

Titelblad

Titel: Stabilitet af udfligede stålrammer

Tema: Kandidatspeciale

Vejledere: Ronnie R. Pedersen
Lars Damkilde

Projektperiode: 1. februar 2012 – 14. juni 2012

Sideantal: 112 sider

Gruppe: BM4-6-F12

Oplag: 6

Gruppemedlemmer:



Waleed Khalid



Yama Taj

Synopsis

Rapporten "*Stabilitet af udfligede stålrammer*" beskæftiger sig med numerisk implementering af den tre dimensionale forskydningsfleksible bjælketeori i MatLAB. Den forskydningsfleksible bjælketeori udledes og implementeres i MatLAB koden, hvor den løbende eftervises og sammenlignes med analytiske og numeriske løsninger fra kommercielle FEM programmer.

I MatLAB koden tages der hensyn til bjælkeelementer med varierende tværsnit ved numerisk integration. Senere udvides koden til at kunne håndtere stabilitetsfænomenet kipning, som medfører aksiale deformationer i form af hvælving.

Der modelleres 4 forskellige hjørnesamlingstyper hvor overførselen af hvælving undersøges. Aktivering af hvælvingsfrihedsgraden har vist sig at give fordel ved dimensionering af stålkonstruktioner, idet der opnås en bedre bæreevne i forhold til de traditionelle dimensioneringsmetoder.

Title sheet

Title: Stability of tapered steel frames

Theme: Master Thesis

Supervisors: Ronnie R. Pedersen
Lars Damkilde

Project period: 1. February 2012 – 14. June 2012

Number of pages: 112

Group: BM4-6-F12

Number of copies: 6

Group members:



Waleed Khalid



Yama Taj

Summary

The thesis "Stability of tapered steel frames" is dealing with the numerical implementation of the three-dimensional shear flexible beam theory in MatLAB. The shear flexible beam theory is derived and implemented in a MatLAB code where it is continually verified and compared with analytical and numerical solutions from commercial FEM programs.

The MatLAB code takes into consideration the beam elements with variable cross sectional properties by numerical integration. It is gradually extended to be able to handle lateral buckling, which results in axial deformations in the form of warping.

There have been modeled 4 different types of corner joints in which the transfer of warping is investigated. It has been observed that the activation of warping degree of freedom makes structures more stiff resulting in better utilization of materials and thereby a better bearing capacity compared to the traditional design techniques.

Forord

Projektet "Stabilitet af udflegede rammehjørner" er udarbejdet på 4. semester af kandidatuddannelsen i bygge- og anlægskonstruktion ved Aalborg Universitet Esbjerg i perioden 1. februar 2012 til 14. juni 2012.

Projektet tager udgangspunkt i den forskydningsfleksible bjælketeori med henblik på en numerisk implementering af teorien i MatLAB. Derfor ligger hovedvægten af projektet i elementformuleringen af teorien. MatLAB kodens funktionalitet eftervises løbende med de kommercielle programmer – Ansys v13 og Abaqus 6.10-1. De analytiske beregninger er foretaget i MatCAD 15 samt freeware programmet wxMaxima 11.

Kildehenvisninger vises som et tal i klammer og sidst i rapporten er der udarbejdet en litteraturliste over samtlige kilder, som er anvendt i projektet. Ligningerne nummereres ved (m.n) hvor m er afsnitsnummeret og n ligningsnummeret. Til projektet vedlægges en CD, hvor der kan findes alle FEM modeller/data, elektronisk udgave af rapporten, artikler, appendikser, scripts og MatLAB koder.

Gruppen ønsker at rette tak til Ronnie R. Pedersen og Lars Damkilde for faglig vejledning i forbindelse med udarbejdelsen af projektet. Endvidere retter gruppen tak til Flemming Skriver fra Halber ApS for hans hjælp i forbindelse med Halber programmet.

Indhold

1	Indledning	1
2	Forskydningsfleksibel bjælketeori	4
2.1	Elementformulering for den forskydningsfleksible bjælketeori	4
2.2	Det tredimensionelle flytningsfelt	6
2.3	Bjælkens differentielligning	9
2.4	Lineære formfunktioner for et bjælkeelement	12
2.5	Formfunktioner til et bjælkeelement i xy-plan	14
2.6	Opstilling af elementets stivhedsmatrice	17
2.7	Statisk kondensering	18
2.8	Rumligt bjælkeelement	22
2.9	Konsistente knudekræfter	27
3	MatLAB koden	30
3.2	Numeriske analyser	36
4	Vridningsteori	45
4.1	Fri vridning for I-profil	45
4.2	Bunden vridning for I-profil	46
4.3	Hvælvning for et vilkårligt tyndvægget tværsnit	47
4.4	Elementformuleringen for et tyndvægget tværsnit	52
4.5	Vridningsteori for bjælker med varierende tværsnit	60
5	Hvælvningsoverførsel i rammehjørner	72
5.1	Hvælvning og forvridning	72
5.2	Fjederstivheder for samlingerne	77
6	Stabilitet	92
6.1	Søjlestabilitet	93
6.2	Kipning	97
6.3	Vridningsbuling	98
6.4	Placering af belastning	100
6.5	Numeriske beregninger	101
7	Diskussion og konklusion	107
7.1	Bjælker med konstant tværsnit	107

7.2	Bjælker med varierende tværsnit.....	107
7.3	Samlingstyper	108
7.4	Stabilitet	108
8	Litteraturliste	109
9	Appendiks	112

1 Indledning

Et traditionelt stålhalsbyggeri konstrueres med I-profiler, som enten to eller tre charnierrammer. Dette gøres med henblik på at undgå indspændingsmomenterne ved fundamenterne og kipsamlingen. Rammerne er i den tværgående retning typisk understøttet af åser på oversiden af riglen og løsholter på ydersiden af rammeben. Udover dette, opføres rammehjørnet vha. profiler med en varierende højde eller en såkaldt udflikning, som på grund af forholdet mellem profilhøjden og profilbredden kan karakteriseres som et tyndvægget element. Denne øger stivheden af rammen og kan dermed optage større momenter. Resultatet af det er at der kan anvendes mindre profiler i resten af rammekonstruktionen.

Kip- og hjørnesamlinger er enten svejse- eller en boltesamling. Valget er afhængigt af flere forskellige grunde, såsom montagemuligheder, det statiske system eller transport. Uanset samlingstypen, har enhver geometriændring en indflydelse på hvordan snitkræfterne overføres fra den ene profil til en anden. Overførslen af disse sker bl.a. ved hvælving af tværnsnittet, hvorfor det er nødvendigt at benytte en bjælke-teori, som tager hensyn til dette. En typisk halskonstruktion ser ud som på Figur 1.



Figur 1: Eksempel på stålhalsskonstruktion. [1]

Brugen af stålrammekonstruktioner har været stigende i de seneste år på grund af relativt lave omkostninger, kortere konstruktionstid, fleksibilitet og anvendelsesmuligheder i forhold til andre bygningsmaterialer. Da en typisk stålramme er opbygget af I-profiler, som karakteriseres som tyndvæggede elementer pga. den store forhold mellem kropshøjden og flangebredden, er det nødvendigt til at tage særlig hensyn til det globale stabilitetsfænomen - kipning.

Kipning er karakteriseret ved en vandret udknækning af riglen, som udover egenlasten udsættes for naturlaster i form af sne, og vind. Lasternes angrebepunkt er meget varierende og er ofte excentrisk i forhold til tyngdepunktslinjen. Denne excentricitet kan medføre at rammekonstruktionen knækker ud i den langsgående retning, hvilket medfører at bjælken eller riglen roterer eller vrider om sin egen akse. Kipning kan være fri eller bunden. Ved fri kipning er rotationsaksen placeret væk fra flangerne. Ved den bundne

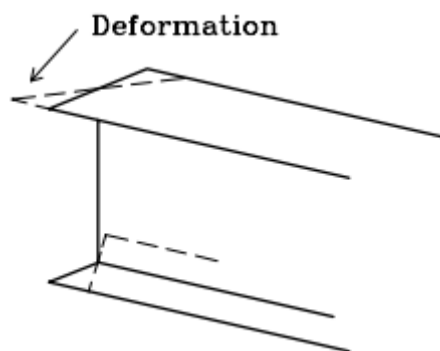
kipning er rotationsaksen placeret på flangerne. Dette medfører at der, udover rotation og translation, sker en forvridning af tværsnittet.

Ved manglende understøtning mod stabilitetssvigt kan konstruktionen kollapse, som det er vist på Figur 2. Der eksisterer mange løsninger på at sikre rammekonstruktioner mod kipning hvor det er oftest montagemuligheder og økonomien, som bestemmer den endelige afstivningstype. Rammen kan f.eks. afstives i den langsgående retning med en vindgitter og på den måde undgås den frie kipning. Tagkonstruktionen kan også opfattes som understøtning, forudsat den har en passende stivhed. Man kan også svejse plader vinkelret på kroppen i et I-profil for på den måde at forbinde flangerne og forhindre den bundne kipning.



Figur 2: Kipning af stålrammekonstruktion.

Ved kipning introduceres der også aksiale deformationer i flangerne kendt som hvælving, Figur 3.



Figur 3: Hvælvsdeformation. [2]

Hvælving forekommer pga. den vandrette udknækning af rammekonstruktionen, som medfører at den vrider omkring bjælkeaksen. Måden hvorpå hvælving overføres er en af de afgørende faktorer for den samlede stabilitet, idet hvælving af et element kan medføre forvridning i et tilstødende element, som kan forøge effekten af kipning eller søjleudknækningen. Derudover kan områder med diskontinuiteter ændre effekten af snitkræfter og spændinger.

Denne rapport beskæftiger sig således med analyse af stålrammekonstruktioner med særlig fokus på numerisk implementering af hvælving, som er et biprodukt af stabilitetsfænomenet kipning.

De ovenstående betragtninger leder frem til følgende spørgsmål:

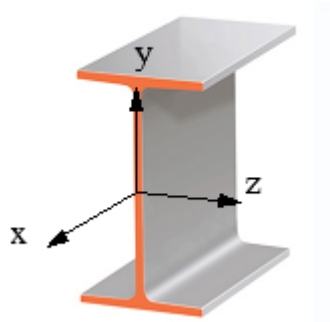
- Hvordan overføres hvælving i et rammehjørne herunder i områder med geometriændringer og diskontinuiteter?
- Hvilken effekt har medtagelsen af hvælving på stabiliteten af rammekonstruktioner og har denne en fordel?

Projektet beskæftiger sig således med opstillingen af teorien til numerisk behandling af aksial deformation, bøjningsdeformation og vridningsdeformation i MatLAB. Til dette tages der udgangspunkt i et plan to knudet bjelkeelement med 6 frihedsgrader, som også tager højde for profiler med varierende tværsnit. Senere i projektet udvides MatLAB koden til at behandle den 7. frihedsgrad dvs. overførsel af hvælving i en udfliget rammehjørne samt betydningen af denne på stabiliteten. Med kendskab til hvælvingsoverførsel i rammehjørne kan profilerne optimeres med henblik på en balanceret materialeudnyttelse.

2 Forskydningsfleksibel bjælketeori

I dette afsnit betragtes den forskydningsfleksible bjælketeori, med særlig fokus på elementformuleringen. Teorien gennemgås, hvor først formfunktioner og stivhedsmatricen for en 3D bjælke opstilles. Formfunktionerne bestemmes ud fra et ønske om at få en lineær momentfordeling i tværsnittet for at undgå den numeriske problemstilling *shear locking*. Fænomenet er nærmere forklaret i afsnit 3.2.4.

Udledningerne er foretaget med brug af koordinatsystemet vist på Figur 4, hvor flytninger u, v, w og rotationer θ_x, θ_y og θ_z er i hhv. x, y, z akserne.

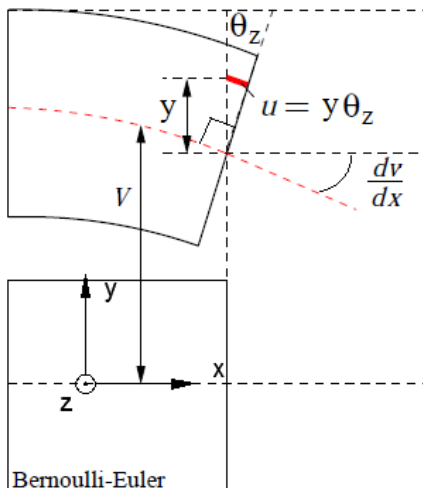


Figur 4: Bjælkens koordinatsystem.

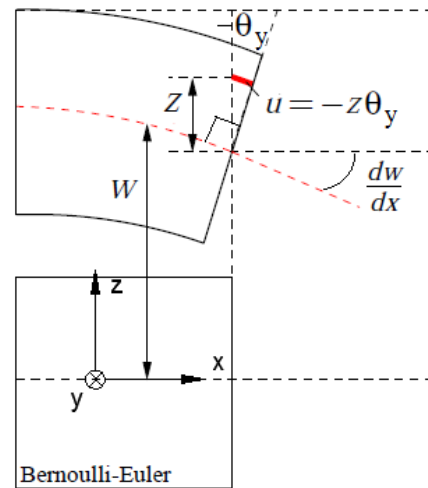
Målet med afsnittet er at danne et teoretisk grundlag af hvordan hvælving implementeres i den forskydningsfleksible bjælkes elementformulering.

2.1 Elementformulering for den forskydningsfleksible bjælketeori

Den klassiske Bernoulli-Euler bjælke teori beskriver bevægelsen af en bjælke, som er udsat for bøjning og normalkraft. I teorien antages det at plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på midteraksen under og efter deformationen, som det er vist på Figur 5 og Figur 6.



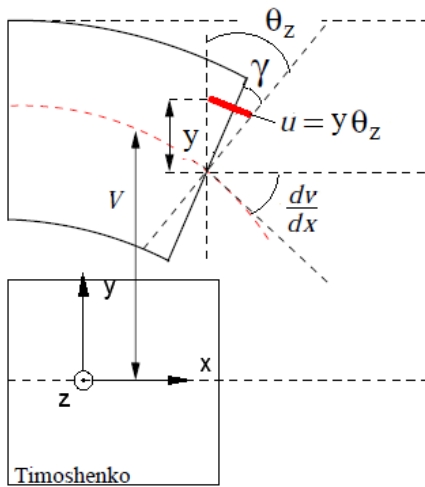
Figur 5: Bernoulli-Euler bjælke ved bøjning i xy -plan. [3]



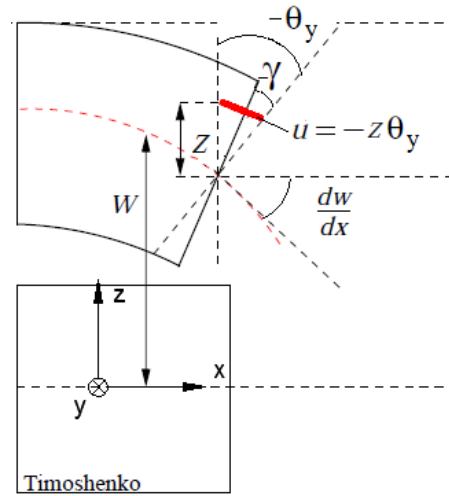
Figur 6: Bernoulli-Euler bjælke ved bøjning i xz -plan. [3]

Den klassiske bjælketeori egner sig af den grund til tynde og slanke bjælker hvorimod den forskydningsfleksible teori, også kendt som Timoshenko bjælketeori, giver en nøjagtigere beskrivelse af

bjælke deformationer, idet den medtager bidraget γ fra forskydningsstøjninger, som har en betydelig indflydelse på tykke bjælker. Dette kan ses på Figur 7.

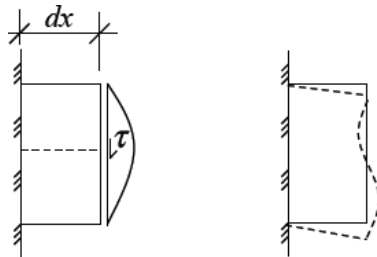


Figur 7: Timoshenko bjælke ved bøjning i xy – plan. [3]



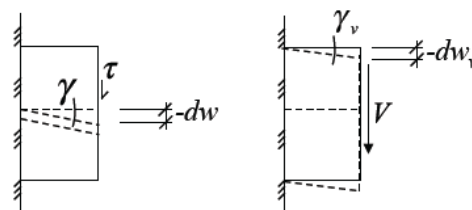
Figur 8: Timoshenko bjælke ved bøjning i xz – plan. [3]

Ved at antage at plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på bjælkeaksen under deformationen, negligerer den klassiske bjælketeori således bidraget fra forskydningsstøjninger. I virkeligheden vil bjælken dog deformere som vist på Figur 9 til højre:



Figur 9: Til venstre - forskydningsspændinger i tværsnittet, til højre - den virkelige deformation. [4]

Normalt er forskydningsspændingerne τ størst i midten af bjælketværsnittet hvilket resulterer i den buede form. I den forskydningsfleksible bjælketeori forbliver plane tværsnit plane, men ikke nødvendigvis vinkelrette på bjælkeaksen. Af den grund er den forskydningsfleksible deformation tilnærmet til en model, som kan ses på Figur 10 th.:



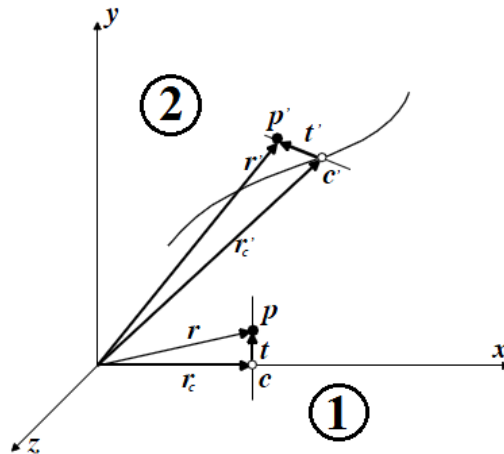
Figur 10: Til venstre - deformation af fibre, til højre - gennemsnitlig forskydningsdeformation. [4]

Grundet denne konfiguration skal tværsnitsarealet korrigeres med forskydningskorrektionsfaktoren β , som er beskrevet nærmere i afsnit 2.3.

For at kunne beskrive en bjælkes deformation, som vist på Figur 7 og Figur 8, er det nødvendigt at have kendskab til hvordan et vilkårligt punkt opfører sig under translation og rotation. Dette gøres i de efterfølgende ved at bestemme et flytningsfelt for et punkt i en bjælke. Kendskabet til flytningsfeltet giver grundlag til opstilling af de styrende differentielligninger for bøjning og forskydning.

2.2 Det tredimensionelle flytningsfelt

Bevægelsen af et udvalgt punkt i en tredimensional bjælke beskrives ved at betragte Figur 11. [5]



Figur 11: Bevægelse af et punkt i en 3D bjælke hvor 1 angiver udeformeret tilstand og 2 deformeret tilstand. [5]

I den udeformede tilstand (1), beskrives placeringen af punkt p i bjælken ved to vektorer: r_c , som beskriver den oprindelige placering på x -aksen og t som beskriver den oprindelige rotation af punktet. For den udeformede tilstand er vektorer r_c og t ortogonale på hinanden. Vektor t er defineret ved punkt p og c . Den resulterende vektor af t og r_c er vektor r .

Når bjælken deformerer, vil punkt p få en rotation og en translation, hvor vektorer r'_c og t' beskriver hhv. translation og rotation af punkt p i den deformede tilstand (2). Translationen af punkt p er beskrevet ved flytningerne u , v og w . Rotationen af vektor t' i den deformede tilstand foretages vha. rotationsoperatoren R , dvs.:

$$t' = Rt \quad (2.1)$$

hvor

$$\begin{aligned} R &= \exp(\tilde{\Psi}) \\ &= I_3 + \tilde{\Psi} + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}^2 \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

hvor I_3 er identitetsmatricen, defineret som:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Og $\tilde{\Psi}$ er rotationsmatrice defineret som:

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ \theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Hvor θ_x , θ_y og θ_z er rotationsvinkler omkring hhv. x , y og z akserne.

Positionen af punkt p før og efter deformationen jf. Figur 11 beskrives ved følgende vektorer:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_c + \mathbf{t} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_c + \mathbf{t}' \\ &= \mathbf{r}'_c + \mathbf{R}\mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Flytningsvektoren $\mathbf{b}_p(x, y, z)$ er derfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_p &= \mathbf{r}' - \mathbf{r} \\ &= \mathbf{r}'_c + \mathbf{t}' - \mathbf{r}_c - \mathbf{t} \\ &= \mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c + \mathbf{R}\mathbf{t} - \mathbf{t} \\ &= \mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c + (\mathbf{I}_3 + \tilde{\Psi})\mathbf{t} - \mathbf{t} \end{aligned}$$

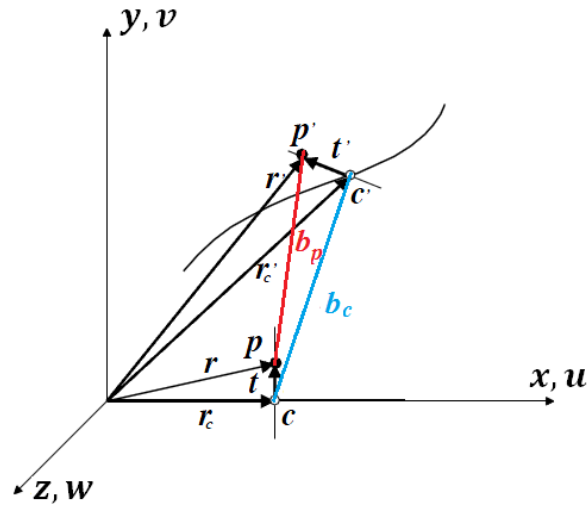
Leddet $\frac{1}{2}\tilde{\Psi}^2$ i ligning (2.2) negligeres, da der forudsættes små vinkeldrejninger.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_p &= \mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c + \mathbf{I}_3\mathbf{t} + \tilde{\Psi}\mathbf{t} - \mathbf{t} \\ &= \mathbf{b}_c + \mathbf{t}(\mathbf{I}_3 - \mathbf{1} + \tilde{\Psi}) \\ &= \mathbf{b}_c + \tilde{\Psi}\mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

hvor:

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c \quad (\mathbf{I}_3 - \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Flytningsvektorerne $\mathbf{b}_p(x, y, z)$ og $\mathbf{b}_c(x, y, z)$ ses på Figur 12:



Figur 12: Flytningsvektorer. [5]

Flytning $\mathbf{r}_c$ i den udeformerede tilstand og $\mathbf{r}'_c$ i den deformerede tilstand beskrives ved:

$$\mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{bmatrix}$$

Deformationsvektoren i den fuldstændige form jf. ligning (2.6) er dermed:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ \theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Et tredimensionelt bjælkeelement udsat for aksial-, vridnings- og bøjningsdeformation i (xy) og (xz) planer har derfor følgende kinematiske relationer [6]:

$$\begin{aligned} u &= u_c - y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ v &= -z\theta_x + v_c \\ w &= y\theta_x + w_c \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hvor jf. Figur 7 og Figur 8:

$$\begin{aligned} \theta_z &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Translationsfrihedsgraderne (v_c, w_c) i y og z retninger indeholder translation fra bøjning (v_b, w_b) og bidrag fra forskydning (v_s, w_s), dvs.:

$$v_c = v_s + v_b$$

$$w_c = w_s + w_b \quad (2.10)$$

Forholdet mellem den samlede rotation, rotationsbidraget fra bøjning og forskydning er jf. Figur 7 og Figur 8:

$$\frac{\partial v_c}{\partial x} = \frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = \theta_z + \gamma_{xy} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial w_c}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} = -\theta_y - \gamma_{xz} \quad (2.12)$$

Hvor γ_{xy} og γ_{xz} er tøjninger i hhv. (xy) og (xz) planer. Omskrevet til generel form:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = \theta_z + \gamma_{xy} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} = -\theta_y - \gamma_{xz} \quad (2.14)$$

Med kendskab til flytningsfeltet kan bjælkens differentielligning udledes. Dette gøres i det efterfølgende afsnit.

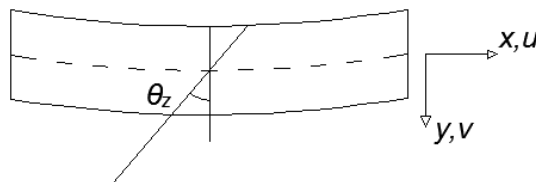
2.3 Bjælkens differentielligning

For at gøre udledningerne mere overskuelige, udledes bjælkens differentielligning først for bøjning og derefter for forskydning [7]. For et lineart elastisk materiale gælder følgende relation:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.15)$$

Hvor E er elasticitetsmodulet og σ er spænding. Den aksiale flytning af en bøjningspåvirket bjælke jf. Figur 13 er:

$$u = -y \cdot \theta_z$$



Figur 13: Simpelt understøttet Timoshenko bjælke under deformation.

Tøjningen er dermed:

$$\varepsilon = -y \frac{d\theta_z}{dx} \quad (2.16)$$

Indsættes ligning (2.16) i ligning (2.15) fås:

$$-y \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{\sigma}{E} \quad (2.17)$$

Multipliseres ligning (2.17) med y og integreres over arealet fås bøjningsbidraget M_z til:

$$\begin{aligned} \int_A -y^2 \frac{d\theta_z}{dx} dA &= \int_A y \frac{\sigma}{E} dA \Leftrightarrow \\ \frac{d\theta_z}{dx} \int_A -y^2 dA &= \frac{1}{E} \int_A y \sigma dA \Rightarrow \\ \frac{d\theta_z}{dx} (-I_z) &= -\frac{M_z}{E} \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$M_z = EI_z \frac{d\theta_z}{dx} = EI_z \kappa_z \quad (2.19)$$

Hvor I_z er inertimomentet om z -aksen og κ_z er den generaliserede tøjning:

$$\kappa_z = \frac{d\theta_z}{dx} \quad (2.20)$$

På tilsvarende måde bestemmes forskydningsbidraget, idet forskydningstøjningen γ_{xy} er bestemt i ligning (2.13):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} - \theta_z = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.21)$$

Integreres der over arealet fås:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dv}{dx} - \theta_z dA &= \int_A \frac{\tau_{xy}}{G} dA \Leftrightarrow \\ \frac{dv}{dx} - \theta_z \int_A dA &= \frac{1}{G} \int_A \tau_{xy} dA \Rightarrow \\ \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) A &= \frac{V}{G} \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$V = GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) = GA \tilde{\gamma} \quad (2.23)$$

Hvor V er forskydningskraften, G er forskydningsmodul og $\tilde{\gamma}$ er den generaliserede tøjning:

$$\tilde{\gamma} = \frac{dv}{dx} - \theta_z \quad (2.24)$$

Da forskydningskraften ikke er jævnt fordelt over tværsnitsarealet, skal denne korrigeres med forskydningskorrektionsfaktoren β [4]. Bestemmelsen af forskydningskorrektionsfaktoren tager udgangspunkt i energiligevægt, hvor det indre arbejde fra forskydningspændinger τ er lig med det ydre arbejde fra forskydningskraften:

$$\int_A dw \cdot \tau dA = dw \cdot V \quad (2.25)$$

Hvor A er arealet. Ud fra Figur 9 og Figur 10 haves at $dw = \gamma \cdot dx$ og $dw_v = \gamma_v \cdot dx$, dvs. den kinematiske relation bliver:

$$\int_A \gamma \cdot dx \cdot \tau dA = \gamma_v \cdot dx \cdot V \quad (2.26)$$

Ud fra den grundlæggende kontinuummekaniik haves at $\tau = G \cdot \gamma$, dvs. ligning (2.26) bliver:

$$\int_A \frac{\tau}{G} \cdot dx \cdot \tau dA = \frac{\tau_v}{G} \cdot dx \cdot V \quad (2.27)$$

Den gennemsnitlige forskydningspænding τ_v er et resultat af forskydningskraftens jævne fordeling over forskydningsarealet $A_s = A \cdot \beta$:

$$\int_A \frac{\tau^2}{G} \cdot dx dA = \left(\frac{V}{A_s} \right) \cdot \frac{1}{G} \cdot dx \cdot V \quad (2.28)$$

Forskydningspændingen τ i tværsnittet med tykkelsen t bestemmes ud fra Grashofs formel, hvorefter ligning (2.28) bliver:

$$\int_A \frac{1}{G} \cdot dx \cdot \left(\frac{V \cdot S}{I \cdot t} \right)^2 dA = \frac{1}{A \cdot \beta} \cdot \frac{V}{G} \cdot dx \cdot V \quad (2.29)$$

Hvor I er inertimomentet og S er det statiske modstandsmoment givet ved:

$$S = \int_A t \cdot z dA \quad (2.30)$$

Løses der for β , fås:

$$\beta = \frac{I^2}{A \cdot \int_A \left(\frac{S}{t} \right)^2 dA} \quad (2.31)$$

Korrektionsfaktoren β for et I-profil er:

$$\beta \approx \frac{A_{krop}}{A_{samlet}} \quad (2.32)$$

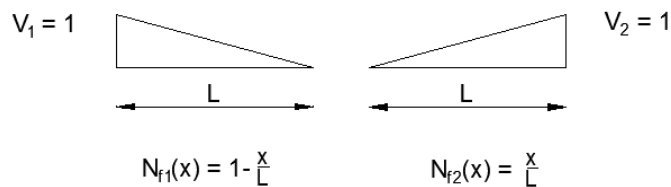
Forskydningsbidraget er dermed:

$$V = \beta GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta_z \right) \quad (2.33)$$

Da bjælkens differenttielligning er udledt, er det nødvendigt at bestemme såkaldte formfunktioner, som anvendes i finite element metoden til at beskrive flytninger og drejninger i elementet. Formfunktionerne er udledt i de efterfølgende afsnit.

2.4 Lineære formfunktioner for et bjælkeelement

Da bevægelsen af et vilkårligt punkt på bjælkeelementet er beskrevet vha. flytningsfeltet i det tidligere afsnit, kan formfunktioner anvendes til at interpolere tværflytninger v langs hele bjælkeelementet. Det karakteristiske ved formfunktioner er at de kan anvendes til interpolation af enhver variabel i et element, dvs. flytninger, drejninger, laster, inertimomenter mm. De mest simple formfunktioner er lineære formfunktioner [8], som beskriver tværflytningen i elementets ender. Disse er udledt i appendiks 9.5 og kan ses på Figur 14:



Figur 14: Lineære formfunktioner.

Når formfunktionerne kendes, kan det virtuelle arbejdes princip, VAP, anvendes til bestemmelse af elementets stivhedsmatrice. Det virtuelle arbejdes princip tilnærmer løsningen til elementets stivhedsmatrice, idet der sikres, at ligevægtsligningerne er opfyldt i gennemsnit. Ved det pågældende bjælkeelement opnås dog en eksakt løsning, idet formfunktionerne N_{f1} og N_{f2} beskriver flytningsfeltet eksakt. Princippet i at bestemme stivhedsmatricen ud fra virtuelt arbejde beskrives kort herunder.

2.4.1 Bestemmelse af stivhedsmatricen ud fra VAP

Der vælges et virtuelt flytningsfelt $\mathbf{b}^*$ analogt til ligning (2.78) [9]. Eftersom formfunktionerne er gældende for både det virkelige og det virtuelle felt, er sammenhængen med de virtuelle knudflytninger $\mathbf{e}^*$ givet ved:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{N} \mathbf{e}^* \quad (2.34)$$

De virtuelle tøjninger $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ givet ved:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{B} \mathbf{e}^* \quad (2.35)$$

Spændingerne er givet ved:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{e} \quad (2.36)$$

Hvor $\mathbf{D}$ er den konstitutive matrice. Der er ikke fordelt last på elementet, hvilket betyder, at det ydre arbejde A_{ydre} alene stammer fra de virkelige knudekræfter $\mathbf{R}$ og de virtuelle knudeflytninger $\mathbf{e}^*$. Det ydre arbejde er derfor givet ved:

$$A_{ydre} = \mathbf{R}^T \mathbf{e}^* \quad (2.37)$$

Det indre arbejde A_{indre} hidrører fra de generaliserede spændinger og de virtuelle tøjninger. Der integreres over elementlængden, hvilket giver:

$$A_{indre} = \int_0^L \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* dx \quad (2.38)$$

Dette omskrives til:

$$A_{indre} = \int_0^L (\mathbf{DBe})^T \mathbf{Be}^* dx \quad (2.39)$$

Fra matriceregnerregler haves:

$$(\mathbf{DB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{D}^T \quad (2.40)$$

og da $\mathbf{D}$ er en symmetrisk matrice gælder:

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D} \quad (2.41)$$

Knudeflytningerne er konstante og sættes udenfor integralet. Ved anvendelse af formel (2.40) og (2.41) kan formel (2.39) omskrives til:

$$A_{indre} = \mathbf{e}^T \mathbf{e}^* \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dx \quad (2.42)$$

Ifølge arbejdsligningen er det indre arbejde lig det ydre arbejde, og da $\mathbf{e}^*$ udgår på begge sider af lighedstegnet, ses det at elementets stivhedsmatrice $\mathbf{k}_e$ er givet ved:

$$\mathbf{k}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dx \quad (2.43)$$

Idet $\mathbf{D}$ er under integralet, kan stivhedsmatricen bestemmes for varierende tværsnit. For den pågældende element er flytningsfeltet i dets fuldstændige form beskrevet ved:

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Tøjningerne $\boldsymbol{\varepsilon}$ jf. ligninger (2.20) og (2.24) og dermed tøjningsinterpolationsmatricen $\mathbf{B}$ er bestemt som:

$$\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \\ \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_2 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}}_e \quad (2.45)$$

Den konstitutive matrice er:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} GA_{sy} & 0 \\ 0 & EI_z \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Anvendes ligning (2.43) fås stivhedsmatricen til:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{A_{sy}G}{L} & \frac{A_{sy}G}{2} & -\frac{A_{sy}G}{L} & \frac{A_{sy}G}{2} \\ \cdot & \frac{EI}{L} + \frac{A_{sy}GL}{3} & -\frac{A_{sy}G}{L} & \frac{A_{sy}GL}{6} - \frac{EI}{L} \\ \cdot & \cdot & \frac{A_{sy}G}{L} & -\frac{A_{sy}G}{2} \\ sym. & \cdot & \cdot & \frac{EI}{L} + \frac{A_{sy}GL}{3} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Lineære formfunktioner er lettere at arbejde med rent computerkraftmæssigt f. eks. i tilfælde af kontaktproblemer, hvor højre ordens elementer kan have en betydelig indflydelse på beregningstiden af komplekse problemstillinger. Elementer som er baseret på de lineære formfunktioner har dog en tendens til at overestimere en konstruktions stivhed. Dette gør sig specielt gældende for konstruktioner udsat for bøjning. I FEM er problemstillingen karakteriseret som shear locking og er beskrevet nærmere i afsnit 3.2.4, hvor det er eftervist at de lineære formfunktioner er meget følsomme over for shear locking. Det er eftervist ved at modellere en udkraget bjælke med en punktlast i den frie ende og sammenligne på nedbøjningen, hvor det fremgår at resultatet fra de lineære elementer er langt stivere. For at undgå shear locking er det således nødvendigt at anvende højre ordens interpolationsfunktioner, som er bedre til at beskrive flytningerne og drejningerne. Dette gøres i det efterfølgende afsnit.

2.5 Formfunktioner til et bjælkeelement i xy-plan

Ved udledning af bjælkens formfunktioner antages et element med 7 frihedsgrader, dvs. flytningsfrihedsgrader v_1, v_2, v_3, v_4 og rotationsfrihedsgrader θ_1, θ_2 og θ_3 , jf. Figur 15. Formfunktionerne bestemmes ud fra Lagrange interpolationsfunktionen [10]. De generaliserede spændinger i elementet beskrives ved moment om z - akse M_z og forskydningskraft i y-retningen V :

$$\sigma = \begin{bmatrix} M_z \\ V \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Den konstitutive matrice er:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI_z & 0 \\ 0 & GA_{sy} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Hvor

E er elasticitetsmodullet
 I_z er inertimomentet
 G er forskydningsmodullet
 A_{sy} er forskydningsarealet

Flytningerne i elementet beskrives ved:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \theta_z \\ v \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Ved differentiation af (2.50) og jf. ligninger (2.11) og (2.12) bestemmes tøjningerne $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta_z}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - \theta_z \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Hvor κ_z er krumningen og γ_{xy} er forskydningsbidraget.

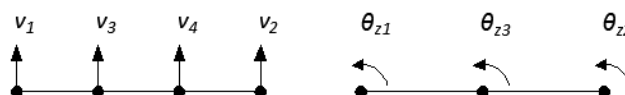
I FEM metoden bliver alle påsatte kræfter omdannet til konsistente knudekræfter, hvilket betyder at momentet i elementet varierer lineært. For at få en lineær momentvariation i elementet skal krumningen i ligning (2.19) interpoleres kvadratisk. Differentielligningen kommer til at have følgende form:

$$M_z = EI_z \frac{d^2\theta_z}{dx^2} \quad (2.52)$$

Dette medfører at elementet skal have 3 drejningsfrihedsgrader. Løses differentielligningen (2.52) fås en 3. gradspolynomium, hvilket betyder at flytningerne skal interpoleres kubisk. Sammenhængen mellem moment og forskydningskraft er givet ved følgende relation:

$$V = \frac{dM_z}{dx} \quad (2.53)$$

Sammen med relationen i ligning (2.53) vil det medføre at der skal vælges 4 frihedsgrader for flytning, som sammenlagt giver en bjælke med 7 frihedsgrader, som på Figur 15 er delt i flytninger og rotationer.



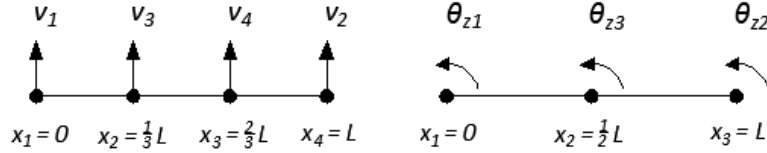
Figur 15: Elementets 7 frihedsgrader.

v_1 , v_2 , θ_{z1} og θ_{z2} er de ydre frihedsgrader fra hhv. flytning og rotation. v_3 , v_4 samt θ_{z3} er de indre frihedsgrader.

Lagranges interpolationsformel for udledning af formfunktioner N_k er givet ved:

$$N_k = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_k - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_k)(x_2 - x_k) \dots (x_k - x_k) \dots (x_n - x_k)} \quad (2.54)$$

hvor n antager værdier 1,2,3 og 4, som kan ses på Figur 16:



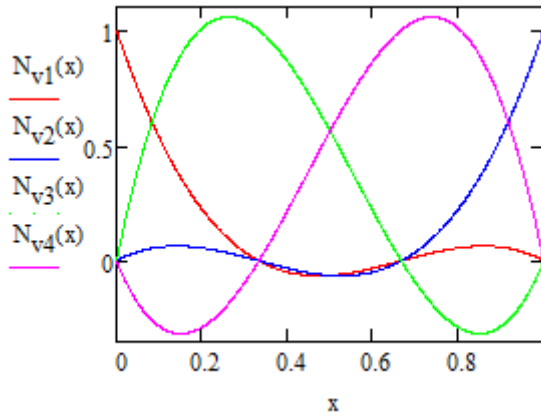
Figur 16. Frihedsgrader.

Formfunktioner for det forskydningsfleksible bjælkeelement er udledt i Appendiks 9.1 ved at indsætte værdier fra Figur 16 i formel (2.54). Disse er i den ikke-kondenserede tilstand, betegnet ved N_v for flytninger og N_θ for drejninger, bestemt til:

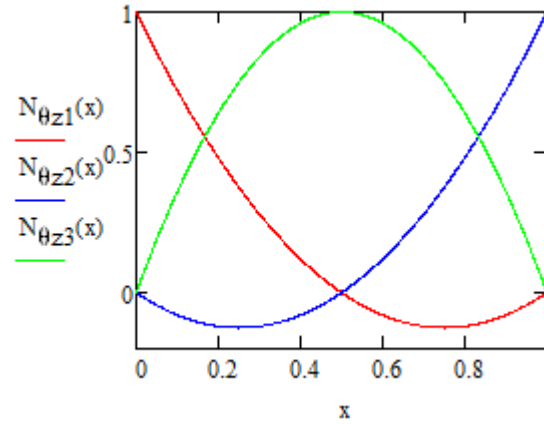
$$\begin{aligned} N_{v1} &= -\frac{9x^3}{2L^3} + \frac{9x^2}{L^2} - \frac{11x}{2L} + 1 \\ N_{v2} &= \frac{9x^3}{2L^3} - \frac{9x^2}{2L^2} + \frac{x}{L} \\ N_{v3} &= \frac{27x^3}{2L^3} - \frac{45x^2}{2L^2} + \frac{9x}{L} \\ N_{v4} &= -\frac{27x^3}{2L^3} + \frac{18x^2}{L^2} - \frac{9x}{2L} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} N_{\theta z1} &= \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1 \\ N_{\theta z2} &= \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \\ N_{\theta z3} &= -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Disse er illustreret på Figur 17 og Figur 18.



Figur 17: Formfunktioner for flytning



Figur 18: Formfunktioner for rotation

Der foretages statistisk kondensering af formfunktioner i afsnit 2.7 hvor formfunktioner for flytning betegnes N_f og formfunktioner for drejning betegnes N_d .

2.6 Opstilling af elementets stivhedsmatrice

Eftersom formfunktionerne er kendte kan flytningsfeltet jf. ligning (2.78) beskrives ved:

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N_{\theta z1} & 0 & N_{\theta z2} & 0 & N_{\theta z3} & 0 \\ N_{v1} & 0 & N_{v2} & 0 & N_{v3} & 0 & N_{v4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \\ v_3 \\ \theta_3^z \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Den samlede stivhedsmatrice for elementet skal således være 7x7. Ved differentiation af formfunktionsmatricen $\mathbf{N}$ samt definitionen i ligning (2.51), fås tøjningsinterpolationsmatricen, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_{\theta z1}}{dx} & 0 & \frac{dN_{\theta z2}}{dx} & 0 & \frac{dN_{\theta z3}}{dx} & 0 \\ \frac{dN_{v1}}{dx} & -N_{\theta z1} & \frac{dN_{v2}}{dx} & -N_{\theta z2} & \frac{dN_{v3}}{dx} & -N_{\theta z3} & \frac{dN_{v4}}{dx} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Den virtuelle arbejdes princip anvendes til bestemmelse af stivhedsmatricen [9]. Stivhedsmatricen for bjælkeelementet med 7 frihedsgrader er integreret i Appendiks 9.4 og resultatet kan ses i følgende ligning:

$$k_e = \begin{bmatrix} \frac{37 \cdot A_{sy} \cdot G}{10 \cdot L} & \frac{83 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{13 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} & \frac{7 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{189 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} & \frac{11 \cdot A_{sy} \cdot G}{30} & \frac{27 \cdot A_{sy} \cdot G}{20 \cdot L} \\ \frac{83 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{7 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} + \frac{2 \cdot A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} & \frac{7 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{E \cdot I_z}{3 \cdot L} - \frac{A_{sy} \cdot G \cdot L}{30} & \frac{33 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} & \frac{A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} - \frac{8 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} & \frac{3 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} \\ \frac{13 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} & \frac{7 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{37 \cdot A_{sy} \cdot G}{10 \cdot L} & \frac{83 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{27 \cdot A_{sy} \cdot G}{20 \cdot L} & \frac{11 \cdot A_{sy} \cdot G}{30} & \frac{189 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} \\ \frac{7 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{E \cdot I_z}{3 \cdot L} - \frac{A_{sy} \cdot G \cdot L}{30} & \frac{83 \cdot A_{sy} \cdot G}{120} & \frac{7 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} + \frac{2 \cdot A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} & \frac{3 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} & \frac{A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} - \frac{8 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} & \frac{33 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} \\ \frac{189 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} & \frac{33 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} & \frac{27 \cdot A_{sy} \cdot G}{20 \cdot L} & \frac{3 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} & \frac{54 \cdot A_{sy} \cdot G}{5 \cdot L} & \frac{9 \cdot A_{sy} \cdot G}{10} & \frac{297 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} \\ \frac{11 \cdot A_{sy} \cdot G}{30} & \frac{A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} - \frac{8 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} & \frac{11 \cdot A_{sy} \cdot G}{30} & \frac{A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} - \frac{8 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} & \frac{9 \cdot A_{sy} \cdot G}{10} & \frac{16 \cdot E \cdot I_z}{3 \cdot L} + \frac{8 \cdot A_{sy} \cdot G \cdot L}{15} & \frac{9 \cdot A_{sy} \cdot G}{10} \\ \frac{27 \cdot A_{sy} \cdot G}{20 \cdot L} & \frac{3 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} & \frac{189 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} & \frac{33 \cdot A_{sy} \cdot G}{40} & \frac{297 \cdot A_{sy} \cdot G}{40 \cdot L} & \frac{9 \cdot A_{sy} \cdot G}{10} & \frac{54 \cdot A_{sy} \cdot G}{5 \cdot L} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Integralet i ligning (2.59) kan ikke integreres eksakt i MatLAB koden, hvorfor det er nødvendigt at omdanne den til en form, som kan integreres numerisk. I projektet anvendes Gauss integration, som er beskrevet i afsnit 3.1.2.

For at minimere beregningsomfanget, kondenseres stivhedsmatricen i (2.59) til at indeholde 4 frihedsgrader. Dette gøres i det efterfølgende afsnit, hvor de fire formfunktioner til v og fire formfunktioner til θ_z bestemmes.

2.7 Statisk kondensering

Statisk kondensering foretages for at eliminere de indre frihedsgrader, med henblik på en mere elegant løsning [10]. Disse beskrives i stedet for vha. ydre frihedsgrader. I et FEM program kondenseres frihedsgraderne i elementet før assemblering af den globale ligning:

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (2.60)$$

hvor

$[K]$ elementets globale stivhedsmatrice
 $\{U\}$ flytningsovertallige
 $\{R\}$ knudekræfterne

Skrives ligning (2.60) for bjælken med 7 frihedsgrader, fås:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \\ v_3 \\ \theta_3^z \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Matricen delles op, således at den indeholder de indre $\mathbf{D}_2$ og ydre $\mathbf{D}_1$ frihedsgrader hver for sig:

$$\begin{bmatrix} 4 \times 4 & 4 \times 3 \\ \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ 3 \times 4 & 3 \times 3 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 4 \times 1 \\ \mathbf{D}_1 \\ 3 \times 1 \\ \mathbf{D}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \times 1 \\ \mathbf{R}_1 \\ 3 \times 1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

Ligningssystemet i (2.62) løses:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_2 = \mathbf{R}_1 \quad (2.63)$$

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_2 = \mathbf{R}_2 \quad (2.64)$$

Ligning (2.64) løses for $\mathbf{D}_2$:

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{R}_2 - \mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_1 \quad (2.65)$$

Dette indsættes i ligning (2.63), hvormed fås:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_{12}(\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{R}_2 - \mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_1) &= \mathbf{R}_1 \Leftrightarrow \\ \mathbf{D}_1 \underbrace{(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21})}_{\mathbf{K}_{red}} &= \underbrace{\mathbf{R}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{R}_2}_{\mathbf{R}_{red}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ved at antage at der ikke forekommer lokal last på elementet, dvs. $\mathbf{R}_2 = 0$ reduceres ligning (2.66) til:

$$\mathbf{D}_2 = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_1 \quad (2.67)$$

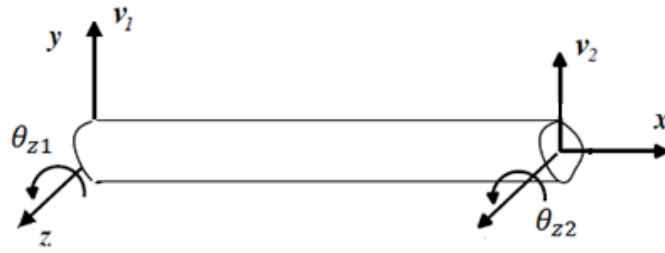
Eller i den fuldstændige form, jf. Figur 15:

$$\begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3^z \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Ved at anvende ligningssystemet i (2.68) kan de indre frihedsgrader i (2.57) elimineres:

$$v(x) = N_{v1}v_1 + N_{v2}v_2 + N_{v3} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{Bmatrix} + N_{v4} \cdot \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Frihedsgraderne kan ses på Figur 19:



Figur 19: Rumligt bjælkeelement med tilhørende frihedsgrader.

Flytningen for det forskydningsfleksible bjælkeelement kan nu omskrives ved fire nye kondenserede formfunktioner:

$$v(x) = N_{f_1} v_1 + N_{f_2} \theta_{z1}^z + N_{f_3} v_2 + N_{f_4} \theta_{z2}^z \quad (2.70)$$

Formfunktionerne for flytning i xz plan, N_{f_i} , er beregnet i Appendiks 9.3 til:

$$\begin{aligned} N_{f_1} &= \frac{1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} + \Phi_z \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{1 + \Phi_z} \\ N_{f_2} &= \frac{L \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} + \frac{\Phi_z}{2} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \right)}{1 + \Phi_z} \\ N_{f_3} &= \frac{3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} + \Phi_z \frac{x}{L}}{1 + \Phi_z} \\ N_{f_4} &= \frac{L \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} + \frac{\Phi_z}{2} \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) \right)}{1 + \Phi_z} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Hvor Φ_z er forskydningsfleksibiliteten givet ved:

$$\Phi_z = \frac{12EI_y}{GA_{sz}L^2} \quad (2.72)$$

og

$$A_{sz} = A \cdot \beta_z \quad (2.73)$$

Hvor

I_y er inertimomentet om y -aksen

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν er Poissons forhold

L er længden af elementet

A er tværsnitsarealet

β_z er forskydningskorrektionsfaktor for xz plan

Drejningen for det forskydningsfleksible bjælkeelement beskrives ved følgende formfunktioner:

$$\theta_z(x) = N_{\theta_{z1}} \theta_1^z + N_{\theta_{z2}} \theta_2^z + N_{\theta_{z3}} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

På tilsvarende måde bestemmes formfunktioner for rotation, N_d . I appendiks 9.3 er disse bestemt til:

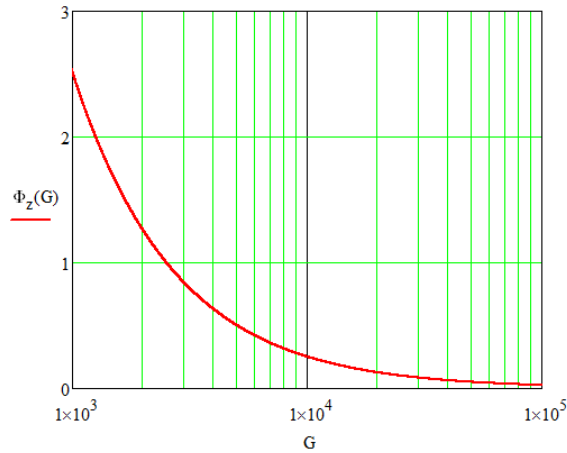
$$\begin{aligned} N_{d1} &= \frac{6 \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)}{L(1 + \Phi_z)} \\ N_{d2} &= \frac{1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} + \Phi_z \left(1 - \frac{x}{L} \right)}{1 + \Phi_z} \\ N_{d3} &= -\frac{6 \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)}{L(1 + \Phi_z)} \\ N_{d4} &= \frac{-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} + \Phi_z \frac{x}{L}}{1 + \Phi_z} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Hvor indeks d står for drejning.

Stivhedsmatricen for det forskydningsfleksible bjælkeelement er beregnet i Appendiks 9.4 og er dermed:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{(1 + \Phi_z)L^3} & \frac{6EI_y}{(1 + \Phi_z)L^2} & -\frac{12EI_y}{(1 + \Phi_z)L^3} & \frac{6EI_y}{(1 + \Phi_z)L^2} \\ \cdot & \frac{(4 + \Phi_z)EI_y}{(1 + \Phi_z)L} & -\frac{6EI_y}{(1 + \Phi_z)L^2} & \frac{(2 - \Phi_z)EI_y}{(1 + \Phi_z)L} \\ \cdot & \cdot & \frac{12EI_y}{(1 + \Phi_z)L^3} & -\frac{6EI_y}{(1 + \Phi_z)L^2} \\ \text{symetrisk} & \cdot & \cdot & \frac{(4 + \Phi_z)EI_y}{(1 + \Phi_z)L} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Hvis forskydningsmodulet G går mod uendelig, hvilket svarer til f. eks at et I-profil bliver slank i forhold til længden, se afsnit 3.2.2, kan det jf. ligning (2.72) og Figur 20 observeres at Φ_z vil gå mod nul.



Figur 20: Forskydningsfleksibilitets afhængighed af forskydningsmodulet G [MPa].

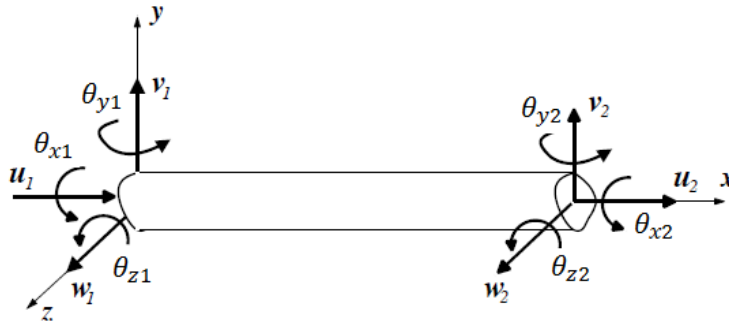
Er Φ_z lig med nul, vil stivhedsmatricen i (2.76) reduceres til:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ \cdot & \frac{4EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \cdot & \cdot & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ \text{symetrisk} & \cdot & \cdot & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Dette er stivhedsmatricen udledt med den klassiske Bernoulli-Euler bjælketheori, hvor der ikke indgår bidrag fra forskydning. De ovenstående stivhedsmatricer er for en plan bjælkeelement uden bidrag fra aksiale flytninger.

2.8 Rumligt bjælkeelement

Formfunktioner for et rumligt bjælkeelement bestemmes ud fra det plane tilfælde. Et typisk 2 knudet rumligt bjælkeelement indeholder 6 frihedsgrader per knude. For en to knuders element er det flytningsfrihedsgraderne u_1, u_2, v_1, v_2, w_1 og w_2 samt rotationsfrihedsgraderne $\theta_{x1}, \theta_{x2}, \theta_{y1}, \theta_{y2}, \theta_{z1}$ og θ_{z2} . I efterfølgende udelades bøjningsfrihedsgraden θ_x , men tilføjes senere. Dette kan ses på Figur 21.



Figur 21: Rumligt bjælkeelement med tilhørende frihedsgrader.

Elementet har længden L samt konstant tværsnitsareal A , inertimoment I og elasticitetsmodul E . De elastiske flytninger af et vilkårligt punkt i elementet kan beskrives ved følgende relation:

$$\mathbf{b} = \mathbf{N}\mathbf{e} \quad (2.78)$$

Hvor

- $\mathbf{b}$ flytningsvektoren
- $\mathbf{e}$ knudeflytningsvektoren
- $\mathbf{N}$ formfunktionsmatricen

For et bjælkeelement med 10 frihedsgrader ser ligning (2.78) som følgende:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_z \\ \theta_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{f1} & 0 & N_{f2} & 0 & 0 & N_{f3} & 0 & N_{f4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{f1} & 0 & N_{f2} & 0 & 0 & N_{f3} & 0 & N_{f4} \\ 0 & N_{d1} & 0 & N_{d2} & 0 & 0 & N_{d3} & 0 & N_{d4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{d1} & 0 & N_{d2} & 0 & 0 & N_{d3} & 0 & N_{d4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{z1} \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{z2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} \quad (2.79)$$

Hvor N_u er formfunktioner mht. aksial flytning, N_f er formfunktioner mht. tværflytning og N_d er formfunktioner mht. drejning. Formfunktionerne er udledt i afsnit 2.5. Formfunktioner for flytning og rotation i xy plan er de samme som i ligning (2.71) og ligning (2.75), dog med fortegnsforskel i N_{f2} , N_{f4} , N_{d2} og N_{d4} , dvs.:

$$\begin{aligned}
N_{f_1} &= \frac{1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} + \Phi_y \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{1 + \Phi_y} \\
N_{f_2} &= -\frac{L \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} + \frac{\Phi_y}{2} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \right)}{1 + \Phi_y} \\
N_{f_3} &= \frac{3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} + \Phi_y \frac{x}{L}}{1 + \Phi_y} \\
N_{f_4} &= -\frac{L \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} + \frac{\Phi_y}{2} \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) \right)}{1 + \Phi_y}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Og for rotation [6]:

$$\begin{aligned}
N_{d1} &= \frac{6 \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)}{L(1 + \Phi_y)} \\
N_{d2} &= -\frac{1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} + \Phi_y \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{1 + \Phi_y} \\
N_{d3} &= -\frac{6 \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)}{L(1 + \Phi_y)} \\
N_{d4} &= -\frac{-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} + \Phi_y \frac{x}{L}}{1 + \Phi_y}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Hvor forskydningsfleksibiliteten er givet ved:

$$\Phi_y = \frac{EI_z}{GA_{sy}L^2} \tag{2.82}$$

Og

$$A_{sy} = A \cdot \beta_y \tag{2.83}$$

Hvor

I_z inertimomentet om z-aksen

β_y er forskydningskorrektionsfaktor for xy plan

Flytningerne og drejningerne i et rumligt bjælkeelement beskrives ved følgende ligninger:

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 N_{u1} + u_2 N_{u2} \\
 v &= N_{f1} v_1 + N_{f2} \theta_1^z + N_{f3} v_2 + N_{f4} \theta_2^z \\
 w &= N_{f1} w_1 + N_{f2} \theta_1^y + N_{f3} w_2 + N_{f4} \theta_2^y \\
 \theta_z &= N_{d1} v_1 + N_{d2} \theta_1^z + N_{d3} v_2 + N_{d4} \theta_2^z \\
 \theta_y &= N_{d1} w_1 + N_{d2} \theta_1^y + N_{d3} w_2 + N_{d4} \theta_2^y
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Hvor formfunktionerne N_f og N_d er bestemt i tidligere afsnit og $N_{u1} = 1 - \frac{x}{L}$ og $N_{u2} = \frac{x}{L}$ er formfunktioner for aksiale deformationer, som er udledt i Appendiks 9.5. Tøjningerne for et rumligt bjælkeelement bestemmes:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_z \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - \theta_z \\ \frac{dw}{dx} - \theta_y \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

Den konstitutive matrice er givet ved:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GA_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GA_{sz} \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

Ud fra tøjningsdefinitionen (2.85) og ligninger (2.84), kan tøjningsinterpolationsmatricen for et rumligt bjælkeelement opstilles:

$$\mathbf{B} = \partial \cdot \mathbf{N} \tag{2.87}$$

Hvor ∂ er differentiationsoperator mht. x –aksen.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{f1} & 0 & N_{f2} & 0 & 0 & N_{f3} & 0 & N_{f4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{d1} & 0 & N_{d2} & 0 & 0 & N_{d3} & 0 & N_{d4} \\ 0 & N_{d1} & 0 & N_{d2} & 0 & 0 & N_{d3} & 0 & N_{d4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{d1} & 0 & N_{d2} & 0 & 0 & N_{d3} & 0 & N_{d4} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Tøjningsinterpolationsmatricen er dermed:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u1}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{u2}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{d1}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{d2}}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{d3}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{d4}}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{d1}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{d2}}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{d3}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{d4}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_{f1}}{\partial x} - N_{d1} & 0 & \frac{\partial N_{f2}}{\partial x} - N_{d2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{f3}}{\partial x} - N_{d3} & 0 & \frac{\partial N_{f4}}{\partial x} - N_{d4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{f1}}{\partial x} - N_{d1} & 0 & \frac{\partial N_{f2}}{\partial x} - N_{d2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{f3}}{\partial x} - N_{d3} & 0 & \frac{\partial N_{f4}}{\partial x} - N_{d4} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Med kendskab til tøjningsinterpolationsmatricen, er bestemmelsen af stivhedsmatricen ligetil, idet formel (2.43) anvendes med henblik på at løse ligning:

$$\begin{matrix} [\mathbf{k}_e] & \cdot & \{\mathbf{u}\} & = & \{\mathbf{r}\} \\ [10 \times 10] & [10 \times 1] & [10 \times 1] & & \end{matrix} \quad (2.90)$$

hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{z1} \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{z2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{z1} \\ M_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{z2} \\ M_{y2} \end{bmatrix}$$

Stivhedsmatricen vil således være en 10x10 matrice. Her er bidraget fra hvælving og vridning ikke medtaget. Disse medtages dog i 4.4 [11].

2.9 Konsistente knudekræfter

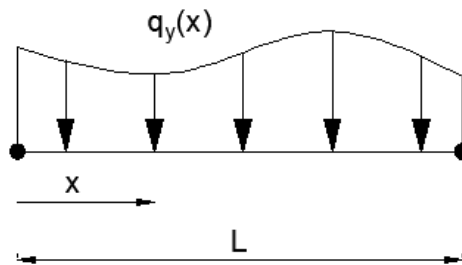
Eftersom et element beskrives ved dets knuder, skal alle laster i form af overflade- og punktlaster omdannes til konsistente knudekræfter, som er statisk ækvivalente med det ydre last. Metoden bygger på den virtuelle arbejdes princip og anvendelse af formfunktioner.

Konsistente knudekræfter for overfladelast

Anvendes formfunktionsmatricen $\mathbf{N}$ fås de konsistente knudekræfter $\mathbf{R}$ for overfladelast til:

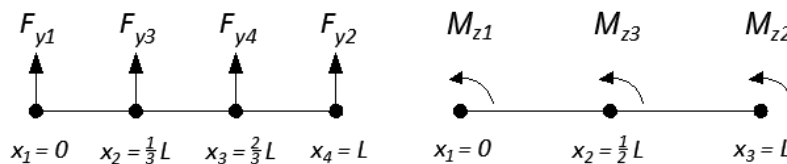
$$\mathbf{R} = \int_{\text{element}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_y(x) dV \quad (2.91)$$

hvor $\mathbf{q}_y(x)$ er den fordelte lastfunktion på elementet, som kan ses på Figur 22:



Figur 22: Ens fordelt last på elementet.

Formfunktionerne $\mathbf{N}$ er bestemt i afsnit 2.5. Der tages udgangspunkt i den forskydningsfleksible bjælke med 7 frihedsgrader, som vist på Figur 23. Hvor er F de påsatte kræfter og M_z er de påsatte momenter.



Figur 23: Knudekræfter.

Indsættes formfunktioner i udtrykket (2.91) fås:

$$\begin{aligned} F_{y1} &= \frac{L \cdot q_y}{8} \\ F_{y2} &= \frac{L \cdot q_y}{8} \\ F_{y3} &= \frac{3L \cdot q_y}{8} \\ F_{y4} &= \frac{3L \cdot q_y}{8} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Beregningerne forefindes i Appendiks 9.6. Den reducerede lastvektor fås ud fra udtrykket (2.66), dvs.:

$$\mathbf{R}_{red} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{R}_2 \quad (2.93)$$

hvor

$\mathbf{K}_{12}$ og $\mathbf{K}_{22}$ ses af ligning (2.59)

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} F_{y1} & 0 & F_{y2} & 0 \end{bmatrix}^T \text{ og } \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} F_{y3} & 0 & F_{y4} \end{bmatrix}^T$$

De konsistente knudekræfter for overfladelast er dermed:

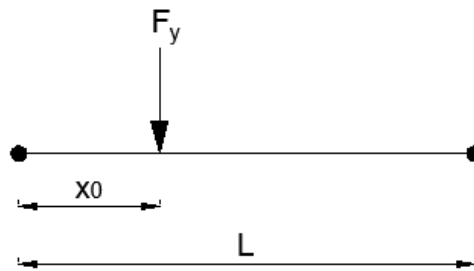
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_y l \\ \frac{1}{12} q_y l^2 \\ \frac{1}{2} q_y l \\ -\frac{1}{12} q_y l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Konsistente knudekræfter for enkeltlast

På tilsvarende måde bestemmes knudekræfter på elementet ved enkeltlast, dog med den forskel at det ikke er nødvendigt at integrere, men derimod direkte interpolation:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}^T F_y dV \quad (2.95)$$

Her er F_y enkeltkraft i punktet x_0 med dens tilhørende formfunktion. Placeringen af lasten kan ses på Figur 24:



Figur 24: Lastens placering på et element.

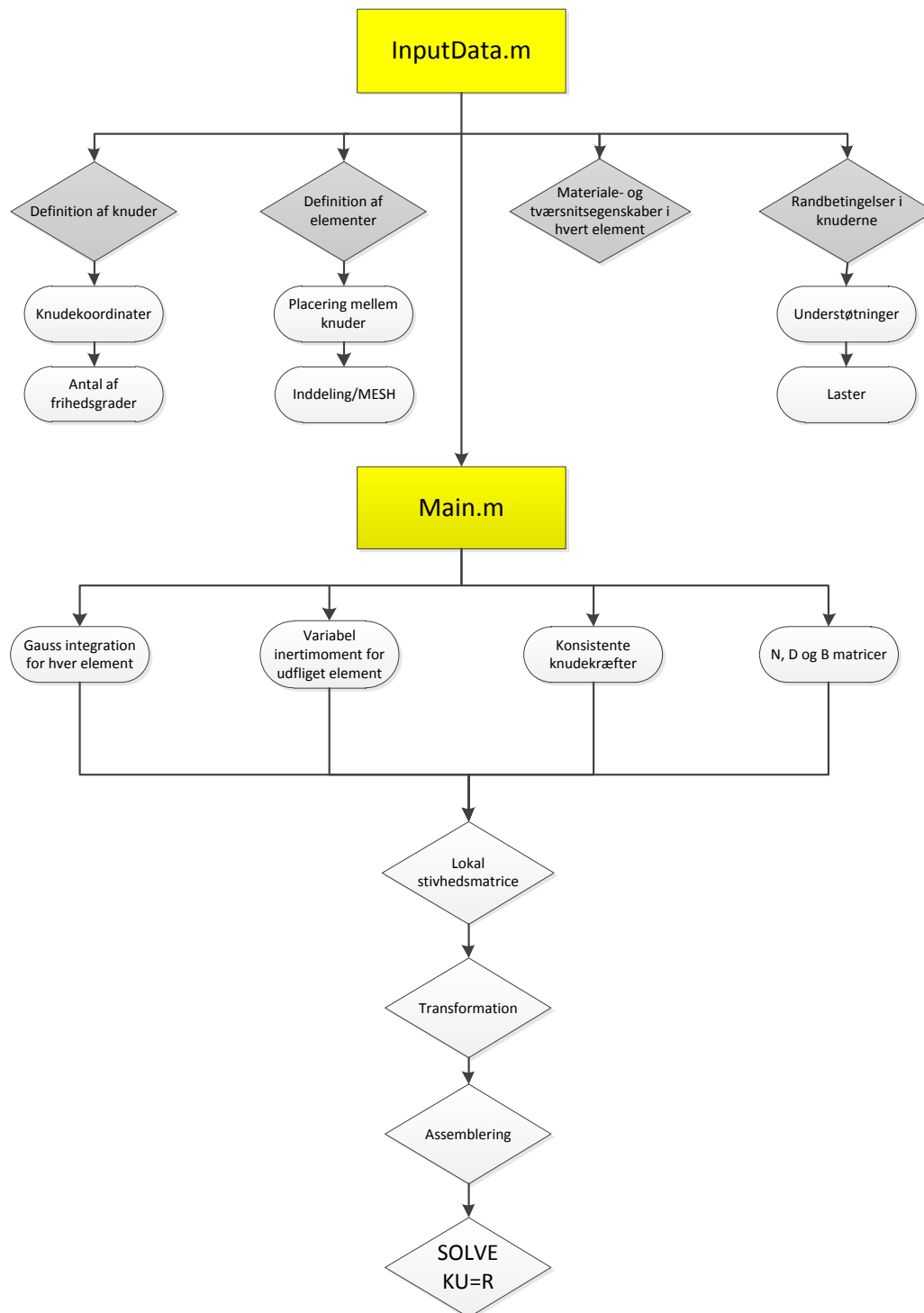
Beregningerne er foretaget i Appendiks 9.6 og resultatet ses i ligning (2.96):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} F_y \cdot \frac{1 - 3\frac{x_0^2}{L^2} + 2\frac{x_0^3}{L^3} + \Phi_z \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)}{1 + \Phi_z} \\ F_y \cdot \frac{L \left(\frac{x_0}{L} - 2\frac{x_0^2}{L^2} + \frac{x_0^3}{L^3} + \frac{\Phi_z}{2} \left(\frac{x_0}{L} - \frac{x_0^2}{L^2} \right) \right)}{1 + \Phi_z} \\ F_y \cdot \frac{3\frac{x_0^2}{L^2} - 2\frac{x_0^3}{L^3} + \Phi_z \frac{x_0}{L}}{1 + \Phi_z} \\ -F_y \cdot \frac{L \left(-\frac{x_0^2}{L^2} + \frac{x_0^3}{L^3} + \frac{\Phi_z}{2} \left(-\frac{x_0}{L} + \frac{x_0^2}{L^2} \right) \right)}{1 + \Phi_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Da teorien for den forskydningsfleksible bjælke er hermed beskrevet, er der nu grundlag for numerisk implementering. I projektet anvendes programmet MatLAB hvor fremgangsmåden i opbygningen af koden kan læses i det efterfølgende afsnit.

3 MatLAB koden

Dette afsnit har til formål at beskrive hvordan teorien, som er beskrevet i de tidligere afsnit, bliver implementeret i MatLAB. Som det er tidligere nævnt, indeholder teorien ikke bidrag fra vridning og hvælving, men bliver gradvist udvidet i afsnit 4. Den principielle opbygning af koden kan ses i diagrammet på Figur 25:



Figur 25: Opbygning af MatLAB scriptet.

Koden er delt op i to filer:

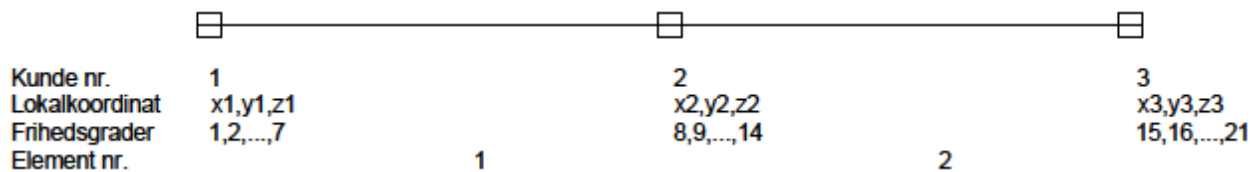
- InputData.m
- Main.m

InputData.m indeholder oplysninger om knuder, elementer, materiale- og tværsnitoplysninger samt randbetingelser. *Main.m* filen indeholder teoriimplementering herunder Gauss integration, hensynstagen til varierende inertimoment, knudekræfter, de nødvendige matricer, samt transformation af den lokale stivhedsmatrice til den globale. Produktet af MatLAB koden er løsning til ligning $KU = R$, hvor de overtallige beregnes. Herunder er der en detaljeret beskrivelse af diagrammet. [12], [13], [14]

3.1.1 InputData - definition af knuder og elementer

Knuderne defineres ud fra det lokale koordinatsystem (x,y,z), hvor hver knude indeholder 6 frihedsgrader, som senere udvides til 7. De 6 frihedsgrader er 3 translationer i x,y og z- retningen, som betegnes som u, v, w og 3 rotationer omkring x,y og z, som betegnes som θ_x, θ_y og θ_z . Den 7. frihedsgrad betegnes φ' , som står for hvælving og som beskriver den aksiale deformation i x-retningen.

Knuderne er forbundet vha. elementer, hvor elementtopologien og frihedsgraderne er beskrevet ved to knuder. Dette kan ses på Figur 26:



Figur 26: Definition af knuder og elementer.

Hver element har således én fælles knude med den næste element og dermed fælles frihedsgrader. Antallet af elementer over længden, dvs. mesh størrelsen, indtastes manuelt, hvor programmet selv kan indlægge de mellemliggende knuder, og dermed kan beregne det samlede antal af frihedsgrader i systemet.

Lasterne kan enten påsættes som punktlaster på en knude i enten x, y eller z- retningen eller éns fordelt last på elementet i y og z- retningen. Disse bliver dog først omdannet til konsistente knudekræfter jf. afsnit 2.9.

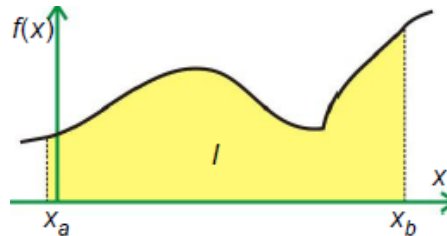
3.1.2 Main – teori implementering

Som det er tidligere nævnt, er det ikke muligt direkte at opskrive integralet (2.43) i MatLAB, idet MatLAB ikke kan løse integralet analytisk og der ønskes at koden skal kunne være i stand til at regne på tværsnit med varierende inertimoment. Derfor er det nødvendigt at foretage numerisk integration. Et af integrationsskemaer er Gauss kvadratur, som forklares lidt nærmere herunder.

3.1.2.1 Gauss kvadratur

Princippet bag Gauss kvadratur [15] er at evaluere et vilkårligt integral numerisk. Et eksempel på en sådan et integral, som kan ses på Figur 27, er:

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \quad (3.1)$$

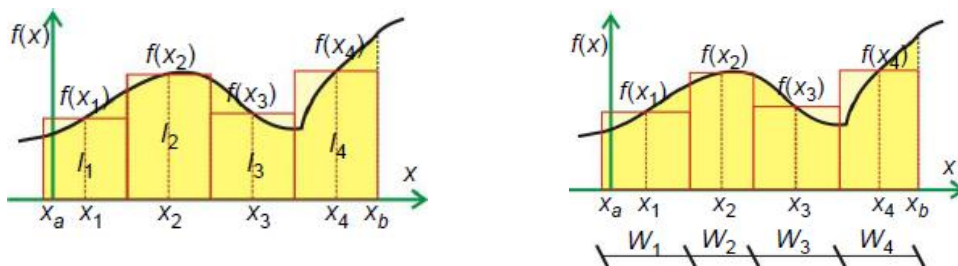


Figur 27: Eksempel på et integral [15].

Dette integral kan løses ved at opdele arealet i n antal af intervaller med bredde W , som er også kendt som vægtfaktor. Løsningen findes ved at summere bidragene fra de forskellige rektangulære områder, hvor vægtfaktoren er konstant.

$$I \approx \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) W = W \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (3.2)$$

Dette kan ses på Figur 28 tv.

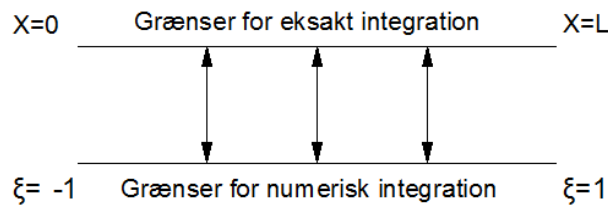


Figur 28: Underinddeling af integralet [15].

En anden løsningsmulighed er at vælge varierende bredde, som kan ses på Figur 28 th. Begge løsninger konvergerer mod den eksakte løsning, men kan blive tidkrævende for komplekse stivhedsmatricer. Problemet kan løses ved Gauss kvadratur, som i princippet handler om at vælge så få n intervaller som muligt, uden at det går udover nøjagtigheden af resultatet. Et n -intervals Gauss kvadratur skal kunne finde den eksakte løsning til et polynomium af $2n - 1$ grad eller lavere ved at vælge de rigtige x_i punkter og vægtfaktorer W_i . Domænet af Gauss kvadratur er $\xi \in (-1,1)$, hvor integraller evalueres vha.:

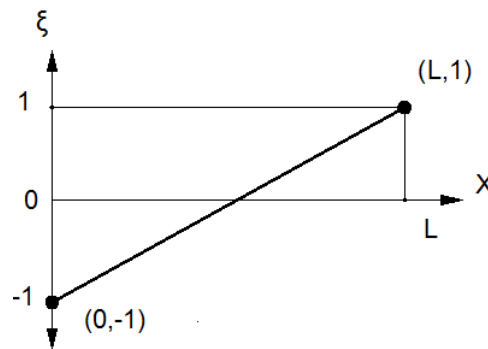
$$I = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi) W_i \quad (3.3)$$

Som det er indikeret i ligning (3.3), skal $\xi \in (-1,1)$ omformes således at den indgår i $x \in (0, L)$, se Figur 29.



Figur 29: Domænetransformation.

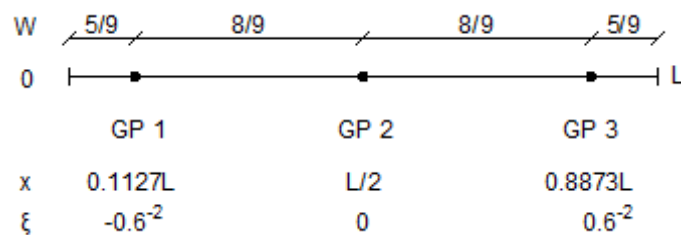
Vægtfaktorer og positioner af Gauss punkter i ξ domæne er på forhånd kendte, men er ukendte i x domæne, derfor ønskes der en relation mellem disse. Denne kan bestemmes ud fra følgende simple betragtning.


 Figur 30: Sammenhæng mellem ξ og x .

Funktionsforskriften for grafen på Figur 30 er:

$$\xi = \frac{2}{L}x - 1 \Leftrightarrow x = (\xi + 1) \frac{L}{2} \quad (3.4)$$

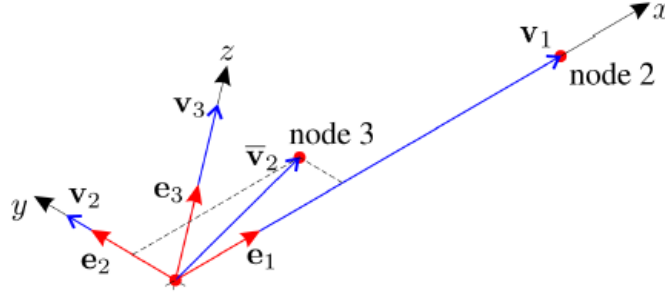
Eksempelvis kan Figur 29 betragtes. Her er 3 gausspunkter (GP), som skal transformeres til x . Gauss kvadraturen skal således kunne finde løsningen til 5. gradspolynomium. Værdierne for W og ξ er opslået i tabel og Gausspunkternes position i forhold til x , som kan ses på Figur 31, beregnes ud fra udtryk (3.4).


 Figur 31: Position af Gausspunkter i forhold til x .

Udtrykket i (3.4) kan nu bruges til at løse den lokale stivhedsmatrice ved at foretage numerisk integration. Den lokale stivhedsmatrice skal dog først transformeres og assembleres til den globale system. Dette er beskrevet i det efterfølgende.

3.1.2.2 Transformation af stivhedsmatricen

Transformation af stivhedsmatricen i MatLAB foretages ved at bestemme enhedsvektorer [16], som kan beskrive et xyz system, som kan ses på Figur 32:



Figur 32: Element med tre knuder.

Den globale elementretning og længde bestemmes ud fra knudekoordinater. Der indlægges tre knuder, som er defineret ved deres knudekoordinater og vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Det vil sige:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \bar{\mathbf{v}}_2 \quad (3.5)$$

Hvor

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Knude 3 er blot en orienteringsknude. Ud fra det ovenstående kan størrelsen på enhedsvektorerne $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ bestemmes til:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|}$$

[3x1] [3x1] [3x1]

Den lokale transformationsmatrice kan nu udtrykkes ved enhedsvektorer, dvs.:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \quad (3.8)$$

[3x3]

Opskrevet i fuldt format er $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Den globale transformationsmatrice $\mathbf{T}_g$, som anendes i MatLAB koden er derfor:

$$\begin{bmatrix}
 T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & T_{21} & T_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \text{sym.} & \cdot & \cdot & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{11} & T_{12} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{21} & T_{22}
 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

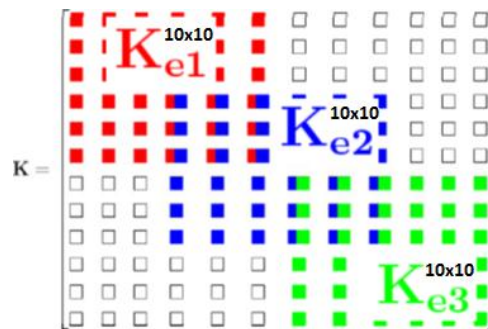
Dette er transformationsmatricen for et bjælkeelement med 5 frihedsgrader per knude, hvor aksiale frihedsgrader er negligeret. Senere udvides transformationsmatricen således at den også inkluderer hvælving. Dette gøres ved at tilføje ekstra række og kolonne ved frihedsgrader 6 og 12.

3.1.2.3 Assemblering af den globale stivhedsmatrice

Den globale stivhedsmatrice $\mathbf{K}$ beregnes vha. udtrykket i ligning(3.11), dvs.:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_g^T \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{T}_g \quad (3.11)$$

Den samlede systems stivhed er således lig med summen af de enkelte elementers stivhed. Som eksempel kan Figur 33 betragtes:



Figur 33: Assemblering af den globale stivhedsmatrice.

Her er det et system af blot tre elementer med 5 frihedsgrader per knude u, v, w, θ_z og θ_y . Det kan ses at matricen kan blive meget stor og med mange nuller omkring diagonalen for et mere kompleks system. I projektet er stivhedsmatricen ikke optimeret til at håndtere så mange nuller, og programmet kan melde "out of memory" fejl ved brug af lidt over 700 elementer. Dette er ikke et problem i projektet, men kan blive aktuelt i andre sammenhæng.

3.2 Numeriske analyser

De efterfølgende afsnit har til formål at undersøge pålideligheden og effektiviteten af den programmerede kode i MatLAB. Resultaterne sammenlignes enten med de analytiske løsninger eller tilnærmede løsninger fra kommercielle programmer Abaqus og Ansys.

3.2.1 Konvergensstudie

I dette afsnit undersøges effektivitet af den egen programmerede FEM kode i MatLAB ved at foretage konvergensstudie af tværflytningen i den frie ende som funktion af antallet af elementer. Der vælges to rektangulære profiler – en slank og en tyk (i det efterfølgende betegnet med hhv. lav- og høj profil), med følgende dimensioner:

$$L = 1000 \text{ mm}$$

$$h_1 = 1000 \text{ mm}$$

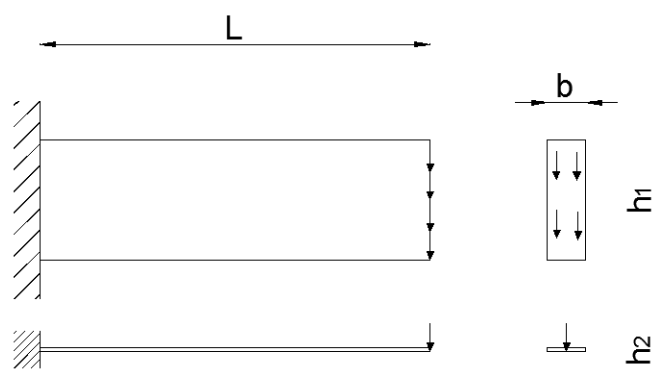
$$h_2 = 10 \text{ mm}$$

$$b = 100 \text{ mm}$$

$$F_y = -10000 \text{ N}$$

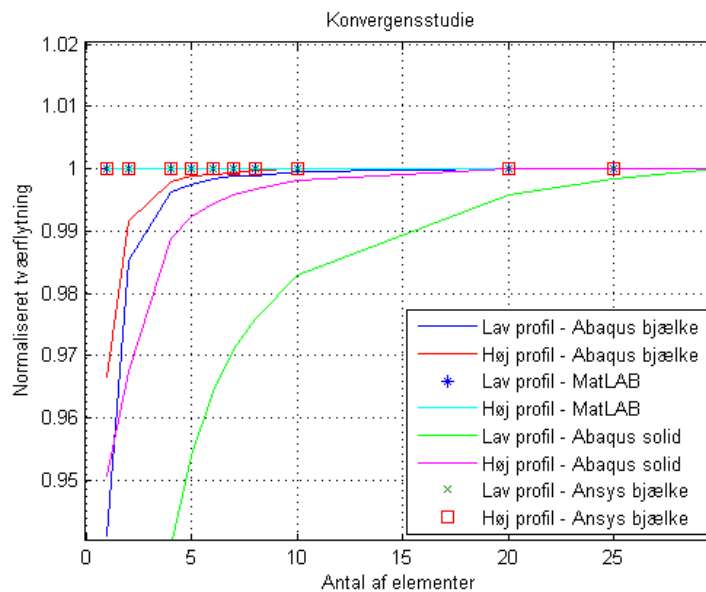
Ved at benytte denne fremgangsmåde sikres det, at det ikke bliver nødvendigt at foretage yderligere konvergensstudier ved højdeændringer, såfremt profilets højde ligger mellem 10 mm og 1000 mm.

Profilene modelleres i den programmerede FEM MatLAB kode og sammenlignes med Abaqus og Ansys. I Ansys modelleres profilet ved hjælp af element B189, som er et forskydningsfleksibelt bjælkeelement med tre knuder. I Abaqus modelleres profilet, udover med forskydningsfleksible bjælkeelementer (B33), også med anden ordens solid elementer (C3D20) med eksakt integration. Solidelementerne belastes ved at fordele lasten jævnt over tværsnittet i den frie ende. Dette kan ses på Figur 34:



Figur 34: Udkragede bjælker til konvergensstudier.

Der plottes en graf af normaliserede flytninger som funktion af antallet af elementer og resultatet kan ses på Figur 35:



Figur 35: Konvergenstudier.

Af Figur 35 ses at den udviklede kode er konvergeret ved brug af 1 element, som også er gældende for Ansys bjælke modeller. Bjælkeelementer i Abaqus konvergerer ved 20 elementer uanset hvor slank bjælken er, hvorimod solidelementerne konvergerer først ved 30 elementer når det er en slank profil og ved 20 når det er en tyk profil.

3.2.2 Verificering af MatLAB koden

Den egen programmerede kode i MatLAB skelner mellem den forskydningsfleksible bjælke teori og den tekniske bjælke teori ved forskydningsfleksibiliteten $\Phi = \frac{EI}{GA_s L^2}$ i stivhedsmatricen. Ved tyndvæggede profiler går Φ mod nul og ved tykke mod uendelig. Dette kan opnås ved at justere på forskydningsmodullet, som er defineret ved:

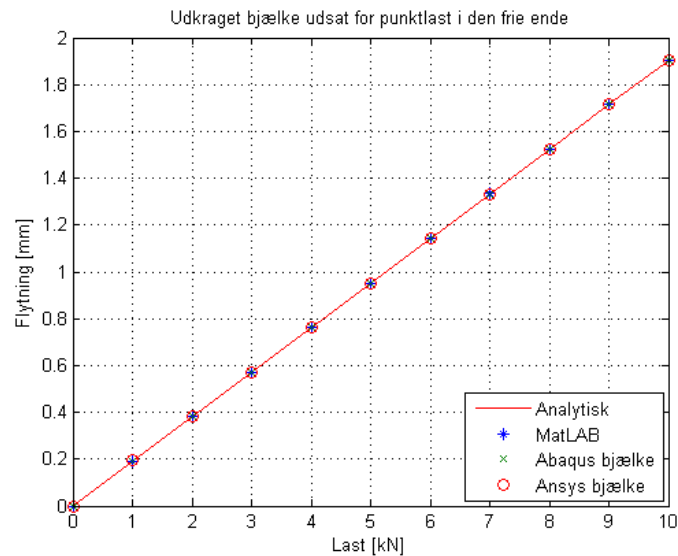
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.12)$$

Ved at anvende udtrykket i ligning (3.12) i MatLAB koden, opnås stivhedsmatricen for den forskydningsfleksible bjælke teori givet ved (2.76), idet $\Phi \neq 0$. Sættes $G = \infty$ (i MatLAB 10^{100}), som medfører at $\Phi = 0$, fås stivhedsmatricen for den tekniske bjælke teori, som er givet ved (2.77).

Dette afsnits formål er således at undersøge nøjagtigheden af den egen programmerede kode i forhold til den analytiske løsning af den tekniske bjælke teori, samt i forhold til de kommercielle programmer Ansys og ABAQUS, som anvendes i projektet. Dette gøres ved at betragte en 1000 mm lang udkraget 100x100 mm bjælke med varierende punktlast $F_y = 1000 - 10000$ N i den frie ende. Det vælges at undersøge tværflytningen af den frie ende. Den analytiske løsning til nedbøjningen er givet ved følgende ligning [17]:

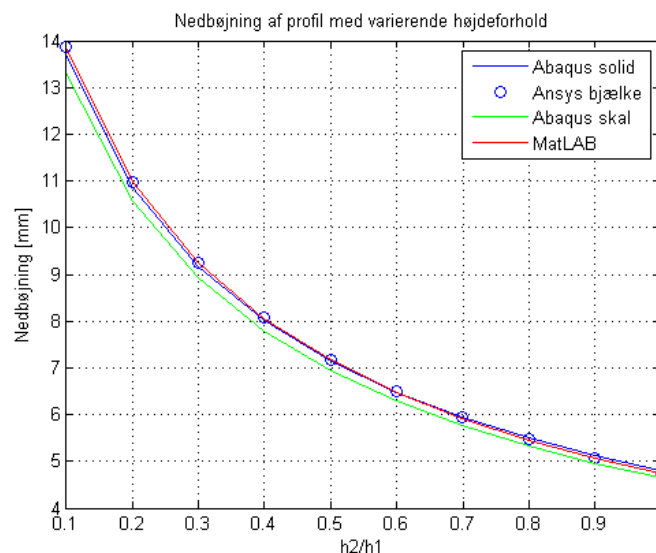
$$u = \frac{F_y L^3}{EI} \quad (3.13)$$

Resultatet er plottet på Figur 36.



Figur 36: Verifikation af MatLAB koden vha. Bernoulli elementer.

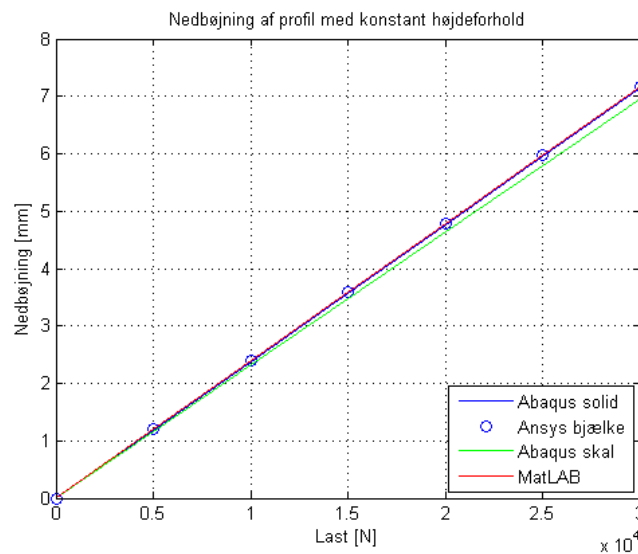
På Figur 36 kan det ses at der er ingen forskel i resultatet mellem den egen programmerede kode og den analytiske løsning. Det kan endvidere ses at der heller ikke ses forskel i resultater mellem de kommercielle programmer og den analytiske løsning. Plottes nedbøjningen af et profil med varierende tværsnitshøjde med $L = 5000 \text{ mm}$, udsat for en punktlast af størrelsesorden på 30 kN i den frie ende og indspændt i den anden ende, som funktion af højdeforholdet, fås følgende resultat:



Figur 37: Nedbøjning af profilet.

Her kan det ses at MatLAB koden, skalmodellen, solidmodellen og bjælke modellen stemmer overens med hinanden uanset højdeforholdet.

Samme tendens gør sig gældende hvis højdeforholdet holdes konstant:



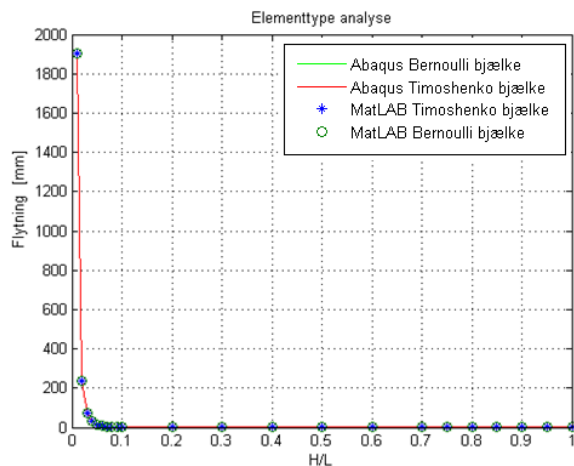
Figur 38: Nedbøjning af profilet.

Her kan det ses at MatLAB koden, skalmodellen, solidmodellen og bjælke modellen stemmer godt overens med hinanden.

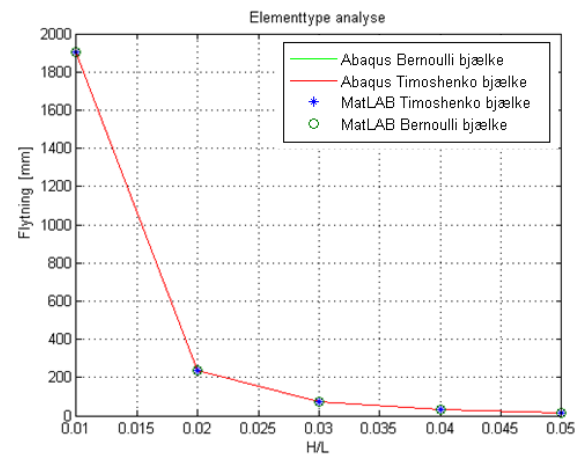
3.2.3 Undersøgelse af slankhedsforhold

I afsnit 2.1 nævnes at valget af en bjælke teori afhænger af om bjælken er slank eller tyk. Der argumenteres for at den klassiske bjælke teori skal anvendes for slanke profiler og den forskydningsfleksible teori skal anvendes ved tykke bjælker, idet der kommer bidrag fra forskydningsdeformation. Dette afsnit undersøger, udover nøjagtigheden af den egen programmerede FEM kode i MatLAB, konsekvensen af valget af den ene bjælke teori frem for den anden og hvilken betydning det kan have for dimensionering.

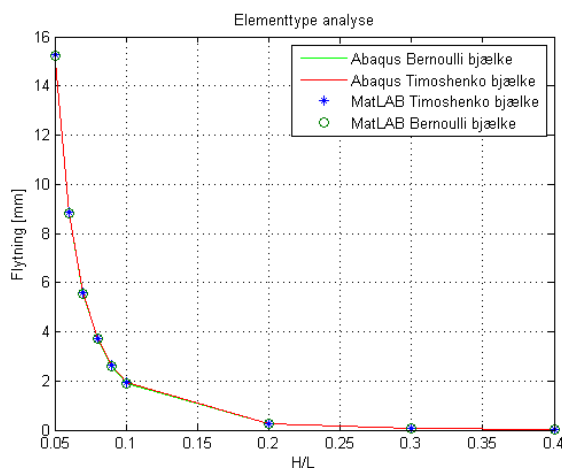
Der modelleres en udkraget bjælke med konstant længde L på 1000 mm og konstant bredde på 100 mm udsat for en punktlast F 10 000 N i den frie ende. Slankhedsforholdet justeres gradvist ved at ændre på bjælkens højde, som modelleres i den egen programmerede MatLAB kode, samt ABAQUS ved anvendelse af Bernoulli-Euler og Timoshenko bjælkeelementer. Antallet af elementer sættes til 30 jf. afsnit 3.2.1. Der plottes graffer af nedbøjningen som funktion af slankhedsforholdet og resultaterne kan se på de nedenstående figurer.



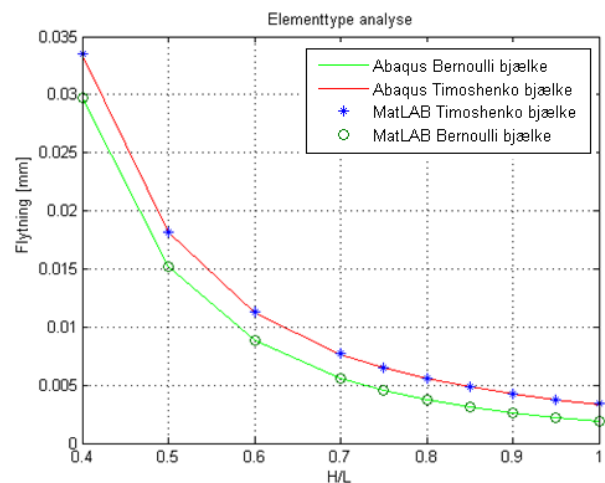
Figur 39: Analyseresultat for alle tværsnitshøjder.



Figur 40: Analyseresultat for tværsnitshøjde mellem 10-50mm

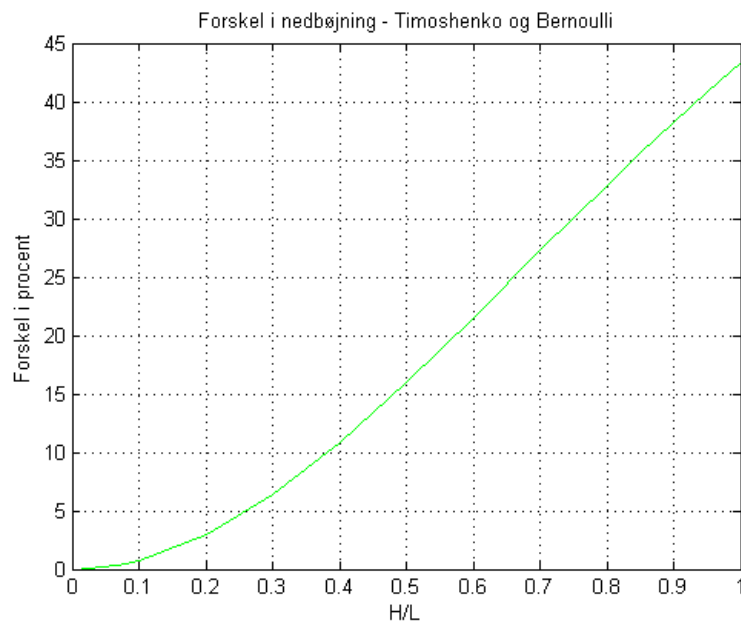


Figur 41: Analyseresultat for tværsnitshøjde mellem 50-400mm



Figur 42: Analyseresultat for tværsnitshøjde mellem 400-1000 mm

Af de ovenstående figurer kan det, som forventet, ses at nedbøjningen aftager med den øgende tværsnitstykkelser. Det kan endvidere ses af Figur 42, at den egen programmerede FEM kode i MatLAB giver næsten de samme resultater som den kommercielle kode i ABAQUS. Ligeledes bliver forskellen i nedbøjningen ved anvendelse af Bernoulli bjælkeelementer og Timoshenko bjælkeelementer større, jo tykkere bliver bjælken. Den procentvise forskel mellem disse elementer er plottet på Figur 43:

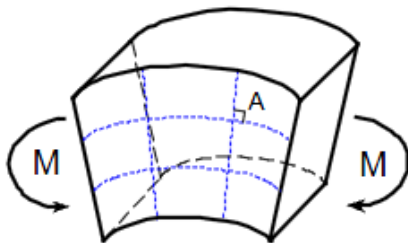


Figur 43. Forskel i nedbøjninger bestemt ved anvendelse af Timoshenko og Bernoulli

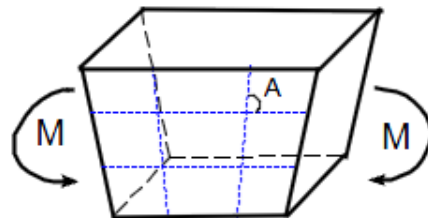
Af det ovenstående kan det for eksempel ses, at ved et slankhedsforhold 1 er forskellen mellem nedbøjninger bestemt ved anvendelse af Bernoulli elementer på 44 % i forhold til Timoshenko bjælkelementer. Dette er en betydelig afvigelse, som kan have en alvorlig konsekvens på resultaterne, hvilket understreger vigtigheden af valget af den korrekte elementtype. Ved små slankhedsforhold går forskellen mod 0, som er i overensstemmelse med at der ikke er længere bidrag fra forskydning og dermed er forskydningsfleksible bjælketheori ikke længere gældende.

3.2.4 Studie af shear locking

Finite element metoden kan forårsage numeriske problemstillinger, når et element er baseret på Timoshenkos bjælketheori [18]. Problemerne kommer til udtryk når bjælken bliver slankere, hvor der kan opstå såkaldt shear locking, som underestimerer flytningerne, dvs. konstruktionen udviser for høj stivhed. Ved en idealiseret tilfælde, vil en bjælke udsat for ren bøjning deformere, i fuld overensstemmelse med den klassiske bjælketheori, som vist på Figur 44.



Figur 44: Den virkelige deformationsfigur ved ren bøjning [18].

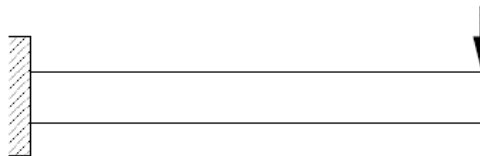


Figur 45: Deformationsfigur ved ren bøjning og fuld integration [18].

Ved fuld integration (EI), kan bjælken derimod mangle evnen til at krumme i enderne, som det er vist på Figur 45. Vinklerne A mellem de stiplede linjer er ikke længere 90 grader. Dette skyldes introduktionen af kunstige forskydningsstøjninger, som danner forskydningsdeformationer i stedet for de korrekte

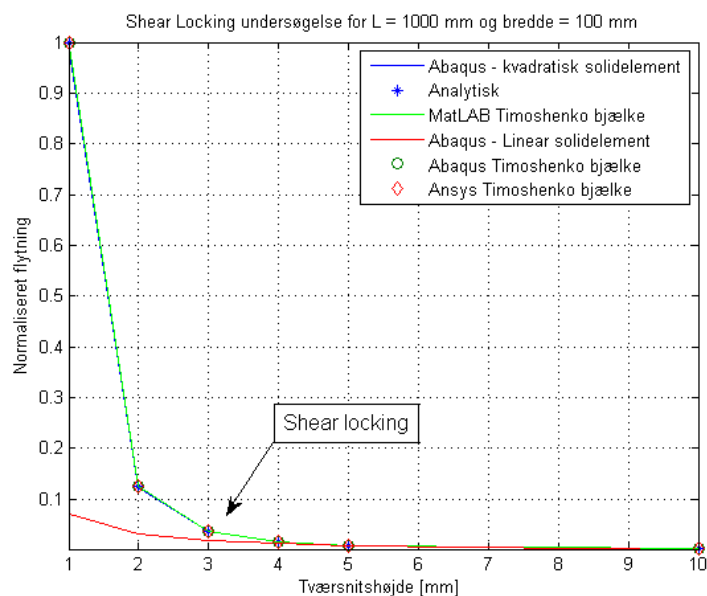
bøjningsdeformationer. Dette kan resultere i forkerte flytninger og spændinger idet forskydningsdeformationer optager energi. I de kommercielle FEM programmer kan problemet løses ved at anvende reduceret integration (RI), som fysisk set betyder at konstruktionen gøres mere fleksibel i forhold til den diskretiserede model, og matematisk set at der anvendes en lavere Gauss orden. Problemet kan også løses ved at anvende anden ordens elementer med midterknuder, som kan anvendes ved fuld integration.

Det ovenstående eftervises ved at undersøge en rektangulær udkraget bjælke med længde $L = 1000$ mm udsat for en punktlast i enden. Dette kan ses på Figur 46:



Figur 46: Udkraget bjælke udsat for punktlast.

E modulet sættes til 210000 MPa med poissons forhold på 0,3 og belastning på 10 kN. Bjælkens tværsnitskonstanter, bortset fra højden, er faste og eftersom det er i afsnit 3.2.1 vist at FEM koderne konvergerer ved 30 elementer, inddeles bjælken i 30 elementer. Højden forøges gradvist, som resulterer i tyk bjælke. Resultatet af undersøgelsen kan ses på Figur 47.



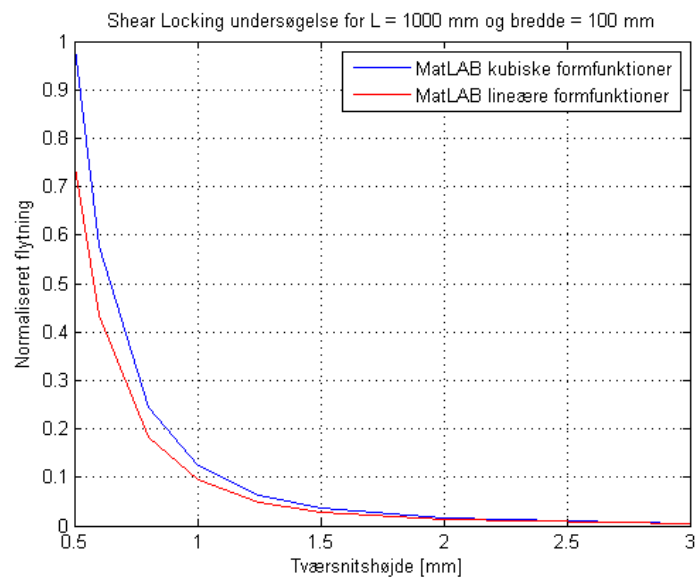
Figur 47: Shear locking undersøgelse.

Af Figur 47 kan ses at den udviklede MatLAB kode, som anvender kubiske formfunktioner, er fri for shear locking. Derimod er den lineære solidmodel følsom overfor shear locking, hvilket på figuren kan ses ved at tværflytningen bliver mindre i forholdt til både Bernoulli og Timoshenko elementer jo tyndere bjælken bliver. Dette betyder også at de lineære solidelementer slet ikke tager forskydningsbidraget i betragtning, hvorfor det kan konkluderes at solidelementer er ikke egnede til slanke profiler. Det kan endvidere ses at

Timoshenko elementer giver en større tværflytninger i forhold til Bernoulli elementer, hvilket er i overensstemmelse med at der kommer et ekstra bidrag fra forskydning.

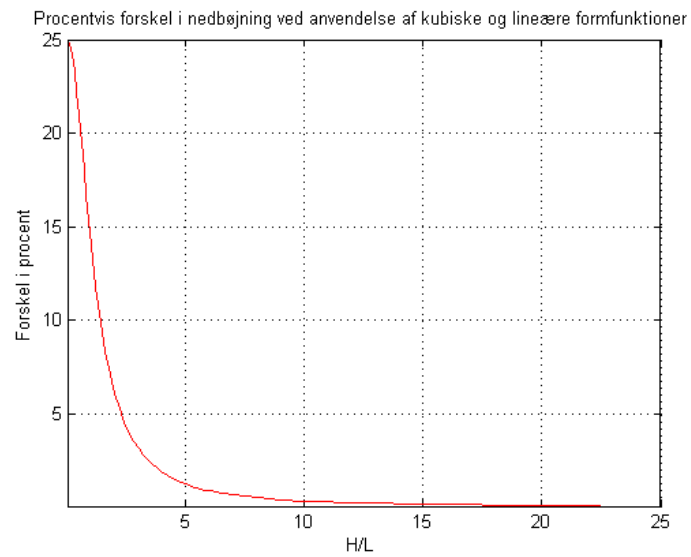
Idet Timoshenkos bjælke teori gør sig gældende for tykke bjælker, kan resultatet fra FEM programmet Abaqus, som kan ses på Figur 47, give anledning til tvivl om det er Timoshenko bjælkeelementer eller Bernoulli der er anvendt. Det viser sig at Abaqus har en indbygget funktion, som automatisk slår til den tekniske bjælke teori når slankhedsforholdet falder til en bestemt værdi. Dette er dog ikke undersøgt nærmere.

Til sammenligning kan der anvendes lineære formfunktioner i MatLAB i stedet for kubiske. Der undersøges på den samme bjælke som før og resultatet er plottet på Figur 48:



Figur 48: Sammenligning af lineære kontra kubiske formfunktioner.

Den procentvise forskel mellem disse er plottet på Figur 49:



Figur 49: Procentvis forskel i nedbøjning ved anvendelse af kubiske og lineære formfunktioner.

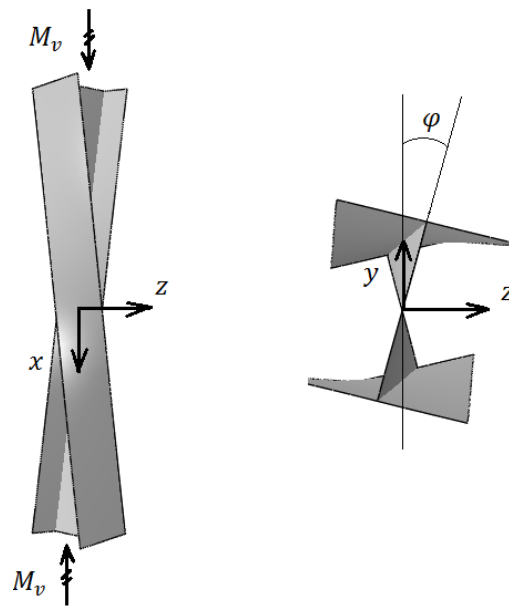
Af figurerne ovenfor kan det ses, at de lineære formfunktioner er dårlige til at beskrive nedbøjningen i forhold til kubiske formfunktioner. Det kan ses på Figur 49 at den procentvise forskel i nedbøjningen ved anvendelse af de lineære formfunktioner i forhold til kubiske formfunktioner, bliver større jo slankere bjælke. For standardprofiler med slankhedsforhold $\frac{H}{L} < 1$ er denne forskel på 20 - 25 %. Alligevel kan det konkluderes at de lineære formfunktioner i MatLAB er bedre til at beskrive nedbøjningen end lineære solidelementer i Abaqus for den pågældende profil.

4 Vridningsteori

Teorien bygger på differentielligningen af en vridningspåvirket bjælke. Her forudsættes at det ydre vridningsmoment virker i bjælkens forskydningscenter. Der forekommer to slags vridning, fri og bunden vridning. Begge optages af de indre spændinger i bjælken [19] [20] [21].

4.1 Fri vridning for I-profil

Fri vridning, også kendt som homogen vridning eller St. Venant vridning, forekommer når den betragtede bjælke kan hvælve frit, se Figur 50. Vridningsmomentet M_s optages alene af forskydningsspændinger i kroppen og flangerne.



Figur 50: Fri vridning.

Ved fri vridning er sammenhængen mellem vridningsmomentet M_s og vridningsvinklen φ omkring x-aksen udtrykt ved [19]:

$$M_s = GI_v \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.1)$$

I_v er vridningsinertimomentet, som kan tilnærmes til:

$$I_v = k \sum_{n=1}^a b t^3 \quad (4.2)$$

hvor

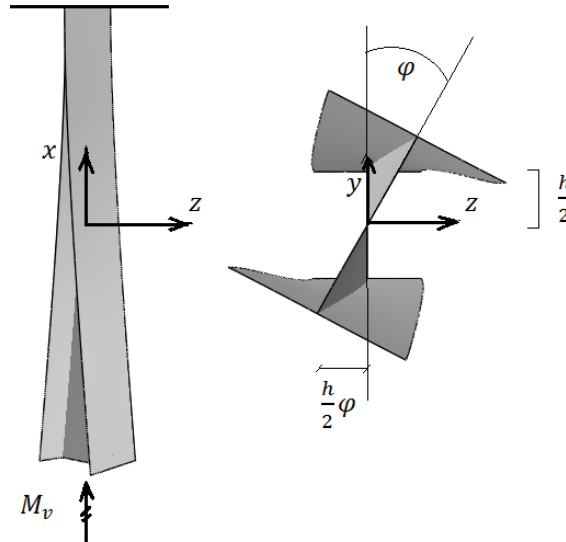
b er profilets brede

t er profilets tykkelse

k er forøgelsesfaktor, som er 1,15 for I-profiler

4.2 Bunden vridning for I-profil

Hvis en bjælke er forhindret i at hvælve, forekommer der bunden vridning. Dette sker når bjælken er indspændt i den ene ende hvor der forekommer bøjning i flangerne, når bjælken påvirkes til vridning, se Figur 51. I modsætning til den frie vridning, forbliver planer tværsnit ikke længere plane [22].



Figur 51: Bunden vridning.

Bøjningsmomentet M_f i en af flangerne bestemmes ud fra bjælkens differenttielligning, forudsat små vridningsvinkler:

$$M_f = -EI_f \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (4.3)$$

Den vandrette udbøjning z af flangerne er givet ved:

$$z = \frac{h}{2} \varphi \quad (4.4)$$

Hvor h er profilets højde. Bøjningsmomentet i flangerne er dermed:

$$M_f = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (4.5)$$

Hvor I_f er flangens inertimoment, som er $\frac{1}{12}bh^3$.

Ved at differentiere ligning (4.5) fås forskydningskraften V_f i flangen:

$$V_f = \frac{dM_f}{dx} = -EI_f \frac{d^3 z}{dx^3} = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \quad (4.6)$$

Idet forskydningskræfterne virker i hver sin retning og danner kraftpar, kan momentet ved hvælving M_ω bestemmes ved at multiplicere med højden h i ligning (4.6):

$$M_{\omega} = V_f \cdot h = -EI_f \frac{h^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3} \quad (4.7)$$

Der indføres hvælvingsinertimoment I_{ω} , som beskriver stivheden overfor hvælvning og er defineret ved:

$$I_{\omega} = I_f \frac{h^2}{2} \quad (4.8)$$

Hvælvingsinertimomentet i ligning (4.8) kan også bestemmes vha. den komplementære energi [23]. Dette er foretaget i appendiks 9.7.

Ligning (4.7) omskrives til:

$$M_{\omega} = -EI_{\omega} \frac{d^3\varphi}{dx^3} \quad (4.9)$$

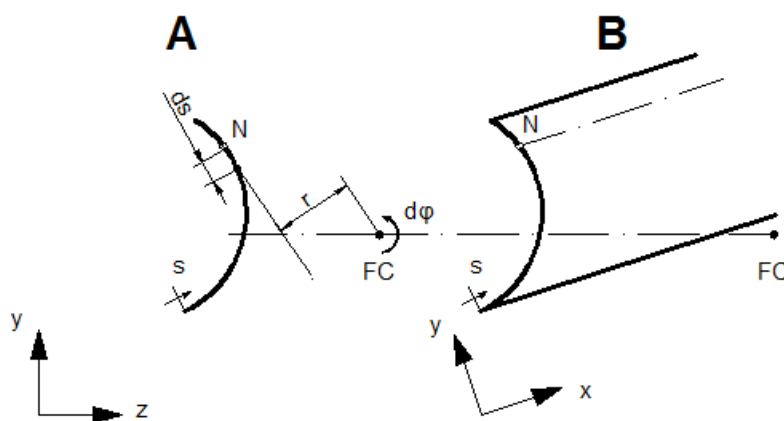
Det ydre moment optages som kombination af fri M_s og bunden M_{ω} vridning, dvs. bjælkens differenttielligning bliver:

$$M_v = M_s + M_{\omega} = GI_v \frac{d\varphi}{dx} - EI_{\omega} \frac{d^3\varphi}{dx^3} \quad (4.10)$$

Dette er således differenttielligningen for en vridningspåvirket I-profil med konstant tværsnitshøjde. En mere generel beskrivelse følger i det efterfølgende afsnit. Differentielligningen for et tværsnit med varierende højde er udledt i afsnit 4.5.

4.3 Hvælvning for et vilkårligt tyndvægget tværsnit

Den bundne vridning kan beskrives mere generelt ved at se på et vilkårligt enkeltsymmetrisk tværsnit, som kan ses på Figur 52. Ved fri vridning vil profilet dreje omkring x -aksen og ved bunden vridning vil den dreje omkring forskydningscentret, FC.



Figur 52: Tværsnit med vridning

Tværsnittet gives en vinkeldrejning, svarende til $d\varphi$, over strækningen dx . Det vil medføre at punktet N vil flytte sig stykket ds , som bestemmes ved:

$$ds = r(s)d\varphi \quad (4.11)$$

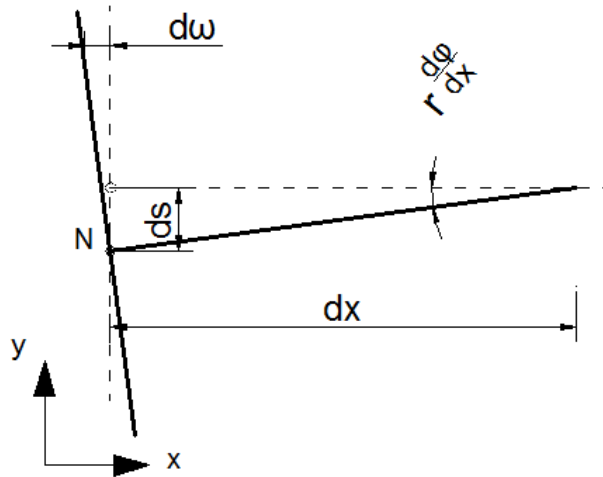
Hvor $r(s)$ er afstanden fra forskydningscenteret til profilets tangent. Det samme gør sig gældende for samtlige punkter på den stiplede linje gennem N på Figur 52b, dvs.:

$$\frac{ds}{dx} = r(s) \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.12)$$

Samtidig med dette vil tværsnittet hvælve og dermed dreje vinklen:

$$\frac{d\omega}{ds} = -r(s) \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.13)$$

Hvor omdrejningsretningen regnes positivt modsat uret. Dette betyder at de plane tværsnit ikke længere er plane. Denne samt drejning fra ligning (4.12) kan ses på Figur 53:



Figur 53: Hvælving af tværsnittet.

Ved at integrere ligning (4.13) fra udgangspunktet $s = 0$, som løber langs profilet, fås den aksiale flytning, eller hvælvingsfunktionen $\omega(s)$:

$$\omega(s) = \omega_0(s) - \frac{d\varphi}{dx} \int_0^s r(s) ds \quad (4.14)$$

Hvor $\omega_0(s)$ er flytningen i punkt $s = 0$. Ved enkelt eller dobbeltsymmetriske profiler, kan udtrykket reduceres ved at placere s i symmetrien, idet $\omega_0(s)$ bliver 0.

Som det er omtalt tidligere, hvis profilet påvirkes af vridningsmomentet M_v , og den er ikke låst i enderne og dermed kan hvælve frit, vil det betyde at der ikke dannes normalspændinger i profilet. Dette skyldes at den afledede til vridningsvinklen er konstant langs hele profilet, $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, som medfører en linear momentvariation i bjælkens længderetning. Vridningsmomentet vil blive optaget af forskydningskræfter i tværsnittet. Hvis profilet er derimod låst i den ene ende, vil en vridningsmomentpåvirkning medføre at der opstår tøjninger i profilet og dermed spændinger. Grunden Poisson effekten er der tøjninger i alle retninger, men det er normaltøjningen ε_x , der er af særlig interesse. Denne bestemmes ud fra hvælvingen:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega}{dx} = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \int_0^s r(s) ds = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \omega(s) \quad (4.15)$$

Spændingerne bestemmes ud fra Hooke's lov:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = -E \frac{d^2\varphi}{dx^2} \int_0^s r ds = -E \frac{d^2\varphi}{dx^2} \omega(s) \quad (4.16)$$

En tværsnits stivhed overfor hvælvning kan beskrives ved hvælvingsinertimomentet I_ω , som er defineret som integralet af hvælvingsfunktionen $\omega(s)$ multipliceret med tykkelsen $t(s)$ over længden l :

$$I_\omega = \int_0^l \omega^2(s) t(s) ds \quad (4.17)$$

De resulterende snitkræfter N_{res} , M_{res}^z og M_{res}^y grundet spændingerne i profilet kan beregnes vha.:

$$\begin{aligned} N_{res} &= -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \int_0^l E t(s) \omega(s) ds \\ M_{res}^z &= -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \int_0^l E t(s) \omega(s) y ds \\ M_{res}^y &= -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \int_0^l E t(s) \omega(s) z ds \end{aligned} \quad (4.18)$$

Hvælvingsfunktionen for vilkårlige tværsnit bestemmes efter følgende opskrift:

1. Hvælvingsfunktionen udregnes med polen (0,0) og $\omega(0) = 0$
2. Hvælvingsfunktionen gøres ortogonal vha.:

$$\omega(0) = \frac{-\int_{kontur} E t(s) \omega(s) ds}{\int_{kontur} E t(s) ds} \quad (4.19)$$

3. Forskydningscentrets koordinater (a_z, a_y) bestemmes vha.:

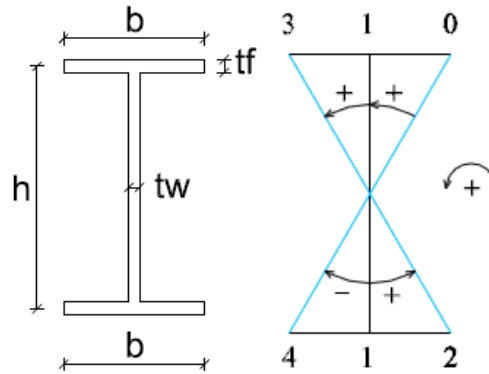
$$\begin{aligned} a_z &= z^{P_1} - \frac{\int_{kontur} E t(s) \omega(s) y ds}{\int_{kontur} E t(s) y^2 ds} \\ a_y &= y^{P_1} + \frac{\int_{kontur} E t(s) \omega(s) z ds}{\int_{kontur} E t(s) z^2 ds} \end{aligned} \quad (4.20)$$

4. Hvælvingsfunktionen udregnes med polen i forskydningscentret og $\omega(0) = 0$.
5. Hvælvingsfunktionen gøres ortogonal på normalkraften vha. formel (4.19).

I tilfælde af symmetriske I-profiler, er beregningerne enklere idet forskydningscentret ligger i symmetrien og hvælvingsfunktionen bestemmes fra trin 4. Dette vises i det efterfølgende afsnit.

4.3.1 Hvælvingsfunktionen for et I-profil

Hvælvingsfunktionen bestemmes på baggrund af de fem trin, som er nævnt i det tidligere afsnit med følgende betegnelser:



Figur 54: I-Profil, dens dimensionsbetegnelser og fortegnsregning.

Da forskydningscentret er sammenfældende med tværsnittets tyngdepunkt, udregnes hvælvingsfunktionen med pol i forskydningscentret hvor $\omega_{01} = 0$, dvs. fra trin 4. Indeks 01 betegner position 0 og trinnummer 1.

$$\omega_{01} = 0$$

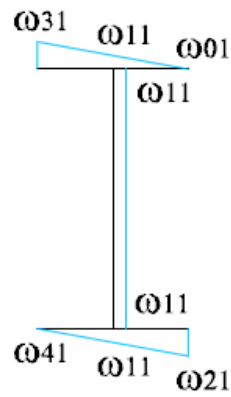
$$\omega_{11} = \omega_{01} + \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$$

$$\omega_{21} = \omega_{11} + \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\omega_{31} = \omega_{11} + \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\omega_{41} = \omega_{11} - \frac{b}{2} \frac{h}{2} = 0$$

Dette kan ses på Figur 55:

Figur 55: Hvælvingsfunktion ved $\omega_{01} = 0$.

Hvælvingsfunktionen gøres ortogonal på normalkraften ved at bestemme ω_{02} :

$$\omega_{02} = \frac{\frac{b}{2} \omega_{31} t_f + \frac{b}{2} \omega_{21} t_f + h \cdot \omega_{11} t_w}{2bt_f + ht_w} = -\frac{bh}{4}$$

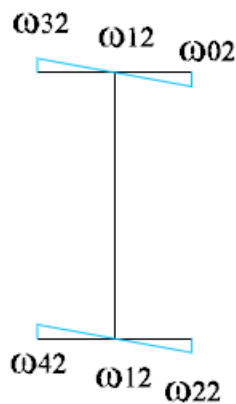
$$\omega_{12} = \omega_{02} + \frac{b}{2} \frac{h}{2} = 0$$

$$\omega_{22} = \omega_{12} + \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$$

$$\omega_{32} = \omega_{12} + \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$$

$$\omega_{42} = \omega_{12} - \frac{b}{2} \frac{h}{2} = -\frac{bh}{4}$$

Den endelige hvælvingsfunktion er afbildet på Figur 56:



Figur 56: Hvælvingsfunktion for I-profil.

4.4 Elementformuleringen for et tyndvægget tværsnit

Til opstilling af stivhedsmatricen for en vridningspåvirket bjælke kan der benyttes to fremgangsmåder, den ene er baseret på den styrende differentielligning hvor løsningen er eksakt. Den anden metode er ved hjælp af det virtuelle arbejdes princip [24].

En to knudet vridningspåvirket bjælke har, jf. afsnit 4.2, følgende differentielligning:

$$M_v = M_s + M_\omega = GI_v \frac{d\varphi}{dx} - EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dx^3} = GI_v \varphi' + EI_\omega \varphi''' \quad (4.21)$$

Stivhedsrelationen for bjælken med længde l , forskydningsmodul G , elasticitetsmodul E , vridningsinertimoment I_v og hvælvingsinertimoment I_ω bestemmes ved at løse ligning (4.21) og indsætte randbetingelser. Dette er dog ikke vist her. Stivhedsmatricen er bestemt i undervisningsnotatet [24] og relationen er:

$$\frac{EI_\omega}{l^3} \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ & K^{22} & K^{23} & K^{24} \\ & & K^{33} & K^{34} \\ \text{sym.} & & & K^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ B_1 \\ M_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Hvor

φ_i og φ_i' er vinkeldrejninger og de afledede

M_1 og M_2 er den vridende moment i hhv. knude 1 og knude 2

B_1 og B_2 er bi-momentet i hhv. knude 1 og knude 2

$$K^{11} = K^{33} = -K^{13} = A \cdot kl \cdot \sinh(kl)$$

$$K^{22} = K^{44} = A \cdot \left(\cosh(kl) - \frac{\sinh(kl)}{kl} \right) \cdot l^2$$

$$K^{12} = K^{14} = -K^{23} = -K^{34} = A \cdot (\cosh(kl) - 1) \cdot l$$

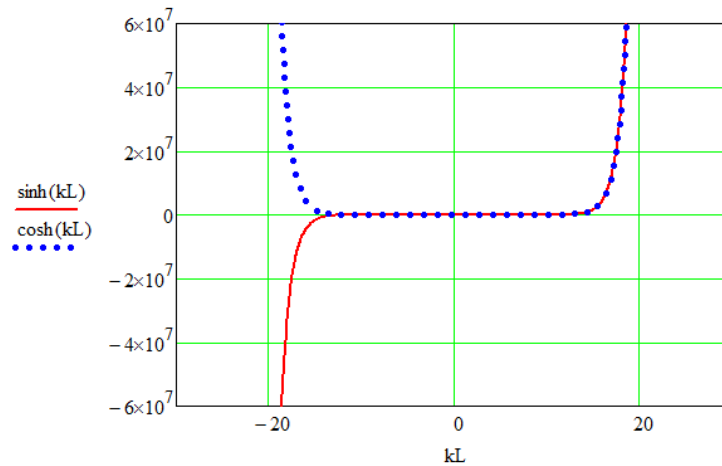
$$K^{24} = A \cdot \left(\frac{\sinh(kl)}{kl} - 1 \right) \cdot l^2$$

$$A = \frac{(kl)^2}{D}$$

$$D = 2 \cdot (1 - \cosh(kl)) + kl \cdot \cosh(kl)$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_v}{EI_\omega}}$$

Ulempen i udtryk (4.22) er at der indgår hyperbolske funktioner, som medfører numeriske problemer for små eller store kl værdier, f. eks en meget lang/kort bjælke. Problemet kan illustreres ved at optegne graf af $\sinh$ og $\cosh$ som funktion af kl . Dette kan ses på Figur 57:



Figur 57. Plot af hyperbolske funktioner.

Af figuren kan ses at det kun er værdier, som ligger imellem de to punkterede linjer, som er anvendelige, da alt udover dem går mod uendelig. I projektet ønskes dog at programmere en FEM kode, som er uafhængig af bjælkens tværsnitsegenskaber som kl . For at opnå dette, anvendes der tilnærmede formfunktioner fra afsnit 2.7.

For at gøre det mere overskuelig, deles stivhedsmatricen i to dele, den ene del fra fri vridning og den anden fra hvælvingsvridning hvorefter bliver disse summeret op. Stivhedsmatricen bestemmes på samme måde som i afsnit 2.4.1. Formfunktioner for den forskydningsfleksible bjælke er angivet i ligninger (2.80) og (2.81) Tøjningsinterpolationsmatricen for den fri vridning $\mathbf{B}_f$ er:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{dN_{f_1}}{dx} & \frac{dN_{f_2}}{dx} & \frac{dN_{f_3}}{dx} & \frac{dN_{f_4}}{dx} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Her bemærkes det at der ikke indgår forskydningsfleksibilitet Φ i formfunktionerne for den fri vridning, dvs.: $\Phi = 0$. Grunden til det er at ved den fri vridning optages momentet alene ved forskydningspændinger. Forskydningsbidraget skal medregnes når der er tale om bøjning.

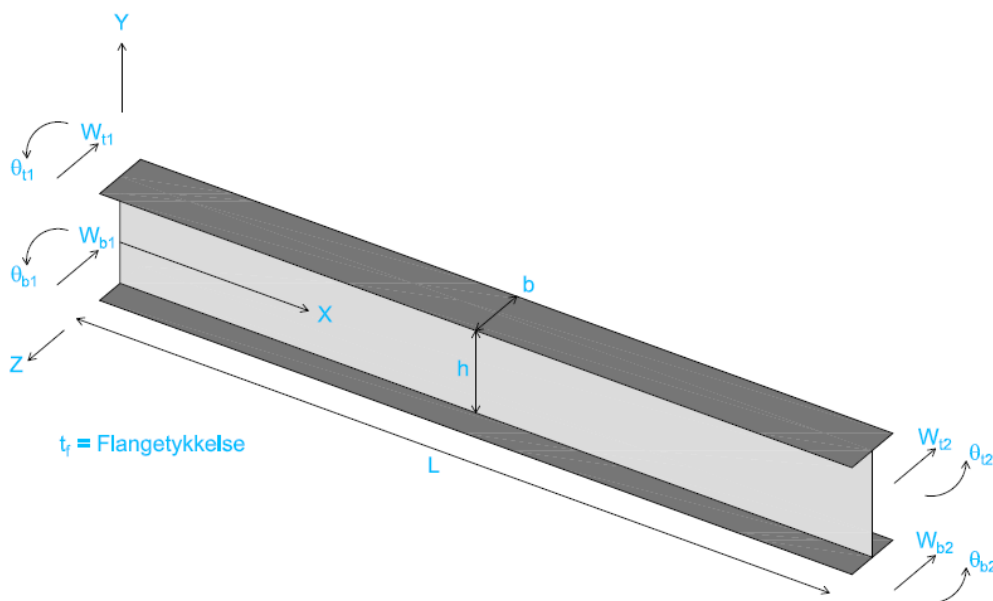
Den konstitutive lov for den fri vridning er udtrykt gennem D_f :

$$D_f = GI_v \quad (4.24)$$

Ved anvendelse af ligning (2.43) fås stivhedsmatricen for den fri vridning $\mathbf{k}_f$:

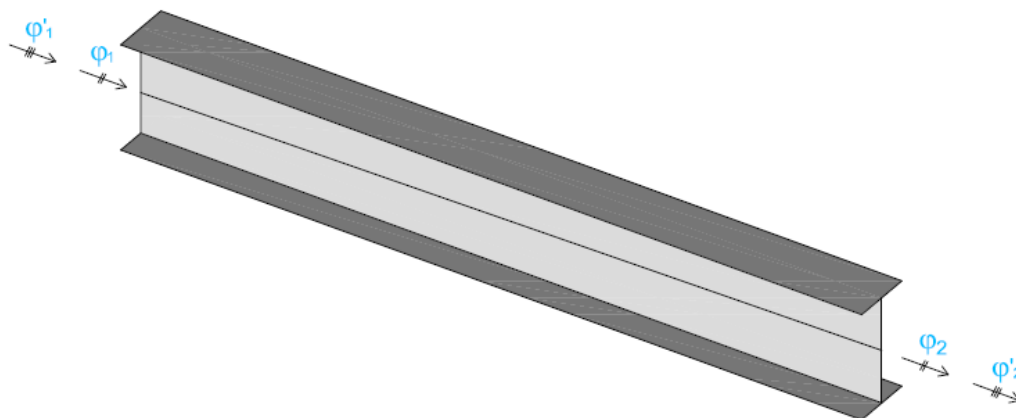
$$\mathbf{k}_f = \frac{GI_v}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Hvælvingsbidraget til stivhedsmatricen bestemmes ved at tage udgangspunkt i I-profilets flanger. Disse kan opfattes som to separate bøjningspåvirkede bjælke, som er adskilt af kroppen med højde h . Til hvert bjælkeelement hører 4 frihedsgrader, dvs. to flytninger og to rotationer. Disse kan ses på Figur 58:



Figur 58: Bjælkeelement med 8 frihedsgrader.

Sammenlagt giver det et element med 8 frihedsgrader. Ved statisk kondensering kan disse 8 frihedsgrader beskrives ved 4 frihedsgrader - to vinkeldrejninger og deres afledede. Dette kan ses på Figur 59:



Figur 59: Kondenseret bjælkeelement med fire frihedsgrader.

Relationen mellem frihedsgraderne $\mathbf{u}_8$ og reaktioner $\mathbf{r}_8$ for bjælkeelementet på Figur 58 er givet ved:

$$\mathbf{k}_8 \mathbf{u}_8 = \mathbf{r}_8 \quad (4.26)$$

Relationer mellem frihedsgraderne for de to bjælkeelementer er givet ved følgende udtryk:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_8 &= \mathbf{T}_{u1} \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_4 &= \mathbf{T}_{u2} \mathbf{u}_8 \end{aligned} \quad (4.27)$$

For kræfter er relationer givet ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_8 &= \mathbf{T}_{r1} \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_4 &= \mathbf{T}_{r2} \mathbf{r}_8 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hvor $\mathbf{T}$ er transformationsmatricer, som er opstillet i appendiks 9.8.

Ved transformation af stivhedsrelationen (4.26) fås:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_8 \mathbf{u}_8 &= \mathbf{r}_8 \\ \mathbf{k}_8 (\mathbf{T}_{u1} \mathbf{u}_4) &= (\mathbf{T}_{r1} \mathbf{r}_4) \\ \mathbf{T}_{r2} \mathbf{k}_8 \mathbf{T}_{u1} \mathbf{u}_4 &= \mathbf{T}_{r2} \mathbf{T}_{r1} \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{k}_4 \mathbf{u}_4 &= \mathbf{r}_4 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Tøjningsinterpolationsmatricen for hvælsvingsvridning $\mathbf{B}_\omega$ er:

$$\mathbf{B}_\omega = \begin{bmatrix} \frac{dN_{d1}}{dx} & \frac{dN_{d2}}{dx} & \frac{dN_{d3}}{dx} & \frac{dN_{d4}}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dN_{f1}}{dx} - \frac{dN_{d1}}{dx} & \frac{dN_{f2}}{dx} - \frac{dN_{d2}}{dx} & \frac{dN_{f3}}{dx} - \frac{dN_{d3}}{dx} & \frac{dN_{f4}}{dx} - \frac{dN_{d4}}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{d1}}{dx} & \frac{dN_{d2}}{dx} & \frac{dN_{d3}}{dx} & \frac{dN_{d4}}{dx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{f1}}{dx} - \frac{dN_{d1}}{dx} & \frac{dN_{f2}}{dx} - \frac{dN_{d2}}{dx} & \frac{dN_{f3}}{dx} - \frac{dN_{d3}}{dx} & \frac{dN_{f4}}{dx} - \frac{dN_{d4}}{dx} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Den konstitutive lov for hvælsvingsvridning $\mathbf{D}_f$ er:

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} EI_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GA_s \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Ved anvendelse af ligning (2.43) fås en [8x8] matrice:

$$\begin{array}{c}
 \text{Topflangen} \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 \frac{12}{(1+\Phi)L^3} & \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & -\frac{12}{(1+\Phi)L^3} & \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(4+\Phi)}{(1+\Phi)L} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(2-\Phi)}{(1+\Phi)L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{12}{(1+\Phi)L^3} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{12}{(1+\Phi)L^3} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(2-\Phi)}{(1+\Phi)L} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(4+\Phi)}{(1+\Phi)L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{(1+\Phi)L^3} & \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & -\frac{12}{(1+\Phi)L^3} & \frac{6}{(1+\Phi)L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(4+\Phi)}{(1+\Phi)L} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(2-\Phi)}{(1+\Phi)L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{(1+\Phi)L^3} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{12}{(1+\Phi)L^3} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(2-\Phi)}{(1+\Phi)L} & -\frac{6}{(1+\Phi)L^2} & \frac{(4+\Phi)}{(1+\Phi)L} \\
 \hline
 & & & & \text{Bundflangen}
 \end{array} \right] \cdot EI_f = \begin{bmatrix} w_{t1} \\ \theta_{yt1} \\ w_{t2} \\ \theta_{yt2} \\ w_{b1} \\ \theta_{yb1} \\ w_{b2} \\ \theta_{yb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{zt1} \\ M_{yt1} \\ F_{zt2} \\ M_{yt2} \\ F_{zb1} \\ M_{yb1} \\ F_{zb2} \\ M_{yb2} \end{bmatrix} \quad (4.32)
 \end{array}$$

Hvor forskydningsfleksibiliteten Φ i flangerne er givet ved:

$$\Phi = \frac{12EI_f}{GA_s L^2} = \frac{12E \overbrace{\left(\frac{1}{12} t_f b_f^3 \right)}^{I_f}}{G \underbrace{\left(\frac{5}{6} t_f b_f \right)}_{A_s} L^2} \quad (4.33)$$

Ved statisk kondensering, dvs. $\mathbf{k}_4 = \mathbf{T}_{r2} \mathbf{k}_8 \mathbf{T}_{u1}$, af ligning (4.32) fås stivhedsrelationen udtrykt ved frihedsgraderne φ og φ' :

$$\underbrace{\frac{EI_\omega}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} & -\frac{12}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} \\ \frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{(4+\Phi_\omega)L^2}{(1+\Phi_\omega)} & -\frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{(2-\Phi_\omega)L^2}{(1+\Phi_\omega)} \\ -\frac{12}{(1+\Phi_\omega)} & -\frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{12}{(1+\Phi_\omega)} & -\frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} \\ \frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{(2-\Phi_\omega)L^2}{(1+\Phi_\omega)} & -\frac{6L}{(1+\Phi_\omega)} & \frac{(4+\Phi_\omega)L^2}{(1+\Phi_\omega)} \end{bmatrix}}_{\text{Kondenseret 4x4 stivhedsmatrice}} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{v1} \\ B_1 \\ M_{v2} \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Hvor Φ_ω er forskydningsfleksibiliteten og beregnes ved:

$$\Phi_{\omega} = \frac{6 E b_f^3 t_f}{5 G b t_f L^2} = \frac{E b_f^3 t_f}{G \frac{5}{6} A_f L^2} \left(\frac{\frac{1}{2} h^2}{\frac{1}{2} h^2} \right) = \frac{12 E I_{\omega}}{G L^2 A_{\omega}} \quad (4.35)$$

Hvor I_{ω} er hvælvsinertmomentet som er givet i ligning (4.8) og beregnet i appendiks 9.7 og A_{ω} er stivheden over for hvælving, som er bestemt i appendiks 9.7. Stivhedsmatricen for den forskydningsfleksible bjælke indeholder således bidrag fra fri- og bunden vridning og er derfor:

$$\mathbf{k} = \frac{EI_{\omega}}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} \\ \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(4+\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(2-\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} \\ -\frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} \\ \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(2-\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(4+\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} \end{bmatrix} + \frac{GI_v}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Da stivhedsmatricen er nu kendt, kan frihedsgraderne $\mathbf{U}$ i (4.37) ligning bestemmes:

$$\left\{ \frac{EI_{\omega}}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} \\ \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(4+\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(2-\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} \\ -\frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{12}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} \\ \frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(2-\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} & -\frac{6L}{(1+\Phi_{\omega})} & \frac{(4+\Phi_{\omega})L^2}{(1+\Phi_{\omega})} \end{bmatrix} + \frac{GI_v}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{v1} \\ B_1 \\ M_{v2} \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{K}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\mathbf{U}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\mathbf{R}}$

Hvor B er bimomentet givet ved:

$$B = \frac{M_v h}{2} \quad (4.38)$$

φ og φ' er vridningsvinklen og dens afledede

Med kendskab til vridningsvinklen φ og hvælvsfunktionen fra afsnit 4.3.1, kan hælvingen i flangerne bestemmes ud fra følgende udtryk fra [2]:

$$u = \omega(x, y) \varphi' = \frac{bh}{4} \varphi' \quad (4.39)$$

Den samlede stivhedsmatrice for en 3 dimensional forskydningsfleksibel bjælke, som tager hensyn til hvælving, vil således være 14x14, dvs. 3 flytningsfrihedsgrader, 3 drejningsfrihedsgrader i hhv. x, y og z-retninger og en hvælvsfrihedsgrad i x-retning per knude:

$$\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{12EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^3} + \frac{6GI_v}{5L} & 0 & 0 & \frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} + \frac{1}{10}GI_v & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^3} - \frac{6GI_v}{5L} & 0 & 0 & \frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} + \frac{1}{10}GI_v \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & \frac{(2-\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} + \frac{1}{10}GI_v & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_\omega)EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L} + \frac{2}{15}LGI_v & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} + \frac{1}{10}GI_v & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_\omega)EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L} - \frac{1}{10}LGI_v \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^3} - \frac{6GI_v}{5L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} - \frac{1}{10}GI_v & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^3} + \frac{6GI_v}{5L} & 0 & -\frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} - \frac{1}{10}GI_v & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & \frac{(2-\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2} & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} + \frac{1}{10}GI_v & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_\omega)EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L} - \frac{1}{30}LGI_v & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L^2} - \frac{1}{10}GI_v & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_\omega)EI_\omega}{(1+\Phi_\omega)L} + \frac{2}{15}LGI_v
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\
v_1 \\
w_1 \\
\theta_{x1} \\
\theta_{y1} \\
\theta_{z1} \\
\varphi_1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_{x1} \\
F_{y1} \\
F_{z1} \\
M_{x1} \\
M_{y1} \\
M_{z1} \\
B_1
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
u_2 \\
v_2 \\
w_2 \\
\theta_{x2} \\
\theta_{y2} \\
\theta_{z2} \\
\varphi_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
F_{x2} \\
F_{y2} \\
F_{z2} \\
M_{x2} \\
M_{y2} \\
M_{z2} \\
B_2
\end{bmatrix}$$

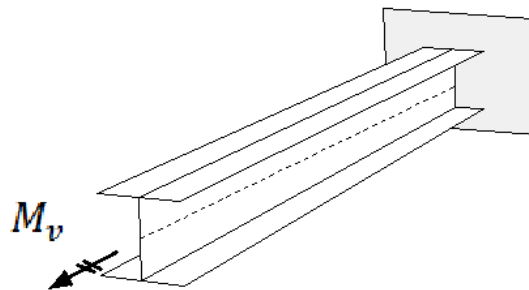
Det skal eftervises om den beregnede stivhedsmatrice kan anvendes til at beskrive vridningspåvirkede profiler. Dette gøres i det efterfølgende afsnit.

4.4.1 Numeriske analyser

I dette afsnit undersøges MatLAB kodens evne til at håndtere vridning for et profil med konstant tværsnitshøjde, idet koden er blevet udvidet med stivhedsmatricen i ligning (4.36). Resultaterne sammenlignes med Abaqus og Ansys.

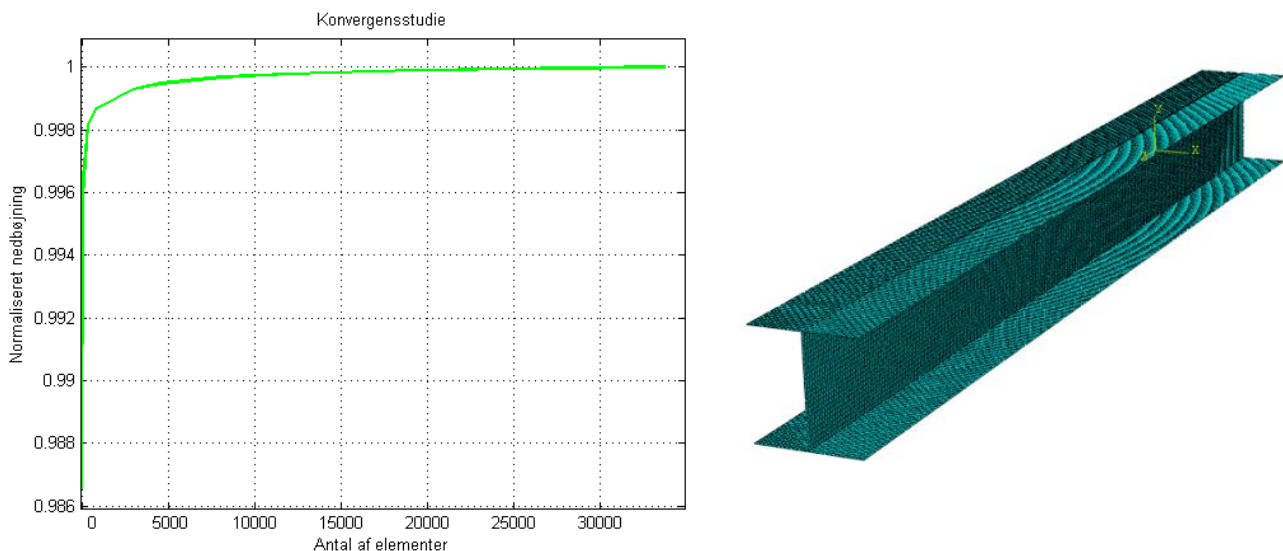
4.4.1.1 I-profil med konstant højde

Der skal undersøges vinkeldrejningen af et vridningspåvirket I-profil modelleret i MatLAB og Abaqus. I MatLAB anvendes både stivhedsmatricen, som er bestemt vha. de tilnærmede formfunktioner, ligning (4.36) og stivhedsmatricen som er bestemt vha. hyperbolske formfunktioner, ligning (4.22). Profilet har længden $L = 1000$ mm, konstant højde $h = 100$ mm, tykkelsen $t = 10$ mm og er indspændt i den ene ende. Der er påsat et vridningsmoment i den frie ende. Dette kan ses på Figur 60:



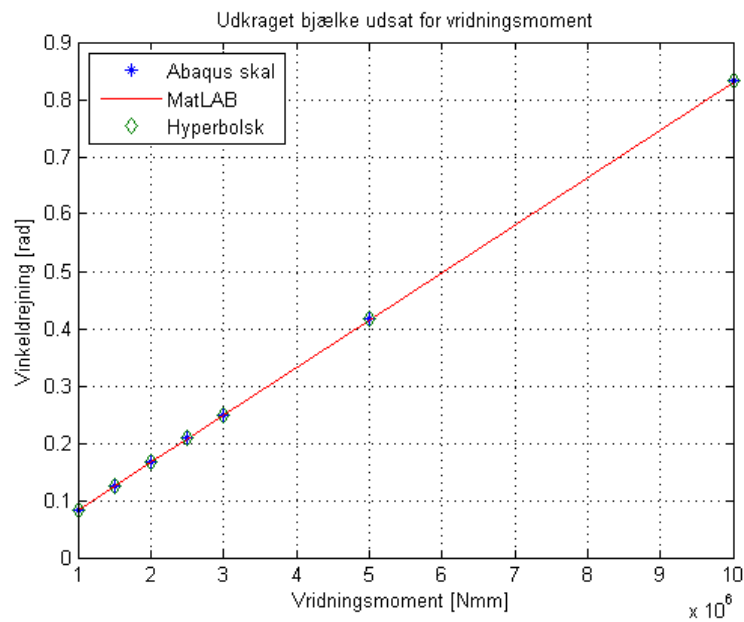
Figur 60: Vridningspåvirket I-profil.

Vinkeldrejningen plottes som funktion af vridningsmomentet og sammenlignes med 4 knudede, lineære skalelemeter (S4R) i FEM programmet Abaqus. Et mesh af det og konvergensstudiet kan ses på Figur 61.



Figur 61: Konvergensstudie og FEM mesh.

Resultatet af analysen ses på Figur 62:

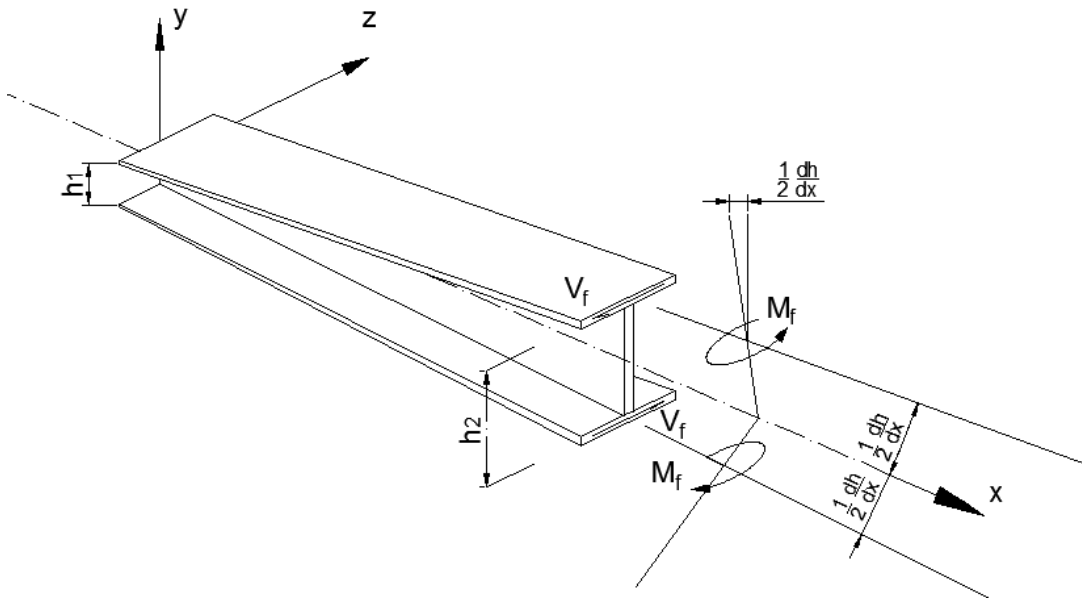


Figur 62: Undersøgelse af vinkeldrejning.

Af figuren kan det ses at resultatet er tilnærmelsesvis éns for alle tre modeller, hvilket viser at den programmerede kode i MatLAB er god til at håndtere vridningspåvirkede profiler med konstant tværsnitshøjde. Grunden til at der ikke opstår numerisk problem ved anvendelse af de hyperbolske formfunktioner er at $kl = 3,497$ som ligger inden for graferne på Figur 57. Det skal nu undersøges om det samme er gældende for profiler med varierende højde. Først skal en analytisk løsning til en bjælke med varierende tværsnit opstilles.

4.5 Vridningsteori for bjælker med varierende tværsnit

Udledningen af differentielligningen for et tværsnit med varierende højde tager udgangspunkt i Figur 63 samt [25] og [26]:



Figur 63: Et udfliget bjælkeelement.

Deformationen af flangen u kan beskrives ved vridningsvinklen φ analogt til ligning (4.4):

$$z = \frac{h}{2} \varphi \quad (4.40)$$

Bøjningsmomentet M_f og forskydningskraften V_f i flangerne er bestemt i afsnit 4.2 til:

$$M_f = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (4.41)$$

$$V_f = \frac{dM_f}{dx} = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \quad (4.42)$$

Ved at gange højden h på ligning (4.42) fås vridningsmomentet M_v . Da flangerne har en hældning på $\frac{1}{2} \frac{dh}{dx}$ i forhold til bjælkeaksen, kommer der et ekstra bidrag til vridningsmomentet M_v , som er tidligere bestemt til:

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dx} - EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \quad (4.43)$$

Leddene $EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dx^3}$ forekommer grunden forskydningskræfter i flangen, som er forårsaget af bøjningsmomentet M_f , givet ved:

$$M_f = -\frac{EI_y h}{4} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{EI_y}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{h}{2} \varphi \right) \quad (4.44)$$

Det er således udtrykket i ligning (4.44), som skal korrigeres for den varierende tværsnitshøjde. Det samlede vridningsmoment er derfor:

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dx} + h \frac{dM_f}{dx} - M_f \frac{dh}{dx} \quad (4.45)$$

Eller når bidraget fra begge flanger tages i betragtning:

$$M_v = GI_v \frac{d\varphi}{dx} + h \frac{dM_f}{dx} - 2M_f \frac{dh}{dx} \quad (4.46)$$

Udtrykket for flangemoment i ligning (4.44) omskrives til fuld form:

$$M_f = -\frac{EI_f}{2} \left(\frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{dh}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2h}{dx^2} \varphi \right) \quad (4.47)$$

Eller

$$hM_f = -\left(EI_\omega \frac{d^2\varphi}{dx^2} + EI_{\omega\psi} \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (4.48)$$

Hvor

$$I_{\omega\psi} = \frac{2}{h} \frac{dh}{dx} I_\omega \quad (4.49)$$

Hvis der antages små vinkeldrejninger, forsvinder leddet $\frac{dh}{dx} \frac{d\varphi}{dx}$ og ligning (4.48) bliver:

$$2M_f \frac{dh}{dx} = -\left(EI_{\omega\psi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + EI_\psi \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (4.50)$$

Hvor

$$I_\psi = \left(\frac{2}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 I_\omega \quad (4.51)$$

Indsættes ligninger (4.48) og (4.50) i (4.46) fås differentielligningen for vridningspåvirket I-profil med varierende tværsnit:

$$M_v = \left[GI_v + \frac{3}{2} \lambda^2 EI_\omega - \lambda \frac{d}{dx} (EI_\omega) \right] \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{dx} (EI_\omega) \frac{d^2\varphi}{dx^2} - EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dx^3} \quad (4.52)$$

Hvor

$$\lambda = \frac{2}{h} \frac{dh}{dx} \quad (4.53)$$

Randbetingelserne for en indspændt bjælke er givet ved:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi'(0) = 0 \\ \frac{d}{dx}(EI_{\omega}) \frac{d^2\varphi}{dx^2} - EI_{\omega} \frac{d^3\varphi}{dx^3} &= 0\end{aligned}\quad (4.54)$$

Differentielligningen i ligning (4.52) med randbetingelser i ligning (4.54) er løst i [26] og vridningsvinklen i den frie ende, $x = L$, er bestemt til:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{M_v L}{GI_v + EI_f \Delta h^2} \cdot \dots \\ &\left\{ 1 + \frac{m_2 (t^{m_1} - 1) [(m_2 + 1)t^{m_2} - 2t] + m_1 (t^{m_2} - 1) [-(m_1 + 1)t^{m_1} - 2t]}{m_1 m_2 [(m_1 + 1)t^{m_1} - (m_2 + 1)t^{m_2}]} (t - 1) \right\}\end{aligned}\quad (4.55)$$

Hvor

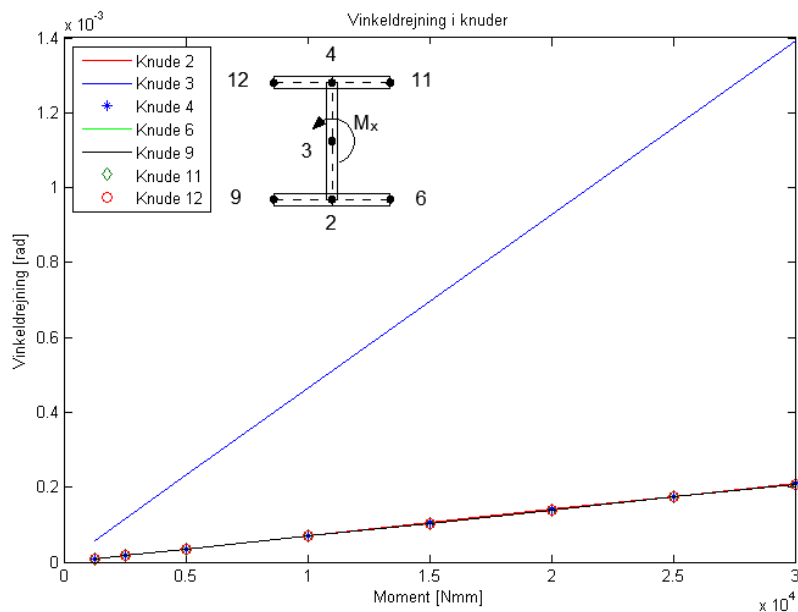
$$\begin{aligned}m_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 2 \frac{GI_v}{EI_f \Delta h^2}} \\ t &= \frac{h_2}{h_1} \\ \Delta h &= \frac{h_2 - h_1}{L}\end{aligned}\quad (4.56)$$

Af ligning (4.56) kan det ses at der tages en gennemsnitlig værdi af højdeændringen per længdeenhed og dermed en gennemsnitlig værdi af vridningsinertimomentet I_v . I studiet foretaget af [25] har dette forhold medført at vinkeldrejningen for den pågældende bjælke blev underestimeret med 7 % i forhold til FEM. Nogenlunde samme tendens kan forventes ved sammenligning med FEM koden i MatLAB.

4.5.1.1 Forundersøgelser

Aflæsningspunkt

I MatLAB koden er det ikke muligt at vælge et bestemt aflæsningspunkt i tværsnittet, hvor nedbøjningen eller drejningen kan aflæses. I et FEM program er der f. eks mulighed for at aflæse vinkeldrejningen i et bestemt punkt på flangen eller kroppen, hvorimod MatLAB angiver én værdi, som det antages at befinde sig på bjælkens nullinje. Derfor vil den rigtige måde være at aflæse vinkeldrejningen i Abaqus eller Ansys i nullinjen. Dette viser sig umiddelbart ikke at være korrekt. Problemet kan vises ved at påsætte et vridende moment i en bjælkes nullinje modelleret i Abaqus og aflæse vinkeldrejningen i samme punkt. Dette er illustreret på Figur 64:

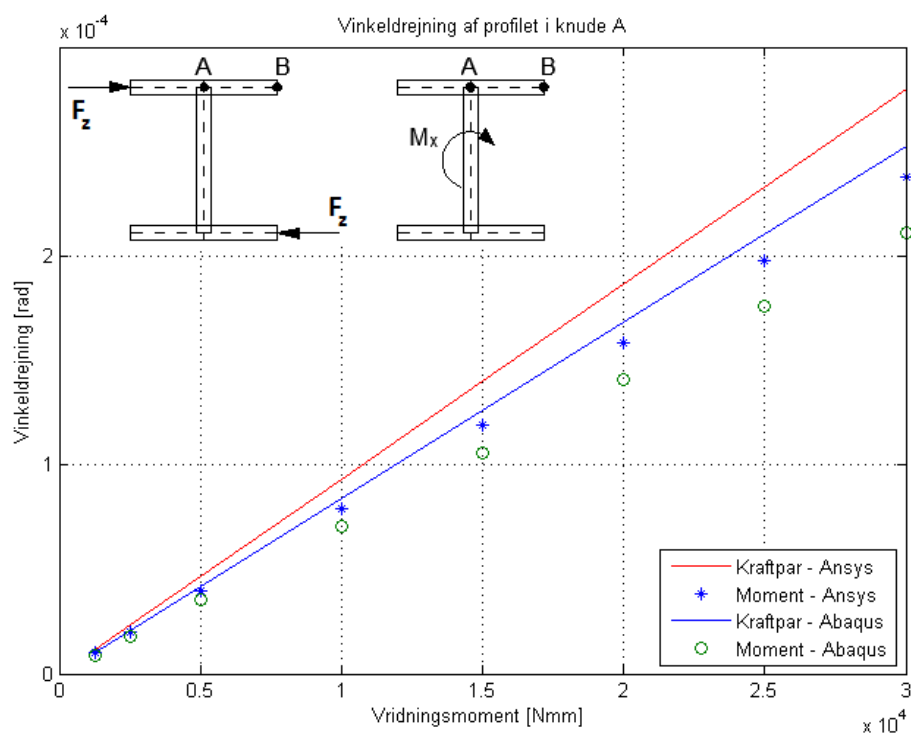


Figur 64: Momentpåvirket bjælke og dens tilsvarende vinkeldrejning.

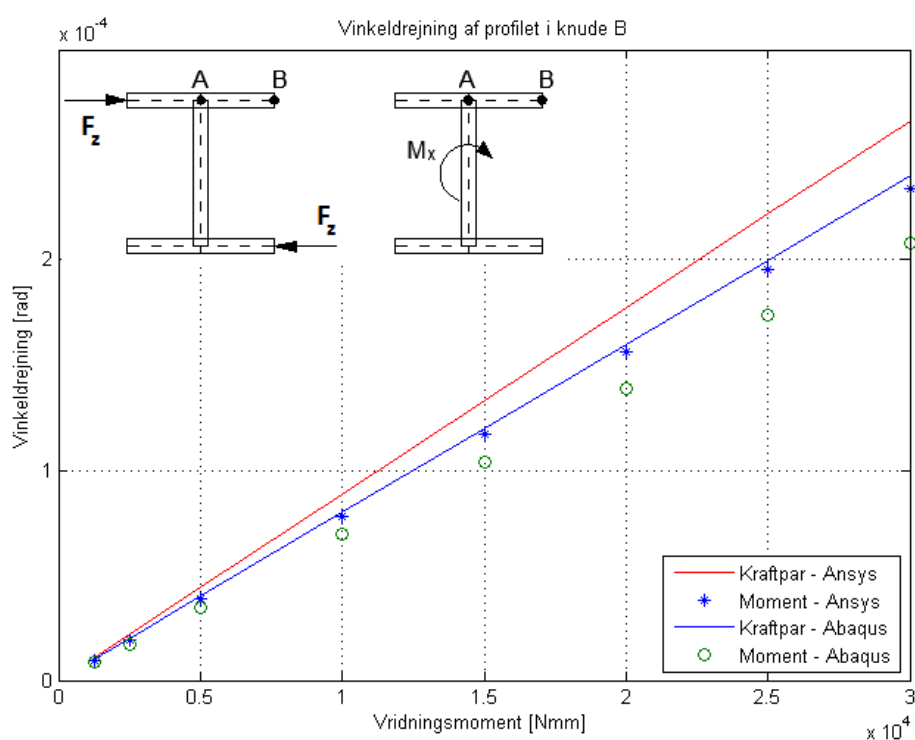
Af Figur 64 kan det ses at vinkeldrejningen aflæst på nullinjen, knude 3, er meget større end vinkeldrejningen aflæst fra de øvrige punkter på tværsnittet. Dette store afvigelse vurderes til at skyldes en lokal forstyrrelse fra det påsatte vridende moment, hvilket indikerer at det kunne være et numerisk problem. Denne afvigelse forekommer i samtlige modeller, men det er dog ikke illustreret her. Det vurderes ikke at problemet vil forekomme i virkeligheden, idet momentet er nogenlunde jævnt fordelt over hele tværsnittet.

Belastningstype

Det er ligeledes undersøgt om der er forskel i vinkeldrejningen ved en påsat moment i nullinjen eller tilsvarende kraftpar på flangerne. Ifølge den statiske ligevægt kan momentet i nullinjen opløses til to modsatrettede kræfter på den nederste og øverste flange. Dette indikerer at resultatet skal være éns. Men det viser sig heller ikke at være tilfældet. Der modelleres en I-profil i Abaqus hvor vinkeldrejningen i knude A og knude B aflæses og sammenlignes. Disse knuder er valgt med henblik på at undgå den lokale forstyrrelse, som er nævnt tidligere. Dette kan ses på Figur 65 og Figur 66.



Figur 65: Vinkeldrejning i knude A.



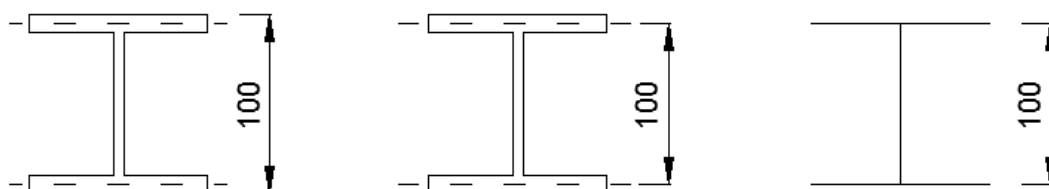
Figur 66: vinkeldrejning i knude B.

Af figurerne ovenfor kan det ses at selvom den resulterende påvirkning er éns, så er vinkeldrejningen i de knuder forskellige. Det kan ses at vinkeldrejningen er lidt større når der påsættes kraftpar på flangerne.

Det kan endvidere ses at der er heller ikke overensstemmelse mellem resultaterne fra de kommercielle programmer Ansys og Abaqus og det er på trods af at der er tale om samme profil med de samme egenskaber. Elementerne SHELL281 og S8, som er anvendt i hhv. Ansys og Abaqus er 8 knudede skalelementer med fuld integration. Forskellen i resultater fra Ansys og Abaqus kan skyldes den måde snitkræfterne angriber elementerne og fordeles. Som det er nævnt tidligere er der lokale forstyrrelser ved kraft/moment angrebspunkter og dette kan være med til at der er forskel.

4.5.1.2 Numeriske analyser

Udover det ovennævnte, har måden som profilerne bliver modelleret på indflydelse på det endelige resultat. Det er sammenlignet ved at modellere to bjælker i C3D20 solidelementer i Abaqus – den ene med en samlet højde på 100 mm og den anden hvor afstanden fra centret af bundflagen til centret af topflangen er 100 mm. Tykkelsen er 10 mm alle steder. Ligeledes modelleres profilet vha. S8 skalelementer i Abaqus hvor det antages at tykkelsen bliver defineret fra centerlinjer og ud. Profilerne i det efterfølgende er 1000 mm høje ved indspændingen og 5000 mm lange og udsættes for et vridende moment på 30 000 Nmm.

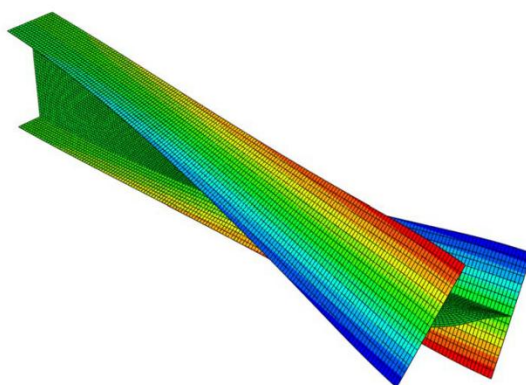


Figur 67: Geometri definitioner. Fra venstre: solidelement med samlet højde 100 mm, center til center 100 mm og skalelement.

Resultaterne af analysen kan ses i Tabel 1 og en deformeret model af bjælken ses på Figur 68.

	Solid 1 – samlet højde	Solid 2 C/C	Skal	MatLAB	Analytisk	Ansys bjælke
φ	0,007846	0,006346	0,006197	0,00638	0,00484	0,0084

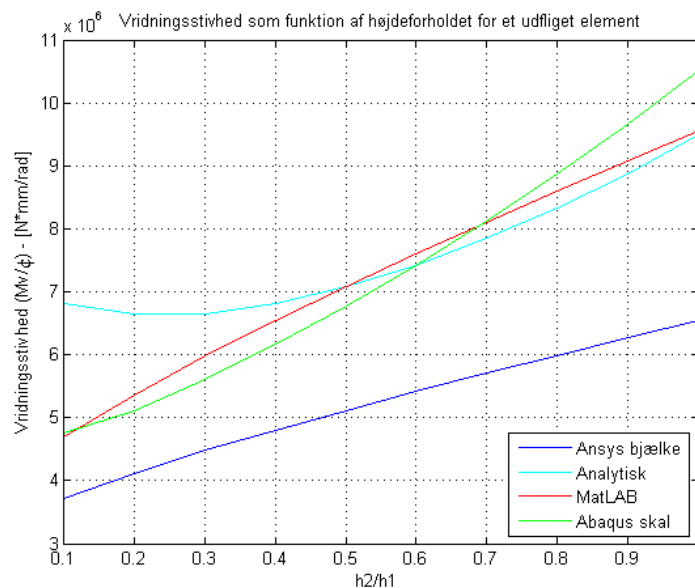
Tabel 1: Sammenligning af vridningsvinkel for de forskellige elementtyper og programmer.



Figur 68: Hvælving i en udfliget skalmode.

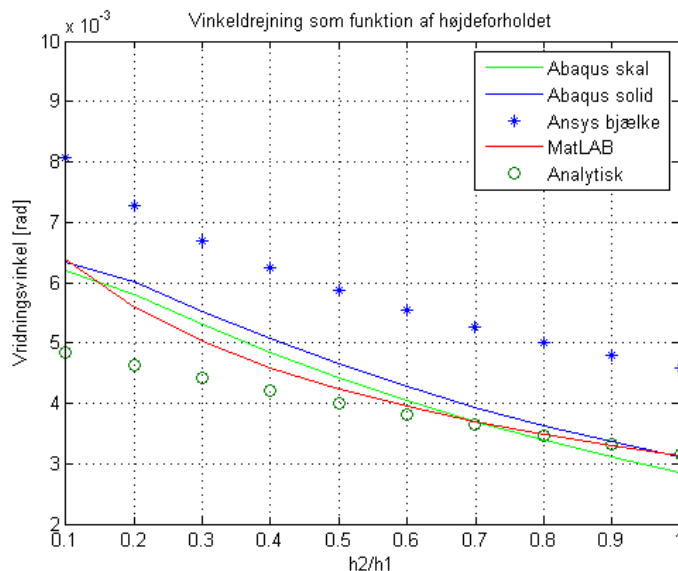
Af Tabel 1 kan, som forventet, ses at vridningsvinklen for solidelementet med samlet højde på 100 mm ikke giver den samme resultat som en skalmode med tilsvarende højde idet, som nævnt, tykkelsen bliver defineret fra centerlinjer og ud. Alligevel observeres der relativt store forskelle mellem resultaterne, hvor

den mest skæve er fra Ansys' B189 bjælkeelement. Dette er også illustreret på Figur 69. Højden ved indspændingen var fastlagt på 1000 mm og løbende justeret ved den frie ende.



Figur 69: Vridningsstivhed som funktion af højdeforholdet.

På Figur 69 ses vridningsstivheden som funktion af højdeforholdet. Det kan ses at vridningsstivheden bestemt vha. den analytiske løsning fra ligning (4.55) og skalelementer i Abaqus er nogenlunde ens for højdeforholde mellem 0,5 og 0,7. Nogenlunde samme forskel observeres på følgende figur, hvor der er plottet vinkeldrejning som funktion af højdeforholdet:

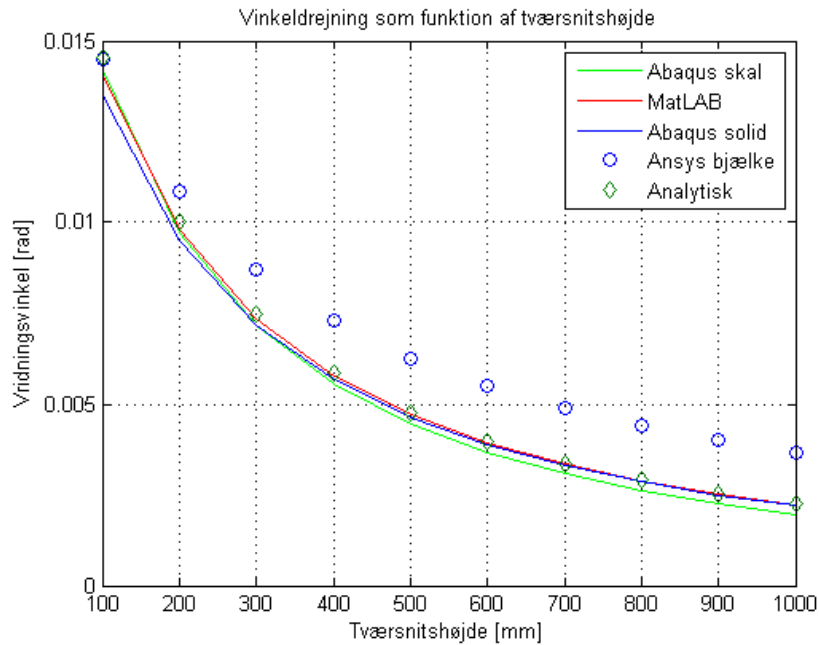


Figur 70: Vinkeldrejning som funktion af højdeforholdet

På Figur 69 og Figur 70 kan det ligeledes observeres at MatLAB koden følger den samme tendens som Ansys bjælkeelementer, dog med en langt større nøjagtighed i forhold til øvrige elementer og den analytiske løsning. En tilsvarende afvigelse mellem egen programmeret kode og BEAM189 i Ansys, hvor

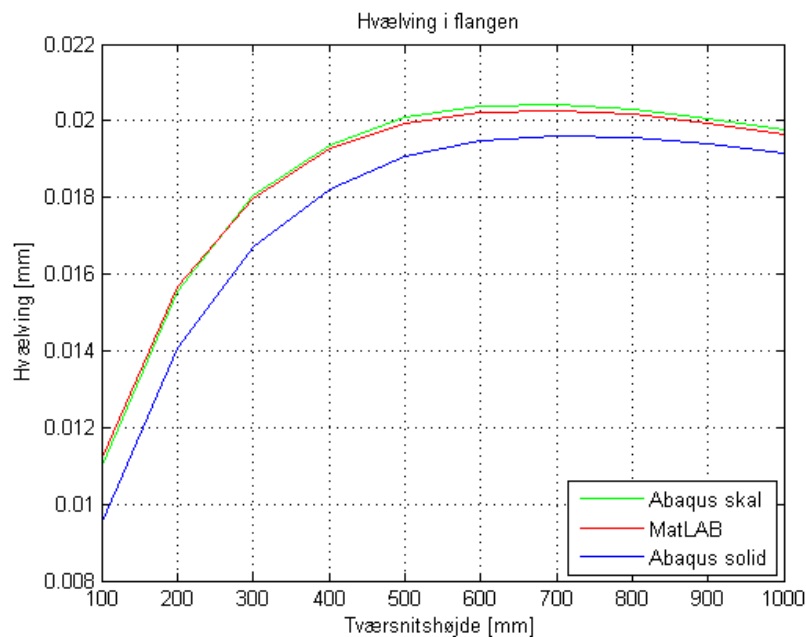
den sidst nævnte giver generelt større vinkeldrejninger, er observeret af [27], hvilket kan indikere at BEAM189 elementet ikke egner sig til bestemmelse af vridningsvinkler.

Forskellen mellem MatLAB koden og Abaqus er dog mindre hvis højdeforholdet holdes konstant, mens profilens højde gradvist forøges. Den samme bjælke modelleres igen hvor den analytiske løsning på Figur 71 er givet ved ligning (4.55):



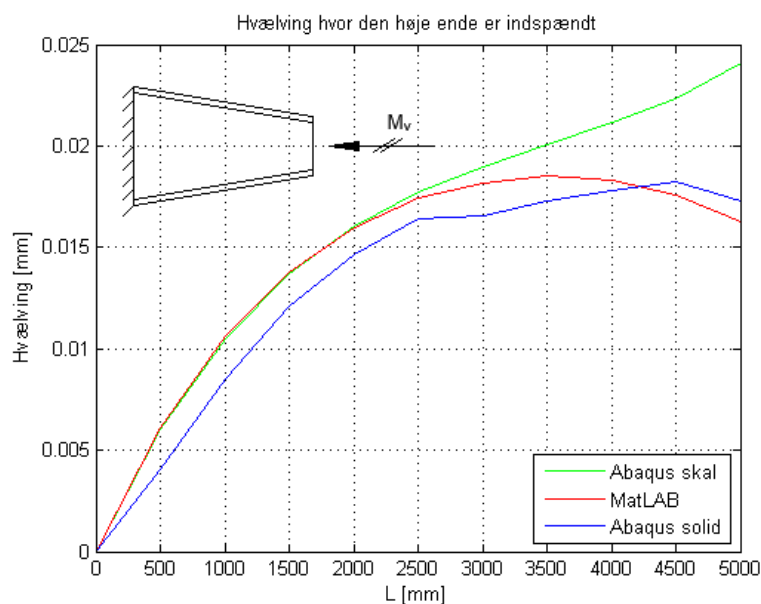
Figur 71: Vinkeldrejning for profil med konstant højdeforhold.

Det var forventet at bjælkeelementerne i Ansys ville beskrive vridningsvinklen bedre, men dette er ikke tilfældet, som kan ses på Figur 71 og Figur 70. Til gengæld stemmer resultatet fra skal-, solidelementerne i Abaqus og analytisk løsning godt overens med MatLAB koden. Plottes hvælvingsforløbet i bjælken med konstant tværsnit fås:



Figur 72: Hvælvning i flangen for et profil med konstant højdeforhold.

Af Figur 72 kan det ses at der er rimelig god overensstemmelse mellem MatLAB og Abaqus elementer. Ligeledes plottes hvælvingsforløbet langs bjælken for bjælken med varierende tværsnit hvor den høje ende er indspændt:

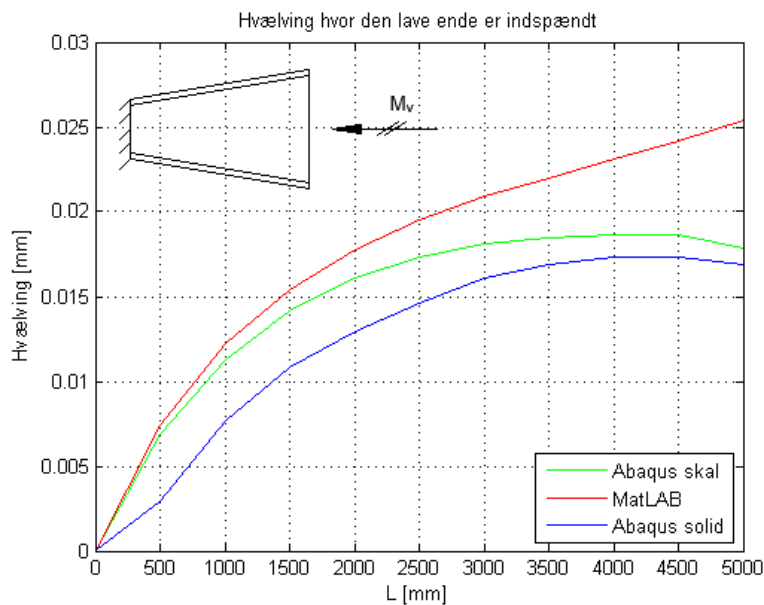


Figur 73: Hvælvingsforløbet langs bjælken.

Forløbet af grafen på Figur 73 kan forklares ved at betragte hvælvningen, som beregnes ved $\varphi' \cdot \frac{bh}{4}$. Den afledede af vinkeldrejningen stiger og kropshøjden falder jo længere de bevæger sig væk fra indspændingen. Det kan ses på figuren at den afledede af vinkeldrejningen bidrager mere til hvælvning op til en afstand svarende til ca. 3500 mm fra indspændingen. Efter denne grænse, bliver det bidraget fra

kropshøjden, som bliver afgørende. Og da denne er aftagene kan der observeres et fortegnsskift hvor kurven begynder at falde. Det kan dog ses at hvælvingsforløbet for skalelement ikke følger dette princip.

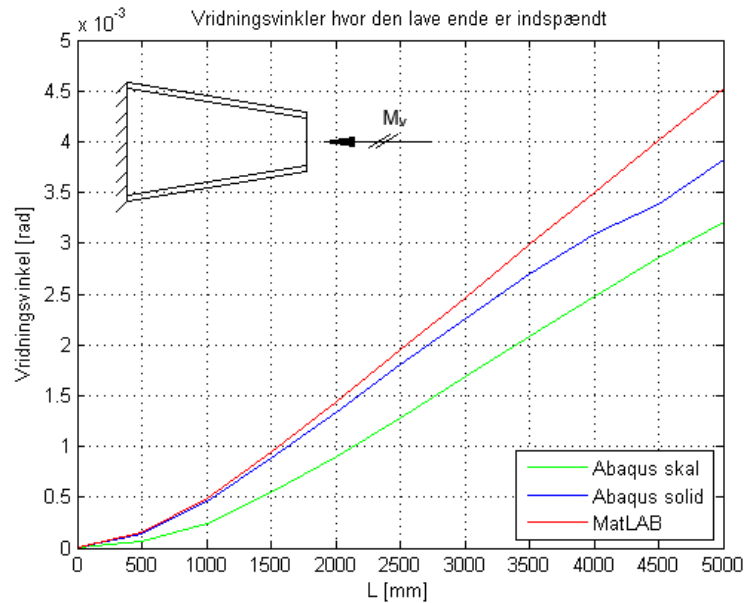
På tilsvarende måde når den lave ende er indspændt:



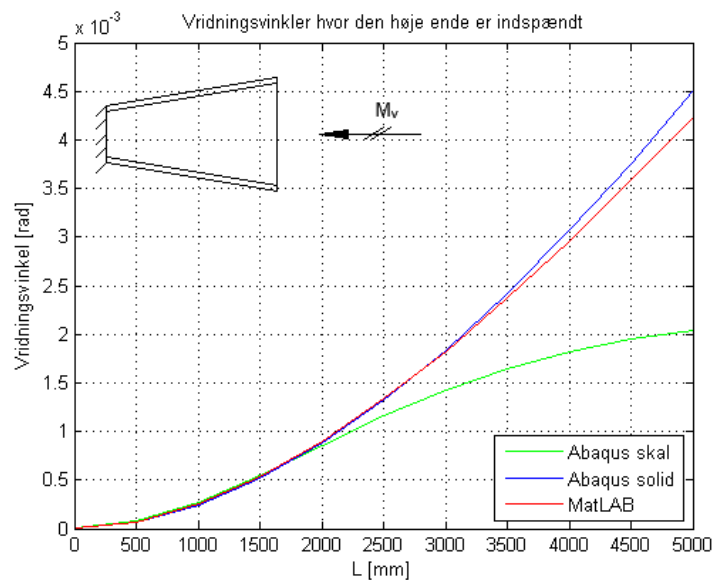
Figur 74: Hvælvingsforløbet langs bjælken.

Hvælvingsforløbet fra Abaqus skal- og solidelementer på Figur 74 følger ikke den samme betragtning som før. Da længden og højden af tværsnittet er stigende, skulle det forventes at hvælvningen også ville stige, som det er tilfældet med MatLAB koden.

Det samme profil undersøges, men den her gang er det vridningsvinkelen som plottes som funktion af længden:



Figur 75: Forløbet af vridningsvinkel langs bjælken.



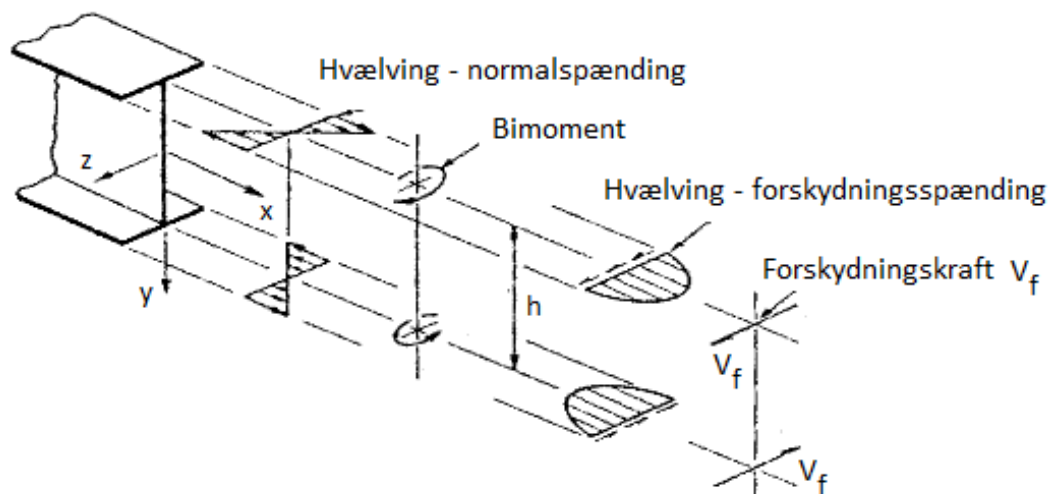
Figur 76: Forløbet af vridningsvinkel langs bjælken.

Det kan, som før, ses at en stigende længde og profilhøjde medfører en stigende vinkeldrejning. Dette gør sig gældende for MatLAB koden og Abaqus solidelementer. Igen viser skalmodellen en uoverensstemmelse med de øvrige resultater. Afvigelserne mellem MatLAB koden og de øvrige elementer er kun til stede når der er tale om vridningspåvirkede profiler med varierende tykkelse.

Ud fra de ovenstående analyser kan det konkluderes at MatLAB koden er god til at analysere på bjælkeelementer med konstant og varierende tværsnit, som udsættes for moment og/eller punktlaster. Da MatLAB kodens drejningskapabilitet er eftervist, er der nu grundlag for at undersøge overførselen af hvælving i rammehjørner.

5 Hvælvingsoverførsel i rammehjørner

Teorien i de foregående afsnit er baseret på Vlasov's teori for tyndvæggede bjælker, hvis største svaghed eller mangel er i modellering af hvælvingsfastgørelse og hvælvingsoverførsel i samlinger. Disse er afhængige af samlingstype, hvordan elementerne er orienteret i forhold til hinanden og tværsnitstyper. I projektet arbejdes der udelukkende med dobbeltsymmetriske I-profiler hvor elementerne er orienteret i den samme plan. [28]. Ved hvælvning af bjælkeelementer følgende snitkræfter og spændinger kan således forekomme:

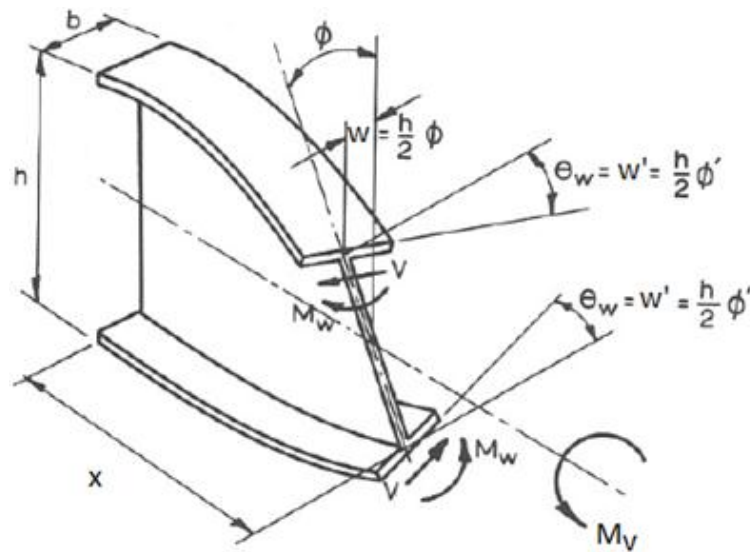


Figur 77: Hvælvungsspændinger i flangerne. [29]

Tidligere i rapporten, når elementerne blev samlet i forlængelse af hinanden, skete dette ved at betragte samlingerne som uendelig stive. Idet elementerne bliver nu samlet under vinkel, kan denne betragtning ikke anvendes længere, da stivheden af en hjørnesamling aftager jo mindre bliver vinklen mellem de tilstødende elementer. Dette afsnit behandler hvælvingsoverførsel i 4 typer af hjørnesamlinger, men for at få en bedre forståelse for hvælvingsfænomenet, vil der indledningsvis gennemgås de grundlæggende koncepter og udtryk i forbindelse med hvælvung [30], [31].

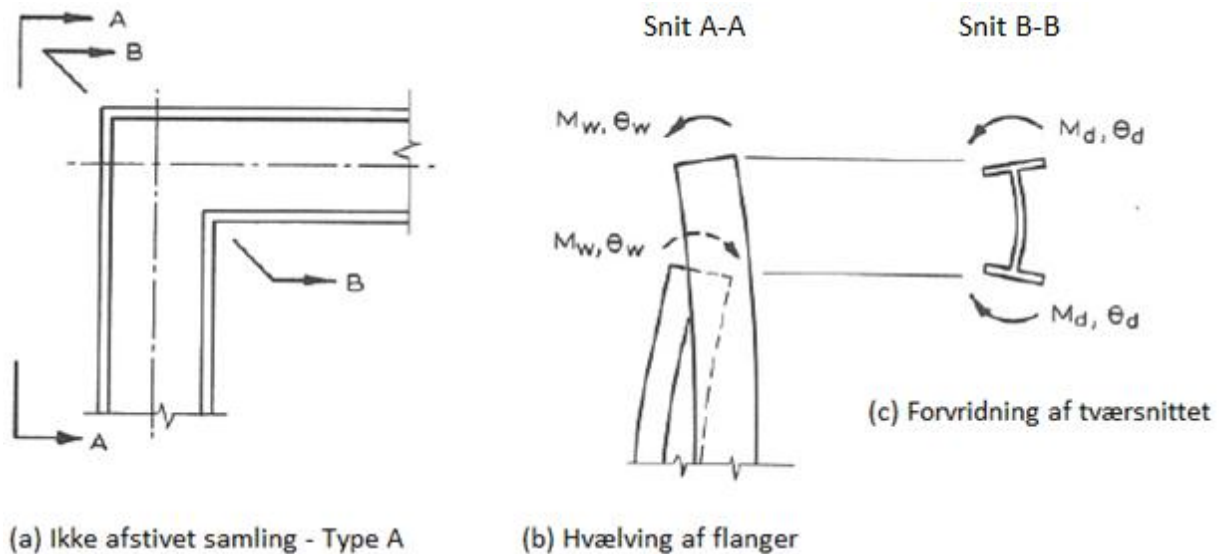
5.1 Hvælvung og forvridning

Når en samling flyttes, kan dens flytning inddeles i to dele: en stift-legeme bevægelse og en lille lokal deformation af samlingen. Ved stift-legeme bevægelse er elementernes ender fastholdt mod hvælvung. Den efterfølgende deformation af samlingen er forbundet med hvælvung i enderne af de sammenkoblede elementer og kan forårsage sekundær flytning ud af plan, som betegnes forvridning (distorsion). Når et I-profil vrider med vinkel φ , vil det også hvælve og hver flange vil rotere med vinkel θ i sin egen plan. Dette er det vist på Figur 78:



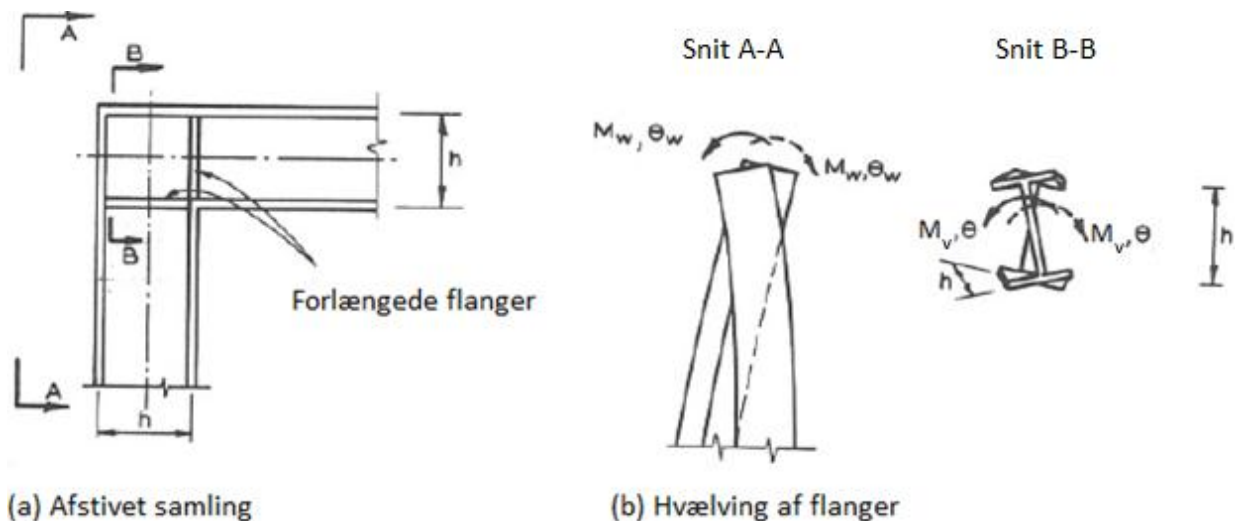
Figur 78: Hvælvning af et I-profil.

Når et element hvælver i en ikke-afstivet og vinkelret samling, som på Figur 79, vil kompatibilitetsbetingelsen kræve en tilsvarende forvridning af det andet element hvor dets flanger skal rotere med vinkel $\theta_w = \theta_d$.



Figur 79: Hvælvning og forvridning af en ikke afstivet samling.

Hvælvingen af det ene element er derfor fastholdt af det andet elements modstand mod forvridning. Denne modstand er i form af forvridningsmomentet M_d , som skal være i ligevægt med flangernes hvælvingsmoment M_w . Forvridning af samlingen kan undgås ved at placere en afstiver imellem to elementer [32]. Et eksempel på en sådan afstivning kan ses på Figur 80:



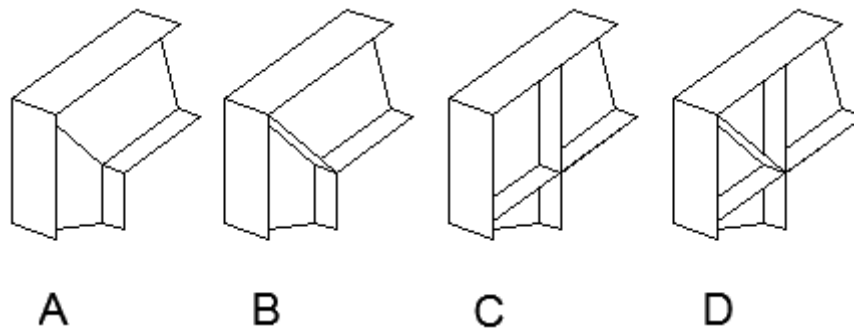
Figur 80: Hvælving af en afstivet samling

Betydningen af disse påvirkninger er afhængige af det frie- og det bundne vridningsmoment, hvis samlede påvirkning er givet ved ligning (4.10). Om det er bidraget fra det ene eller det andet, som er afgørende, afhænger af forholdet $\frac{L}{a} = \sqrt{\frac{GI_v L^2}{EI_\omega}}$, men også af randbetingelser og fordelingen af det samlede vridende moment. Når $\frac{L}{a}$ er stor, er det frie vridningsmoment givet ved ligning (4.1), som er afgørende og hvælvingensbidraget kan således negligeres. Hvis $\frac{L}{a}$ er derimod lille, er det bidraget fra hvælvingsvridning givet ved ligning (4.9), som er afgørende. For værdier imellem disse ekstremer, hvor de fleste I-profiler ligger i, er det både bidrag fra fri- bunden vridning som er betydende. Forvridningsmodstanden af et I-profil afhænger af flangernes vridningsmodstand og bøjningsmodstanden i kroppen. Vridningsmodstanden for profiler med tynd krop kan blive reduceret af forskydningspændinger i flangerne.

I projektet behandles 4 samlingstyper:

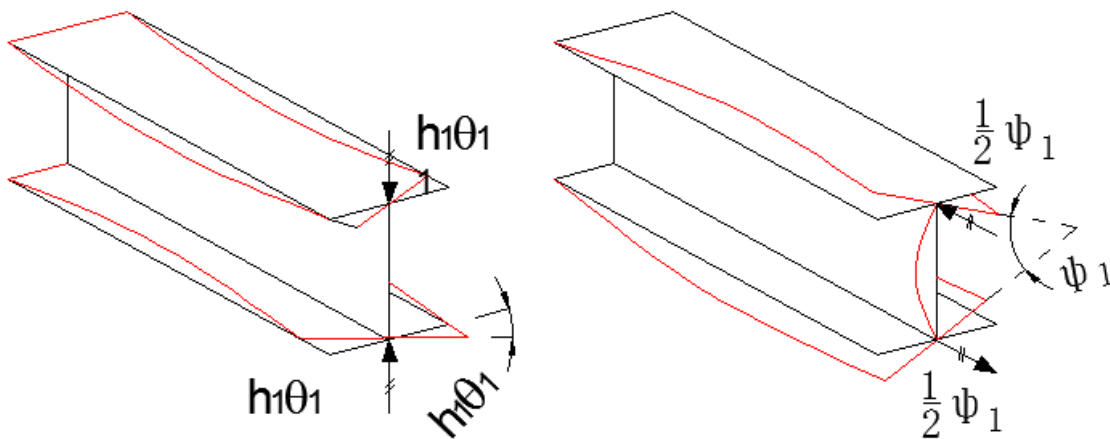
- Type A hvor de tilstødende dele svejses sammen uden ekstra afstivninger
- Type B hvor der påsvejses en diagonalafstivning
- Type C for flangerne er gennemgående
- Type D som er en blanding af B og C med forlængede flanger og diagonalafstivning.

Disse kan ses på Figur 81:



Figur 81: Hjørnesamlinger.

Samlingerne på Figur 81 behandles ud fra [33], hvor det er den elastiske energi, som bestemmes. Højden af de to bjælker, som skal samles, betegnes hhv. h_1 og h_2 . I samlingen er hvælvingsintensiteten givet ved θ_1 og θ_2 . Ifølge den klassiske bjælketeori er hvælvningen af tværsnittet givet ved en relativ hældning af flangerne i deres eget plan. Dette kan ses på Figur 82 til venstre. Når én af de tilstødende bjælker i en samling hvælver, skal den anden grunden kompatibilitetskravene forvråde. Forvridningen ψ af tværsnittet ses på Figur 82 til højre.



Figur 82: Hvælvning og forvridning af et I-profil.

Da den klassiske bjælketeori for tyndvæggede bjælker ikke tager hensyn til forvridningen, idet der antages en stift-legeme bevægelse under deformationen, bestemmes forvridningen ud fra randbetingelserne, dvs. laster og understøtninger. Ud fra denne betragtning bestemmes den elastiske energi fra hvælvning W_θ per længdeenhed:

$$W_\theta = \frac{1}{2} EI_\omega \theta'^2 + \frac{1}{2} GI_v \theta^2 \quad (5.1)$$

Den elastiske energi fra forvridning W_ψ bestemmes på samme måde:

$$W_\psi = \frac{1}{2} G 2 I_{v_flange} \left(\frac{1}{2} \psi' \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{h} D_w \psi^2 \quad (5.2)$$

Hvor I_{v_flange} er flangens vridningsstivhed og D_w er kroppens bøjningsstivhed givet ved:

$$D_w = Et_w^3 \frac{(1-\nu^2)}{12} \quad (5.3)$$

Hvor t_w er kropstykkelsen. Ligning (5.1) og (5.2) omskrives til Euler ligninger:

$$\begin{aligned} EI_\omega \theta'' - GI_v \theta &= 0 \\ G \frac{1}{2} I_{v_flange} \psi'' - \frac{D_w}{h} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ved løsning af ligninger (5.4) og indsættelse af ligning (5.3), fås følgende eksponentielparametre:

$$\begin{aligned} k_\theta^2 &= \frac{GI_v}{EI_\omega} \\ k_\psi^2 &= \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{bh} \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^3 \end{aligned} \quad (5.5)$$

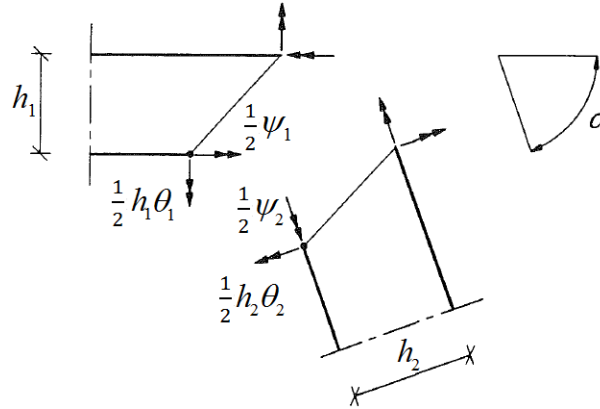
Parametrene i ligning (5.5) beskriver afklingning af hvælving og forvridning fra samlingen. Normalt er k_ψ større end k_θ hvilket betyder at der sker hurtigere afklingning af forvridningen, som antages at virke lokalt. Den elastiske forvridningsenergi E_ψ i hver bjælke udtrykkes som energien i en semi-uendelig bjælke:

$$E_\psi = \frac{1}{2} (\psi_1, \psi_2) \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{(D_{w1} / 2h_1) GI_{v_flange1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{(D_{w2} / 2h_2) GI_{v_flange2}} \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Udtrykket i ligning (5.6) gælder for alle slags samlinger, men for at kunne anvende det, skal forvridningsparametre ψ_1 og ψ_2 udtrykkes ved hvælvingsparametre θ_1 og θ_2 vha. kontinuitetsbetingelser.

5.1.1 Kontinuitet af flanger

En samlingens flytning bestemmes ud fra flytningen af de tilstødende delementer. Når den ene element i samling flyttes eller roterer, vil kontinuitetsbetingelsen medføre at det sker den samme, men modsatrettet, drejning og rotation af det andet element. Princippet er illustreret på Figur 83, hvor forvridnings- og hvælvingsparametre er opløst i vektorer:



Figur 83: Hvælving og forvridding i en samling. Kilde: [33]

Projektion af vektorer på Figur 83 giver følgende kontinuitetsbetingelse:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} \cos \alpha h_1 & -h_2 \\ h_1 & -\cos \alpha h_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

På grund af samlingens vinkel er hvælvingen og forvriddingen af den indre og ydre flange ikke henført til det samme bjælketværsnit. Denne effekt er dog negligeret i det efterfølgende.

5.2 Fjederstivheder for samlingerne

Kontinuitetsbetingelsen i ligning (5.7) bruges til at eliminere forvriddingsparametrene ψ_1 og ψ_2 ved at udtrykke det vha. hvælvsparametre θ_1 og θ_2 . For samling af type A er der to hvælvsparametre. Ved introduktion af ekstra stivhed til samlingen, hvad enten det er i form af gennemgående flanger eller diagonalplade, reduceres antallet af hvælvsparametre. Således har samlingstype B og C kun én hvælvsparameter og samling D har ingen.

Ikke afstivet samling – A

I den ikke afstivede samlingstype A er hvælvsintensiteter θ_1 og θ_2 uafhængige parametre, hvor forvriddingsparametre ψ_1 og ψ_2 er udtrykt gennem ligning (5.7) eller:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Forvriddingsenergien E_ψ , hvor $\mathbf{D}$ er stivhedsmatricen, udtrykt vha. hvælvsparametre er:

$$\begin{aligned} E_\psi &= \frac{1}{2} (\theta_1, \theta_2) \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ E_\psi &= \frac{1}{2} (\theta_1, \theta_2) \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{bmatrix} (D_1 \cos^2 \alpha + D_2) h_1^2 & -(D_1 + D_2) h_1 h_2 \cos \alpha \\ -(D_1 + D_2) h_2 h_1 \cos \alpha & (D_1 + D_2 \cos^2 \alpha) h_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hvor stivhedsmatricen er:

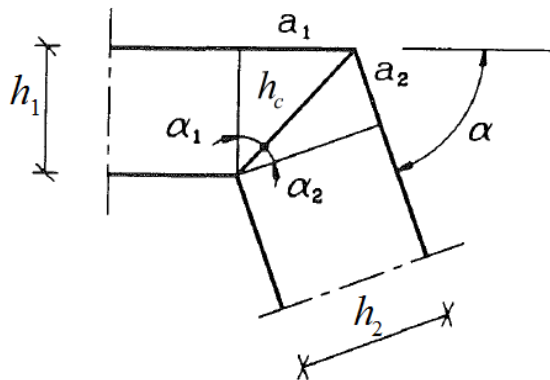
$$\mathbf{K}^A = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{bmatrix} (D_1 \cos^2 \alpha + D_2) h_1^2 & -(D_1 + D_2) h_1 h_2 \cos \alpha \\ -(D_1 + D_2) h_2 h_1 \cos \alpha & (D_1 + D_2 \cos^2 \alpha) h_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Hvor $D_1 = \sqrt{(D_{w1} / 2h_1) GI_{v_flange1}}$ og på tilsvarende måde D_2

Ud fra formel (5.9) opstilles en 2x2 stivhedsmatrice som indsættes i frihedsgrader 7 og 14 i 14x14 stivhedsmatricen. Dette er nærmere beskrevet i afsnit 5.2.1. Det kan også ses at når $\alpha = 0$ er løsningen den samme som for den klassiske tyndvæggede bjælketeori.

Afstivet samling – type B

Til samlingstype B er der indført en diagonal afstivningsplade, som forbinder de indre med de ydre flanger. Hvælvingen i samlingen består af pladens bøjning i dens plan samt hvælving af pladen. Pladens bøjningsstivhed er dog langt større end dens hvælvsstivhed. Dette medfører at der ikke sker bøjning i plan og af den grund er der kun én parameter, som beskriver hvælving og forvridning. Samlingens geometri ses på Figur 84:



Figur 84: Samlingstype B. Kilde: [33]

De geometriske parametre fra Figur 84 er:

$$a_1 = \frac{(h_2 - h_1 \cos \alpha)}{\sin \alpha} \quad (5.11)$$

$$a_2 = \frac{(h_1 - h_2 \cos \alpha)}{\sin \alpha} \quad (5.12)$$

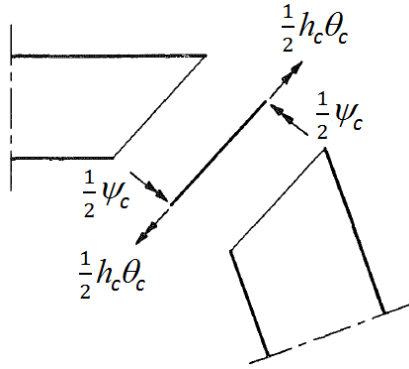
$$\tan \alpha_1 = \frac{a_1}{h_1} \quad (5.13)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{a_2}{h_2} \quad (5.14)$$

Længden af diagonalpladen er:

$$h_c = \frac{h_1}{\cos \alpha_1} = \frac{h_2}{\cos \alpha_2} \quad (5.15)$$

Der introduceres parametre θ_c og ψ_c , som beskriver afstiverens hvælvning og bøjning i plan, som kan ses på Figur 85.



Figur 85: Samlingens hvælvning og bøjning i plan. Kilde: [33]

Projektion af rotationsvektorer giver følgende parametre:

$$\begin{bmatrix} h_1 \theta_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_c \theta_c \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Ved at indsætte $\psi_c = 0$, hvis pladens bøjningsstivhed er meget større end hvælvingsstivheden, i (5.16), fås en tilsvarende udtryk for bjælke 2:

$$\frac{h_1 \theta_1}{\cos \alpha_1} = \frac{h_2 \theta_2}{\cos \alpha_2} = h_c \theta_c \quad (5.17)$$

Indsættes h_c fra ligning (5.15) i ligning (5.17) fås kontinuitetsbetingelsen:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_c \quad (5.18)$$

Til hvælvingsparameteren θ_c hører to stivhedsbidrag – hvælvning af den afstivende plade og forvridding af bjælketværsnit. Den elastiske energi, som kræves til at få pladen med dimensioner $h_c \cdot b_c \cdot t_c$ til at hvælve er givet ved:

$$E_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} G h_c b_c t_c^3 \right) \theta_c^2 \quad (5.19)$$

Ved anvendelse af ligning (5.18) i udtrykket (5.7) fås forvriddningsparametrene ψ_1 og ψ_2 :

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \theta_c \quad (5.20)$$

Forvriddningsenergien for samlingstype B fås ved at indsætte ligning (5.20) i ligning (5.6):

$$E_{\psi} = \frac{1}{2} \left[a_1^2 \sqrt{\frac{D_{w1}}{2h_1}} GI_{v_flange1} + a_2^2 \sqrt{\frac{D_{w2}}{2h_2}} GI_{v_flange2} \right] \theta_c^2 \quad (5.21)$$

Samlingsvinklen α har kun indflydelse på længderne a_1 og a_2 . Forvridningsstivheden stiger ved en øget samlingsvinkel. Stivhedsrelationen for samlingstype B er dermed:

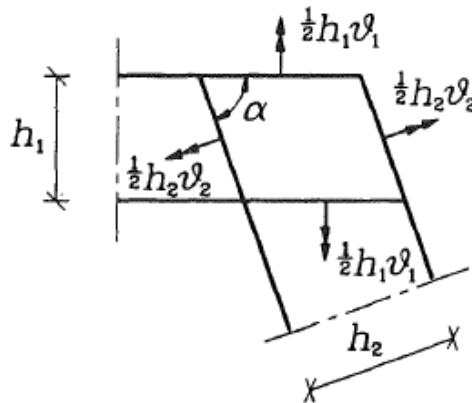
$$E_{\theta} + E_{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{K}^B \theta_c^2 \quad (5.22)$$

Hvor stivhedsmatricen er:

$$\mathbf{K}^B = \left(\frac{1}{3} G h_c b_c t_c^3 \right) + \left[a_1^2 \sqrt{\frac{D_{w1}}{2h_1}} GI_{v_flange1} + a_2^2 \sqrt{\frac{D_{w2}}{2h_2}} GI_{v_flange2} \right] \quad (5.23)$$

Afstivet samling – type C

Ved denne type af samlinger er afstivningen foretaget ved at forlænge flangerne sådan at de "går igennem" det andet profil. Rotationsvektoren for denne samling er afbildet på Figur 86:



Figur 86: Hvælving af samlingstype C. Kilde: [33]

Middelværdien for rotationer af flangerne betegnes med hhv. $\frac{1}{2} h_1 \theta_1$ og $\frac{1}{2} h_2 \theta_2$. Samlingens flytning ud af planet regnes som hindret i samlingerne mellem flangerne, hvorfra fås:

$$2 \left(\frac{1}{2} h_1 \theta_1 \right) \frac{h_2}{\cos \alpha} + 2 \left(\frac{1}{2} h_2 \theta_2 \right) \frac{h_1}{\cos \alpha} = 0 \quad (5.24)$$

Ud fra ligning (5.24) kan det ses, at der kun er én hvælvsparameter, dvs.:

$$\theta_1 = -\theta_2 = \theta_c \quad (5.25)$$

Til denne samlingstype er der to stivhedsbidrag – hvælving af de ekstra forlængede flanger og forvridning af bjælketværsnit. Ekstra energien fra de forlængede flanger med dimensioner på hhv. $b_1 \cdot t_1$ og $b_2 \cdot t_2$ er:

$$E_{\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} G \frac{h_2 b_1}{\sin \alpha} t_1^3 + \frac{1}{3} G \frac{h_1 b_2}{\sin \alpha} t_2^3 \right) \theta_c^2 \quad (5.26)$$

Ved at indsætte ligning (5.25) i ligning (5.7) fås forvridningsparametrene:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} h_1 \cos \alpha + h_2 \\ h_2 \cos \alpha + h_1 \end{bmatrix} \theta_c \quad (5.27)$$

Indsættes udtrykket (5.27) i ligning (5.6) fås forvridningsenergien for samlingstype C til:

$$E_{\psi} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{h_1 \cos \alpha + h_2}{\sin \alpha} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{w1}}{2h_1} G I_{v_flange1}} + \left(\frac{h_2 \cos \alpha + h_1}{\sin \alpha} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{w2}}{2h_2} G I_{v_flange2}} \right\} \theta_c^2 \quad (5.28)$$

Stivhedsrelationen er dermed:

$$E_{\theta} + E_{\psi} = \frac{1}{2} K^C \theta_c^2 \quad (5.29)$$

Hvor stivhedsmatricen er:

$$K^C = \left(\frac{h_1 \cos \alpha + h_2}{\sin \alpha} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{w1}}{2h_1} G I_{v_flange1}} + \left(\frac{h_2 \cos \alpha + h_1}{\sin \alpha} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{w2}}{2h_2} G I_{v_flange2}} \quad (5.30)$$

Afstivet samling – Type D

Denne samlingstype er en kombination af samling B og C, dvs. en samling med både forlængede flanger og en diagonal plade. Samlingen skal således opfylde kontinuitetsbetingelser for både samlingstype B og C. Dette medfører at:

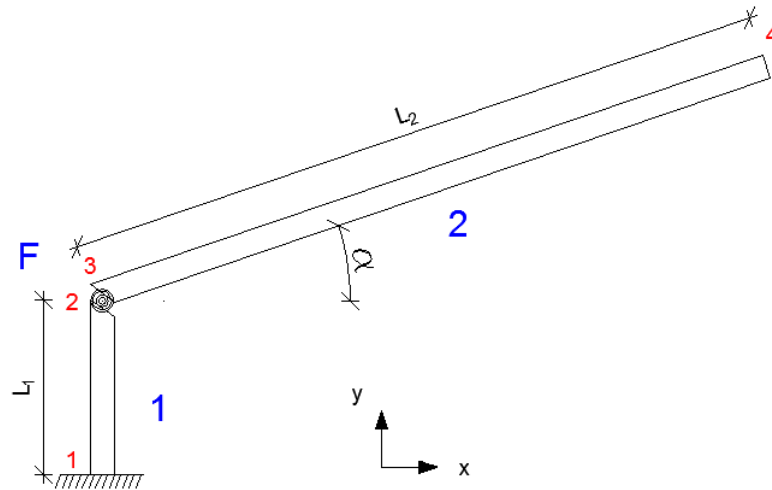
$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad (5.31)$$

Tilsvarende forsvinder forvridningsparametrene i ligning (5.7) hvilket medfører at der kan hverken være hvælving eller forvridning i samlingen.

Generelt har samlingens stivhed en stor betydning for stabiliteten. F. eks hvis samlingen er meget stiv eller der anvendes en meget tyk plade ved samlingstype B, kan det medføre at den kritiske last forøges med faktor 1,4 – 1,7 sammenlignet med f. eks samlingstype A [34].

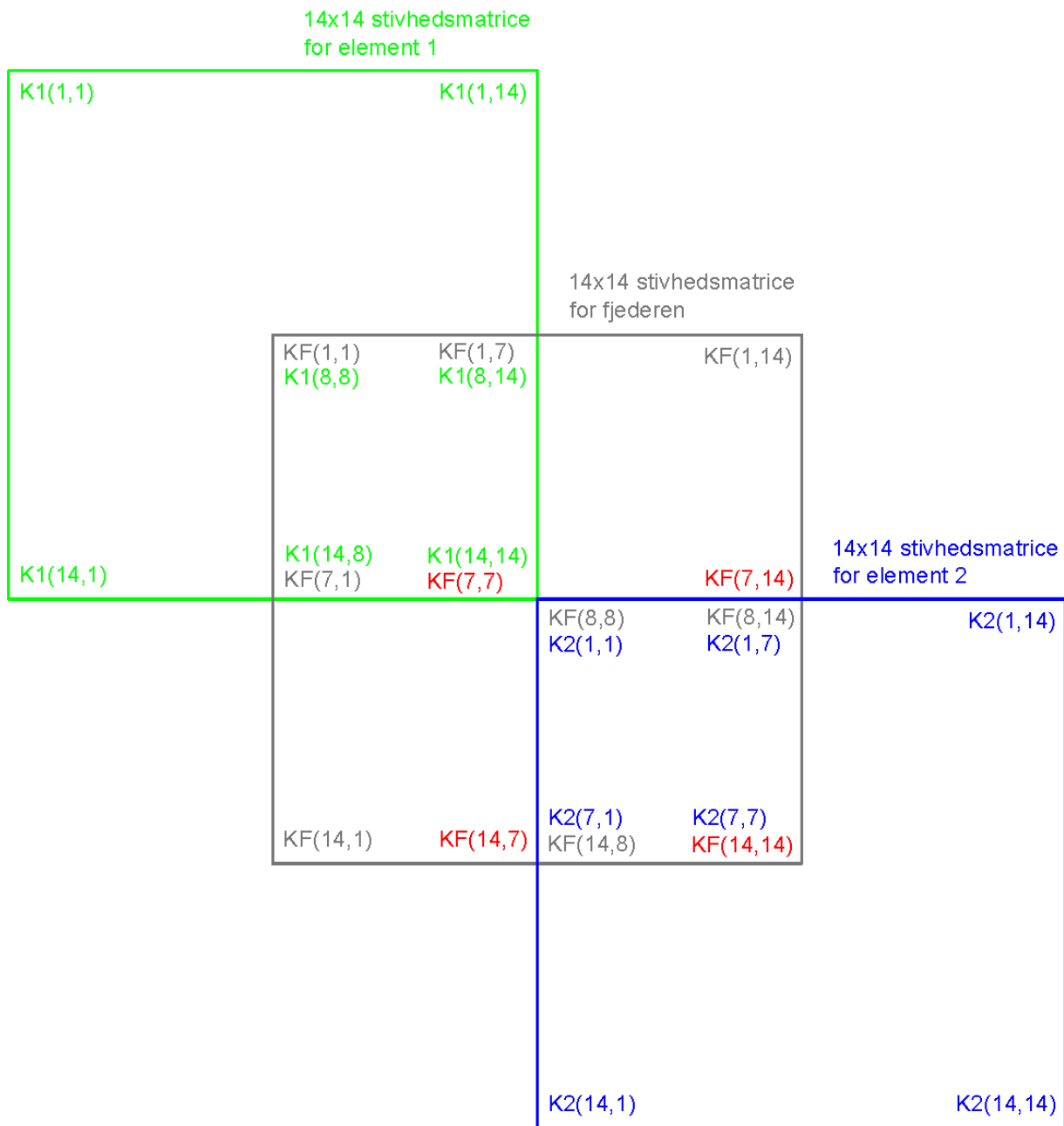
5.2.1 Elementmetodeformulering

I den indeværende afsnit beskrives den numeriske implementering af stivhedsmatricerne, som blev bestemt i de foregående afsnit. Rammekonstruktionen modelleres i MatLAB, som vist på Figur 87, hvor knuder er markeret med rødt og elementer med blå:



Figur 87: Diskretisering af rammekonstruktionen.

Stivhedsmatricen for element 1 og 2 er en 14×14 matrice bestemt i afsnit 4.4 hvor frihedsgrader 7 og 14 beskriver hvælvingen φ' i knuderne. Disse er, som beskrevet, orienteret i deres eget koordinatsystem, som skal transformeres til det globale koordinatsystem efter metoden beskrevet i afsnit 3.1.2.2. Stivhedsmatricen for fjederen er ligeledes en 14×14 matrice, hvor den endelige kobling mellem disse 3 elementer er illustreret på Figur 88:



Figur 88: Kobling mellem elementer.

Af Figur 88 kan ses at der ingen direkte kobling er mellem element 1 og 2. I stedet for er koblingen mellem disse igennem fjederen. Overførsel af hvælving sker i frihedsgraderne $KF(7,7)$, $KF(7,14)$, $KF(14,7)$ og $KF(14,14)$. Dette er markeret med rødt på Figur 88, og værdien afhænger af hvilken type samling der er tale om. Stivhedsmatricen ser ud på følgende måde:

$$\mathbf{K}^F = \left[\begin{array}{cccccc|c|cccccc|c|c}
\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\
0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\
0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & w_2 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & \varphi_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & \theta_2^y \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & \theta_2^z \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 \\
\hline
-\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 \\
0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 \\
0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & w_3 \\
0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & \varphi_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & \theta_3^y \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \theta_3^z \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{21}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 \\
\hline
\end{array} \right] \quad (5.32)$$

Hvor $\mathbf{K}^*$ er enten $\mathbf{K}^A, \mathbf{K}^B, \mathbf{K}^C$ eller $\mathbf{K}^D$. F. eks kan K_{11}^A aflæses ud fra ligning (5.10):

$$K_{11}^A = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\sqrt{(D_{w1} / 2h_1) GI_{v_flange1}} \cos^2 \alpha + \sqrt{(D_{w2} / 2h_1) GI_{v_flange2}} \right) h_1^2$$

For at opfylde kontinuitetsbetingelserne i samlingen skal fjederfrihedsgraderne markeret med $\bullet$ justeres, så der statisk overensstemmelse i systemet. Det betyder at hvis der f. eks påsættes en enkeltkraft i knude 4 i z-retningen, se Figur 87, vil det medføre en drejning θ_{y2} omkring y-aksen i knude 2 ved element 1. Denne drejning skal, ifølge kontinuitetsbetingelsen, være af samme størrelse når den overføres til element 2, knude 3, dvs.: $\theta_{y2} = \theta_{y3}$. I MatLAB foretages det på følgende måde:

Momentet M_{y2} og drejningen θ_{y2} og θ_{y3} i stivhedsmatricen for element 1 og fjedren er koblet sammen ved følgende relation:

$$[K_1(12,12) + KF(5,5)]\theta_{y2} - [KF(5,12)]\theta_{y3} = M_{y2} \quad (5.33)$$

Hvis momentet $M_{y2} = 0$, fås:

$$\begin{aligned}
[K_1(12,12) + KF(5,5)]\theta_{y2} &= [KF(5,12)]\theta_{y3} \\
\Leftrightarrow \\
\frac{\theta_{y2}}{\theta_{y3}} &= \frac{[KF(5,12)]}{[K_1(12,12) + KF(5,5)]}
\end{aligned} \quad (5.34)$$

For at opfylde kontinuitetsbetingelsen skal der gælde at $\Delta\theta = \theta_{y2} - \theta_{y3} = 0 \Rightarrow \frac{\theta_{y2}}{\theta_{y3}} = 1$. Dvs.:

$$1 = \frac{[KF(5,12)]}{[K_1(12,12) + KF(5,5)]} \quad (5.35)$$

På tilsvarende måde findes koblingen mellem stivhedsmatricen for fjederen og element 2 ved følgende relation:

$$[-KF(12,5)]\theta_{y2} + [KF(12,12) + K2(5,5)]\theta_{y3} = M_{y2} \quad (5.36)$$

Hvis det antages at momentet $M_{y2} = 0$, fås:

$$KF(12,5)\theta_{y2} = [KF(12,12) + K2(5,5)]\theta_{y3} \quad (5.37)$$

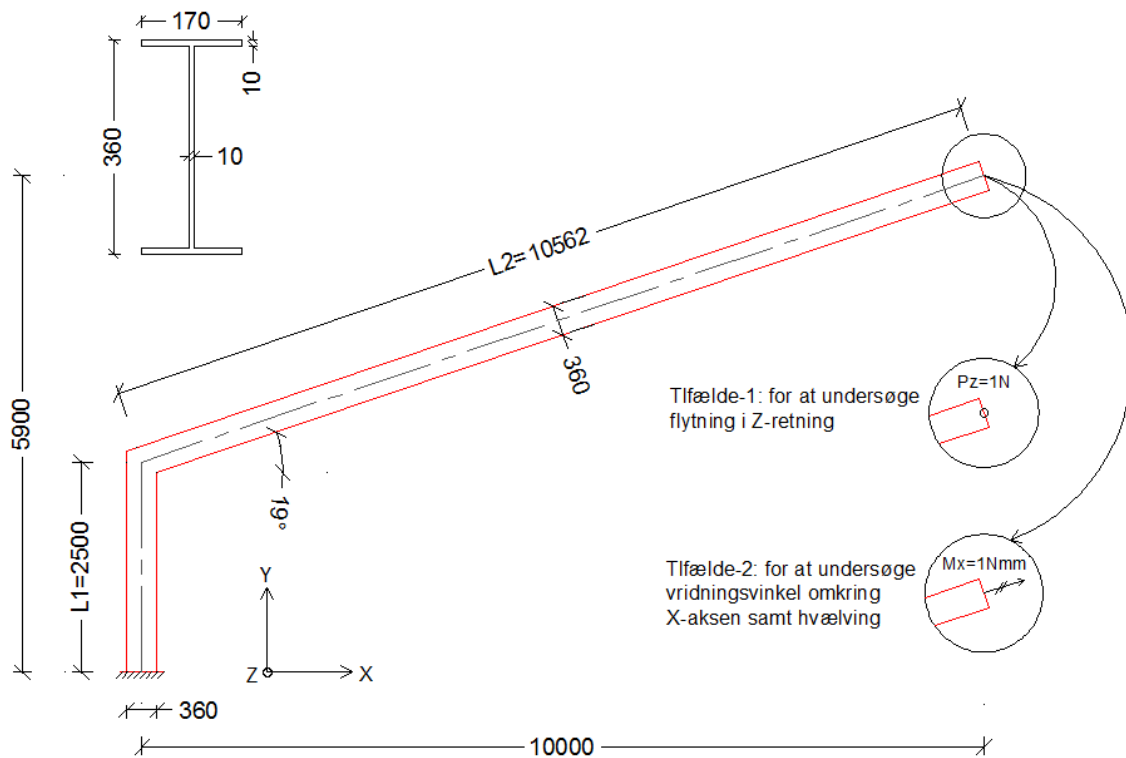
$$\frac{\theta_{y2}}{\theta_{y3}} = \frac{KF(12,12) + K2(5,5)}{KF(12,5)} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{KF(12,12) + K2(5,5)}{KF(12,5)} \quad (5.38)$$

Drejningen $\theta_{y2} = \theta_{y3}$ når ligninger (5.38) og (5.35) er opfyldt. På tilsvarende måde justeres de øvrige frihedsgrader. Nøjagtigheden af metoden undersøges ved numeriske analyser i det efterfølgende afsnit.

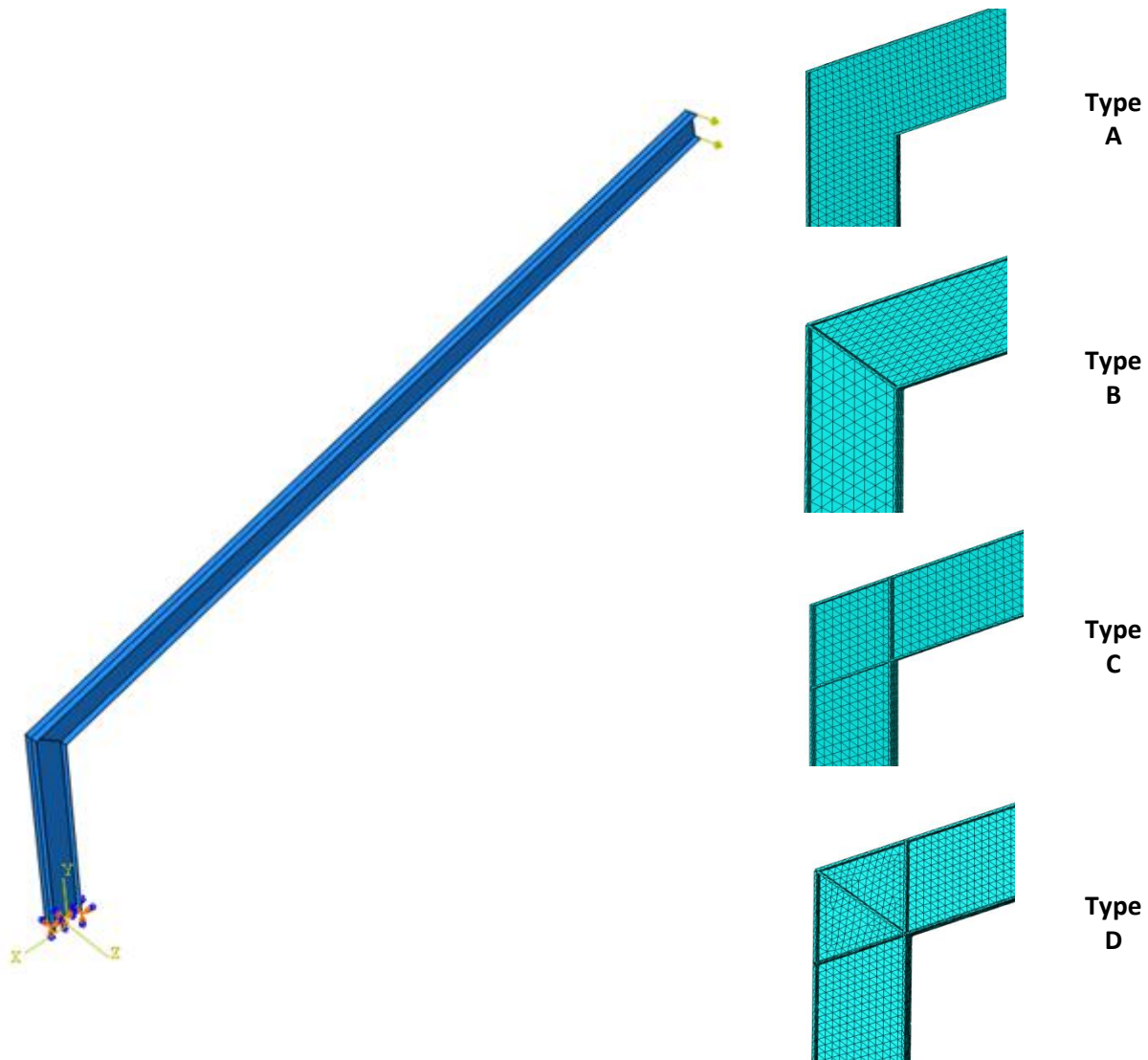
5.2.2 Numerisk beregning

Det skal eftervises om de beregnede fjederstivheder og stivhedstilpasningsmetoden fra de foregående afsnit kan beskrive konstruktions opførsel på en passende måde. Dette gøres først ved at modellere en halv ramme i MatLAB med dimensioner, som kan ses på Figur 89:



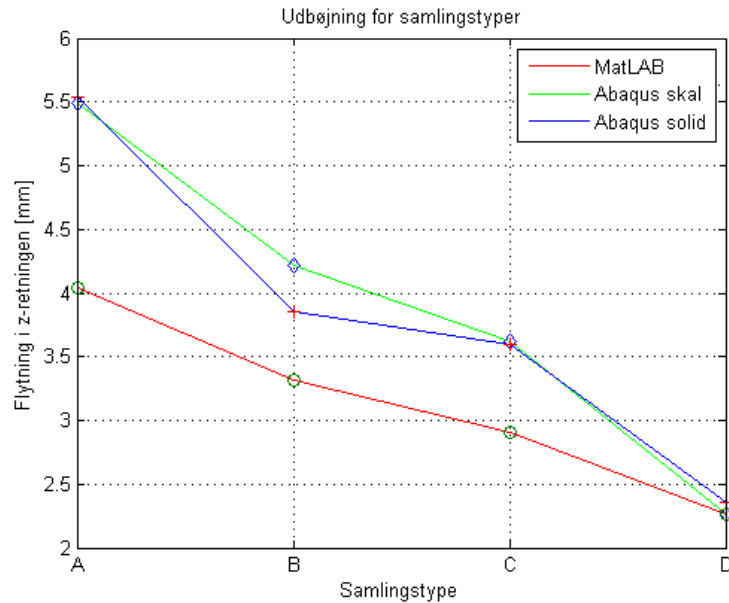
Figur 89: Tilfælde som skal undersøges. Alle ikke-betegnede mål er i mm.

Ved tilfælde 1 undersøges rammens flytning ud af plan samt vinkeldrejningen i rammehjørnet ved 6 og 7 frihedsgrader per knude. Dette gøres ved at påsætte en punktlast i den frie ende og måle på udbøjningen i kip og vinkeldrejningen om y-aksen i rammehjørnet. Ved tilfælde 2 undersøges vinkeldrejningen omkring x-aksen og hvælvingen ved at påsætte et vridende moment i den frie ende med samme aflæsningspunkt. Rammen er indspændt i rammebenet. Resultaterne sammenlignes med skal- og solidmodel fra Abaqus, hvor et FEM mesh af samlingerne kan ses på Figur 90:



Figur 90: Rammekonstruktionen med tilhørende FEM mesh af samlingstyper.

I Abaqus anvendes 10 knudede tetrahedron elementer C3D10 med størrelse på 35-50 mm. Disse elementtyper har vist sig at være bedre til at modellere geometriovergange i forhold til de traditionelle brick elementer. Analysens resultater kan ses på Figur 91:



Figur 91: Udbøjning af rammen ud af plan.

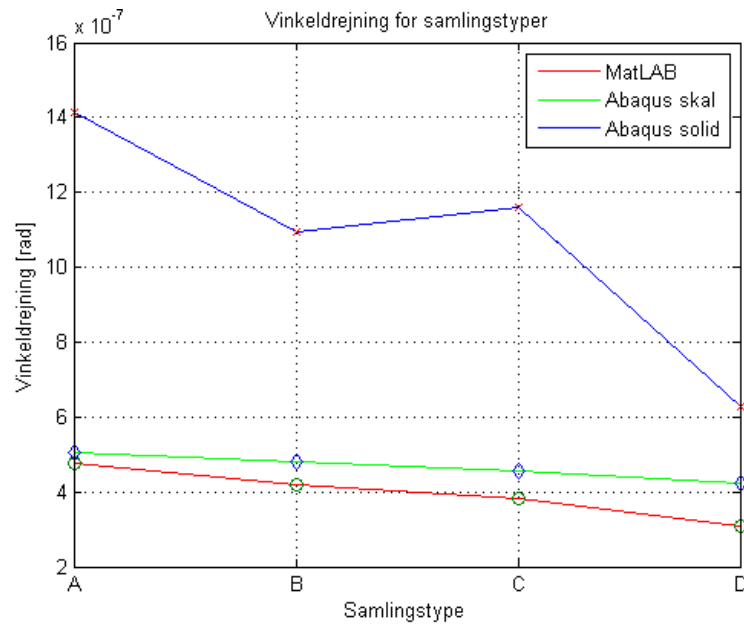
På Figur 91 kan det ses at flytningen i z-retning fra MatLAB ikke stemmer overens med skalmodellen og solid modellen, men alligevel har alle samme tendens, da flytningsværdier bliver mindre ved at anvende samlingstyper B, C og D hvilket forklares ved at stivheden øges for hver samlingstype.

Vinkeldrejningen om y-aksen for 6 og 7 frihedsgrader per knude er bestemt til:

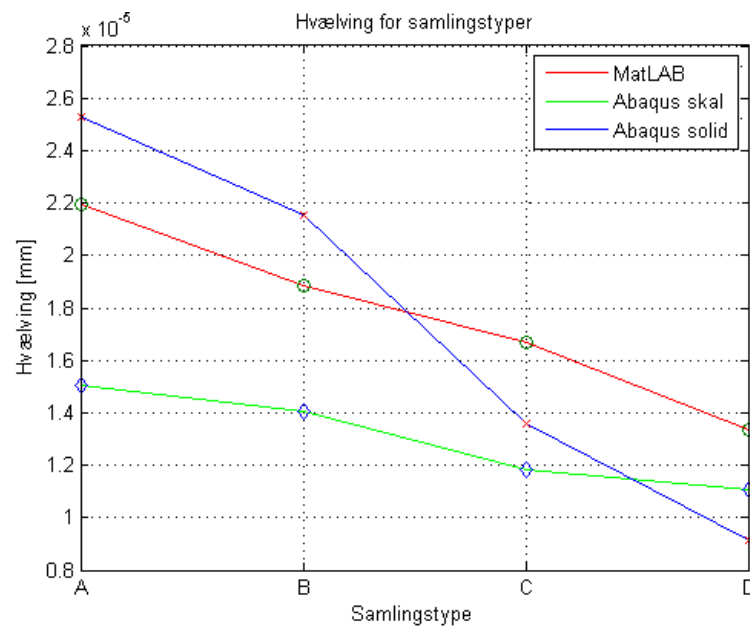
	6 frihedsgrader	7 frihedsgrader	Forskel i %
MatLAB - θ_y [rad]	$1,138 \cdot 10^{-3}$	$3,7796 \cdot 10^{-4}$	66,8
Ansys - θ_y [rad]	$1,312 \cdot 10^{-3}$	$8,9840 \cdot 10^{-4}$	31,52
Ansys - Egenfrekvens [Hz]	3,0606	3,4861	12,2

Tabel 2: Egenfrekvenser og vinkeldrejninger som funktion af frihedsgrader.

Af Tabel 2 kan det ses at antallet af frihedsgrader per knude har en stor betydning på stivheden af samlingen. Forskellen mellem implementering af 6 eller 7 frihedsgrader ved bestemmelse af vinkeldrejningen i MatLAB ligger på 66,8 %, hvilket indikerer at medtagelse af en hvælvingsfrihedsgrad øger samlingens stivhed. Dette forklares ved at det vridende moment bliver overført gennem samlingen vha. hvælvning og vridningsdrejning af søjlen. Hvorimod i tilfælde af fri hvælvning er vridningsmomentet kun overført af vridningsdrejning, hvilket indikerer en slappere konstruktion, som kan også ses af den lavere egenfrekvens. Endvidere kan det ses at der forekommer forskel mellem MatLAB og Ansys. Dette kan være en generel tendens, som Ansys BEAM189 element udviser, idet Ansys elementet har tidligere, i rapporten samt i undersøgelser foretaget af [27], undervurderet stivheden. Tages dette argument i betragtning, vurderes MatLAB kodens resultater til at være rimelige.

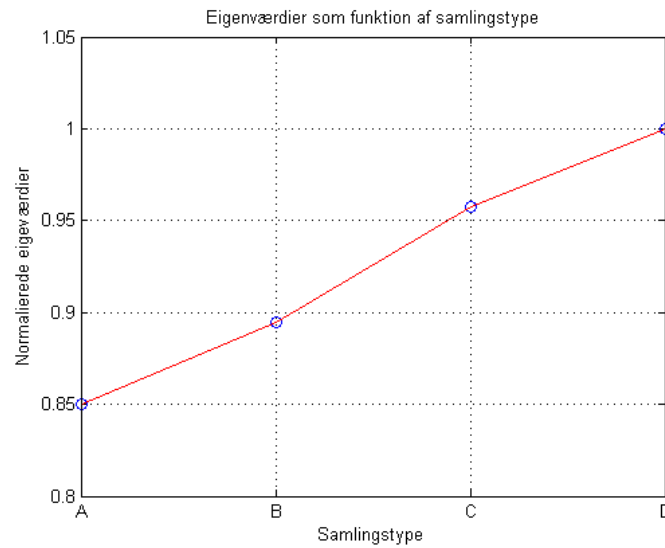


Figur 92: Vridningsvinkel om x-aksen i den frie ende.



Figur 93: Hvælving i den frie ende.

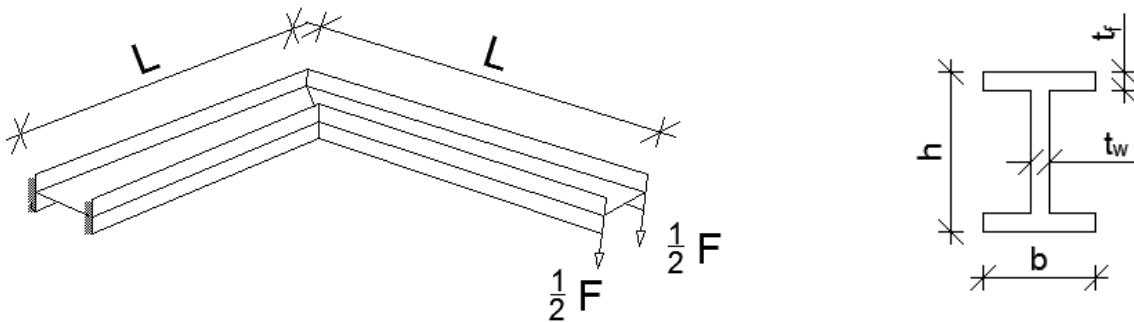
Af Figur 91, Figur 92 og Figur 93 kan ses at implementering af fjederstivhedsmatricen i MatLAB har en betydelig effekt på deformationer afhængigt af hvilken samlingstype der anvendes. Som forventet, samlingstype B med diagonalafstivning i rammehjørnet viser større stivhed end samlingstype A. Samlingstype C med to forlængede flanger viser større stivhed i forhold til samlingstype B. Til gengæld giver samlingstype D den bedste stivhed i forhold til samlingstyper A, B og C. Dette resultat er ikke overraskende da samlingstype D har både en diagonalafstivning og forlængede flanger. At samlingen bliver stivere fra type A til B kan også ses af udviklingen af egenfrekvenser, som efter normalisering kan ses på Figur 94:



Figur 94: Samlingstyper og tilhørende eigenmodes.

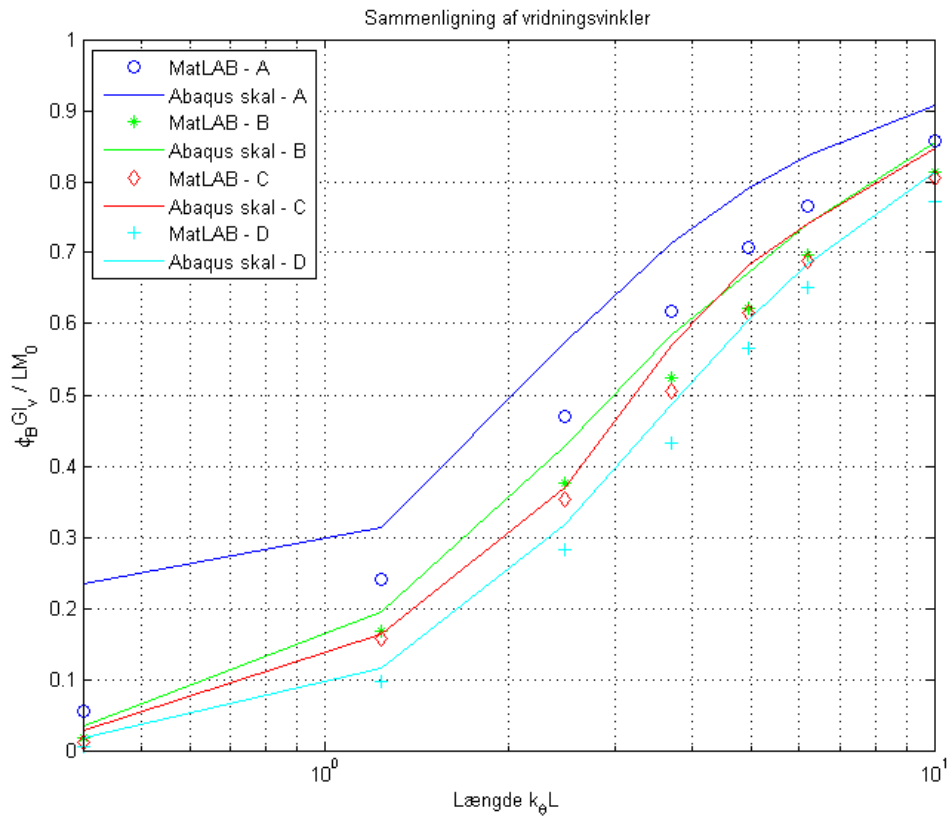
De normaliserede egeverdier for hver samlingstype viser igen at stivheden øges når samlingen går fra A mod D.

I det næste undersøgelse vises vridningsvinklens afhængighed af bjæklængden og stivheden i samlingen. Her tages der udgangspunkt i ramnehjørne analyseret af [33]. Rammen har følgende dimensioner og understøtningsforhold:



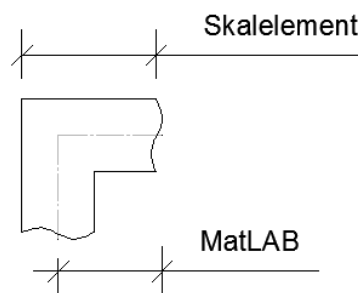
Figur 95: Ramnehjørne

Rammen er indspændt i rammeben og udsat for punktlast i den frie ende hvor $h = 200 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $t_f = 8,5 \text{ mm}$, $t_w = 5,6 \text{ mm}$ og $F = 1 \text{ N}$. Længden L bliver ændret gradvist fra $1000 - 10000 \text{ mm}$. Rammen modelleres i MatLAB og Abaqus ved brug af 8 knudede skal elementer – S8. Resultaterne sammenlignes med dem fra [33]. Resultaterne fra MatLAB sammenlignes først med skalmodellen:



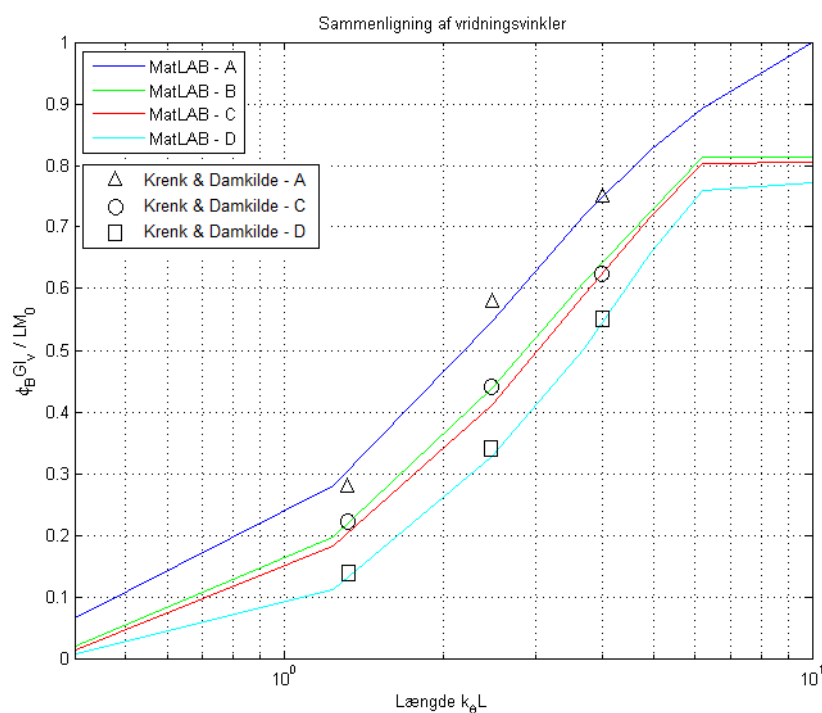
Figur 96: Normaliseret vridningsvinkel fra bjælke- og skalmodellen.

Af Figur 96 kan det, som forventet, ses at vridningsvinklen tiltager med stigende længde dvs. i fuld overensstemmelse med ligning (4.55), idet $\Delta h = 0$. Forskellen mellem skalmodeller og MatLAB ligger på ca. 10 % for samlingstype A og $k_{\theta} L$ værdier over 1. For de resterende er denne under 10 % og aftager jo stivere samlingen er. Forskellen mellem skalmodellen og MatLAB kan tilskrives definitionen af længden af elementerne. I MatLAB bliver længden defineret ud fra centerlinjer hvorimod i skalelementet tilføjes der ekstra længde svarende til halv profilhøjde, som kan ses på Figur 97. Ved større længde fås en større vridningsvinkel i forhold til MatLAB, som det er også tilfældet for samtlige skalmodeller på Figur 96.



Figur 97: Længdedefinitioner.

Resultaterne fra MatLAB sammenlignes med dem i [33] og er plottet på Figur 98:



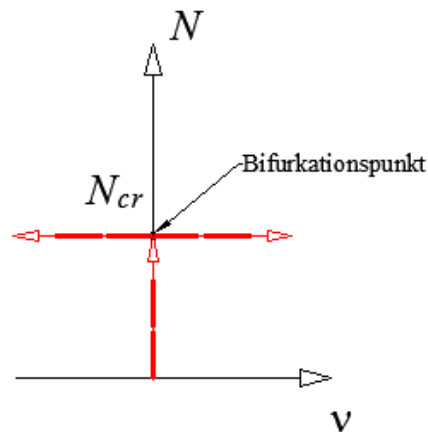
Figur 98: Normaliseret vridningsvinkel.

Af figuren kan det ses at der er meget god overensstemmelse mellem vinkeldrejningen fra egen programmerede MatLAB kode og [33].

Med kendskab til opførselen af det forskydningsfleksible bjælkeelement under belastning, herunder rotation, translation og aksial deformation, er der nu grundlag til at udvide MatLAB koden således at den tager hensyn til stabilitet.

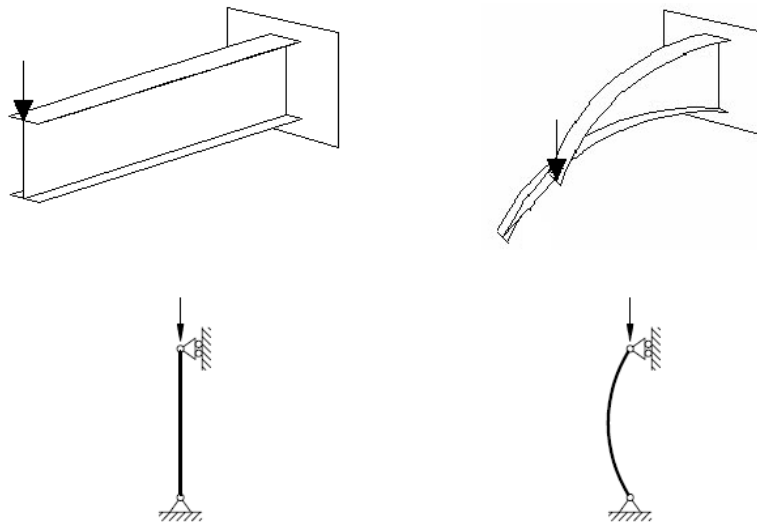
6 Stabilitet

Stabilitet forbindes med konstruktionselementer, som er udsat for høje trykpåvirkninger. Når et element påvirkes af en stigende last N , vil det på et bestemt tidspunkt, nå et punkt N_{cr} , en såkaldt bifurkationspunkt, som kan ses på Figur 99, hvor der eksisterer mere end én ligevægtstilstand: en udeformeret tilstand og en deformeret i form af udbuling for en søjle eller vandret udknækning for en bjælke, hvor deformationen er betegnet ved v .



Figur 99: Ligevægtsforløbet.

Stabilitetssvigt af konstruktioner kan ske på to forskellige måder, enten overskridelse af bæreevne eller en markant ændring af bøjningsform – buckling. Ved korte, centralt belastede søjler er det materialet, som overskrider flydespændingen og ikke udbuling, som er afgørende. For bjælken på Figur 100 medfører kipning en rotation omkring bjælkeaksen og bøjning om den svage akse.



Figur 100: Udeformeret og deformeret tilstand for hhv. bjælke og søjle.

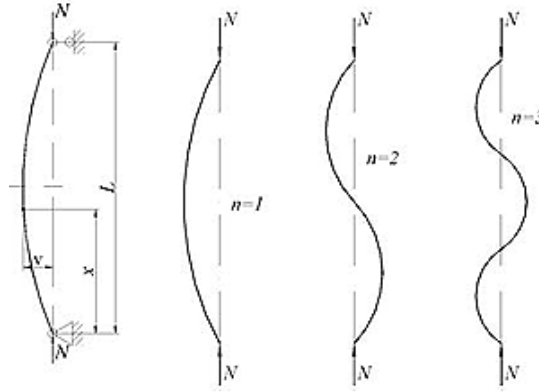
For at afgøre hvornår disse deformationer forekommer, er det nødvendigt at bestemme det lastniveau hvor der er mere end én ligevægtstilstand - N_{cr} [35].

6.1 Søjlestabilitet

Den kritiske søjlelast er udledt i appendiks 9.10 og er:

$$N_{cr} = EI \frac{n^2 \pi^2}{(KL)^2} \quad (6.1)$$

Hvor K er faktoren for den effektive søjlelængde og L er søjlelængden. Størrelsen af K afhænger af hvordan søjlen er understøttet. n er buckling modeshape nummer:



Figur 101: En søjle med tilhørende buckling modeshapes [36].

I komplekse konstruktioner er det besværligt at bestemme faktoren K , hvorfor det er nødvendigt at approksimere denne vha. arbejdslikningen eller energimetoden. Det første step er at introducere en flytningsfunktion $v(x)$, som tilfredsstiller randbetingelserne såsom translationer og rotationer. Nøjagtigheden af resultatet afhænger af hvor god flytningsfunktionen er. Det indre arbejde A_i er konstitueret af elastisk bøjningsenergi og den ydre arbejde A_y er fra de påsatte laster, som i dette tilfælde er trykkraften [37]:

$$A_i = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.2)$$

$$A_y = \int_0^L N_{cr} \varepsilon_x dx = \frac{N_{cr}}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (6.3)$$

Når energiudtrykkene i ligning (6.2) og (6.3) er lig med hinanden, er den kritiske last bestemt. I den lineære teori kan sammenhængen mellem aksialudbøjningen og tværbøjningen, svarende til at søjlen forlænges hvis den får en tværbøjning, ikke beskrives. Denne sammenhæng er beskrevet vha. følgende tøjningsmål:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (6.4)$$

Hvor $\frac{du}{dx}$ og $\frac{dv}{dx}$ er relative længdeændring i hhv. x og y- retningen. Ligning (6.4) er udlet i [9] og ved at antage af at den aksiale deformation er langt stivere end bøjningsstivheden udgår det midterste led. Med henblik på en senere anvendelse deles ligningen i et lineært og en ikke-lineær del:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_{\text{lineær}} + \varepsilon_{\text{ikke-lineær}} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d^2v}{dx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (6.5)$$

For elementmetodeformuleringen kræves der en speciel opstilling af det ikke-lineære tøjningsmål. Udledningerne foretages ikke her, men der henvises til [24] kapitel 3. Denne er:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x^{\text{lineær}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2}_{\text{Søjlestabilitet}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2}_{\text{Vridningsbuling}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 (z^2 + y^2)}_{\text{Kipping}} - \frac{dv}{dx} \frac{d\varphi}{dx} z + \frac{dw}{dx} \frac{d\varphi}{dx} y \quad (6.6)$$

Hvor $\frac{dw}{dx}$ er relative længdeændring i z-retningen og $\frac{d\varphi}{dx}$ er ændring i vinkeldrejningen. Ligninger (6.2) og (6.3) kan udtrykkes mere generelt vha. arbejdsprincippet eller variationsprincippet, som gennemgås i det følgende.

6.1.1 Arbejdsprincippet

Det virtuelle arbejdes princip opstilles i to naboltilstande, der har samme lastniveau. Derfra opstilles der et udtryk til bestemmelse af forskellen i flytningerne mellem to naboltilstande. Den kritiske last svarer her til den værdi af lastparameteren λ , som giver løsninger til tillægflytningerne.

Den første tilstand svarer til fundamentalvejen og betegnes som 0-tilstanden. Fundamentalvejen antages lineær, hvorfor spændingsfordelingen σ^0 i konstruktionen bestemmes ud fra den lineære elementmetodeløsning. Tøjningsdefinitionen er også lineær, hvorfor de virtuelle tøjninger også er lineære:

$$\delta \varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \delta \frac{du}{dx} \\ -\delta \frac{d^2v}{dx} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Integreres over hele konstruktionen, fås det virtuelle arbejde til:

$$\int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta \varepsilon^0 dV = A_{\text{ydre}} \quad (6.8)$$

Den anden tilstand betegnes 1-tilstanden, og denne ligger på den ikke lineære del – bifurkerede gren, hvor spændinger og flytninger i denne tilstand opfattes som sum af størrelserne på fundamentalvejen plus nogle tillægsgled:

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \sigma^0 + \Delta \sigma \\ b^1 &= b^0 + \Delta b\end{aligned}\quad (6.9)$$

Det virtuelle arbejde for 1-tilstanden er givet ved:

$$\int_{\text{konstruktion}} \sigma^{1T} \delta \varepsilon^1 dV = A_{\text{ydre}} \quad (6.10)$$

Hvor $\delta\epsilon^1$ er den ikke lineære tøjningsinkrement givet ved:

$$\delta\epsilon^1 = \delta\epsilon_{\text{lineær}}^1 + \delta\epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1$$

$$\delta\epsilon^1 = \begin{Bmatrix} \delta \frac{du}{dx} \\ -\delta \frac{d^2v}{dx^2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{dv^1}{dx} \delta \frac{dv}{dx} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

Ved samme valg af de virtuelle flytninger i de to tilstanden opnås ens ydre arbejde for begge tilstande:

$$\int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta\epsilon^0 dV = \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{1T} \delta\epsilon^1 dV \quad (6.12)$$

Benyttes ligninger (6.9) og (6.11), kan tillægflytningerne bestemmes:

$$\int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{\text{lineær}}^1 dV + \int_{\text{konstruktion}} \Delta\sigma^T \delta\epsilon_{\text{lineær}}^1 dV + \dots$$

$$+ \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1 dV = \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta\epsilon^0 dV \quad (6.13)$$

I udtrykket (6.13) indgår ikke leddet $\Delta\sigma^T \delta\epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1$, idet tillægflytningerne kommer til at indgå kvadratisk. Her er det grænse tilstanden, som er af interesse. Variationsprincippet kan derfor reduceres til:

$$A_I + A_y = 0 \Rightarrow \int_{\text{konstruktion}} \Delta\sigma^T \delta\epsilon_{\text{lineær}}^1 dV + \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1 dV = 0 \quad (6.14)$$

For at anvende udtryk (6.14) numerisk, skal dette diskretiseres først på elementniveau. Resultatet af diskretiseringen bliver et lineært egenværdigproblem, hvor den numerisk laveste egenværdi og egenfunktionen vil svare til henholdsvis den kritiske last og buleformen.

Geometrisk stivhedsmatrix for søjlestabilitet

Diskretiseringen foretages ved at omskrive ligning (6.3). Flytningen $v(x)$ beskrives vha. flytningsinterpolationsmatricen N_y og knudeflytningerne $\mathbf{b}$, analogt til ligning (2.34):

$$\frac{dv}{dx} = N_y \mathbf{b} \quad (6.15)$$

Hvor N_y er defineret som:

$$N_y = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 6s - 6s^2 & l(-1 + 4s - 3s^2) & 0 & -6s + 6s^2 & l(2s - 3s) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Hvor $s = \frac{x}{L}$. Herefter foretages diskretisering af variations princippet hvor bidragene fra det ydre og det indre arbejde omskrives hver for sig:

$$A_I = \int_{\text{konstruktion}} \Delta\sigma^T \delta\epsilon_{\text{lineær}}^1 dV = \delta\mathbf{b}^T \mathbf{K} \Delta\mathbf{b}$$

$$A_y = \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta\epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1 dV = \sum_{i=1}^{\text{elementer}} N^i \frac{dv}{dx} \delta \frac{dv}{dx} dV \quad (6.17)$$

Hvor $\mathbf{K}$ er stivhedsmatricen og N^i er normalkraften i element i . Da normalkraften er konstant i det enkelte element fås:

$$\int N^i \frac{dv}{dx} \delta \frac{dv}{dx} dV = N^i \int_{element} (N_y \delta \mathbf{b})^T N_y \mathbf{b} dV = \delta \mathbf{b}^T N^i \int N_y^T N_y dV = \delta \mathbf{b} \mathbf{k}_G \mathbf{b} \quad (6.18)$$

Hvor $\mathbf{k}_g^{11}$ er geometriske stivhedsmatrice givet ved:

$$\mathbf{k}_g^{11} = \int_{element} N_y^T N_y dV \quad (6.19)$$

Den geometriske stivhedsmatrice skal følge de globale koordinater. Omskrevet til disse fås egenværdiproblemet på globalt niveau ved:

$$\delta \mathbf{b}^T (\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{b} = 0 \quad (6.20)$$

Da ligning (6.20) skal gælde for vilkårligt valg af virtuelle flytninger, $\delta \mathbf{b}$, fås:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{b} = 0 \quad (6.21)$$

Den globale geometriske stivhedsmatrice $\mathbf{K}_G$ udtrykker i dette tilfælde stivhedsændringen i elementet grundet normalkraftvariationen. Den kritiske last bestemmes ved at beregne lastniveauet λ for hvilket der kan eksistere mere end én ligevægtstilstand. Den geometriske matrice $\mathbf{k}_G$ kan udregnes ud fra ligning (6.19), idet der antages en lineær normalkraftvariation i elementet, hvor $P_1 = P_0 - \frac{P_0}{L}x$, jf. Figur 14, udtrykker variationen i normalkraften P_0 i startknuden og $P_2 = \frac{P_0}{L}x$ i slutknuden:

$$\mathbf{k}_{g1} = P_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} \\ \frac{-1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{L}{120} \cdot \frac{12+14\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-L}{120} \cdot \frac{2+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} \\ \frac{-1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} \\ \frac{1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-L}{120} \cdot \frac{2+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{L}{120} \cdot \frac{4+6\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{k}_{g2} = P_2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} \\ \frac{1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{L}{120} \cdot \frac{4+6\Phi_y+5\Phi_y^2}{1+2\Phi_y+\Phi_y^2} & \frac{-1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-L}{120} \cdot \frac{2+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{1+2\Phi_y+\Phi_y^2} \\ \frac{-1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-1}{60} \cdot \frac{6+8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{10L} \cdot \frac{6+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} \\ \frac{-1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{-L}{120} \cdot \frac{2+10\Phi_y+5\Phi_y^2}{1+2\Phi_y+\Phi_y^2} & \frac{1}{60} \cdot \frac{8\Phi_y+5\Phi_y^2}{(1+\Phi_y)^2} & \frac{L}{120} \cdot \frac{12+14\Phi_y+5\Phi_y^2}{1+2\Phi_y+\Phi_y^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

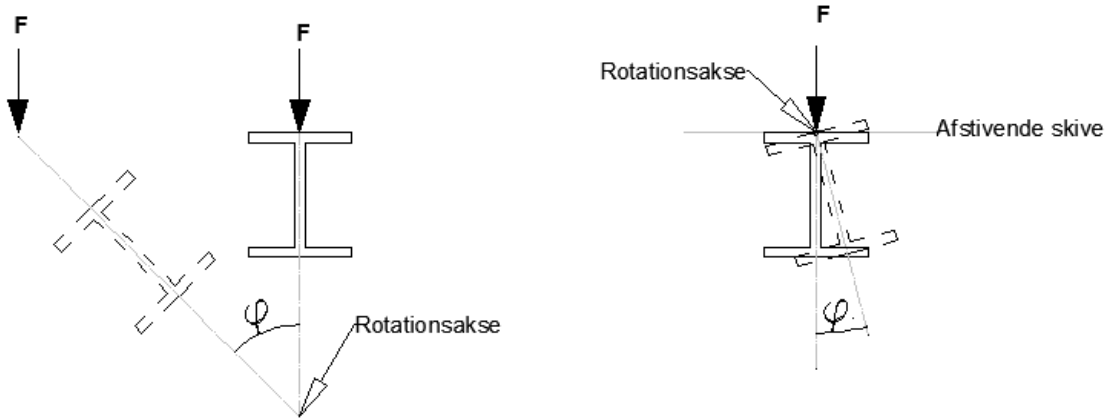
Den geometriske stivhedsmatrice $\mathbf{k}_g^{11}$ er summen af ligninger (6.22) og (6.23) [38]:

$$\mathbf{k}_g^{11} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{k}_{g1} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k}_{g2} \quad (6.24)$$

Beregningen af ligning (6.22) og (6.23) findes i appendiks 9.11.

6.2 Kipning

Kipning forekommer, som sagt i indledningen, ved vandret udknækning og rotation omkring bjælkeaksen. Placeringen af rotationsaksen afgør om der er tale om fri eller bunden kipning:



Figur 102: Fri og bunden kipning.

Følsomheden overfor kipning er størst for profiler med åbent tværsnit, da vridningsstivheden er lille i forhold til for eksempel massive eller lukkede tværsnit. Også forholdende mellem bøjningsinertimomenter er afgørende for kipning. Den geometriske stivhedsmatrix for kipning opstilles på samme måde som for søjlestabilitet, dvs.: ved diskretisering af variationsprincippet hvor det er kun kipning om y-aksen som behandles:

$$\int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0^T} \delta \epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1 dV = \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0^T} \frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{dw}{dx} y + \sigma^{0^T} \varphi^1 \delta \frac{dw}{dx} dV \quad (6.25)$$

I variationsprincippet (6.25) indgår den ikke lineære tøjning indeholdende bidrag fra aksial tøjningen og forskydningstøjningen. Denne er udlet i [9] kapitel 3.3 til:

$$\epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1 = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dw}{dx} y + \varphi \frac{dw}{dx} \quad (6.26)$$

Integralet (6.25) omskrives ved at udtrykke spændingerne vha. snitkræfter:

$$\begin{aligned} \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0^T} \frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{dw}{dx} y + \sigma^{0^T} \varphi^1 \delta \frac{dw}{dx} dV = \\ \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{M_z}{I_z} y \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{dw}{dx} y \right) + \frac{V \cdot S}{b \cdot I_z} \left(\varphi^1 \delta \frac{dw}{dx} \right) dx dy dz + \dots \\ = \int_0^L M_z \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{dw}{dx} \right) dx + \int_0^L \tau \left(\varphi^1 \delta \frac{dw}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (6.27)$$

Da $\int y^2 dx = I_z$ og $\int \frac{V \cdot S}{b \cdot I_z} = \tau$. Flytningsinterpolationsmatricen $\mathbf{N}$ anvendes til at beskrive flytningen og vridningen:

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{N}_z \mathbf{b}_z & \varphi &= \mathbf{N}_\varphi \mathbf{b}_\varphi \\ \frac{dw}{dx} &= \mathbf{G}_z \mathbf{b}_z & \frac{d\varphi}{dx} &= \mathbf{G}_\varphi \mathbf{b}_\varphi \end{aligned} \quad (6.28)$$

Hvor

$$\mathbf{G}_z = \frac{d\mathbf{N}_z}{dx} \quad \mathbf{G}_\varphi = \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dx}$$

Ved indsættelse af (6.28) i (6.27) fås:

$$\begin{aligned} \int_0^L M_z \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{dw}{dx} \right) dx + \int_0^L \tau \left(\varphi^1 \delta \frac{dw}{dx} \right) dx &= \int_0^L M_z (\mathbf{G}_z \delta \mathbf{b}_z)^T (\mathbf{G}_\varphi \Delta \mathbf{b}_\varphi) dx + \dots \\ + \int_0^L \tau (\mathbf{G}_z \delta \mathbf{b}_z)^T (\mathbf{N}_\varphi \Delta \mathbf{b}_\varphi) dx &= \delta \mathbf{b}_z^T \underbrace{\int_0^L (\mathbf{M}_z \mathbf{G}_z^T \mathbf{G}_\varphi + \tau \mathbf{G}_z^T \mathbf{N}_\varphi) dx}_{\mathbf{k}_g^{23}} \Delta \mathbf{b}_\varphi \end{aligned} \quad (6.29)$$

Den geometriske stivhedsmatrice for kipning kan nu udledes ud fra ligning (6.29).

Geometrisk stivhedsmatrice kipning

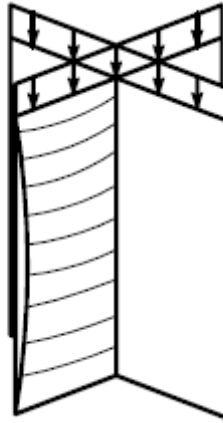
Den geometriske stivhedsmatrice for kipning bestemmes på samme måde som for søjlestabilitet, idet det antages en lineær momentvariation i elementet. Bidrag fra forskydningskraften medtages idet $V = \frac{dM}{dx}$:

$$\mathbf{k}_g^{23} = M_0 \mathbf{k}_{g0}^{23} + M_1 \mathbf{k}_{g1}^{23} + M_0 \mathbf{k}_{g3}^{23} + M_1 \mathbf{k}_{g4}^{23} \quad (6.30)$$

Værdierne for $\mathbf{k}_g$ findes i appendiks 9.12.

6.3 Vridningsbuling

Hos tyndvæggede bjælker, som er påvirkede af ren aksial kraft, kan der udover den sædvanlige søjleudknækning forekomme en såkaldt vridningsbuling eller torisionsbuling. Stabilitetsfænomenet er illustreret på Figur 103:



Figur 103: Simpelt understøttet korsformet søjle.

Ved stabilitetssvigt vil søjlens 4 plader bevæge sig ens svarende til rotation omkring bjælkeaksen. Når bjælken bøjer ud vil den samtidig forkortes, hvilket nødvendiggør at der skal anvendes det ikke lineære tøjningsmål ved diskretisering af variationsprincippet. Det ikke lineære tøjningsmål er givet ved ligning (6.6). Der foretages en omskrivning af det ikke lineære tøjningsmål for vridningsbuling:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d(\varphi^1 + \delta\varphi)}{dx} \frac{d(\varphi^1 + \delta\varphi)}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \right)^2 + \frac{d\varphi^1}{dx} \frac{\delta\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \left(\delta \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \quad (6.31)$$

De sidste to led i ligning (6.31) beskriver de virtuelle tøjninger, men den første og den sidste led medtages ikke, da de beskriver tøjningen kvadratisk. Variationsprincippet kan dermed opskrives til:

$$\begin{aligned} \int_{\text{konstruktion}} \sigma^{0T} \delta \epsilon_{\text{ikke-lineær}}^1 dV &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{N}{A} \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{d\varphi}{dx} \right) (z^2 + y^2) dz dy dx = \dots \\ &= \int_0^L \frac{N}{A} \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{d\varphi}{dx} \right) \left(\frac{1}{12} b^3 h + \frac{1}{12} b h^3 \right) dx = \frac{I_y + I_z}{A} \int_0^L N \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (6.32)$$

Integralet af z^2 og y^2 giver hhv. I_z og I_y . Og ved anvendelse af ligning (6.28) fås:

$$\begin{aligned} \frac{I_y + I_z}{A} \int_0^L N \left(\frac{d\varphi^1}{dx} \delta \frac{d\varphi}{dx} \right) dx &= \frac{I_y + I_z}{A} \int_0^L N (\mathbf{G}_\varphi \delta \mathbf{b}_\varphi)^T (\mathbf{G}_\varphi \Delta \mathbf{b}_\varphi) dx \\ &= \delta \mathbf{b}_\varphi^T \underbrace{\frac{I_y + I_z}{A} \int_0^L N \mathbf{G}_\varphi^T \mathbf{G}_\varphi dx}_{\mathbf{k}_g^{33}} \Delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Den geometriske stivhedsmatrice for vridningsbuling er identisk med (6.24), da formfunktionerne er identiske med flytningerne i x-y planet. Forskellen ligger dog i at den geometriske matrice skal divideres med polær inertiradius og der skal anvendes Φ_ω .

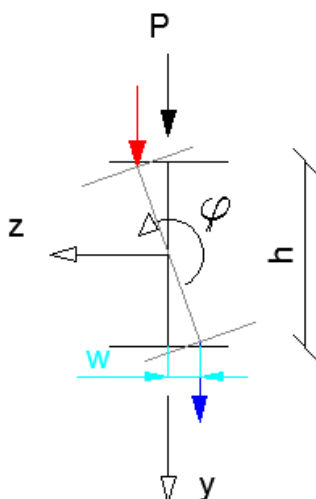
Den samlede geometriske stivhedsmatrice for en tyndvægget bjælkeelement er dermed:

$$\mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_g^{11} & 0 & \mathbf{k}_g^{13} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_g^{22} & \mathbf{k}_g^{23} \\ 0 & \mathbf{k}_g^{13^T} & \mathbf{k}_g^{23^T} & \mathbf{k}_g^{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Aksial} \\ \text{Bøjning om stærk akse} \\ \text{Bøjning om svag akse} \\ \text{Vridning/ hvælving} \end{array} \quad (6.34)$$

Hvor $\mathbf{k}_g^{11}$ er Eulerbuling, der giver udbøjning om stærk akse, $\mathbf{k}_g^{22}$ styrer Eulerbuling der giver udbøjning om svag akse, $\mathbf{k}_g^{33}$ styrer vridningsbuling, $\mathbf{k}_g^{13}$ og $\mathbf{k}_g^{23}$ styrer kipning.

6.4 Placering af belastning

For I-profiler og generelt tyndvæggede bjælker er det væsentligt hvor lasten angriber i tværsnittet. Når lasten er placeret på oversiden af et I-profil, virker denne destabiliserende, hvorimod hvis den er placeret på undersiden, virker den stabiliserende mod vridning. Fænomenet kan forklares ved at betragte Figur 104:



Figur 104: Lastplacering i tværsnittet.

Vridningen kan forekomme ved stabilitetssvigt ved at tværsnittet roterer med en vinkel svarende til φ . Ved drejningen af tværsnittet introduceres der et vridende moment, som svarer til $M_v = \frac{h}{2} P \varphi = w \cdot P$. Når profilet begynder at kipe, vil lasten ikke længere gå igennem tyngdepunktet. Hvis lasten er placeret på overflangen – markeret med rød pil, vil denne forstærke effekten af det vridende moment. Hvis den er derimod placeret i bunden – markeret med blå pil, vil lasten reducere det vridende moment, idet bidraget til det vridende moment bliver negativt. Det virtuelle ydre arbejde af denne last på elementet fås af:

$$A_y = \int_0^L \frac{h}{2} P \varphi \delta \varphi dx \quad (6.35)$$

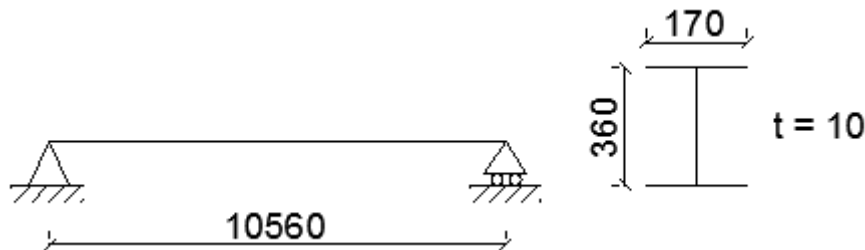
Anvendes formfunktioner fra ligning (6.28) fås elementmetodeformuleringen til:

$$A_y = \int_0^L \frac{h}{2} P \left(\mathbf{N}_\varphi \delta \mathbf{b}_\varphi \right)^T \left(\mathbf{N}_\varphi \mathbf{b}_\varphi \right) dx = \delta \mathbf{b}_\varphi^T P \frac{h}{2} \int_0^L \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{N}_\varphi dx \mathbf{b}_\varphi = \delta \mathbf{b}_\varphi^T \mathbf{k}_{last} \mathbf{b}_\varphi \quad (6.36)$$

Hvorvidt skal k_{last} tilføjes til ligning (6.34) eller trækkes fra, afhænger det af hvor lasten er placeret. Hvis den er placeret i midten, er der ikke noget bidrag til vridningsvinklen og $k_{last} = 0$. Hvis lasten er placeret på toppen af profilet skal k_{last} tilføjes til den geometriske stivhedsmatrix. Og på samme måde hvis lasten er stabiliserende skal k_{last} trækkes fra k_G .

6.5 Numeriske beregninger

En række numeriske beregninger foretages for at eftervise det forudgående teori. Der startes først med verificering af den numeriske løsning ved at betragte en simpelt understøttet bjælke af følgende dimensioner, som bliver fastholdt for alle efterfølgende analyser:



Figur 105: Simpelt understøttet bjælke.

Bestemmelse af egenfrekvens

Der køres en egenfrekvensanalyse af bjælken på Figur 104. Den teoretiske egenfrekvens i [Hz] bestemmes ud fra:

$$f = \frac{K}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \frac{1}{2\pi} \quad (6.37)$$

Hvor ω er den cykliske egenfrekvens, K en faktor, som tager hensyn til modeshape og understøtningsforhold og aflæses fra tabel på s. 69 i [17] og μ er massen per længdeenhed. Resultatet kan ses i Tabel 3:

	Teoretisk	Numerisk
Egenfrekvens [Hz]	2,533	2,5325

Tabel 3: Egenfrekvens.

Bestemmelse af den kritiske last

Der foretages en buckling analyse med henblik på at bestemme den kritiske kipningslast ved to tilfælde: ved påsat punktlast i midten og en ens fordelt last af størrelsesorden på hhv. 1 N og $1 \frac{N}{mm}$. Den teoretiske last bestemmes ud fra følgende:

$$P_{cr_punktlast} = m_n \frac{EI}{L^3} h \quad (6.38)$$

$$q_{cr_linjelast} = m_n \frac{EI}{L^4} h \quad (6.39)$$

Hvor m_n er en konstant, som tager hensyn til randbetingelserne og aflæses af tabel 8.1 i [19], h er tværsnitshøjden, L er længde af bjælken, E er elasticitetsmodul som sættes til 210 000 MPa og I er inertimomentet.

Resultatet er sammenlignet i Tabel 4:

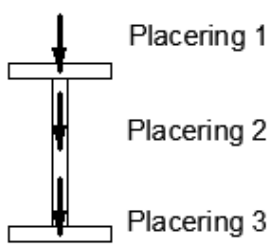
	Teoretisk	Numerisk
Ens fordelt last q_{cr}	$4,81 \frac{N}{mm}$	$4,84 \frac{N}{mm}$
Punktlast N_{cr}	30588 N	30607 N

Tabel 4: Sammenligning af kritiske laster for første mode.

Placeringen af lasten

Som det er nævnt i afsnit 6.4, har placeringen af lasten i tværsnittet også en betydning for den kritiske last. Dette er undersøgt teoretisk og numerisk for tre tilfælde: tværsnit belastet på oversiden 1, i midten 2 og på undersiden 3. Resultaterne er vist i Tabel 5:

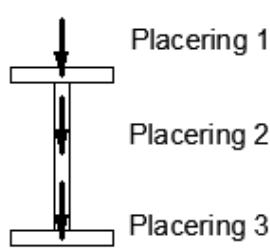
	Teoretisk [N]	Numerisk [N]
Placering 1	23687 N	23698 N
Placering 2	30588 N	30607 N
Placering 3	39295 N	39646 N



Tabel 5: Betydningen af lastplaceringen i tværsnittet - punktlast.

Og det samme for jævnfordelt last:

	Teoretisk $\left[\frac{N}{mm}\right]$	Numerisk $\left[\frac{N}{mm}\right]$
Placering 1	3,930	3,9299
Placering 2	4,81	-
Placering 3	5,920	5,9564



Tabel 6: Betydningen af lastplaceringen i tværsnittet – jævnt fordelt last.

Som det er forventet, hvis lasten placeres nederst, virker den stabiliserende og det omvendte gør sig gældende hvis denne er placeret øverst. Endvidere ses der god overensstemmelse mellem numeriske og teoretiske resultater.

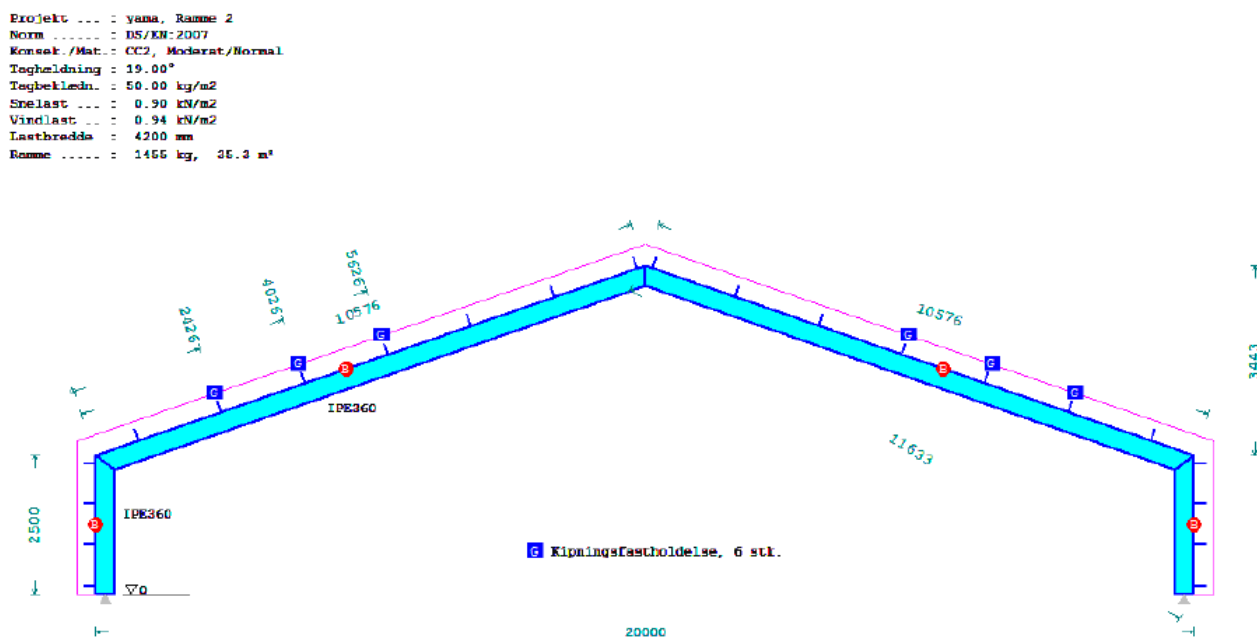
6.5.1 Rammekonstruktion

I dette afsnit modelleres en hel ramme i det kommercielle program HALBER¹. I programmet kan de overordnede dimensioneringsforudsætninger defineres ved angivelse af nogle få hoveddata: spændvidde, benhøjde, taghældning, bygningslængde, terrænklasse, snezone, sikkerhedsklasse, beklædningsvægt og materialekontrolklasse hvorefter programmet selv kan beregne snitkræfter og automatisk foreslå en passende profildimension, herunder med og uden udfligning. Programmet tager dog ikke hensyn til hvælving, dvs. at det kun regner med 6 frihedsgrader.

Ud fra HALBERs beregningsrapport kan det ses at udnyttelsesgraden bestemmes ved kendskab til det maksimale snitmoment M , den plastiske moment bæreevne M_{zcd} og det kritiske moment mht. kipning M_{cr} . Dette kan ses i Tabel 7.

Formålet med afsnittet er at vurdere om det kan lade sig gøre at forøge den kritiske momentbæreevne mht. kipning hvis der blot tilføjes ekstra frihedsgrader i form af hvælving, da det er vist i foregående afsnit at tilførsel af hvælvsfrihedsgrad medfører en større stivhed.

Følgende data er blevet indtastet i programmet: Spændvidde 20 m, benhøjde 2,5 m, taghældning 19°, tagbeklædning $50 \frac{kg}{m^2}$. Alle laster påføres som karakteristiske laster, hvor programmet selv ganger partielkoefficienter afhængigt af lastkombinationer. Den principielle opbygning af rammen kan ses på Figur 106.



Figur 106: Stålramme modelleret i HALBER.

Momentet mht. kipning M_{Euler} og den plastiske momentbæreevne M_{zcd} i den venstre rigel er bestemt i programmet og kan aflæses af Tabel 7. En detaljeret beregningsoversigt kan ses i appendiks 9.13.

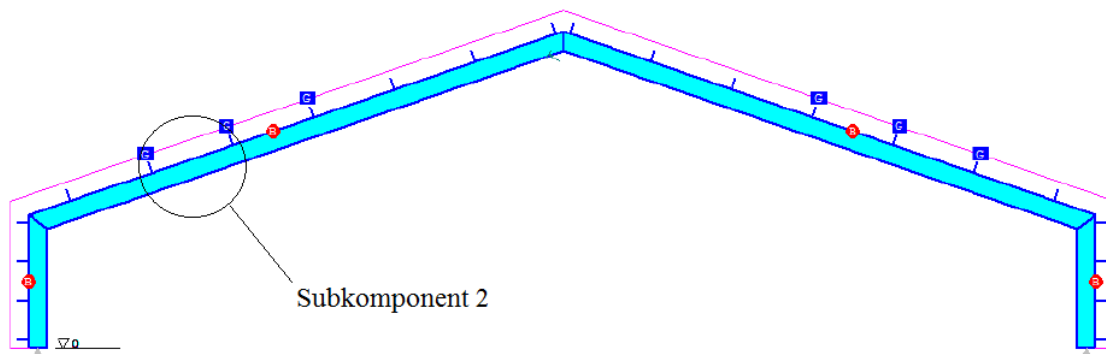
¹ Et rådgivende ingeniørfirma, som dimensionerer, udfører og producerer diverse stål konstruktioner, blandt andet stålrammer, vha. eget program – HALBER – som er baseret på Eurocode 3.

Kipning									
Sub-komp	Koor. [m]	Last-komb	tv kl	Kipn. type	M_{Euler} [kNm]	M_{zd} [kNm]	M_{zcd} [kNm]	M [kNm]	U.G
1	0.13	20	2	Bund	982.4	199.7	194.1	-157.5	0.81
2	2.43	17	2	Bund	1551.2	199.7	199.7	-58.1	0.29
3	5.43	5	2	B-fri	1389.4	199.7	199.7	58.5	0.29
4	6.24	5	2	B-fri	1348.9	199.7	199.7	58.4	0.29
Maximal udnyttelse									0.81

Tabel 7: Resultat fra HALBER, tabel fra side 10 i appendiks 9.13.

Værdierne i Tabel 7 er bestemt for en rammekonstruktion som er afstivet vha. 6 kipningsafstivere i rigler. Disse er markeret med blå firkanter på Figur 106.

Det er i afsnit 5.2.2 vist at medtagelsen af hvælvingfrihedsgraden bidrager til øget stivhed, hvilket skal kunne komme til udtryk ved en højere kritisk last for rammekonstruktionen. I det efterfølgende modelleres en simpelt understøttet ramme i IPE-360 med dimensioner, som vist på Figur 105, taghældning på 19 grader, søjlelængde på 2500 mm og spændvidde på 20 000 mm. Det er således den samme rammekonstruktion, som programmet fra HALBER regner på. HALBER undersøger dog ikke rammekonstruktionen som helhed, men inddeler den i subkomponenter og regner bæreevnen i hver komponent for sig, som det kan ses Tabel 7. I det efterfølgende efterlignes metoden hvorefter der tilføjes 7. frihedsgrad i den numeriske løsning for på den måde at se om der kan opnås større bæreevne i forhold til løsningen fra HALBER. Til undersøgelsen vælges subkomponent 2:



Figur 107: Udvalgt bjælke til undersøgelse.

I HALBER bliver samtlige subkomponenter understøttet af gaffellejere, hvor komponenterne som er tættest på hjørnesamlingen regnes ved bunden kipning. Åsene forudsættes at kunne fastholde yderflangen og dermed opfylde betingelsen for bunden kipning.

Subkomponent 2 modelleres i Ansys BEAM189 og BEAM188 elementer og bjælken udsættes for en linjelast. Resultaterne kan ses i Tabel 8:

	M_{cr} [kNm]	$M_{b,Rd}$ [kNm] – 6 frihedsgrader	7 frihedsgrader
HALBER	1551,2	199,7	Ikke mulig

Eurocode	1574	200	Ikke mulig
Numerisk	1696	202	Urealistisk stort

Tabel 8: Resultater.

Resultatet fra anden række er beregnet ud fra ligning 6.55 fra afsnit 6.3.2.1 i [39]. Detaljerede beregninger findes i appendiks. Ved aktivering af den 7. frihedsgrad i Ansys er der konstateret urealistiske værdier for momentbæreevnen – over 2 gange. Den 7. frihedsgrad aktiveres ved at sætte warping dof til restrained i Ansys. De numeriske resultater fra Abaqus stemte overens med Ansys, dog uden mulighed for at slå hvælving til. Generelt er resultaterne i overensstemmelse med hinanden, hvor det kan ses at Eurocode, som forventet, er mere konservativ end den numeriske løsning.

Den kritiske bæreevne mht. kipning er beregnet ud fra formel 8.33 i [19] og tværsnittets momentbæreevne mht. kipning er beregnet fra formel (6.41):

$$q_{cr} = m_n \frac{EI_z}{L^4} h_t \quad (6.40)$$

Hvor

m_n er en faktor som tager hensyn til lastforhold og aflæses af tabel 8.1 i [19]
 h_t er tværsnitshøjden målt fra midten af top flangen til midten af bundflangen
 I_z er inertimomentet
 L er længden af profilet

Tværsnittets momentbæreevne er beregnet fra:

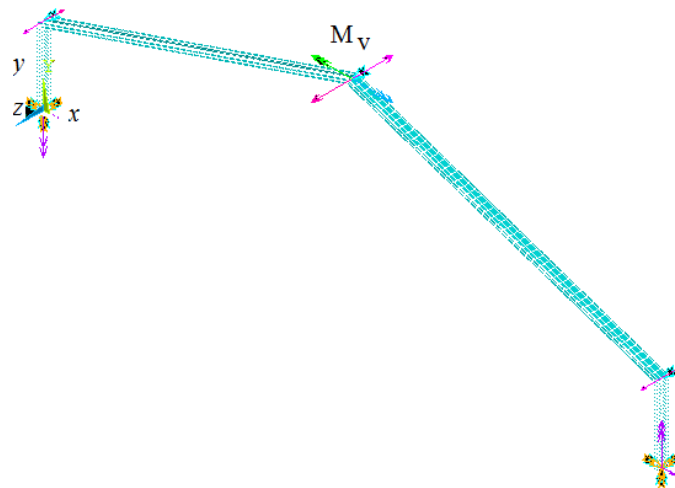
$$M_{b,Rd} = \chi \frac{f_y}{\gamma} \cdot W_{pl} \quad (6.41)$$

Hvor

W_{pl} er den plastiske modstandsmoment
 f_y er den karakteristiske flydespænding
 χ er kippingsreduktionsfaktor
 γ er partielkoefficient for materialeparameter for normal sikkerhedsklasse

Kippingsreduktionsfaktoren χ er direkte afhængig af det kritiske kippingsmoment, som betyder at hvis M_{cr} bliver forøget, vil det samme ske for faktoren og dermed bæreevnen. Det kritiske kippingsmoment bestemmes ved at betragte bjælken som simpelt understøttet.

Udover det ovenstående, blev der modelleret en hel ramme i BEAM189 elementer i Ansys og B33 elementer i Abaqus med samme dimensioner som før, men med randbetingelser, som kan ses på:



Figur 108: Simpelt understøttet rammekonstruktion.

Rammen er simpelt understøttet ved rammeben og er låst mod flytning i z-retningen i rammehjørner og kip. Der påsættes et vridende moment omkring x-aksen i kipsamlingen af størrelsesorden på 1 Nm , hvorefter der køres en buckling analyse i Ansys, for at bestemme det kritiske moment mht. kipning. Dette gøres både for 6 og 7 frihedsgrader i Ansys og sammenlignes med Abaqus. Resultatet kan ses i Tabel 9:

	M_{cr} [kNm] – 6 frihedsgrader	M_{cr} [kNm] – 7 frihedsgrader	Forskel i %
Ansys	77,821	92,493	15,8
Abaqus	75,891	Ikke muligt	-

Tabel 9: Det kritiske kipningsmoment for en hel rammekonstruktion.

Ud fra resultaterne i Tabel 9 kan det ses at det kritiske kipningsmoment fra Ansys og Abaqus stemmer godt overens med hinanden ved 6 frihedsgrader. Det var ikke muligt at slå den 7. frihedsgrad til i Abaqus, da elementet ikke tillod det for den pågældende problemstilling. Fra resultatet i Ansys kan det dog ses at der opnås en betydelig forskel hvis den 7. frihedsgrad aktiveres, hvilket med fordel kan implementeres i praksis, for på den måde at opnå højre bæreevne og dermed en bedre materialeudnyttelse og en økonomisk gevinst.

7 Diskussion og konklusion

Projektet har beskæftiget sig med gennemgang af den forskydningsfleksible teori og den numeriske implementering af denne i MatLAB koden med henblik på medtagelse af hvælvingsfrihedsgraden og på den måde at opnå en bedre bæreevne.

7.1 Bjælker med konstant tværsnit

Den forskydningsfleksible og tekniske bjælketeori er blevet implementeret i MatLAB og verificeret ved at sammenligne nedbøjningen som funktion af den påsatte last med tekniske ståbi og de kommercielle FEM programmer – Ansys og Abaqus. Her viste det sig at der er ingen forskel i resultaterne mellem den analytiske løsning, MatLAB koden og FEM programmerne, hvilket indikere at den programmerede kode er god til at beskrive teorien.

Det er ligeledes eftervist at MatLAB koden kan tage hensyn til forskydningsfleksibiliteten ved at sammenligne det med Abaqus. Her viste det sig at jo slankere profil, jo mindre forskel mellem den tekniske og forskydningsfleksible bjælketeori. Resultatet af MatLAB koden er sammenfaldende med Abaqus. Det viser sig at hvis der er tale om en tyk bjælke, med slankhedsforhold $\frac{H}{L} = 1$ og man anvender den tekniske bjælketeori vil fejlen være på 44 % i forhold til den forskydningsfleksible teori, hvilket understreger hvor vigtigt det er at anvende den korrekte bjælketeori.

Der er foretaget en undersøgelse for at påvise om hvorvidt MatLAB koden er følsom overfor shear locking. Dette er gjort ved at modellere den udkragede bjælke vha. bjælkeelementer og solidelementer, hvor det viser sig at MatLAB koden er fri for shear locking mens de lineære solidelementer er følsomme på dette problem. Dette skyldes anvendelsen af lineære formfunktioner, hvorimod i MatLAB koden anvendes kubiske formfunktioner som er fri for shear locking, idet her forudsættes en lineær momentvariation i tværsnittet. Der er vist at hvis man anvender lineære formfunktioner i MatLAB frem for kubiske vil forskellen i nedbøjningen være på 23-25 % for slanke bjælke dvs. hvor $\frac{H}{L} < 5$.

MatLAB kodens evne til at håndtere vridning er også eftervist ved at modellere et element og sammenligne det med skalelement i Abaqus og den analytiske løsning. Her viser det sig at resultatet stemmer godt overens med Abaqus, hvilket igen indikerer at den programmerede kode er god til at beskrive vridningsproblem. Til gengæld kan det konkluderes at bjælkeelementet i Ansys, BEAM189, ikke egner sig til vridningsrelaterede problemstillinger, idet elementet er mere fleksibelt end solid og skalelementer i Abaqus og MatLAB koden.

MatLAB koden er gradvist udvidet til at kunne håndtere den 7. frihedsgrad – hvælving. Nøjagtigheden af koden er blevet sammenlignet med solid- og skalelementer i Abaqus, hvor der viste sig at MatLAB koden er ligeså effektiv til at håndtere hvælving ligesom Abaqus.

7.2 Bjælker med varierende tværsnit

I MatLAB koden er der ligeledes implementeret en funktion, som kan tage hensyn til de varierende tværsnitsegenskaber. Normalt kan en bjælke med varierende tværsnitsegenskaber beskrives med mange elementer med konstant tværsnit. Der kræves dog en stor elementinddeling for at opnå høj nøjagtighed, som kan have indflydelse på beregningstiden. I projektet omgås dette problem ved at integrere langs

bjælkelængden og på den måde tages der hensyn til tværsnitsændringer uden at bruge mange inddelinger. Dette gøres ved numerisk integration for hvert element. Metoden giver mulighed for at anvende færre elementer og dermed bedre beskrivelse af en udfliget element. Ved undersøgelser af nedbøjninger og vridningsvinkler viser det sig at der ikke er afvigelse mellem resultaterne fra MatLAB og de kommercielle FEM pakker.

Også valget af aflæsningspunktet viser sig til at have en betydning for resultaterne. I MatLAB aflæses resultatet i den yderste knude hvorimod i de kommercielle programmer aflæses resultatet i en knude, som sidder i midten af overflangen. Dette kan forklare den lille afvigelse, som kan ses på Figur 70.

7.3 Samlingstyper

I projektet er der implementeret 4 forskellige hjørnesamlingstyper i MatLAB koden ved at koble en fjederstivhedsmatrice med tilstødende bjælkeelementer og på den måde beskrive overførslen af hvælving fra det ene bjælkeelement til det andet. Fjederstivhedsmatricen er blevet justeret for at kunne opfylde kontinuitetsbetingelser mht. deformationer. Der er modelleret en halvramme i skalelementer med de 4 forskellige samlingstyper og i MatLAB. Halvrammen blev udsat for to typer belastninger: én enkeltkraft ud af plan og et vridende moment i den frie ende. Resultatet viser at der er en lille forskel mellem vinkeldrejninger fra MatLAB og skalmodeellen, som kan tilskrives den måde man definerer længden på. Generelt viser resultaterne den rigtige tendens, dvs. konstruktionens respons bliver stivere ved at gå fra samlingstype A til D.

Der blev ligeledes undersøgt hvorvidt den 7. frihedsgrad har en effekt på vridningsvinklen for den samme ramme. Her viste det sig at hvis man aktiverede den 7. frihedsgrad, kunne man observere en større stivhed, som kom til udtryk ved en mindre vinkeldrejning eller større egenfrekvens.

7.4 Stabilitet

De geometriske matricer for stabilitetsfænomener er blevet implementeret i MatLAB for at bestemme kritiske laster vha. egenværdiproblem, hvor der tages hensyn til lasttype og/eller lastplaceringen på profilet. Dette gav dog en fejl ved bestemmelse af egenværdier i MatLAB, som på grund af tidspres ikke lykkedes at undersøge problemet nærmere. I stedet for blev de yderlige undersøgelser foretaget i de kommercielle FEM programmer, og sammenlignet med stålnormen.

Efter kontakt med HALBER ApS, blev en hel ramme dimensioneret i deres program og resultaterne blev brugt til at undersøge hvorvidt det var muligt at forbedre bæreevnen af konstruktionen, hvis man sat den 7. frihedsgrad i brug, idet HALBER programmet ikke tager hensyn til hvælving. Dimensioneringen af rammen er blevet efterlignet ved at undersøge et afsnit af rammen, et såkaldt subkomponent med en bestemt dimension. Resultaterne var i overensstemmelse med hinanden. Dog var der problem efter aktiveringen af den 7. frihedsgrad hvor bæreevnen blev urealistisk stor.

Effekten af den 7. frihedsgrad kom dog til udtryk ved at modellere en simpelt understøttet rammekonstruktion, som var udsat for et vridende enhedsmoment i sit eget plan. Her viste resultatet en klar forbedring af bæreevnen på 15,8 %, hvilket betyder at det kan være en økonomisk fordel ved at medtage den 7. frihedsgrad i beregningerne og på den måde opnå en bedre materialeudnyttelse.

8 Litteraturliste

1. Titus Steel Building Systems . [Online] Titus Steel Building Systems . [Citeret: 24. Februar 2012.] <http://www.titussteelbuildings.com/agricultural.html>.
2. **Damkilde, Lars.** *Introduktion til tyndvæggede bjælker.* Esbjerg : s.n., 2002.
3. **Pedersen, Ronnie R.** *Introduction to the Finite Element Method (FEM1).* Esbjerg : s.n., 2010.
4. **Haukass, Terje.** *Timoshenko Beam Theory.* s.l. : University of British Columbia, 2011.
5. **Luo, Yunhua.** *An Efficient 3D Timoshenko Beam Element with Consistent Shape Functions.* s.l. : Adv. Theor. Appl. Mech., 2008. Årg. 1.
6. **Khulief, A. Bazoune And Y. A.** *Shape Functions Of Three-dimensional Timoshenko Beam Element.* s.l. : Journal of Sound and Vibration, 2003.
7. **Weian Yao, Wanxie Zhong og Chee Wah Lim.** *Symplectic Elasticity.* s.l. : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2009.
8. **Cirak, Fehmi.** *Finite Element Formulation for Beams.* s.l. : Univeristy of Cambridge.
9. **Damkilde, Lars.** *Elementmetoden for bjælkekonstruktioner - kapitel 2.* Lyngby : Institut for bærende konstruktioner og materialer, DTH, 1999.
10. **Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, Robert J. Witt.** *Concepts and applications of finite element analysis.* s.l. : John Wiley & Sons, Inc., 2002. Årg. 4.
11. **Pedersen, Geir A.Gunnlaugsson and P. Terndrup.** *A Finite Element Formulation For Beams With Thin Walled Cross-sections.* s.l. : Pergamon Press Ltd, 1981.
12. **Heiko Panzer, J"org Hubele, Rudy Eid and Boris Lohmann.** *Generating a Parametric Finite Element Model of a 3D Cantilever Timoshenko Beam Using Matlab.* s.l. : Institute of Automatic Control, Technische Universitat Munchen, 2009.
13. **R. Alsafadie a, M.Hjiaj a, J.-M.Battini b.** *Three-dimensional formulation of a mixed co-rotational thin-walled beam element incorporatin gshear and warping deformation.* s.l. : Thin-Walled Structures, 2010.
14. **Yaw, Louie L.** *Stiffness matrix for 2D tapered beams.* s.l. : Walla Walla University, 2009.
15. **Clausen, Johan.** *Finite element analysis of plane stress and strain.* Aalborg : Aalborg University, Department of Civil Engineering, 2010.
16. **Clausen, Johan.** *Structural elements 3D beam element.* Aalborg : s.n., 2010.
17. **Olsen, C.G Jensen og K.** *Teknisk ståbi.* Århus : s.n., 2004.
18. **Sun, Eric Qiuli.** *Shear Locking and Hourglassing in MSC Nastran, ABAQUS and ANSYS.*

19. **Jensen, Bent Bonnerup og Bjarne Chr.** *Stålkonstruktioner efter DS 412*. København : Nyt Teknis Forlag, 2004.
20. **Grondin, Bruce G. Estabrooks and Gilbert Y.** *Combined Bending and Torsion of Steel I-Shaped Beams*. s.l. : University of Alberta Department of Civil & Environmental Engineering, 2008.
21. **Hoogenboom, P.C.J.** *Vlasov torsion theory* . 2006.
22. **Zhao-qiang WANG, Jin-cheng ZHAO, Da-xu ZHANG, Jing-hai GONG.** *Restrained torsion of open thin-walled beams including shear deformation effects*. s.l. : Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering), 2011.
23. **Damkilde, Lars.** *Stress and stiffness analysis of beam-sections*. Lyngby : DTU, 2000.
24. —. *Elementmetodeformulering af tyndvæggede bjælker*. Lyngby : Danmarks tekniske universitet, 1999.
25. **Trahair, Sritawat Kitiponchai and Nicholas S.** *Elastic Stability of Tapered I-Beams*. s.l. : Journal of Structural Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1972.
26. **Yau, Jong-Dar.** *Stability of tapered I-Beams under torsional moments*. s.l. : Department of Architecture and Building Technology, Tamkang University, Taipei, Taiwan, 2006.
27. **Xiao-feng WANG, Qi-lin ZHANG and Qing-shan YANG.** *A new finite element of spatial thin-walled beams*. s.l. : Shanghai University and Springer-Verlag, Applied Mathematics and Mechanics, English edition, 2010.
28. **C. Basaglia, D. Camotim, N. Silvestre.** *Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: Kinematics, modelling and structural response*. Lisbon : Journal of Constructional steel research, 2011. 6920123953.
29. **CHAI, TAN YU.** *Warping Behaviour Of Cantilever Steel Beam With Openings*. s.l. : Universiti Teknologi Malaysia.
30. **Masarira, Alvin.** *The effect of joints on the stability behaviour of steel frame beams*. s.l. : Journal of Constructional Steel Research, 2002.
31. **C. BaCamotim, N. SilvestreC. Basaglia, D. Camotim, N. Silvestre.** *Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: Kinematics, modelling and structural response*. s.l. : Journal of Constructional Steel Researc, 2011.
32. **P. Vacharajittiphan, N. Trahair.** *Warping and distortion at I-section joints*. s.l. : Journal of structural division, A.S.C.E., 1974.
33. **Krenk S., Damkilde L.** *Warping of Joints in I-Beam assemblages*. Lyngby : s.n., 1990.
34. **Marco Santarelli, Markku Heinisuo, and Ari Aalto.** *Effect of end plates on lateral torsional buckling loads of steel beams in ambient and fire conditions*. s.l. : Journal of Structural Mechanics, 2010.

35. **Galambos, Theodore V.** *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. s.l. : John Wiley & Sons, INC., 1998.
36. **Vaidotas Sapalas, Michail Samofalov, Viaceslav Saraskinas.** *FEM Stability Analysis of Tapered Beam-Columns*. s.l. : Journal Of Civil Engineering And Management, 2005.
37. **Timoshenko, S. P., and Gere, J. M.,** *Theory of Elastic Stability*. s.l. : McGraw-Hill, 1961.
38. **Yau, Jong-Dar.** *Stability of tapered I-Beams under torsional moments*. s.l. : Finite Elements in Analysis and Design 42 , 2006.
39. **Standard, Dansk.** *Eurocode 3: Stålkonstruktioner - Del 1-1: Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner*. s.l. : DS/EN, 2007.

9 Appendiks

Til rapporten vedlægges følgende appendikser i elektronisk form på CD'en:

- 9.1 Bestemmelse af formfunktioner vha. Lagrange princippet
- 9.2 Bestemmelse af stivhedsmatrice for bjælkeelement med 7 frihedsgrader
- 9.3 Kondensering af formfunktioner
- 9.4 Kondensering af stivhedsmatricen for bjælkeelement med 7 frihedsgrader
- 9.5 Bestemmelse af aksiale formfunktioner
- 9.6 Bestemmelse af konsistente knudekræfter for elementet
- 9.7 Forskydningsstivheden over for hvælvingsvridning for et I-profil
- 9.8 Transformationsmatricer
- 9.9 Transformation af frihedsgrader fra flangerne til kroppen
- 9.10 Bestemmelse af den kritiske søjlelast
- 9.11 Geometrisk stivhedsmatrice for søjlestabilitet
- 9.12 Geometrisk stivhedsmatrice for kipning
- 9.13 Beregningseksempel fra HALBER