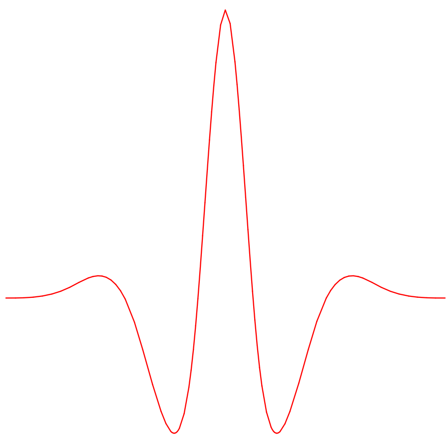
Konstruktion af tight multiwaveletframes

af

Linda Østervig Jensen
Helene Pilgaard Larsen
Hanne Lyngby Laursen

Juni 2006



Aalborg Universitet
Institut for Matematiske Fag
Fredrik Bajers Vej 7G • 9220 Aalborg Ø • Danmark

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Fredrik Bajers Vej 7G
9220 Aalborg Ø
Telefon +45 98 15 81 29
Fax +45 96 35 88 02
http://www.math.aau.dk

Titel:
Konstruktion af
tight multiwaveletframes

Emne:
Anvendt matematisk analyse

Projektperiode:
1. februar - 12. juni 2006

Projektgruppe:
G4-107

Gruppemedlemmer:
Linda Østervig Jensen
Helene Pilgaard Larsen
Hanne Lyngby Laursen

Vejleder:
Morten Nielsen

Antal kopier: 13

Antal sider: 143

Synopsis:

I dette speciale konstrueres tight multiwaveletframes for $L^2(\mathbb{R})$ ved hjælp af multiskalateknikker. Først vises udvalgte egenskaber for frames. Derefter introduceres framemultiskalaanalyse, hvilket er et teoretisk redskab, der giver beregningsmæssige fordele ved de konstruerede waveletframes for $L^2(\mathbb{R})$.

Herefter bevises Det Unitære Udvidelsesprincip og Det Oblique Udvidelsesprincip, som begge giver metoder til konstruktion af multiwaveletframes. Udvidelsesprincipperne integrerer framemultiskalaidéen, hvilket betyder, at de beregningsmæssige fordele bibeholdes. Det vises desuden, hvordan der ved hjælp af udvidelsesprincipperne kan stilles krav, så de konstruerede multiwaveletframes får ned til én generator.

Det Unitære Udvidelsesprincip sætter visse begrænsninger på egenskaberne for de konstruerede multiwaveletframes. Der argumenteres for, hvorledes det er muligt at opnå bedre approksimationsorden for tight multiwaveletframes, når disse konstrueres ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip fremfor Det Unitære Udvidelsesprincip. Dette eksemplificeres afslutningsvist ved brug af B-splines.

Summary

In this thesis we discuss the construction of tight multiwavelet frames for $L^2(\mathbb{R})$ based on frame multiresolution analysis. The setup is inspired by the construction of orthonormal wavelet bases for $L^2(\mathbb{R})$ via classic multiresolution analysis.

We describe selected properties of frames with the intention to construct multiwavelet frames for $L^2(\mathbb{R})$. We set up a frame multiresolution analysis which gives a systematic way to construct waveletframes for $L^2(\mathbb{R})$.

Wavelet frames constructed via frame multiresolution analysis are attractive from a computational aspect. We discuss two principles for constructing tight multiwavelet frames, which both integrate the frame multiresolution idea: The unitary extension principle and the oblique extension principle. Therefore tight multiwavelet frames constructed via these two extension principles keep the computational advantages from multiresolution analysis. We prove the two extension principles.

Tight multiwavelet frames constructed via the unitary extension principle have some restrictions. One of these restrictions is related to the approximation order provided by the tight multiwavelet frame. We demonstrate that the tight multiwavelet frames constructed via the oblique extension principle can have a larger approximation order than the ones constructed via the unitary extension principle.

Finally we illustrate the advantages concerning approximation order gained by the oblique extension principle in relation to the unitary extension principle in an example based on B-splines.

Forord

Denne rapport er udarbejdet af gruppe G4-107 som speciale på MAT6 ved Institut for Matematiske Fag på Aalborg Universitet i perioden fra den 1. februar til den 12. juni 2006.

Litteraturhenvisninger skrives i [] og henviser til litteraturlisten, som er placeret på rapportens sidste side.

Bagerst i rapporten er der placeret to appendiks, som benævnes med henholdsvis A og B. Operatorer, der indføres i Appendiks A, anvendes uden henvisning.

I rapporten betegner C en positiv konstant. Det nævnes ikke, når et resultat kun gælder "næsten overalt". L^2-normen, $\|\cdot\|_{L^2}$, betegnes blot med $\|\cdot\|$. $L^2(\mathbb{T})$ betegner rummet, der består af de 1-periodiske L^2-funktioner på intervallet $[-1/2, 1/2]$. På samme måde betegner $L^\infty(\mathbb{T})$ de 1-periodiske L^∞-funktioner på intervallet $[-1/2, 1/2]$. $C(\mathbb{R})$ betegner rummet af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$, mens $C_c(\mathbb{R})$ betegner rummet af kontinuerte funktioner med kompakt støtte på $\mathbb{R}$.

Aalborg 12. juni 2006.

Linda Østervig Jensen

Helene Pilgaard Larsen

Hanne Lyngby Laursen

Indhold

Kapitel 1

Indledning

En wavelet ψ er en funktion i $L^2(\mathbb{R})$, som har den egenskab, at $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ udgør en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$. En sådan basis kaldes en waveletbasis.

Den første wavelet blev konstrueret af Alfred Haar i 1910 [Dau92, s. 10], og denne benævnes i dag Haar-waveleten. Det var dog først i 1980'erne, at udviklingen af teorien for wavelets tog fart. Dette skyldtes, at der opstod interesse for anvendelser af teorien, blandt andet indenfor signalbehandling. Således opstod interessen for wavelets ikke blot på baggrund af ren matematisk interesse.

Ønsket om at formalisere konstruktionen af waveletbaser førte til, at Mallat og Meyer i 1986 udviklede multiskalaanalysen som et redskab til konstruktion af waveletbaser [Dau92, s. 129]. I multiskalaanalysen opstilles krav, der kan vises at være tilstrækkelige for at kunne konstruere en waveletbasis. En waveletbasis, der er konstrueret ved hjælp af en multiskalaanalyse, er i besiddelse af beregningsmæssige fordele.

Det er dog forholdsvis svært at konstruere waveletbaser, hvor basiselementerne udover deres basisegenskab besidder andre egenskaber. For eksempel kan det ikke lade sig gøre for elementerne i en waveletbasis både at have eksponentielt henfald og være C^∞ med begrænsede afledte, [Dau92, s. 155].

Fleksibiliteten af baser er derfor relativ lille, hvilket var en af grundene til, at der opstod en interesse for at søge efter et mere fleksibelt redskab, som bibeholdt nogle af de samme egenskaber som baser. Tanken er, at det stadig skal være muligt at udtrykke ethvert element i rummet ved hjælp af det søgte værktøj, men denne repræsentation behøver ikke længere være entydig. Hvis det således ikke er nødvendigt for os at have en entydig respræsentation, men det blot er tilstrækkeligt for os at vide, at der *eksisterer* en repræsentation, så kan vi bruge redskabet "frame". En frame kan betegnes som en følge, der giver mulighed for at repræsentere ethvert element i det givne rum som en linearkombination af elementerne i framen. Repræsentationen er dog ikke nødvendigvis entydig. Begrebet frames blev første gang introduceret af Duffin og Schaeffer i 1952 [DHRS03, s. 3], men det var først med udviklingen af waveletteori, at kendskabet til frames blev udbredt.

På samme måde, som der tales om en waveletbasis for $L^2(\mathbb{R})$, så kaldes en frame med samme struktur for en waveletframe for $L^2(\mathbb{R})$. Hvor en waveletbasis i $L^2(\mathbb{R})$ er genereret af en enkelt wavelet, så kan man for at opnå endnu større fleksibiltet, desuden tillade waveletframen at være genereret af flere funktioner. Antallet af disse generatorer må dog heller ikke være for højt, da beregningskompleksiteten stiger i takt med antallet af generatorer.

Hvis man pålægger en frame et ekstra krav, så opnås en "tight" frame. Ved hjælp af en tight frame, er det nemt at konstruere koefficienterne i repræsentationen af et givet element, hvilket giver beregningsmæssige fordele.

Det kan vises, at indflydelsen af støj på et signal, der er rekonstrueret ved hjælp af en frame, er mindre, end indflydelsen vil være på et signal, der er rekonstrueret ved brug af en basis, [Chr03, s. 117]. I signalbehandling er frames derfor, med hensyn til indflydelse af støj, mere effektive end ortonormale baser. Indenfor eksempelvis signalbehandling vil der altså med fordel kunne anvendes en waveletframe til rekonstruktionen af givne signaler fremfor en waveletbasis.

Med inspiration i den klassiske waveletteori og multiskalaanalyse opstillede Benedetto og Li i 1994 framemultiskalaanalysen [Chr03, s. 284]. Konstruktioner via denne framemultiskalaanalyse har beregningsmæssige fordele. Dette bibeholdes i Det Unitære Udvidelsesprincip, som blev bevist af Ron og Shen i 1997, [DHRS03, s. 6]. Dette udvidelsesprincip stiller krav, som gør det muligt at konstruere tight multiwaveletframes, hvor de beregningsmæssige fordele fra framemultiskalaanalysen er bibeholdt.

Det har dog vist sig, at Det Unitære Udvidelsesprincip sætter visse begrænsninger på de konstruerede waveletframes. En af disse begrænsninger knytter sig til approksimationsordenen af den konstruerede frame. Approksimationsordenen udtaler sig om, hvor nøjagtigt en given funktion kan rekonstrueres ved hjælp af en given tight multiwaveletframe.

I 2001 beviste Daubechies, Han, Ron og Shen Det Oblique Udvidelsesprincip, som er en teoretisk videreudvikling af Det Unitære Udvidelsesprincip. Det Oblique Udvidelsesprincip giver større fleksibilitet i konstruktionen af tight multiwaveletframes.

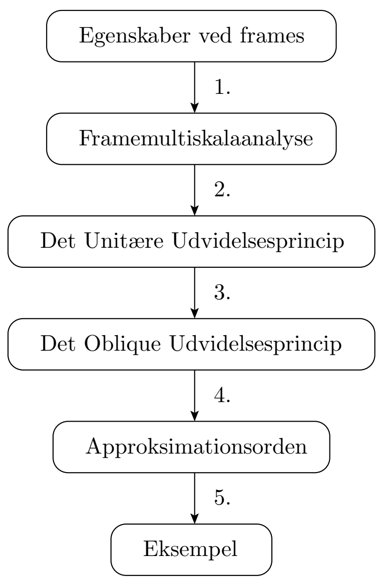
Med motivation i ovenstående arbejdes der i projektet med følgende problemformulering.

1.1 Problemformulering

Der ønskes en gennemgang af henholdsvis Det Unitære og Det Oblique Udvidelsesprincip med henblik på at forstå begrænsinger ved tight multiwaveletframes, der er konstrueret via Det Unitære Udvidelsesprincip. Der ønskes forståelse for, hvorledes tight multiwaveletframes kan konstrueres uden disse begrænsninger ved indførelse af Det Oblique Udvidelsesprincip. Der lægges særlig vægt på egenskaben approksimationsorden.

1.2 Rapportens struktur

I dette afsnit forklares den fysiske struktur i rapporten. Strukturen knytter sig til Figur 1.1.



Figur 1.1: *Rapportens struktur.*

1. Først introduceres frames, og udvalgte egenskaber ved disse bevises. I forlængelse af dette opstilles framemultiskalaanalysen.

2. Idéen i framemultiskalaanalysen integreres i Det Unitære Udvidelsesprincip, som er et redskab til konstruktion af tight multiwaveletframes. Ved anvendelse af Det Unitære Udvidelsesprincip bibeholdes således de beregningsmæssige fordele ved de konstruede frames. Det diskuteres herefter, hvilke begrænsninger Det unitære Udvidelsesprincip sætter på de konstruerede multiwaveletframes.

3. Det Unitære Udvidelsesprincip videreudvikles til Det Oblique Udvidelsesprincip. Det Oblique Udvidelsesprincip giver mere fleksible konstruktioner af multiwaveletframes. Herefter diskuteres den større fleksibilitet.

4. Størrelsen af approksimationsordenen for en tight multiwaveletframe er vigtig i mange anvendelser. Det diskuteres, hvorfor tight multiwaveletframes med høj approksimationsorden fremkommer mere naturligt ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip i forhold til Det Unitære Udvidelsesprincip. Én af motivationerne for at indføre Det Oblique Udvidelsesprincip er derfor approksimationsorden.

5. Rapporten afsluttes med et eksempel, der illustrerer forskellen med hensyn til approksimationsorden af tight multiwaveletframes, der er konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære- og Det Oblique Udvidelsesprincip.

Kapitel 2

Frames i Hilbertrum

Dette kapitel er baseret på [Chr03].

Formålet med dette kapitel er at introducere frames og med henblik på senere at kunne konstruere tight multiwaveletframes for $L^2(\mathbb{R})$, så bevises en række udvalgte resultater omkring frames.

Intuitivt kan en frame betragtes som en overkomplet basis. Det er en mængde af elementer, som udspænder et Hilbertrum, men som ikke giver en entydig repræsentation af elementerne i rummet. De anderledes krav til elementerne i en frame i forhold til en basis gør, at frames er mere fleksible at arbejde med.

Først i dette kapitel præsenteres Besselfølger, hvilket fører over i en introduktion af frames og frameoperatorer. Den behandlede teori gælder generelt for Hilbertrum, men videre i kapitlet introduceres waveletframes, som er en speciel familie af frames for det specifikke rum $L^2(\mathbb{R})$. Afslutningsvist beskrives vanishing moments, der er en egenskab ved generatorerne i en multiwaveletframe.

2.1 Besselfølger

I det følgende defineres Besselfølger, og operatorerne T og T^* indføres i forhold til Besselfølger. Disse operatorer kommer til at spille en vigtig rolle i forhold til indførelsen af frames.

I kapitlet betegner $\mathcal{H}$ og $\mathcal{K}$ uendeligt dimensionale Hilbertrum.

Definition 2.1.1 (Besselfølge)
En følge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{H}$ kaldes en Besselfølge, hvis der eksisterer en konstant $B > 0$ således, at

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{2.1.1}$$

Alle B, der opfylder (2.1.1), kaldes Besselgrænser for $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Følgende sætning karakteriserer operatoren T, der er tilknyttet enhver Besselfølge.

Sætning 2.1.2
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathcal{H}$. Så er følgende to punkter ækvivalente:

(i) $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *er en Besselfølge med grænse B.*

(ii) *Afbildningen $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}$, hvor*

$$T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} := \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k, \quad \forall \{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{N}), \tag{2.1.2}$$

er en veldefineret begrænset operator, og der gælder, at

$$\|T\|_{op} \leq \sqrt{B}. \tag{2.1.3}$$

Hvis T givet i (2.1.2) er en veldefineret begrænset operator, så er den adjungerede $T^* : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{N})$ givet ved

$$T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{2.1.4}$$

Bevis:
Først vises, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Derefter vises kommentaren efter punkt *(ii)*, og tilsidst vises, at *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*.

Først vises, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

1. I dette punkt vises, at T er en veldefineret operator.

   Antag, at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en Besselfølge med grænse B. For at vise, at T er en veldefineret afbilding fra $\ell^2(\mathbb{N})$ ind i $\mathcal{H}$, så skal vi vise, at $T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} := \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k$ er konvergent i $\mathcal{H}$ for alle $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

   Betragt $n, m \in \mathbb{N}$, hvor $n > m$. Så har vi, at

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \Big\| = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \Big\|. \tag{2.1.5}$$

Der gælder ved hjælp af Cauchy-Schwarzs ulighed, at

$$\sup_{\|g\|=1} \langle f, g\rangle \geq \left\langle f, \frac{f}{\|f\|}\right\rangle = \|f\| = \|f\|\,\|g\| \geq \sup_{\|g\|=1} \langle f, g\rangle,$$

hvor $\|g\| = 1$. Således har vi, at

$$\|f\| = \sup_{\|g\|=1} \langle f, g\rangle.$$

Ved brug af dette har vi, at

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \Big\| &= \sup_{\|g\|=1} \Big| \Big\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k, g \Big\rangle \Big| \\
&= \sup_{\|g\|=1} \Big| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \langle f_k, g\rangle \Big| \\
&\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k \langle f_k, g\rangle| \\
&= \sup_{\|g\|=1} \left\| \{c_k \langle f_k, g\rangle\}_{k=m+1}^{n} \right\|_{\ell^1}.
\end{aligned}$$

Ved anvendelse af Cauchy-Schwarzs ulighed har vi, at

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \Big\| &\leq \sup_{\|g\|=1} \left\| \{c_k\}_{k=m+1}^{n} \right\|_{\ell^2} \left\| \{\langle f_k, g\rangle\}_{k=m+1}^{n} \right\|_{\ell^2}. \\
&= \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \Big)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |\langle f_k, g\rangle|^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ved anvendelse af Besselbetingelsen (2.1.1) har vi, at

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \Big\| &\leq \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \Big)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \Big(B\|g\|^2 \Big)^{1/2}. \\
&\leq \sqrt{B} \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \Big)^{1/2}. \qquad (2.1.6)
\end{aligned}$$

Da $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, så er $\{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchyfølge i $\mathbb{C}$. Det betyder, at der for et vilkårligt $\epsilon > 0$ eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så der for $n, m > N$ gælder, at

$$\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 < \epsilon.$$

Ved indsættelse af dette i (2.1.6), fås det, at

$$\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \Big\| < \sqrt{B}\sqrt{\epsilon}.$$

Ved hjælp af (2.1.5) har vi så, at $\{\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchyfølge i $\mathcal{H}$. Da $\mathcal{H}$ er et Hilbertrum, er følgen konvergent, så specielt er $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ en konvergent række. Dermed er T veldefineret. Bemærk desuden, at T er en lineær operator.

2. Nu vises det, at T er begrænset.

   Ved samme beregninger, der førte til (2.1.6), har vi, at

$$\begin{aligned} \|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| &= \Big\| \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k \Big\| \\ &\leq \sqrt{B}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k|^2 \Big)^{1/2} \\ &= \sqrt{B}\, \|\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}, \quad \forall \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

   Da $B > 0$, er T dermed begrænset.

3. Nu vises, at (2.1.3) gælder. Normen af T kan på samme måde som i punkt 2 vurderes opadtil:

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{\|\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}\leq 1} \|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| \\ &\leq \sup_{\|\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}\leq 1} \sqrt{B}\, \|\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2} \\ &\leq \sqrt{B}, \end{aligned}$$

   hvorved (2.1.3) er vist.

Dermed er *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* bevist.

Nu vises kommentaren efter punkt *(ii)*, det vil sige ligning (2.1.4).

Da T er begrænset, er T^* en begrænset operator fra $\mathcal{H}$ til $\ell^2(\mathbb{N})$. Derfor er det k'te koordinatfunktionale, som er givet ved

$$(T^*)_k : \mathcal{H} \to \mathbb{C},$$

begrænset, og dermed kontinuert. Rieszs repræsentationssætning, se [Ped00, s. 52], giver, at der eksisterer et entydigt $g_k \in \mathcal{H}$, så der for ethvert $f \in \mathcal{H}$ gælder, at

$$(T^* f)_k = \langle f, g_k \rangle.$$

Dermed er

$$T^* f = \{\langle f, g_k \rangle\}_{k\in\mathbb{N}}. \tag{2.1.7}$$

Dette giver, at

$$\begin{aligned}
\left\langle f, T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \right\rangle &= \left\langle T^* f, \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \right\rangle_{\ell^2} \\
&= \left\langle \{\langle f, g_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}, \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \right\rangle_{\ell^2} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, g_k\rangle \, \overline{c_k}.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Samtidig gælder der, jævnfør (2.1.2), at

$$\begin{aligned}
\langle f, T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle &= \left\langle f, \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k \right\rangle \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, f_k\rangle \overline{c_k}.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Dermed giver (2.1.8) og (2.1.9), at

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, g_k\rangle \overline{c_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, f_k\rangle \overline{c_k}, \quad \forall \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Det følger, at $f_k = g_k$, hvilket sammen med (2.1.7) giver, at

$$T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Dermed er (2.1.4) vist.

Nu vises, at *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*.

Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathcal{H}$ og antag, at punkt *(ii)* i sætningen er opfyldt. For $f \in \mathcal{H}$ gælder da, at

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= \left\| \{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell^2}^2 \\
&= \|T^* f\|_{\ell^2}^2 \\
&\leq \|T^*\|_{\mathrm{op}}^2 \|f\|^2 \\
&= \|T\|_{\mathrm{op}}^2 \|f\|^2 \\
&\leq B\|f\|^2,
\end{aligned}$$

hvorved det er vist, at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en Besselfølge med grænse B. ■

Besselbetingelsen i Definition 2.1.1 er uafhængig af rækkefølgen af frameelementerne. Dette er udtrykt i det næste korollar, jævnfør [Chr03, s. 53]:

Korollar 2.1.3
Hvis $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *er en Besselfølge i* $\mathcal{H}$*, så konvergerer* $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k$ *ubetinget for alle* $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$*.*

2.2 Frames

I dette afsnit introduceres udvalgt teori om frames og framefølger. Yderligere introduceres frameoperatoren, der er tæt knyttet til T og T^*, som blev præsenteret i forrige afsnit. Til sidst i afsnittet gennemgås nogle egenskaber ved frames.

En frame er en Besselfølge, hvor der udover den øvre grænse B også kræves en nedre grænse A.

Definition 2.2.1 (Frame)
En følge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *i* $\mathcal{H}$ *kaldes en frame for* $\mathcal{H}$*, hvis der for alle* $f \in \mathcal{H}$ *gælder, at*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad 0 < A, B < \infty.$$

Framen kaldes tight, hvis $A = B$*.*

Det ses ikke umiddelbart af denne definition, at elementerne i en frame udspænder $\mathcal{H}$. Dette giver følgende lemma:

Lemma 2.2.2
Hvis $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *er en frame for* $\mathcal{H}$*, så gælder, at*

$$\overline{\operatorname{span}}\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathcal{H}.$$

Bevis:
Definer $K = \operatorname{span}\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, og vælg et vilkårligt $g \in K^\perp$. Da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame for $\mathcal{H}$, så gælder der for g, at

$$A\|g\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle g, f_k\rangle|^2 = 0,$$

da $g \perp f_k$. Det vil sige, at $\|g\| = 0$, og dermed er $g = 0$, hvorved $K^\perp = \{0\}$. Tilsidst har vi, se [Ped00, s. 51], at

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \overline{K} \oplus \overline{K^\perp} \\ &= \overline{K} \oplus \{0\} \\ &= \overline{\operatorname{span}}\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

■

Vi får senere brug for følger $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, som ikke er frames for hele $\mathcal{H}$, men som er frames for deres eget span, hvorfor følgende definition er relevant:

Definition 2.2.3 (Framefølge)
En følge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{H}$ kaldes en framefølge, hvis den er en frame for $\overline{\text{span}}\,\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Framefølger anvendes i den senere konstruktion af waveletframes. Den følgende sætning giver en betingelse for, hvornår en følge på formen $\{T_k f\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge. Bevis for sætningen findes i [Chr03, s. 143].

Sætning 2.2.4
For $f \in \mathcal{H}$ gælder, at $\{T_k f\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge med grænser A og B, hvis og kun hvis

$$A \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\gamma + k)|^2 \leq B, \quad \forall\, \gamma \in [0,1]\backslash N,$$

hvor $N = \{\gamma \in [0,1] \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) = 0\,\}$.

2.2.1 Frameoperator

I dette afsnit defineres frameoperatoren, som er en operator, der knytter sig til enhver frame. Der vises forskellige egenskaber ved denne operator. Ydermere vises det via frameoperatoren, hvorledes en tight frame fra en beregningsmæssig vinkel er fordelagtig.

Der tages udgangspunkt i operatoren T, som blev indført i Sætning 2.1.2.

Hvis $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame, så har vi specielt, at den er en Besselfølge. Derfor har vi jævnfør Sætning 2.1.2, at $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}$, hvor

$$T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k, \quad \forall\, \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

er en veldefineret begrænset operator med adjungeret operator givet ved $T^* : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{N})$, hvor

$$T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

T kaldes pre-frameoperatoren, og T^* kaldes analyseoperatoren. Udfra disse defineres frameoperatoren:

Definition 2.2.5 (Frameoperator)
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en Besselfølge for $\mathcal{H}$. Den sammensatte operator $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, hvor

$$Sf = TT^* f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, f_k\rangle\, f_k, \quad \forall\, f \in \mathcal{H},$$

kaldes frameoperatoren for $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Det følgende lemma angiver nogle egenskaber ved frameoperatoren.

Lemma 2.2.6
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *være en frame med framegrænser* A *og* B *og frameoperator* S. *Da gælder følgende:*

(i) S *er begrænset, selvadjungeret, positiv og invertibel.*

(ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *er en frame med framegrænser* B^{-1} *og* A^{-1}. *Desuden er* S^{-1} *frameoperator for* $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Bevis:
Først vises punkt *(i)*.

Der gælder, at

$$\begin{aligned} \|Sf\| &= \|(TT^*)f\| \\ &= \|T(T^*f)\| \\ &\leq \|T\|_{\mathrm{op}}\|T^*f\|_{\ell^2} \\ &\leq \|T\|_{\mathrm{op}}\|T^*\|_{\mathrm{op}}\|f\|. \end{aligned}$$

Da T og T^* er begrænsede operatorer, så er S begrænset.

S er selvadjungeret, da

$$S^* = (TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^* = S.$$

Nu vises, at S er positiv. For $f \in \mathcal{H}$ gælder, at

$$\begin{aligned} \langle Sf, f\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, f_k\rangle f_k, f \right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, f_k\rangle \langle f_k, f\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \qquad (2.2.1) \\ &\geq A\|f\|^2, \end{aligned}$$

da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame med nedre framegrænse A. Da der gælder, at $A > 0$, så er S positiv.

Nu vises, at S er invertibel. Da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame, så gælder, at

$$\|f\|^2 A \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2 B, \quad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

Ved anvendelse af (2.2.1) har vi så, at

$$\langle Af, f\rangle \leq \langle Sf, f\rangle \leq \langle Bf, f\rangle.$$

Med operatornotation svarer dette til, at

$$AI \leq S \leq BI. \tag{2.2.2}$$

Ved multiplikation med $-B^{-1}$ får vi, at

$$-\tfrac{A}{B} I \geq -\tfrac{1}{B} S \geq -I.$$

Ved at lægge I til på hver side, har vi, at

$$I\left(\tfrac{B-A}{B}\right) \geq I - \tfrac{S}{B} \geq 0.$$

Dette betyder, at $I - \frac{S}{B}$ er begrænset, og den er yderligere selvadjungeret, da S er selvadjungeret. Så kan [Ped00, s. 59] anvendes, og det giver, at

$$\begin{aligned}
\|I - \tfrac{S}{B}\|_{\text{op}} &= \sup\left\{\left|\left\langle (I - \tfrac{S}{B})f, f\right\rangle\right| \;\middle|\; f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left|\left\langle (I\left(\tfrac{B-A}{B}\right) f, f\right\rangle\right| \;\middle|\; f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\right\} \\
&= \left(\tfrac{B-A}{B}\right) \sup\left\{|\langle If, f\rangle| \;\middle|\; f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\right\} \\
&= \left(\tfrac{B-A}{B}\right) \sup\left\{\|f\|^2 \;\middle|\; f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\right\} \\
&= \left(\tfrac{B-A}{B}\right) \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Dette betyder, at [Ped00, s. 29] kan anvendes på $I - \frac{S}{B}$, hvilket giver, at

$$I - \left(I - \tfrac{S}{B}\right) = \tfrac{1}{B} S$$

har en begrænset invers, og dermed er S invertibel.

Nu vises punkt *(ii)*.

Det vises først, at $\{S^{-1} f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en Besselfølge. Dermed eksisterer der en veldefineret frameoperator, og vi viser, at denne frameoperator er S^{-1}. Til sidst vises, at $\{S^{-1} f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame med framegrænser B^{-1} og A^{-1}.

Antag, at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame med frameoperator S, og lad $f \in \mathcal{H}$. Da S er selvadjungeret, er S^{-1} ligeledes selvadjungeret, hvorved der gælder, at

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\left\langle S^{-1}f, f_k\right\rangle\right|^2 \\ &\leq B\|S^{-1}f\|^2 \\ &\leq B\|S^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2\|f\|^2.\end{aligned}$$

Da S^{-1}, jævnfør [Ped00, s. 69], er begrænset, så er $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Besselfølge. Det betyder, jævnfør Sætning 2.1.2, at $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ har en veldefineret frameoperator. Jævnfør Definition 2.2.5 virker denne frameoperator således, at

$$\begin{aligned}f \mapsto \quad & \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle S^{-1}f_k \\ = \quad & S^{-1}\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle S^{-1}f, f_k\right\rangle f_k \\ = \quad & S^{-1}(S(S^{-1}f)) \\ = \quad & S^{-1}f.\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Dermed er S^{-1} frameoperator for følgen $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Det vises nu, at $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame med framegrænser B^{-1} og A^{-1}. Vi har, at S^{-1} kommuterer med både S og I, så vi kan jævnfør [Chr03, s. 409] lade S^{-1} virke på uligheden (2.2.2), hvilket giver

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I.$$

Dette svarer til, at

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \left\langle S^{-1}f, f\right\rangle \leq \|f\|^2A^{-1}. \tag{2.2.4}$$

Ved hjælp af (2.2.3) har vi, at

$$\begin{aligned}\left\langle S^{-1}f, f\right\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle S^{-1}f_k, f\right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle \left\langle S^{-1}f_k, f\right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Vi har ved indsættelse af ovenstående i (2.2.4), at

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle|^2 \leq \|f\|^2A^{-1},$$

hvorved det er vist, at $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame med framegrænser B^{-1} og A^{-1}.
$\blacksquare$

Vi får i det følgende brug for begrebet pseudoinvers. Vi har jævnfør [Chr03, s. 411], at hvis $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ er en begrænset operator med lukket billedrum $\mathcal{R}_U$, så eksisterer der en begrænset operator $U^\dagger : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ således, at

$$UU^\dagger f = f, \quad \forall f \in \mathcal{R}_U.$$

$U^\dagger$ kaldes den pseudoinverse til U.

Den følgende sætning giver, at det udfra en surjektiv, begrænset preframeoperator er muligt at definere en frame.

Sætning 2.2.7
Hvis $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en følge i $\mathcal{H}$, så er følgende to punkter ækvivalente:

(i) $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *er en frame for $\mathcal{H}$.*

(ii) $T : \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k$ *er en veldefineret begrænset afbildning af $\ell^2(\mathbb{N})$ på $\mathcal{H}$.*

Bevis:
Først vises, at *(i)* ⇒ *(ii)*.

Sætning 2.1.2 giver, at T er en veldefineret begrænset operator fra $\ell^2(\mathbb{N})$ ind i $\mathcal{H}$, så vi skal kun vise, at T er surjektiv. Lemma 2.2.6 *(i)* giver, at S er surjektiv, så T er surjektiv.

Nu vises, at *(ii)* ⇒ *(i)*.

Først vises den øvre framebetingelse. Hvis T er en veldefineret begrænset operator, så er T^*, jævnfør Sætning 2.1.2, givet ved

$$T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

Der gælder således, at

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= \|T^* f\|^2_{\ell^2} \\
&\leq \|T^*\|^2_{\mathrm{op}}\|f\|^2 \\
&= \|T\|^2_{\mathrm{op}}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Da T er begrænset, så har vi, at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opfylder den øvre framebetingelse.

Nu vises den nedre framebetingelse. Her gøres der brug af den pseudoinverse $T^\dagger$, som er begrænset. For $f \in \mathcal{H}$ har vi, så at

$$\begin{aligned} f &= T\{(T^\dagger f)_k\}_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (T^\dagger f)_k f_k, \end{aligned}$$

hvor $(T^\dagger f)_k$ er den k'te koordinat af $T^\dagger f$. Dermed gælder, at

$$\begin{aligned} \|f\|^4 &= |\langle f, f\rangle|^2 \\ &= \left|\left\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} (T^\dagger f)_k f_k, f \right\rangle\right|^2 \\ &= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} (T^\dagger f)_k \langle f_k, f\rangle\right|^2. \end{aligned}$$

Ved anvendelse af Cauchy-Schwarzs ulighed har så, at

$$\begin{aligned} \|f\|^4 &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |(T^\dagger f)_k|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \\ &= \left\|\{(T^\dagger f)_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^2}^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \\ &\leq \|T^\dagger\|_{\text{op}}^2 \|f\|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2. \end{aligned}$$

Dermed har vi, at

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \geq \|T^\dagger\|_{\text{op}}^{-2} \|f\|^2,$$

hvorved den nedre framebetingelse er vist. ■

Den følgende sætning giver, at hvis $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame for $\mathcal{H}$, så kan ethvert element i $\mathcal{H}$ udvikles som en linearkombination af frameelementerne med koefficienter, der er givet ved S^{-1}. Ydermere giver sætningen, at rækken konvergerer ubetinget for alle f i $\mathcal{H}$, hvilket er nyttigt i forbindelse med implementering.

Sætning 2.2.8
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en frame med frameoperator S. Så gælder, at

$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Rækken konvergerer ubetinget.

Bevis:
Lad $f \in \mathcal{H}$. Da S^{-1}, jævnfør Lemma 2.2.6, er selvadjungeret, gælder der, at

$$\begin{aligned} f &= S(S^{-1}f) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle S^{-1}f, f_k \right\rangle f_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, S^{-1}f_k \right\rangle f_k. \end{aligned}$$

Da $\{S^{-1}f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, jævnfør Lemma 2.2.6, er en frame med øvre framegrænse B^{-1}, har vi for $f \in \mathcal{H}$, at

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\left\langle f, S^{-1}f_k \right\rangle|^2 \leq B^{-1}\|f\|^2, \quad 0 < B < \infty.$$

Dermed har vi, at $\{\left\langle f, S^{-1}f_k \right\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ specielt er en Besselfølge, giver dette, jævnfør Korollar 2.1.3, at $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, S^{-1}f_k \right\rangle f_k$ konvergerer ubetinget. ■

Det vil sige, at man har behov for at kende den inverse til frameoperatoren, når et element repræsenteres ved hjælp af en frame. Det følgende korollar viser, at det er let at finde et udtryk for S^{-1}, hvis $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en tight frame:

Korollar 2.2.9
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en tight frame med framegrænse A. Så gælder, at

$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle f, \tfrac{1}{A}f_k \right\rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Rækken konvergerer ubetinget for alle $f \in \mathcal{H}$.

Bemærk, at der således for en tight frame gælder, at $S^{-1} = \frac{1}{A}I$.

Bevis:
Ved hjælp af omskrivningerne fra beviset for Lemma 2.2.6, har vi fra (2.2.2), at framebetingelsen for den tight frame

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2$$

er ækvivalent med

$$S = AI,$$

hvor S er frameoperatoren. Dette giver, at

$$S^{-1} = \tfrac{1}{A} I,$$

og ved anvendelse af Sætning 2.2.8 har vi, at

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\langle f, \tfrac{1}{A} f_k \right\rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

■

Det bemærkes, at vi for en tight frame med framegrænse 1 har følgende udvikling af f:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, f_k \rangle f_k. \tag{2.2.5}$$

Denne udvikling kan altid opnås ved normering af frameelementerne i en tight frame. Repræsentationen i (2.2.5) er særlig simpel fra et beregningsmæssigt synspunkt, hvorfor vi har interesse i at konstruere tight frames med framegrænse 1.

Det følgende lemma giver en vurdering af L^2-normen af udviklingen efter en tight frame.

Lemma 2.2.10
Lad $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ være en tight frame med grænse 1 for $\mathcal{H}$, og lad $f \in \mathcal{H}$. Så gælder der, at

$$\|f\|^2 \leq \|\{\langle f, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2}^2.$$

Bevis:
Lad $f \in \mathcal{H}$. Så gælder, da $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ er en tight frame med grænse 1, at

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \Big\| \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, f_k \rangle f_k \Big\|^2 \\ &= \|T\{\langle f, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}\|^2 \\ &\leq \|T\|_{\mathrm{op}}^2 \|\{\langle f, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2}^2 \\ &\leq \|\{\langle f, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2}^2, \end{aligned}$$

hvor det er brugt, at $\|T\|_{\mathrm{op}}^2 \leq 1$, jævnfør Sætning 2.1.2. ■

2.2.2 Egenskaber for frames

I dette afsnit præsenteres udvalgte egenskaber for frames med henblik på den senere konstruktion af tight multiwaveletframes.

Det følgende lemma giver, at man kan udvide framebetingelsen fra at gælde på en tæt delmængde af $\mathcal{H}$ til at gælde på hele $\mathcal{H}$.

Lemma 2.2.11
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathcal{H}$. Hvis der gælder, at

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad 0 < A, B < \infty, \tag{2.2.6}$$

for alle $f \in V$, hvor V er en tæt delmængde af $\mathcal{H}$, så er $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en frame for $\mathcal{H}$.

Bevis:
Antag, at (2.2.11) er opfyldt for alle $f \in V$.

Først vises ved modstrid, at den øvre framebetingelse er opfyldt for alle elementer i $\mathcal{H}$. Antag, at der for et $g \in \mathcal{H}$ gælder, at

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle g, f_k\rangle|^2 > B\|g\|^2. \tag{2.2.7}$$

Der kan nu opstå to tilfælde: Summen i (2.2.7) kan være en endelig eller uendelig sum.

Hvis summen i (2.2.7) er uendelig, så gælder der, at

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle g, f_k\rangle|^2 \to \infty \quad \text{når} \quad n \to \infty,$$

og specielt kan vi vælge et $N_1 \in \mathbb{N}$ således, at

$$\sum_{k=1}^{N_1} |\langle g, f_k\rangle|^2 > B\|g\|^2.$$

Hvis summen i (2.2.7) er endelig, så ved vi, at der gælder, at

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle g, f_k\rangle|^2 \to \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle g, f_k\rangle|^2 \quad \text{når} \quad n \to \infty,$$

og specielt kan vi vælge $N_2 \in \mathbb{N}$ således, at

$$\sum_{k=1}^{N_2} |\langle g, f_k \rangle|^2 > B\|g\|^2.$$

Dette betyder, at vi under forudsætning af (2.2.7) altid kan vælge et $N \in \mathbb{N}$ således, at

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle g, f_k \rangle|^2 > B\|g\|^2. \tag{2.2.8}$$

Da V ligger tæt i $\mathcal{H}$, må der eksistere et $h \in V$ således, at $\|h - g\| < \epsilon$ for et vilkårligt ϵ. Summen i (2.2.8) er kontinuert som funktion af g, så der må for h tæt på g gælde, at

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle h, f_k \rangle|^2 > B\|h\|^2.$$

Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame for V, så der må gælde, at

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle g, f_k \rangle|^2 \leq B\|g\|^2, \quad \forall g \in \mathcal{H}, \tag{2.2.9}$$

og dermed er den øvre framebetingelse vist.

Nu vises, at den nedre framebetingelse er opfyldt for alle elementer i $\mathcal{H}$. Ligning (2.2.9) giver, at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en Besselfølge i $\mathcal{H}$, hvorved følgen har en veldefineret analyseoperator, T^*. Vi har dermed, at

$$\begin{aligned} \|T^* f\|_{\ell^2}^2 &= \|\{\langle f, f_k \rangle\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, f_k \rangle|^2 \\ &\geq A\|f\|^2, \quad \forall f \in V, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

på grund af den nedre betingelse i (2.2.6). Da T^* er lineær og begrænset, er den også uniform kontinuert. Dermed kan betingelsen på T^* i (2.2.10), jævnfør [Ped00, s. 25], udvides til hele $\mathcal{H}$, hvorved den nedre framebetingelse gælder for alle $f \in \mathcal{H}$. ■

Da vi igennem rapporten har behov for, at tage operatorer på elementer i $\mathcal{H}$, er det relevant at se på, hvorledes frameelementer påvirkes af forskellige operatorer.

Resultatet i nedenstående sætning er, at anvendelsen af en begrænset operator med lukket billedrum på en frame, bevarer frameegenskaben. Dette beskriver en af fordelene ved frames fremfor ortonormale baser, da ortonormale baser kun er stabile overfor anvendelse af unitære operatorer.

Sætning 2.2.12
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med grænser A og B. Hvis $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er en begrænset operator med lukket billedrum, så er $\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en framefølge med framegrænser $A\|U^\dagger\|_{op}^{-2}$ og $B\|U\|_{op}^2$.

Bevis:
Lad $f \in \mathcal{H}$. Da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame, og U er begrænset, så gælder, at

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, Uf_k\rangle|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle U^*f, f_k\rangle|^2 \\ &\leq B\|U^*f\|^2 \\ &\leq B\|U\|_{\mathrm{op}}^2\|f\|^2,\end{aligned}$$

hvorved $\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en Besselfølge med grænse $B\|U\|_{\mathrm{op}}^2$.

Nu vises den nedre framebetingelse for følgen $\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Hvis $g \in \operatorname{span}\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, så kan vi skrive

$$g = Uf, \quad \text{for et } \ f \in \operatorname{span}\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,.$$

Operatoren $UU^\dagger$ er den ortogonale projektion på $\mathcal{R}_U$, jævnfør [Chr03, s. 411]. Vi har, jævnfør Lemma A.0.8, at en ortogonal projektionsoperator er selvadjungeret, og dermed har vi, at

$$\begin{aligned} g &= Uf \\ &= (UU^\dagger)Uf \\ &= (UU^\dagger)^*Uf \\ &= (U^\dagger)^*U^*Uf.\end{aligned}$$

Da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en frame, har vi ved anvendelse af den nedre framebetingelse, at

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &= \|(U^\dagger)^*U^*Uf\|^2 \\ &\leq \|(U^\dagger)^*\|_{\mathrm{op}}^2\|U^*Uf\|^2 \\ &\leq \frac{\|(U^\dagger)^*\|_{\mathrm{op}}^2}{A}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle U^*Uf, f_k\rangle|^2 \\ &= \frac{\|U^\dagger\|_{\mathrm{op}}^2}{A}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle Uf, Uf_k\rangle|^2 \\ &= \frac{\|U^\dagger\|_{\mathrm{op}}^2}{A}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle g, Uf_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

Dermed er den nedre framebetingelse opfyldt for $g \in \text{span}\,\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ med framegrænse $A\|(U^{\dagger})\|_{\text{op}}^{-2}$. Via Lemma 2.2.11 kan denne framebetingelse udvides til $\overline{\text{span}}\,\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, og $\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er dermed en framefølge. ■

Følgende korollar viser, at frameegenskaben bevares under unitære operatorer.

Korollar 2.2.13
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en framefølge i $\mathcal{H}$ med framegrænser A og B. Hvis $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er en unitær operator, så gælder, at $\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en framefølge med framegrænser A og B.

Bevis:
Lad $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en framefølge i $\mathcal{H}$ med framegrænser A og B, og lad $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ være en unitær operator. Da U er begrænset, skal vi vise, at U har lukket billedrum $\mathcal{R}_U$ for at kunne anvende Sætning 2.2.12.

Lad der være givet en vilkårlig konvergent følge $\{Ux_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{H}$, så $\lim_{n\to\infty} Ux_n = y$. Hvis $y \in \mathcal{R}_U$, så er $\mathcal{R}_U$ lukket.

Da $\{Ux_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, så er det en Cauchyfølge, og da U er unitær, gælder der, at der givet $\epsilon > 0$ eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så

$$\epsilon > \|Ux_n - Ux_m\| = \|U(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|, \quad n, m > N,$$

hvilket giver, at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchyfølge. Da $\mathcal{H}$ er et Hilbertrum, er $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent i $\mathcal{H}$, så

$$\exists\, x \in H, \quad \text{så} \ \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Det giver, at

$$Ux = \lim_{n\to\infty} Ux_n = y,$$

så $y \in \mathcal{R}_U$, da $Ux \in \mathcal{R}_U$. Dermed er $\mathcal{R}_U$ lukket, og Sætning 2.2.12 giver, at $\{Uf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en framefølge.

Sætning 2.2.12 giver desuden, at framefølgen har framegrænser $A\|U^{\dagger}\|_{\text{op}}^{-2}$ og $B\|U\|_{\text{op}}^{2}$. Da U er en unitær operator, er framegrænserne lig A og B. ■

2.3 Waveletframes

I dette afsnit præsenteres waveletframes, som er frames, der er opnået ved translation og dilation af én funktion.

Med inspiration fra teorien om waveletbaser definerer vi en waveletframe for $L^2(\mathbb{R})$.

Definition 2.3.1 (Waveletframe)
En frame for $L^2(\mathbb{R})$ *på formen* $\{D^j T_k \psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *kaldes en waveletframe. En frame for* $L^2(\mathbb{R})$ *på formen* $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ *kaldes en multiwaveletframe, når* $n \geq 2$.

Traditionelt kaldes ψ kun en wavelet, når $\{D^j T_k \psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ er en waveletbasis for $L^2(\mathbb{R})$, men enhver familie på formen $\{D^j T_k \psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ siges dog at have waveletstruktur, hvorfor vi anvender betegnelsen waveletframes.

I teori om waveletframes, kaldes ψ en generator, og det ses i ovenstående definition, at en multiwaveletframe har mere end én generator. Muligheden for at gøre brug af mere end én generator giver større frihed i konstruktionen af waveletframes.

Motivationen for at søge efter waveletframes fremfor waveletbaser er, at waveletframes er lettere at konstruere. Ydermere er det nemmere at opnå specifikke egenskaber for de konstruerede waveletframes. En af disse egenskaber opnås via antallet af vanishing moments.

2.4 Vanishing moments

I dette afsnit introduceres begrebet vanishing moments. Når vi har givet en tight frame på formen $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$, så ønsker vi, at generatorerne ψ_l har så mange vanishing moments som muligt. Dette er blandt andet vigtigt ved komprimering af data, da det kan vises, at der for en tilstrækkelig "pæn" funktion f gælder, at et stort antal vanishing moments giver få store og mange små koefficienter i repræsentationen

$$f = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_l \rangle D^j T_k \psi_l, \tag{2.4.1}$$

hvor al information om f er givet ved koefficienterne $\{\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$.

I det tilfælde, hvor f rekonstrueres ved brug af store koefficienter, kan der laves følgende vurdering af afvigelsen mellem selve funktionen f og rekonstruktionen af f

$$\Big\| f - \sum_{\substack{\text{store}\\ \text{koef.}}} \langle f, D^j T_k \psi_l \rangle D^j T_k \psi_l \Big\|^2 = \Big\| \sum_{\substack{\text{små}\\ \text{koef.}}} \langle f, D^j T_k \psi_l \rangle D^j T_k \psi_l \Big\|^2 \leq \sum_{\substack{\text{små}\\ \text{koef.}}} |\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle|^2.$$

Da det i praksis ikke er muligt at håndtere uendelig summation ved implementering, så vælges en tærskelværdi, $\epsilon > 0$, og kun de koefficienter, for hvilke $|\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle| \geq \epsilon$, bruges til at rekonstruere f. Via valget af ϵ er det således muligt at fastlægge, hvor stor en afvigelse mellem selve f og rekonstruktionen af f, der er acceptabel. En effektiv komprimering kan opnås, hvis der er få store og mange små koefficienter, hvilket, som før omtalt, sikres af et højt antal vanishing moments.

Nu defineres vanishing moments.

Definition 2.4.1 (Vanishing moments)
En funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvor $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-m-1}$ med $m \in \mathbb{N}$, siges at have m vanishing moments, hvis

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x) dx = 0, \quad \textit{for} \quad l = 0, \ldots, m-1.$$

Bemærk, at en multiwavletframe $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,\ldots,n}$ siges at have m vanishing moments, hvis $\psi_1, \ldots, \psi_n$ alle har m vanishing moments.

Det følgende lemma giver en ækvivalent betingelse til vanishing moments.

Lemma 2.4.2
For $f \in L^2(\mathbb{R})$ med kompakt støtte er følgende to betingelser ækvivalente:

(i) f *har* m *vanishing moments.*

(ii) $\hat{f}$ *har et nulpunkt af orden* m *i origo.*

Bevis:
Først vises det, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Antag, at f har m vanishing moments, hvorved vi, jævnfør [Grö01, s. 9], for

$l = 0, \dots, m-1$ har, at

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^l f(x)) e^{-2\pi i x \cdot 0} dx \\ &= \mathcal{F}(x^l f(x))(0) \\ &= C \hat{f}^{(l)}(0). \end{aligned}$$

Dette betyder, at hvis f har m vanishing moments, så giver dette, at

$$\hat{f}^{(0)}(0) = \hat{f}^{(1)}(0) = \cdots = \hat{f}^{(m-1)}(0) = 0.$$

Taylorudviklingen af $\hat{f}$ omkring $x = 0$ giver, at

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \hat{f}^{(0)}(0) + \hat{f}^{(1)}(0)x + \cdots + \frac{\hat{f}^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} x^{(m-1)} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= x^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m}. \end{aligned}$$

Vi har altså, at $\hat{f}$ har et nulpunkt af orden m i origo.

Implikationen *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* følger umiddelbart af ovenstående. ■

Det bemærkes, at når en funktion f har kompakt støtte, så er $\hat{f}^{(m)}$ begrænset for alle $m \geq 0$. Det vil sige, at for f med kompakt støtte, hvor $\hat{f}$ har et nulpunkt af orden m i origo, så giver Taylors formel med restled, at der for c mellem 0 og x gælder, at

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\hat{f}^{(m)}(c)}{m!} x^m = \frac{\hat{f}^{(m)}(c)}{m!} x^m \leq C x^m.$$

Dette betyder, at udsagnet

$$\hat{f}(x) = O(|x|^m), \quad \text{for} \quad x \to 0$$

er ækvivalent med, at $\hat{f}$ har et nulpunkt af orden m i origo. Begge notationer anvendes i rapporten.

2.5 Delkonklusion

I dette kapitel har vi introduceret frames, og set hvorfor disse er mere fleksible end baser, jævnfør blandt andet Lemma 2.2.12. Ydermere har vi set, at det ved hjælp af tight frames er muligt at vælge en særlig simpel repræsentation af en given funktion.

Desuden har vi introduceret waveletframes og forklaret, hvorfor vi ønsker et stort antal vanishing moments for generatorerne ψ_l.

I de følgende to kapitler ser vi på konstruktion af tight waveletframes via forskellige multiskalateknikker. Vanishing moments kommer til at indgå via den ækvivalente betingelse i Lemma 2.4.2. I kapitel 5 introducerer vi approksimationsorden, der hænger sammen med vanishing moments.

Kapitel 3

Framemultiskalaanalyse

Dette kapitel er baseret på [Chr03] og [Dau92].

Den klassiske multiskalaanalyse, som præsenteres i [Dau92], blev udviklet som et værktøj til systematisk at konstruere waveletbaser for $L^2(\mathbb{R})$. Når en waveletbasis konstrueres ved hjælp af multiskalaanalyse, giver det beregningsmæssige fordele ved denne, jævnfør blandt andet [Dau92, afsnit 5.6]. Dette leder os frem til at anvende multiskalaanalysen til konstruktion af frames for $L^2(\mathbb{R})$. Ønsket er, at vi i denne konstruktion af frames kan bibeholde de beregningsmæssige fordele fra den klassiske multiskalaanalyse.

Idet der ved hjælp af den klassiske multiskalaanalyse findes en waveletbasis for $L^2(\mathbb{R})$, så ønsker vi tilsvarende at finde en waveletframe for $L^2(\mathbb{R})$ ved hjælp af framemultiskalanalysen.

Det skal bemærkes, at framemultiskalaanalyse ikke direkte giver, at der eksisterer en waveletframe, men at multiskalateknikken danner grundlag for den videre teori i kapitel 4.

I dette kapitel defineres framemultiskalaanalyse, hvorefter det vises, hvilke krav en skaleringsfunktion skal opfylde for at generere en framemultiskalaanalyse. Herefter behandles det, hvad der udover, at skaleringsfunktionen genererer en framemultiskalaanalyse, skal være opfyldt for, at der eksisterer en waveletframe for $L^2(\mathbb{R})$.

I den klassiske multiskalaanalyse kræves det, at $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for det centrale rum V_0 [Dau92, s. 130]. I framemultiskalaanalysen er dette ændret til, at følgen $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ udgør en frame for V_0:

Definition 3.0.1 (Framemultiskalaanalyse)
En framemultiskalaanalyse for $L^2(\mathbb{R})$ består af en følge $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ af lukkede underrum af $L^2(\mathbb{R})$ og en funktion $\psi_0 \in V_0$, der opfylder

(i) $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$.

(ii) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

(iv) $V_j = D^j V_0$.

(v) $f \in V_0 \Rightarrow T_k f \in V_0$ *for alle* $k \in \mathbb{Z}$.

(vi) $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *er en frame for* V_0 .

Funktionen ψ_0 kaldes en skaleringsfunktion.

3.1 Udgangspunkt i skaleringsfunktionen

I dette afsnit vil vi konstruere en framemultiskalaanalyse ved at tage udgangspunkt i skaleringsfunktionen ψ_0 og herudfra konstruere V_j-rummene således, at punkterne *(i)*– *(vi)* i Definition 3.0.1 er opfyldt. Alternativt kunne man tage udgangspunkt i V_j-rummene og herudfra søge efter en skaleringsfunktion således, at man via denne vej får kravene i framemultiskalaanalysen opfyldt.

For at vise, hvilke krav ψ_0 skal opfylde, får vi brug for de fire følgende lemmaer.

Lemma 3.1.1
Vælg $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, så $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge. Definer funktionsrummene, V_j, som

$$V_j = \overline{\text{span}}\left\{D^j T_k \psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}.$$

Så gælder der, at

(i) Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ tilhører V_j, hvis og kun hvis

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k D^j T_k \psi_0, \quad \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

(ii) *Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ tilhører V_j, hvis og kun hvis der eksisterer en funktion $F \in L^2(\mathbb{T})$ således, at*

$$\hat{f}(2^j\gamma) = F(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma). \tag{3.1.1}$$

Hvis $f \in V_j$, så er F entydigt bestemt for alle γ, hvorom der gælder, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \neq 0$. Hvis $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$, så kan $F(\gamma)$ vælges til 0.

Bevis:
Vi beviser først biimplikationen i punkt *(i)*, hvorefter biimplikationen i punkt *(ii)* vises. Tilsidst vises kommentaren i punkt *(ii)*.

1. I dette punkt vises *(i)*.

   Da $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ per antagelse er en framefølge, og D^j er en unitær operator, er $\{D^jT_k\psi_0\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, jævnfør Korollar 2.2.13, også en framefølge. Dermed er $\{D^jT_k\psi_0\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ per konstruktion en frame for V_j. Dermed følger punkt *(i)* af biimplikationen i Sætning 2.2.7.

2. I dette punkt vises *(ii)*.

   Først vises det, at

   $$f \in V_j \quad \Rightarrow \quad \exists\, F \in L^2(\mathbb{T}), \quad \text{så } \hat{f}(2^j\gamma) = F(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma).$$

   Fra punkt *(i)* får vi, da $f \in V_j$, at

   $$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k D^j T_k \psi_0, \quad \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

   Kommutatorrelationerne fra Appendiks A giver, at

   $$\begin{aligned} \hat{f} &= \mathcal{F}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k D^j T_k \psi_0\Big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k D^{-j} E_{-k} \mathcal{F}\psi_0 \\ &= D^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k E_{-k} \hat{\psi}_0, \end{aligned}$$

   hvilket giver, at

   $$\begin{aligned} \hat{f}(2^j\gamma) &= 2^{-j/2}(D^j\hat{f})(\gamma) \\ &= \underbrace{2^{-j/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k E_{-k}(\gamma)}_{F(\gamma)}\,\hat{\psi}_0(\gamma). \end{aligned}$$

Det ses, at F er en linearkombination af E_{-k}, som er en basis for $L^2(\mathbb{T})$, så $F \in L^2(\mathbb{T})$. Dermed er implikationen vist.

Nu vises det, at

$$\exists\, F \in L^2(\mathbb{T}), \quad \text{så} \quad \hat{f}(2^j\gamma) = F(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma) \quad \Rightarrow \quad f \in V_j. \tag{3.1.2}$$

Da E_k er en basis for $L^2(\mathbb{T})$, har vi følgende Fourierrækkeudvikling af F, hvor $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er Fourierkoefficienterne for F, og $d_k := 2^{-j/2}c_k$:

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k E_k(\gamma) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2} c_k E_k(\gamma). \end{aligned}$$

Dette giver via antagelsen (3.1.2), at

$$\begin{aligned} \hat{f}(2^j\gamma) &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2} c_k E_k(\gamma)\Big)\hat{\psi}_0(\gamma) \\ 2^{j/2}\hat{f}(2^j\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (E_k\hat{\psi}_0)(\gamma) \\ (D^j\mathcal{F}f)(\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (E_k\mathcal{F}\psi_0)(\gamma) \\ (\mathcal{F}D^{-j}f)(\gamma) &= \Big(\mathcal{F}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{-k}\psi_0\Big)(\gamma) \\ (D^{-j}f)(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (T_{-k}\psi_0)(x) \\ f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k}(D^jT_k\psi_0)(x), \quad \text{hvor } \{c_{-k}\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

hvorved implikationen er vist ved hjælp af punkt *(i)*.

3. Nu vises kommentaren under punkt *(ii)*.

Hvis $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \neq 0$, så må der eksistere et k, så $\hat{\psi}_0(\gamma+k) \neq 0$. Ved brug af ækvivalensen i punkt *(ii)* for $f \in V_j$ gælder der, at

$$\begin{aligned} \hat{f}(2^j(\gamma+k)) &= F(\gamma+k)\hat{\psi}_0(\gamma+k) \\ F(\gamma+k) &= \frac{\hat{f}(2^j(\gamma+k))}{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}. \end{aligned}$$

Da F er 1-periodisk, er $F(\gamma+k) = F(\gamma)$, så ovenstående definerer F entydigt for alle γ, hvorom der gælder, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \neq 0$.

Hvis derimod $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$, så er $\hat{\psi}_0(\gamma+k) = 0$ for alle γ. Da

$$\hat{f}(2^j(\gamma+k)) = F(\gamma+k)\hat{\psi}_0(\gamma+k)$$

skal gælde for alle γ, så kan F vælges som nulfunktionen, som også opfylder kravet om at være 1-periodisk.

$\blacksquare$

Det følgende Lemma giver et krav til skaleringsfunktionen således, at V_j-rummene er indeholdt i hinanden. Dette svarer til betingelse *(i)* i framemultiskalaanalysen.

Lemma 3.1.2
Vælg $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, så $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge, og definer funktionsrummene V_j ved

$$V_j = \overline{\text{span}}\left\{D^j T_k \psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}.$$

Så er følgende to punkter ækvivalente:

(i) $V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$

(ii) Der eksisterer en funktion $H_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$ således, at

$$\hat{\psi}_0(\gamma) = H_0(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2). \tag{3.1.3}$$

Hvis (3.1.3) *er opfyldt, så er funktionerne H_0 og ψ_0 yderligere knyttet sammen ved*

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 &= |H_0(\gamma/2)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma/2+k)|^2 \\ &\quad + |H_0(\gamma/2+1/2)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma/2+1/2+k)|^2. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Bevis:
Først vises kommentaren under punkt *(ii)*. Dernæst vises, at *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Tilsidst vises det, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

1. I dette punkt vises (3.1.4).

   Antag, at (3.1.3) er opfyldt, hvorved vi får, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| H_0\left(\frac{\gamma+k}{2}\right) \hat{\psi}_0\left(\frac{\gamma+k}{2}\right)\right|^2.$$

Nu deles summen op i lige og ulige k, og det anvendes, at H_0 er en 1-periodisk funktion:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|H_0\left(\frac{\gamma+2k}{2}\right)\hat{\psi}_0\left(\frac{\gamma+2k}{2}\right)\right|^2 \\ &\quad+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|H_0\left(\frac{\gamma+2k+1}{2}\right)\hat{\psi}_0\left(\frac{\gamma+2k+1}{2}\right)\right|^2 \\ &= |H_0(\gamma/2)|^2\sum_k\left|\hat{\psi}_0(\gamma/2+k)\right|^2 \\ &\quad+|H_0(\gamma/2+1/2)|^2\sum_k\left|\hat{\psi}_0(\gamma/2+1/2+k)\right|^2.\end{aligned}$$

Dermed er (3.1.4) vist.

2. Nu vises det, at *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*:

   Antag, at $f \in V_j$, og at punkt *(ii)* er opfyldt. Så eksisterer der, jævnfør Lemma 3.1.1 *(ii)*, en funktion $F \in L^2(\mathbb{T})$ således, at

   $$\begin{aligned}\hat{f}(2^{j+1}\gamma) &= F(2\gamma)\hat{\psi}_0(2\gamma) \\ &= \underbrace{F(2\gamma)H_0(\gamma)}_{b(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma).\end{aligned}$$

   Funktionen $b(\gamma)$ tilhører $L^2(\mathbb{T})$, da $F \in L^2(\mathbb{T})$, og $H_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$. Dette giver, at ligning (3.1.1) i Lemma 3.1.1 *(ii)* er opfyldt, og dermed gælder, at $f \in V_{j+1}$. Vi har altså vist, at et vilkårligt f, der tilhører V_j, også tilhører V_{j+1}.

3. Nu vises det, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*:

   Da $V_{-1} = \overline{\text{span}}\left\{D^{-1}T_k\psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, gælder der, at $D^{-1}\psi_0 \in V_{-1}$. På grund af antagelsen i punkt *(i)* har vi, at $V_{-1} \subset V_0$, hvilket giver, at

   $$D^{-1}\psi_0 \in V_0.$$

   Dermed giver Lemma 3.1.1 *(ii)* anvendt på $D^{-1}\psi_0$, at der eksisterer en funktion $F \in L^2(\mathbb{T})$ således, at

   $$\begin{aligned}(\mathcal{F}D^{-1}\psi_0)(2^0\gamma) &= F(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma) \\ (D\mathcal{F}\psi_0)(\gamma) &= F(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma) \\ \hat{\psi}_0(2\gamma) &= 2^{-1/2}F(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma).\end{aligned}$$

   Det ses, at $H_0 := 2^{-1/2}F \in L^2(\mathbb{T})$, da $F \in L^2(\mathbb{T})$. Vi mangler nu at vise, at H_0 yderligere er begrænset, hvorved $H_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$.

   For de γ, hvor $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$, der vælges H_0-funktionen således, at $H_0(\gamma) = 0$. Nu vises, at $H_0(\gamma)$ er begrænset for de γ, hvor $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+$

$k)|^2 \neq 0$. Sætning 2.2.4 giver, når $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge med grænser A og B, at

$$A \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\psi}_0(2\gamma + k)\right|^2 \leq B,$$

da mængden af de γ, hvor $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$ er en nulmængde. Ved hjælp af (3.1.4) giver dette, at

$$\begin{aligned} B &\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(2\gamma+k)|^2 \\ &= |H_0(\gamma)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 + |H_0(\gamma+1/2)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+1/2+k)|^2 \\ &\geq |H_0(\gamma)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \\ &\geq |H_0(\gamma)|^2 A, \end{aligned}$$

og H_0 er dermed begrænset.

■

Nu vises, hvilke krav skaleringsfunktionen ψ_0 skal opfylde, for at foreningsmængden af V_j-rummene udgør $L^2(\mathbb{R})$. Dette svarer til punkt *(ii)* i framemultiskalaanalysen.

Lemma 3.1.3
Vælg $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, så $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge. Antag, at $\hat{\psi}_0$ er begrænset, at $\hat{\psi}_0$ er kontinuert nær origo, og at $\hat{\psi}_0(0) \neq 0$. Hvis funktionsrummene V_j defineres ved

$$V_j = \overline{\text{span}}\left\{D^j T_k \psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z},$$

så gælder der, at

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}). \tag{3.1.5}$$

Bevis:
Beviset går ud på at vise, at $\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j\right)^{\perp} = \{0\}$, da vi så jævnfør [Ped00, s. 51] har, at

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} \oplus \left(\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}\right)^{\perp} = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} \oplus \{0\} = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}.$$

Lemmaet er altså bevist, når det er vist, at $f = 0$ for $f \in \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j\right)^{\perp}$.

1. Vælg $f \in \left(\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}\right)^{\perp} \subseteq L^2(\mathbb{R})$, og vælg et vilkårligt $\epsilon > 0$. Definer yderligere mængden:

$$G := \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, \hat{g} \in C_c(\mathbb{R}) \right\}.$$

Da G er en tæt delmængde af $L^2(\mathbb{R})$, kan vi vælge et $g \in G$ således, at $\|f-g\| < \epsilon$.

2. Lad P_j betegne den ortogonale projektion på V_j. Da $f \in V_j^{\perp}$ for alle j, er $P_j f = 0$, hvilket giver, at

$$\begin{aligned} \|P_j g\| &= \|P_j(g-f)\| \\ &\leq \|g-f\| \\ &< \epsilon. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Da $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge, og D^j ydermere er en unitær operator, så er $\{D^j T_k \psi_0\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, jævnfør Korollar 2.2.13, også en framefølge. Dermed er $\{D^j T_k\psi_0\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ per konstruktion en frame for V_j. Det vil sige, at der for $P_j g \in V_j$ eksisterer konstanter A og B, hvor $0 < A, B < \infty$, således, at

$$A\|P_j g\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle P_j g, D^j T_k \psi_0\rangle|^2 \leq B\|P_j g\|^2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ved brug af (3.1.6) giver dette, at

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &> \|P_j g\|^2 \\ &\geq B^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle g, D^j T_k\psi_0\rangle\right|^2, \end{aligned}$$

hvor det er anvendt, at P_j er selvadjungeret, jævnfør Lemma A.0.8, og at $P_j(D^j T_k\psi_0) = D^j T_k \psi_0$. Ved anvendelse af Plancherels formel samt kommutatorrelationer fra Appendiks A, har vi yderligere, at

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &> B^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle g, D^j T_k\psi_0\rangle\right|^2 \\ &= B^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle \hat{g}, \mathcal{F} D^j T_k\psi_0\rangle\right|^2 \\ &= B^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle \hat{g}, D^{-j} E_{-k}\hat{\psi}_0\rangle\right|^2 \\ &= B^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\gamma) 2^{-j/2} e^{2\pi i 2^{-j} k\gamma} \overline{\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)} d\gamma \right|^2. \end{aligned}$$

Jævnfør valget af g kan vi antage, at $\hat{g}$ har støtte i intervallet $[-R, R]$.

Vælg et j, så $2^{j-1} > R$, hvorved vi har, at

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 &> B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\gamma)2^{-j/2}e^{2\pi i 2^{-j}k\gamma}\overline{\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)}d\gamma\Big|^2 \\
&= B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big|\underbrace{\int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}}\underbrace{\hat{g}(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)}}_{(*)}\quad\underbrace{2^{-j/2}e^{2\pi i 2^{-j}k\gamma}}_{\text{Basis for } L^2([-2^{j-1},2^{j-1}])}\quad d\gamma}_{-k\text{'te Fourierkoefficient for}(*)}\Big|^2. \\
&= B^{-1}\int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}}|\hat{g}(\gamma)\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)|^2 d\gamma, \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

hvor Parsevals ligning er anvendt i sidste lighed.

3. Betragt nu

$$\lim_{j\to\infty}B^{-1}\int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}}|\hat{g}(\gamma)|^2|\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)|^2d\gamma.$$

Da $\hat{g}\in L^2(\mathbb{R})$, har vi, at $|\hat{g}|^2\in L^1(\mathbb{R})$. Vi har antaget, at $\hat{\psi}_0$ er begrænset, hvorfor der må gælde, at

$$|\hat{g}(\gamma)|^2|\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)|^2\le C|\hat{g}(\gamma)|^2\in L^1(\mathbb{R}).$$

Da $\hat{\psi}_0$ er kontinuert nær origo, og $\hat{\psi}_0(0)\neq 0$, så får vi ved hjælp af Lebesgues Majorantsætning og (3.1.7), at

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 &> \lim_{j\to\infty}B^{-1}\int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}}|\hat{g}(\gamma)|^2|\hat{\psi}_0(2^{-j}\gamma)|^2d\gamma \\
&= B^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\gamma)|^2|\hat{\psi}_0(0)|^2d\gamma \\
&= B^{-1}|\hat{\psi}_0(0)|^2\|\hat{g}\|^2 \\
&= C\|\hat{g}\|^2.
\end{aligned}$$

Da ϵ er valgt arbitrært lille, må der gælde, at $\|\hat{g}\|=0$. Ved anvendelse af Plancherels formel har vi så, at $\|g\|=0$, hvilket betyder, at $g=0$. Dermed har vi, at $f=0$, da $\|g-f\|<\epsilon$.

■

Nu vises det, hvilke krav skaleringsfunktionen skal opfylde, for at fællesmængden af V_j-rummene kun indeholder nulelementet. Dette svarer til punkt *(iii)* i framemultiskalaanalysen.

Lemma 3.1.4
Vælg $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *så* $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *er en framefølge og definer funktionsrummene* V_j *ved*

$$V_j = \overline{span}\left\{D^j T_k \psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}.$$

Så gælder, at

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

Bevis:
Det vises, at hvis en funktion $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, så gælder der, at $f = 0$.

1. Lad $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, og lad $\epsilon > 0$ være givet. Da $f \in L^2(\mathbb{R})$, så eksisterer der en funktion $g \in C_c(\mathbb{R})$, således at $\|f - g\| < \epsilon$. Da $f \in V_j$, så er $f = P_j f$ for alle $j \in \mathbb{Z}$, hvorved vi har, at

$$\begin{aligned} \|f\| - \|P_j g\| &\leq \|P_j(f-g)\| \\ &\leq \|f-g\| \\ &< \epsilon, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Dermed har vi, at

$$\|f\| < \epsilon + \|P_j g\|, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.8}$$

2. Da $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge, og D^j ydermere er en unitær operator, så er $\{D^j T_k \psi_0\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, jævnfør Korollar 2.2.13, også en framefølge. Per konstruktion har vi dermed, at $\{D^j T_k \psi_0\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for V_j. Det betyder, at der eksisterer konstanter A og B, hvor $0 < A, B < \infty$, så der for $P_j g \in V_j$ gælder, at

$$A\|P_j g\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle P_j g, D^j T_k \psi_0\rangle|^2 \leq B\|P_j g\|^2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

   Dermed har vi, at

$$\|P_j g\|^2 \leq A^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, D^j T_k \psi_0\rangle|^2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.1.9}$$

   hvor det er anvendt, at P_j er selvadjungeret, jævnfør Lemma A.0.8, og at $P_j(D^j T_k \psi_0) = D^j T_k \psi_0$. Nu vælges R, så støtten af g er indeholdt i

$[-R, R]$, hvorved

$$
\begin{aligned}
\|P_j g\|^2 &\leq A^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{(D^j T_k \psi_0)(x)} dx \Big|^2 \\
&\leq A^{-1} 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-R}^{R} |g(x)| \left|\psi_0(2^j x - k)\right| dx \Big)^2 \\
&\leq A^{-1} 2^j \|g\|_{L^\infty}^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-R}^{R} 1 \cdot \left|\psi_0(2^j x - k)\right| dx \Big)^2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Nu anvendes Cauchy-Schwarzs ulighed på det indre produkt mellem 1 og ψ_0, hvorved vi får, at

$$
\begin{aligned}
\|P_j g\|^2 &\leq A^{-1} 2^j \|g\|_{L^\infty}^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-R}^{R} 1dx \int_{-R}^{R} |\psi_0(2^j x - k)|^2 dx \Big) \\
&= A^{-1} 2^j \|g\|_{L^\infty}^2 2R \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-R}^{R} |\psi_0(2^j x - k)|^2 dx \Big) \\
&= A^{-1} 2^j \|g\|_{L^\infty}^2 2R \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-2^j R - k}^{2^j R - k} |\psi_0(y)|^2 2^{-j} dy \Big) \\
&= A^{-1} \|g\|_{L^\infty}^2 2R \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-2^j R + k}^{2^j R + k} |\psi_0(y)|^2 dy \Big), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Nu vælges j, så $2^j R \leq \frac{1}{2}$, det vil sige, så intervallerne, der integreres over for hvert k, ikke overlapper hinanden. Det giver, at

$$
\begin{aligned}
&\|P_j g\|^2 \\
\leq\;& A^{-1} \|g\|_{L^\infty}^2 2R \int_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^j R, k+2^j R]} |\psi_0(y)|^2 dy \\
=\;& A^{-1} \|g\|_{L^\infty}^2 2R \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^j R, k+2^j R]}(y) |\psi_0(y)|^2 dy \qquad (3.1.10)
\end{aligned}
$$

3. Da $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, gælder der, at $|\psi_0|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Det betyder, at

$$
\chi_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^j R, k+2^j R]}(y) |\psi_0(y)|^2 \leq |\psi_0(y)|^2 \in L^1(\mathbb{R}). \qquad (3.1.11)
$$

Det ses, at

$$
\lim_{j\to-\infty} \chi_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^j R, k+2^j R]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad y \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{for} \quad y \notin \mathbb{Z} \end{cases}. \qquad (3.1.12)
$$

Da $\mathbb{Z}$ er en nulmængde, så giver (3.1.11) og (3.1.12) sammen med Lebesgues Majorantsætning, at

$$\lim_{j\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^jR,k+2^jR]}(y)|\psi_0(y)|^2dy =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{j\to-\infty}\chi_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^jR,k+2^jR]}(y)|\psi_0(y)|^2dy = 0.$$

Dette betyder, at der specielt må eksistere et J således, at der for $j \geq J$ gælder, at

$$A^{-1}\|g\|^2_{L^\infty}2R\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k-2^jR,k+2^jR]}(y)|\psi_0(y)|^2dy < \epsilon^2,$$

hvilket ved hjælp af (3.1.10) giver, at

$$\|P_jg\| < \epsilon.$$

Tilsidst giver (3.1.8), at

$$\|f\| < 2\epsilon,$$

hvoraf det kan konkluderes, at $f = 0$.

■

I den næste sætning formuleres, hvilke krav ψ_0 skal opfylde for at generere en framemultiskalaanalyse:

Sætning 3.1.5
Vælg $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, så $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge. Antag, at $\hat{\psi}_0$ er begrænset, at $\hat{\psi}_0$ er kontinuert nær origo, og at $\hat{\psi}_0(0) \neq 0$. Hvis der eksisterer en funktion $H_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$ således, at

$$\hat{\psi}_0(\gamma) = H_0(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2),$$

så genererer ψ_0 en framemultiskalaanalyse, se Definition 3.0.1.

Bevis:
Lad ψ_0 opfylde betingelserne i sætningen. Hvis V_j, for alle $j \in \mathbb{Z}$, defineres ved

$$V_j = \overline{\text{span}}\left\{D^jT_k\psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \tag{3.1.13}$$

så har vi følgende:

Lemma 3.1.2 giver, at

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots .$$

Lemma 3.1.3 giver, at

$$\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

Lemma 3.1.4 giver, at

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

Konstruktionen af V_j'erne giver, jævnfør (3.1.13), at

$$V_j = D^j V_0.$$

Konstruktionen af V_0 giver yderligere, jævnfør (3.1.13), at

$$f \in V_0 \Rightarrow T_k f \in V_0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Definition 2.2.3 giver, at

$$\{T_k \psi_0\} \text{ er en frame for } V_0.$$

Dermed genererer ψ_0 en framemultiskalaanalyse. ■

3.2 Frames via framemultiskalaanalyse

I dette afsnit undersøger vi, hvorledes der kan søges efter en funktion ψ således, at $\{D^j T_k \psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ udgør en frame for $L^2(\mathbb{R})$ givet, at ψ_0 genererer en framemultiskalaanalyse. Vi antager altså, at ψ_0 genererer en framemultiskalaanalyse.

Idéen er, at vi indfører ortogonale rum W_j således, at vi blot ved at have en frame for W_0 kan generere en frame for hele $L^2(\mathbb{R})$.

Definer W_j til at være det ortogonale komplement af V_j i V_{j+1}, det vil sige

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.1}$$

Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$ og betegn den ortogonale projektion på rummet V_j med P_{V_j}. Der gælder så, jævnfør punkt *(ii)* og *(iii)* i Definition 3.0.1, for $f \in L^2(\mathbb{R})$, at

$$\lim_{j\to-\infty} P_{V_j} f = 0, \tag{3.2.2}$$

$$\lim_{j\to\infty} P_{V_j} f = f. \tag{3.2.3}$$

Det følger af (3.2.1), at der for $J < j$ gælder, at

$$\begin{aligned} P_{V_j} f &= P_{V_J} f + P_{W_J} f + \cdots + P_{W_{j-2}} f + P_{W_{j-1}} f \\ &= P_{V_J} f + \sum_{k=J}^{j-1} P_{W_k} f, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Lad nu $j \to \infty$ og $J \to -\infty$ på begge sider i (3.2.4), og anvend (3.2.2) og (3.2.3):

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \lim_{J\to-\infty} P_{V_j} f &= \lim_{j\to\infty} \lim_{J\to-\infty} \Big(P_{V_J} f + \sum_{k=J}^{j-1} P_{W_k}(f) \Big) \\ f &= 0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{W_k} f \\ f &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} P_{W_j} f. \end{aligned}$$

Da f var valgt vilkårligt i $L^2(\mathbb{R})$, så har vi, at

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j. \tag{3.2.5}$$

Dermed har vi inddelt $L^2(\mathbb{R})$ i ortogonale underrum.

Per definition gælder der, at

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.6}$$

Da D^j er en lineær operator, har vi, at

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \oplus W_0 \\ D^j V_1 &= D^j V_0 \oplus D^j W_0 \\ V_{j+1} &= V_j \oplus D^j W_0. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ved sammenligning af (3.2.6) og (3.2.7), må det nødvendigvis gælde, at

$$W_j = D^j W_0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Dette betyder, at hvis der eksisterer en funktion ψ, så $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for W_0, så er $\{D^j T_k \psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en frame for W_j. På grund af (3.2.5) betyder dette, at $\{D^j T_k\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$. Det vil sige, at hvis man kan finde en funktion $\psi \in W_0$, så $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for W_0, så giver framemultiskalaanalysen, at ψ genererer en waveletframe for hele $L^2(\mathbb{R})$.

Følgende sætning fra [Chr03, s. 299] giver en betingelse for, hvornår ψ eksisterer således, at der via en framemultiskalaanalyse kan findes en waveletframe for $L^2(\mathbb{R})$.

Sætning 3.2.1
Antag, at $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ genererer en framemultiskalaanalyse, og lad Γ være defineret ved:

$$\Big\{\gamma \in \mathbb{T} \,\Big|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(2\gamma + k)| = 0, \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma + k)|^2 > 0, \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma + 1/2 + k)| > 0\Big\}.$$

Så gælder følgende:

(i) Hvis Γ har positivt Lebesguemål, så eksisterer der ikke en funktion $\psi \in W_0$, så $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for W_0.

(ii) Hvis Γ er en nulmængde, så eksisterer der en funktion $\psi \in W_0$, så $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for W_0, og $\{D^jT_k\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Der er således en forskel i konstruktionen af henholdsvis waveletbaser og waveletframes med udgangspunkt i multiskalaanalyse. Hvis den klassiske multiskalaanalyse er opfyldt, så eksisterer der, jævnfør [Dau92, s. 135], automatisk en waveletbasis $\{D^jT_k\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$. Derimod er framemultiskalaanalysen ikke tilstrækkelig til, at der eksisterer en waveletframe $\{D^jT_k\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$.

Sætning 3.2.1 angiver, hvornår vi kan opnå en waveletframe for $L^2(\mathbb{R})$ med kun en generator. Kravet i sætningen kan slækkes, hvis vi tillader at gøre brug af flere generatorer.

3.3 Delkonklusion

Vi har i dette kapitel defineret en framemultiskalaanalyse. Ydermere har vi vist, hvad ψ_0 skal opfylde, så den genererer en framemultiskalaanalyse.

I det følgende kapitel ønsker vi at konstruere multiwaveletframes for $L^2(\mathbb{R})$, som er i besiddelse af de beregningsmæssige fordele, der kan opnås via framemultiskalaanalysen. Vi vil dog ikke direkte bruge framemultiskalaanalysen ved konstruktionen, men integrere denne ved at stille kravene fra Sætning 3.1.5 til ψ_0. Følgende sætning fra [Chr03, s. 291] slækker kravene fra Sætning 3.1.5.

Sætning 3.3.1
Lad $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ således, at $|\psi_0| > 0$ i en omegn af nul. Antag, at der eksisterer en funktion $H_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, så

$$\hat{\psi}_0(\gamma) = H_0(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2). \tag{3.3.1}$$

Hvis V_j defineres ved

$$V_j = \overline{\text{span}}\left\{D^j T_k \psi_0\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z},$$

så er punkt (i) - (v) i Definition 3.0.1 opfyldt.

Ligning (3.3.1) kaldes en skaleringsligning. Denne bliver central i næste kapitel.

Kapitel 4

Udvidelsesprincipper

Dette kapitel er baseret på [Chr03] og [Dau92].

I Kapitel 3 gennemgik vi, hvorledes frames for $L^2(\mathbb{R})$ kan konstrueres via en framemultiskalaanalyse. I dette kapitel vil vi konstruere multiwaveletframes udfra et generelt setup, der integrerer framemultiskalaanalysens principper. I Det Generelle Setup stilles betingelser, der sikrer, at kravene i Sætning 3.3.1 er opfyldt, hvorved vi bevarer de beregningsmæssige fordele.

I dette kapitel tillader vi flere generatorer, da dette giver større fleksibilitet i forhold til at konstruere frames for $L^2(\mathbb{R})$. Således skal $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ udgøre en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Målet med dette kapitel er at bevise de to udvidelsesprincipper: Det Unitære Udvidelsesprincip og Det Oblique Udvidelsesprincip. Udvidelsesprincipperne giver nogle betingelser for, hvorledes man kan konstruere tight multiwaveletframes for $L^2(\mathbb{R})$.

Historisk opstillede man først Det Unitære Udvidelsesprincip, men dette viste sig at give begrænsninger i konstruktionen af multiwaveletframes. Dette førte frem til udviklingen af Det Oblique Udvidelsesprincip, som er ækvivalent med Det Unitære Udvidelsesprincip, men som naturligt giver konstruktioner, der ikke er oplagte ved anvendelse af Det Unitære Udvidelsesprincip.

Kapitlet afsluttes med betragtninger omkring, hvor få generatorer det er muligt at gøre brug af, da det fra en beregningsmæssig synsvinkel er bedst med så få generatorer som muligt.

4.1 Det Generelle Setup

Udvidelsesprincipperne tager begge udgangspunkt i et generelt setup, hvorfor dette introduceres først:

Definition 4.1.1 (Det Generelle Setup)
Lad $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ og antag, at der eksisterer en funktion $H_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$, så

$$\hat{\psi}_0(2\gamma) = H_0(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma). \tag{4.1.1}$$

Antag yderligere, at

$$\lim_{\gamma \to 0} \hat{\psi}_0(\gamma) = 1. \tag{4.1.2}$$

Lad funktionerne $H_1, \ldots, H_n \in L^\infty(\mathbb{T})$, og definér funktionerne $\psi_1, \ldots, \psi_n \in L^2(\mathbb{R})$ ved

$$\hat{\psi}_l(2\gamma) = H_l(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma), \quad l = 1, \ldots, n. \tag{4.1.3}$$

Tilsidst indføres matricen H:

$$H(\gamma) := \begin{pmatrix} H_0(\gamma) & T_{1/2}H_0(\gamma) \\ \vdots & \vdots \\ H_n(\gamma) & T_{1/2}H_n(\gamma) \end{pmatrix}. \tag{4.1.4}$$

En ligning på formen (4.1.1) kaldes en skaleringsligning.

Bemærk, at (4.1.1) og (4.1.2) sikrer, at kravene i Sætning 3.3.1 er opfyldt, hvorved en frame, der er konstrueret med udgangspunkt i Det Generelle Setup, automatisk vil opfylde punkt *(i)*- *(v)* i framemultiskalaanalysen.

Ideen er nu at stille passende betingelser til funktionerne $H_1, \ldots, H_n$ således, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ udgør en tight multiwaveletframe for $L^2(\mathbb{R})$.

4.2 Det Unitære Udvidelsesprincip

I dette afsnit bevises Det Unitære Udvidelsesprincip, men først har vi behov for en række mellemresultater, som gennemgås i de næste fem lemmaer.

I det følgende gøres brug af operatoren $\mathcal{P}$, se Definition A.0.6.

Lemma 4.2.1
Lad $g, \psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, og antag, at $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) \in L^2(\mathbb{T})$. Så gælder, at

(i) $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle g, \hat{\psi}_0 E_k \rangle E_k$,

(ii) $\int_{-1/2}^{1/2} |\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0})(\gamma)|^2 d\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle g, \hat{\psi}_0 E_k \rangle\right|^2$.

Bemærk, at Lemma 4.2.1 *(i)* også gælder, når $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) \notin L^2(\mathbb{T})$.

Bevis:
Først vises punkt *(i)*.

Fra Cauchy-Schwarzs ulighed har vi, at $g\overline{\hat{\psi}_0} \in L^1(\mathbb{R})$, da $g, \psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Dermed er $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) \in L^1(\mathbb{T})$, jævnfør Appendiks A.

Vi betragter

$$\begin{aligned}
\langle g, \hat{\psi}_0 E_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma)} e^{-2\pi i k\gamma} d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(\gamma+n)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+n)} e^{-2\pi i k(\gamma+n)} d\gamma \\
&= \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(\gamma+n)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+n)}\Big)}_{(*)} \quad \underbrace{e^{-2\pi i k\gamma}}_{\text{Basis for} L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])} \quad d\gamma}_{k\text{'te Fourierkoefficient til } (*)}.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(\gamma+n)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+n)} \in L^1(\mathbb{T})$, har vi, at $\langle g, \hat{\psi}_0 E_k \rangle$ er den k'te Fourierkoefficient i udviklingen af funktionen $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0})(\gamma)$. Dermed har vi, at

$$\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle g\overline{\hat{\psi}_0}, E_k \rangle E_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle g, \hat{\psi}_0 E_k \rangle E_k.$$

Dermed er punkt *(i)* vist.

Nu vises punkt *(ii)*.

Per antagelse har vi, at $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0}) \in L^2(\mathbb{T})$, og dermed kan vi anvende Parsevals formel på $\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0})$ således, at

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\mathcal{P}(g\overline{\hat{\psi}_0})(\gamma)|^2 d\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle g, \hat{\psi}_0 E_k \rangle\right|^2.$$

■

Vi vil i det følgende arbejde med underrum, der ligger tæt i $L^2(\mathbb{R})$, da en framebetingelse på en tæt delmængde i $L^2(\mathbb{R})$ kan udvides til hele $L^2(\mathbb{R})$, jævnfør Lemma 2.2.11. Konkret vil vi betragte de funktioner $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvorom der gælder, at $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$.

Lemma 4.2.2
Lad $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, og antag at $\lim_{\gamma\to 0} \hat{\psi}_0(\gamma) = 1$. Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$ være en vilkårlig funktion, hvorom der gælder, at $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$. Så eksisterer der for alle $\epsilon > 0$ et $J \in \mathbb{Z}$ således, at

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^j T_k \psi_0\right\rangle\right|^2 \le (1+\epsilon)\|f\|^2, \quad \forall\, j \ge J.$$

Bevis:
Lad $j \in \mathbb{Z}$ og $f \in L^2(\mathbb{R})$, og antag at $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$. I følge Cauchy-Schwarzs ulighed har vi, at $(D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0} \in L^1(\mathbb{R})$, idet $D^j \hat{f}, \overline{\hat{\psi}_0} \in L^2(\mathbb{R})$. Dermed er $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0})$ veldefineret.

Da $D^j \hat{f}$ har kompakt støtte, og når vi kun betragter $\gamma \in \mathbb{T}$, så kan vi skrive $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0})$ som en endelig linearkombination af ψ_0. Dermed har vi, at

$$\mathcal{P}\big((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}\big) \in L^2(\mathbb{T}).$$

Vi betragter nu $\left\langle f, D^j T_k \psi_0\right\rangle$ og anvender Plancherels formel samt kommutatorrelationerne fra Appendiks A:

$$\left\langle f, D^j T_k \psi_0\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}D^j T_k \psi_0\right\rangle = \left\langle D^j \hat{f}, E_{-k}\hat{\psi}_0\right\rangle. \tag{4.2.1}$$

Vi har, at $D^j \hat{f}, \hat{\psi}_0 \in L^2(\mathbb{R})$, og at $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}) \in L^2(\mathbb{T})$, og vi kan dermed anvende Lemma 4.2.1 *(ii)*:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^j T_k \psi_0\right\rangle\right|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle D^j \hat{f}, E_{-k}\hat{\psi}_0\right\rangle\right|^2 \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} |\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0})(\gamma)|^2 d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} (D^j \hat{f})(\gamma+n)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+n)}\Big|^2 d\gamma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big|(D^j \hat{f})(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma)}\Big|^2 d\gamma. \qquad (4.2.2)
\end{aligned}$$

Nu vælges et vilkårligt $\epsilon > 0$. Da vi per antagelse har, at $\lim_{\gamma\to 0} \hat{\psi}_0(\gamma) = 1$, så kan vi finde et $b \in]0, \frac{1}{2}[$ således, at

$$1-\epsilon \le |\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 \le 1+\epsilon, \text{ når } \quad |\gamma| \le b. \tag{4.2.3}$$

Da $\hat{f}$ har kompakt støtte, så kan vi finde et $J \in \mathbb{Z}$ således, at $D^j \hat{f}$ har støtte i intervallet $[-b, b]$ for $j > J$. Dermed har vi for alle $j > J$, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|(D^j \hat{f})(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma)}\right|^2 d\gamma = \int_{-b}^{b} \left|(D^j \hat{f})(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma)}\right|^2 d\gamma. \tag{4.2.4}$$

Ligningerne (4.2.2), (4.2.3) og (4.2.4) medfører, at

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_0 \rangle\right|^2 &= \int_{-b}^{b} \left|(D^j \hat{f})(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma)}\right|^2 d\gamma \\ &\leq (1+\epsilon) \int_{-b}^{b} |(D^j \hat{f})(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= (1+\epsilon)\|D^j \hat{f}\|^2. \end{aligned}$$

På samme måde gælder der, at

$$(1-\epsilon)\|D^j \hat{f}\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_0 \rangle\right|^2.$$

Da dilationsoperatoren og Fouriertransformen er unitære operatorer, er resultatet i lemmaet opnået:

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_0 \rangle\right|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2, \quad \forall\, j \geq J.$$

■

Udfra dette bevis kan man yderligere vise, at når Det Generelle Setup er opfyldt, så gælder der for $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvorom der gælder, at $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$, at

$$\{\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad l = 1, \ldots, n.$$

Vi har fra beviset for Lemma 4.2.2, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle\right|^2 = \int_{-b}^{b} \left|(D^j \hat{f})(\gamma)\overline{\hat{\psi}_l(\gamma)}\right|^2 d\gamma, \quad \forall\, j > J.$$

Ved anvendelse af ligning (4.1.3) fra Det Generelle Setup får vi så for alle $j > J$, at

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle\right|^2 &= \int_{-b}^{b} \left|(D^j \hat{f})(\gamma)\overline{H_l(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2)}\right|^2 d\gamma \\ &\leq (1+\epsilon)\|H_l\|_{L^\infty}^2 \|D^j \hat{f}\|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

hvorved $\{\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ for $j \in \mathbb{Z}$ og $l = 1, \dots, n$.

Dermed kan vi, når Det Generelle Setup er opfyldt, indføre funktionerne $F_{j,l} \in L^2(\mathbb{T})$ givet ved

$$F_{j,l} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_l \rangle E_{-k}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, 1, \dots, n. \tag{4.2.5}$$

Da $F_{j,l}$ er udtrykt ved ψ_l, som igen er givet udfra ψ_0 og H_l, så kan vi udtrykke $F_{j,l}$ ved hjælp af $F_{j,0}$ og H_l. Denne sammenhæng er givet i det følgende lemma:

Lemma 4.2.3
Lad $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ være givet som i Det Generelle Setup. Så gælder der, at

$$F_{j-1,l}(\gamma) = 2^{-1/2}\Big(\overline{H_l} F_{j,0} + T_{1/2}\left(\overline{H_l} F_{j,0}\right)\Big)(\gamma/2)\,, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, \dots, n. \tag{4.2.6}$$

Bevis:
I punkt 1 bestemmes et udtryk for $\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l \rangle$, hvilket derefter bruges i punkt 2 til at vise (4.2.6).

1. I dette punkt betragtes $\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l \rangle$. Ved anvendelse af kommutatorrelationerne fra Appendiks A samt Plancherels formel har vi, at

$$\begin{aligned} \langle f, D^{j-1} T_k \psi_l \rangle &= \langle D^{-j} f, D^{-1} T_k \psi_l \rangle \\ &= \langle D^{-j} f, T_{2k} D^{-1} \psi_l \rangle \\ &= \langle \mathcal{F} D^{-j} f, \mathcal{F} T_{2k} D^{-1} \psi_l \rangle \\ &= \langle D^j \hat{f}, E_{-2k} D \hat{\psi}_l \rangle. \end{aligned}$$

Nu anvender vi ligning (4.1.3) fra Det Generelle Setup, så

$$\begin{aligned} \langle f, D^{j-1} T_k \psi_l \rangle &= \langle D^j \hat{f}, E_{-2k} D \hat{\psi}_l \rangle \\ &= \langle D^j \hat{f}, E_{-2k} 2^{1/2} H_l \hat{\psi}_0 \rangle \\ &= 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (D^j \hat{f})(\gamma) \left(E_{2k} \overline{H_l} \overline{\hat{\psi}_0} \right)(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Ved anvendelse af periodiseringsoperatoren har vi, at

$$
\begin{aligned}
& \langle f, D^{j-1}T_k\psi_l \rangle \\
= \;& 2^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\Big[\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})E_{2k}\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)\Big](\gamma)d\gamma \\
= \;& 2^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\Big[\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)E_{2k}\Big](\gamma)d\gamma \\
= \;& 2^{1/2}\int_{0}^{1/2}\Big[\Big(\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)E_{2k}\Big)(\gamma) \\
& +\Big(T_{1/2}\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)T_{1/2}E_{2k}\Big)(\gamma)\Big]d\gamma \\
= \;& \int_0^{1/2}\underbrace{\Big[\Big(\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)\Big)(\gamma)+\Big(T_{1/2}\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)\Big)(\gamma)\Big]}_{(*)} \\
& \times \quad \underbrace{2^{1/2}E_{2k}}_{\text{Basis for } L^2([0,\frac{1}{2}])} \quad d\gamma.
\end{aligned}
$$

Dermed har vi, at $\langle f, D^{j-1}T_k\psi_l \rangle$ er den $-k$'te Fourierkoefficient i udviklingen af funktionen $(*)$ med hensyn til den ortonormale basis $\{2^{1/2}E_{2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ for $L^2([0,\frac{1}{2}])$.

2. I dette punkt vises (4.2.6).

Da $E_{-2k}(\gamma/2) = E_{-k}(\gamma)$, og H_l er en 1-periodisk funktion fra Det Generelle Setup, har vi, jævnfør (4.2.5), at

$$
\begin{aligned}
& F_{j-1,l}(\gamma) \\
= \;& 2^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^{j-1}T_k\psi_l\rangle 2^{1/2}E_{-2k}(\gamma/2) \\
= \;& 2^{-1/2}\Big[\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)+T_{1/2}\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{H_l\hat{\psi}_0}\Big)\Big](\gamma/2) \\
= \;& 2^{-1/2}\Big[\overline{H_l}\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}\Big)+T_{1/2}\overline{H_l}\mathcal{P}\Big((D^j\hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}\Big)\Big](\gamma/2). \quad (4.2.7)
\end{aligned}
$$

Fra beviset for Lemma 4.2.2 ligning (4.2.1) har vi, at

$$\langle f, D^jT_k\psi_0\rangle = \langle D^j\hat{f}, E_{-k}\hat{\psi}_0\rangle.$$

Fra definitionen af $F_{j,l}$, jævnfør (4.2.5), har vi så, at

$$
\begin{aligned}
F_{j,0}(\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^jT_k\psi_0\rangle E_{-k}(\gamma) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle D^j\hat{f}, E_{-k}\hat{\psi}_0\rangle E_{-k}(\gamma).
\end{aligned}
$$

Da $D^j \hat{f}, \psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, har vi udfra Lemma 4.2.1 *(i)*, at

$$F_{j,0}(\gamma) = \left(\mathcal{P}\Big((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}\Big)\right)(\gamma). \tag{4.2.8}$$

Ved indsættelse af ligning (4.2.8) i ligning (4.2.7) får vi så, at

$$\begin{aligned} F_{j-1,l}(\gamma) &= 2^{-1/2}\left[\overline{H_l}\mathcal{P}\Big((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}\Big) + T_{1/2}\overline{H_l}\mathcal{P}\Big((D^j \hat{f})\overline{\hat{\psi}_0}\Big)\right](\gamma/2) \\ &= 2^{-1/2}[\overline{H_l}F_{j,0} + T_{1/2}\overline{H_l}F_{j,0}]\,(\gamma/2)\,, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

hvorved lemmaet er bevist. Vi bemærker, at (4.2.9) også kan skrives som:

$$\begin{pmatrix} F_{j-1,0}(\gamma) \\ F_{j-1,1}(\gamma) \\ \vdots \\ F_{j-1,n}(\gamma) \end{pmatrix} = 2^{-1/2}\overline{H(\gamma/2)}\begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix}, \tag{4.2.10}$$

hvor H er givet som i (4.1.4).

■

Følgende to lemmaer introducerer betingelsen $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$, som viser sig at være et centralt krav i Det Unitære Udvidelsesprincip.

Lemma 4.2.4
Lad $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ være givet som i Det Generelle Setup, og antag at

$$H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2.$$

Så gælder for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, for hvilke $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^j T_k \psi_0\right\rangle\right|^2 = \sum_{l=0}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l\right\rangle\right|^2, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}.$$

Bevis:
Per definition er $F_{j-1,l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, D^{j-1}T_k\psi_l\right\rangle E_{-k}$, hvorpå vi kan anvende Parsevals formel. Dermed har vi for alle $j \in \mathbb{Z}$, at

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l\right\rangle\right|^2 = \sum_{l=0}^n \int_{-1/2}^{1/2} |F_{j-1,l}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

Ved brug af notationen fra (4.2.10) kan dette skrives, som

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left\|\overline{H(\gamma/2)}\begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{C}^{n+1}}^2 d\gamma.$$

Antagelsen om, at $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$, er ækvivalent med, at $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{n+1}$ er en isometri. Dermed gælder, at

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j-1}T_k\psi_l\right\rangle\right|^2 &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left\| \begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\gamma \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left(\left|F_{j,0}\left(\gamma/2\right)\right|^2 + \left|T_{1/2}F_{j,0}\left(\gamma/2\right)\right|^2 \right) d\gamma.\end{aligned}$$

Da vi har, at $F_{j,0}$ er 1-periodisk, kan dette skrives som

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j-1}T_k\psi_l\right\rangle\right|^2 &= \int_{-1/2}^{1/2} |F_{j,0}(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j}T_k\psi_0\right\rangle\right|^2,\end{aligned}$$

hvor Parsevals formel er anvendt i sidste lighed. ■

Lemma 4.2.5
Lad $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ *være givet som i Det Generelle Setup, og antag, at*

$$H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2.$$

Så gælder der følgende:

(i) $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *er en Besselfølge med grænse 1, det vil sige, at*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \leq \|f\|^2, \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

(ii) Hvis $f \in L^2(\mathbb{R})$, *så gælder, at*

$$\lim_{j\to-\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j}T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 = 0.$$

Bevis:
Først bevises punkt *(i)*.

Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$, og antag at $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$. Fra Lemma 4.2.4 har vi dermed, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j-1}T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j}T_k\psi_0\right\rangle\right|^2, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}. \tag{4.2.11}$$

Ved anvendelse af Lemma 4.2.2 eksisterer der for ethvert $\epsilon > 0$ et $j > 0$ således, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^{j}T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2.$$

Ved anvendelse af ligning (4.2.11) j gange har vi yderligere, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^j T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2.$$

Da ϵ var valgt vilkårligt, har vi dermed, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, T_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \leq \|f\|^2.$$

Da denne ligning gælder for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvorom der gælder, at $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$, så kan resultatet udvides til at gælde for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ ved hjælp af Lemma 2.2.11.

Nu vises punkt *(ii)*.

Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$. Da vi lige har vist, at $\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en Besselfølge med grænse 1, og da D^j er en unitær operator, så har vi, at $\{D^jT_k\psi_0\}_{k\in Z}$ er en Besselfølge med grænse 1 for alle $j \in \mathbb{Z}$.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset interval. Vi kan så anvende indikatorfunktionen χ_I til at opskrive følgende:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \\
= & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f\chi_I + f(1-\chi_I), D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \\
= & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left|\left\langle f\chi_I, D^jT_k\psi_0\right\rangle + \left\langle f(1-\chi_I), D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2\right) \\
\leq & \; 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f\chi_I, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle (1-\chi_I)f, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

Nu anvendes, at $\{D^jT_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en Besselfølge med grænse 1:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \quad \leq \quad 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f\chi_I, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 + 2\|(1-\chi_I)f\|^2.$$

Ved at vælge intervallet I tilstrækkeligt stort, så kan vi gøre $\|f(1-\chi_I)\|^2$ vilkårlig lille. Dermed skal vi nu blot vise, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f\chi_I, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 \to 0 \text{ for } \quad j \to -\infty.$$

Vi betragter derfor

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f\chi_I, D^jT_k\psi_0\right\rangle\right|^2 = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_I f(x)\overline{\psi_0(2^jx-k)}dx\right|^2.$$

Nu anvendes Cauchy-Schwarzs ulighed, hvorved vi har, at

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f\chi_I, D^jT_k\psi_0\rangle\right|^2 \\
\leq \quad & 2^j\|f\|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_I |\psi_0(2^jx-k)|^2 dx \\
= \quad & \|f\|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^jI-k} |\psi_0(x)|^2 dx \\
= \quad & \|f\|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{2^jI-k}(x)|\psi_0(x)|^2 dx \\
= \quad & \|f\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{2^jI-k}(x)|\psi_0(x)|^2 dx,
\end{aligned} \tag{4.2.12}
$$

hvor Fubinis Sætning er anvendt i sidste lighed. Når $j \to -\infty$, så bliver intervallerne $2^jI - k$ disjunkte. Dette betyder, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{2^jI-k}(x)|\psi_0(x)|^2 \leq |\psi_0(x)|^2, \quad \text{for } j \to -\infty,$$

Da $\psi_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$, så har vi, at $|\psi_0(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, hvorved vi nu kan anvende Lebesgues Majorantsætning på (4.2.12) med $|\psi_0(x)|^2$ som majorant. Det observeres, at

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{2^jI-k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{for} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases},$$

og da $\mathbb{Z}$ er en nulmængde, har vi, at

$$\lim_{j\to-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{2^jI-k}(x)|\psi_0(x)|^2 dx = 0.$$

Lemmaet er dermed vist. ■

Med disse fem lemmaer er vi nu klar til at præsentere Det Unitære Udvidelsesprincip, hvori det fremgår hvilke krav, der skal stilles til funktionerne H_l og ψ_l, førend $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ udgør en tight multiwaveletframe for $L^2(\mathbb{R})$.

Hovedsætning 4.2.6 (Det Unitære Udvidelsesprincip)
Lad $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ være givet som i Det Generelle Setup, og antag, at

$$H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2.$$

Så udgør systemet $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse 1.

Bevis:
Betragt et $f \in L^2(\mathbb{R})$, for hvilket $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$. Udfra Lemma 4.2.2 kan vi for ethvert $\epsilon > 0$ vælge et $J > 0$ således, at

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \psi_0\rangle|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2, \quad \forall j > J. \tag{4.2.13}$$

Yderligere har vi ved hjælp Lemma 4.2.4, at

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_0\rangle\right|^2 &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^{j-1} T_k \psi_0\rangle\right|^2 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

På tilsvarende måde kan vi omskrive

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^{j-1} T_k \psi_0\rangle\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^{j-2} T_k \psi_0\rangle\right|^2 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^{j-2} T_k \psi_l\rangle\right|^2.$$

Ved at anvende denne omskrivning $j-m$ gange, hvor $m < j$, får man for alle $j > J$, at

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_0\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^m T_k \psi_0\rangle\right|^2 + \sum_{p=m}^{j-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_l\rangle|^2.\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Udfra ligning (4.2.13) har vi så, at

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^m T_k \psi_0\rangle\right|^2 + \sum_{p=m}^{j-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^p T_k \psi_l\rangle\right|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2.$$

Ved at lade $m \to -\infty$ og anvende Lemma 4.2.5 *(ii)* har vi for ethvert $j > J$, at

$$\lim_{m\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^m T_k \psi_0|\rangle\right|^2 = 0, \tag{4.2.15}$$

det vil sige

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{p=-\infty}^{j-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^p T_k \psi_l\rangle\right|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2.$$

Ved yderligere at lade $j \to \infty$ får vi, at

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^p T_k \psi_l\rangle\right|^2 \leq (1+\epsilon)\|f\|^2.$$

Da $\epsilon > 0$ var vilkårligt valgt, må der gælde, at

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, D^p T_k \psi_l \right\rangle\right|^2 = \|f\|^2.$$

Ovenstående framebetingelse gælder for $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvorom der gælder, at $\hat{f} \in C_c$. Dette kan ved anvendelse af Lemma 2.2.11 udvides til at gælde for hele $L^2(\mathbb{R})$, hvorved $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ udgør en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$. ■

4.2.1 Begrænsninger ved Det Unitære Udvidelsesprincip

De konstruktioner, der naturligt fremkommer ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip, har visse begrænsninger. Blandt andet bliver der en vis begrænsning på antallet af vanishing moments.

Fra Sætning 2.4.2 gælder der, at hvis ψ_l har m vanishing moments, så har $\hat{\psi}_l$ et nulpunkt af orden m i origo. Vi har desuden fra ligning (4.1.2) og (4.1.3) i Det Generelle Setup, at

$$H_l(\gamma) = \frac{\hat{\psi}_l(2\gamma)}{\hat{\psi}_0(\gamma)}, \quad \gamma \to 0.$$

Der gælder dermed, da $\lim_{\gamma\to 0} \hat{\psi}_0(\gamma) = 1$, at antallet af vanishing moments svarer til ordenen af nulpunkter for H_l i origo. I Det Unitære Udvidelsesprincip antager vi, at $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$, hvilket medfører, at

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = 1 - |H_0(\gamma)|^2. \tag{4.2.16}$$

Det vil sige, at ordenen af nulpunkter i origo af funktionen $1 - |H_0|^2$ bestemmer antallet af vaninshing moments af ψ_l. Det vil sige, at en given skaleringsfunktion fastlægger antallet af vanishing moments. Ideen i Det Oblique Udvidelsesprincip er at indføre en funktion θ, som kan korrigere for dette. Dette eksemplificeres i Kapitel 6.

Yderligere giver betingelsen $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$ i Det Unitære Udvidelsesprincip i følge [Chr03, s. 19], at rækkerne i H er ortonormale. Dette giver følgende betingelse:

$$|H_0(\gamma)|^2 + |H_0(\gamma + 1/2)|^2 \leq 1. \tag{4.2.17}$$

Vi har altså, at H_0 begrænser antallet af vanishing moments for ψ_l, og samtidig skal H_0 opfylde (4.2.17), hvilket afgrænser mængden af potentielle valg af H_0.

Disse ulemper ved Det Unitære Udvidelsesprincip leder frem til indførelsen af Det Oblique Udvidelsesprincip.

4.3 Det Oblique Udvidelsesprincip

I dette afsnit bevises Det Oblique Udvidelsesprincip, som giver en konstruktion af tight multiwaveletframes for $L^2(\mathbb{R})$. De to udvidelsesprincipper er ækvivalente, men indførelsen af θ-funktionen i Det Oblique Udvidelsesprincip viser sig at have stor betydning i forhold til de begrænsninger, som vi betragtede i Afsnit 4.2.1.

Hovedsætning 4.3.1 (Det Oblique Udvidelsesprincip)
Lad $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ være givet som i Det Generelle Setup og antag, at der eksisterer en streng positiv funktion $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$ således, at

$$\lim_{\gamma \to 0} \theta(\gamma) = 1. \tag{4.3.1}$$

Antag yderligere, at

$$H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+\nu)}\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+\nu)} = \begin{cases} \theta(\gamma), & \text{hvis } \nu = 0, \\ 0, & \text{hvis } \nu = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Så udgør systemet $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z}, l=1\dots,n}$ en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse 1.

Bemærk, at θ er en reel funktion.

Bevis:
Ideen i beviset er at anvende Det Unitære Udvidelsesprincip på funktionerne $\tilde{\psi}_0$ og $\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n$, der konstrueres udfra ψ_0, og $H_0, \dots, H_n$. Derved fremkommer generatorerne $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_n$, som kan vises at svare til funktionerne $\psi_1, \dots, \psi_n$.

Beviset er inddelt i fire punkter. I det første punkt introduceres $\tilde{\psi}_0$ og $\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n$. I punkt 2 vises det, at betingelserne fra Det Generelle Setup er opfyldt for $\tilde{\psi}_0$ og $\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n$. I punkt 3 vises det, at $\tilde{H}^*(\gamma)\tilde{H}(\gamma) = I_2$. Tilsidst anvendes i punkt 4 Det Unitære Udvidelsesprincip på $\{\tilde{\psi}_l, \tilde{H}_l\}_{l=0}^n$, og det indses, at $\psi_l = \tilde{\psi}_l$.

1. Som udgangspunkt antages det, at betingelserne i Det Oblique Udvidelsesprincip er opfyldt.

Nu defineres funktionen $\tilde{\psi}_0 \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) := \sqrt{\theta(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma). \tag{4.3.3}$$

Yderligere defineres de 1-periodiske funktioner $\tilde{H}_0, \ldots, \tilde{H}_n$ ved

$$\tilde{H}_0(\gamma) := \sqrt{\frac{\theta(2\gamma)}{\theta(\gamma)}}H_0(\gamma), \quad \tilde{H}_l(\gamma) := \sqrt{\frac{1}{\theta(\gamma)}}H_l(\gamma), \quad l = 1, \ldots, n. \tag{4.3.4}$$

2. I dette punkt vises, at kravene i Det Generelle Setup er opfyldt.
   Først vises, at $\tilde{\psi}_0$ og $\tilde{H}_0$ opfylder ligning (4.1.1) i Det Generelle Setup. Vi har, at

   $$\hat{\tilde{\psi}}_0(2\gamma) = \sqrt{\theta(2\gamma)}\hat{\psi}_0(2\gamma) = \sqrt{\theta(2\gamma)}H_0(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma),$$

   idet ψ_0 opfylder ligning (4.1.1). Ved brug af (4.3.3) har vi, at

   $$\hat{\tilde{\psi}}_0(2\gamma) = \sqrt{\frac{\theta(2\gamma)}{\theta(\gamma)}}H_0(\gamma)\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma).$$

   Ved anvendelse af (4.3.4) har vi den ønskede skaleringsligning:

   $$\hat{\tilde{\psi}}_0(2\gamma) = \tilde{H}_0(\gamma)\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma).$$

   Vi har også, at ligning (4.1.2) er opfyldt, idet

   $$\lim_{\gamma \to 0} \hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) = \lim_{\gamma \to 0}(\sqrt{\theta(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma)) = 1.$$

3. I dette punkt vises, at $\tilde{H}^*(\gamma)\tilde{H}(\gamma) = I_2$. Først vises det, at diagonalindgangene i $\tilde{H}^*\tilde{H}$ er lig med 1. Dette gøres ved at indsætte $H_0, \ldots, H_n$ fra ligning (4.3.4) i ligning (4.3.2), hvor $\nu = 0$:

   $$\begin{aligned} \theta(\gamma) &= |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 \\ &= \theta(\gamma)|\tilde{H}_0(\gamma)|^2 + \theta(\gamma)\sum_{l=1}^{n} |\tilde{H}_l(\gamma)|^2 \\ &= \theta(\gamma)\sum_{l=0}^{n} |\tilde{H}_l(\gamma)|^2. \end{aligned}$$

   Dette giver, at

   $$\sum_{l=0}^{n} |\tilde{H}_l(\gamma)|^2 = 1.$$

Dermed har vi også, at $\tilde{H}_0, \ldots, \tilde{H}_n \in L^\infty(\mathbb{T})$, hvilket også er et krav fra Det Generelle Setup.

Nu vises, at de to resterende indgange i $H^*(\gamma)H(\gamma)$ er lig med 0. Idet θ per konstruktion er en 1-periodisk funktion, så har vi ved anvendelse af (4.3.4), at

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \tilde{H}_l(\gamma)\overline{\tilde{H}_l(\gamma+1/2)} \\
= \;& \sqrt{\frac{\theta(2\gamma)}{\theta(\gamma)}}H_0(\gamma)\overline{\sqrt{\frac{\theta(2(\gamma+1/2))}{\theta(\gamma+1/2)}}H_0(\gamma+1/2)} \\
&+\frac{1}{\sqrt{\theta(\gamma)}}\frac{1}{\sqrt{\theta(\gamma+1/2)}}\sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+1/2)} \\
= \;& \frac{1}{\sqrt{\theta(\gamma)\theta(\gamma+1/2)}} \\
&\times\Big(\theta(2\gamma)H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)} + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+1/2)}\Big) \\
= \;& 0,
\end{aligned}$$

idet sidste lighed opnås ved brug af (4.3.2) med $\nu = 1/2$.

4. Nu kan vi anvende Det Unitære Udvidelsesprincip på $\{\tilde{\psi}_l, \tilde{H}_l\}_{l=0}^n$ ved at definere $\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_n$, som

$$\hat{\tilde{\psi}}_l(2\gamma) = \tilde{H}_l(\gamma)\hat{\tilde{\psi}}_l(\gamma), \quad l = 1, \ldots, n.$$

Således har vi, at $\{D^j T_k \tilde{\psi}_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ udgør en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse 1.

Tilsidst bemærkes det, at $\psi_l = \tilde{\psi}_l$ for $l = 1, \ldots, n$, idet

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_l(2\gamma) &= H_l(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma) \\
&= \sqrt{\theta(\gamma)}\tilde{H}_l(\gamma)\frac{1}{\sqrt{\theta(\gamma)}}\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) \\
&= \tilde{H}_l(\gamma)\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) \\
&= \hat{\tilde{\psi}}_l(2\gamma),
\end{aligned}$$

hvorved vi har, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ er tight frame for $L^2(\mathbb{R})$.

■

Det ses, at Det Unitære Udvidelsesprincip fremkommer, når vi i Det Oblique Udvidelsesprincip vælger $\theta = 1$. Beviset for Det Oblique Udvidelsesprincip viser, at man udfra de to udvidelsesprincipper kan konstruere de samme multiwaveletframes.

4.3.1 Fordele ved Det Oblique Udvidelsesprincip

Der er visse konstruktioner, som ikke vil være oplagte via Det Unitære Udvidelsesprincip. Dette skyldes, at man i Det Unitære Udvidelsesprincip skal tage udgangspunkt i funktioner på formen

$$\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) = \sqrt{\theta(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma), \quad \tilde{H}_l(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{\theta(\gamma)}}H_l(\gamma),$$

hvis man ønsker at konstruere de samme frames som med Det Oblique Udvidelsesprincip.

Betragt eksempelvis en skaleringsfunktion ψ_0 med kompakt støtte og antag, at θ og $H_1, \dots, H_n$ er trigonometriske polynomier, som opfylder Det Oblique Udvidelsesprincip. Ligning (4.1.3) giver da, at

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_l(2\gamma) &= H_l(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma) \\
&= \sum_{k=1}^{N} c_{k,l} e^{2\pi i k\gamma}\hat{\psi}_0(\gamma) \\
&= \sum_{k=1}^{N} c_{k,l}(E_k\mathcal{F}\psi_0)(\gamma) \\
&= \Big(\mathcal{F}\sum_{k=1}^{N} c_{k,l}T_{-k}\psi_0\Big)(\gamma),
\end{aligned}$$

hvor $N \in \mathbb{N}$. Dermed har vi, at

$$\psi_l(2\gamma) = \sum_{k=1}^{N} c_{k,l}(T_{-k}\psi_0)(\gamma),$$

som har kompakt støtte, da ψ_0 har kompakt støtte.

Hvis de samme generatorer skal konstrueres ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip, så skal vi tage udgangspunkt i skaleringsfunktionen

$$\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) = \sqrt{\theta(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma).$$

Beviset for Det Oblique Udvidelsesprincip viser så, at $\tilde{\psi}_l = \psi_l$. Da θ er 2π-periodisk, så er $\sqrt{\theta}$ 2π-periodisk, og dermed kan vi udvikle denne efter basen

$\{e^{2\pi ik\gamma}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, hvorved vi har, at

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma) &= \sqrt{\theta(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{2\pi ik\gamma}\hat{\psi}_0(\gamma)\\ &= \Big(\mathcal{F}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k T_{-k}\psi_0\Big)(\gamma).\end{aligned}$$

Dermed har vi, at

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k T_{-k}\psi_0.$$

Da vi ikke ved, om der kun er endeligt mange koefficienterne d_k, der er forskellige fra nul, så har $\tilde{\psi}_0$ ikke nødvendigvis kompakt støtte. Dermed ses det, at vi via Det Unitære Udvidelsesprincip kan konstruere generatorer med kompakt støtte udfra en skaleringsfunktion, der ikke nødvendigvis har kompakt støtte.

Det vil sige, at konstruktionen af generatorer, der har kompakt støtte, i nogle tilfælde ikke vil være oplagt med Det Unitære Udvidelsesprincip, men derimod forekommer naturligt ved Det Oblique Udvidelsesprincip.

En anden betragtning er, at betingelsen $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$ i Det Unitære Udvidelsesprincip er erstattet af

$$H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+\nu)}\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+\nu)} = \begin{cases}\theta(\gamma), & \text{hvis } \nu = 0,\\ 0, & \text{hvis } \nu = \frac{1}{2},\end{cases}$$

i Det Oblique Udvidelsesprincip. Dette giver specielt for $\nu = 0$, at

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = \theta(\gamma) - |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma). \tag{4.3.5}$$

Hvis dette sammenlignes med (4.2.16), ses det, at valget af θ har indflydelse på antallet af vanishing moments af generatorerne. Friheden i valget af θ giver således en større fleksibilitet ved Det Oblique Udvidelsesprincip.

4.4 Antal generatorer

I dette afsnit vises korollarer til henholdsvis Det Unitære og Det Oblique Udvidelsesprincip. Disse viser, hvordan vi kan konstruere waveletframes med ned til én generator. Beregningsmæssigt er det hensigtsmæssigt at have få generatorer i en multiwaveletframe. Dog giver færre generatorer mindre fleksibilitet, hvilket fremgår af de krav, der stilles i korollarerne.

I Det Oblique Udvidelsesprincip skal man vælge θ og $H_1, \ldots, H_n$, så disse opfylder (4.3.2). I det følgende korollar til Det Oblique Udvidelsesprincip stilles der yderligere krav til θ, hvilket medfører, at man udfra et valg af θ kan konstruere $H_1, \ldots, H_n$. Ligeledes giver korollaret, at man kan få ned til to generatorer.

Korollar 4.4.1
Lad ψ_0 og H_0 være givet som i Det Generelle Setup. Lad $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$ være en streng positiv funktion således, at

$$\eta(\gamma) := \theta(\gamma) - \theta(2\gamma)\left(|H_0(\gamma)|^2 + |H_0(\gamma + 1/2)|^2\right) \tag{4.4.1}$$

er positiv, og

$$\lim_{\gamma \to 0} \theta(\gamma) = 1.$$

Vælg et $n \geq 2$, hvor $n \in \mathbb{Z}$, og lad $\{G_l\}_{l=2}^n$ være trigonomiske polynomier, hvorom der gælder, at

$$\sum_{l=2}^{n} |G_l(\gamma)|^2 = 1 \quad og \quad \sum_{l=2}^{n} G_l(\gamma)\overline{G_l(\gamma + 1/2)} = 0. \tag{4.4.2}$$

Lad yderligere ρ og σ være 1-periodiske funktioner, som opfylder, at

$$|\rho(\gamma)|^2 = \theta(\gamma) \quad og \quad |\sigma(\gamma)|^2 = \eta(\gamma). \tag{4.4.3}$$

Definer funktionerne $H_1, \ldots, H_n$ ved

$$H_1(\gamma) := e^{2\pi i\gamma}\rho(2\gamma)\overline{H_0(\gamma + 1/2)} \quad og \quad H_l(\gamma) := G_l(\gamma)\sigma(\gamma), \quad l = 2, \ldots, n. \tag{4.4.4}$$

Så genererer funktionerne $\psi_1, \ldots, \psi_n$, givet ved ligning (4.1.3) i Det Generelle Setup, en tight frame $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse 1.

Bevis:
Ideen i beviset er at vise, at funktionerne $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ og θ opfylder betingelserne i Det Oblique Udvidelsesprincip, hvorefter denne sætning anvendes til konstruktion af en frame.

Vi har som udgangspunkt, at funktionerne $\{\psi_l, H_l\}_{l=0}^n$ per konstruktion opfylder betingelserne i Det Generelle Setup, og at funktionen $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$ opfylder (4.3.1). Derfor mangler vi blot at vise, at ligning (4.3.2) er opfyldt.

1. I dette punkt vises, at (4.3.2) er opfyldt for $\nu = 0$. Her anvendes ligning (4.4.4):

$$\begin{aligned} & |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 \\ = \quad & |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma) + |\rho(2\gamma)|^2|H_0(\gamma+1/2)|^2 + \sum_{l=2}^{n} |G_l(\gamma)|^2|\sigma(\gamma)|^2. \end{aligned}$$

   Hernæst indsættes udtrykkene fra (4.4.2) og (4.4.3), så vi får, at

$$\begin{aligned} & |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 \\ = \quad & |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma) + \theta(2\gamma)|H_0(\gamma+1/2)|^2 + \eta(\gamma). \end{aligned}$$

   Nu indsættes ligning (4.4.1), og vi får, at

$$|H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = \theta(\gamma),$$

   som viser, at ligning (4.3.2) er opfyldt for $\nu = 0$.

2. Nu undersøges tilsvarende om (4.3.2) er opfyldt for $\nu = 1/2$. Igen anvendes (4.4.4):

$$\begin{aligned} & H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+1/2)} \\ = \quad & H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\theta(2\gamma) \\ & + e^{2\pi i\gamma}\rho(2\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\overline{e^{-2\pi i(\gamma+1/2)}\rho(2(\gamma+1/2))\overline{H_0(\gamma+1)}} \\ & + \sum_{l=2}^{n} G_l(\gamma)\sigma(\gamma)\overline{G_l(\gamma+1/2)\sigma(\gamma+1/2)}. \end{aligned}$$

   Nu gør vi brug af, at ρ og H_0 er 1-periodiske funktioner og anvender (4.4.2).

$$\begin{aligned} & H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+1/2)} \\ = \quad & H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\theta(2\gamma) - |\rho(2\gamma)|^2 H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}. \end{aligned}$$

   Ved hjælp af ligning (4.4.3) har vi så det ønskede resultat:

$$H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma)\overline{H_l(\gamma+1/2)} = 0.$$

Da kravene for brugen af Det Oblique Udvidelsesprincip er opfyldt, har vi ved anvendelse af dette, at funktionerne $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ udgør en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse 1. ■

Bemærk, at hvis θ og η er positive trigonometriske polynomier på formen

$$\sum_{k=0}^{N} f_k \cos(2\pi k x), \quad f_k \in \mathbb{R},$$

så kan ρ og σ bestemmes ved hjælp af spektralfaktorisering, jævnfør [Dau92, s. 172].

Det næste korollar til Det Oblique Udvidelsesprincip giver betingelser for, hvordan vi kan konstruere en tight multiwaveletframe med præcis to generatorer.

Korollar 4.4.2
Lad ψ_0 og H_0 være givet som i Det Generelle Setup. Lad $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$ være en strengt positiv funktion således, at

$$\eta(\gamma) := \theta(\gamma) - \theta(2\gamma)\left(|H_0(\gamma)|^2 + |H_0(\gamma+1/2)|^2\right)$$

er positiv, og

$$\lim_{\gamma\to 0} \theta(\gamma) = 1.$$

Lad yderligere ρ og σ være 1-periodiske funktioner, som opfylder, at

$$|\rho(\gamma)|^2 = \theta(\gamma) \quad \text{og} \quad |\sigma(\gamma)|^2 = \eta(\gamma).$$

Definer funktionerne H_1 og H_2 ved

$$H_1(\gamma) = e^{2\pi i\gamma}\rho(2\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)} \quad \text{og} \quad H_2(\gamma) = H_0(\gamma)\sigma(2\gamma).$$

Så genererer funktionerne ψ_1 og ψ_2, givet ved ligning (4.1.3) *i Det Generelle Setup, en tight frame $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,2}$ for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse* 1.

Beviset for dette korollar svarer til beviset for Korollar 4.4.1, hvor funktionen θ blot erstattes af funktionen $\theta - \eta$.

I det tilfælde, hvor vi ønsker en tight frame med kun en enkelt generator, må vi stille strengere krav end ovenfor. Dette udtrykkes i det følgende korollar til Det Unitære Udvidelsesprincip.

Korollar 4.4.3
Lad $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, og lad H_0 være et trigonometrisk polynomium, der opfylder

$$|H_0(\gamma)|^2 + |H_0(\gamma+1/2)|^2 = 1, \tag{4.4.5}$$

og

$$H_0(0) = 1. \tag{4.4.6}$$

Lad skaleringsfunktionen være defineret ved

$$\hat{\psi}_0(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0(2^{-j}\gamma), \tag{4.4.7}$$

og definer yderligere H_1 ved

$$H_1(\gamma) := \overline{H_0(\gamma + 1/2)} e^{-2\pi i \gamma}.$$

Så genererer ψ_1, givet ved ligning (4.1.3) *i Det Generelle Setup, en tight frame $\{D^j T_k \psi_1\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse* 1.

Bevis:
Ideen i beviset er at anvende Det Unitære Udvidelsesprincip. For at kunne anvende dette skal vi først have, at Det Generelle Setup er opfyldt. Vi har, at $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, og at $H_0(\gamma) \in L^\infty(\mathbb{T})$, idet H_0 er et trigonometrisk polynomium.

Vi undersøger nu ved hjælp af (4.4.7), om skaleringsligningen fra Det Generelle Setup er opfyldt:

$$\begin{aligned} H_0(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma) &= H_0(\gamma) \prod_{j=1}^{\infty} H_0(2^{-j}\gamma) \\ &= \prod_{j=0}^{\infty} H_0(2^{-j}\gamma) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} H_0(2^{-j+1}\gamma) \\ &= \hat{\psi}_0(2\gamma). \end{aligned}$$

Yderligere har vi ved hjælp af (4.4.6) og (4.4.7), at

$$\lim_{\gamma \to 0} \hat{\psi}_0(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0(0) = 1.$$

Vi undersøger nu, om $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$. Vi har, at

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} H_0(\gamma) & H_0(\gamma + 1/2) \\ H_1(\gamma) & H_1(\gamma + 1/2) \end{pmatrix}.$$

Vi har således, at

$$H^*(\gamma)H(\gamma) = \begin{pmatrix} |H_0(\gamma)|^2 + |H_1(\gamma)|^2 & \overline{H_0(\gamma)}H_0(\gamma+1/2) + \overline{H_1(\gamma)}H_1(\gamma+1/2) \\ H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)} + H_1(\gamma)\overline{H_1(\gamma+1/2)} & |H_0(\gamma+1/2)|^2 + |H_1(\gamma+1/2)|^2 \end{pmatrix}.$$

Vi undersøger nu de fire indgange i matricen. Antagelse (4.4.5) giver, at

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= |H_0(\gamma)|^2 + |H_1(\gamma)|^2 \\ &= |H_0(\gamma)|^2 + |\overline{H_0(\gamma+1/2)}e^{-2\pi i\gamma}|^2 \\ &= |H_0(\gamma)|^2 + |H_0(\gamma+1/2)|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

På tilsvarende måde kan det vises, at $M_{2,2} = 1$.

Da H_0 er 1-periodisk og fra (4.4.5) har vi, at

$$\begin{aligned} & M_{1,2} \\ = \;& \overline{H_0(\gamma)}H_0(\gamma+1/2) + \overline{H_1(\gamma)}H_1(\gamma+1/2) \\ = \;& \overline{H_0(\gamma)}H_0(\gamma+1/2) + \overline{\overline{H_0(\gamma+1/2)}e^{-2\pi i\gamma}}\,\overline{H_0(\gamma+1/2+1/2)}e^{-2\pi i(\gamma-1/2)} \\ = \;& \overline{H_0(\gamma)}H_0(\gamma+1/2) + H_0(\gamma+1/2)\overline{H_0(\gamma)}e^{\pi i} \\ = \;& \overline{H_0(\gamma)}H_0(\gamma+1/2) - H_0(\gamma+1/2)\overline{H_0(\gamma)} \\ = \;& 0. \end{aligned}$$

På tilsvarende måde kan det vises, at $M_{2,1} = 0$.

Hermed er alle forudsætninger for at anvende Det Unitære Udvidelsesprincip opfyldt. Vi har derfor, at $\{D^j T_k \psi_1\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ er en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$ med grænse 1. ■

4.5 Delkonklusion

I dette kapitel har vi bevist de to udvidelsesprincipper: Det Unitære og Det Oblique Udvidelsesprincip. Disse anvendes til at konstruere tight multiwavelet-frames for $L^2(\mathbb{R})$, for hvilke de beregningsmæssige fordele fra multiskalaanalysen er bibeholdt.

Vi har set, hvordan Det Oblique Udvidelsesprincip er en teoretisk videreudvikling af Det Unitære Udvidelsesprincip, som giver mere fleksibilitet i konstruktionen af multiwaveletframes. Det er blevet diskuteret, hvorledes antallet af vanishing moments af generatorerne kan forbedres ved anvendelse af Det Oblique Udvidelsesprincip fremfor Det Unitære Udvidelsesprincip. Dette vil blive eksemplificeret ved hjælp af B-splines i Kapitel 6.

Yderligere er det blevet gennemgået, hvorledes man kan konstruere tight waveletframes med et givet antal generatorer. Afslutningsvist viste vi, at man ved at stille specielt strenge krav til skaleringsfunktionen kan man opnå en waveletframe med en enkelt generator.

I næste kapitel behandler vi, hvordan særlige krav til θ kan sikre, at en tight multiwaveletframe konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip kan opnå en høj approksimationsorden. Approksimationsordenen af en tight multiwaveletframe angiver, hvor præcist en given funktion kan rekonstrueres ved hjælp af et endeligt antal koefficienter, hvilket er relevant i forhold til implementering.

Kapitel 5

Approksimationsorden

Kapitlet er baseret på [DHRS03], [JZ95], [JP01] og [dBDR94].

I dette kapitel tager vi udgangspunkt i tight multiwaveletframes, der er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip.

I Kapitel 4 viste vi via Det Oblique Udvidelsesprincip, hvad en funktion θ skal opfylde for, at vi kan konstruere tight waveletframes for $L^2(\mathbb{R})$. Vi kræver blot, at (4.3.1) og (4.3.2) skal være opfyldt.

Hvis vi ønsker specifikke egenskaber for waveletframen, er vi nødt til at lægge yderligere restriktioner på θ. Dermed bliver mængden af potentielle valg af θ mindre. Én af disse egenskaber er størrelsen af approksimationsordenen, og vi ser i dette kapitel, hvorledes valget af θ har indflydelse på, hvor høj en approksimationsorden en given waveletframe kan opnå.

I kapitlet introduceres først en approksimationsoperator, hvorefter der gennemgås udvalgte egenskaber ved denne. Efterfølgende indføres Sobolevrum, som anvendes i den følgende definition af approksimationsorden. I resten af kapitlet gennemgås resultater om, hvor høj en approksimationsorden en tight multiwaveletframe kan opnå. Heriblandt vises en sammenhæng mellem en tight multiwaveletframes approksimationsorden og dens vanishings moments.

5.1 Approksimationsoperator

I dette afsnit defineres approksimationsoperatoren, da denne anvendes i definitionen af approksimationsordenen af en tight multiwaveletframe. Der vises desuden en række egenskaber ved denne operator, som vil blive anvendt senere i kapitlet.

Først defineres approksimationsoperatoren:

Definition 5.1.1 (Approksimationsoperator)
Lad der være givet en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$ på formen $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$. Approksimationsoperatoren $Q_J : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, hvor $J \in \mathbb{Z}$, defineres ved

$$Q_Jf := \sum_{l=1}^{n}\sum_{j<J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^jT_k\psi_l\rangle D^jT_k\psi_l, \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{5.1.1}$$

Det ses, at approksimationsoperatoren approksimerer et givet $f \in L^2(\mathbb{R})$ ved at summere over et endeligt j i framerepræsentationen.

Det følgende lemma udtrykker Q_J ved hjælp af Q_0.

Lemma 5.1.2
Lad $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ være en tight frame med tilhørende approksimationsoperator Q_J. Så gælder der, at

$$Q_J = D^JQ_0D^{-J}.$$

Bevis:
Omskrivninger af Q_Jf giver ved hjælp af Lemma A.0.5, at

$$\begin{aligned}
Q_Jf &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j<J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^jT_k\psi_l\rangle D^jT_k\psi_l \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^{J+j}T_k\psi_l\rangle D^{J+j}T_k\psi_l \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^JD^jT_k\psi_l\rangle D^JD^jT_k\psi_l \\
&= D^J\sum_{l=1}^{n}\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle D^{-J}f, D^jT_k\psi_l\rangle D^jT_k\psi_l \\
&= D^JQ_0D^{-J}f.
\end{aligned}$$

■

Det følgende lemma angiver et eksplicit udtryk for Fouriertransformen af Q_J, når $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip.

Lemma 5.1.3
Lad $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ være en tight frame for $L^2(\mathbb{R})$, der er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip. Antag, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset. Så opfylder operatoren Q_J, at

$$\widehat{Q_J f}(\gamma) = \hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma)\theta(2^{-J}\gamma)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+2^J k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma+k)},\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{5.1.2}$$

Bevis:
Ideen i beviset er, at vi først finder et udtryk for $\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f}$. Dette anvendes til at bestemme et udtryk for $\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_{J-1} f}$. I dette udtryk isoleres $\widehat{Q_J f}$, og resultatet i lemmaet fås ved grænseværdibetragtninger.

1. I dette punkt bestemmes et udtryk for $\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f}$.

   Ved brug af (5.1.1) observeres det, at

$$\begin{aligned} Q_1 f - Q_0 f &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j<1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_l\rangle D^j T_k \psi_l \\ &\quad -\sum_{l=1}^{n}\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_l\rangle D^j T_k \psi_l \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^0 T_k \psi_l\rangle D^0 T_k \psi_l. \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, T_k \psi_l\rangle T_k \psi_l. \end{aligned}$$

   Vi anvender nu Fouriertransformen på ovenstående lighed, og der gøres brug af Plancherels formel samt kommutatorrelationerne fra Appendiks A.

$$\begin{aligned} (\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f})(\gamma) &= (\mathcal{F}(Q_1 f - Q_0 f))(\gamma) \\ &= \Big(\mathcal{F}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, T_k \psi_l\rangle T_k \psi_l\Big)(\gamma) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}T_k \psi_l\rangle (\mathcal{F}T_k \psi_l)(\gamma) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \hat{f}, E_{-k}\hat{\psi}_l\rangle (E_{-k}\hat{\psi}_l)(\gamma). \end{aligned}$$

Ved anvendelse af Poissons summationsformel, se [Grö01, s.15], har vi således, at

$$(\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f})(\gamma) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + k)} \hat{\psi}_l(\gamma), \tag{5.1.3}$$

Betragt nu θ, der opfylder betingelserne i Det Oblique Udvidelsesprincip, og definer

$$\theta_0 := \theta \quad \text{og} \quad \theta_l := 1, \quad \text{for} \quad l = 1, \ldots, n. \tag{5.1.4}$$

Så opnås udfra (5.1.3) følgende lighed

$$\begin{aligned} (\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f})(\gamma) &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + k)} \hat{\psi}_l(\gamma) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma) \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + k)}}_{(*)} \hat{\psi}_l(\gamma) \\ &\quad -\theta(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma + k)} \hat{\psi}_0(\gamma). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Nu betragtes $(*)$-leddet fra (5.1.5). I denne betragtning bruges det, at ψ_l opfylder en skaleringsligning, se (4.1.3):

$$\hat{\psi}_l(2\gamma) = H_l(\gamma) \hat{\psi}_0(\gamma), \quad l = 1, \ldots, n. \tag{5.1.6}$$

Ydermere defineres

$$\xi(\gamma) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2(\gamma + k)) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma + k)}.$$

Vi har dermed, at $(*)$-leddet fra (5.1.5) kan omskrives som følgende:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + k)} \\ = & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2k) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + 2k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2k + 1) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + 2k + 1)} \\ = & \sum_{\nu \in \{0,1\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + \nu + 2k) \overline{\hat{\psi}_l(\gamma + \nu + 2k)} \\ = & \sum_{\nu \in \{0,1\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + \nu + 2k) \overline{H_l\left(\frac{\gamma + \nu}{2} + k\right) \hat{\psi}_0\left(\frac{\gamma + \nu}{2} + k\right)}. \end{aligned}$$

Da H_l er en 1-periodisk funktion har vi yderligere, at

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_l(\gamma+k)} \\
= &\sum_{\nu\in\{0,1\}} \overline{H_l(\gamma/2+\nu/2)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2(\gamma/2+\nu/2+k))\overline{\hat{\psi}_0(\gamma/2+\nu/2+k)} \\
= &\sum_{\nu\in\{0,1\}} \overline{H_l(\gamma/2+\nu/2)}\xi(\gamma/2+\nu/2) \\
= &\sum_{\nu\in\{0,\frac{1}{2}\}} \overline{H_l(\gamma/2+\nu)}\xi(\gamma/2+\nu). \qquad (5.1.7)
\end{aligned}
$$

Nu indsættes (5.1.7) i (5.1.5), og skaleringsligningen (5.1.6) anvendes:

$$
\begin{aligned}
&(\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f})(\gamma) \\
= &\sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_l(\gamma+k)}\hat{\psi}_l(\gamma) \\
&-\theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma) \\
= &\sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma) \sum_{\nu\in\{0,\frac{1}{2}\}} \overline{H_l(\gamma/2+\nu)}\xi(\gamma/2+\nu)\hat{\psi}_l(\gamma) \\
&-\theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma) \\
= &\sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma) \sum_{\nu\in\{0,\frac{1}{2}\}} \overline{H_l(\gamma/2+\nu)}\xi(\gamma/2+\nu)H_l(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2) \\
&-\theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma) \\
= &\hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{\nu\in\{0,\frac{1}{2}\}} \xi(\gamma/2+\nu) \underbrace{\sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma)H_l(\gamma/2)\overline{H_l(\gamma/2+\nu)}}_{(*)} \\
&-\theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma). \qquad (5.1.8)
\end{aligned}
$$

Nu betragtes $(*)$-leddet i (5.1.8), og det anvendes, at vi per antagelse har, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ er en tight frame konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip. Derfor kan $(*)$-leddet ved brug af (4.3.2) skrives som:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma) H_l(\gamma/2) \overline{H_l(\gamma/2+\nu)} \\
= \quad & \theta_0(\gamma) H_0(\gamma/2) \overline{H_0(\gamma/2+\nu)} + \sum_{l=1}^{n} \theta_l(\gamma) H_l(\gamma/2) \overline{H_l(\gamma/2+\nu)} \\
= \quad & \theta(\gamma) H_0(\gamma/2) \overline{H_0(\gamma/2+\nu)} + \sum_{l=1}^{n} H_l(\gamma/2) \overline{H_l(\gamma/2+\nu)} \\
= \quad & \begin{cases} \theta(\gamma/2), & \text{hvis } \nu = 0, \\ 0, & \text{hvis } \nu = 1/2, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

hvor antagelse (5.1.4) er anvendt. Nu indsættes (5.1.9) i (5.1.8), og (5.1.4) anvendes igen:

$$\begin{aligned}
&(\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f})(\gamma) \\
= \quad & \hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{\nu \in \{0, \frac{1}{2}\}} \xi(\gamma/2+\nu) \sum_{l=0}^{n} \theta_l(\gamma) H_l(\gamma/2) \overline{H_l(\gamma/2+\nu)} \\
& -\theta(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} \hat{\psi}_0(\gamma) \\
= \quad & \hat{\psi}_0(\gamma/2) \xi(\gamma/2) \theta(\gamma/2) \\
& -\theta(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} \hat{\psi}_0(\gamma) \\
= \quad & \hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2(\gamma/2+k)) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma/2+k)} \theta(\gamma/2) \\
& -\theta(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} \hat{\psi}_0(\gamma) \\
= \quad & \hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (T_{-2k} \hat{f})(\gamma) \overline{(T_{-2k} \hat{\psi}_0)(\gamma/2)} \theta(\gamma/2) \\
& -\theta(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (T_{-k} \hat{f})(\gamma) \overline{(T_{-k} \hat{\psi}_0)(\gamma)} \hat{\psi}_0(\gamma).
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Dermed har vi et udtryk for $\widehat{Q_1 f} - \widehat{Q_0 f}$.

2. Lemma 5.1.2 anvendes nu til at bestemme et eksplicit udtryk for $\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_{J-1} f}$ for alle $J \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_{J-1} f} &= \mathcal{F}\Big(Q_J f - Q_{J-1}\Big) \\
&= \mathcal{F}\Big(D^J Q_0 D^{-J} f - D^{J-1} Q_0 D^{-J+1} f\Big) \\
&= \mathcal{F}\Big(D^{J-1} D Q_0 D^{-1} D^{-J+1} f - D^{J-1} Q_0 D^{-J+1} f\Big) \\
&= \mathcal{F}\Big(D^{J-1} Q_1 D^{-J+1} f - D^{J-1} Q_0 D^{-J+1} f\Big) \\
&= \mathcal{F}\Big(D^{J-1}(Q_1 - Q_0)(D^{-J+1} f)\Big) \\
&= D^{-J+1}\Big(\mathcal{F}(Q_1 - Q_0)(D^{-J+1} f)\Big).
\end{aligned}$$

Nu anvendes resultatet (5.1.10) fra punkt 1 på funktionen $D^{-J+1} f$, og der gøres brug af kommutatorrelationerne fra Appendiks A således, at

$$\begin{aligned}
& (\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_{J-1} f})(\gamma) \\
= \quad & D^{-J+1}\Bigg(\hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (T_{-2k} \mathcal{F} D^{-J+1} f)(\gamma) \overline{(T_{-2k}\hat{\psi}_0)(\gamma/2)} \theta(\gamma/2) \\
& - \theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (T_{-k} \mathcal{F} D^{-J+1} f)(\gamma) \overline{(T_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma)} \hat{\psi}_0(\gamma)\Bigg) \\
= \quad & D^{-J+1}\Bigg(\hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (T_{-2k} D^{J-1} \hat{f})(\gamma) \overline{(T_{-2k}\hat{\psi}_0)(\gamma/2)} \theta(\gamma/2) \\
& - \theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (T_{-k} D^{J-1} \hat{f})(\gamma) \overline{(T_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma)} \hat{\psi}_0(\gamma)\Bigg) \\
= \quad & D^{-J+1}\Bigg(\hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (D^{J-1} T_{-2^J k} \hat{f})(\gamma) \overline{(T_{-2k}\hat{\psi}_0)(\gamma/2)} \theta(\gamma/2) \\
& - \theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (D^{J-1} T_{-2^{J-1} k} \hat{f})(\gamma) \overline{(T_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma)} \hat{\psi}_0(\gamma)\Bigg) \\
= \quad & D^{-J+1}\Bigg(\hat{\psi}_0(\gamma/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (D^{J-1} \hat{f})(\gamma + 2^J k) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma/2 + k)} \theta(\gamma/2) \\
& - \theta(\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (D^{J-1} \hat{f})(\gamma + 2^{J-1} k) \overline{\hat{\psi}_0(\gamma + k)} \hat{\psi}_0(\gamma)\Bigg) \\
= \quad & \hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^J k) \overline{\hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma + k)} \theta(2^{-J}\gamma) \\
& - \theta(2^{-J+1}\gamma) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^{J-1} k) \overline{\hat{\psi}_0(2^{-J+1}\gamma + k)} \hat{\psi}_0(2^{-J+1}\gamma)
\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Dermed har vi et udtryk for $\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_{J-1} f}$.

3. I dette punkt bestemmes et udtryk for $\widehat{Q_J f}$.

   Betragt $K \in \mathbb{Z}$, hvorom der gælder, at $K < J$. Så har vi, at

$$\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_K f} = \widehat{Q_J f} - \widehat{Q_{J-1} f} + \widehat{Q_{J-1} f} - \ldots - \widehat{Q_{K+1} f} + \widehat{Q_{K+1} f} - \widehat{Q_K f}.$$

   Hvis (5.1.11) anvendes på leddene, så har vi, at

$$\begin{aligned}(\widehat{Q_J f} - \widehat{Q_K f})(\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^J k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma + k)}\hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma)\theta(2^{-J}\gamma) \\ &\quad - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^K k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma + k)}\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma)\theta(2^{-K}\gamma),\end{aligned}$$

   hvorved det haves, at

$$\begin{aligned}\widehat{Q_J f}(\gamma) &= \underbrace{\widehat{Q_K f}(\gamma) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^K k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma + k)}\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma)\theta(2^{-K}\gamma)}_{(*)} \\ &\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^J k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma + k)}\hat{\psi}_0(2^{-J}\gamma)\theta(2^{-J}\gamma). \qquad (5.1.12)\end{aligned}$$

   Vi skal nu vise, at $(*)$-leddet i (5.1.12) går mod 0 for $K \to -\infty$, hvorved lemmaet vil være vist. Det vil sige, at vi betragter nedenstående grænseværdi:

$$\lim_{K\to-\infty} \Big(\widehat{Q_K f}(\gamma) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^K k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma + k)}\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma)\theta(2^{-K}\gamma)\Big). \qquad (5.1.13)$$

   I de følgende to punkter viser vi, at de to led i (5.1.13) hver for sig går mod 0 for $K \to -\infty$.

4. Vi betragter i dette punkt det første led i (5.1.13).

   Vi gør brug af Plancherels formel og af Lemma 2.2.10:

$$\begin{aligned}\|\widehat{Q_K f}\|^2 &= \|Q_K f\|^2 \\ &= \Big\| \sum_{l=1}^{n} \sum_{j<K} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_l \rangle D^j T_k \psi_l \Big\|^2 \\ &\le \sum_{l=1}^{n} \sum_{j<K} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\langle f, D^j T_k \psi_l \rangle\big|^2 \\ &:= A(K).\end{aligned}$$

Da $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ per antagelse er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip, så har vi antagelserne i Det Unitære Udvidelsesprincip opfyldt. Dermed er forudsætningerne for at bruge (4.2.14) i beviset for Det Unitære Udvidelsesprincip opfyldt. Det vil sige, at der for alle $m < K$ gælder, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, D^K T_k \psi_0\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^m T_k \psi_0\rangle\right|^2 + \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=m}^{K-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_l\rangle\right|^2}_{(*)}.$$

Hvis vi lader $m \to -\infty$ i denne lighed og isolerer $(*)$-leddet, så har vi en sum på samme form som $A(K)$:

$$\begin{aligned} A(K) &= \lim_{m\to-\infty} \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=m}^{K-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^j T_k \psi_l\rangle\right|^2 \\ &= \lim_{m\to-\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^K T_k \psi_0\rangle\right|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^m T_k \psi_0\rangle\right|^2 \right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, D^K T_k \psi_0\rangle\right|^2, \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

hvor der i det sidste lighedstegn er gjort brug af (4.2.15) fra beviset for Det Unitære Udvidelsesprincip.

Lad nu $K \to -\infty$ i (5.1.14) og brug igen (4.2.15) fra beviset for Det Unitære Udvidelsesprincip. Dermed har vi, at

$$\lim_{K\to-\infty} A(K) = \lim_{K\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, D^K T_k \psi_0\rangle|^2 = 0, \tag{5.1.15}$$

hvorved det er vist, at det første led i (5.1.13) går mod 0 for $K \to -\infty$.

5. I dette punkt betragtes grænseværdien af det andet led i (5.1.13), det vil sige:

$$\lim_{K\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + 2^K k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma + k)}\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma)\theta(2^{-K}\gamma).$$

Først defineres $\tilde{\psi}_0$ ved

$$\hat{\tilde{\psi}}_0 = \sqrt{\theta}\hat{\psi}_0. \tag{5.1.16}$$

Det bemærkes, at vi fra beviset for Det Olique Udvidelsesprincip har, at $\tilde{\psi}_0$ opfylder betingelserne til skaleringsfunktionen i Det Unitære Udvidelsesprincip. Dermed kan vi anvende beregningerne fra beviset for Det Unitære Udvidelsesprincip med $\tilde{\psi}_0$ som skaleringsfunktion.

Da $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset, så er $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma+k)|^2$ begrænset, da $\theta\in L^\infty(\mathbb{T})$. Dermed er $\{T_k\tilde{\psi}_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en framefølge, jævnfør Sætning 2.2.4. Da D^K er en unitær operator, så har vi, jævnfør Lemma 2.2.13, at $\{D^KT_k\tilde{\psi}_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en framefølge. Dermed giver Lemma 2.2.10 følgende vurdering:

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,D^KT_k\tilde{\psi}_0\rangle D^KT_k\tilde{\psi}_0\Big\|^2\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,D^KT_k\tilde{\psi}_0\rangle|^2. \tag{5.1.17}$$

Idéen er nu, at vi anvender $\mathcal{F}$ på $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,D^KT_k\tilde{\psi}_0\rangle D^KT_k\tilde{\psi}_0$, og da $\mathcal{F}$ er en unitær operator, bibeholdes ovenstående vurdering. Vi omskriver først ved hjælp af kommutatorrelationerne fra Appendiks A og Plancherels formel:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,D^KT_k\tilde{\psi}_0\rangle D^KT_k\tilde{\psi}_0 &= D^K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle D^{-K}f,T_k\tilde{\psi}_0\rangle T_k\tilde{\psi}_0\\ &= D^K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\mathcal{F}D^{-K}f,\mathcal{F}T_k\tilde{\psi}_0\rangle T_k\tilde{\psi}_0\\ &= D^K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle D^K\hat{f},E_{-k}\hat{\tilde{\psi}}_0\rangle T_k\tilde{\psi}_0.\end{aligned}$$

Nu anvendes $\mathcal{F}$ på ovenstående lighed, og i beregningerne gøres der brug af Poissons summationsformel, se [Grö01, s.15].

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,D^KT_k\tilde{\psi}_0\rangle D^KT_k\tilde{\psi}_0\\ =\;&\mathcal{F}D^K\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle D^K\hat{f},E_{-k}\hat{\tilde{\psi}}_0\rangle T_k\tilde{\psi}_0\\ =\;&D^{-K}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle D^K\hat{f},E_{-k}\hat{\tilde{\psi}}_0\rangle E_{-k}\hat{\tilde{\psi}}_0\\ =\;&D^{-K}\sum_{k\in\mathbb{Z}}T_{-k}\big((D^K\hat{f})\overline{\hat{\tilde{\psi}}_0}\big)\hat{\tilde{\psi}}_0\\ =\;&D^{-K}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(T_{-k}D^K\hat{f})\big(T_{-k}\overline{\hat{\tilde{\psi}}_0}\big)\hat{\tilde{\psi}}_0\\ =\;&D^{-K}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(D^KT_{-2^Kk}\hat{f})\big(T_{-k}\overline{\hat{\tilde{\psi}}_0}\big)\hat{\tilde{\psi}}_0.\end{aligned}$$

Dette giver ved anvendelse af (5.1.16), at

$$
\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{F}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, D^K T_k\tilde{\psi}_0\rangle D^K T_k\tilde{\psi}_0\Big)(\gamma)\\
= \;& D^{-K}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(D^K\hat{f})(\gamma+2^K k)\overline{\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma+k)}\hat{\tilde{\psi}}_0(\gamma)\\
= \;& D^{-K}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(D^K\hat{f})(\gamma+2^K k)\overline{\sqrt{\theta(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+k)}\sqrt{\theta(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma)\\
= \;& \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+2^K k)\overline{\sqrt{\theta(2^{-K}\gamma+k)}\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma+k)}\sqrt{\theta(2^{-K}\gamma)}\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma)\\
= \;& \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+2^K k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma+k)}\theta(2^{-K}\gamma)\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma), \qquad (5.1.18)
\end{aligned}
$$

hvor det er brugt, at θ er 1-periodisk og reel. Vi bemærker, at (5.1.18) er lig med det sidste led i (5.1.13).

Ved brug af vurderingen i (5.1.17) og Plancherels formel, så haves det, at

$$
\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma+k)}\theta(2^{-K}\gamma)\hat{\psi}_0(2^{-K}\gamma)\Big\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f, D^K T_k\tilde{\psi}_0\rangle|^2
$$

Lad nu $K\to-\infty$, hvilket ved brug af (4.2.15) giver, at

$$
\lim_{K\to-\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f, D^K T_k\tilde{\psi}_0\rangle|^2 = 0 \qquad (5.1.19)
$$

Dermed er det vist, at $(*)$-leddet i (5.1.12) går mod 0 for $K\to-\infty$.

■

5.2 Sobolevrum

I arbejdet med approksimationsorden for frames får vi brug for funktioner, hvis Fouriertransformerede har et vist henfald. Et sådant henfald kan sikres, hvis funktionerne tilhører et givet Sobolevrum, hvorfor disse indføres i dette afsnit.

Definition 5.2.1 (Det inhomogene Sobolevrum)
Lad $m\in\mathbb{N}$. Så defineres det inhomogene Sobolevrum ved

$$
W^m_{2,inhom}(\mathbb{R}) = \Big\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,\Big|\,\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|^2)^m d\gamma<\infty\Big\},
$$

hvor normen af $f \in W^m_{2,inhom}(\mathbb{R})$ er givet ved

$$|f|_{m,2,inhom} = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma|^2)^m d\gamma\Big)^{1/2}. \tag{5.2.1}$$

Nu betragtes normen (5.2.1), hvor Plancherels formel anvendes:

$$\begin{aligned} |f|^2_{m,2,\text{inhom}} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma|^2)^m d\gamma \\ &\sim \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma|^{2m}) d\gamma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} d\gamma \\ &= \|f\|^2 + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} d\gamma,}_{(*)} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

hvor $(1+|\gamma|^2)^m \sim 1+|\gamma|^{2m}$ er en konsekvens af, at alle normer på $\mathbb{R}^2$ er ækvivalente. Vi bemærker, at hvis $f \in W^m_{2,\text{inhom}}(\mathbb{R})$, så tilhører f automatisk $L^2(\mathbb{R})$.

Ovenstående lighed giver motivation for at definere Det homogene Sobolevrum ved hjælp af $(*)$-leddet i (5.2.2):

Definition 5.2.2 (Det homogene Sobolevrum)
Lad $f \in m > 0$. Så defineres det homogene Sobolevrum som

$$W^m_2(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} d\gamma < \infty \Big\},$$

hvor normen af $f \in W^m_2(\mathbb{R})$ er givet ved

$$|f|_{m,2} = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} d\gamma\Big)^{1/2}. \tag{5.2.3}$$

Det haves således udfra (5.2.2) og (5.2.3), at

$$|f|^2_{m,2,\text{inhom}} = \|f\|^2 + |f|^2_{m,2}. \tag{5.2.4}$$

I det følgende arbejdes der med funktioner $f \in W^m_2(\mathbb{R})$, hvor den tilhørende norm er $|f|^2_{m,2}$. Vi får brug for funktioner i $W^m_2(\mathbb{R})$ fremfor $W^m_{2,\text{inhom}}(\mathbb{R})$, når vi viser Lemma 5.3.2.

5.3 Approksimationsorden

I dette afsnit introduceres approksimationsordenen af en tight multiwaveletframe. Ydermere vises det, hvorledes dennes approksimationsorden kan bestemmes.

Definition 5.3.1 (Approksimationsorden)
Lad der være givet en tight frame $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ med tilhørende approksimationsoperator Q_J. Lad $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ være konstrueret udfra en framemultiskalaanalyse med skaleringsfunktion ψ_0 og tilhørende rum V_j. Så defineres følgende:

(i) ψ_0 *giver approksimationsorden* m_0, *hvis der for hvert* $f \in W_2^{m_0}$ *gælder, at*

$$\min\{\|f-g\| \,|\, g\in V_J\} = O(2^{-Jm_0}), \quad \textit{for} \quad J\to\infty.$$

(ii) $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ *har approksimationsorden* m_1, *hvis der for hvert* $f\in W_2^{m_1}$ *gælder, at*

$$\|f-Q_Jf\| = O(2^{-Jm_1}), \quad \textit{for} \quad J\to\infty.$$

Hvis $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ er en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$, så vil Q_J være den ortogonale projektion på rummet V_J. I dette tilfælde vil der gælde, at $m_0=m_1$, da minimumsafstanden altid er den ortogonale afstand. Ligheden $m_0=m_1$ gælder dog ikke nødvendigvis for frames, da Q_J her ikke nødvendigvis beskriver en ortogonal projektion. For frames må der dermed gælde, at $m_1\le m_0$. Det vil sige, at approksimationsordenen af en tight frame aldrig kan overstige approksimationsordenen givet af den tilhørende skaleringsfunktion.

Jævnfør Definition 5.3.1 giver følgende Lemma en ækvivalent betingelse til bestemmelse af en tight multiwaveletframes approksimationsorden.

Lemma 5.3.2
Lad $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ være en tight frame med tilhørende approksimationsoperator Q_J. Så er følgende punkter ækvivalente:

(i) $\|f-Q_Jf\|\le C2^{-Jm}|f|_{m,2}, \quad \forall\, f\in W_2^m, \quad$ *for* $\quad J\to\infty.$

(ii) $\|g-Q_0g\|\le C|g|_{m,2}, \quad \forall\, g\in W_2^m.$

Bemærk, at konstanten C ikke har samme værdi i *(i)* og *(ii)*.

Bevis:
Først vises, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*, så vi tager udgangspunkt i

$$\|f - Q_J f\| \leq C 2^{-Jm} |f|_{m,2}, \quad \forall\, f \in W_2^m, \quad \text{for} \quad J \to \infty. \tag{5.3.1}$$

Vi betragter først venstresiden. Fra Lemma 5.1.2 har vi, at $Q_J = D^J Q_0 D^{-J}$, hvilket giver, at

$$\|f - Q_J f\| = \|f - D^J Q_0 D^{-J} f\|.$$

Ved substitution med $D^{-J} f = g$, hvor $g \in W_2^m$, og ved anvendelse af, at D^J er en unitær operator, jævnfør Lemma A.0.3, får vi yderligere, at

$$\begin{aligned} \|f - Q_J f\| &= \|D^J g - D^J Q_0 g\| \\ &= \|g - Q_0 g\|. \end{aligned}$$

Nu betragter vi højresiden i (5.3.1). Ved samme substitution $f = D^J g$ som på venstresiden, får vi, at

$$\begin{aligned} C 2^{-Jm} |f|_{m,2} &= C 2^{-Jm} |D^J g|_{m,2} \\ &= C 2^{-Jm} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma|^{2m} |\mathcal{F}(D^J g)(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\ &= C 2^{-Jm} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma|^{2m} |D^{-J} \hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\ &= C 2^{-Jm} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma|^{2m} |2^{-J/2} \hat{g}(2^{-J}\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\ &= C 2^{-Jm} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |2^J y|^{2m} 2^{-J} |\hat{g}(y)|^2 2^J dy \right)^{1/2} \\ &= C 2^{-Jm} \left(\int_{-\infty}^{\infty} 2^{2Jm} |y|^{2m} 2^{-J} |\hat{g}(y)|^2 2^J dy \right)^{1/2} \\ &= C |g|_{m,2}. \end{aligned}$$

Bemærk, at C ændrer værdi i sidste lighed. Dermed har vi vist, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Implikationen *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* følger umiddelbart. ∎

Den følgende sætning stiller nogle krav til skaleringsfunktionen, der sikrer, at en given tight multiwaveletframe opnår en bestemt approksimationsorden.

Sætning 5.3.3
Lad $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,\ldots,n}$ *være en tight frame, der er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip, og lad* $\zeta \in L^2(\mathbb{R})$. *Antag, at*

$$\widehat{Q_0 f}(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma + k) \overline{\hat{\zeta}(\gamma + k)} \hat{\psi}_0(\gamma), \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{5.3.2}$$

og antag yderligere, at $\hat{\zeta}$ og $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænsede. Hvis der gælder, at

(i) $\sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = O(|\gamma|^{2m})$, *for* $\gamma \to 0$,

(ii) $1 - \overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma) = O(|\gamma|^m)$, *for* $\gamma \to 0$,

så har $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ *approksimationsorden* m.

Bevis:
Ideen i beviset er at vise, at

$$\|f - Q_0 f\| \leq C|f|_{m,2}, \quad \forall\, f \in W_2^m,$$

hvilket ved brug af Lemma 5.3.2 er ækvivalent med, at

$$\|g - Q_J g\| \leq C 2^{-Jm}|g|_{m,2}, \quad \forall\, g \in W_2^m, \quad \text{for} \quad J \to \infty.$$

Lad $f \in W_2^m$. Ved anvendelse af Plancherels formel og ligning (5.3.2) har vi, at

$$\begin{aligned}
\|f - Q_0 f\|^2 &= \|\widehat{Q_0 f} - \hat{f}\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma) - \hat{f}(\gamma)\Big|^2 d\gamma \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s) - \hat{f}(\gamma+s)\Big|^2 d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s) - \hat{f}(\gamma+s)\Big|^2 d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \Bigg[\Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma) - \hat{f}(\gamma)\Big|^2 \\
&\qquad + \sum_{s\neq 0} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s) - \hat{f}(\gamma+s)\Big|^2 \Bigg] d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \Bigg[\Big| \hat{f}(\gamma)\left(\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma) - 1\right) + \sum_{k\neq 0} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\Big|^2 \\
&\qquad + \sum_{s\neq 0} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s) - \hat{f}(\gamma+s)\Big|^2 \Bigg] d\gamma.
\end{aligned}$$

Dette kan vurderes opad på følgende vis:

$$\begin{aligned}\|f - Q_0 f\|^2 \quad \leq \quad & \int_{-1/2}^{1/2} 2\Bigg[|\hat{f}(\gamma)|^2 \left|\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma) - 1\right|^2 \\ & + \Big|\sum_{k\neq 0} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\Big|^2 \\ & + \sum_{s\neq 0}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s)\Big|^2 \\ & + \sum_{s\neq 0}|\hat{f}(\gamma+s)|^2\Bigg] d\gamma. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Vi betragter nu de fire led i integranten hver for sig. Bemærk i det følgende, at C ændrer værdi gennem udregningerne. Bemærk ydermere, at antagelse *(i)* og *(ii)* i sætningen gælder for $\gamma \in [-1/2, 1/2]$, da $\hat{\zeta}$ og $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænsede.

1. Ved brug af antagelse *(ii)* i lemmaet, har vi, at

$$|\hat{f}(\gamma)|^2 \left|\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma) - 1\right|^2 \leq C|\hat{f}(\gamma)|^2|\gamma|^{2m}.$$

2. Betragt nu

$$\begin{aligned} & \Big|\sum_{k\neq 0} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\Big|^2 \\ = \quad & \Big|\sum_{k\neq 0} |\gamma+k|^{-m}|\gamma+k|^m \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\Big|^2. \end{aligned}$$

Ved anvendelse af Cauchy-Schwarzs ulighed får vi, at

$$\begin{aligned} & \Big|\sum_{k\neq 0} |\gamma+k|^{-m}|\gamma+k|^m \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\Big|^2 \\ \leq \quad & \Big|\Big(\sum_{k\neq 0}|\gamma+k|^{-2m}\Big)^{1/2} \\ & \times\Big(\sum_{k\neq 0}|\gamma+k|^{2m}|\hat{f}(\gamma+k)|^2|\hat{\zeta}(\gamma+k)|^2|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2\Big)^{1/2}\Big|^2 \\ \leq \quad & C\sum_{k\neq 0}|\gamma+k|^{2m}|\hat{f}(\gamma+k)|^2, \end{aligned}$$

hvor sidste ulighed er opnået ved p-række-test, jævnfør [Wad00, s. 160], og det er anvendt, at $\hat{\zeta}$ og $\hat{\psi}_0$ er begrænsede.

3. Ved antagelse *(i)* i lemmaet har vi, at

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s\neq 0}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s)\Big|^2\\
=\;&\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\Big|^2\sum_{s\neq 0}|\hat{\psi}_0(\gamma+s)|^2\\
\leq\;& C\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\Big|^2|\gamma|^{2m}\\
=\;& C\Big|\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}+\sum_{k\neq 0}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\Big|^2|\gamma|^{2m}.
\end{aligned}
$$

Vi gør nu brug af, at $\hat{\zeta}$ er begrænset. I andet led anvendes det, at der for $\gamma\in[-1/2,1/2]$ gælder, at $|\gamma|^{2m}<C$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s\neq 0}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s)\Big|^2\\
\leq\;& 2C\Big|\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\Big|^2|\gamma|^{2m}+2C\Big|\sum_{k\neq 0}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\Big|^2|\gamma|^{2m}\\
\leq\;& C|\hat{f}(\gamma)|^2|\gamma|^{2m}+\underbrace{C\Big|\sum_{k\neq 0}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\Big|^2}_{(*)}. \qquad (5.3.4)
\end{aligned}
$$

Ved samme fremgangsmåde som i punkt 2 anvendt på $(*)$-leddet i (5.3.4) får vi, at

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s\neq 0}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s)\Big|^2\\
\leq\;& C|\hat{f}(\gamma)|^2|\gamma|^{2m}+C\sum_{k\neq 0}|\gamma+k|^{2m}|\hat{f}(\gamma+k)|^2.
\end{aligned}
$$

4. Da der for $s\neq 0$, og $\gamma\in[-1/2,1/2]$ gælder, at $|\gamma+s|\geq C$, så har vi, at

$$
\sum_{s\neq 0}|\hat{f}(\gamma+s)|^2\leq\frac{1}{C}\sum_{s\neq 0}|\hat{f}(\gamma+s)|^2|\gamma+s|^{2m}.
$$

Vurderingerne fra punkt 1 til 4 indsættes i (5.3.3), hvorved vi får en vurdering opadtil:

$$
\begin{aligned}
\|f - Q_0 f\|^2 \quad &\leq \quad \int_{-1/2}^{1/2} 2\Bigg[|\hat{f}(\gamma)|^2 \left|\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma) - 1\right|^2 + \left|\sum_{k\neq 0} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\right|^2 \\
&\quad + \sum_{s\neq 0}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\zeta}(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma+s)\right|^2 + \sum_{s\neq 0}|\hat{f}(\gamma+s)|^2\Bigg] d\gamma. \\
&\leq \quad C\int_{-1/2}^{1/2} \Bigg[|\hat{f}(\gamma)|^2|\gamma|^{2m} + \sum_{k\neq 0}|\gamma+k|^{2m}|\hat{f}(\gamma+k)|^2 \\
&\quad + |\hat{f}(\gamma)|^2|\gamma|^{2m} + \sum_{k\neq 0}|\gamma+k|^{2m}|\hat{f}(\gamma+k)|^2 \\
&\quad + \sum_{s\neq 0}|\hat{f}(\gamma+s)|^2|\gamma+s|^{2m}\Bigg] d\gamma.
\end{aligned}
$$

Ved at lægge $|\hat{f}(\gamma)|^2|\gamma|^{2m}$ til integranten på højresiden kan udtrykket vurderes opadtil, så vi får:

$$
\begin{aligned}
\|f - Q_0 f\|^2 \quad &\leq \quad 3C\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\gamma+k|^{2m}|\hat{f}(\gamma+k)|^2 d\gamma \\
&= \quad C\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma|^{2m}|\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \\
&= \quad C|f|_{m,2}^2.
\end{aligned}
$$

Ved hjælp af Lemma 5.3.2 har vi nu vist, at

$$\|f - Q_J f\| \leq C2^{-Jm}|f|_{m,2}, \quad \forall\, f \in W_2^m, \quad \text{for} \quad J\to\infty,$$

hvilket er det samme som

$$\|f - Q_J f\| = O(2^{-Jm}), \quad \forall\, f\in W_2^m, \quad \text{for} \quad J\to\infty.$$

Dermed har vi vist, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ har approksimationsorden m. ■

Det følgende lemma giver et resultat for den ortogonale projektion P_0 på V_0.

Lemma 5.3.4
Lad $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, og $V_0 = \overline{\text{span}}\,\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Anvend konventionen $\frac{0}{0} = 0$. Så gælder for den ortogonale projektion P_0 på V_0, at

$$\widehat{P_0 f}(\gamma) = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}\hat{\psi}_0(\gamma), \quad \forall\, f\in L^2(\mathbb{R}).$$

Bevis:
Da $\mathcal{F}$ er en bijektiv operator på $L^2(\mathbb{R})$, så kan vi definere $\widehat{P_0}$ via $P_0 = \mathcal{F}^{-1}\widehat{P_0}\mathcal{F}$, hvorved

$$\widehat{P_0} = \mathcal{F}P_0\mathcal{F}^{-1}.$$

Dermed gælder der for $f \in L^2(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned}\widehat{P_0}\hat{f} &= \mathcal{F}P_0\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f \\ &= \mathcal{F}P_0 f \\ &= \widehat{P_0 f}.\end{aligned}$$

Definer nu

$$\Lambda_f(\gamma) := \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dermed skal vi vise, at

$$\widehat{P_0}\hat{f} = \Lambda_f\hat{\psi}_0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Ideen er først at vise, at der eksisterer en veldefineret operator, O, der giver ovenstående lighed. Derefter vises det, at denne operator er lig $\widehat{P_0}$.

1. I dette punkt vises det, at $\Lambda_f\hat{\psi}_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

   I det følgende gøres der brug af, at Λ_f er en 1-periodisk funktion, hvorved vi har, at

$$\begin{aligned}\|\Lambda_f\hat{\psi}_0\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda_f(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} |\Lambda_f(\gamma+k)|^2 |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 d\gamma \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} |\Lambda_f(\gamma)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 d\gamma \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \right|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 d\gamma \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} \right|^2 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \Big)^{-1} d\gamma.\end{aligned}$$

   Ved brug af Cauchy-Schwarzs ulighed og Plancherels formel har vi yderligere, at

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_f \hat{\psi}_0\|^2 \\
\leq\ & \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\gamma+k)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \Big)^{-1} d\gamma \\
=\ & \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\gamma+k)|^2 d\gamma \\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \\
=\ & \|f\|^2 \\
<\ & \infty,
\end{aligned}$$

da $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dermed har vi, at $\Lambda_f \hat{\psi}_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

2. Punkt 1 giver, at der eksisterer en veldefineret operator $O : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ givet ved

$$O\hat{f} := \Lambda_f \hat{\psi}_0.$$

Da operatoren O er givet ved Λ_f, er den lineær. Fra udregningerne i punkt 1, har vi, at

$$\|O\hat{f}\| = \|\Lambda_f \hat{\psi}_0\| \leq \|\hat{f}\|,$$

hvorved O er begrænset.

3. Vi mangler nu at vise, at $O = \widehat{P}_0$.

For den ortogonale projektion P_0, se Definition A.0.7, gælder der, at

$$\begin{aligned}
P_0 f &= f, \quad \text{for} \quad f \in V_0, \\
P_0 f &= 0, \quad \text{for} \quad f \in V_0^{\perp}.
\end{aligned}$$

Dermed må der gælde, at

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_0 \hat{f} &= \hat{f} \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \mathcal{F}(V_0), \\
\widehat{P}_0 \hat{f} &= 0 \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \mathcal{F}(V_0^{\perp}),
\end{aligned}$$

hvor det er anvendt, at $\widehat{P_0 f} = \widehat{P}_0 \hat{f}$.

For at vise, at $O = \widehat{P}_0$, skal vi altså vise, at

$$O\hat{f} = \hat{f} \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \mathcal{F}(V_0), \tag{5.3.5}$$

$$O\hat{f} = 0 \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \mathcal{F}(V_0^{\perp}). \tag{5.3.6}$$

Udtrykkene (5.3.5) og (5.3.6) vises i de følgende punkter. Tilfældet, hvor $\hat{f} \in \mathcal{F}(V_0)$, betragtes i punkt 4. I punkt 5 betragtes tilfældet, hvor $\hat{f} \in \mathcal{F}(V_0^{\perp})$

4. I dette punkt viser vi, at O opfylder (5.3.5).

   Vi betragter derfor rummet

$$\mathcal{F}(V_0) = \mathcal{F}\Big(\overline{\text{span}}\,\{T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}\Big) = \overline{\text{span}}\,\{\mathcal{F}T_k\psi_0\}_{k\in\mathbb{Z}} = \overline{\text{span}}\{E_{-k}\hat{\psi}_0\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

   hvor anden lighed gælder, da $\mathcal{F}$ er en lineær operator.

   For $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \neq 0$ har vi per definition af O og Λ_f, og da E_{-k} er en 1-periodisk funktion, at

$$\begin{aligned}(OE_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma) &= \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(E_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}\hat{\psi}_0(\gamma)\\ &= E_{-k}(\gamma)\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}_0(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}\hat{\psi}_0(\gamma)\\ &= E_{-k}(\gamma)\hat{\psi}_0(\gamma)\\ &= (E_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma) \qquad (5.3.7)\end{aligned}$$

   for alle $k \in \mathbb{Z}$.

   For $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$ har vi per definition af O og Λ_f, at

$$(OE_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma) = 0. \qquad (5.3.8)$$

   Da der for $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$ gælder, at $\hat{\psi}_0(\gamma+k) = 0$ for alle $k \in \mathbb{Z}$, så har vi, at

$$(E_{-k}\hat{\psi}_0)(\gamma) = (\mathcal{F}T_k\psi_0)(\gamma) = (\mathcal{F}\psi_0)(\gamma-k) = \hat{\psi}_0(\gamma-k) = 0. \qquad (5.3.9)$$

   Dermed har vi jævnfør (5.3.8), at O afbilder nul ind i nul, når $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = 0$.

   Fra (5.3.7) og (5.3.9) har vi, at O afbilder alle elementerne i $\{E_{-k}\hat{\psi}_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ind i sig selv. Da O er lineær kan dette udvides til

$$O\hat{f} = \hat{f}, \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \text{span}\{E_{-k}\hat{\psi}_0\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

   Vi har yderligere, at O er begrænset, og dermed uniform kontinuert. Vi kan derfor anvende [Ped00, s. 25], hvilket giver, at

$$O\hat{f} = \hat{f}, \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \overline{\text{span}}\{E_{-k}\hat{\psi}_0\}_{k\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(V_0),$$

   hvorved (5.3.5) er vist.

5. I dette punkt vises det, at O opfylder (5.3.6).

   Derfor betragter vi rummet

$$\mathcal{F}(V_0^\perp) = (\mathcal{F}V_0)^\perp = \overline{\text{span}}\,\{\mathcal{F}T_k\psi_0\}^\perp = \overline{\text{span}}\{E_{-k}\hat{\psi}_0\}^\perp,$$

hvor første lighed gælder, da $\mathcal{F}$ er en unitær operator, som derfor bevarer ortogonalitet.
For $\hat{f} \in \mathcal{F}(V_0^\perp)$ må der gælde, at

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \hat{f}, E_{-k}\hat{\psi}_0 \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma)E_{-k}(\gamma)}d\gamma \\
&= \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}_{(*)} \qquad \underbrace{E_k(\gamma)}_{\text{Basis for } L^2([-1/2,1/2])} \qquad d\gamma}_{-k\text{'te Fourierkoefficient til } (*)},
\end{aligned}$$

da E_k er en 1-periodisk funktion. Da $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} \in L^1(\mathbb{R})$, og $\mathcal{F}$ er injektiv på $L^1(\mathbb{T})$, så må der gælde, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} = 0$. Det betyder per definition, at $\Lambda_f = 0$ for $\hat{f} \in \mathcal{F}(V_0^\perp)$, og dermed har vi, at

$$O\hat{f} = 0, \quad \text{for} \quad \hat{f} \in \mathcal{F}(V_0^\perp),$$

hvorved (5.3.6) er vist.

Jævnfør [Ped00, s.51], så haves det, at

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{F}V_0 \oplus (\mathcal{F}V_0)^\perp,$$

hvorved definitionen af O kan udvides til $L^2(\mathbb{R})$, da O er lineær. ■

I den følgende sætning opstilles en ækvivalent betingelse til, at skaleringsfunktionen giver approksimationsorden m.

Sætning 5.3.5
Lad der være givet en tight frame $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$, som er konstrueret udfra en framemultiskalaanalyse med skaleringsfunktion ψ_0 og tilhørende rum V_j. Antag, at ψ_0 har kompakt støtte, at $\hat{\psi}_0(0) \neq 0$, og at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset. Lad $m \in \mathbb{N}$. Så er følgende punkter ækvivalente:

(i) *ψ_0 giver approksimationsorden m.*

(ii) *Der gælder, at*

$$\sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = O(|\gamma|^{2m}), \quad \textit{for} \quad \gamma \to 0.$$

Bevis:
Først vises det, at *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*.

Ideen er at vise, at

$$\|f - P_0 f\| \leq C|f|_{m,2}, \quad \forall\, f \in W_2^m. \tag{5.3.10}$$

Dernæst anvendes Lemma 5.3.2, som giver, at (5.3.10) er ækvivalent med

$$\|f - P_J f\| \leq C2^{-Jm}|f|_{m,2}, \quad \text{for} \quad \forall\, f \in W_2^m, \quad J \to -\infty,$$

hvilket er det ønskede resultat, da den ortogonale afstand mellem f og V_J svarer til minimumsafstanden.

1. Lad $f \in W_2^m$. Først defineres funktionerne f_1 og f_2:

$$\hat{f}_1 := \begin{cases} \hat{f} & \text{for } x \in]-1/2, 1/2[, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{5.3.11}$$

$$\hat{f}_2 := \begin{cases} 0 & \text{for } x \in]-1/2, 1/2[, \\ \hat{f} & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5.3.12}$$

Således har vi, at

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2, \quad \text{og} \quad f = f_1 + f_2,$$

da $\mathcal{F}$ er lineær.

Ved brug af, at P_0 er lineær og af trekantsuligheden, har vi, at

$$\begin{aligned} \|f - P_0 f\| &= \|(f_1 - P_0 f_1) + (f_2 - P_0 f_2)\| \\ &\leq \underbrace{\|f_1 - P_0 f_1\|}_{(*)} + \underbrace{\|f_2 - P_0 f_2\|}_{(**)}. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

2. I dette punkt betragter vi $(*)$-leddet i (5.3.13).

Da $P_0 f_1 \perp f_1 - P_0 f_1$, så fås ved brug af Pythagoras formel og Plancherels formel, at

$$\begin{aligned} \|f_1 - P_0 f_1\|^2 &= \|f_1\|^2 - \|P_0 f_1\|^2 \\ &= \|\hat{f}_1\|^2 - \|\widehat{P_0 f_1}\|^2. \end{aligned}$$

Det anvendes nu, at $\hat{f}_1$ har støtte på intervallet $]-1/2, 1/2[$, jævnfør (5.3.11). Ydermere anvendes Lemma 5.3.4 og konventionen $\frac{0}{0} := 0$ således, at

$$\begin{aligned}
\|f_1 - P_0 f_1\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 d\gamma \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_1(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \right|^2 |\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 d\gamma \\
&\quad - \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_1(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \right|^2 \sum_{s\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+s)|^2 d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 d\gamma \\
&\quad - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_1(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)} \right|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} d\gamma,
\end{aligned}$$

hvor det er anvendt, at $\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_1(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}$ er 1-periodisk. Da $\hat{f}_1$ har støtte i intervallet $]-1/2, 1/2[$, så gælder der yderligere, at

$$\begin{aligned}
&\|f_1 - P_0 f_1\|^2 \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 d\gamma - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|\hat{f}_1(\gamma)|^2 |\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} d\gamma \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 \left(1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \right) d\gamma. \qquad (5.3.14)
\end{aligned}$$

Da $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ og har kompakt støtte, så har vi, at $\psi_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Dette giver, jævnfør [Grö01, s.5], at $\hat{\psi}_0$ er kontinuert, hvorved vi har, at $|\hat{\psi}_0|^2 > 0$ nær origo. Dette sikrer, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \neq 0$. Da $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset og ved anvendelse af punkt *(ii)* i lemmaet, har vi dermed, at

$$\begin{aligned}
1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} &= \frac{\sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \\
&\leq C \sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \\
&\leq C|\gamma|^{2m}, \quad \text{for} \quad \gamma \to 0. \qquad (5.3.15)
\end{aligned}$$

Da $1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}$ er begrænset, så har vi, at (5.3.15) gælder for $\gamma \in$

$]-1/2, 1/2[$. Det vil sige, at

$$\begin{aligned}
\|f_1 - P_0 f_1\|^2 &\leq \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 C |\gamma|^{2m} d\gamma \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} d\gamma \\
&= C|f|_{m,2}^2.
\end{aligned}$$

3. I dette punkt betragter vi $(**)$-leddet i (5.3.13).

   Først gøres brug af trekantsuligheden, samt Plancherels formel.

$$\begin{aligned}
\|f_2 - P_0 f_2\| &\leq \|f_2\| + \|P_0 f_2\| \\
&\leq 2\|f_2\| \\
&= 2\|\hat{f}_2\| \\
&= 2\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_2(\gamma)|^2 d\gamma\Big)^{1/2} \\
&= 2\Big(\int_{|\gamma|\geq 1/2} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

   Da $|\gamma|^{2m} \geq 2^{-2m}$ for $|\gamma| \geq 1/2$, får vi, at

$$\begin{aligned}
\|f_2 - P_0 f_2\| &\leq 2\Big(2^{2m} \int_{|\gamma|\geq 1/2} |\gamma|^{2m} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma\Big)^{1/2} \\
&\leq C\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma|^{2m} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma\Big)^{1/2} \\
&= C|f|_{m,2}.
\end{aligned}$$

4. Ved hjælp af (5.3.13) har vi dermed vist, at

$$\|f - P_0 f\| \leq C|f|_{m,2}, \quad \forall\, f \in W_2^m.$$

   Nu kan Lemma 5.3.2 anvendes, så vi har, at

$$\|f - P_J f\| \leq C 2^{-Jm} |f|_{m,2}, \quad \text{for} \quad \forall\, f \in W_2^m, \quad J \to -\infty,$$

   hvorved punkt *(i)* er vist.

Nu vises det, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Fra (5.3.14) har vi, at

$$\begin{aligned} & \|f_1 - P_0 f_1\|^2 \\ = \quad & \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 \left(1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}\right) d\gamma \\ = \quad & \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}\right)}{|\gamma|^{2m}}}_{G(\gamma)} d\gamma, \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

for alle f_1, der er givet ved (5.3.11). Ved hjælp af Lemma 5.3.2 har vi, at antagelse *(i)* er ækvivalent med

$$\|f_1 - P_0 f_1\| \le C|f_1|_{m,2}. \tag{5.3.17}$$

Ved at sammensætte (5.3.16) og (5.3.17), får vi således, at

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}_1(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m} G(\gamma) d\gamma \le C|f_1|_{m,2},$$

for alle f_1, der er givet ved (5.3.11).

For et vilkårligt $g \in L^1(\mathbb{R})$, sætter vi $|g(\gamma)| = |\hat{f}_1(\gamma)|^2 |\gamma|^{2m}$. Dermed ses det, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma) G(\gamma) \chi_{[-1/2,1/2]}(\gamma) d\gamma$$

definerer et begrænset lineært funktionale af g på $L^1(\mathbb{R})$. Jævnfør [Rud87, s.27] har vi så, at

$$G(\gamma)\chi_{[-1/2,1/2]}(\gamma) \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

På intervallet $[-1/2, 1/2]$ kan vi således konkludere, at

$$G(\gamma) \le C,$$

hvilket giver, at

$$1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \le C|\gamma|^{2m}.$$

Vi har dermed følgende vurdering for $\gamma \in [-1/2, 1/2]$:

$$1 - \frac{|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\gamma+k)|^2} = \frac{\sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2} \le C|\gamma|^{2m}.$$

Bemærk, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 > 0$ nær origo, da $|\hat{\psi}_0|^2 > 0$ nær origo.

Da $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset kan vi slutte, at

$$\sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \leq C|\gamma|^{2m}, \quad \text{for} \quad \gamma \to 0.$$

Dermed har vi vist, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. ■

Følgende korollar giver endnu en ækvivalent betingelse til, at ψ_0 giver approksimationsorden m.

Korollar 5.3.6
Lad der være givet en tight frame $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$, som er konstrueret udfra en framemultiskalaanalyse med skaleringsfunktion ψ_0 og tilhørende rum V_j. Antag, at ψ_0 har kompakt støtte, at $\hat{\psi}_0(0) \neq 0$, og at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset. Lad $m \in \mathbb{N}$. Så er følgende punkter ækvivalente:

(i) ψ_0 *giver approksimationsorden* m.

(ii) $\hat{\psi}_0(\gamma+k)$ *har nulpunkt af orden* m *i origo for alle* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Bevis:
Det vises her, at *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Jævnfør Sætning 5.3.5 er *(i)* ækvivalent med, at

$$\sum_{k\neq 0} |\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = O(|\gamma|^{2m}), \quad \gamma \to 0.$$

Ovenstående giver, at

$$|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = O(|\gamma|^{2m}), \quad \gamma \to 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Dette er ækvivalent med, at

$$\hat{\psi}_0(\gamma+k) = O(|\gamma|^{m}), \quad \gamma \to 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Implikationen *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* vises i [SF73]. ■

Følgende hovedsætning giver en karakterisering af en waveletframes approksimationsorden. Ydermere viser sætningen, hvorledes valget af θ-funktionen fra

Det Oblique Udvidelsesprincip har indflydelse på waveletframens approksimationsorden. Bemærk, at nulpunktsordenen i origo af funktionen $\sum_{l=1}^{n}|H_l(\gamma)|^2 = \theta(\gamma) - |H_0(\gamma)|^2\theta(2\gamma)$ fra (4.3.5) indgår i sætningen. Dermed knyttes vanishing moments sammen med approksimationsordenen.

Hovedsætning 5.3.7
Lad $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ være en tight frame konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip. Antag, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$ er begrænset, og at skaleringsfunktionen ψ_0 giver en approksimationsorden $m<\infty$, hvor $m\in\mathbb{N}$.

Så gælder, at $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ har en approksimationsorden, der er sammenfaldende med følgende tre tal:

(i) $\min\{m,m_1\}$, *hvor* $1-\theta(\gamma)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 = O(|\gamma|^{m_1}), \quad$ *for* $\gamma\to 0$.

(ii) $\min\{m,m_2\}$, *hvor* $\theta(\gamma)-\theta(2\gamma)|H_0(\gamma)|^2 = O(|\gamma|^{m_2}), \quad$ *for* $\gamma\to 0$.

(iii) $\min\{m,m_3\}$, *hvor* $1-\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 = O(|\gamma|^{m_3}), \quad$ *for* $\gamma\to 0$.

Bevis:
Først viser, at approksimationsordenen af $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ er sammenfaldende med punkt *(iii)*. Dernæst viser vi, at *(iii)* og *(i)* er ens. Endelig viser vi, at *(iii)* og *(ii)* er ens.

1. Approksimationsordenen af $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ vises i dette punkt at være lig $\min\{m,m_3\}$.

   Fra Lemma 5.1.3 har vi for alle $f\in L^2(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned}\widehat{Q_0 f}(\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma)\theta(\gamma)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\hat{\psi}_0(\gamma+k)\overline{\theta(\gamma+k)}}\hat{\psi}_0(\gamma),\end{aligned}$$

   da θ er 1-periodisk. Ved at sætte $\hat{\zeta}=\hat{\psi}_0\overline{\theta}$, giver dette for alle $f\in L^2(\mathbb{R})$, at

$$\widehat{Q_0 f}(\gamma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\gamma+k)\overline{\zeta(\gamma+k)}\hat{\psi}_0(\gamma).$$

   Vi har dermed, at (5.3.2) i Sætning 5.3.3 er opfyldt. Vi undersøger derfor ordenen af nulpunkter i origo for

$$\sum_{k\neq 0}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 \quad \text{og} \quad 1-\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma).$$

Per antagelse har vi fra *(iii)*, at

$$1-\overline{\hat{\zeta}(\gamma)}\hat{\psi}_0(\gamma)=1-\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2=O(|\gamma|^{m_3}),\quad \gamma\to 0.$$

Vi har yderligere fra Sætning 5.3.5, at

$$\sum_{k\neq 0}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2=O(|\gamma|^{2m}),\quad \gamma\to 0.$$

Vi betragter tilfældene, hvor henholdsvis $m_3<m$, og $m<m_3$.

I tilfældet hvor $m_3<m$ må der gælde, at

$$\begin{aligned}1-\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 &= O(|\gamma|^{m_3}),\quad \gamma\to 0,\\ \sum_{k\neq 0}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 &= O(|\gamma|^{2m_3}),\quad \gamma\to 0.\end{aligned}$$

Dermed har vi i følge Sætning 5.3.3, at $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ har approksimationsorden m_3.

I det tilfælde, hvor $m<m_3$, har vi, at

$$\begin{aligned}1-\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 &= O(|\gamma|^{m}),\quad \gamma\to 0,\\ \sum_{k\neq 0}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2 &= O(|\gamma|^{2m}),\quad \gamma\to 0.\end{aligned}$$

Dermed har $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$, ifølge Sætning 5.3.5, approksimationsorden m.

Vi har således vist, at approksimationsordenen af $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ er sammenfaldende med $\min\{m,m_3\}$.

2. I dette punkt vises det, at $\min\{m,m_3\}=\min\{m,m_1\}$.

   Vi antager, at ψ_0 giver approksimationsorden m, så ifølge Sætning 5.3.5 har vi, at

$$\sum_{k\neq 0}|\psi_0(\gamma+k)|^2=O(|\gamma|^{2m}),\quad \gamma\to 0. \tag{5.3.18}$$

   Vi betragter $1-\theta(\gamma)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2$, som per antagelse har nulpunkt af orden m_1 i origo:

$$\begin{aligned}O(|\gamma|^{m_1}) &= 1-\theta(\gamma)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2\\ &= 1-\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2+\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2-\theta(\gamma)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2\\ &= \Big(1-\theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2\Big)+\theta(\gamma)\Big(|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2-\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}_0(\gamma+k)|^2\Big)\\ &= O(|\gamma|^{m_3})+O(|\gamma|^{2m}),\quad \gamma\to 0,\end{aligned}$$

hvor det er brugt, at vi fra Det Oblique Udvidelsesprincip ved, at $\theta(0) = 1$, hvorved vurderingen fra (5.3.18) kan anvendes. Desuden er definitionen af m_3 anvendt.

Det bemærkes nu, at hvis m_1 eller m_3 er mindre end $2m$, så må der gælde, at $m_1 = m_3$. Dermed gælder der, at $\min\{m, m_1\} = \min\{m, m_3\}$.

3. I dette punkt vises det, at $\min\{m, m_3\} = \min\{m, m_2\}$. Vi betragter

$$\theta(\gamma) - \theta(2\gamma)|H_0(\gamma)|^2.$$

Ved brug af skaleringsligningen fra Det Generelle Setup:

$$|\hat{\psi}_0(2\gamma)|^2 = |\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 |H_0(\gamma)|^2,$$

kan vi få, at

$$\left(\theta(\gamma) - \theta(2\gamma)|H_0(\gamma)|^2\right) |\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 = \theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 - \theta(2\gamma)|\hat{\psi}_0(2\gamma)|^2. \tag{5.3.19}$$

Da vi per antagelse fra punkt *(iii)* har, at $1 - \theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 = O(|\gamma|^{m_3})$ for $\gamma \to 0$, så giver Taylors formel omkring nul med restled, at

$$1 - \theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 = q(\gamma) + o(|\gamma|^{m_3}), \quad \gamma \to 0,$$

hvor q er et monomium af grad m_3. Dermed har vi, at

$$\begin{aligned} & \theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 - \theta(2\gamma)|\hat{\psi}_0(2\gamma)|^2 \\ = \; & -(1 - \theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2) + (1 - \theta(2\gamma)|\hat{\psi}_0(2\gamma)|^2) \\ = \; & q(2\gamma) - q(\gamma) + o(|\gamma|^{m_3}), \quad \gamma \to 0. \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Da m_3 er ordenen af nul af $1 - \theta|\hat{\psi}_0|^2$ i origo, og da $\theta(0)|\hat{\psi}_0(0)|^2 = 1$, har vi, at $m_3 > 0$. Dermed er $q(2\gamma) - q(\gamma)$ et ikke-nul monomium af grad m_3, så vi har, at

$$q(2\gamma) - q(\gamma) + o(|\gamma|^{m_3}) = O(|\gamma|^{m_3}), \quad \gamma \to 0.$$

Fra (5.3.19) og (5.3.20) har vi derfor, at

$$\begin{aligned} O(|\gamma|^{m_3}) &= \theta(\gamma)|\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 - \theta(2\gamma)|\hat{\psi}_0(2\gamma)|^2 \\ &= \left(\theta(\gamma) - \theta(2\gamma)|H_0(\gamma)|^2\right) |\hat{\psi}_0(\gamma)|^2 \\ &= O(|\gamma|^{m_2}), \quad \gamma \to 0, \end{aligned}$$

per definition af m_2. Dermed har vi, at $m_2 = m_3$.

■

Den følgende hovedsætning viser, hvorledes antallet af vanishing moments for generatorerne i en tight multiwaveletframe kan have indflydelse på approksimationsordenen af framen.

Hovedsætning 5.3.8
Lad $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,\dots,n}$ være en tight frame, der er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip, hvor $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}_0(\gamma + k)|^2$ er begrænset. Antag, at $\psi_1, \dots, \psi_n$ har m_0 vanishing moments. Antag ydermere, at skaleringsfunktionen ψ_0 giver approksimationsorden m. Så har $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ approksimationsorden $\min\{m, 2m_0\}$.

Bevis:
Da antallet af vanishing moments for $\psi_1, \dots, \psi_n$, jævnfør Afsnit 4.2.1 er fastlagt ved ordenen af nulpunkter for H_l i origo, så haves det, at $\psi_1, \dots, \psi_n$ har m_0 vanishing moments, hvis og kun hvis

$$H_l(\gamma) = O(|\gamma|^{m_0}), \quad \text{for} \quad \gamma \to 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Dette svarer til, at

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = O(|\gamma|^{2m_0}), \quad \text{for} \quad \gamma \to 0. \tag{5.3.21}$$

Da $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ per antagelse er en tight frame, der en konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip, så er kravene i Det Oblique Udvidelsesprincip opfyldt. Det vil sige, at (4.3.2) er opfyldt, hvilket for $\nu = 0$ giver, at

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = \theta(\gamma) - \theta(2\gamma)|H_0(\gamma)|^2. \tag{5.3.22}$$

Dermed haves det fra (5.3.21) og (5.3.22), at

$$\theta(\gamma) - \theta(2\gamma)|H_0(\gamma)|^2 = O(|\gamma|^{2m_0}), \quad \text{for} \quad \gamma \to 0,$$

hvilket ved brug af Hovedsætning 5.3.7 *(ii)* giver, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$ har approksimationsorden $\min\{m, 2m_0\}$. ■

5.4 Delkonklusion

Vi har i dette kapitel beskæftiget os med approksimationsorden af henholdsvis en tight multiwaveletframe og en skaleringsfunktion. Vi har set, at approksimationsordenen af en tight multiwaveletframe aldrig kan overstige approksimationsordenen af skaleringsfunktionen. Vi har yderligere gennemgået resultater, der viser betingelser for, hvornår en tight multiwaveletframe har en given approksimationsorden. Specielt har vi gennemgået en sammenhæng mellem antallet af vanishing moments og approksimationsordenen af en tight multiwaveletframe. Denne sammenhæng er nyttig i forhold til at kunne konstruere tight multiwaveletframes med en given approksimationsorden.

Hovedresultaterne eksemplificeres i næste kapitel, hvor vi undersøger, hvor høj approksimationsorden man kan opnå ved tight multiwaveletframes konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære og Det Oblique Udvidelsesprincip, når skaleringsfunktionen vælges som en translateret B-spline.

Kapitel 6

Eksempel med B-splines

Dette kapitel er baseret på [Chr03] og [DHRS03].

I kapitlet gives eksempler på, hvorledes henholdsvis Det Unitære og Det Oblique Udvidelsesprincip kan anvendes til at konstruere tight multiwaveletframes for $L^2(\mathbb{R})$. Ideen er, at skaleringsfunktionen vælges som en B-spline, se Appendiks B, og derudfra undersøges det, om man ved hjælp af udvidelsesprincipperne kan konstruere tight multiwaveletframes.

Yderligere sammenlignes approksimationsordenen af waveletframes konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære - og Det Oblique Udvidelsesprincip.

Da det ved implementering er hensigtsmæssigt, at generatorerne har støtte på den positive reelle akse, tager vi i kapitlet udgangspunkt i en translateret B-spline. Vi definerer derfor skaleringsfunktionen, som

$$\psi_0 := T_m B_{2m}, \quad \text{for} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6.0.1}$$

6.1 Bestemmelse af H_0

I dette afsnit undersøges det, om skaleringsfunktionen $T_m B_{2m}$ opfylder Det Generelle Setup. Det vil sige, at vi undersøger, om (4.1.2) er opfyldt, og dernæst bestemmes H_0 via skaleringsligningen, (4.1.1).

Først bestemmes Fouriertransformen af ψ_0 ved brug af kommutatorrelation fra Appendiks A og Korollar B.0.11:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(\gamma) &= (\mathcal{F}T_m B_{2m})(\gamma) \\
&= (E_{-m}\mathcal{F}B_{2m})(\gamma) \\
&= e^{-i2\pi m\gamma}\left(\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}\right)^{2m}.
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Nu betragtes grænseværdien af $\hat{\psi}_0(\gamma)$ for $\gamma \to 0$. I udregningerne er omskrivningen fra beviset for Korollar B.0.11 samt Lebesgues Majorant Sætning anvendt.

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to 0}\hat{\psi}_0(\gamma) &= \lim_{\gamma\to 0} e^{-2\pi im\gamma}\left(\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}\right)^{2m} \\
&= \lim_{\gamma\to 0} e^{-2\pi im\gamma}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ix\gamma}dx\right)^{2m} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dermed har vi, at (4.1.2) er opfyldt.

Vi bestemmer nu H_0 via skaleringsligningen, (4.1.1). Der gøres brug af (6.1.1).

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(2\gamma) &= e^{-2\pi im2\gamma}\left(\frac{\sin(2\pi\gamma)}{2\pi\gamma}\right)^{2m} \\
&= e^{-2\pi im2\gamma}\left(\frac{2\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma)}{2\pi\gamma}\right)^{2m} \\
&= e^{-2\pi im\gamma}\left(\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}\right)^{2m} e^{-2\pi im\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma) \\
&= \hat{\psi}_0(\gamma)e^{-2\pi im\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma).
\end{aligned}$$

Dermed opfylder ψ_0 skaleringsligningen med

$$H_0(\gamma) = e^{-2\pi im\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma). \tag{6.1.2}$$

Vi har således vist, at $\psi_0 = T_m B_{2m}$ opfylder Det Generelle Setup med H_0 givet som i (6.1.2).

6.2 Det Unitære Udvidelsesprincip

I dette afsnit konstrueres en tight multiwaveletframe med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $T_m B_{2m}$ ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip. Herefter undersøges formen af de tilhørende generatorer. Afsnittet afsluttes med de konkrete tilfælde, hvor $\psi_0 = T_1 B_2$ og $\psi_0 = T_2 B_4$.

6.2.1 Konstruktion med udgangspunkt i $\psi_0 = T_m B_{2m}$

I dette afsnit anvendes Det Unitære Udvidelsesprincip.

Der tages udgangspunkt i skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_m B_{2m}$, og vi definerer funktionerne $H_1, \ldots, H_{2m}$ ved

$$H_l(\gamma) := e^{-2\pi i m\gamma} i^l \sqrt{\binom{2m}{l}} \sin^l(\pi\gamma) \cos^{2m-l}(\pi\gamma), \quad l = 1, \ldots, 2m, \tag{6.2.1}$$

hvor $\binom{2m}{l}$ er binomialkoefficienten givet ved $\frac{(2m)!}{(2m-l)!l!}$.

Da $H_1, \ldots, H_{2m}$ er trigonometriske polynomier, tilhører disse $L^\infty(\mathbb{T})$, og H_l'erne opfylder dermed også Det Generelle Setup.

Udfra ligning (4.1.3), (6.1.1) og (6.2.1), definerer vi nu for $l = 1, \ldots, 2m$:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_l(\gamma) &= H_l(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2) \\
&= e^{-\pi i m\gamma} i^l \sqrt{\binom{2m}{l}} \sin^l(\pi\gamma/2) \cos^{2m-l}(\pi\gamma/2) e^{-\pi i m\gamma} \left(\frac{\sin(\pi\gamma/2)}{\pi\gamma/2}\right)^{2m} \\
&= e^{-2\pi i m\gamma} i^l \sqrt{\binom{2m}{l}} \frac{\sin^{2m+l}(\pi\gamma/2) \cos^{2m-l}(\pi\gamma/2)}{(\pi\gamma/2)^{2m}}.
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

I Det Unitære Udvidelsesprincip antages det, at $H(\gamma)^* H(\gamma) = I_2$, hvorfor det nu undersøges, om dette er tilfældet, når H_l er defineret som i (6.2.1), og H_0 er givet som i (6.1.2) . Først opskrives $(2m+1) \times 2$ matricen $H(\gamma)$, hvor denne er defineret som i (4.1.4).

Det bruges, at $\cos(\pi(\gamma - 1/2)) = \sin(\pi\gamma)$ og $\sin(\pi(\gamma - 1/2)) = -\cos(\pi\gamma)$:

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-2\pi im\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma) & e^{-2\pi im(\gamma-1/2)}\cos^{2m}(\pi(\gamma-1/2)) \\ e^{-2\pi im\gamma} i\sqrt{\binom{2m}{1}}\sin(\pi\gamma)\cos^{2m-1}(\pi\gamma) & e^{-2\pi im(\gamma-1/2)} i\sqrt{\binom{2m}{1}}\sin(\pi(\gamma-1/2))\cos^{2m-1}(\pi(\gamma-1/2)) \\ e^{-2\pi im\gamma} i^2\sqrt{\binom{2m}{2}}\sin^2(\pi\gamma)\cos^{2m-2}(\pi\gamma) & e^{-2\pi im(\gamma-1/2)} i^2\sqrt{\binom{2m}{2}}\sin^2(\pi(\gamma-1/2))\cos^{2m-2}(\pi(\gamma-1/2)) \\ \vdots & \vdots \\ e^{-2\pi im\gamma} i^{2m}\sqrt{\binom{2m}{2m}}\sin^{2m}(\pi\gamma) & e^{-2\pi im(\gamma-1/2)} i^{2m}\sqrt{\binom{2m}{2m}}\sin^{2m}(\pi(\gamma-1/2)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2\pi im\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma) & (-1)^m e^{-2\pi im\gamma}\sin^{2m}(\pi\gamma) \\ e^{-2\pi im\gamma} i\sqrt{\binom{2m}{1}}\sin(\pi\gamma)\cos^{2m-1}(\pi\gamma) & (-1)^{m+1} e^{-2\pi im\gamma} i\sqrt{\binom{2m}{1}}\cos(\pi\gamma)\sin^{2m-1}(\pi\gamma) \\ e^{-2\pi im\gamma} i^2\sqrt{\binom{2m}{2}}\sin^2(\pi\gamma)\cos^{2m-2}(\pi\gamma) & (-1)^m e^{-2\pi im\gamma} i^2\sqrt{\binom{2m}{2}}\cos^2(\pi\gamma)\sin^{2m-2}(\pi\gamma) \\ \vdots & \vdots \\ e^{-2\pi im\gamma} i^{2m}\sqrt{\binom{2m}{2m}}\sin^{2m}(\pi\gamma) & (-1)^m e^{-2\pi im\gamma} i^{2m}\sqrt{\binom{2m}{2m}}\cos^{2m}(\pi\gamma) \end{pmatrix}.$$

Til undersøgelse af, om $H(\gamma)^* H(\gamma) = I_2$, anvendes binomialformlen:

$$(x+y)^{2m} = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} x^l y^{2m-l}. \tag{6.2.3}$$

Indgangene i $H(\gamma)^* H(\gamma)$ udregnes enkeltvis. Først udregnes $(H(\gamma)^* H(\gamma))_{1,1}$

ved hjælp af formel (6.2.3):

$$\begin{aligned}(H(\gamma)^*H(\gamma))_{1,1} &= \sum_{l=0}^{2m} e^{-2\pi i\gamma m}e^{2\pi i\gamma m}(-i)^l i^l \binom{2m}{l}\sin^{2l}(\pi\gamma)\cos^{2(2m-l)}(\pi\gamma)\\ &= \left(\sin^2(\pi\gamma)+\cos^2(\pi\gamma)\right)^{2m}\\ &= 1.\end{aligned}$$

På samme måde opnås det, at $(H(\gamma)^*H(\gamma))_{2,2} = 1$.

Nu udregnes $(H(\gamma)^*H(\gamma))_{1,2}$, hvor formel (6.2.3) igen anvendes:

$$\begin{aligned}(H(\gamma)^*H(\gamma))_{1,2} &= (-1)^m \sin^{2m}(\pi\gamma)\cos^{2m}(\pi\gamma)\\ &\quad\times\left(1-\binom{2m}{1}+\binom{2m}{2}-\binom{2m}{3}+\cdots+\binom{2m}{2m}\right)\\ &= (-1)^m \sin^{2m}(\pi\gamma)\cos^{2m}(\pi\gamma)\left(\sum_{l=0}^{2m}\binom{2m}{l}(1)^l(-1)^{2m-l}\right)\\ &= (-1)^m \sin^{2m}(\pi\gamma)\cos^{2m}(\pi\gamma)(1-1)^{2m}\\ &= 0.\end{aligned}$$

På tilsvarende vis fås, at $(H(\gamma)^*H(\gamma))_{2,1} = 0$.

Dermed er det vist, at $H(\gamma)^*H(\gamma) = I_2$, hvorved alle forudsætningerne er tilstede for at anvende Det Unitære Udvidelsesprincip. Ved brug af Det Unitære Udvidelsesprincip har vi derfor, at $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,2m}$ udgør en tight multiwaveletframe for $L^2(\mathbb{R})$, hvor $\psi_1,\ldots,\psi_{2m}$ er defineret ved (6.2.2).

6.2.2 Formen af generatorerne

I dette afsnit undersøges det, hvilken form generatorerne ψ_l, der er defineret via (6.2.2), har. Først omskrives $H_l(\gamma/2)$ fra (6.2.1) ved hjælp af Eulers formel:

$$\begin{aligned}&H_l(\gamma/2)\\ &= e^{-\pi i m\gamma} i^l\sqrt{\binom{2m}{l}}\sin^l(\pi\gamma/2)\cos^{2m-l}(\pi\gamma/2)\\ &= e^{-\pi i m\gamma} i^l\sqrt{\binom{2m}{l}}\left(\frac{e^{i\pi\gamma/2}-e^{-i\pi\gamma/2}}{2i}\right)^l\left(\frac{e^{i\pi\gamma/2}+e^{-i\pi\gamma/2}}{2}\right)^{2m-l}\\ &= e^{-\pi i m\gamma}2^{-2m}\sqrt{\binom{2m}{l}}\underbrace{\left(e^{i\pi\gamma/2}-e^{-i\pi\gamma/2}\right)^l}_{A}\underbrace{\left(e^{i\pi\gamma/2}+e^{-i\pi\gamma/2}\right)^{2m-l}}_{B}. \quad (6.2.4)\end{aligned}$$

Ved brug af formel (6.2.3) omskrives henholdsvis led A og led B i ovenstående udtryk:

$$\begin{aligned}
A &= \left(e^{i\pi\gamma/2} - e^{-i\pi\gamma/2}\right)^l \\
&= \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} e^{i\pi(\gamma/2)n} \left(-e^{-i\pi(\gamma/2)(l-n)}\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} e^{i\pi\gamma n} e^{-i\pi(\gamma/2)l}. \\
B &= \left(e^{i\pi\gamma/2} + e^{-i\pi\gamma/2}\right)^{2m-l} \\
&= \sum_{p=0}^{2m-l} \binom{2m-l}{p} e^{i\pi(\gamma/2)p} e^{-i\pi(\gamma/2)(2m-l-p)} \\
&= \sum_{p=0}^{2m-l} \binom{2m-l}{p} e^{i\pi\gamma p} e^{-i\pi\gamma m} e^{i\pi(\gamma/2)l}.
\end{aligned}$$

Nu udregnes AB:

$$\begin{aligned}
AB &= \left(-\sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} e^{i\pi\gamma n} e^{-i\pi(\gamma/2)l}\right) \left(\sum_{p=0}^{2m-l} \binom{2m-l}{p} e^{i\pi\gamma p} e^{-i\pi\gamma m} e^{i\pi(\gamma/2)l}\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{l} \sum_{p=0}^{2m-l} \binom{l}{n} \binom{2m-l}{p} e^{i\pi\gamma n} e^{i\pi\gamma p} e^{-i\pi\gamma m} \\
&= -\sum_{n=0}^{l} \sum_{p=0}^{2m-l} \binom{l}{n} \binom{2m-l}{p} e^{i\pi\gamma(n+p-m)} \qquad (6.2.5)
\end{aligned}$$

Ved hjælp af (6.2.5) ses det, at AB kan skrives som en endelig linearkombination af led på følgende form:

$$e^{-i\pi\gamma m}, e^{-i\pi\gamma(m-1)}, e^{-i\pi\gamma(m-2)}, \ldots, e^{i\pi\gamma(m-2)}, e^{i\pi\gamma(m-1)}, e^{i\pi\gamma m}.$$

Dermed kan $H_l(\gamma/2)$, jævnfør (6.2.4), skrives som en endelig linearkombination af følgende led:

$$e^{-i\pi\gamma 2m}, e^{-i\pi\gamma(2m-1)}, e^{-i\pi\gamma(2m-2)}, \ldots, e^{-2i\pi\gamma}, e^{-i\pi\gamma}, e^0. \qquad (6.2.6)$$

Alle koefficienterne i linearkombinationen er reelle.

Vi anvender nu, at $\hat{\psi}_l$, givet som i skaleringsligningen (4.1.3), kan skrives som

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_l(\gamma) &= H_l(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2) \\
&= 2^{1/2} H_l(\gamma/2) 2^{-1/2} \hat{\psi}_0(\gamma/2) \\
&= 2^{1/2} H_l(\gamma/2) D^{-1} \hat{\psi}_0(\gamma). \qquad (6.2.7)
\end{aligned}$$

Da $H_l(\gamma/2)$ kan skrives som en endelig linearkombination med reelle koefficienter af leddene i (6.2.6), så kan $\hat{\psi}_l$ ved hjælp af (6.2.7), skrives som en linearkombination med reelle koefficienter af leddene

$$E_k D^{-1}\hat{\psi}_0 = \mathcal{F}T_{-k}D\psi_0 = \mathcal{F}DT_{-2k}\psi_0,$$

hvor $k = -m, -m+\frac{1}{2}, \ldots, -1, -\frac{1}{2}, 0$, og hvor kommutatorrelationerne fra Appendiks A er anvendt. Dermed er ψ_l en endelig linearkombination med reelle koefficienter af funktionerne

$$DT_{-2k}\psi_0, \quad k = -m, -m+\tfrac{1}{2}, \ldots, -1, -\tfrac{1}{2}, 0.$$

Da ψ_0 er en B-spline, så er ψ_l ligeledes en B-spline.

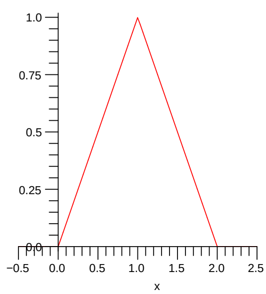
Da

$$\text{supp}\,(\psi_0) = \text{supp}\,(T_m B_{2m}) = [0, 2m],$$

jævnfør Sætning B.0.10 *(ii)*, så har $DT_0\psi_0$ støtte på intervallet $[0, m]$, og $DT_{2m}\psi_0$ har støtte på intervallet $[m, 2m]$. Dette giver, at B-splinen ψ_l har støtte på intervallet $[0, 2m]$. Vi har altså nu generatorer, ψ_l, $l = 1, \ldots, 2m$, med kompakt støtte, som giver en multiwaveletframe $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z}, l=1\ldots,2m}$.

6.2.3 Eksempel med udgangspunkt i $\psi_0 = T_1 B_2$.

I dette afsnit konstrueres en tight multiwaveletframe med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $T_1 B_2$, som ses på Figur 6.1.



Figur 6.1: *Skaleringsfunktionen* $\psi_0 = T_1 B_2$.

Dette tilfælde svarer til, at $m = 1$ i (6.0.1), hvorved vi får to generatorer. Først udregnes $\hat{\psi}_1$ ved brug af (6.2.4) og kommutatorrelationer fra Appendiks A:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_1(\gamma) &= H_1(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2) \\
&= e^{-\pi i\gamma}2^{-2}\sqrt{\binom{2}{1}}(e^{i\pi\gamma/2}-e^{-i\pi\gamma/2})(e^{i\pi\gamma/2}+e^{-i\pi\gamma/2})(\mathcal{F}T_1B_2)(\gamma/2) \\
&= e^{-\pi i\gamma}\frac{1}{2}2^{-1/2}(e^{i\pi\gamma}-e^{-i\pi\gamma})(E_{-1}\hat{B}_2)(\gamma/2) \\
&= \frac{1}{2}E_{-1/2}(E_{1/2}-E_{-1/2})E_{-1/2}2^{-1/2}\hat{B}_2(\gamma/2) \\
&= \frac{1}{2}E_{-1/2}(E_{1/2}-E_{-1/2})E_{-1/2}D^{-1}\hat{B}_2(\gamma) \\
&= \frac{1}{2}\Big((E_{-1/2}D^{-1}\hat{B}_2)(\gamma)-(E_{-3/2}D^{-1}\hat{B}_2)(\gamma)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((\mathcal{F}T_{1/2}DB_2)(\gamma)-(\mathcal{F}T_{3/2}DB_2)(\gamma)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}(T_{1/2}DB_2-T_{3/2}DB_2)(\gamma).
\end{aligned}$$

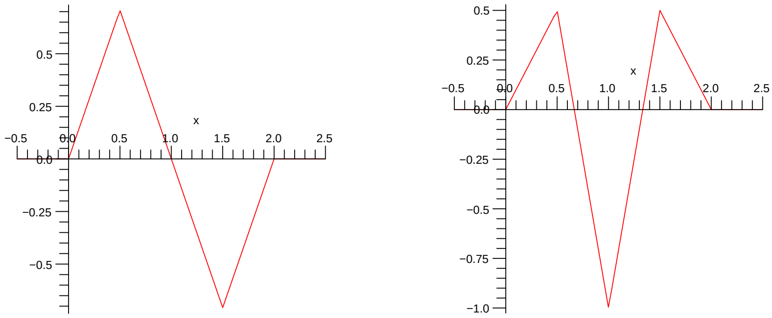
Dermed er

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \frac{1}{2}\Big(T_{1/2}DB_2(x)-T_{3/2}DB_2(x)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(T_{1/2}2^{1/2}B_2(2x)-T_{3/2}2^{1/2}B_2(2x)\Big) \\
&= 2^{-1/2}\Big(B_2(2(x-1/2))-B_2(2(x-3/2))\Big) \\
&= 2^{-1/2}\Big(B_2(2x-1)-B_2(2x-3)\Big). \qquad (6.2.8)
\end{aligned}$$

På tilsvarende vis fås, at

$$\psi_2(x)=\frac{1}{2}\Big(B_2(2x-1)-2B_2(2x-2)+B_2(2x-3)\Big). \qquad (6.2.9)$$

Dermed har vi, at ψ_1 og ψ_2 givet i (6.2.8) og (6.2.9) genererer en tight multiwaveletframe. De to generatorer ses på figur 6.2.

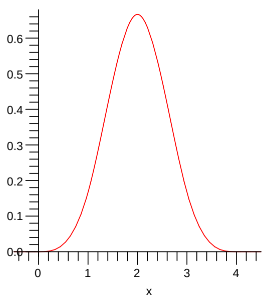


(a) $\psi_1(x)$. (b) $\psi_2(x)$.

Figur 6.2: *Generatorerne* ψ_1 *og* ψ_2*, der er konstrueret med udgangspunkt i* $\psi_0 = T_1 B_2$.

6.2.4 Eksempel med udgangspunkt i $\psi_0 = T_2 B_4$

I dette afsnit konstrueres en tight multiwaveletframe med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $T_2 B_4$, som ses på Figur 6.3.



Figur 6.3: *Skaleringsfunktionen* $\psi_0 = T_2 B_4$.

Dette tilfælde svarer til, at $m = 2$ i (6.0.1), hvorved vi får fire generatorer. Først udregnes $\hat{\psi}_1(\gamma)$ ved brug af (6.2.4) og kommutatorrelationer fra Appendiks A:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_1(\gamma) &= H_1(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2) \\
&= e^{-2\pi i\gamma}2^{-4}\sqrt{\binom{4}{1}}(e^{i\pi\gamma/2} - e^{-i\pi\gamma/2})(e^{i\pi\gamma/2} + e^{-i\pi\gamma/2})^3(\mathcal{F}T_2B_4)(\gamma/2) \\
&= \frac{1}{8}E_{-1}(E_{1/4} - E_{-1/4})(E_{1/4} + E_{-1/4})^3(E_{-2}\hat{B}_4)(\gamma/2) \\
&= \frac{1}{8}E_{-1}(E_{1/2} - E_{-1/2})(E_{1/2} + E_{-1/2} + 2)E_{-1}\hat{B}_4(\gamma/2) \\
&= \frac{1}{8}E_{-1}(E_1 - E_{-1} + 2E_{1/2} - 2E_{-1/2})E_{-1}\sqrt{2}D^{-1}\hat{B}_4(\gamma) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\Big((E_{-1} - E_{-3} + 2E_{-3/2} - 2E_{-5/2})D^{-1}\mathcal{F}B_4\Big)(\gamma) \\
&= \mathcal{F}\frac{\sqrt{2}}{8}\Big(T_1DB_4 - T_3DB_4 + 2T_{3/2}DB_4 - 2T_{5/2}DB_4\Big)(\gamma).
\end{aligned}$$

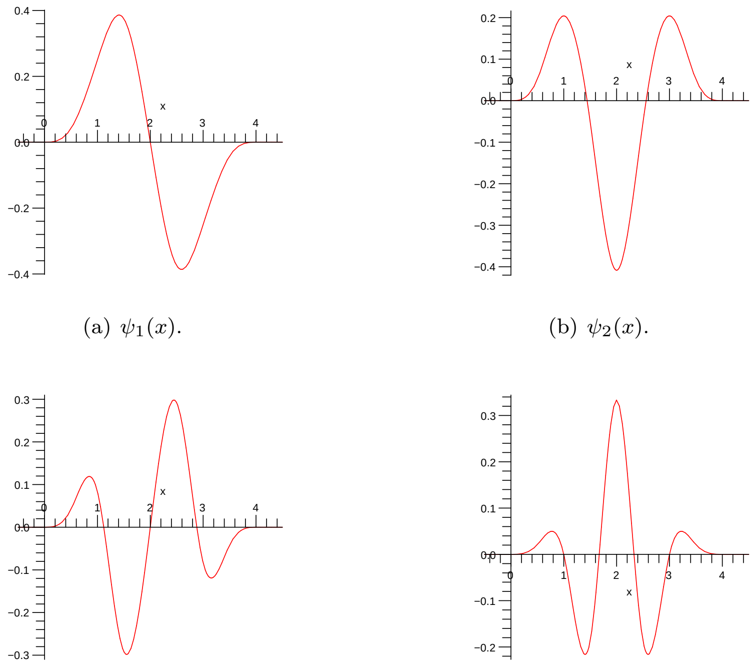
Dermed er

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4}\Big(B_4(2x-2) - B_4(2x-6) + 2B_4(2x-3) - 2B_4(2x-5)\Big).$$

På tilsvarende måde får vi, at

$$\begin{aligned}
\psi_2(x) &= \frac{\sqrt{6}}{8}\Big(B_4(2x-2) + B_4(2x-6) - 2B_4(2x-4)\Big), \\
\psi_3(x) &= \frac{1}{4}\Big(B_4(2x-2) - 2B_4(2x-3) - B_4(2x-6) + 2B_4(2x-5)\Big), \\
\psi_4(x) &= \frac{1}{8}\Big(6B_4(2x-4) - 4B_4(2x-5) - 4B_4(2x-3) \\
&\quad + B_4(2x-2) + B_4(2x-6)\Big).
\end{aligned}$$

De fire generatorer ses på figur 6.4.



(a) $\psi_1(x)$.

(b) $\psi_2(x)$.

(c) $\psi_3(x)$.

(d) $\psi_4(x)$.

Figur 6.4: Generatorerne ψ_1, ψ_2, ψ_3 og ψ_4, der er konstrueret med udgangspunkt i $\psi_0 = T_2 B_4$.

6.3 Det Oblique Udvidelsesprincip

I dette afsnit konstrueres tight multiwaveletframes med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $T_m B_{2m}$ ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip. Vi betragter de konkrete tilfælde, hvor $\psi_0 = T_1 B_2$, og $\psi_0 = T_2 B_4$.

Konstruktionerne i dette afsnit er ikke baseret på en fælles form af H_l'erne, som det var tilfældet i Afsnit 6.2.1. Idéen er, at vi for $\psi_0 = T_1 B_2$ modificerer eksemplet fra Afsnit 6.2.3 ved at indføre en θ-funktion. For $\psi_0 = T_2 B_4$ vælger vi tre H_l'er, jævnfør [DHRS03, s. 16], som opfylder Det Oblique Udvidelsesprincip, hvorfor vi opnår en tight multiwaveletframe med tre generatorer.

6.3.1 Eksempel med udgangspunkt i $\psi_0 = T_1 B_2$

I dette afsnit konstrueres en tight multiwaveletframe med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $T_1 B_2$, hvilket svarer til tilfældet $m = 1$ i (6.0.1). Skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_1 B_2$ ses på Figur 6.1. Jævnfør (6.1.2) er

$$H_0(\gamma) = e^{-2\pi i\gamma}\cos^2(\pi\gamma).$$

Vi definerer, jævnfør [Chr03, s. 336], følgende θ-funktion

$$\theta_1(\gamma) := \frac{4 - \cos(2\pi\gamma)}{3}.$$

Denne funktion tilhører $L^\infty(\mathbb{T})$, er positiv og opfylder (4.3.1), hvilket er betingelserne til θ i Det Oblique Udvidelsesprincip.

Fremgangsmåden i konstruktionen er nu, at vi definerer H_2 som i eksemplet med Det Unitære Udvidelsesprincip, det vil sige som i (6.2.1):

$$\begin{aligned}
H_2(\gamma) &= e^{-2\pi i\gamma} i^2 \sqrt{\binom{2}{2}} \sin^2(\pi\gamma) \\
&= -e^{-2\pi i\gamma}\left(\frac{e^{i\pi\gamma} - e^{-i\pi\gamma}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{-\pi i\gamma}(e^{\pi i\gamma} - e^{i2\pi\gamma})\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - e^{-i2\pi\gamma}\right)^2. \qquad (6.3.1)
\end{aligned}$$

Herudfra konstruerer vi H_1, så denne opfylder (4.3.2) i Det Oblique Udvidelsesprincip. Det vil sige, at følgende to ligninger skal være opfyldt:

$$\begin{aligned}|H_1(\gamma)|^2 &= \theta_1(\gamma) - |H_0(\gamma)|^2\theta_1(2\gamma) - |H_2(\gamma)|^2,\\ H_1(\gamma)\overline{H_1(\gamma+1/2)} &= -H_0(\gamma)\overline{H_0(\gamma+1/2)}\theta_1(2\gamma) - H_2(\gamma)\overline{H_2(\gamma+1/2)}.\end{aligned}$$

Ved indsættelse af H_0, H_2 og θ_1 får vi, via en række omskrivninger, at H_1 skal opfylde følgende ligninger:

$$\begin{aligned}|H_1(\gamma)|^2 &= \frac{1}{6}(\cos(2\pi\gamma)+2)^2(\cos(2\pi\gamma)-1)^2,\\ H_1(\gamma)\overline{H_1(\gamma+1/2)} &= \frac{1}{6}(\cos(2\pi\gamma)+2)(\cos(2\pi\gamma)-2)\\ &\quad\times(\cos(2\pi\gamma)-1)(\cos(2\pi\gamma)+1),\end{aligned}$$

og dermed kan H_1 vælges som

$$\begin{aligned}H_1(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\cos(2\pi\gamma)+2)(\cos(2\pi\gamma)-1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos^2(2\pi\gamma)+\cos(2\pi\gamma)-2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\left(\frac{e^{i2\pi\gamma}+e^{-i2\pi\gamma}}{2}\right)^2+\frac{e^{i2\pi\gamma}+e^{-i2\pi\gamma}}{2}-2\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{6}}(e^{4\pi i\gamma}+e^{-4\pi i\gamma}+2e^{2\pi i\gamma}+2e^{-2\pi i\gamma}-6). \qquad (6.3.2)\end{aligned}$$

Dermed har vi, at betingelserne i Det Oblique Udvidelsesprincip er opfyldt, og $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,2}$ genererer en tight multiwaveletframe for $L^2(\mathbb{R})$, når ψ_1 og ψ_2 defineres via

$$\hat{\psi}_l(\gamma) = H_l(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2), \quad l=1,2.$$

Dermed har vi, at

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1(\gamma) &= H_1(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{6}}(e^{2\pi i\gamma}+e^{-2\pi i\gamma}+2e^{\pi i\gamma}+2e^{-\pi i\gamma}-6)(\mathcal{F}T_1B_2)(\gamma/2)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(E_1+E_{-1}+2E_{1/2}+2E_{-1/2}-6)E_{-1/2}D^{-1}\hat{B}_2(\gamma)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\Big(E_{1/2}+E_{-3/2}+2+2E_{-1}-6E_{-1/2}\Big)D^{-1}\hat{B}_2(\gamma)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\mathcal{F}\Big(T_{-1/2}D+T_{3/2}D+2D+2T_1D-6T_{1/2}D\Big)B_2(\gamma).\end{aligned}$$

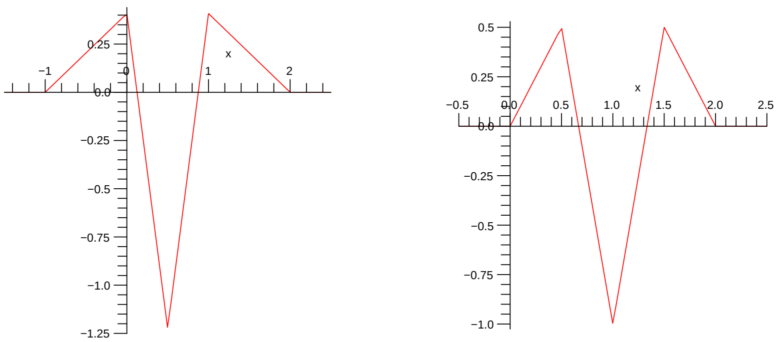
Der gælder således, at

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\Big(B_2(2x+1) + B_2(2x-3) + 2B_2(2x) + 2B_2(2x-2) - 6B_2(2x-1)\Big).$$

Da H_2 er valgt som i eksemplet med Det Unitære Udvidelsesprincip, så får vi som i (6.2.9), at

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2}\Big(B_2(2x-1) - 2B_2(2x-2) + B_2(2x-3)\Big).$$

De to generatorer ses på Figur 6.5.



(a) $\psi_1(x)$.

(b) $\psi_2(x)$.

Figur 6.5: *Generatorerne ψ_1 og ψ_2, der er konstrueret med udgangspunkt i $\psi_0 = T_1 B_2$.*

Bemærk, at ψ_1 har støtte på intervallet $[-1, 2]$, hvilket ved implementering kan forskydes til intervallet $[0, 3]$.

6.3.2 Eksempel med udgangspunkt i $\psi_0 = T_2 B_4$

I dette afsnit konstrueres en tight multiwaveletframe med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $T_2 B_4$, hvilket svarer til tilfældet $m = 2$ i (6.0.1). Skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_2 B_4$ ses på Figur 6.3. Jævnfør (6.1.2) er

$$H_0(\gamma) = e^{-4\pi i\gamma}\cos^4(\pi\gamma).$$

Vi definerer, jævnfør [DHRS03, s. 16], følgende θ-funktion

$$\theta_2(\gamma) := \frac{2452}{945} - \frac{1657}{840}\cos(2\pi\gamma) + \frac{44}{105}\cos(4\pi\gamma) - \frac{311}{7560}\cos(6\pi\gamma).$$

Denne funktion tilhører $L^\infty(\mathbb{T})$, er positiv og opfylder (4.3.1), hvilket er betingelserne til θ i Det Oblique Udvidelsesprincip.

Vi vælger nu, jævnfør [DHRS03, s. 16]:

$$\begin{aligned}
H_1(\gamma) &= C_1(1-e^{-i2\pi\gamma})^4(1+8e^{-i2\pi\gamma}+e^{-i4\pi\gamma}), && (6.3.3)\\
H_2(\gamma) &= C_2(1-e^{-i2\pi\gamma})^4 \\
&\quad \times\left(1+8e^{-i2\pi\gamma}+C_5e^{-i4\pi\gamma}+8e^{-i6\pi\gamma}+e^{-i8\pi\gamma}\right), && (6.3.4)\\
H_3(\gamma) &= C_3(1-e^{-i2\pi\gamma})^4 \\
&\quad \times\Big(1+8e^{-i2\pi\gamma}+C_6(e^{-i4\pi\gamma}+e^{-i8\pi\gamma})+C_4e^{-i6\pi\gamma} \\
&\quad +8e^{-i10\pi\gamma}+e^{-i12\pi\gamma}\Big), && (6.3.5)
\end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\sqrt{11113747578360-245493856965C_4}}{62697600},\\
C_2 &= \frac{\sqrt{1543080-32655C_4}}{62697600},\\
C_3 &= \frac{\sqrt{32655}}{20160},\\
C_4 &= \frac{317784}{7775}+56\frac{\sqrt{16323699891}}{2418025},\\
C_5 &= \frac{7775C_4}{4396}-\frac{53854}{1099},\\
C_6 &= 21+\frac{C_4}{8}.
\end{aligned}$$

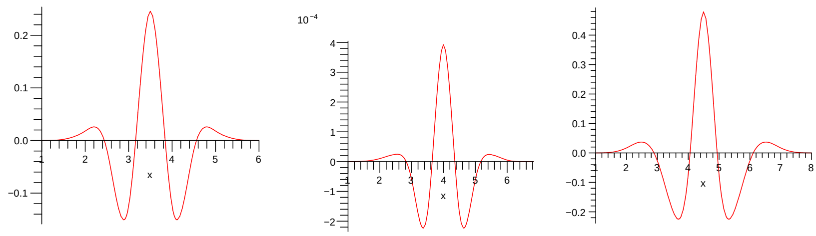
Det kan, jævnfør [DHRS03], vises, at H_1, H_2, H_3 og θ_2 opfylder (4.3.2) i Det Oblique Udvidelsesprincip. Dermed har vi, at betingelserne i Det Oblique Udvidelsesprincip er opfyldt, og $\{D^jT_k\psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,2,3}$ genererer en tight multiwaveletframe, når ψ_1, ψ_2 og ψ_3 defineres via

$$\hat{\psi}_l(\gamma) = H_l(\gamma/2)\hat{\psi}_0(\gamma/2), \quad l=1,2,3.$$

Dette giver, ved lignende udregninger som i Afsnit 6.3.1, at

$$
\begin{aligned}
\psi_1(\gamma) &= \sqrt{2}C_1\Big[B_4(2x-4)+4B_4(2x-5)-25B_4(2x-6)+40B_4(2x-7) \\
&\quad -25B_4(2x-8)+4B_4(2x-9)+B_4(2x-10)\Big] \\
\psi_2(\gamma) &= \sqrt{2}C_2\Big[B_4(2x-4)+(C_5-26)B_4(2x-6)+(6C_5-62)B_4(2x-8) \\
&\quad +(-4C_5+52)B_4(2x-9)+(C_5-26)B_4(2x-10) \\
&\quad +4B_4(2x-11)+(-4C_5+52)B_4(2x-7)+4B_4(2x-5)\Big] \\
\psi_3(\gamma) &= \sqrt{2}C_3\Big[B_4(2x-4)+(C_4-4C_6+44)B_4(2x-7) \\
&\quad +(C_6-26)B_4(2x-6)+(7C_6-4C_4-31)B_4(2x-8) \\
&\quad +(-8C_6+6C_4+16)B_4(2x-9)+(7C_6-4C_4-31)B_4(2x-10) \\
&\quad +(-4C_6+C_4+44)B_4(2x-11)+(C_6-26)B_4(2x-12) \\
&\quad +4B_4(2x-5)+4B_4(2x-13)+B_4(2x-14)\Big].
\end{aligned}
$$

De tre generatorer ses på Figur 6.6.



(a) $\psi_1(x)$. (b) $\psi_2(x)$. (c) $\psi_3(x)$.

Figur 6.6: *Generatorerne ψ_1, ψ_2 og ψ_3, der er konstrueret med udgangspunkt i $\psi_0 = T_2 B_4$.*

Vi observerede i Afsnit 6.2, at når vi med Det Unitære Udvidelsesprincip tog udgangspunkt i skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_m B_{2m}$, så havde den konstruerede frame $2m$ generatorer. Således steg antallet af generatorer i takt med glatheden af skaleringsfunktionen. I dette afsnit har vi derimod konstrueret en tight multiwaveletframe med tre generatorer på trods af, at der er taget udgangspunkt i skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_2 B_4$.

6.4 Sammenligning af udvidelsesprincipper

I dette afsnit sammenlignes de tight multiwavletframes, der blev konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære - og Det Oblique Udvidelsesprincip i Afsnit 6.2 og 6.3, med hensyn til antallet af vanishing moments og approksimationsorden. Udgangspunktet har i begge afsnit været $\psi_0 = T_m B_{2m}$, og vi ser på, hvorledes θ-funktionen i Det Oblique Udvidelsesprincip kan korrigere for de begrænsninger, som skaleringsfunktionen sætter i Det Unitære Udvidelsesprincip.

6.4.1 Vanishing moments

I dette afsnit tager vi udgangspunkt i diskussionerne i Afsnit 4.2.1 og 4.3.1 med hensyn til antallet af vanishing moments.

Jævnfør Afsnit 4.2.1, så bestemmes antallet af vanishing moments af generatorerne $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ved ordenen af nulpunkter i origo for $H_1, \ldots, H_n$. Derved kan vi udfra summen

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2$$

bestemme antallet af vanishing moments af generatorerne.

I dette afsnit ser vi på, hvorledes denne sum ændrer sig, når vi går fra konstruktion ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip over til konstruktion ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip. Udgangspunktet er skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_m B_{2m}$, hvor der gælder, at $H_0(\gamma) = e^{-2\pi i m\gamma} \cos^{2m}(\pi\gamma)$.

For $m = 1$ har vi, jævnfør (4.2.16), at

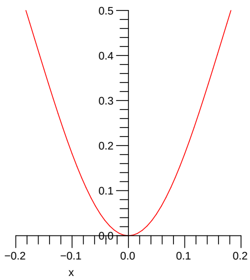
$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{U}}(\gamma)|^2 &= 1 - |H_0(\gamma)|^2 \\ &= 1 - |e^{-2\pi i\gamma} \cos^2(\pi\gamma)|^2 \\ &= 1 - \cos^4(\pi\gamma), \end{aligned}$$

og vi har, jævnfør (4.3.5), at

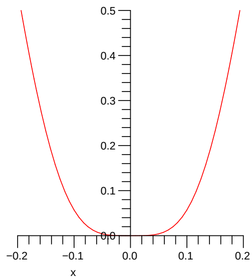
$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{O}}(\gamma)|^2 &= \theta_1(\gamma) - |H_0(\gamma)|^2 \theta_1(2\gamma) \\ &= \frac{4 - \cos(2\pi\gamma)}{3} - \cos^4(\pi\gamma) \frac{4 - \cos(4\pi\gamma)}{3}. \end{aligned}$$

Her betegner $H_{l,\mathrm{U}}$ og $H_{l,\mathrm{O}}$ funktionerne H_l fra henholdsvis Det Unitære - og Det Oblique Udvidelsesprincip. Graferne for $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{U}}(\gamma)|^2$ og $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{O}}(\gamma)|^2$ ses på henholdvis Figur 6.7(a) og 6.7(b).

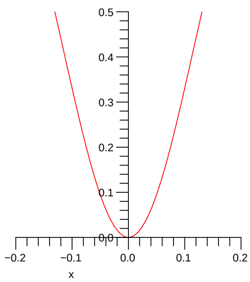
Samme udregninger kan udføres for $m = 2$, og graferne for $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{U}}(\gamma)|^2$ og $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{O}}(\gamma)|^2$ ses på henholdsvis Figur 6.7(c) og 6.7(d). Bemærk, at jo "fladere" funktionerne er omkring origo, jo flere vanishing moments har den konstruerede frame.



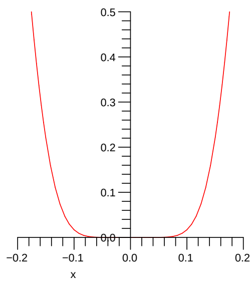
(a) $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{U}}(\gamma)|^2$ for $m = 1$.



(b) $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{O}}(\gamma)|^2$ for $m = 1$.



(c) $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{U}}(\gamma)|^2$ for $m = 2$.



(d) $\sum_{l=1}^{n} |H_{l,\mathrm{O}}(\gamma)|^2$ for $m = 2$.

Figur 6.7: Ordenen af nulpunkter i origo af $\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2$ giver antallet af vanishing moments af $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$.

Det er tydeligt, at indførelsen af θ-funktionen i Det Oblique Udvidelsesprincip korrigerer for de begrænsninger, som kravet $H^*(\gamma)H(\gamma) = I_2$ via H_0 giver på antallet af vanishing moments for den konstruerede frame i Det Unitære Udvidelsesprincip.

I den følgende sætning viser vi, at der for en tight multiwaveletframe konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip, hvor $\psi_0 = T_m B_{2m}$ er anvendt som skaleringsfunktion, altid vil være en begrænsning på approksimationsordenen.

Dette skyldes de ovenstående begrænsninger på antallet af vanishing moments.

Sætning 6.4.1
Lad $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ *være en tight frame, der er konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip med udgangspunkt i* $\psi_0 = T_m B_{2m}$*. Så har* $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ *højst approksimationsorden* 2.

Bevis:
Da $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ er konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip, så skal betingelsen $H^*(\gamma)H(\gamma) = I$ være opfyldt. Dette giver specielt følgende betingelse

$$\sum_{l=0}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = 1.$$

Det vil sige, at

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = 1 - |H_0(\gamma)|^2. \tag{6.4.1}$$

Nu vælges $\psi_0 = T_m B_{2m}$, hvilket ifølge (6.1.2) giver, at

$$H_0(\gamma) = e^{-2\pi i m\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma).$$

Hvis denne indsættes i (6.4.1), så får vi, at

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 &= 1 - \left|e^{-2\pi i m\gamma}\cos^{2m}(\pi\gamma)\right|^2 \\ &= 1 - \cos^{4m}(\pi\gamma).\end{aligned}$$

Da $1 - \cos^{4m}(\pi\gamma)$ i origo har et nulpunkt af orden 2, så haves

$$\sum_{l=1}^{n} |H_l(\gamma)|^2 = O(|\gamma|^2), \quad \gamma \to 0.$$

Det vil sige, at der gælder, at

$$H_l(\gamma) = O(|\gamma|), \quad \gamma \to 0,$$

for mindst ét l. Da antallet af vanishing moments for ψ_l, jævnfør Afsnit 4.2.1, er fastlagt ved ordenen af nulpunkter for H_l i origo, så haves det, at mindst én af funktionerne $\psi_1, \ldots, \psi_n$ kun har ét vanishing moment. Jævnfør Hovedsætning 5.3.8 kan approksimationsordenen af $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\ldots,n}$ aldrig overstige 2. ■

6.4.2 Approksimationsorden

I dette afsnit sammmenlignes approksimationsordenen af en tight frame, der er konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære - og Det Oblique Udvidelsesprincip. Skaleringsfunktionen er i begge tilfælde $T_m B_{2m}$. Approksimationsordenerne sammenlignes for tilfældene $m = 1$ og $m = 2$.

Til bestemmelse af approksimationsordenerne har vi brug for at kende approksimationsordenen for ψ_0. Den følgende sætning giver approksimationsordenen for ψ_0, når denne er en translateret B-spline.

Sætning 6.4.2
Lad der være givet en tight frame $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k\in\mathbb{Z},l=1,\dots,n}$, som er konstrueret udfra en framemultiskalaanalyse med udgangspunkt i skaleringsfunktionen $\psi_0 = T_m B_{2m}$. Så giver ψ_0 approksimationsorden $2m$.

Bevis:
Vi har ved hjælp af kommutatorrelation fra Appendiks A og Korollar B.0.11, at

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(\gamma+k) &= (\mathcal{F}T_m B_{2m})(\gamma+k) \\
&= E_{-m}(\gamma+k)(\mathcal{F}B_{2m})(\gamma+k) \\
&= e^{-i2\pi(\gamma+k)m}\left(\frac{e^{i\pi(\gamma+k)}-e^{-i\pi(\gamma+k)}}{2\pi i(\gamma+k)}\right)^{2m} \\
&= \left(e^{-i\pi(\gamma+k)}\left(\frac{e^{i\pi(\gamma+k)}-e^{-i\pi(\gamma+k)}}{2\pi i(\gamma+k)}\right)\right)^{2m} \\
&= \left(\frac{1-e^{-i2\pi(\gamma+k)}}{2\pi i(\gamma+k)}\right)^{2m}.
\end{aligned}$$

Det ses, at $\hat{\psi}_0$ har et nulpunkt af orden $2m$ for $\gamma \to 0$ for hvert $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Jævnfør Korollar 5.3.6 har vi altså, at ψ_0 giver approksimationsorden $2m$. ■

Ved hjælp af ovenstående Sætning sammenlignes nu approksimationsordenen af de tight multiwaveletframes, der er konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære Udvidelsesprincip i Afsnit 6.2 og Det Oblique Udvidelsesprincip i Afsnit 6.3.

6.4.3 Eksempel med $\psi_0 = T_1 B_2$.

I dette tilfælde er $\psi_0 = T_1 B_2$, så ifølge Sætning 6.4.2 giver ψ_0 approksimationsorden 2.

Først betragter vi $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,2}$, som blev konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip i Afsnit 6.2.3. Ifølge beviset for Sætning 6.4.1 har denne frame 1 vanishing moment, og da ψ_0 giver approksimationsorden 2, så har vi, jævnfør Hovedsætning 5.3.8, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,2}$ har approksimationsorden

$$\min\{2, 2 \cdot 1\} = 2.$$

Betragt nu $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,2}$, som blev konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip i Afsnit 6.3.1. Det kan vises, at H_2 og H_1 fra (6.3.1) og (6.3.2) begge har nulpunkter af orden 2 i origo, hvorved ψ_1 og ψ_2 begge har 2 vanishing moments. Det vil sige, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,2}$, jævnfør Hovedsætning 5.3.8, har approksimationsorden

$$\min\{2, 2 \cdot 2\} = 2.$$

Det ses, at de to tight multiwaveletframes har samme approksimationsorden, men at vi har opnået ét vanishing moment mere ved at anvende Det Oblique Udvidelsesprincip fremfor Det Unitære Udvidelsesprincip.

6.4.4 Eksempel med $\psi_0 = T_2 B_4$.

I dette tilfælde er $\psi_0 = T_2 B_4$, så ifølge Sætning 6.4.2 giver ψ_0 approksimationsorden 4.

Først betragter vi $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,\ldots,4}$, som blev konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip i Afsnit 6.2.4. Ifølge beviset for Sætning 6.4.1 har denne frame 1 vanishing moment, og da ψ_0 giver approksimationsorden 4, så har vi, jævnfør Hovedsætning 5.3.8, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,\ldots,4}$ har approksimationsorden

$$\min\{4, 2 \cdot 1\} = 2.$$

Betragt nu $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,2,3}$, som blev konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip i Afsnit 6.3.2. Det kan vises, at H_1, H_2 og H_3 fra henholdsvis (6.3.3), (6.3.4) og (6.3.5) alle har nulpunkter af orden 4 i origo, hvorved ψ_1, ψ_2

og ψ_3 alle har 4 vanishing moments. Det vil sige, at $\{D^j T_k \psi_l\}_{j,k \in \mathbb{Z}, l=1,2}$ har approksimationsorden

$$\min\{4, 2 \cdot 4\} = 4.$$

Dermed har vi, at approksimationsordenen af den tight multiwaveletframe, der er konstrueret ved hjælp af Det Oblique Udvidelsesprincip, er 4, hvor den blot var 2 ved konstruktionen ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip. Desuden er antallet af vanishing moments øget fra 1 til 4.

6.5 Delkonklusion

Vi har i dette kapitel konstrueret tight multiwaveletframes ved brug af henholdsvis Det Unitære - og Det Oblique Udvidelsesprincip. Dette har vi gjort med udgangspunkt i de to skaleringsfunktioner:

$$\psi_0 = T_1 B_2, \quad \text{og} \quad \psi_0 = T_2 B_4.$$

På Figur 6.7 er det grafisk blevet illustreret, hvorledes antallet af vanishing moments for generatorerne øges, når Det Oblique Udvidelsesprincip anvendes fremfor Det Unitære Udvidelsesprincip. Desuden har vi vist, at der generelt er en begrænsning på approksimationsordenen af tight multiwaveletframes, når disse er konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip givet, at skaleringsfunktionen vælges som en translateret B-spline.

I Afsnit 6.4.2 har vi anvendt Hovedsætning 5.3.8 til at sammenligne approksimationsordenerne af de respektive frames ved hjælp af antallet vanishing moments. Vi kan konkludere, at konstruktion via de to udvidelsesprincipper giver samme approksimationsorden i eksemplet med $\psi_0 = T_1 B_2$, dog opnås et højere antal vanishing moments ved anvendelse af Det Oblique Udvidelsesprincip. Når skaleringsfunktionen vælges som $T_2 B_4$, så øges approksimationsordenen fra to til fire, når Det Oblique Udvidelsesprincip anvendes fremfor Det Unitære Udvidelsesprincip.

Dermed har vi illustreret den større fleksibilitet med hensyn til vanishing moments og approksimationsorden ved Det Oblique Udvidelsesprincip, som blev diskuteret i Kapitel 4.

Kapitel 7

Konklusion

I denne rapport har vi undersøgt, hvorledes man kan konstruere tight multiwaveletframes ved hjælp af multiskalaprincipper.

Vi har bevist de to udvidelsesprincipper: Det Unitære Udvidelsesprincip og Det Oblique Udvidelsesprincip, som begge er redskaber til konstruktion af tight multiwaveletframes. De to udvidelelsesprincipper integrerer begge multiskalaprincippet, hvorfor der opnås beregningmæssige fordele ved de konstruerede multiwaveletframes. Historisk set blev Det Unitære Udvidelsesprincip bevist først, men som vi har vist i rapporten, er der visse restriktioner på de tight multiwaveletframes, som er konstrueret ved hjælp af dette.

Èn af restriktionerne ved tight multiwaveletframes, der er konstrueret ved brug af Det Unitære Udvidelsesprincip, er, at det er begrænset, hvor højt et antal vanishing moments, der kan opnås. Vi har vist, at hvis skaleringsfunktionen vælges som en B-spline, så kan antallet af vanishing moments af den konstruerede tight multiwaveletframe aldrig blive højere end én.

Vi har vist, at der er en tæt sammenhæng mellem antallet af vanishing moments hos den konstruerede tight multiwaveletframe og dennes approksimationsorden. Approksimationsordenen for en tight multiwaveletframe er et udtryk for, hvor præcist denne tight multiwaveletframe kan rekonstruere en given funktion $f \in W_2^m$ med et endeligt antal koefficienter. Begrænsningen af antallet af vanishing moments hos tight multiwaveletframes konstrueret ved hjælp af Det Unitære Udvidelsesprincip giver således naturligt en begrænsning af approksimationsordenen. I eksemplet med B-splines har vi vist, at begrænsningen i antallet af vanishing moments giver, at approksimationsordenen af den konstruerede tight multiwaveletframe ikke kan overstige to. Approksimationsordenen er en relevant egenskab at beskæftige sig med i forhold til praktiske anvendelser.

Dette skyldes, at det ved implementering ikke er muligt at anvende uendelig summation.

Frames konstrueret ved brug af Det Unitære Udvidelsesprincip har således visse mangler, hvilket historisk har givet motivation for at søge efter et mere fleksibelt redskab til konstruktion af tight multiwaveletframes. Resultatet af dette ønske om fleksibilitet blev Det Oblique Udvidelsesprincip, som er en teoretisk videreudvikling af Det Unitære Udvidelsesprincip. De to udvidelsesprincipper er ækvivalente, men Det Oblique Udvidelsesprincip giver umiddelbart tight multiwaveletframes, som ikke naturligt ville kunne konstrueres via Det Unitære Udvidelsesprincip. Friheden i valget af θ-funktionen i Det Oblique Udvidelsesprincip gør, at det er muligt at konstruere tight multiwaveletframes, som opfylder nogle specifikke krav. Således er det via Det Oblique Udvidelsesprincip muligt at konstruere tight multiwaveletframes, der er i besiddelse af eksempelvis et højt antal vanishing moments.

Eksemplet omhandlende B-splines illustrerer problematikken omkring approksimationsordenen af en given tight multiwaveletframe konstrueret ved hjælp af henholdsvis Det Unitære - og Det Oblique Udvidelsesprincip, når der tages udgangspunkt i den samme skaleringsfunktion.

Appendiks A

Operatorer på $L^2(\mathbb{R})$

Dette kapitel er baseret på [Chr03].

I kapitlet introduceres forskellige operatorer på $L^2(\mathbb{R})$, som anvendes i rapporten, og der vises egenskaber for disse operatorer.

Definition A.0.1 (Fouriertransformation)
Fouriertransformationen $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ *defineres for* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *ved*

$$(\mathcal{F}f)(\gamma) = \hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\gamma}dx.$$

For $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kan det vises, at $\|\hat{f}\| = \|f\|$, hvorved $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Vi kan derfor betragte restriktionen

$$\mathcal{F}_{L^1 \cap L^2} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Hvis vi udstyrer $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ med L^2-normen, så er $\|\mathcal{F}_{L^1 \cap L^2} f\| = \|f\|$. Dermed er $\mathcal{F}_{L^1 \cap L^2}$ en begrænset, og dermed kontinuert, operator på $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Da $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ er en tæt delmængde af $L^2(\mathbb{R})$, så kan vi anvende [Ped00, s. 25] til at udvide $\mathcal{F}_{L^1 \cap L^2}$ til en unitær operator $\mathcal{F}_{L^2}$ på hele $L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_{L^2} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}_{L^2} f = \hat{f}.$$

I rapporten skriver vi $\mathcal{F}$ for $\mathcal{F}_{L^2}$.

Definition A.0.2 (Translations-, modualtions- og dilationsoperator)
(i) Translationsoperatoren $T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *er givet ved*

$$(T_a f)(x) = f(x-a), \quad \forall\, x, a \in \mathbb{R}.$$

(ii) Modulationsoperatoren $E_b : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ er givet ved

$$(E_b f)(x) = f(x)e^{2\pi ibx}, \quad \forall\, x, b \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dilationsoperatoren $D_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ er givet ved

$$(D_a f)(x) = |a|^{-1/2} f(x/a), \quad \forall\, x, a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Bemærk, at modulationsoperatoren også anvendes som funktion af x således, at $E_b(x) = e^{2\pi ibx}$.

Bemærk desuden, at dilationsoperatoren ofte anvendes i det tilfælde, hvor $a = 1/2$, hvorfor denne betegnes D:

$$(D_{1/2} f)(x) := (Df)(x).$$

Når D anvendes j gange betegnes dette D^j.

Lemma A.0.3
Lad T_a, D og E_b være givet som i Definition A.0.2. Så gælder, at T_a, D og E_b er unitære operatorer.

Bevis:
Det vises her, at T_a er en unitær operator.

Lad f, $g \in L^2(\mathbb{R})$. Så gælder der, at

$$\begin{aligned} \langle T_a f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x+a)}dx \\ &= \langle f, T_{-a} g \rangle. \end{aligned}$$

Dermed har vi, at $T_a^* = T_{-a}$. Vi har yderligere, at T_a er en invertibel operator med $T_a^{-1} = T_{-a}$, hvormed det gælder, at $T_a^* = T_a^{-1}$. Dermed er $T_a T_a^* = T_a^* T_a = I$, og T_a er unitær.

På tilsvarende måde kan det vises, at D og E_b er unitære operatorer. ■

Lemma A.0.4
Lad operatorerne T_a, D og E_b være givet, som i Definition A.0.2. Så gælder følgende kommutatorrelationer:

(i) $T_k D^j = D^j T_{2^j k}, \quad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$

(ii) $D^j T_k = T_{2^{-j}k} D^j, \quad \forall\, j,k \in \mathbb{Z}.$

(iii) $\mathcal{F}T_a = E_{-a}\mathcal{F}, \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}.$

(iv) $\mathcal{F}E_a = T_a\mathcal{F}, \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}.$

(v) $\mathcal{F}D = D^{-1}\mathcal{F}.$

Bevis:
Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Først vises punkt *(i)*. Vi har, at

$$\begin{aligned}
(T_k D^j f)(x) &= (T_k 2^{j/2} f)(2^j x) \\
&= 2^{j/2} f(2^j(x-k)) \\
&= 2^{j/2} f(2^j x - 2^j k) \\
&= D^j f(x - 2^j k) \\
&= (D^j T_{2^j k} f)(x).
\end{aligned}$$

Punkt *(ii)* vises på tilsvarende måde.

Nu vises punkt *(iii)*. Vi har, at

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}T_a f)(\gamma) &= (\mathcal{F}f)(\gamma - a) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma - a) e^{-2\pi i \gamma \xi} d\gamma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) e^{-2\pi i (\gamma + a)\xi} d\gamma \\
&= e^{-2\pi i a \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) e^{-2\pi i \gamma \xi} d\gamma \\
&= (E_{-a}\mathcal{F}f)(\gamma).
\end{aligned}$$

Punkt *(iv)* og *(v)* vises tilsvarende. ■

Lemma A.0.5
Lad D være givet, som i Definition A.0.2 og lad $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Så gælder der, at

$$\langle f, D^j g \rangle = \langle D^{-j} f, g \rangle.$$

Bevis:
Lad $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Så har vi, at

$$\begin{aligned}
\langle f, D^j g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{(D^j g)(x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)2^{j/2}\overline{g(2^j x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j/2}f(x)2^j\overline{g(2^j x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j/2}f(2^{-j}y)\overline{g(y)}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} D^{-j}f(y)\overline{g(y)}dy \\
&= \langle D^{-j}f, g\rangle.
\end{aligned}$$

■

Definition A.0.6 (Periodisering)
Periodiseringen af en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ defineres ved

$$(\mathcal{P}f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k).$$

Det ses, at $\mathcal{P}f$ er en 1-periodisk funktion. Bemærk, at for $f \in L^1(\mathbb{R})$ har vi, at

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x+k)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty, \tag{A.0.1}$$

hvormed $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$ er absolut konvergent for $x \in \mathbb{R}$. Fra ligning (A.0.1) har vi således, at $\mathcal{P}f \in L^1(\mathbb{T})$.

Definition A.0.7 (Ortogonal projektion)
Lad V være et lukket underrum af $\mathcal{H}$. Den ortogonale projektionsoperator $P_V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er givet ved

$$\begin{aligned}
P_V f &= f, \quad \text{når} \quad f \in V, \\
P_V f &= 0, \quad \text{når} \quad f \in V^{\perp}.
\end{aligned}$$

Lemma A.0.8
En ortogonal projektionsoperator $P_V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er selvadjungeret.

Bevis:
Da $H = V \oplus V^{\perp}$, kan vi definere

$$u = u_V + u_{V^\perp} \in \mathcal{H},$$
$$w = w_V + w_{V^\perp} \in \mathcal{H},$$

hvor $u_V \in V$ og $u_{V^\perp} \in V^{\perp}$, og tilsvarende for w. Da gælder, at

$$\begin{aligned} \langle u, P_V w \rangle &= \langle u_V + u_{V^\perp}, w_V \rangle \\ &= \langle u_V, w_V \rangle \\ &= \langle u_V, w_V + w_{V^\perp} \rangle \\ &= \langle P_V u, w \rangle, \end{aligned}$$

hvorved P_V er selvadjungeret. ■

Appendiks B

B-splines

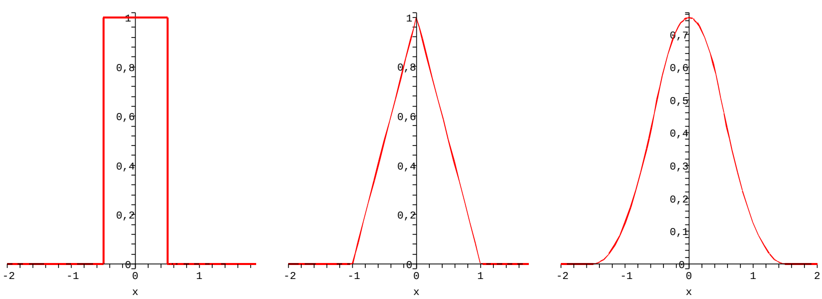
Dette kapitel er baseret på [Chr03]. I kapitlet introduceres B-splines.

Definition B.0.9 **(B-spline)**
B-splines defineres induktivt. Lad $B_1(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$, og definer for $n \in \mathbb{N}$ funktionerne

$$B_{n+1}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} B_n(x-t)B_1(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} B_n(x-t)dt.$$

B_n kaldes en B-spline af orden n.

De tre første B-splines ses på Figur B.1.



(a) $B_1(x)$. (b) $B_2(x)$. (c) $B_3(x)$.

Figur B.1: *B-splines for $n = 1, 2, 3$.*

Nogle af egenskaberne ved B-splines er givet i følgende sætning.

Sætning B.0.10
Givet $n \in \mathbb{N}$, så har B_n følgende egenskaber:

(i) *Hvis $n \geq 2$, så haves det, at $B_n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$.*

(ii) *supp $(B_n) = [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$, og $B_n > 0$ på $]-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}[$.*

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} B_n(x)dx = 1$, *og* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_n(x-k) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(iv) *For enhver kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ haves, at*

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n(x)f(x)dx = \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

(v) *Hvis n er lige, så er restriktionen af B_n til hvert af intervallerne $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, et polynomium af grad højst $n-1$. Hvis derimod n er ulige, så er restriktionen af B_n til hvert af intervallerne $[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$, et polynomium af grad højst $n-1$.*

Ovenstående sætning kan vises induktivt.

Følgende korollar angiver Fouriertransformen af B_n.

Korollar B.0.11
Fouriertransformen af B_n er givet ved

$$(\mathcal{F}B_n)(\gamma) = \left(\frac{e^{\pi i\gamma} - e^{-\pi i\gamma}}{2\pi i\gamma}\right)^n = \left(\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}\right)^n.$$

Bevis:
Ved brug af Sætning B.0.10 *(iv)* fås, at

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}B_n)(\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_n(x)e^{-2\pi ix\gamma}dx \\
&= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} e^{-2\pi i(x_1+\cdots+x_n)\gamma}dx_1\cdots dx_n \\
&= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ix\gamma}dx\right)^n \\
&= \left(\frac{e^{\pi i\gamma} - e^{-\pi i\gamma}}{2\pi i\gamma}\right)^n,
\end{aligned}$$

hvorved den første lighed i sætningen er vist.

Eulers formel giver

$$\left(\frac{e^{\pi i\gamma} - e^{-\pi i\gamma}}{2\pi i\gamma}\right)^n = \left(\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}\right)^n,$$

hvorved den sidste lighed er vist. ■

Litteratur

[Chr03] Ole Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases.* Birkhäuser, 2003.

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Capital City Press, 1992.

[dBDR94] Carl de Boor, Ronald A. DeVore, and Amos Ron. Approximation from Shift-Invariant Subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 341:787–806, 1994.

[DHRS03] Ingrid Daubechies, Bin Han, Amos Ron, and Zuowei Shen. Framelets: MRA-based Constructions of Waveletframes. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 14:1–46, 2003.

[Grö01] Karlheinz Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis.* Birkhäuser, 2001.

[JP01] K. Jetter and G. Plonka. A Survey on L_2-Approximation Order From Shift-invariant Spaces. *Multivariate Approximation and Applications*, pages 73–111, 2001.

[JZ95] Kurt Jetter and Ding-Xuan Zhou. Order of Linear Approximation from Shift-Invariant Spaces. *Constructive Approximation*, 11:423–438, 1995.

[Ped00] Michael Pedersen. *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering.* Chapman and Hall/CRC, 2000.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Co., 3rd edition, 1987.

[SF73] G. Strang and G. Fix. A Fourier analysis of the finite element variational method. *Constructive Aspects of Functional Analysis*, pages 793–840, 1973.

[Wad00] William R. Wade. *An Introduction to Analysis.* Prentice Hall, 2nd edition, 2000.