolkninger for normalvektorerne $\bar{\mathbf{a}}$ og $\bar{\mathbf{b}}$ kan ses på fig. 3.1b.

3.1.2 Returnering til en linje

Hvis det findes at $\bar{\sigma}^{\mathbf{B}}$ skal returneres til en linje, som er skabt af skærringen mellem to plane flader, kan følgende formler anvendes:

$$l: \quad \bar{\sigma}^C = t\bar{\mathbf{l}} + \bar{\sigma}^{\mathbf{Spids}} \tag{3.2}$$

$$t = \frac{\left(\bar{r}_1^p \times \bar{r}_2^p\right)^T \left(\bar{\sigma}^B - \bar{\sigma}^{Spids}\right)}{\left(\bar{r}_1^p \times \bar{r}_2^p\right)^T \bar{\mathbf{l}}} \tag{3.3}$$

hvor,

l	Linjens ligning, se fig. 3.1
t	Parameter der angiver placeringen af $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^C$ på linjen i (3.2).
$\bar{\sigma}^{Spids}$	Spændningen i spidsen af Unifiedkriteriet, se fig. 3.1a.
$\bar{\mathbf{l}}$	Retningsvektor for linjerne l, som opstår i skærringen mellem planerne på fig. 3.1.

Det bemærkes at $f_1\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^C(t>0)\right) > 0 \vee f_2\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^C(t>0)\right) > 0$ hvis returneringen vælges til l_2. Dette betyder at returneringsspændningen flyttes forbi spidsen af Unifiedkriteriet hvis t er positiv. Dette er ikke ikke er muligt, og derfor skal $t < 0$ hvis returneringen til en linje skal være mulig. De to forskellige vektorer $\bar{\mathbf{r}}^{\mathbf{p}}$ i (3.3) skal udledes fra to tilstødende flydeflader, hvor skærring vil danne linjen, l, i (3.2). På fig. 3.1a ses det at der kan dannes 3 forskellig ligninger med (3.2). $\Delta\bar{\sigma}^p$ kan efterfølgende findes til:

$$\Delta\bar{\sigma}^p = \bar{\sigma}^B - \bar{\sigma}^C \tag{3.4}$$

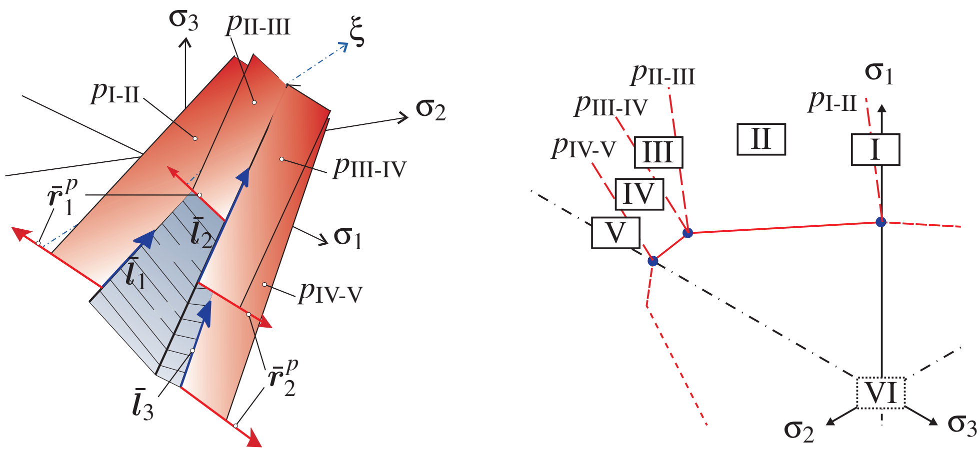
3.1.3 Returnering til spidspunktet

Hvis det findes at $\bar{\sigma}^{\mathbf{B}}$ skal returneres til spidsen, vælges det så:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^C = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{Spids} \tag{3.5}$$

3.1.4 Bestemmelse af spændningsreturneringstypen

Som tidligere nævnt, er der nødvændigt at undersøge hvor $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^B$ skal returnes til, ved at betragte hvilken region den befinder sig i. Der er derfor defineret 6 forskellige regioner når $f\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^B\right) > 0$, og dise kan ses på fig. 3.2. Regionerne afgrænses af fire forskellige grænseplaner, p. Disse navngives med indekser, så f.eks. $p_{\text{I-II}}$ afgrænser regionerne I og II, og hvor dens normalvektor peger ind mod region I.



(a) Hovedspændningsrummet. Efter (Clausen, 2007)

(b) Det deviatoriske plan.

Figur 3.2: *Grænseplaner som afgrænser 5 forskellige regioner.*

Et grænseplan kan defineres som:

$$
\begin{aligned}
p(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) &= \bar{\text{n}}^T \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{Spids}\right) \\
\bar{\text{n}} &= \bar{\boldsymbol{r}}^p \times \bar{\boldsymbol{l}}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

hvor,

p	Grænseplan der adskiller regionerne udenfor flydefladerne, se fig. 3.2.
$\bar{\mathbf{n}}$	Normalvektor på p.

(3.6) kan anvendes ved at betragte fortegnet på resultatet, og holde dem op imod betingelserne for de forskellige returneringstyper i tabel 3.3.

3.2 Modelbeskrivelsen

Beskrivelsen af FEM-modellen, som er blevet brugt til beregningerne i rapporten, kan ses på fig. 3.3. Modellen er blevet brugt til to forskellige fundamenter, nemlig et stribefundament med en bredde på 2 m, og et punktfundament med en diameter på 2 m. Vha. af en symmatribetragtning, modelleres kun halvdelen af modellen, hvor de korrekte randbetingelser er blevet anvendt. På de to vertikale grænser og den nederste horisontale grænse, *Tabel 3.3: Betingelserne for spændningsreturneringerne, når $f\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^B\right) \geq 0$. Tabellen læses fra toppen, indtil en region er fundet.*

Betingelse			Region	Returneres til
$t_{1,2,3} \geq 0$			VI	Spids
$p_{\text{I-II}} > 0$			I	l_1
$p_{\text{I-II}} \leq 0$	$\wedge$	$p_{\text{II-III}} > 0$	II	$f_1 = 0$
$p_{\text{II-III}} \leq 0$	$\wedge$	$p_{\text{III-IV}} > 0$	III	l_2
$p_{\text{III-IV}} \leq 0$	$\wedge$	$p_{\text{IV-V}} > 0$	IV	$f_2 = 0$
$p_{\text{IV-V}} \leq 0$			V	l_3

er der påsat rulleskøjterandbetingelser. Disse fastholder elementerne i de vinkelrette retninger, men tillader flytninger i de parallele retninger. Fundamentsunderkanten betragtes ru, som betyder at jordelementerne under fundamentet er fastholdt til fundamentetsunderkanten. Jordmodellens dimensioner er valgt til $(39 \cdot 24)$m, så de største deformationer ved brud, ikke vil berøre hverken højre eller nederste grænse særlig meget. Ved disse to grænser vil deformationerne i det sidste lastinkrement derfor kun være maksimalt $1/1000$-del af de maksimale deformationer som befinder sig under fundamentet. Geometrien er indelt i 2100 LST elementer, hvor tætheden af disse er højest omkring fundamentet. Dvs. at fundamentsunderkanten består af 41 knuder. Der anvendes en 6. ordens Gaussintegration, som betyder at spændningerne evalueres i 6 forskellige punkter i et element. Fundamentet udsættes for en ensartet vertikal tvungen flytning, hvor den ækvivalente linjelast, p, beregnes.

3.3 Resultater

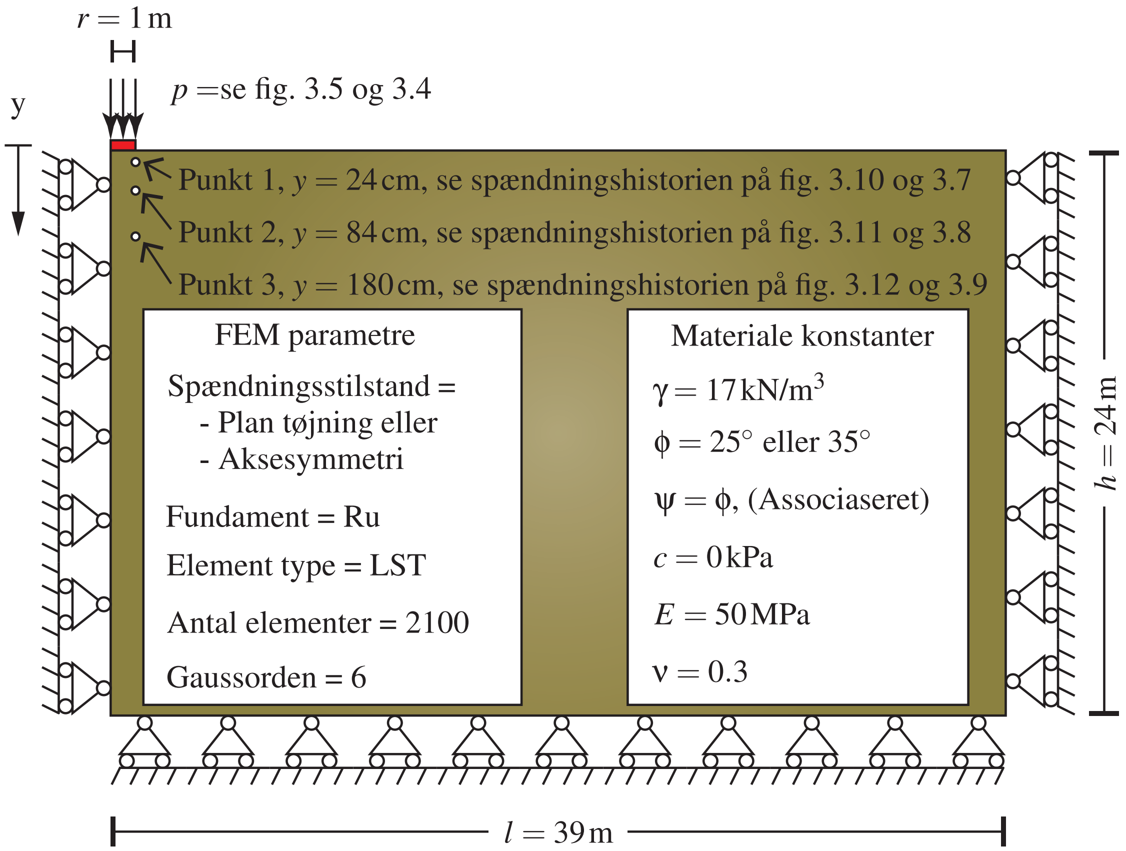
Med de forskellige betingelser på fig. 3.3, er der blevet kørt 20 forskellige beregninger. Disse er blevet brugt til at opstille forskellige historieplots over fundamentstyrkerne. De samme beregninger er også blevet brugt til at visualisere spændningshistorien i tre forskellige punkter under fundamentet.

Derudover er der blevet kørt yderligere 18 beregninger, som er blevet brugt til at udlede b-parameterens indflydelse på Unifiedmodellen.

3.3.1 Lastshistorie

FEM modellen på fig. 3.3 er blevet beregnet med 5 forskellige materialemodeller i to forskellige spændningstilstande og med to forskellige friktionsvinkler.

Et af disse modeller er en Mohr-Coulombmodel, hvor friktionsvinklen er blevet øget med 10%, og vil fremover blive benævnt som MC_{10}. Interessen for MC_{10}, skyldes at der er en



Figur 3.3: *FEM modellen, som er blevet brugt med materialemodellerne: Unified, Mohr-Coulomb og Drucker-Prager.*

udbredt praksis i Danmark om at øge friktionsvinklen med 10%, hvilket blev beskrevet i afsnit 2.2.3. Dette kompenser for den ekstra styrke der findes i forskydningsmeridianen, hvilket blev vist på fig. 2.11.

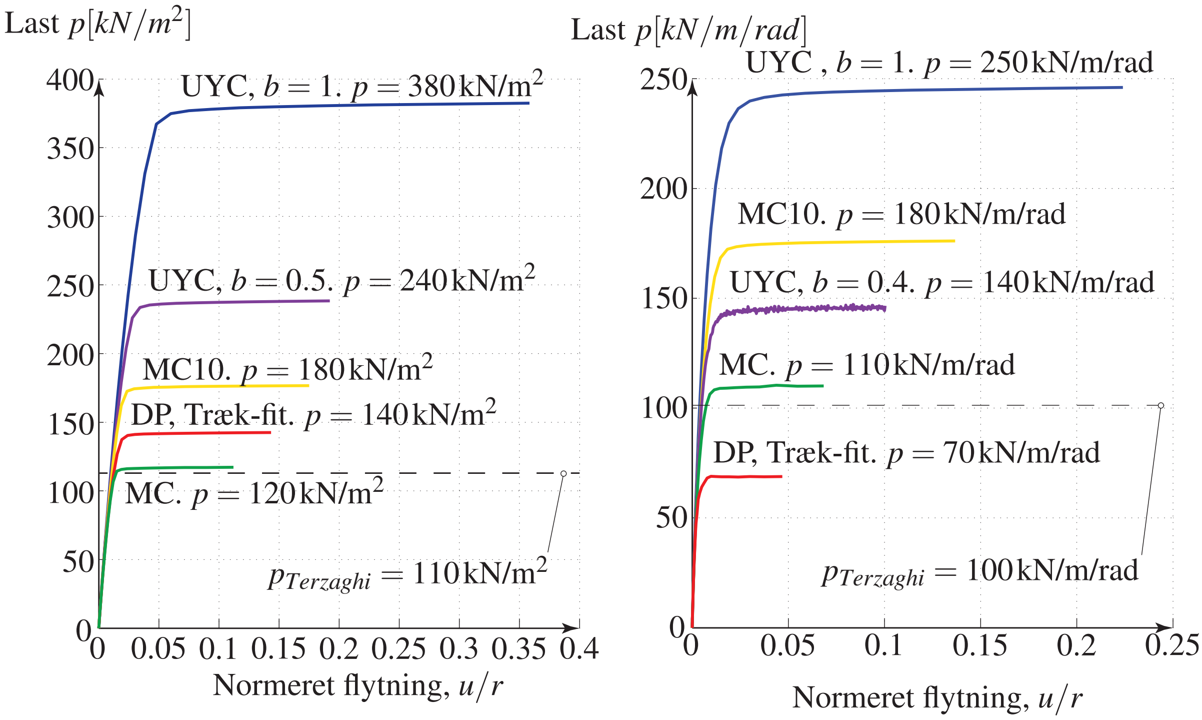
Brudstyrkerne er derudover blevet sammenlignet med Terzaghi's bærreevneformel, p_{Terzaghi}, som er en analytisk løsning og bygger på superpositionen mellem tre forskellige bidrag. Denne fås som:

$$p_{\mathrm{Terzaghi}} = cN_c + qN_q + \gamma r N_\gamma$$

hvor,

Nc,N_q og N_γ	Bæreevnefaktorer. Kan aflæses i (Ovesen et al., 2007).
q	Effektiv overlejringstryk ved siden af FUK.
γ	Effektiv rumvægt.
r	Den halve bredde, eller radius på fundamentet.

Herved kan de 20 forskellige modeller blive plottet i figurerne 3.5 og 3.4. Figurerne beskriver de relative flytninger i fundamentsunderkanten, u/r, mod de associerede overfladelaster på fundamentet, p.



(a) Plane tøjninger.

(b) Aksesymetri. FEM-programmet kunne kun finde ligevægt når $b = 0.4$.

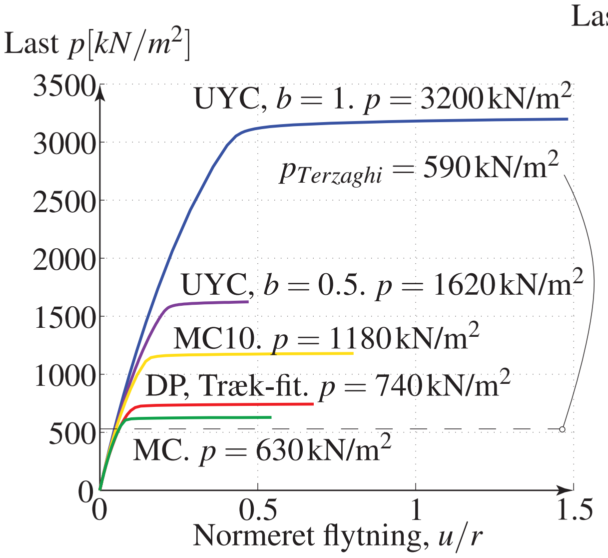
Figur 3.4: *Relativ derformationshistorie på fundamentet for 5 forskellige flydekriterier i associaseret plasticitet.* $\phi = 25^\circ$.

Beregningerne for modellerne tog længere tid, og computeren havde desuden større problemer med at finde ligevægt i Unifiedmodellerne når $0 < b < 1$. Dette skyldes den ekstra kant der opstår i flydekriteriet. På fig. 3.5b ses det derfor at der ikke kunne findes ligevægt med den ekstra kant. Alligevel fandt programmet ligevægt med en mindre friktionsvinkel for $b = 0.4$, hvilket kan ses på fig. 3.4b. Bemærk fluktuering af p, hvilket viser programmets besvær med at finde ligevægt.

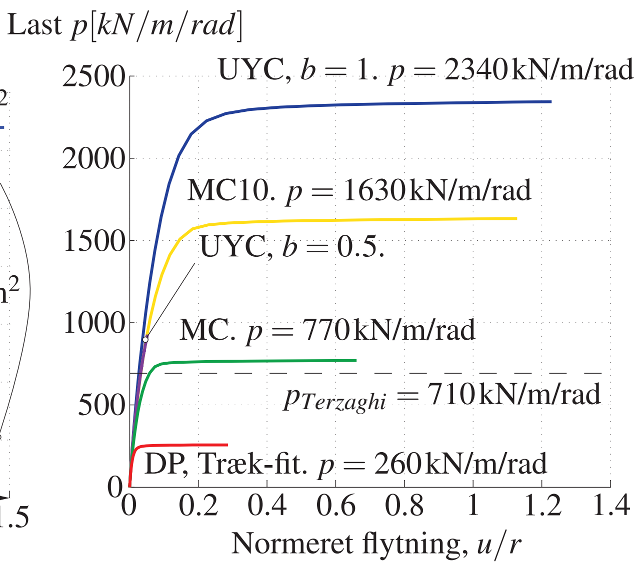
Det ses at b-parameterens indflydelse på UYC har en større indflydelse på fundamentstyrkerne for plane tøjninger, end for aksesymetri. Forklaringen for dette kan findes i næste afsnit, hvor spændningshistorien i det deviatoriske plan er blevet undersøgt.

3.3.2 Spændningshistoriex

Formen på Mohr-Coulomb-, Unified- og Drucker-Pragerkriteriet vil ikke ændres i det deviatoriske plan hvis koordinaten på den hydrostatisk akse holder sig under grænsen:



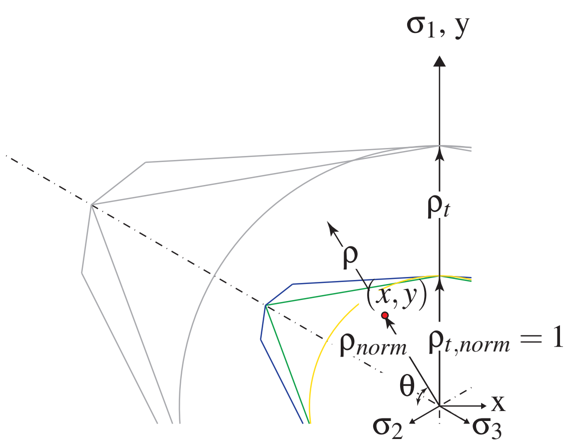
(a) Plane tøjninger.



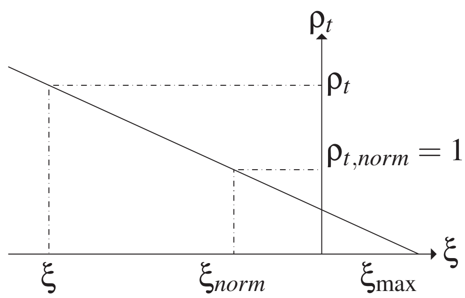
(b) Aksesymetri. Bemærk at FEM-programmet kunne ikke finde ligevægt når $0 < b < 1$.

Figur 3.5: *Relativ derformationshistorie på fundamentet for 5 forskellige flydekriterier i associaseret plasticitet.* $\phi = 35°$.

$\xi < \xi_{max}$. Til gengæld ændres afstanden mellem den hydrostatiske akse og flydekriteriet, ρ, hvor princippet for dette blev illustreret på fig. 2.6.



(a) Normaliseringen af det deviatoriske plan.



(b) ξ og ρ på trækmeridianplanet.

Figur 3.6: *Konvertering til det normaliserede deviatoriske spændningsplan.*

For de føromtalte flydekriterier, er fig. 2.6 omtegnet til illustrationerne på fig. 3.6. Her ønskes det at finde den normaliserede invariant, ρ_{norm}, som kan ses på fig. 3.6a. Denne kan findes som:

$$\rho_{norm} = \rho\,\kappa$$
$$\kappa = \frac{\xi_{norm}}{\xi} = \frac{\rho_{t,norm}}{\rho_t} = \frac{\rho_{norm}}{\rho}$$

hvor,

κ	Proportionalitetskoefficient.
ξ_{norm}	Koordinaten på den hydrostatisk akse når $\rho_t = \rho_{t,norm}$, se fig. 3.6b

κ vil være uafhængig af θ på fig. 3.6a. Derved kan det normaliserede koordinat på det normaliserede deviatoriske spændningsplan findes som:

$$x = -\rho\,\kappa\cos\theta$$
$$y = \rho\,\kappa\sin\theta$$

hvor,

x og y	Kartesian koordinater, hvis origo er sammenfaldende med det deviatoriske plans origo. se fig. 3.6a.

Som det kan ses på fig. 3.6b, er ξ_{norm} afhængig af $\rho_{t,norm}$, som i de følgende afsnit vil findes for $\rho_{t,norm} = 1$.

Den normaliserede koordinaten på den hydrostatisk akse for Drucker-Pragerkriteriet.

ρ i (2.2) og ξ i (2.1) kan implementeres i (2.4), hvilken giver:

$$f_{dp} = 0 = \frac{1}{2}\rho\sqrt{3}\sqrt{2} + \alpha\sqrt{3}\xi - \beta$$

isoleres ξ fås:

$$\xi = \frac{1}{6}\frac{\left(\rho\sqrt{3}\sqrt{2} - 2\beta\right)\sqrt{3}}{\alpha} \tag{3.7}$$

Substitueres trækparameterne i (2.5) til (3.7), og vælges $\rho = \rho_t = 1$, vil den normaliserede koordinat på den hydrostatisk akse findes for Drucker-Pragerkriteriet for et trækfit:

$$\xi_{norm,DP_t} = \frac{\left(-2k-1+\sqrt{6}\sigma_c\right)\sqrt{6}\sqrt{3}}{6\,(k-1)}$$

Den normaliserede koordinaten på den hydrostatisk akse for Unifiedkriteriet.

ξ_{norm} for Unifiedkriteriet vil være sammenfaldende med den for Druckerpragerkriteriet med et trækfit, hvis de $\rho_t = 1$ for begge kriterier, når $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Dette kan også vises ved at ved at simplificeres (2.18) til Mohr-Coulombkriteriet:

$$f_{uyt,t} = 0 = k\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_c, \text{ når } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \tag{3.8}$$

For at transformere (3.8) til det deviatoriske plan, skal de følgende formler anvendes:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{6}y + \sqrt{3}z\right) \\ \sigma_3 &= \tfrac{1}{6}\left(3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + 2\sqrt{3}z\right) \\ z &= \xi \end{aligned} \tag{3.9}$$

Herefter kan (3.8) evalueres med (3.9) og punktet $(x = 0, y = \rho_{t,norm} = 1)$:

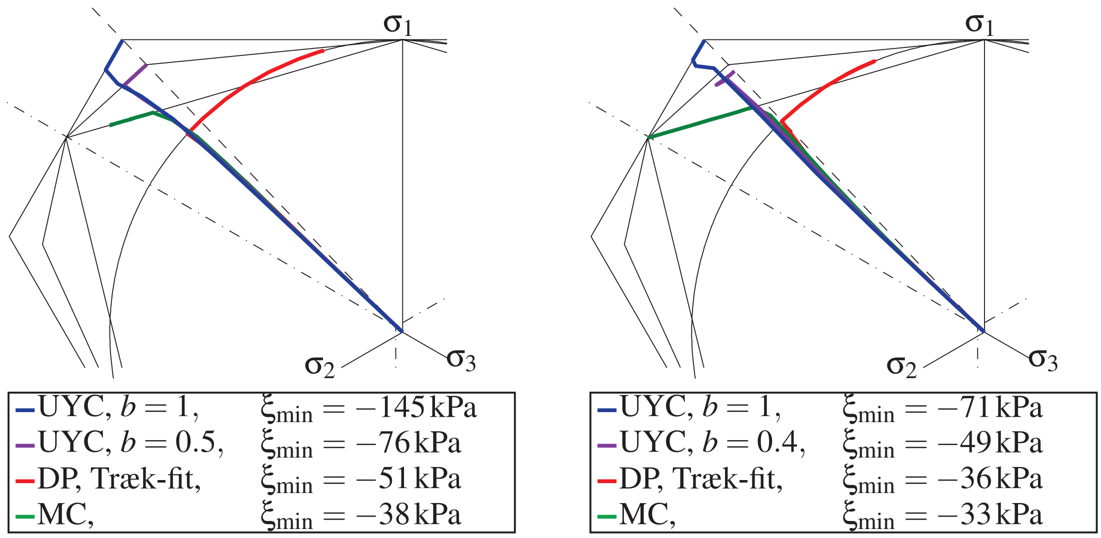
$$\begin{aligned} f_{uyt,t}(x=0,y=1) &= 0 = f_{uyt,t}\Big|_{(3.9)} \\ f_{uyt,t}(x=0,y=1) &= \frac{1}{3}k\sqrt{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}k\sqrt{3}\xi + \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\xi - \sigma_c \end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10) kan herefter isoleres for ξ, og iht. fig. 3.6 vil den være den normaliserede koordinaten på den hydrostatisk akse ξ_{norm}:

$$\xi_{norm,uyt} = \frac{\left(-2k-1+\sqrt{6}\sigma_c\right)\sqrt{6}\sqrt{3}}{6\,(k-1)}$$

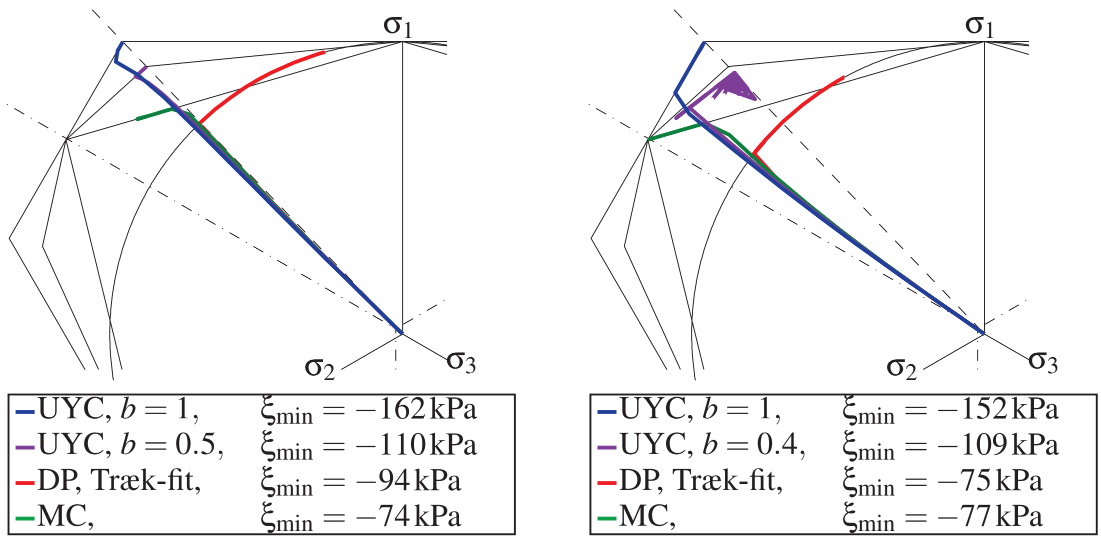
Resultater

Ved at anvende den ovenstående fremgangsmåde, er den normaliserede spændningshistorie plottet i det deviatoriske plan for tre forskellige punkter, blevet beskrevet på fig. 3.3. De samme beregninger fra afsnit 3.3.1 er anvendt, undtagen beregningerne for MC_{10}, fordi de har en anden friktionsvinkel.



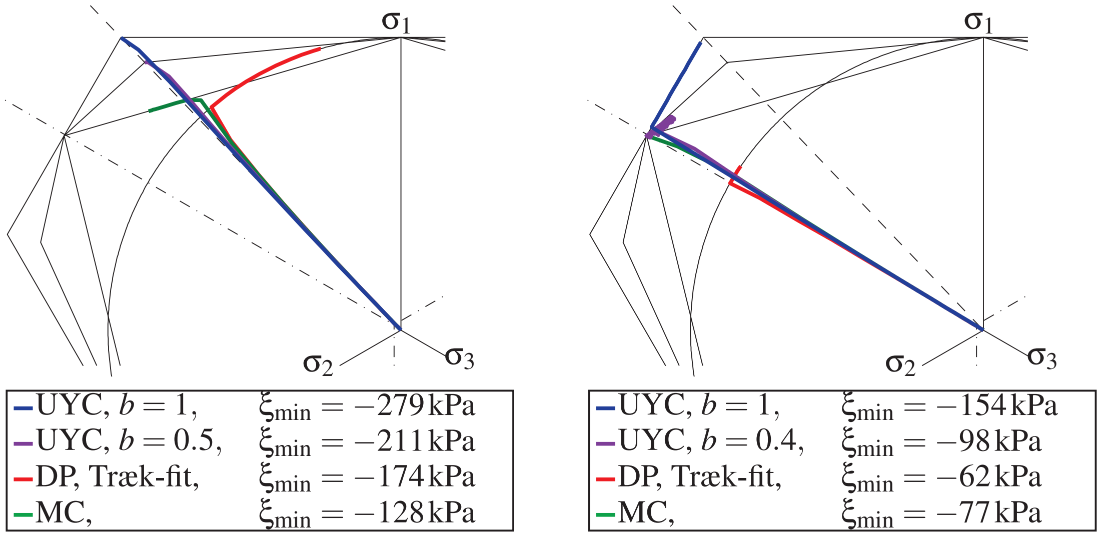
(a) Plane tøjninger. ***(b)*** Aksesymmetri.

Figur 3.7: *Normaliseret spændningshistorie i det deviatoriske spændningsplan for punkt 1. Der bruges associeret plasticitet, med* $\phi = 25°$



(a) Plane tøjninger. ***(b)*** Aksesymmetri.

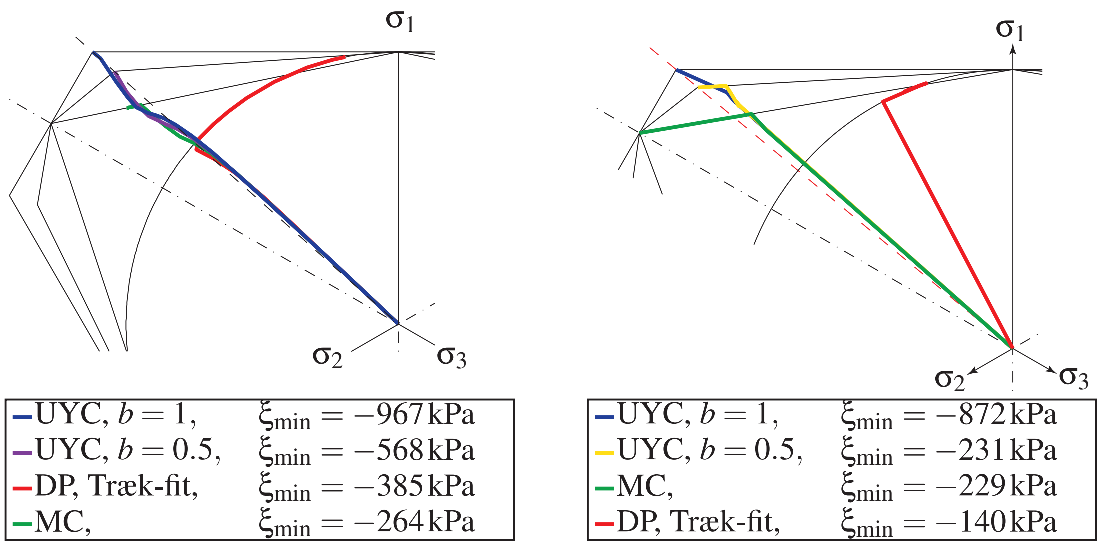
Figur 3.8: *Normaliseret spændningshistorie i det deviatoriske spændningsplan for punkt 2. Der bruges associeret plasticitet, med* $\phi = 25°$



(a) Plane tøjninger. ***(b)*** Aksesymmetri.

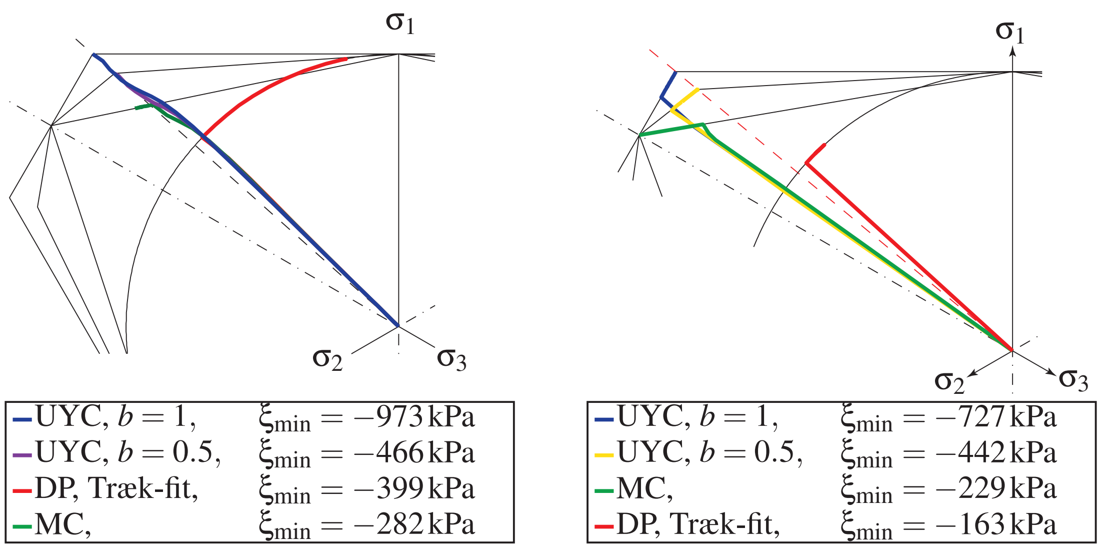
Figur 3.9: *Normaliseret spændningshistorie i det deviatoriske spændningsplan for punkt 3. Der bruges associeret plasticitet, med* $\phi = 25^\circ$

Figurerne 3.7, 3.8 og 3.9, viser spændningshistorien i tre forskellige punkter under fundamentet, når $\phi = 25^\circ$. Punkternes placering kan ses på fig. 3.3 Det bemærkes at spændningshistorien har en tendens til at bevæge sig på forskydningsmeridianen ved plane tøjninger, og derfor vil spændningerne bevæge sig ud til den ekstra kant, når $0 < b$. I beregningerne for aksesymmetri, har nogle punkter en tendens til at bevæge sig længere mod trykmeridianen. Dette er tydeligt på fig. 3.9b, hvor det kan ses at spændningerne for Unifiedkriteriet med $b = 0.4$, bevæger sig ud til kanten i trykmeridianen.



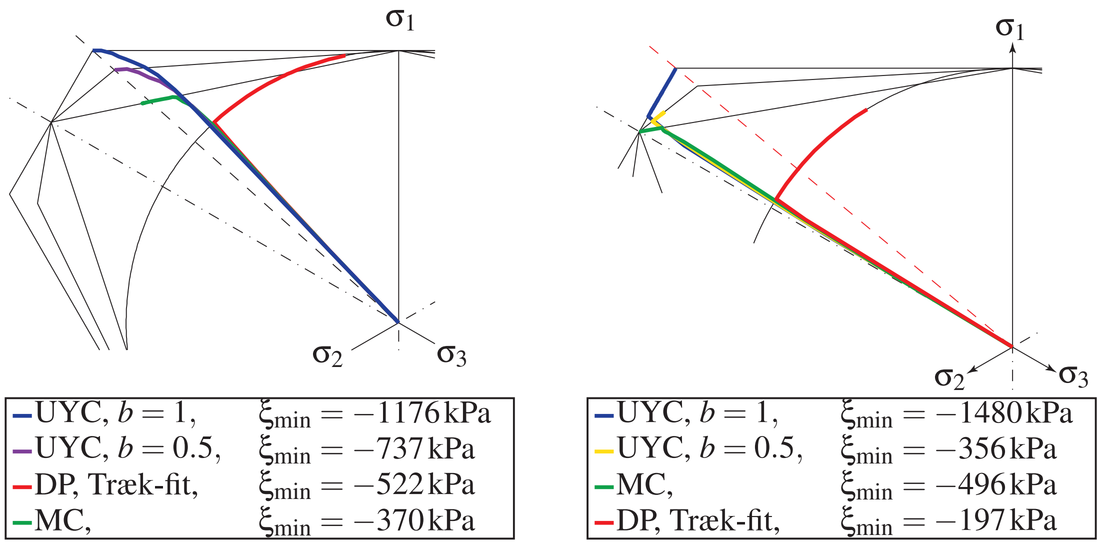
(a) Plane tøjninger. ***(b)*** Aksesymmetri.

Figur 3.10: *Normaliseret spændningshistorie i det deviatoriske spændningsplan for punkt 1. Der bruges associeret plasticitet, med* $\phi = 35^\circ$



(a) Plane tøjninger. ***(b)*** Aksesymmetri.

Figur 3.11: *Normaliseret spændningshistorie i det deviatoriske spændningsplan for punkt 2. Der bruges associeret plasticitet, med $\phi = 35°$*



(a) Plane tøjninger. ***(b)*** Aksesymmetri.

Figur 3.12: *Normaliseret spændningshistorie i det deviatoriske spændningsplan for punkt 3. Der bruges associeret plasticitet, med $\phi = 35°$*

Figurerne 3.10, 3.11 og 3.12, viser spændningshistorien i de samme tre punkter under fundamentet, når $\phi = 35°$. Den øgede friktionsvinkel, har forhindret programmet i at finde ligevægt for $0 < b < 1$ ved aksesymmetri. Alligevel er det tydeligt for Mohr-Coulombmodellen at spændningerne bevæger sig i forskydningsmerridianen. Ved plane tøjninger bevæger spændningerne sig derimod mod trykmeridianen.

Derfor vil den øgede styrke for Unifiedekriteriet med $0 < b$, være større for beregninger med plane tøjninger, end med aksesymmetri. Dvs. at b-parameterens indflydelse på jordstyrken vil være større i beregninger med stribefundamenter, end med punktfundamenter.

3.3.3 b-parameterens indflydelse

I afsnit 3.3.1 blev brudstyrken for MC_{10}-modellen præsenteret, og på figurerne 3.4 og 3.5 blev det vist at den ligger imellem brudstyrkerne for materialemodellerne $UYC_{b=0}$ og $UYC_{b=1}$. Dvs at:

$$p_{u,\mathrm{UYC}_{b=0}} < p_{u,\mathrm{MC}_{10}} < p_{u,\mathrm{UYC}_{b=1}}$$

Derfor er det blevet undersøgt for hvilket b-værdier der skal anvendes i Unifiedkriteriet, for at de giver de samme styrker for MC_{10}-modellerne ved forskellige friktionsvinkler. Dvs at:

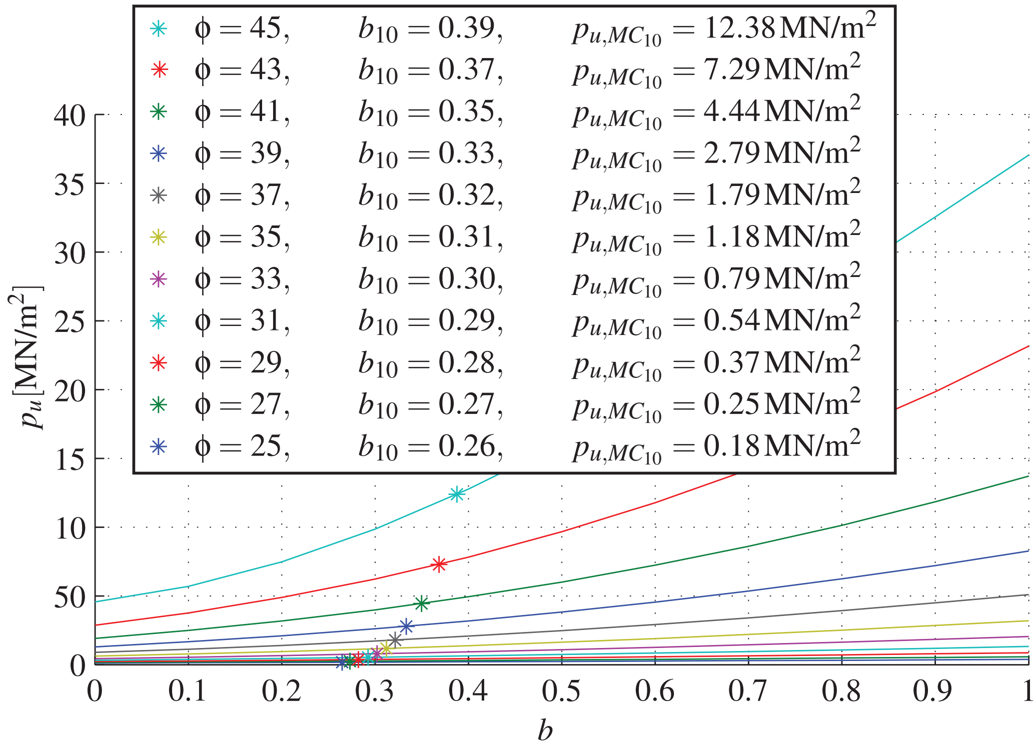
$$p_{u,\mathrm{UYC}_{b=b_{10}}}(\phi) = p_{u,\mathrm{MC}_{10}}(\phi) = p_{u,\mathrm{MC}}(1.1\,\phi)$$

Dette er blevet undersøgt for 11 forskellige friktionsvinkler mellem 25° og 45° i plane tøjninger, og resultaterne kan ses i fig. 3.13.

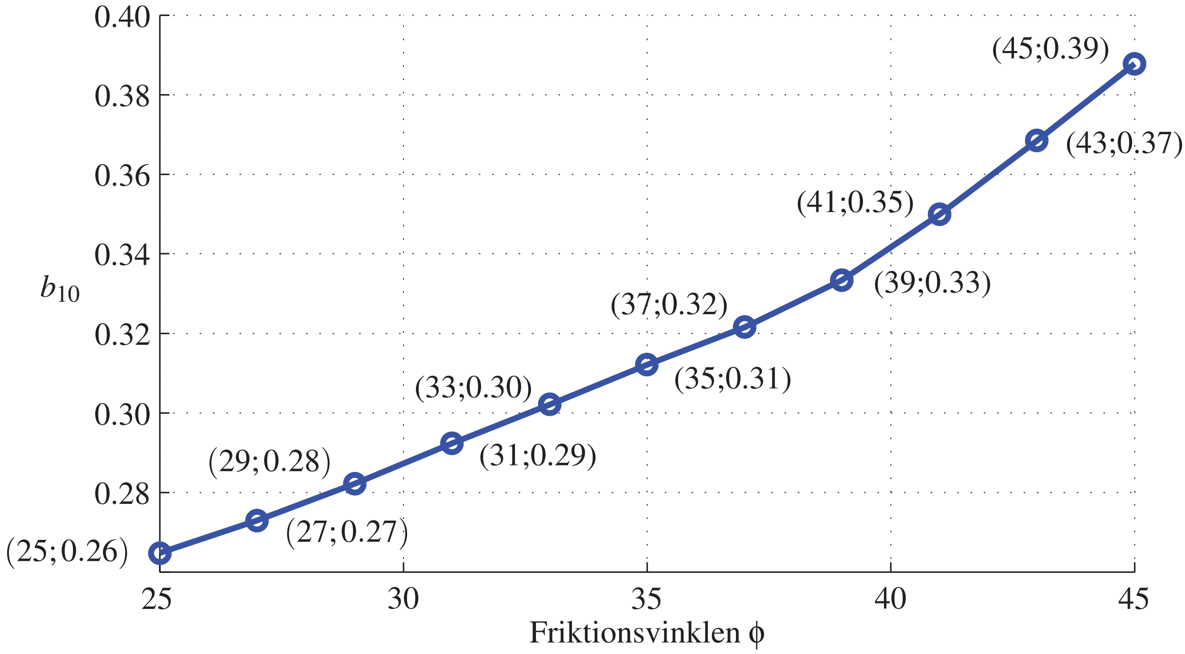
b_{10}-værdierne er blevet beregnet i plane tøjninger, fordi det tidligere blev vist at b-værdien har størst indflydelse i det tilfælde. På figur 3.13 kan brudstyrkerne $p_{u,\mathrm{UYC}_{b=0..1}}(\phi)$ desuden ses for de samme friktionsvinkler.

På fig. 3.13 ses det at b_{10}-værdierne varierer med friktionsvinklen. Dette er også blevet vist på fig. 3.14. Det lille knæk der opstår på grafen ved $\phi > 39°$ skyldes højst sandsyndligt at modelgrænserne på fig. 3.3 har været for små. Dvs. at brudfiguren nåede ud til de vertikale randbetingelser i højre side af modellen.

Det må derfor konkluderes at hvis brudestyrken $p_{u,\mathrm{MC}_{10}}(25° < \phi < 39°)$ antages for at være den exacte løsning, vil b-værdierne for Unifiedkriteriet være lineær afhængig af friktionsvinklen når $25° < \phi < 39°$. I dette domæne vil $0.26 < b < 0.33$.



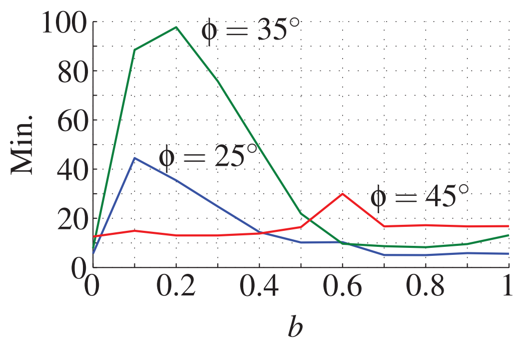
Figur 3.13: *Brudstyrken for fundamentet på fig. 3.3 ift. b-parameteren med en UYC-model i plant tøjning. Brudstyrken vises for forskellige ϕ-værdier, hvor $c = 0$. Skæringen mellem brudstyrken for MC_{10} og UYC-modellen er markeret, hvor b_{10}-værdien er aflæst.*



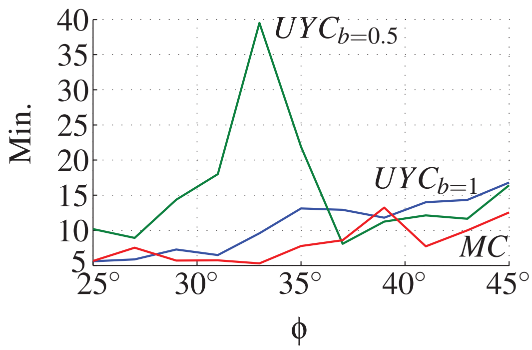
Figur 3.14: *b_{10}-parameterens afhængighed af friktionsvinklen ϕ. Talene er beregnet udfra betingelserne opstillet på fig. 3.3 i plan tøjning. Bemærk knækket i grafen ved $39^\circ < \phi$, hvilken skyldes at brudfigurerne nåede ud til modellens grænser.*

3.3.4 Beregningstider

En del af overvejelserne der skal tages ved implementeringen af en ny materialemodel, er beregningstiden. Af åbenlyse grunde, er da klart at foretrække en hurtig beregning, fremfor en langsom. Derfor er beregningstiderne for Unifiedmodellen med forskellige b-værdier og friktionsvinkler blevet noteret, hvilket kan ses på fig, 3.15. Fordi FEM-programmet ikke kunne finde ligevægt i aksesymmetri, findes der kun beregningstider for plane tøjninger.



(a) Unifiedkriteriet med varierende b-værdier, og forskellige friktions-vinkler.



(b) Forskellige materialemodeller, med varierende friktionsvinkler.

Figur 3.15: *Beregningstider i plane tøjninger, og for $c = 0$.*

På fig. 3.15a ses det at beregningstiderne forøges drastisk, når $0 < b < 0.5$. Dette er meget uheldigt, fordi de realistiske værdier for b-værdien ligger i dette domæne, se fig. 3.14. På fig. 3.15b kan beregningstiderne ses for forskellige materialemodeller med forskellige friktionsvinkler.

4 Konklusion

I den første del af rapporten blev forskellige traditionelle flydekriterier undersøgt, hvor deres styrker og begrænsninger blev belyst. Her blev det bl.a. undersøgt hvorfor Mohr-Coulombmodellen har en tendens til at underestimere jordens styrke, hvilket skyldes den manglende inddragelse af merridiansspændningen, σ_2. Som en kompensation for dette er det almindelig praksis at øge friktionsvinklen med 10%. Denne svaghed i materialemodellen er velkendt blandt fagfolk, og derfor er Unifiedkriteriet blevet udviklet og præsenteret i (Yu, 2004). Unifiedkriteriet giver en ekstra kant i forskydningsmerridianen, og derfor giver den en større styrke i jorden.

Ved hjælp af en FEM-model beskrevet på fig. 3.3, blev b-parameterens indflydelse på brudstyrken i et kohæsionsløst jord belyst. Det blev fundet at b-parameteren gav større styrkeforskelle mellem Unifiedkriteriet og Mohr-Coulombkriteriet når der blev anvendt plan tojning end ved aksesymmetri. Grunden til dette kunne ses på spændningshistorien i det deviatoriske plan, hvor det kunne ses at spændningerne bevægede sig forskydningsmerridianen når der blev anvendt plan tojning. Derved kunne spændningerne vandre ud i den ekstra kant i Unifiedkriteriet og give en større styrkeforskel.

Det blev vist at værdien for b-parameterne skal udledes fra ægte triaksialforsøg, hvor spændningerne i forskydningsmerridianen skal øges op til brud. Dette har ikke være muligt, og derfor blev b-parameterne istedet sammenlignet med en Mohr-Coulomb-model med en 10% forøgning af friktionsvinklen. De ækvivalente b-værdier blev fundet og plottet i 3.14. Denne udledning er kun med til at give et indblik i hvor store b-værdierne skal være, og i virkeligheden vil de højst sandsyndligt være større. Ellers vil det ikke være rentabelt at anvende en Unifiedkriterie, fordi beregningstiderne øges markant ved når $0 < b < 1$. Dette blev funde i fig. 3.15.

Litteratur

Clausen, J. (2007). *Efficient Non-Linear Finite Element Implementation of Elasto-Plasticity for Geotechnical Problems*. Ph.d.-afhandling, Aalborg Universitet, www.kortlink.dk/aau/ch8q.

Lade, P. V. (2002). *Instability, shear banding, and failure in granular materials*, bind 39, 3337-3357. International Journal of Solids and Structures.

Ottosen, N. S. og Ristinmaa, M. (2005). *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier. ISBN: 0-008-044606-X.

Ovesen, N. K., Fuglsang, L. og Bagge, G. (2007). *Lærebog i Geoteknik*. Polyteknisk forlag.

Yu, M.-H. (2004). *Unified Strength Theory and Its Applications*. Springer. ISBN 3-540-43721-5.