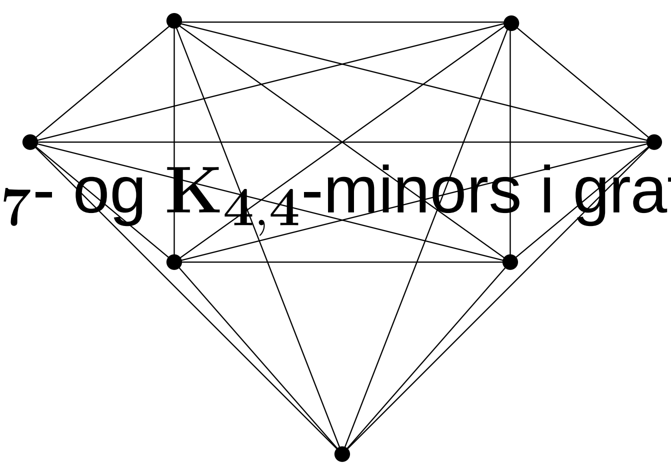
Aalborg Universitet
Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Institut for Matematiske Fag

K_7- og $K_{4,4}$-minors i grafer



Aalborg Universitet
Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Institut for Matematiske Fag

Titel:
K_7- og $K_{4,4}$-minors i grafer.

Projekt:
Mat6, speciale

Projektgruppe:
G4-109a

Gruppemedlemmer:
Birgitte Taagaard

Vejleder:
Leif Kjær Jørgensen

Oplag: 9

Sideantal: 105

Synopsis:
Denne rapport omhandler Hadwigers formodning, der siger, at enhver k-kromatisk graf har en K_k-minor, samt den svage Hadwiger formodning, som siger, at enhver k-kromatisk graf enten har en K_k-minor eller en $K_{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor,\lceil\frac{k+1}{2}\rceil}$-minor. Vi viser, at enhver graf med n punkter og mindst $5n-14$ kanter kan sammentrækkes til K_7. Desuden bestemmes, hvilke grafer der har præcis $5n-15$ kanter, og som ikke kan sammentrækkes til K_7. Disse grafer viser sig at være grafer isomorfe med $K_{2,2,2,3}$ og MP_2-cockader. Dernæst vises, at enhver 4-sammenhængende graf, som har n punkter og mindst $4n-7$ kanter, enten er en K_7 eller har en $K_{4,4}$-minor. Dette resultat benyttes til at vise, at enhver 7-kromatisk graf enten har en K_7-minor eller en $K_{4,4}$-minor, svarende til den svage Hadwiger formodning for $k=7$. Desuden bestemmes egenskaber ved grafer på formen E_3+H, som er kant-maksimale mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7.

Forord

Denne rapport er udarbejdet i perioden fra den 1. februar til den 16. juni af en studerende på Mat6-semesteret ved Aalborg Universitet, Institut for Matematiske fag.

En fuldstændig liste over kilder findes sidst i rapporten på side 103, og der henvises til disse vha. kantede paranteser $[\,\cdot\,]$.

Jeg vil gerne rette en stor tak til specialevejleder Leif Kjær Jørgensen for hjælp til projektet.

Aalborg, 16. juni, 2005

Birgitte Taagaard

Indhold

Kapitel 1

Indledning

Denne rapport omhandler Hadwigers formodning (formodning 1.1) fra 1943.

Formodning 1.1 Hadwigers formodning
For $k \geq 1$ gælder, at enhver k-kromatisk graf har en K_k-minor.

Formodningen er på nuværende tidspunkt vist for $k \leq 6$. Hadwiger viste selv rigtigheden af formodningen for $k \leq 4$. For $k = 5$ og for $k = 6$ er den vist at være ækvivalent med 4-farvesætningen af hhv. Wagner [W37] og Robertson, Seymour og Thomas [RST93]. I denne rapport beskæftiger vi os med tilfældet hvor $k = 7$.

På Mat5 semesteret (se http://www.cs.aau.dk/library/cgi-bin/detail.cgi?id=1110402987 for yderligere information) beskæftigede jeg mig med Hadwigers formodning for $k = 5$ og $k = 8$ samt Hadwigers formodning for kantgrafer til multigrafer uden løkker, og det var derfor et naturligt valg at forsætte indenfor området. I samarbejde med min vejleder besluttede jeg at se på Hadwigers formodning samt den svage Hadwiger formodning (formodning 1.2), som er formuleret af Chartrand, Geller og Hedetniemi [CGH71] og Woodall [WD90], for $k = 7$.

Formodning 1.2 Den svage Hadwiger formodning
For $k \geq 1$ gælder, at enhver k-kromatisk graf har en K_k-minor eller en $K_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$-minor.

Desuden forsøgte jeg selv at bestemme nogle generelle egenskaber ved grafer på formen E_3+H, som er kant-maksimale mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7. Dette viste sig dog hurtigt, at være yderst tidskrævende og svært idet der blandt andet er et stort antal tilfælde som skal undersøges; derfor er undersøgelsen ikke færdig gjordt.

I kapitel 2 vises, at enhver graf med n punkter og mindst $5n-14$ kanter kan sammentrækkes til K_7. Desuden bestemmes, hvilke grafer med n punkter og præcis $5n-15$ kanter der ikke kan sammentrækkes til K_7.
I kapitel 3 vises, at enhver 4-sammenhængende graf med n punkter og mindst $4n-7$ kanter enten er en K_7 eller har en $K_{4,4}$-minor.
I kapitel 4 vises, at enhver 7-kromatisk graf enten har en K_7-minor eller en $K_{4,4}$-minor.
I kapitel 5 bestemmes nogle egenskaber ved grafer på formen E_3+H, som er kant-maksimale mht. ikke at have en K_7-minor.

1.1 Notation

Graferne i denne rapport er endelige simple grafer, såfremt andet ikke er nævnt. Graferne benævnes G eller $G=(V,E)$ for grafen G med punktmængde V og kantmængde E. Yderligere benyttes notationen $V(G)$ om punktmængden til grafen G og $E(G)$ om kantmængden. Antallet af punkter i en punktmængde V benævnes $|V|$ og tilsvarende benævnes antallet af kanter i en kantmængde E med $|E|$.

Komplementærgrafen til en graf G benævnes $\overline{G}$. Den komplette graf på n punkter benævnes K_n og den komplette graf K_n minus en eller to kanter benævnes hhv. K_n^- og K_n^{--}. Den komplette 2-delte graf med n punkter i den ene partition og

m punkter i den anden benævnes $K_{n,m}$. Tilsvarende benyttes notationen $K_{k,l,n,m}$ om en 4-delt komplet graf med hhv. k, l, n og m punkter i de 4 partitioner. Grafen E_i er grafen bestående af i isolerede punkter, dvs. en graf hvor $|V| = i$ og $E = \emptyset$.

I en graf $G = (V, E)$ benævnes valensen af et punkt $v \in V$ med deg(v) eller deg$_G(v)$. Om maksimum- og minimumvalensen i en graf G benyttes hhv. notationen $\Delta(G)$ og $\delta(G)$.

For et punkt $v \in V$ benyttes notationen $N(v)$ eller $N_G(v)$ om delgrafen af G induceret af naboerne til v. Hvis $K \subseteq V$, benyttes notationen $N(K)$ eller $N_G(K)$ om delgrafen af G induceret af naboerne til K i $V - K$.

I en graf $G = (V, E)$ benævnes delgrafen af G induceret af en punktmængde $W \subseteq V$ med $G[W]$.

For to disjunkte grafer G, H bruges notationen $G + H$ om grafen med punktmængde $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ og kantmængde

$$E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{e = vu \,|\, v \in V(G), u \in V(H)\}.$$

For to ikke nødvendigvis disjunkte grafer G, H benyttes notationen $G \cup H$ om grafen med punktmængde $V(G) \cup V(H)$ og kantmængde $E(G) \cup E(H)$.

Vi vil benytte notationen $G - e$ for $e \in E$ om grafen $G = (V, E)$ uden kanten e, dvs. grafen med punktmængde V og kantmængde $E - e$. Tilsvarende benyttes notationen $G \cup e$ om grafen med punktmængde V og kantmængde $E + e$ for $e \notin E$. Med $G - \{v\}$ for $v \in V$ menes grafen med punktmængde $V - \{v\}$ og kantmængde E minus kanter incidente med v. Hvis $V' \subseteq V$, benyttes notationen $G - V'$ om grafen G uden punkterne V' og uden kanter incidente med mindst et punkt i V'.

Hvis $e = xy \in E$, benyttes notationen G/e eller G/xy om grafen, som fås fra grafen G ved at sammentrække kanten $e = xy$.

Kapitel 2

Grafer, som kan sammentrækkes til K_7

Mader [M68] beviste, at for $p \leq 7$ gælder, at enhver graf med $n \geq p$ punkter og mindst $n\,(p-2) - \binom{p-1}{2} + 1$ kanter kan sammentrækkes til K_p. Vi vil i dette kapitel bestemme de ekstremale grafer svarende til Maders sætning for $p = 7$, dvs. hvilke grafer, som har $n \geq 7$ punkter og præcis $n\,(p-2) - \binom{p-1}{2} = 5n - 15$ kanter, der ikke kan sammentrækkes til K_7.

Kapitlet bygger på artiklen "Extremal graphs for contraction to K_7" af Leif Kjær Jørgensen [KJ88].

2.1 MP_i-cockader

Antag, at $G = (V, E)$ er en sammenhængende graf og $V_1 \subseteq V$ en punktsnitmængde i G. Så kan vi fremstille G som $G = G_1 \cup G_2$, hvor G_1 og G_2 er sammenhængende ægte delgrafer af G og $G_1 \cap G_2 = G[V_1]$. Hvis vi yderligere har, at V_1 inducerer en komplet graf og G_1 eller G_2 også har en punktsnitmængde, som inducerer en komplet graf, kan vi skrive $G_i = G_3 \cap G_4$ for $i = 1$ eller

$i = 2$, hvor G_3 og G_4 er sammenhængende og $G_3 \cap G_4$ er en komplet delgraf af G. Vi kan fortsætte på denne måde indtil ingen af delgraferne $G_1, G_2, \cdots, G_r$ af G indeholder en punktsnitmængde, der inducerer en komplet graf. Graferne $G_1, G_2, \cdots, G_r$ kaldes simplicial summands af G.

Definition 2.1 MP_i**-cockader**
For $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ defineres en MP_i-cockade som en $(i+3)$-sammenhængende graf, hvis simplicial summands er isomorfe med en af følgende to grafer

- *En 4-sammenhængende maksimal planar graf $G = (V, E)$ hvortil der er tilføjet i punkter samt en kant mellem ethvert af disse punkter og ethvert andet punkt i grafen, dvs. grafen med punktmængde*

  $$V \cup \{v_1, \cdots, v_i\}$$

  og kantmængde

  $$E \cup \{v_j u \,|\, u \in V, 1 \leq j \leq i\} \cup \{v_j v_k \,|\, j, k \in \{1, \ldots, i\}, j \neq k\}.$$

- *K_4 hvortil der er tilføjet i punkter samt kanter mellem ethvert af disse punkter og ethvert andet punkt i grafen, dvs. en K_{4+i}.*

Hvis G_1 og G_2 er disjunkte MP_i-cockader med komplette delgrafer K_{i+3} udspændt af hhv. $x_1, \cdots, x_{i+3}$ og $y_1, \cdots, y_{i+3}$, så er grafen, som fås fra $G_1 \cup G_2$ ved at identificere x_j med y_j for $j = 1, \ldots, i+3$ en MP_i-cockade.

I en MP_i-cockade kaldes grafens simplicial summands også for cockade-elementer og de cockade-elementer, som højst har en K_{i+3} tilfælles med de resterende cockade-elementer, kaldes ende-elementer. Det bemærkes, at enhver MP_i-cockade har mindst et ende-element.

Lemma 2.2
Hvis $G = (V, E)$ er en MP_2-cockade, så er $|E| = 5|V| - 15$.
Bevis:

Lemmaet bevises ved induktion på antallet r af cockade-elementer i en MP_2-cockade $G = (V, E)$. For $r = 1$ er G enten en K_{2+4} eller en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet 2 punkter på måden beskrevet i definition 2.1. Hvis $G = K_6$ er $|E| = 15 = 5 \cdot 6 - 15$, og hvis G er en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet 2 punkter samt $2(|V|-2)+1$ kanter, er $|E| = (3(|V|-2)-6)+2(|V|-2)+1 = 5|V|-15$, eftersom en maksimal planar graf med n punkter har $3n-6$ kanter. Antag nu, at lemmaet gælder for enhver MP_2-cockade med færre end $r > 1$ cockade-elementer. Lad $G = (V, E)$ være en MP_2-cockade med r cockade-elementer, og lad G_1 være et ende-element i G. Så er G_1 enten en K_6 eller en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet to punkter på måden beskrevet i definition 2.1. Antag først, at $G_1 = K_6$ og $V(K_6) = \{v_1, \cdots, v_6\}$, hvor v_6 er punktet i G_1, som ikke er indeholdt i et andet cockade-element i G. Lad grafen G' være grafen, som fås fra G ved, at fjerne v_6. Så har G' $r-1$ cockade-elementer og jf. induktionshypotesen er $|E(G')| = 5(|V|-1) - 15$. Heraf følger, at $|E| = |E(G')| + 5 = 5|V| - 15$, idet $\deg_G(v_6) = 5$. Antag nu, at $G_1 \neq K_6$. Så er G_1 en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet 2 punkter og kanter mellem ethvert punkt i grafen og disse to punkter, dvs. G_1 har $3(|V(G_1)| - 2) - 6 + 2(|V(G_1)| - 2) + 1 = 5|V(G_1)| - 15$ kanter. Lad $G = G_1 \cup G_2$, hvor $G_1 \cap G_2 = K_5$. Da G har r cockade-elementer har G_2 $r-1$ cockade-elementer og ifølge induktionsantagelsen har G_2 præcis $5|V(G_2)| - 15$ kanter. Da $|V| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 5$ får vi, at

$$
\begin{aligned}
|E| &= |E(G_1)| + |E(G_2)| - |E(K_5)| \\
&= 5|V(G_1)| - 15 + 5|V(G_2)| - 15 - 10 \\
&= 5(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 5) - 15 \\
&= 5|V| - 15.
\end{aligned}
$$

Vi har dermed bevist, at enhver MP_2-cockade med n punkter har præcis $5n - 15$ kanter.

□

Følgende lemma bringes her uden bevis idet der henvises til [KJ88].

Lemma 2.3
Lad $G = (V, E)$ være en graf og lad x, y være punkter i G, hvor $xy \in E$ og $|N(x) \cap N(y)| = 2$. Hvis G/xy er en MP_0-cockade, så er G enten en MP_0-cockade eller har en K_5-minor.

2.2 Kant-maksimale grafer, der ikke kan sammentrækkes til K_7

Vi får brug for en række resultater vedrørende grafer, der er kant-maksimale mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7.

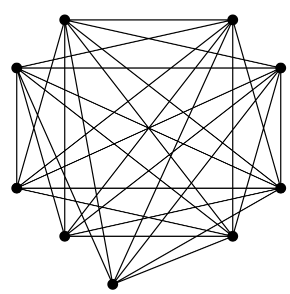
Definition 2.4 Kant-maksimal
En graf $G = (V, E)$ siges, at være kant-maksimal mht. en egenskab Q, hvis G har egenskaben Q og der for ethvert par af punkter $u, v \in V$, hvor $uv \notin E$ gælder, at $G \cup \{uv\}$ ikke har egenskaben Q.

Lemma 2.5
En MP_2-cockade er kant-maksimal mht. ikke at have en K_7-minor.
Bevis:
Lad $G = (V, E)$ være en MP_2-cockade og lad $G_1, \cdots, G_r$ være cockade-elementerne af G. Hvert cockade-element er enten en K_6 eller en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet to punkter som beskrevet i definition 2.1. Hvis G kun består af et cockade-element, som er en 4-sammenhængende maksimal planar graf, er G kant-maksimal mht. ikke at have en K_7 minor. Dette ses ved at lade $u, v \in V$ være de to punkter af valens $|V| - 1$ i G. Så er $G - \{u, v\}$ en maksimal planar graf. En maksimal planar graf er kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_5 og følgeligt er G kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7. Hvis $G = K_6$ er lemmaet trivielt opfyldt. Antag, at

lemmaet gælder for MP_2-cockader med færre end $r > 1$ cockade-elementer, og lad H være en MP_2-cockade med r cockade-elementer. Lad H' være et endeelement i H, og lad $x_1, \cdots, x_5$ være punkterne i H', som H' har tilfælles med et andet cockade-element. Så er $H'[\{x_1, \cdots, x_5\}] = H[\{x_1, \cdots, x_5\}] = K_5$. Grafen $H - (H' - \{x_1, \cdots, x_5\})$ er en MP_2-cockade med $r-1$ cockade-elementer og er derfor jf. induktionsantagelsen kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7. Da H' enten er en K_6 eller en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet 2 punkter på måden beskrevet tidligere, er H' kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7. Dvs. tilføjes en kant til H' eller $H - (H' - \{x_i\})$, kan H sammentrækkes til K_7. Tilføjes en kant mellem H' og resten af H, er der to muligheder. Enten kan vi ved sammentrækning af H' eller $H - (H' - \{x_1, \cdots, x_5\})$ tilføje en kant til hhv. H' eller $H - (H' - \{x_1, \cdots, x_5\})$ og vi får dermed en graf, som kan sammentrækkes til K_7, eller vi får ved tilføjningen af kanten en graf, som indeholder en K_7.

□

Grafen $K_{2,2,2,3}$, som omtales i næste lemma (lemma 2.6) ses på figur 2.1.



Figur 2.1: Den komplette 4-delte graf $K_{2,2,2,3}$.

Lemma 2.6
Lad $G = (V, E)$ være en graf, hvor $|V| \geq 6$, $|E| = 5|V| - 15$ og $\delta(G) \geq 6$, som ikke kan sammentrækkes til K_7. Hvis $x, y \in V$, hvor $|N(x) \cap N(y)| = 4$ så gælder, at $G/xy \neq K_{2,2,2,3}$.

Lemma 2.6 bevises ved, at undersøge samtlige mulige tilfælde.

Det bemærkes, at $K_{2,2,2,3}$ er kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7. Dette ses ved, at $|V(K_{2,2,2,3})| = 9$, dvs. vi kan højst sammentrække 2 kanter og $K_{2,2,2,3}$ er isomorf med K_9 minus 6 kanter hvoraf kun 3 er incidente.

2.3 Resultater vedrørende maksimale planare grafer

Vi får brug for en række resultater vedrørende planare grafer, der henvises i den forbindelse til [CL96] og [DR96] mht. beviser for reslutaterne.

Lemma 2.7
Lad $G = (V, E)$ være en maksimal planar graf. Så gælder, at enhver minimal punktsnitmængde i G udspænder en kreds. Yderligere gælder, at hvis $|V| > 3$, så er G 3-sammenhængende.

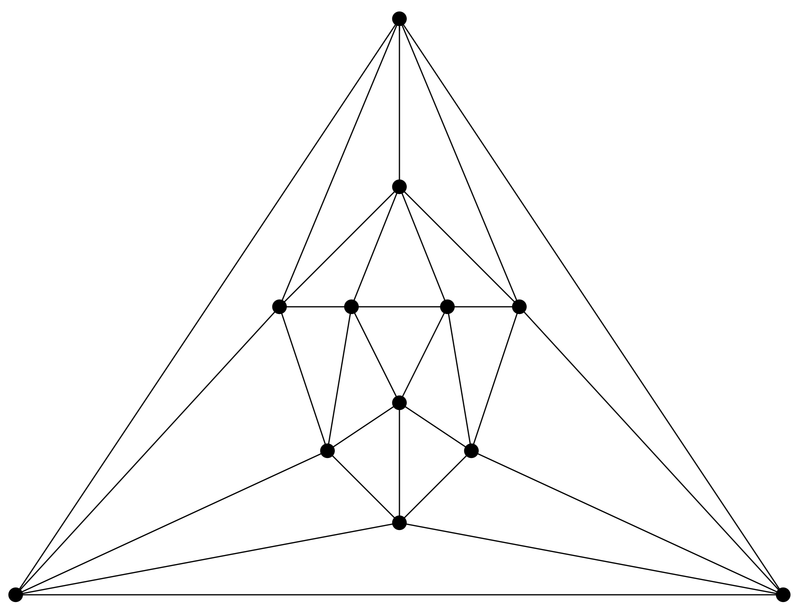
Lemma 2.8
Lad $G = (V, E)$ være en 4-sammenhængende maksimal planar graf og lad $x \in V$. Så inducerer $N(x)$ en kreds, og $G - (N(x) \cup \{x\})$ er ikke-tom og sammenhængende.

Lemma 2.9
Lad $G = (V, E)$ være en 4-sammenhængende maksimal planar graf, og lad $x, y \in V$, hvor $xy \in E$. Så har x og y præcis 2 fælles naboer.

2.4 Sammentrækning til komplette grafer

Mader [M68] beviste, at der for en graf $G = (V, E)$, hvor $\delta(G) \geq 5$, gælder, at G har en minor isomorf med K_6 minus en kant eller en minor isomorf med icosahedron grafen, se figur 2.2. Næste lemma følger direkte af Maders sætning, da icosahedron grafen har 12 punkter.

Lemma 2.10
Lad $G = (V, E)$ være en graf med $|V| \leq 11$. Hvis $\delta(G) \geq 5$, så har G en minor isomorf med K_6 minus en kant.



Figur 2.2: Icosahedron grafen.

Vi er nu klar til, at bevise hovedsætningen i dette kapitel.

Sætning 2.11
Lad $G = (V, E)$ være en graf med $|V| \geq 6$ punkter og $|E| \geq 5n - 15$ kanter. Så er et af følgende udsagn sande

(i) G *kan sammentrækkes til* K_7.

(ii) G *er en* MP_2*-cockade.*

(iii) G *er den komplette* 4*-delte graf* $K_{2,2,2,3}$.

Bevis:
Sætningen bevises ved induktion på antallet af punkter $|V| = n$.
Hvis $n = 6$, skal grafen have mindst 15 kanter, men den eneste graf med 6 punkter og 15 kanter er K_6, som netop er en MP_2-cockade. Antag, at $n \geq 7$ og at sætningen holder for grafer med færre end n punkter og det påkrævede antal kanter. Da både MP_2-cockader og $K_{2,2,2,3}$, som tidligere omtalt, er kant-maksimale mht. ikke at have en K_7-minor, kan vi antage, at $|E| = 5n - 15$. Antag, at $G = (V, E)$ er en graf med n punkter og $5n - 15$ kanter samt, at G er et modeksempel til sætningen, dvs. hverken (i), (ii) eller (iii) gælder for G.

Vi starter med, at vise en række påstande.

(1) $\delta(G) \geq 6$.

Antag, at $x \in V$, hvor $\deg_G(x) \leq 5$. Grafen $G - \{x\}$ har $n - 1$ punkter og mindst $5(n-1) - 15$ kanter og opfylder derfor, jf. vores induktionsantagelse, sætningen. $G - \{x\}$ kan ikke sammentrækkes til K_7, da dette ville give en modstrid med, at G ikke kan sammentrækkes til K_7. Følgeligt er $G - \{x\}$ enten en MP_2-cockade eller en $K_{2,2,2,3}$. Men så er $\deg_G(x) = 5$, da $G - \{x\}$ ellers kan sammentrækkes til K_7. Eftersom $K_{2,2,2,3}$ og MP_2-cockader er kant-maksimale mht. ikke at have en K_7-minor, er $N(x) = K_5$, da vi vi ellers kan tilføje kanter ved at sammentrække en kant incident med x og derved får en MP_2-cockade eller en $K_{2,2,2,3}$ samt mindst en ekstra kant. Da $K_{2,2,2,3}$ ikke indeholder en K_5, er $G - \{x\}$ en MP_2-cockade, men så er G en MP_2-cockade, da $N(x)$ er en punktsnitmængde og $N(x) \cup \{x\} = K_{4+2}$. Denne modstrid giver os, at der i G ikke findes punkter med valens mindre end 6.

(2) G er sammenhængende.

Antag, at G ikke er sammenhængende, og lad G_1, G_2 være to delgrafer af G, hvor $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ og $G = G_1 \cup G_2$. Da G er et mindste modeksempel, må der gælde, at $|E(G_i)| \leq 5|V(G_i)| - 15$ for $i = 1, 2$. Vi har så, at

$$|E| = |E(G_1)| + |E(G_2)| \leq 5|V(G_1)| - 15 + 5|V(G_2)| - 15 = 5n - 30,$$

men dette er en modstrid da $|E| = 5n - 15$.

(3) Hvis S er en minimal punktsnitmængde i G, så gælder, at $5|S| - 15 \geq |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]})$.

Lad G_1 og G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Lad $x \in S$ være et punkt med valens $d = \Delta(\overline{G[S]})$ i $\overline{G[S]}$. Da S er en minimal punktsnitmængde, har ethvert punkt i S mindst én nabo i enhver komponent af $G - S$, og følgeligt får vi en graf med $|V(G_1)|$ punkter og $|E(G_1)| + d$ kanter, hvis vi sammentrækker $G_2 - (S - \{x\})$. Tilsvarende gælder for grafen, som fås ved, at sammentrække $G_1 - (S - \{x\})$. Da disse to grafer ikke kan sammentrækkes til K_7, eftersom G ikke kan sammentrækkes til K_7, gælder, at

$$|E(G_1)| + d \leq 5|V(G_1)| - 15$$

og

$$|E(G_2)| + d \leq 5|V(G_2)| - 15.$$

Vha. ovenstående uligheder får vi følgende.

$$\begin{aligned}
|E| = 5n - 15 &= |E(G_1)| + |E(G_2)| - |E(G[S])| \\
&\leq (5|V(G_1)| - 15 - d) + (5|V(G_2)| - 15 - d) - |E(G[S])| \\
&= 5(|V(G_1)| + |V(G_2)| - |S|) + 5|S| - 30 - 2d - |E(G[S])| \\
&= 5n - 15 + (5|S| - 15 - 2d - |E(G[S])|).
\end{aligned}$$

Vi har altså, at

$$5n - 15 \leq 5n - 15 + 5|S| - 15 - 2d - |E(G[S])|,$$

dvs. $5|S| - 15 \geq |E(G[S])| + 2d$.

Det bemærkes, at hvis S er en minimal punktsnitmængde i G, hvor $G = G_1 \cup G_2$, $G[S] = G_1 \cap G_2$ og $5|S| - 15 = |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]})$, så får vi følgende af udregningerne ovenfor.

(3)(i) $|E(G_i)| = 5|V(G_i)| - 15 - \Delta(\overline{G[S]})$ for $i = 1, 2$.

(4) G er 5-sammenhængende.

Antag, at S er en minimal punktsnitmængde i G. Da $|S|$ opfylder uligheden i (3) får vi, at $|S| \geq 3$, eftersom $5|S| - 15$ ellers er mindre end 0. Desuden kan S ikke indeholde 3 punkter, da der så ville gælde, at $0 \geq |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]})$. Hvis $|S| = 4$ gælder, at $5 \geq |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]}) \geq 6$. Vi har dermed, at $|S| \geq 5$, dvs. G er 5-sammenhængende.

(5) Der findes ikke en minimal punktsnitmængde S i G, hvor $G[S]$ er en komplet graf.

Antag, at S er en minimal punktsnitmængde i G, hvor $G[S]$ er en komplet graf. Ifølge (4) er $|S| \geq 5$ og da G ikke kan sammentrækkes til K_7 får vi, at $|S| = 5$. Lad G_1 og G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2 = K_5$. Da vi har, at $5|S| - 15 = |E(G[S])|$, får vi, at $|E(G_i)| = 5|V(G_i)| - 15$ for $i = 1, 2$ jf. $(3)(i)$. Følgeligt er G_i for $i = 1, 2$ jf. induktionsantagelsen enten en $K_{2,2,2,3}$ eller en MP_2-cockade, eftersom ingen delgraf af G kan sammentrækkes til K_7. Da $G[S] = K_5$ og $K_5 \nsubseteq K_{2,2,2,3}$ er G_i for $i = 1, 2$ en MP_2-cockade, men så er G en MP_2-cockade, da $G[S] = K_5$. Denne modstrid beviser (5).

Fra (5) får vi, at der for enhver punktsnitmængde S gælder, at $G[S]$ ikke er komplet. Dette følger af, at hvis $G[S]$ er komplet, må vi have, at S ikke er minimal jf. (5) og følgeligt findes der en punktsnitmængde $S' \subseteq S$, som er minimal, men eftersom $G[S]$ er komplet, er $G[S']$ også komplet, hvilket er i modstrid med (5).

(6) Hvis S er en punktsnitmængde i G, så findes der ikke et $x \in S$ sådan, at $G[S - \{x\}]$ er en komplet graf.

Vi har jf. ovenstående, at $G[S]$ ikke er komplet. Lad S være en punktsnitmængde i G og antag, at der findes et $x \in S$, hvor $G[S - \{x\}]$ er komplet. Hvis S ikke er en minimal punktsnitmængde, findes der en delmængde $S' \subseteq S$, hvor S' er en minimal punktsnitmængde i G og jf. (5) er $G[S']$ ikke komplet. Følgeligt må $x \in S'$ og $G[S' - \{x\}]$ være en komplet graf. Vi har, at

$$|E(G[S'])| = \frac{1}{2}(|S'| - 1)(|S'| - 2) + \deg_{G[S']}(x)$$

og

$$\Delta(\overline{G[S']}) = |S'| - 1 - \deg_{G[S']}(x)$$

Da S' er minimal, følger det af (3), at

$$5|S'| - 15 \geq \frac{1}{2}(|S'| - 1)(|S'| - 2) + \deg_{G[S']}(x) + 2(|S'| - 1 - \deg_{G[S']}(x)).$$

Da $\deg_{G[S']}(x) \leq |S'| - 2$ får vi af ovenstående ulighed, at

$$-\frac{1}{2}|S'|^2 + \frac{11}{2}|S'| - 16 \geq 0,$$

hvilket er i modstrid med (3), eftersom uligheden ingen løsning har for $|S'| \in \mathbb{N}$.

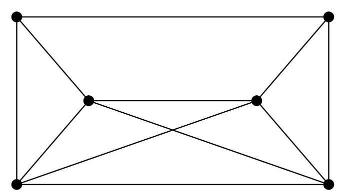
(7) Lad S være en punktsnitmængde i G, og lad $x, y \in S$ være to punkter, som ikke er naboer. Så er $G[S - \{x, y\}]$ ikke en komplet graf.

Antag, at S er en punktsnitmængde i G, hvor der for $x, y \in S$, hvor $xy \notin E$, gælder, at $G[S - \{x, y\}]$ er en komplet graf. Ifølge (5) er $G[S]$ ikke komplet, og ifølge (6) er graferne $G[S - \{x\}]$ og $G[S - \{y\}]$ ikke komplette. Hvis S ikke er en minimal punktsnitmængde, findes der en delmængde $S' \subseteq S$, hvor S' er en minimal punktsnitmængde, og eftersom $G[S']$, $G[S' - \{x\}]$ og $G[S' - \{y\}]$ ikke er komplette må både x og y tilhøre S'. Da der for ethvert positivt heltal t gælder, at $\binom{t}{2} \geq 5t - 15$, og S' opfylder (3), får vi, at

$$
\begin{aligned}
5|S'| - 15 \geq |E(G[S'])| + 2\Delta(\overline{G[S']}) &\geq \binom{|S'|}{2} + 1 \\
&\geq 5|S'| - 15 + 1.
\end{aligned}
$$

Anden ulighed følger af, at $G[S' - \{x, y\}]$ er komplet og $xy \notin E$. Denne modstrid beviser (7).

(8) Hvis S er en punktsnitmængde i G, så er $G[S]$ ikke isomorf med en af de tre følgende grafer $K_1 + C_4$, $K_2 + C_4$ og L, se figur 2.3.



Figur 2.3: Grafen L.

Antag, at S er en punktsnitmængde i G, hvor $G[S]$ er isomorf med en af graferne $K_1 + C_4$, $K_2 + C_4$ eller L. Hvis $G[S] = K_1 + C_4$, er S minimal, da G er 5-sammenhængende. Hvis $G[S] = K_2 + C_4$ og S ikke er minimal, findes der et $z \in S$ sådan, at $S - \{z\}$ er minimal, men fjernes et vilkårligt punkt fra $K_2 + C_4$ får vi enten en K_5 minus en kant, hvilket er i modstrid med (6), eller $K_1 + C_4$, som er en minimal punktsnitmængde. Hvis $G[S] = L$ og S ikke er en minimal punktsnitmængde, findes der et $x \in S$ sådan, at $S - \{x\}$ er minimal. Vi får, uanset hvilke punkt i L vi vælger, en modstrid med (3). Vi kan derfor antage, at S er en minimal punktsnitmængde.

(8)(i) Antag, at $G[S] = K_1 + C_4$.

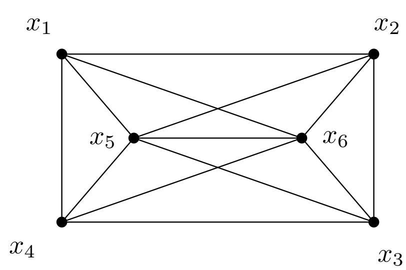
Lad $S = \{x_1, \cdots, x_5\}$, hvor $x_1x_3, x_2x_4 \notin E$, og lad G_1, G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Da $\Delta(\overline{G[S]}) = 1$ og $|E(G[S])| = 8$ er $5|S| - 15 = |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]})$ og jf. $(3)(i)$ har vi derfor, at $|E(G_i)| = 5|V(G_i)| - 16$ for $i = 1, 2$. Sammentrækker vi $G_2 - (S - x_1)$ får vi en graf $G'_1 = G_1 \cup \{x_1x_3\}$, og G'_1 har $5|V(G'_1)| - 15$ kanter. Ifølge induktionsantagelsen kan G'_1 enten sammentrækkes til K_7, er en MP_2-cockade eller isomorf med $K_{2,2,2,3}$. Hvis G'_1 kan sammentrækkes til K_7, kan G sammentrækkes til K_7. Vi har derfor, at G'_1 enten er isomorf med grafen $K_{2,2,2,3}$ eller er en MP_2-cockade.
Antag først, at $G'_1 = K_{2,2,2,3}$ med partitionerne $\{x_1, v_1\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, v_2\}$ og $\{x_5, v_3\}$ samt et punkt v_4, som er indeholdt i en af de fire partitioner. Hvis vi i G sammentrækker kanterne x_1v_3, v_3x_3 og x_2v_2, v_2x_4, har vi til G_2 tilføjet kanterne x_1x_3 og x_2x_4. Grafen $G_2 \cup \{x_1x_3, x_2x_4\}$ har $5|V(G_2)| - 14$ kanter og kan derfor jf. induktionsantagelsen sammentrækkes til K_7. Denne modstrid giver, at G'_1 er en MP_2-cockade.
Antag nu, at S er indeholdt i et cockade-element H i G'_1. Da $x_2x_4 \notin E(G[S])$ er $H \neq K_6$, dvs. H er en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet to punkter, som har valens $|V(H)| - 1$ i H. En 4-sammenhængende maksimal planar graf indeholder ifølge lemma B.2 ikke en K_4, og vi har derfor, at mindst et af punkterne x_1, x_3, x_5 har valens $|V(H)| - 1$ i H. Lad v, w være punkterne med valens $|V(H)| - 1$ i H. Vi skal betragte to tilfælde, først antages, at præcis et af punkterne x_1, x_3, x_5 ikke tilhører den maksimale planare graf, dernæst at to af punkterne ikke tilhører der maksimale planare graf.

Vi kan WLOG antage, at $\{w\} \subseteq \{x_1, x_3, x_5\}$. Da $vx_1, vx_3 \in E(H)$ kan vi ved at sammentrække disse to kanter i G tilføje kanten x_1x_3 til G_2, og eftersom $H - \{v, w\}$ er 4-sammenhængende, findes der i $H - \{v, w, x_1, x_3, x_5\}$ en (x_2, x_4)-vej. Vi har dermed, at G kan sammentrækkes til K_7, eftersom vi ved at sammentrække de to disjunkte (x_1, x_3) og (x_2, x_4)-veje kan tilføje 2 kanter til G_2, hvorved vi får, at $G_2 \cup \{x_1x_3, x_2x_4\}$ har $5|V(G_2)| - 14$ kanter.
Hvis to af punkterne x_1, x_3, x_5 har valens $|V(H)| - 1$ i H, får vi ligeledes, at der

i H findes to disjunkte (x_1, x_3) og (x_2, x_4)-veje, som ikke benytter kanten x_1x_3 eller punktet x_5.
Vi har derfor, at S ikke er indeholdt i et cockade-element i G_1'. Da $G_1'[S] = K_5^-$, er S indeholdt i 2 cockade-elementer H_1, H_2 i G_1'. Vi kan WLOG antage, at $x_2 \in H_1$ og $x_4 \in H_2$. De resterende punkter i S er indeholdt i $H_1 \cap H_2$. Da $H_1 \cap H_2 = K_5$ findes der yderligere to punkter v_1, v_2 i $H_1 \cap H_2$. Der findes i $H_1 - \{x_1, x_3, x_5, v_2\}$ en (v_1, x_2)-vej, da H_1 er 5-sammenhængende, og ligeledes findes der i $H_2 - \{x_1, x_3, x_5, v_2\}$ en (v_1, x_4)-vej. Sammentrækkes de to disjunkte veje samt kanterne x_1v_2, v_2x_3 i G, har vi til G_2 tilføjet 2 kanter, og dermed har vi, at G kan sammentrækkes til K_7. Denne modstrid fuldfører beviset for $(8)(i)$.

(8)(ii) Antag, at $G[S] = K_2 + C_4$.

Lad $G[S] = \{x_1, \cdots, x_6\}$, hvor $x_1x_3, x_2x_4 \notin E(G[S])$, se figur 2.4. Lad G_1, G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Da vi har, at $5|S| - 15 \geq |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]})$ og $\Delta(\overline{G[S]}) = 1$ får vi jf. $(3)(i)$, at $|E(G_i)| = 5|V(G_i)| - 16$ for $i = 1, 2$.



Figur 2.4: Grafen $K_2 + C_4$.

Hvis $G_1 - \{x_5, x_6\}$ og $G_2 - \{x_5, x_6\}$ begge kan tegnes i planen på en sådan måde, at $x_1, \cdots, x_4$ er i samme region, er $G - \{x_5, x_6\}$ planar og følgeligt får vi, at G er en MP_2-cockade eftersom $G - \{x_5, x_6\}$ har præcis $3(n-2) - 6$ kanter da $|E| = 5n - 15$. Denne modstrid medfører, at vi kan antage, at enten $G_1 - \{x_5, x_6\}$

eller $G_2 - \{x_5, x_6\}$ ikke kan tegnes i planen på en sådan måde, at x_1, x_2, x_3, x_4 er i samme region. Vi kan WLOG antage følgende

$G_1 - \{x_5, x_6\}$ kan ikke tegnes i planen på en sådan måde, at x_1, x_2, x_3, x_4 er i sammen region.

Lad $G' = G_1 \cup \{x_1x_3\}$. Vi har da, at $|V(G')| = |V(G_1)| < |V|$ og $|E(G')| = |E(G_1)| + 1 = 5|V(G')| - 15$. Desuden bemærkes, at G' indeholder mindst to grafer isomorfe med K_5. Disse grafer induceres af $\{x_1, x_i, x_3, x_5, x_6\}$ for $i = 2$ eller $i = 4$. Da G ikke kan sammentrækkes til K_7, kan G' heller ikke sammentrækkes til K_7. Følgeligt giver vores induktionshypotese, at G' enten er isomorf med $K_{2,2,2,3}$ eller er en MP_2-cockade. Eftersom $K_{2,2,2,3}$ ikke indeholder en K_5, får vi, at G' er en MP_2-cockade. Ligeledes er grafen $G'' = G_1 \cup \{x_2x_4\}$ en MP_2-cockade. Antag, at både G' og G'' har mere end et cockade-element og dermed begge indeholder en punktsnitmængde, som inducerer en K_5. Da G jf. (5) ikke indeholder en punktsnitmængde, som inducerer en komplet graf og $S = \{x_1, \cdots, x_6\}$ er en minimal punktsnitmængde i G, må punktsnitmængden i G', der inducerer en K_5, indeholde punkterne x_1, x_3, x_5, x_6 samt et punkt $x_7 \in (V(G') - S)$, som er nabo til x_1, x_3, x_5, x_6, og punktsnitmængden i G'', der inducerer en K_5 må indeholde punkterne x_2, x_4, x_5, x_6 og et punkt $x_8 \in (V(G'') - S)$, som er nabo til x_2, x_4, x_5, x_6. Hvis $x_7 \neq x_8$ kan G sammentrækkes til $G_2 \cup \{x_1x_3, x_2x_4\}$, som kan sammentrækkes til K_7, eftersom $G[S] \cup \{x_1x_3, x_2x_4\} = (K_2 + C_4) \cup \{x_1x_3, x_2x_4\} = K_6$ og ethvert punkt i S har mindst en nabo i G_2, da S er en minimal punktsnitmængde i G. Følgeligt er $x_7 = x_8$. Da $G_1 - \{x_5, x_6\}$ ikke kan tegnes i planen sådan, at x_1, x_2, x_3, x_4 er i samme region, indeholder G_1 et punkt, som ikke tilhører $S \cup \{x_7\}$. Da G jf. (4) er 5-sammenhængende er $\{x_5, x_6, x_7\}$ ikke en punktsnitmængde i G, og følgeligt findes der et punkt $x_9 \in (V(G_1) - (S \cup \{x_7\}))$, som er nabo til mindst et af punkterne x_1, x_2, x_3 eller x_4. Vi kan WLOG antage, at $x_1x_9 \in E$. Da G jf. (7) ikke har en punktsnitmængde S', som indeholder to punkter u, v, hvor $G[S - \{u, v\}]$ er en komplet graf, indeholder G ikke en punktsnitmængde, som inducerer en K_6 minus en kant. Punkterne $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7$ inducerer en K_6

minus en kant og kan derfor ikke være en punktsnitmængde i G. Følgeligt må $G_1 - \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ være sammenhængende og dermed indeholde en (x_3, x_9)-vej. Vi har så, at G kan sammentrækkes til $G_2 \cup \{x_1x_3, x_2x_4\}$, som kan sammentrækkes til K_7, ved at sammentrække (x_3, x_9)-vejen og en af kanterne x_2x_7 eller x_4x_7. Denne modstrid giver, at G' eller G'' ikke har en punktsnitmængde, som inducerer en K_5, dvs. en af disse MP_2-cockader består af et enkelt cockade-element og da G', G'' ikke kan være isomorfe med K_{4+2}, er en af dem en 6-sammenhængende MP_2-cockade. Antag WLOG, at G' er 6-sammenhængende. Eftersom en maksimal planar 4-sammenhængende graf ikke indeholder en K_4 jf. lemma B.2, må to af punkterne x_1, x_3, x_5, x_6 have valens $|V(G')| - 1$ i G'. Da $G_1 - \{x_5, x_6\}$ ikke kan tegnes i planen på en sådan måde, at $x_1, \cdots, x_4$ ligger i samme plan og G' er 4-sammenhængende, må mindst et af punkterne x_1, x_3 have valens $|V(G')| - 1$ i G'. Da G' er 6-sammenhængende, har x_3 valens mindst 6 i G' og følgeligt findes der et punkt $x_7 \in V(G') - S$, som er nabo til x_3 i G' og dermed i G. Desuden er x_7 nabo til x_1, da x_1 er nabo til alle punkter i $G' - \{x_1\}$. Vi har, at $G' - \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\} = G_1 - \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}$ er sammenhængende, da G' er 6-sammenhængende, og der findes derfor en (x_2, x_4)-vej i $G_1 - \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}$. Sammentrækkes denne vej samt kanten x_1x_7 eller x_3x_7 i G, får vi, at G kan sammentrækkes til $G_2 \cup \{x_1x_3, x_2x_4\}$, som kan sammentrækkes til K_7. Denne modstrid beviser $(8)(ii)$.

(8)(iii) Antag, at $G[S] = L$.

Da $\Delta(\overline{G[S]}) = 2$ og $|E(G[S])| = 11$ får vi, at $5|S| - 15 = |E(G[S])| + 2\Delta(\overline{G[S]})$. Lad G_1, G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Så har vi jf. $(3)(i)$, at $|E(G_i)| = 5|V(G_i)| - 17$. Lad $S = \{x_1, \ldots, x_6\}$, hvor $x_1x_3, x_1x_6, x_2x_4, x_2x_5 \notin E$. Sammentrækkes $G_2 - (S - x_1)$ får vi grafen $G_1' = G_1 \cup \{x_1x_3, x_1x_6\}$, da S er en minimal punktsnitmængde og $\deg_{\overline{G[S]}}(x_1) = \Delta(\overline{G[S]})$. Grafen G_1' har $|V(G_1')| - 15$ kanter og er derfor jf. induktionsantagelsen enten en MP_2-cockade eller isomorf med grafen $K_{2,2,2,3}$. Da G_1' indeholder en K_5, er G_1' en MP_2-cockade eftersom $K_{2,2,2,3}$ ikke indeholder en K_5. Antag først,

at S er indeholdt i et cockade-element H i G'_1. Da $|S| = 6$ og $G'_1[S] \neq K_6$, er $H \neq K_6$, dvs. H er en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvortil der er tilføjet 2 punkter v, w, som har valens $|V(H)|-1$ i H. Da en 4-sammenhængende maksimal planar graf ikke indeholder en K_4 jf. lemma B.2 og $x_2x_4, x_2x_5 \notin E(H)$ er $\{u, v\} \subseteq \{x_1, x_3, x_6\}$. Et af punkterne x_1, x_3, x_6 er indeholdt i $H - \{v, w\}$. Vi vil kalde dette punkt x. Da $H - \{v, w\}$ er 4-sammenhængende, har x en nabo y i $H - \{v, w\}$. Vi får dermed, at vi ved, at sammentrække kanten x_1y i G kan tilføje kanterne x_1x_3, x_1x_6 til $G[S]$. Yderligere har vi, at $H - \{v, w, x, y, x_5\}$ er sammenhængende, og der findes derfor en (x_2, x_4)-vej i denne graf. Sammentrækkes denne vej i G til en kant har vi tilføjet tre kanter i G_2 og derved få en graf med $5|V(G_2)| - 14$ kanter, som jf. induktionsantagelsen kan sammentrækkes til K_7. Denne modstrid giver, at S ikke er indeholdt i et cockade-element i G'_1. Da $G'_1[S] = K_6^{--}$ må S være indeholdt i 2 cockade-elementer H_1, H_2 og vi kan WLOG antage, at $x_2 \in H_1 - H_2$ og $x_4, x_5 \in H_2 - H_1$ eller $x_2 \in H_1 - H_2, x_4 \in H_2 - H_1$ og $x_5 \in H_1 \cap H_2$. Antag først, at $x_2 \in H_1 - H_2$ og $x_4, x_5 \in H_2 - H_1$. Da $H_1 \cap H_2 = K_5$ findes der 2 punkter v_1, v_2 i $(H_1 \cap H_2) - S$. Sammentrækkes v_1x_1 i G tilføjes kanterne x_1x_3, x_1x_6 til $G[S]$ og eftersom G'_1 er 5-sammenhængende er $G'_1 - \{x_1, x_3, x_6, v_1\}$ sammenhængende, dvs. der findes en (x_2, x_4)-vej. Vi har igen, at vi til G_2 kan tilføjes 3 kanter ved, at sammentrække kanten x_1v_1 og (x_2, x_4)-vejen, dvs. G har en K_7-minor. Antag nu, at $x_2 \in H_1 - H_2$, $x_4 \in H_2 - H_1$ og $x_5 \in H_1 \cap H_2$. Da $H_1 \cap H_2 = K_5$ findes der et punkt $v \in H_1 \cap H_2 - S$. Sammentrækkes vx_1 i G tilføjes kanterne x_1x_3, x_1x_6 til G_2. Da H_1 enten er en K_6 eller en 4-sammenhængende maksimal planar graf hvortil der er tilføjet to punkter, som er naboer til alle andre punkter i H_1 er H_1 5-sammenhængende og der findes derfor en (x_2, x_5)-vej i $H_1 - \{x_1, x_3, x_6, v\}$. Sammentrækkes denne vej til en kant i G har vi til G_2 tilføjet kanten x_2x_5, dvs. vi kan tilføje tre kanter til G_2. Grafen $G_2 \cup \{x_1x_3, x_1x_6, x_2x_5\}$ kan ifølge induktionsantagelsen sammentrækkes til K_7. Vi har hermed bevist, at G ikke har en punktsnitmængde S, hvor $G[S] = L$.
Dette fuldfører beviset for (8).

Hvis G indeholder to punkter x, y, hvor $xy \in E$ og $|N(x) \cap N(y)| \leq 3$ har G/xy $n - 1$ punkter og mindst $5(n - 1) - 14$ kanter. Ifølge induktionsantagelsen kan

G/xy sammentrækkes til K_7. Derfor gælder for ethvert af punkter $x, y \in V$, hvor $xy \in E$, at $|N(x) \cup N(y)| \geq 4$.

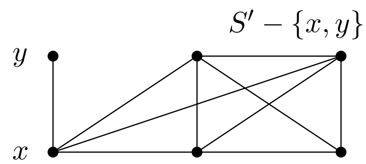
Den resterende del af beviset inddeles i to tilfælde.

Tilfælde I Der findes $x, y \in V$, hvor $xy \in E$ og $|N(x) \cap N(y)| = 4$.

Tilfælde II For ethvert $x \in V$ gælder, at $\delta(N(x)) \geq 5$.

Først betragtes tilfælde I.
Antag, at $x, y \in V$, hvor $xy \in E$ og $|N(x) \cap N(y)| = 4$. Grafen G/xy har præcis $n-1$ punkter og $5(n-1)-15$ kanter. Da G ikke kan sammentrækkes til K_7, kan G/xy heller ikke, så jf. induktionsantagelsen er G/xy enten en $K_{2,2,2,3}$ eller en MP_2-cockade, men ifølge lemma 2.6 kan G/xy ikke være en $K_{2,2,2,3}$. Vi har altså, at G/xy er en MP_2-cockade. Antag nu, at G/xy har en punktsnitmængde S, hvor S inducerer en K_5 i G/xy, dvs. G/xy har mere end et cockade-element. Lad z være punktet, som fås ved, at sammentrække kanten xy i G. Da G ikke har en punktsnitmængde, som inducerer en komplet graf, må $z \in S$. Lad $S' = (S - \{z\}) \cup \{x, y\}$. Så er S' en punktsnitmængde i G og $|S'| = 6$. Hvis S' ikke er en minimal punktsnitmængde i G, lader vi $S'' \subseteq S'$ være en minimal punktsnitmængde i G. Så har vi, at $(S - \{z\}) \subseteq S''$, eftersom S ellers ikke kan være en punktsnitmængde i G/xy, og enten x eller y må tilhøre $S^{''}$, da G er 5-sammenhængende og $|S - \{z\}| = 4$. Antag WLOG, at $y \notin S^{''}$, så er $G[S^{''} - \{x\}]$ komplet, hvilket er i modstrid med (6). Vi har altså, at S' er en minimal punktsnitmængde i G. Da $G[S']$ jf. (5) ikke er komplet, kan punkterne i $S' - \{x, y\}$ ikke alle være fælles naboer til x og y. Antag, at x er nabo til tre af punkterne i $S' - \{x, y\}$. Så følger det fra (3), at y også er nabo til mindst tre punkter i $S' - \{x, y\}$, se figur 2.5.

Da $G/xy[S'] = K_5$ får vi, at $G[S'] = K_2 + C_4$, hvilket er en modstrid med (8). Antag nu, at x er nabo til 2 af punkterne i $S' - \{x, y\}$. Da $G/xy[S'] = K_5$ har y



Figur 2.5: Grafen $G[S']$ uden kanter mellem y og $S' - \{x, y\}$, hvoraf det ses, at y skal have mindst tre naboer i $S' - \{x, y\}$ for, at vi ikke får en modstrid med (3).

også valens 2 og $G[S'] = L$, igen en modstrid med (8). Vi har dermed vist, at der i G ikke findes to naboer x, y med præcis 4 fælles naboer sådan, at G/xy har en punktsnitmængde, der inducerer en K_5.
Antag nu, at for ethvert par af naboer x, y i G, som har præcis 4 fælles naboer, gælder, at G/xy ikke indeholder en punktsnitmængde, der inducerer en K_5.
Jf. lemma 2.6 er G/xy ikke isomorf med $K_{2,2,2,3}$, så ifølge induktionsantagelsen er G/xy en MP_2-cockade. Da G/xy ikke har en punktsnitmængde, som inducerer en K_5 har G/xy kun et cockade-element. Da $\delta(G) \geq 6$ og $G \neq K_7$ er $|V| \geq 8$ og følgeligt er $G/xy \neq K_6$, dvs.

(9) $G' = G/xy$ består af en 4-sammenhængende maksimal planar graf samt 2 punkter, som har valens $|V(G')| - 1 = n - 2$ i G' for ethvert par $\{x, y\}$ af nabo punkter, som har præcis 4 fælles naboer.

Lad x, y være naboer i G, som har præcis 4 fælles naboer, og lad z være punktet i G', der fås ved, at sammentrække kanten xy i G. Lad punkterne $v, w \in V(G')$ have valens $n - 2$ og lad $H = G' - \{v, w\}$.
Vi skal undersøge to tilfælde.

(a) $z \notin \{v, w\}$

(b) $z \in \{v, w\}$

(a): Antag, at $v, w \in (N_G(x) \cap N_G(y))$. Så har v, w valens $n-1$ i G. Da $|N(x) \cap N(y)| = 4$ og $v, w \in (N(x) \cap N(y))$ har x og y to fælles naboer i $G - \{v, w\}$. Da G' er en MP_2-cockade og v, w har valens $|V(G')|-1$ i G' er $G' - \{v, w\}$ en MP_0-cockade. Ifølge lemma 2.3 er $G - \{v, w\}$ enten en MP_0-cockade eller har en K_5-minor. Heraf følger, at G enten er en MP_2-cockade eller har en K_7-minor. Denne modstrid giver, at højst et af punkterne v, w kan være en fælles nabo til x og y. Lad $V(N_H(z)) = \{z_1, \cdots, z_l\}$. Vi antager først, at $\{v, w\} \cap (N(x) \cap N(y)) = \emptyset$. Så er de fælles naboer til x og y indeholdt i mængden $\{z_1, \cdots, z_l\}$. Antag, at de 4 fælles naboer til x og y er z_h, z_i, z_j og z_k. Så har delgrafen af G udspændt af punktmængden $\{x, y, z_1, \cdots, z_l, v, w\}$ en K_6-minor, idet v, w er naboer til alle punkter i G/xy, og da $G' - \{v, w\}$ er en 4-sammenhængende maksimal planar graf, har vi jf. lemma 2.8, at naboerne til z inducerer en kreds i H. Ethvert af punkterne $\{z_h, z_i, z_j, z_k, v, w\}$ har en nabo i grafen

$$G - \{x, y, z_1, \cdots, z_l, v, w\} = G' - (N(z) \cup \{z\})$$

og denne er sammenhængende jf. lemma 2.8. Vi har så, at G' kan sammentrækkes til K_7 og dermed, at G sammentrækkes til K_7.
Denne modstrid giver, at et af punkterne v, w er fælles nabo til x og y. Antag WLOG, at $v \in (N(x) \cup N(y))$, og lad $N(x) \cap N(y) = \{v, z_i, z_j, z_k\}$, hvor $1 \leq i < j < k \leq l$. Da w har valens $|V(G')| - 1$ i G', er w nabo til z i G', dvs. w er nabo til enten x eller y. Antag WLOG, at $wx \in E$ og dermed $wy \notin E$. Da y jf. (1) har valens mindst 6 i G og $|N(x) \cap N(y)| = 4$, er y nabo til et punkt $z_h \in (\{z_1, \cdots, z_l\} - \{z_i, z_j, z_k\})$. Vi kan WLOG antage, at $i < h < j$, eftersom vi ellers blot kan om nummerere naboerne til z. Ifølge lemma 2.8 er $G' - (N(z) \cup \{z\})$ sammenhængende, og dermed er

$$G - \{v, w, z_1, \cdots, z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_l\}$$

sammenhængende og derfor indeholder denne graf en (z_i, z_j)-vej, men denne vej samt delgrafen $G[\{x, y, z_1, \cdots, z_l, v, w\}]$ har en K_7-minor, dvs. G har en K_7-

minor. Vi har hermed vist, at $z \notin \{v, w\}$ giver en modstrid.

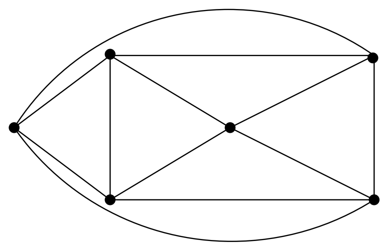
(b): Antag, at $z \in \{v, w\}$. Vi kan WLOG antage, at $z = v$. Antag først, at w er en fælles nabo til x og y, og lad v_1, v_2, v_3 være de tre andre fælles naboer til x og y. Da $G' - \{v, w\}$ jf. (9) er 4-sammenhængende er $G - \{x, y, w, v_1, v_2, v_3\}$ sammenhængende, og eftersom $z = v$ har valens $n - 2$ i G', er ethvert punkt i $G - \{x, y, w, v_1, v_2, v_3\}$ nabo til enten x eller y. Ifølge (1) har x og y begge mindst valens 6 i G, og derfor findes der to forskellige punkter x_1, y_1 i $G - \{x, y, w, v_1, v_2, v_3\}$, som er naboer til hhv. x og y. Der findes faktisk punkter x_2, y_2 i $G - \{x, y, w, v_1, v_2, v_3\}$ sådan, at $xx_2, yy_2, x_2y_2 \in E$, idet $G - \{x, y, w, v_1, v_2, v_3\}$ er sammenhængende. Vi har så ifølge lemma 2.9, at x_2 og y_2 har præcis 2 fælles naboer i $G/xy - \{v, w\}$, og følgeligt har G/x_2y_2 $n - 1$ punkter og $5n - 15 - 4 = 5(n - 1) - 14$ kanter, da w også er fælles nabo til x_2 og y_2. Vi har dermed, at G/x_2y_2 kan sammentrækkes til K_7 jf. induktionsantagelsen, men dette er en modstrid, da G så kan sammentrækkes til K_7. Vi må derfor antage, at w ikke er en fælles nabo til x og y. Lad $v_1, \cdots, v_4$ være fælles naboer til x og y. Da w har valens $n - 2$ i G', er enten x eller y nabo til w i G, og vi kan WLOG antage, at $wx \in E$. Antag først, at $\deg_G(x) \geq 7$. Så findes der to punkter $x_1, y_1 \in (V - \{x, y, v_1, \cdots, v_4, w\})$, som er naboer til hhv. x og y i G. Vi får så, at x_1 tilhører en komponent H_x af $G - \{x, y, v_1, \cdots, v_4, w\}$, hvori ethvert punkt er nabo til x da vi ellers får, at G/x_1y_1 kan sammentrækkes til K_7, som det var tilfældet for G/x_2y_2. Tilsvarende gælder, at y_1 tilhører en komponent H_y af $G - \{x, y, v_1, \cdots, v_4, w\}$, hvori ethvert punkt er nabo til y. Enhver minimal punktsnitmængde S i en 4-sammenhængende maksimal planar graf, hvor $|S| = 4$ udspænder en kreds jf. lemma 2.7. Derfor er $G[\{v_1, \cdots, v_4\}] = C_4$. Vi kan antage, at $v_1, \cdots, v_4$ er nummereret langs kredsen. Vi har nu, at G indeholder en K_7-minor (punkterne $x, x_1, v_1, \cdots, v_4, w$ kanterne v_1y, yv_3, en (v_2, v_4)-vej i $G[H_y \cup \{v_2, v_4\}]$ samt 4 disjunkte (x_1, v_i)-veje i $G[H_x \cup \{v_1, \cdots, v_4\}]$ for $i = 1, \ldots, 4$). Vi har hermed vist, at $\deg_G(x) < 7$ og jf. (1) er $\deg_G(x) \geq 6$, dvs. $\deg_G(x) = 6$. Da $G - \{x, y, w\}$ er 4-sammenhængende har ethvert af punkterne $v_1 \cdots, v_4$ en nabo hhv. $z_1, \cdots, z_4$ i $G - \{x, y, w, v_1, \cdots, v_4\}$.

(10) Lad $i \in \{1, \ldots, 4\}$ og lad z_i være et punkt i $G - \{x, y, w, v_1, \cdots, v_4\}$, som er nabo til v_i. Så gælder, at $G/v_iz_i - \{x, y, w\}$ indeholder to punkter, som er naboer til ethvert andet punkt i G/v_iz_i.

Da $v_iz_i \in E(G/xy - \{v, w\})$, har vi jf. lemma 2.9, at v_i og z_i har præcis 2 fælles naboer i $G/xy - \{v, w\}$. Desuden er w fælles nabo til v_i og z_i, da w har valens $|V(G/xy)| - 1$ i G/xy. Yderligere har vi, at x, y begge er naboer til v_i, og da $z = v$, er z_i enten nabo til x eller y. Vi har derfor, at $|N(v_i) \cap N(z_i)| = 4$ og dermed jf. (9), at G/v_iz_i er en 4-sammenhængende maksimal planar graf samt to punkter med valens $|V(G/v_iz_i)| - 1$. Da $yw \notin E$, har hverken y eller w valens $|V(G/v_iz_i)| - 1$ i G/v_iz_i. Yderligere gælder, at $G - \{x, y, w\}$ jf. (9) er 4-sammenhængende, og derfor indeholder $G - \{x, y, w\}$ mindst 6 punkter, da vi ellers får, at G kan sammentrækkes til K_7, idet w og $z = v$ er nabo til alle punkter i $G - \{x, y, w\}$. Eftersom $\deg_G(x) = 6$, findes der mindst et punkt $x' \in G - \{x, y, w\}$, hvor $x' \neq z_i$ og $xx' \notin E$, dvs. x har heller ikke valens $|V(G/v_iz_i)| - 1$ i G/v_iz_i. Vi har hermed bevist (10).

Fra (10) får vi, at $G - \{x, y, w\}$ indeholder et punkt u', som er nabo til alle andre punkter i $G - \{x, y, w\}$ undtaget v_i eller z_i. Ifølge lemma 2.8 inducerer $N(u')$ en kreds, og da $G - \{x, y, w\}$ er 4-sammenhængende jf. (9), får vi, at $G - \{x, y, w\}$ er isomorf med $E_2 + C_l$ for $l \geq 4$, hvor $E_2 = \{u', v'\}$ med $v' \in \{v_i, z_i\}$.

Antag, at $l = 4$, dvs. $G - \{x, y, w\} = E_2 + C_4$, se figur 2.6. Så er $G[\{v_1, \cdots, v_4\}]$ enten isomorf med K_4 minus en kant eller en kreds af længde 4, eftersom uanset hvilke fire punkter vi vælger i $E_2 + C_4$ inducerer de en af disse to grafer. Hvis $G[\{v_1, \cdots, v_4\}]$ er isomorf med K_4 minus en kant, har G en K_7-minor, da vi så har, at $G[\{x, y\} \cup (N(x) \cap N(y))]$ er isomorf med en K_6 minus en kant og w er nabo til alle punkter i $G - \{y, w\}$. Hvis $G[\{v_1, \cdots, v_4\}]$ er en kreds af længde 4, så er $G = K_{2,2,2,3}$ med partitionerne $\{y, w\}, \{x, u', v'\}, \{v_1, v_3\}$ og $\{v_2, v_4\}$, hvor $\{u', v'\} = E_2$, og punkterne på kredsen C_4 er nummereret sådan, at $v_1v_3, v_2v_4 \notin V$.
Denne modstrid giver, at $l \geq 5$. Da $|N(x) \cap N(y)| = 4$ og $G - \{x, y, w\} =$



Figur 2.6: Grafen $E_2 + C_4$.

$E_2 + C_l$, findes der et punkt v_i på kredsen C_l, som er en fælles nabo til x og y, hvor v_i har to naboer v_i', v_i'' på kredsen C_l, som ikke begge er fælles naboer til x og y. Antag, at $v_i' \notin N(x) \cap N(y)$. Dette er i modstrid med (10), da vi kan vælge punktet v_i' som z_i, og grafen $G/v_iv_i' - \{x, y, w\} = E_2 + C_{l-1}$ indeholder ikke to punkter, som er nabo til alle andre punkter i G/v_iv_i'.
Vi har nu vist, at der i G ikke findes to punkter, der er naboer og som har præcis 4 fælles naboer.

Vi skal nu betragte tilfælde II:
Antag, at der for $x \in V$ gælder, at $\deg_G(x) = 6$. Da $\delta(N(x)) \geq 5$ er $N(x) = K_6$ og følgeligt er $G[N(x) \cup \{x\}]$ en K_7. Denne modstrid giver, at $\delta(G) \geq 7$. Lad $x \in V$ være et punkt med minimum valens i G, og lad $H = G[V(N(x)) \cup \{x\}]$. Vi har, at $G - H$ er ikke-tom, eftersom $\deg_G(x) = \delta(G)$ og G ikke er en komplet graf. For enhver komponent K af $G - H$ defineres $N(K)$ som delgrafen af G induceret af alle de punkter i $G - K$, som har en nabo i K. Da $N(K)$ er en punktsnitmængde, er $N(K)$ ikke-komplet jf. (5). Hvis $\deg_G(x) = 7$, indeholder $N(x)$ en $K_{1,2,2,2}$ eftersom $\delta(N(x)) \geq 5$. Det bemærkes, at $K_{1,2,2,2}$ er kant-maksimal mht. ikke at have en K_6-minor. Da $N(K)$ ikke er komplet, indeholder $N(K)$ to punkter, som ikke er naboer, dvs. $G - H$ har en komponent K sådan, at $N(K)$ indeholder to punkter, som ikke er naboer. Dette giver, at G indeholder en K_7-minor, eftersom $N(x)$ kan sammentrækkes til K_6 ved at sammentrække K. Følgeligt har vi, at $\delta(G) \geq 8$.
Da $|E| = 5n - 15$, er $\delta(G) \leq 9$. Antag, at $G - H = G - (N(x) \cup \{x\})$ kun

har en komponent K. Da $\deg_G(x) \leq 9$ og $\delta(N(x)) \geq 5$ får vi jf. lemma 2.10, at $N(x)$ har en minor isomorf med K_6 minus en kant, dvs. der findes to punkter $u, v \in N(x)$, hvor der gælder, at $N(x) \cup \{uv\}$ kan sammentrækkes til K_6. Da x var et punkt med minimum valens i G gælder, at $\deg_G(u) \geq \deg_G(x)$ og $\deg_G(v) \geq \deg_G(x)$ og følgeligt har vi, at $u, v \in N(K)$, eftersom vi har antaget, at $G - H$ kun har en komponent K og u, v derfor begge må have mindst en nabo i K. Så kan vi sammentrække K og derved tilføje kanten uv til $N(x)$, som derved kan sammentrækkes til K_6, dvs. G har en K_7-minor.
Denne modstrid giver, at $G - H$ har mindst to komponenter.
Antag, at $\deg_G(x) = 8$. Da $\delta(N(x)) \geq 5$ er $|E(N(x))| \geq \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$, og dermed er $|E(H)| \geq 28$. Hvis vi kan tilføje 3 kanter til grafen $H = G[N(x) \cup \{x\}]$, kan H sammentrækkes til K_7, eftersom vi jf. vores induktionsantagelse har, at en graf med $|V| > |V(H)| = 9$ punkter og mindst $5 \cdot 9 - 14 = 31$ kanter kan sammentrækkes til K_7. Antag, at $G - H$ har en komponent K, hvor $\delta(N(K)) \leq |V(N(K))| - 3$. Så indeholder $\overline{N(K)}$ to kanter $e_1 = vy$ og $e_2 = uy$. Lad K' være en anden komponent af $G - H$. Da $N(K')$ er en punktsnitmængde, indeholder $\overline{N(K)} - \{y\}$ en kant e_3 jf. (6). Så kan G sammentrækkes til $H \cup \{e_1, e_2, e_3\}$, som kan sammentrækkes til K_7, idet vi kan tilføje 3 kanter til grafen H ved at sammentrække K og K'. Denne modstrid giver, at der for enhver komponent K af $G - H$, hvor $H = G[N(x) \cup \{x\}]$ for $x \in V$ med $\deg_G(x) = 8$, gælder, at $\delta(N(K)) \geq |V(N(K))| - 2$, og da $N(K)$ ikke er komplet får vi, at $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$. Antag, at $G - H$ har en komponent K, hvor $|V(N(K))| = 5$. Da $|V(N(K))|$ er en minimal punktsnitmængde i G gælder jf. (3), at

$$5|V(N(K))| - 15 \geq |E(N(K))| + 2\Delta(\overline{N(K)}).$$

Da $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$, får vi, at $2\Delta(\overline{N(K)}) = 2$, hvilket medfører, at $N(K) = K_1 + C_4$. Dette er i modstrid med (8). Vi har dermed, at $|V(N(K))| \geq 6$.

Da $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$ og $\delta(N(x)) \geq 5$, får vi, at

$$\begin{aligned}|E(N(x))| \geq \frac{1}{2}|V(N(K))|(|V(N(K))| - 2)\\ + 5(8 - |V(N(K))|) - \binom{8 - |V(N(K))|}{2}\\ = \frac{3}{2}|V(N(K))| + 12.\end{aligned}$$

Da $|V(N(K))| \geq 6$, er $|E(N(x))| \geq 21$ og følgeligt er $|E(H)| \geq 29$.
Lad K og K' være komponenter af $G - H$. Lad e_1 være en kant i $\overline{N(K)}$, og lad $e_2 \neq e_1$ være en kant i $\overline{N(K')}$, disse kanter findes jf. (6). Så kan G sammentrækkes til $H \cup \{e_1, e_2\}$. Eftersom $|V| > |V(H)| = 9$ og $|E(H \cup \{e_1, e_2\})| \geq 31 = 5 \cdot 9 - 14$, kan $H \cup \{e_1, e_2\}$ ifølge induktionsantagelsen sammentrækkes til K_7. Denne modstrid giver, at $\delta(G) = 9$.
Da $\delta(N(x)) \geq 5$ og $|N(x)| = 9$, er $|E(N(x))| \geq 23$, og dermed er $|E(H)| \geq 32$. Ifølge induktionsantagelsen kan en graf med 10 punkter og $5 \cdot 10 - 14 = 36$ kanter sammentrækkes til K_7, dvs. hvis vi kan tilføje 4 kanter til grafen H kan denne sammentrækkes til K_7. Antag, at K er en komponent af $G - H$, hvor $\delta(N(K)) \leq |V(N(K))| - 4$. Så findes der tre kanter e_1, e_2, e_3 i $\overline{N(K)}$ med fælles endepunkt y. Lad K' være en anden komponent af $G - H$, og lad e_4 være en kant i $\overline{N(K')} - \{y\}$, denne kant findes jf. (6). Så kan G sammentrækkes til $H \cup \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, som kan sammentrækkes til K_7.
Vi har altså, at $\delta(N(K)) \geq |V(N(K))| - 3$ for enhver komponent K af $G - H$, hvor $H = G[N(x) \cup \{x\}]$ og $\deg_G(x) = 9$.
Antag først, at $|E(N(x))| = 23$. Hvis der findes en komponent K af $G - H$, hvor $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$, så er $|E(N(K))| \geq \frac{1}{2}|V(N(K))|(|V(N(K))| - 2)$ og $\Delta(\overline{N(K)}) = 1$. Da $|E(N(x))| = 23$ får vi, at $|V(N(K))| \leq 5$, og da G er 5-sammenhængende er $|V(N(K))| = 5$. Så er $N(K)$ en minimal punktsnitmængde, og vi har derfor jf. (3), at

$$\begin{aligned}5|V(N(K))| - 15 &\geq |E(N(K))| + 2\Delta(\overline{N(K)}) \\ &\geq \frac{1}{2}|V(N(K))|(|V(N(K))| - 2) + 2,\end{aligned}$$

men så er $N(K) = K_1 + C_4$, jf. $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$ og (3). Dette er i modstrid med $(8)(i)$. Følgeligt får vi, at $\delta(N(K)) \neq |V(N(K))| - 2$. Da $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 1$ giver en modstrid med (5) og vi tidligere har vist, at $\delta(N(K)) > |V(N(K))| - 4$, får vi, at $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 3$ for enhver komponent K af $G - H$.

Lad K være en komponent af $G - H$, hvor $V(N(K))$ er en minimal punktsnitmængde. Da vi har antaget, at $|E(N(x))| = 23$ og $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 3$, får vi, at $|V(N(K))| \leq 7$. Hvis $|V(N(K))| = 7$, er $N(K)$ en 4-regulær graf jf. $|E(N(x))| = 23$ og (3).
Lad p være antallet af punkter med valens $|V(N(K))| - 3$ i $N(K)$.
Hvis $|V(N(K))| = 5$, følger det af (3), at

$$\frac{2p + 3 \cdot (5 - p)}{2} \leq 6,$$

da $\Delta(\overline{N(K)}) = 2$. Af denne ulighed følger, at $p \geq 3$. Hvis $|V(N(K))| = 6$ får vi af (3), at

$$\frac{3p + 4 \cdot (6 - p)}{2} \leq 11,$$

eftersom $\Delta(\overline{N(K)}) = 2$, og følgeligt får vi, at $p \geq 2$.
Da $|E(N(x))| = 23$ og $\delta(N(x)) \geq 5$, indeholder $N(x)$ præcis et punkt y, hvor $\deg_{N(x)}(y) = 6$. Ifølge ovenstående indeholder $N(K)$ mindst to punkter, som har valens $|V(N(K))| - 3$ i $N(K)$, dvs. $\overline{N(K)}$ indeholder to kanter vz, wz, hvor vi

kan vælge z sådan, at $z \neq y$. Lad K' være en anden komponent af $G - H$. Hvis $y \in \{v, w\}$, findes der en kant e i grafen $\overline{N(K')} - \{y, z\}$, da denne graf ikke er komplet jf. (7), og hvis $y \notin \{v, w\}$, lader vi e være en kant i $\overline{N(K')} - \{z\}$, som ikke er komplet jf. (6). Vi har så, at G kan sammentrækkes til $H' = H \cup \{zv, zw, e\}$, og da $|E(H)| = 32$ er $|E(H')| = 35 = 5 \cdot |V(H')| - 15$. Da H' ikke kan sammentrækkes til K_7 og indeholder 10 punkter, er H' jf. induktionsantagelsen en MP_2-cockade. Desuden indeholder H' præcis et punkt af valens 9, nemlig x. Da $|V(H')| = 10$ består H' ikke af to cockade-elementer, som er forskellige fra K_6, og da $\delta(H') \geq 6$, kan K_6 ikke være et cockade-element i H', dvs. H' har kun et cockade-element og dermed to punkter af valens 9. Dette er en modstrid, og vi har derfor, at $|E(N(x))| \geq 24$.

Antag, at der findes en komponent K af $G - H$, hvor $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 3$. Så findes der i $\overline{N(K)}$ to incidente kanter e_1, e_2. Lad K' være en anden komponent af $G - H$, og lad e_3 være en kant i $\overline{N(K')} - \{y\}$, hvor y er punktet som er incident med e_1, e_2 (denne kant findes, da $N(K') - \{y\}$ jf. (6) ikke er komplet). Vi har så, at G kan sammentrækkes til $H \cup \{e_1, e_2, e_3\}$, og da $|E(N(x))| \geq 24$, er $|E(H')| \geq 36$, dvs. jf. induktionsantagelsen kan H' sammentrækkes til K_7. Denne modstrid giver, at $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$ for enhver komponent K af $G - H$, da vi tidligere har vist, at $\delta(N(K)) \leq |V(N(K))| - 4$ giver en modstrid og $\delta(N(K)) < |V(N(K))| - 1$, jf. (5).

Lad K og K' være to forskellige komponenter af $G - H$, og lad e_1 være en kant i $\overline{N(K)}$ og $e_2 \neq e_1$ en kant i $\overline{N(K')}$. Så kan G sammentrækkes til $H' = H \cup \{e_1, e_2\}$, og da G ikke kan sammentrækkes til K_7, får vi, at $|E(N(x))| = 24$, eftersom vi ellers ville få, at $|E(H')| \geq 36$. Så er $|V(N(K))| \leq 6$, og $|V(N(K))| = 5$ giver en modstrid med $(8)(i)$, da $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$ medfører, at $N(K) = K_1 + C_4$. Følgeligt er $|V(N(K))| = 6$ og $N(K) = K_{2,2,2}$, jf. $\delta(N(K)) = |V(N(K))| - 2$. Da $|E(K_{2,2,2})| = 12$, $|E(N(x))| = 24$, $\delta(N(x)) \geq 5$ og $|N(x) - N(K)| = 3$ er $G[N(x) - N(K)] = K_3$ og ethvert punkt i $N(x) - N(K)$ har valens 5 i $N(x)$. Da $|E(N(x))| = 24$ og $\delta(N(x)) \geq 5$, har højst et punkt i $N(x)$ valens 7 i $N(x)$, dvs. der findes et punkt $y \in N(x)$ sådan, at der for ethvert punkt $v \in (N(x) - \{y\})$ gælder, at $\deg_{N(x)}(v) \leq 6$. Lad z være et punkt i $N(x) - N(K)$, som er nabo til y, og lad K' være en komponent af $G - H$ sådan, at $z \in N(K')$. Så har vi igen, at $N(K') = K_{2,2,2}$. Lad e' være en kant i $\overline{N(K')}$, som er incident med z, og lad e være en kant i $\overline{N(K)}$, som ikke er incident med e' eller y. Så kan G sammentrækkes til $H' = H \cup \{e, e'\}$, og da H' indeholder præcis et punkt med valens 9, har vi en modstrid som ovenfor. Vi har hermed bevist, at der ikke findes et modeksempel til sætningen.

$\square$

Vi har med sætning 2.11, bestemt hvilke grafer, som har $n \geq 6$ punkter og præcis $5n-15$ kanter, der ikke kan sammentrækkes til K_7. Disse grafer viste sig, at være grafer isomorfe med $K_{2,2,2,3}$ og MP_2-cockader.

Kapitel 3

$K_{4,4}$-minors

Vi vil i dette kapitel vise, at enhver 4-sammenhængende graf med n punkter og mindst $4n-7$ kanter enten er en K_7 eller har en $K_{4,4}$-minor. Dette resultat får vi brug for i kapitel 4.

Kapitlet bygger på artiklen "Vertex Partitions of $K_{4,4}$-Minor Free Graphs" af Leif Kjær Jørgensen [KJ01].

3.1 4-sammenhængende grafer

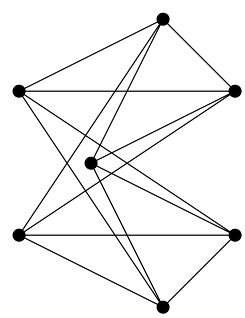
Vi vil i det følgende kalde en punktsnitmængde S i en graf G triviel, hvis $G-S$ har præcis to komponenter, hvoraf den ene består af et enkelt punkt, som i G er nabo til ethvert punkt i S.

Lemma 3.1
Lad $G=(V,E)$ være en graf, hvor $\delta(G)\geq 4$ og $|V|\leq 7$. Så er G enten 4-sammenhængende eller indeholder en udspændende delgraf isomorf med $\overline{K_3}+(K_2\cup K_2)$.
Bevis:

Antag, at G ikke er 4-sammenhængende. Så findes der i G en punktsnitmængde $S \subseteq V$, hvor $|S| = 3$. Grafen $G - S$ er usammenhængende og indeholder højst 4 punkter. Da $\delta(G) \geq 4$, er $\delta(G - S) \geq 4 - |S| = 1$. Følgeligt må $G - S$ bestå af to komponenter G_1, G_2, hvor $G_1 = G_2 = K_2$ og ethvert punkt i G_1, G_2 er nabo til ethvert punkt i S, dvs. G har en udspændende delgraf isomorf med $\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)$.

$\square$

Grafen $\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)$, som omtales i lemma 3.1, ses på figur 3.1.



Figur 3.1: $\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)$.

Lemma 3.2

Lad $G = (V, E)$ være en 4-sammenhængende graf, og lad $S \subseteq V$ være en punktsnitmængde, hvor $|S| = 4$. Lad G_1 og G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$, og lad G_1', G_2' være grafer, som fås fra hhv. G_1 og G_2 ved, at tilføje evt. manglende kanter således, at $G_i'[S] = K_4$ for $i = 1, 2$. Så gælder

(i) G_1' *og* G_2' *er* 4*-sammenhængende.*

(ii) *Hvis* $|V(G_2)| \geq 6$*, findes der en graf* G_1^**, som er en minor af* G *og* G_1^* *fås fra*

G_1' ved at fjerne højst en kant, der ikke findes i G_1.

(iii) G_1^* er 3-sammenhængende, og hvis G_1^* ikke er 4-sammenhængende, kan vi vælge notationen sådan, at $S = \{x_1, x_2, y, z\}$, hvor $yz \notin E(G_1^*)$ og enhver punktsnitmængde T i G_1^*, hvor $|T| = 3$, er på formen $\{x, x_1, x_2\}$ for et $x \in (V(G_1^*) - S)$.

Bevis:
(i) Lad $X \subseteq V(G_i')$, hvor $|X| \leq 3$. Da $G_i'[S] = K_4$ er $G_i'[S - X]$ sammenhængende, dvs. hvis $G_i' - X$ er usammenhængende, så er $S - X$ i samme komponent. Eftersom G er 4-sammenhængende findes der ifølge Mengers sætning for ethvert $y \in (V(G_i') - X)$ fire internt disjunkte $(y, S-X)$-veje i G, og følgeligt findes der i $G_i' - X$ en $(y, S-X)$-vej for ethvert $y \in (V(G_i') - X)$. Vi har dermed, at $G_i' - X$ er sammenhængende for enhver punktmængde $X \subseteq V(G_i')$, hvor $|X| \leq 3$, dvs. G_i' er 4-sammenhængende.

(ii) Antag, at $|V(G_2)| \geq 6$. Lad $S = \{x_1, \cdots, x_4\}$, og lad $y \in V(G_2) - S$. Ifølge lemma A.3 findes der (y, x_i)-veje P_i for $i = 1, \ldots, 4$, hvor $P_i \cap P_j = \{y\}$ for $i \neq j$ og $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$ i G, idet G er 4-sammenhængende. Eftersom $P_i \cap P_j = \{y\}$, er disse fire veje indeholdt i G_2. Antag, at $|P_i| = 1$ for $i = 1, \ldots, 4$. Da $|V(G_2)| \geq 6$, findes der et punkt $z \in V(G_2) - (S \cup \{y\})$. Da $G - \{y\}$ er 3-sammenhængende, findes der mindst tre (z, x_i)-veje Q_i for $x_i \in S$, hvor $Q_i \cap Q_j = \{z\}$ for $i \neq j$. Sammentrækkes nogle af disse veje P_i, Q_i fås en graf G_1^*, som er en minor af G, og som indeholder de samme kanter som G_1' undtaget evt. en kant mellem et par af punkter i S. Antag nu, at en af vejene P_i har længde mindst 2. Vi kan WLOG antage, at $|P_1| \geq 2$. Da G er 4-sammenhængende er $\{y, x_1\}$ ikke en punktsnitmængde, og følgeligt findes der en vej P fra $P_1 - \{y, x_1\}$ til en af vejene P_2, P_3 eller P_4, så kun endepunkterne på vejen P er indeholdt i $P_1 \cup \cdots \cup P_4$. Vi kan WLOG antage, at vejen P går fra $P_1 - \{y, x_1\}$ til P_2. Da $\{y, x_1, x_2\}$ ikke kan være en punktsnitmængde i G findes der en vej P' fra $(P_1 \cup P_2 \cup P_3) - \{y, x_1, x_2\}$ til P_i for $i = 3$ eller $i = 4$, sådan at kun endepunkterne på P' er indeholdt i $P_1 \cup \cdots \cup P_4 \cup P$. Sammentrækkes nogle af disse veje, får vi en minor G_1^* af G, som har de ønskede egenskaber.

(iii) Antag, at G_1^* ikke er 4-sammenhængende. Så er $G_1^* \neq G_1'$, og følgeligt findes der et par af punkter $y, z \in S$, som er naboer i G_1' men ikke i G_1^*. Lad $X \subseteq V(G_1^*)$ være en punktsnitmængde, hvor $|X| \leq 3$. Da G er 4-sammenhængende, er $G - X$ sammenhængende, og følgeligt må enhver komponent af $G_1^* - X$ indeholde et punkt fra S. Eftersom $yz \notin E(G_1^*)$, tilhører y og z hver sin komponent af $G_1^* - X$. Lad $S = \{x_1, x_2, y, z\}$. Da $G_1^* = G_1' - \{yz\}$, er x_1 og x_2 begge naboer til både y og z, følgeligt må $x_1, x_2 \in X$. Yderligere må der i X findes endnu et punkt $x \in V(G_1) - S$, da vi ellers får en modstrid idet vi ved, at tilføje y eller z til X får en punktsnitmængde i G_1', som kun indeholder 3 punkter.

$\square$

3.2 Grafer med en $K_{2,4}$-minor

Lad $G = (V, E)$ være en graf, og lad $X = \{x_1, \cdots, x_4\} \subseteq V$. Grafen G siges at have en $K_{2,4}(X)$-minor, hvis G indeholder sammenhængende disjunkte delgrafer $H_1, \cdots, H_4, L_1, L_2$, hvor $x_i \in H_i$, og G indeholder en $H_i - L_j$ kant for alle $i = 1, \ldots, 4$ og alle $j = 1, 2$.

Det bemærkes, at hvis X er en punktsnitmængde i G og G_1, G_2 er ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$, $G[X] = G_1 \cap G_2$ og G_1, G_2 begge har en $K_{2,4}(X)$-minor, så har G en $K_{4,4}$-minor.

Lemma 3.3
Lad $H = (V, E)$ være en graf, og lad $X \subseteq V$, hvor $|X| = 4$. Lad G være grafen, som fås fra H ved at tilføje kanter mellem ethvert par af punkter i X, som ikke er naboer i H. Hvis G er 4-sammenhængende, og $|E(G)| \geq 4|V(G)| - 9$, så har H en $K_{2,4}(X)$-minor.
Bevis:
Antag, at lemmaet ikke er sandt, dvs. der findes en graf H, hvor grafen G, som

fås fra H på måden beskrevet i lemmaet, er 4-sammenhængende, og $|E(G)| \geq 4|V(G)| - 9$, men hvor H ikke har en $K_{2,4}(X)$-minor. Lad n være det mindste antal punkter i et modeksempel til lemmaet, og lad H være et modeksempel med n punkter og færrest muligt antal kanter.
Først bemærkes, $n \geq 6$ idet grafen ellers ikke kan have mindst $4n - 9$ kanter. Desuden bemærkes, at $n = 6$ medfører, at $|E(G)| \geq 4 \cdot 6 - 9 = 15$, dvs. $G = K_6$, og følgeligt indeholder H en $K_{2,4}(X)$-minor. Vi har altså, at $n \geq 7$.

Vi vil nu vise følgende påstand

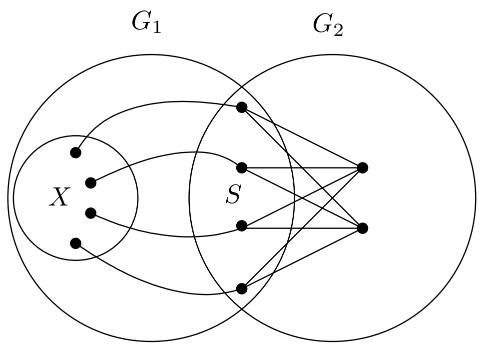
(1) Enhver punktsnitmængde S i G, hvor $|S| = 4$, er triviel og består ikke af mængden af naboer til et punkt i X.

Vi skal altså vise, at der ikke findes en punktsnitmængde S i G på fire punkter, hvor et af følgende to tilfælde gælder.

(i) S er ikke-triviel.

(ii) $G - S$ har to komponenter og den ene komponent består af et enkelt punkt fra X.

Antag, at G har en punktsnitmængde S, hvor $|S| = 4$ og hvor S opfylder en af ovenstående egenskaber. Lad G_1 og G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Da $G[X] = K_4$, har vi, at $X \subseteq V(G_i)$ for $i = 1$ eller $i = 2$. Antag WLOG, at $X \subseteq V(G_1)$, og lad S være valgt sådan, at G_1 har færrest muligt antal punkter. Da S enten er ikke-triviel eller $G - S$ har to komponenter, hvor den ene komponent består af et enkelt punkt fra X, har vi, at $|V(G_2)| \geq 6$. Ifølge lemma 3.2 har G en minor G_1^*, hvor G_1^* er grafen, som fås fra G_1 ved at tilføje kanter mellem ethvert par af punkter i S, som ikke er naboer i G undtaget evt. en enkelt kant, og vi bemærker, at $|V(G_1^*)| < |V(G)|$. Desuden får vi fra lemma 3.2, at G_1^* enten er 4-sammenhængende eller enhver punktsnitmængde i G_1^* er på formen $\{x, x_1, x_2\}$, hvor $x_1, x_2 \in S$ er naboer til samtlige punkter i S og $x \in (V(G_1^*) - S)$. Da S er valgt sådan, at G_1 er mindst mulig, er G_1^* 4-sammenhængende eller $|V(G_1^*)| = 5$. Da $G = (V, E)$, hvor $|V| = n$ er et mindste modeksempel og $|V(G_1^*)| < n$, har vi, at $|E(G_1^*)| \leq 4|V(G_1^*)| - 10$, hvis $|V(G_1^*)| > 5$ og ligeledes hvis $|V(G_1^*)| = 5$, eftersom $4 \cdot 5 - 10 = 10 = |E(K_5)|$. Ifølge Mengers sætning (sætning A.2) findes der i G 4 disjunkte (S, X)-veje, dvs. 4 disjunkte veje fra et punkt i S til et punkt i X. Hvis G_2 har en $K_{2,4}(S)$-minor, vil denne minor sammen med de fire veje give en $K_{2,4}(X)$-minor i G, se figur 3.2.



Figur 3.2: En $K_{2,4}(S)$-minor i G_2 og 4 disjunkte (S, X)-veje i G.

Lad G' være grafen, som fås fra G ved at tilføje kanter mellem punkter i S, som ikke er naboer i G, og lad G_1', G_2' være ægte delgrafer af G', hvor $G' = G_1' \cup G_2'$ og $G'[S] = G_1' \cap G_2'$. Ifølge lemma 3.2 er G_2' 4-sammenhængende, og ifølge ovenstående har G_2' ikke en $K_{2,4}(S)$-minor, eftersom G_2 ikke har en sådan minor, følgeligt har vi, at $|E(G_2')| \leq 4|V(G_2)| - 10$, jf. minimaliteten af n.

Af ovenstående får vi følgende uligheder.

$$
\begin{aligned}
4n-9 \le |E(G)| &= |E(G_1^*)| - |E(G_1^*[S])| + |E(G_2')| - |E(G_2'[S])| + |E(G[S])| \\
&\le 4|V(G_1)| - 10 - |E(G_1^*[S])| + 4|V(G_2)| - 16 + |E(G[S])| \\
&= 4n - 10 + |E(G[S])| - |E(G_1^*[S])|.
\end{aligned}
$$

Af ovenstående får vi, at $|E(G[S])| \ge 1 + |E(G_1^*[S])|$, men dette er i modstrid med, at $|E(G_1^*[S])| \ge |E(G[S])|$. Denne modstrid beviser påstand (1).

Vi vil nu vise følgende påstand.

(2) Lad x og y være naboer, som ikke begge tilhører X. Så har x og y enten 4 fælles naboer eller en fælles nabo v, hvor $\deg_G(v) = 4$.

Hvis G/xy er 4-sammenhængende, får vi jf. minimaliteten af n, at $|E(G/xy)| \le 4(n-1) - 10$, og følgeligt må x og y have mindst 4 fælles naboer.
Hvis G/xy ikke er 4-sammenhængende, findes der punkter u, v, sådan at $\{x, y, u, w\}$ er en punktsnitmængde i G, og jf. (1) er dette mængden af naboer til et punkt $v \in V(G) - X$, dvs. x, y har en fælles nabo v, hvor $\deg_G(v) = 4$.

Af (2) får vi følgende.

(3) To nabo punkter, som begge har valens 4 i G, har højst en fælles nabo.

Påstand (3) følger af, at hvis $|N(x) \cap N(y)| = 2$, får vi en ikke-triviel punktsnitmængde $(N(x) \cup N(y)) - \{x, y\}$ i G, hvor $|(N(x) \cup N(y)) - \{x, y\}| = 4$, hvis $n \neq 7$. Hvis $n = 7$, er $4n - 9 = |E(K_7)| - 2$, dvs. vi har ikke to punkter af valens fire. Hvis $|N(x) \cap N(y)| = 3$, får vi en modstrid med, at G er 4-sammenhængende.

Vi vil nu vise følgende påstand.

(4) G er 5-sammenhængende.

Jf. (1) er det tilstrækkeligt at vise, at der i $V(G)$ ikke findes et punkt x, hvor $\deg_G(x) = 4$. Antag, at der findes et punkt $x \in V(G)$, hvor $\deg_G(x) = 4$. Ifølge (1) har vi, at $x \notin X$. Lad $y \in N(x)$. Da $\deg_G(x) = 4$ og $y \in N(x)$, kan x og y ikke have fire fælles naboer i G, følgeligt må x og y have en fælles nabo z, hvor $\deg_G(z) = 4$ jf. (2). Da x og z begge har valens 4, har de kun en fælles nabo y, og følgeligt må y have valens 4. Tilsvarende må de resterende to punkter i $N(x)$ have valens 4. Da G er sammenhængende, følger det, at et punkt i X må have valens 4, hvilket er en modstrid jf. (1), da de fire naboer til dette punkt er en punktsnitmængde, og grafen G minus denne punktsnitmængde består af to komponenter, hvoraf den ene udgøres af et enkelt punkt fra X. Vi har hermed bevist, at G er 5-sammenhængende.

Da G er 5-sammenhængende, er en graf, som fås fra G ved at slette en kant 4-sammenhængende, og da H er et mindste modeksempel med færrest muligt antal kanter, får vi, at $|E(G)| = 4n - 9$. Følgeligt må G indeholde et punkt $v \notin X$ af valens højst 7. Ifølge (2) er $\delta(N(v)) \geq 4$, eftersom vi har vist, at $\delta(G) > 4$. Da G er 5-sammenhængende, findes der i G, jf. Mengers sætning (sætning A.2), 4 disjunkte $(X, N(v))$-veje P_1, P_2, P_3, P_4, hvor $P_i \cap N(v) = p_i$ for $i = 1, \ldots, 4$, hvoraf nogle evt. har længde 0.
Hvis $N(v)$ er 4-sammenhængende, lader vi $p \in N(v) - \{p_1, \cdots, p_4\}$, og vi har så jf. Mengers sætning (sætning A.2), at der i $N(v)$ findes fire veje fra p til $\{p_1, \cdots, p_4\}$, som kun har p tilfælles. Disse fire veje samt vejene $P_1, \cdots, P_4$ og punktet v giver os en $K_{2,4}(X)$-minor i G, som fås ved at sammentrække vejene $P_1, \cdots P_4$ til et punkt hver.
Hvis $N(v)$ ikke er 4-sammenhængende, indeholder $N(v)$ jf. lemma 3.1 en ud-

spændende delgraf isomorf med $\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)$, eftersom $|N(v)| \leq 7$ og $\delta(N(v)) \geq 4$. Det bemærkes, at vælges fire vilkårlige punkter $v_1, \cdots, v_4$ i grafen $\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)$, findes der en komponent af $(\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)) - \{v_1, \cdots, v_4\}$, som er nabo til ethvert af punkterne $v_1, \cdots, v_4$. Lad F være en sammenhængskomponent af $N(v) - \{p_1, \cdots, p_4\}$, som er nabo til $p_1, \cdots, p_4$. Komponenten F, punktet v og de fire veje $P_1, \cdots, P_4$ giver en $K_{2,4}(X)$-minor af G, som fås ved, at sammentrække F til et punkt og de fire veje P_i for $i = 1, \ldots 4$ til et punkt hver.

□

3.3 Grafer med en $K_{4,4}$-minor

Sætning 3.4
Lad $G = (V, E)$ være en 4-sammenhængende graf, hvor $|V| = n$ og $|E| \geq 4n-7$. Så er $G = K_7$ eller G har en $K_{4,4}$-minor.
Bevis:
Antag, at sætningen er falsk, og lad $G = (V, E)$ være et modeksempel med færrest muligt antal punkter n og færrest muligt antal kanter.
Grafer med færre end $n = 7$ punkter kan ikke have $4n - 7$ kanter, og derfor har vi, at $n \geq 7$. Men $n = 7$ medfører, at $|E| \geq 4 \cdot 7 - 7 = 21 = |E(K_7)|$, dvs. $G = K_7$ og $n = 8$ giver, at $|E| \geq 25 = |E(K_8)| - 3$, dvs. G har en $K_{4,4}$-minor.

Vi vil først vise følgende påstand.

(5) Enhver punktsnitmængde i G på 4 punkter er triviel.

Antag, at $S \subseteq V$ er en ikke-triviel punktsnitmængde i G, hvor $|S| = 4$. Lad G_1, G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Så kan G_1 og G_2 ikke begge have en $K_{2,4}(S)$-minor, da dette ville medføre, at G har en $K_{4,4}$-minor. Antag WLOG, at G_2 ikke har en $K_{2,4}(S)$-minor. Lad G_1', G_2' være graferne, som fås fra hhv. G_1 og G_2 ved at tilføje kanter til ethvert par af punkter i S, som ikke er naboer i G. Så er G'_2, jf. lemma 3.2, 4-sammenhængende og jf. lemma 3.3 har vi, at $|E(G'_2)| \leq 4|V(G_2)| - 10$. Da $|V(G_1)| + |V(G_2)| - 4 = n$, får vi, at

$$\begin{aligned} |E(G_1)| &= |E| - (|E(G'_2)| - 6) \geq 4n - 7 - (4|V(G_2)| - 10) + 6 \\ &= 4|V(G_1)| - 7. \end{aligned}$$

Heraf følger, at $|V(G_1)| \geq 7$, da uligheden ellers ikke kan være opfyldt.
Lad $S \subseteq V$ være en ikke-triviel punktsnitmængde i G med $|S| = 4$, $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$, hvor G_1 er en graf af mindst mulig orden, som opfylder, at $|E(G_1)| \geq 4|V(G_1)| - 7$. Lad igen G'_1 være grafen, som fås fra G_1 ved at tilføje kanter mellem ethvert par af punkter, som ikke er naboer i $G[S]$. Lad yderligere grafen G_1^* være grafen, som fås fra G'_1 ved at slette højst en kant i $G'_1[S]$, som ikke findes i G_1, sådan at G_1^* er en minor af G. Vi har, at $|V(G_1^*)| < |V|$ og $|E(G_1^*)| \geq 4n - 7$. Da G_1^* er en minor af G, har G_1^* ikke en $K_{4,4}$-minor og $G_1^* \neq K_7$, dvs. G_1^* kan ikke være 4-sammenhængende. Ifølge lemma 3.2 er G_1^* 3-sammenhængende, og enhver punktsnitmængde i G_1^*, som indeholder 3 punkter er på formen $\{x, x_1, x_2\}$, hvor $S = \{x_1, x_2, y, z\}$, $yz \notin E(G_1^*)$ og $x \in V(G_1^*) - S$. Lad $F \subseteq V(G_1^*)$ være en punktsnitmængde i G_1^*, hvor $|F| = 3$. Lad $G_1^* = H_y \cup H_z$ og $G_1^*[F] = H_y \cap H_z$, hvor $y \in H_y$ og $z \in H_z$. Lad H_y^* og H_z^* være graferne, som fås fra hhv. H_y og H_z ved at tilføje kanterne xx_1 og xx_2 såfremt disse ikke allerede findes. Så er H_y^* og H_z^* minors af G_1^* og dermed af G. Da S er valgt således, at G_1 er en graf med minimal orden mht. at opfylde, at $|E(G_1)| \geq 4|V(G_1)| - 7$ og $|V(H_y)|, |V(H_z)| < |V(G_1)|$, har vi, at $|E(H_y^*)| \leq 4|V(H_y^*)| - 8$ og $|E(H_z^*)| \leq 4|V(H_z^*)| - 8$. Med $e = |E(G_1^*[\{x, x_1, x_2\}])| = |E(G_1^*[F])|$ får vi følgende.

$$
\begin{aligned}
4|V(G_1^*)| - 7 &\leq |E(G_1^*)| \\
&= |E(H_y^*)| - 3 + |E(H_z^*)| - 3 + e \\
&\leq (4|V(H_y^*)| - 8) - 3 + (4|V(H_z^*)| - 8) - 3 + e \\
&= 4|V(G_1^*)| - 10 + e.
\end{aligned}
$$

Da $e \leq 3$, følger det, at $e = 3$, dvs. $G_1^*[F] = K_3$, $|E(H_y^*)| = 4|V(H_y^*)| - 8$ og $|E(H_z^*)| = 4|V(H_z^*)| - 8$. Da $R = \{y, x, x_1, x_2\}$ og $T = \{z, x, x_1, x_2\}$ er punktsnitmængder i G, er $H_y - R$ en komponent af $G - R$ og $H_z - T$ en komponent af $G - T$. Lad H_y' og H_z' være graferne, som fås fra hhv. H_y og H_z ved at tilføje hhv. kanten xy og kanten xz, hvis disse kanter ikke allerede findes. Så har vi ifølge lemma 3.2, at H_y' og H_z' er 4-sammenhængende, og ifølge lemma 3.3 har H_y en $K_{2,4}(R)$-minor og H_z en $K_{2,4}(T)$-minor. Da $\{x_1, x_2\}$ ikke kan være en punktsnitmængde i G_2, er $G_2 - \{x_1, x_2\}$ sammenhængende, og der findes derfor en (y, z)-vej i $G_2 - \{x_1, x_2\}$. Vejen fra y til z i $G_2 - \{x_1, x_2\}$, $K_{2,4}(R)$-minoren og $K_{2,4}(T)$-minoren i G giver, at G har en $K_{4,4}$-minor, som fås ved at sammentrække (y, z)-vejen. Denne modstrid beviser påstand (5).

Lad $e = xy \in E$. Grafen G/e kan ikke have en $K_{4,4}$-minor, og da G er et mindste modeksempel, har vi, at G/e enten ikke er 4-sammenhængende eller $|E(G/e)| \leq 4|V(G/e)| - 8 = 4n - 12$.

(6) For ethvert par af nabo punkter x, y i G gælder, at x og y har mindst 4 fælles naboer eller en fælles nabo af valens 4 i G.

Ovenstående følger af, at hvis $|E(G/e)| \leq 4|V(G/e)| - 8 = 4n - 12$, så har x og y mindst 4 fælles naboer, og hvis G/e er 3-sammenhængende, så indeholder G/e et punkt af valens 3. Dette punkt havde mindst valens 4 i G og må følgeligt havde været en fælles nabo til x og y med valens præcis 4 i G.

Fra (5) får vi følgende.

(7) To nabo punkter af valens 4 i G har højst en fælles nabo.

Dette følger af, at vi ellers får en punktsnitmængde på 4 punkter i G, som er ikke-triviel.

Vi skal nu vise følgende påstand.

(8) G er 5-sammenhængende.

Da enhver punktsnitmængde på 4 punkter er triviel i G, er det tilstrækkeligt at vise, at $\delta(G) \geq 5$. Antag, at $x \in V$ har valens 4 i G, og lad $y \in N(x)$. Da x og y ikke kan have 4 fælles naboer, må de jf.(6) have en fælles nabo $z \in V$, hvor $\deg_G(z) = 4$. Men x og z kan heller ikke have 4 fælles naboer og har derfor også en fælles nabo y af valens 4. Tilsvarende må de to andre punkter i $N(x)$ have valens 4. Da G er sammenhængende, får vi, at ethvert punkt i G har valens 4, men dette er i modstrid med, at $|E| \geq 4n - 7$, eftersom en 4-regulær graf med n punkter har $2n$ kanter.

Da G er 5-sammenhængende må $|E| = 4n - 7$, eftersom vi ellers kan slette en kant fra G og derved få en 4-sammenhængende graf med n punkter og færre kanter end G, som ikke har en $K_{4,4}$-minor, hvilket er i modstrid med, at G er et mindste modeksempel med færrest muligt antal kanter.

Næste påstand vi skal vise er følgende.

(9) $N(x)$ er 4-sammenhængende for ethvert $x \in V$, hvor $\deg_G(x) \leq 7$.

Da G er 5-sammenhængende, indeholder G ikke punkter af valens 4, og jf. (6) har ethvert par af punkter, som er naboer, derfor mindst 4 fælles naboer, dvs. $\delta(N(x)) \geq 4$. Da G ikke indeholder en $K_{4,4}$, kan $N(x)$ ikke indeholde en $K_{3,4}$ og vi har derfor jf. lemma 3.1, at $N(x)$ er 4-sammenhængende, eftersom $K_{3,4}$ er en udspændende delgraf af $\overline{K_3} + (K_2 \cup K_2)$.

Vi vil nu vise følgende påstand.

(10) Lad $x, y \in V$, hvor $xy \notin E$ og $\deg_G(x), \deg_G(y) \leq 7$. Så har x og y mindst 5 fælles naboer.

Lad $x, y \in V$ være et par af ikke-naboer i G, som begge højst har valens 7 i G og antag, at x og y højst har 4 fælles naboer. Lad P_1, P_2, P_3, P_4 være disjunkte $(N(x), N(y))$-veje i G, hvor $N(x) \cap P_i = \{x_i\}$ og $N(y) \cap P_i = y_i$ for $i = 1, \ldots, 4$. Disse veje findes jf. Mengers sætning (sætning A.2), da G er 5-sammenhængende. Det bemærkes, at vi tillader vejene P_i at have længde 0 såfremt $x_i = y_i$. Da $\deg_G(x)$, $\deg_G(y) \leq 7$, har vi jf. (9), at $N(x)$ og $N(y)$ er 4-sammenhængende, og følgeligt har $N(x) - \{x_1, \cdots, x_4\}$ en komponent, som er nabo til $x_1, \cdots, x_4$, og $N(y) - \{y_1, \cdots, y_4\}$ har en komponent, som er nabo til $y_1, \cdots, y_4$, eftersom mængderne $\{x_1, \cdots, x_4\}$ og $\{y_1, \cdots, y_4\}$, såfremt de er punktsnitmængder i hhv. $N(x)$ og $N(y)$, er minimale. Sammentrækker vi disse to komponenter til hvert sit punkt og vejene $P_1, \cdots, P_4$ til hvert sit punkt, får vi en $K_{4,4}$, idet x og y begge er naboer til ethvert punkt i hhv. $N(x)$ og $N(y)$, dvs. G har en $K_{4,4}$-minor. Denne modstrid viser påstand (10).

Næste påstand, vi skal vise, er følgende.

(11) Der findes ikke et $x \in V$, hvor $\deg_G(x) = 6$.

Antag, at $x \in V$ har valens 6 i G. Da G jf. (8) er 5-sammenhængende, findes der en komponent K af $G - (N(x) \cup \{x\})$, som er nabo til mindst 5 punkter i $N(x)$. Lad $y \in N(x)$ være et punkt, så K er nabo til ethvert punkt i $N(x) - \{y\}$. Hvis der findes et punkt $z \in N(x)$, hvor $yz \notin E$, så følger det af (9), at y og z har mindst 4 fælles naboer i $N(x)$, som alle er naboer til K og x. Sammentrækkes K til et punkt, vil dette punkt og x, y, z være punkterne i den ene partition af en $K_{4,4}$, og de fire punkter i $N(x) - \{y, z\}$ vil udgøre den anden partition, dvs. G har en $K_{4,4}$-minor. Grundet denne modstrid må vi nu antage, at y er nabo til ethvert punkt i $N(x) - \{y\}$. Da $\delta(N(x) - \{y\}) \geq 3$ og $|N(x) - \{y\}| = 5$ indeholder $N(x) - \{y\}$ et punkt z, som har valens 4 i $N(x) - \{y\}$. Vi har igen, at G så har en $K_{4,4}$-minor, idet vi som i forrige tilfælde har, at y og z har 4 fælles naboer i $N(x)$.

Vi vil nu vise følgende påstand.

(12) $\delta(G) = 7$

Da G er 5 sammenhængende, har vi, at $\delta(G) \geq 5$, og ifølge (11) kan ingen punkter i G have valens 6. Lad $x \in V$ være et punkt af valens 5 i G. Ifølge(9) er $N(x)$ 4-sammenhængende, dvs. $N(x) = K_5$. Da G er 5-sammenhængende, kan punkterne i $N(x)$ ikke have valens 5 i G, eftersom vi så får en modstrid med, at G er 5-sammenhængende.
Da $|E| = 4n - 7$, findes der et punkt $y \notin N(x)$, hvor $\deg_G(y) = 5$ eller $\deg_G(y) = 7$. Ifølge (10) har x og y mindst 5 fælles naboer, og eftersom $\deg_G(x) = 5$ har vi derfor, at $N(x) \subseteq N(y)$. Hvis $\deg_G(y) = 5$, er $N(x) = N(y)$. Da G er 5-sammenhængende, findes der en komponent K af $G - (N(x) \cup \{x, y\})$, som er nabo til ethvert punkt i $N(x)$, og følgeligt får vi igen, at G har en $K_{4,4}$-minor, idet vi kan sammentrække komponenten K til et punkt x_K, og vi har dermed en

$K_{4,4}$, hvor den ene partition består af x_K, x, y samt et vilkårligt punkt fra $N(x)$, og den anden komponent består af de resterende 4 punkter i $N(x)$. Denne modstrid giver os, at $\delta(G) = 7$, idet $\delta(G) \geq 8$ giver en modstrid med, at $|E| = 4n-7$.

Da $|E| = 4n - 7$, indeholder G mindst 14 punkter af valens 7. Lad $x \in V$ være et punkt med valens 7. Så findes der punkter $y_1, \cdots, y_4$ af valens 7, som ikke er naboer til x og som er forskellige fra x. Ifølge (10) har x og y_i mindst 5 fælles naboer for $i = 1, \ldots, 4$, dvs. der findes $S_i \subseteq N(x) \cap N(y)$, hvor $|S_i| \geq 5$ for $i = 1, \ldots, 4$. Da $|N(x)| = 7$ findes der $1 \leq i, j \leq 4$ sådan, at $|S_i \cap S_j| \geq 4$ for $i \neq j$. Lad $S \subseteq S_i \cap S_j$, hvor $|S| = 4$. Sammentrækker vi en komponent af $N(x) - S$ til et punkt v, har vi en $K_{4,4}$ bestående af punktet v, x, y_i, y_j i den ene partition og punkterne i S udgør den anden partition af $K_{4,4}$, dvs. G har en $K_{4,4}$-minor.

$\square$

Kapitel 4

Grafer, som er 7-kromatiske, har enten en $K_{4,4}$-minor eller en K_7-minor

Vi vil i dette kapitel vise, at enhver 7-kromatisk graf har en K_7-minor eller en $K_{4,4}$-minor, og det bemærkes, at dette bevises uden brug af 4-farvesætningen.

Jakobsen [J71] har vist at enhver 7-kromatisk graf har en K_7 minus to kanter som minor. Der findes to ikke-isomorfe grafer af denne type og Jakobsen har altså vist, at enhver 7-kromatisk graf har enten den ene eller den anden som minor. Desuden har Mader [M68] vist, at enhver graf med n punkter og mindst $5n-14$ kanter har en K_7-minor. I kapitel 2 bestemte vi, hvilke grafer der har n punkter og præcis $5n-15$ kanter og som ikke har en K_7-minor.

Kapitlet er baseret på artiklen "Any 7-chromatic graph has K_7 or $K_{4,4}$ as a minor" af Ken-ichi Kawarabayashi og Bjarne Toft [KT05].

4.1 Egenskaber ved 7-kromatiske grafer, som ikke har en K_7-minor

Vi skal betragte grafer G, som opfylder følgende fire betingelser.

(i) G er 7-kromatisk.

(ii) G har ikke en K_7-minor.

(iii) G har ikke en $K_{4,4}$-minor.

(iv) G er en 7-kromatisk graf, som ikke kan sammentrækkes til en mindre 7-kromatisk graf.

Det bemærkes, at Hadwigers formodning for $k = 7$ siger, at den eneste 7-kromatiske graf, som ikke kan sammentrækkes til en mindre 7-kromatisk graf, er K_7.

Vi får brug for en række resultater vedrørende grafer, som opfylder betingelserne $(i), (ii)$ og (iv).

Følgende to resultater er bevist af Dirac [D60] og [D64].

Lemma 4.1
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder betingelserne $(i), (ii)$ og (iv). Så er $\delta(G) \geq 7$, og der findes ikke et punkt $u \in V$ af valens 7, som har tre naboer u_1, u_2 og u_3, hvor $u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3 \notin E$.
Bevis:
Antag, at der findes et $x \in V$, hvor $\deg(x) = 6$. Da G ikke kan sammentrækkes til K_7, er $N(x) \neq K_6$, dvs. der findes $u, v \in N(x)$, hvor $uv \notin E$. Eftersom G ikke kan sammentrækkes til en mindre 7-kromatisk graf, kan vi farve grafen, som fås

fra G ved at sammentrække kanterne ux, vx til et punkt w med 6 farver. Farven, som bruges i denne nye graf til at farve punktet w med, kan vi i G farve både u og v med. Vi har, at vi kan farve $G - \{x\}$ med 6 farver, og da vi kun bruger 5 af disse til at farve $N(x)$ med følger det, at der er en farve ledig til at farve x med, dvs. G kan farves med 6 farver. Denne modstrid beviser, at $\delta(G) \geq 7$.
Antag, at der findes et punkt $u \in V$, hvor $\deg(u) = 7$, og hvor der for $u_1, u_2, u_3 \in N(u)$ gælder, at $u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3 \notin E$. Da G ikke kan sammentrækkes til en mindre 7-kromatisk graf, kan vi farve grafen, som fås fra G ved at sammentrække kanterne uu_1, uu_2, uu_3 til et punkt w med 6 farver. Farven, som bruges i denne nye graf til at farve punktet w med, kan vi i G bruge til at farve både u_1, u_2 og u_3 med. Vi har, at vi kan farve $G - \{u\}$ med 6 farver og da vi kun bruger 5 farver til $N(u)$ får vi, at G kan farves med 6 farver. Denne modstrid fuldfører beviset for lemmaet.

□

Lemma 4.2
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder $(i), (ii)$ og (iv). Så indeholder G ikke en K_6.
Bevis:
Antag, at G indeholder en K_6, og lad $S = V(K_6) \subseteq V$. Antag, at S er en punktsnitmængde i G. Lad G_1 og G_2 være ægte delgrafer af G, hvor $G = G_1 \cup G_2$ og $G[S] = G_1 \cap G_2$. Da G opfylder betingelse (iv) kan G_1 og G_2 farves med 6 farver og vi kan vælge farvningen af $G[S]$ i hhv. G_1 og G_2 sådan, at disse stemmer overens, dvs. G kan farves med 6 farver. Denne modstrid giver, at S ikke er en punktsnitmængde i G. På tilsvarende vis vises, at der for enhver punktsnitmængde i G gælder, at den ikke kan inducere en komplet graf i G. Vi har dermed, at $G - S$ kun har en komponent, og at ethvert punkt i S har en nabo i $G - S$, da vi ellers får en komplet separerende delgraf i G. Sammentrækkes $G - S$ til et punkt får vi en K_7, dvs. G har en K_7-minor. Dette er i modstrid med, at G opfylder betingelse (ii).

□

Følgende resultat er bevist af Mader [M68].

Lemma 4.3
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder betingelserne $(i), (ii)$ og (iv). Så gælder, at G er 7-sammenhængende.

Næste resultat er bevist af Stiebitz og Toft [ST95].

Lemma 4.4
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder $(i), (ii)$ og (iv). Så findes der mindst tre punkter $x_1, x_2, x_3 \in V$, hvor deg$(x_i) \geq 8$ for $i = 1, 2, 3$.

Desuden får vi brug for sætning 3.4, som vi beviste i kapitel 3.

Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder $(i), (ii), (iii)$ og (iv). Dermed har vi, at $G \neq K_7$ og jf. lemma 4.3, at G er 7-sammenhængende. Det følger så af sætning 3.4, at

(a) $|E| \leq 4|V| - 8$.

Lemma 4.5
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder $(i), (ii), (iii)$ og (iv). Så findes der mindst 16 punkter $x_1, \cdots, x_{16} \in V$, hvor deg$(x_i) = 7$ for $i = 1, \ldots, 16$.
Bevis:
Vi har ifølge lemma 4.1, at $\delta(G) \geq 7$. Antag, at G har færre end 16 punkter af valens 7. Vi får så, at

$$|E| > \frac{7 \cdot 16}{2} + \frac{8(|V| - 16)}{2} \;=\; 4|V| - 8.$$

Dette er i modstrid med (a), og følgeligt indeholder G mindst 16 punkter med valens 7.

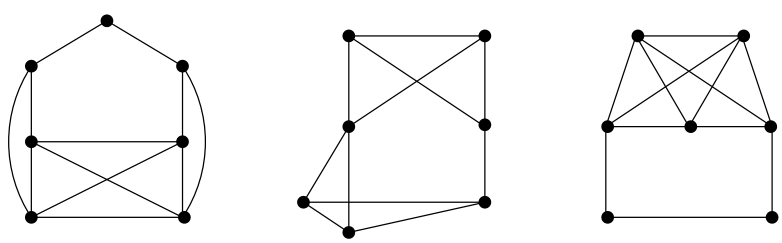
$\square$

Vi får ifølge lemma 4.4 og lemma 4.5, at

(b) $|V| \geq 19$.

Lemma 4.6
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder $(i), (ii), (iii)$ og (iv). Så indeholder G ikke en $K_{3,4}$.
Bevis:
Antag, at G indeholder en $K_{3,4}$. Da G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende, findes der 7 disjunkte $(v, V(K_{3,4}))$-veje i G, hvor $v \in (V - V(K_{3,4}))$, og følgeligt har G en $K_{4,4}$-minor. Dette er i modstrid med (iv).

$\square$



1 2 3

Figur 4.1: De tre mulige grafer, hvis N er sammenhængende.

Lemma 4.7
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder $(i), (ii), (iii)$ og (iv). Så gælder for ethvert punkt $x \in V$, hvor deg$(x) = 7$, at $N(x)$ enten indholder K_3 og K_4 som disjunkte delgrafer eller en kreds af længde 5, hvor to nabo punkter er erstattet af

en K_2 (se figur 4.1, graf 1).

Bevis:

Lad $x \in V$ være en punkt, hvor deg$(x) = 7$. Så gælder ifølge lemma 4.1, at uafhængighedstallet for $N(x)$ er 2, dvs. $\alpha(N(x)) = 2$. Vi kan ved evt. at fjerne kanter fra $N(x)$ få en α-kritisk udspændende delgraf N af $N(x)$, dvs. en graf hvor der gælder, at for enhver kant $e \in E(N)$ er $\alpha(N - e) > \alpha(N)$. Hvis N er usammenhængende, får vi dermed, at N består af to disjunkte komplette grafer isomorfe med hhv. K_3 og K_4. Hvis N er sammenhængende er N ifølge [B98] isomorf med en af de tre grafer på figur 4.1. Da G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende, findes der 7 $(z, N(x))$-veje $P_1, \cdots, P_7$ i G for $z \in V(G) - (\{x\} \cup V(N(x)))$, hvor $P_i \cap P_j = \{z\}$ for alle $i \neq j$, hvor $i, j \in \{1, \ldots, 7\}$. Hvis N er isomorf med graf 2 på figur 4.1, har N en $K_{2,4}$-minor, og følgeligt har $N \cup \{x\} \cup P_1 \cup \cdots \cup P_7$ en $K_{4,4}$-minor, hvilket er i modstrid med (iii). Tilsvarende gælder, hvis N er isomorf med graf 3 på figur 4.1. Vi har dermed, at $N(x)$ enten indholder to disjunkte delgrafer isomorfe med hhv. K_3 og K_4 eller $N(x)$ indeholder en delgraf isomorf med graf 1 på figur 4.1.

$\square$

Af ovenstående lemma (lemma 4.7) får vi følgende.

(c) Ethvert punkt i G, som har valens 7, er indeholdt i en K_5 i G.

Da G ifølge lemma 4.5 indholder mindst 16 punkter med valens 7, og ethvert sådan punkt jf. (c) er indeholdt i en K_5, får vi følgende.

(d) G indeholder mindst fire forskellige, ikke nødvendigvis disjunkte, delgrafer isomorfe med K_5.

4.2 Grafen G minus to vilkårlige punkter er ikke-planar

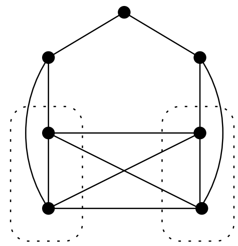
Vi vil i dette afsnit vise, at der for en graf G, som opfylder betingelserne $(i), (ii)$, (iii) og (iv), gælder, at $G - \{v, u\}$ ikke er planar for alle $u, v \in V$. Dette følger direkte af fire-farvesætningen idet $G - \{u, v\}$ er l-kromatisk for $l \geq 5$. Vi vil vise dette uden brug af fire-farvesætningen.

Lemma 4.8
Lad $G = (V, E)$ være en graf, som opfylder betingelserne $(i), (ii), (iii)$ og (iv), og lad $u, v \in V$ være to forskellige punkter. Så er $G - \{u, v\}$ ikke-planar.
Bevis:
Antag, at der findes to forskellige punkter $u, v \in V$, hvor $G - \{u, v\}$ er planar. Ifølge lemma 4.3 er G 7-sammenhængende og følgeligt er $G - \{u, v\}$ 5-sammenhængende. Lad m være antallet af punkter i $G - \{u, v\}$, som har valens 5. Så har vi, at

$$3n - 6 \geq |E(G - \{u, v\})| \geq \frac{5m + 6(n - m)}{2}$$

og dermed, at der i $G - \{u, v\}$ findes mindst 12 punkter med valens 5. Da $\delta(G) \geq 7$ ifølge lemma 4.1, må punkterne med valens 5 i $G - \{u, v\}$ have valens 7 i G, dvs. alle 12 punkter er naboer til både u og v. Ifølge lemma B.2 indeholder en 5-sammenhængende planar graf ikke en K_4 og dermed må enhver K_5 i G indeholde både u og v. Vi har ifølge (c), at u og v begge er naboer til alle de mindst 12 punkter af valens 7 i G, dvs. $\deg_G(u)$, $\deg_G(v) \geq 13$. Lad $w \in V(G - \{u, v\})$ være et punkt med valens 7. Så har vi, at $u, v \in N_G(w)$ og desuden kan $N_G(w) - \{u, v\}$ ikke indeholde en K_3, eftersom vi så får, at $\{w\} \cup (N_G(w) - \{u, v\})$ indeholder en K_4. Vi får ifølge lemma 4.7, at $N_G(w)$ indeholder en udspændende delgraf isomorf med grafen, som ses på figur 4.2, og hver af de to tilføjede K_2 grafer i denne graf indeholder præcis et af punkterne u, v, se figur 4.2.

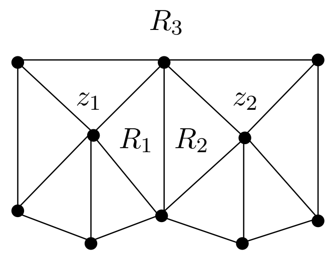
Desuden indeholder $N_G(w) - \{u, v\}$ en kreds C_5. Lad $V(C_5) = \{x_1, \cdots, x_5\}$, hvor x_2, x_3 begge er naboer til både u og v i $N_G(w)$, x_1 er nabo til u og x_4 er nabo til v. Da G indeholder mindst 16 punkter med valens 7 jf. lemma 4.5, kan vi vælge to punkter $z_1, z_2 \in V$, hvor $\deg_G(z_i) = 7$ for $i = 1, 2$ og $z_1 z_2 \notin E$.



Figur 4.2: De to K_2 grafer, som omtales er markeret med stiplede linier.

I $G - \{u, v\}$ inducerer punktmængden $\{z_i\} \cup (N_G(z_i) - \{u, v\})$ en graf isomorf med $H_i = K_1 + C_5$ for $i = 1, 2$ jf. lemma 2.8. Da $G - \{u, v\}$ ifølge lemma 4.3 er 5-sammenhængende, deler kredsen $C_5 \subseteq H_1$ planen i 2 regioner, hvor punktet z_1 er i den ene region og H_2 i den anden. Desuden findes der 5 (z_1, z_2)-veje $P_1, \cdots, P_5$ i $G - \{u, v\}$, hvor $P_i \cap P_j = \{z_1, z_2\}$ for $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$ og $i \neq j$. Lad $x_i \in P_i$ for $i = 1, \ldots, 5$. I $G - \{u, v\}$ har vi følgende 4 sammenhængende delgrafer: punktet z_1, kanten $x_1 x_2$, $P_4 - \{z_1\}$ og $(P_3 - \{z_1, x_3, z_2\}) \cup (P_5 - \{z_1, x_5, z_2\}) \cup (H_2 - (H_2 \cap P_4))$. Det bemærkes, at delgrafen $(P_3 - \{z_1, x_3, z_2\}) \cup (P_5 - \{z_1, x_5, z_2\}) \cup (H_2 - (H_2 \cap P_4))$ indeholder 4 punkter fra $H_2 - \{z_2\}$. Punkterne u, v, x_3 og x_5 er alle naboer til mindst et punkt i hver af de 4 sammenhængende delgrafer, dvs. sammentrækkes hver af de 4 sammenhængende delgrafer til et punkt får vi en K_7-minor. Denne modstrid giver, at de 4 sammenhængende delgrafer ikke er disjunkte. Vi har dermed, at enten x_1 eller x_2 tilhører H_2 eller begge tilhører H_2. Antag, at $x_i \in H_2$ for mindst et $i \in \{1, 2\}$. Pga. symmetri får vi, at x_3 eller x_4 så også må tilhøre H_2. Da $G - \{u, v\}$ er 5-sammenhængende, får vi, at $|H_1 \cap H_2| = 2$, og de to punkter i $H_1 \cap H_2$ må være naboer i H_1, idet vi ellers får en punktsnitmængde bestående af enten z_1, x_1, z_2 og x_3 eller z_1, x_2, z_2 og x_4. Vi har dermed, at $x_2, x_3 \in H_2$. Da $G - \{u, v\}$ indeholder mindst 12 punkter af valens 5, kan vi vælge et andet punkt z_3 af valens 5 og ved samme argumentation som for z_2 får vi, at $x_2, x_3 \in N(z_3)$. Da $G - \{u, v\}$ er planar, må z_3 enten ligge i region R_1, R_2 eller R_3, se figur 4.3, men alle tre tilfælde medfører, at x_2, x_3 og z_3 er en punktsnitmængde. Dette er i modstrid med, at $G - \{u, v\}$ er 5-sammenhængende og fuldfører beviset for lemmaet.

□



Figur 4.3: Delgrafen $H_1 \cup H_2$.

4.3 Forbudte delgrafer

Lad G være en graf, som opfylder betingelserne $(i), (ii), (iii)$ og (iv), og lad L_1, L_2, L_3 være tre ikke nødvendigvis disjunkte delgrafer af G, hvor $L_i = K_5$ for $i = 1, 2, 3$ og $L_i \neq L_j$ for alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$. Ifølge (d) findes sådan tre delgrafer i G.

Det bemærkes at vi i det følgende benytter notationen $|L_i \cup \cdots \cup L_j|$ og $|L_i \cap \cdots \cap L_j|$ for hhv. $|V(L_i) \cup \cdots \cup V(L_j)|$ og $|V(L_i) \cap \cdots \cap V(L_j)|$.

Lemma 4.9
Lad G, L_1, L_2 og L_3 være grafer som beskrevet ovenfor. Så gælder, at

(1) $|L_i \cap L_j| \neq 3$ *for* $i \neq j$ *og* $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

(2) $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \neq 4$

(3) Der findes højst 5 *punkter i* G*, som er indeholdt i mere end en af delgraferne* L_1, L_2, L_3.

Bevis:
(1): Antag, at der findes et $i, j \in \{1,2,3\}$,hvor $i \neq j$ og $|L_i \cap L_j| = 3$. Så har vi, at $K_{3,4}$ er en udspændende delgraf af $L_i \cup L_j$, dvs. G indeholder en $K_{3,4}$, hvilket er i modstrid med lemma 4.6.
(2): Antag, at $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| = 4$. Så har vi igen, at G indeholder en $K_{3,4}$, eftersom $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ indeholder en $K_{3,4}$. Da dette er i modstrid med lemma 4.6, får vi, at $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \neq 4$.
(3): Antag, at der findes mere end 5 punkter i G, som er indeholdt i mere end en af delgraferne L_1, L_2, L_3. Så indeholder $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subseteq G$ en K_6, hvilket er i modstrid med lemma 4.2.

□

Lemma 4.10
Lad G, L_1, L_2 og L_3 være grafer som ovenfor. Så gælder, at

$$|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \leq 2 \text{ og } |L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 9.$$

Bevis:
Antag, at $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| > 2$. Ifølge lemma 4.9, får vi, at $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| > 3$. Men ifølge lemma 4.9, (2) er $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \neq 4$, og følgeligt er $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| = 5$, dvs. $L_1 = L_2 = L_3$. Denne modstrid giver, at $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \leq 2$.
Antag, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \leq 8$. Da $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ikke indeholder en K_6 jf. lemma 4.2, er $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| > 7$. Antag, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| = 8$. Da $|L_i \cap L_j| \neq 3$ er eneste muligheder med $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| = 8$, at $|L_1 \cap L_2| = 2$ eller $|L_1 \cap L_2| = 4$. Hvis $|L_1 \cap L_2| = 2$, er $|L_1 \cup L_2| = 8$, og eftersom L_3 ikke kan have 3 punkter tilfælles med hverken L_1 eller L_2, må L_3 indeholde 4 punkter fra enten L_1 eller L_2 og et punkt fra den anden, men så er der i G mere end 5 punkter, som er indeholdt i mere end en af graferne L_1, L_2 og L_3. Vi har altså, at $|L_1 \cap L_2| = 4$. Så har L_3 tre punkter tilfælles med $L_1 \cup L_2$. Da $|L_i \cap L_3| \neq 3$ for $i = 1, 2$, må vi nødvendigvis først vælge et punkt u, som ikke er indeholdt i $L_1 \cap L_2$. Vi har dermed allerede 5 punkter, som er indeholdt i mere end en af graferne L_1, L_2 og

L_3, dvs. de resterende to punkter i L_3 skal vælges blandt punkterne i $L_1 \cap L_2$, men dette giver en modstrid med, at $|L_i \cap L_3| \neq 3$ for $i = 1, 2$. Vi har dermed, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 9$.

□

Lemma 4.11
Lad G, L_1, L_2 og L_3 være graferne fra før, og lad $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Så gælder, at $|L_i \cap L_3| \neq 2$ for $i = 1, 2$.
Bevis:
Antag, at L_1 og L_2 er disjunkte og at $|L_i \cap L_3| = 2$ for et $i \in \{1, 2\}$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$. Lad $L_1 \cap L_3 = \{x, y\}$. Da G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende, findes der i $G - \{x, y\}$ 5 indbyrdes disjunkte $(L_2, (L_1 \cup L_3) - \{x, y\})$-veje $P_1, \cdots P_5$. Vejene $P_1, \cdots, P_5$ samt punkterne x, y indeholder en K_7-minor. Dette er en modstrid med, at G opfylder betingelse (ii).
Antag nu, at $|L_1 \cap L_3| = |L_2 \cap L_3| = 2$. Lad $L_1 \cap L_3 = \{x_1, x_2\}$ og $L_2 \cap L_3 = \{y_1, y_2\}$. Da G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende, er $G - \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ 3-sammenhængende, dvs. der findes i $G - \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ 3 indbyrdes disjunkte $(L_1 - \{x_1, x_2\}, L_2 - \{y_1, y_2\})$-veje P_1, P_2, P_3. Vi har så, at vejene P_1, P_2, P_3 samt punkterne x_1, x_2, y_1, y_2 indeholder en K_7-minor, dvs. G har en K_7-minor. □

Lemma 4.12
Lad graferne G, L_1, L_2 og L_3 være som før, og antag, at $L_1 \cap L_2 = \{v\}$. Antag yderligere, at $v \notin L_3$. Så gælder, at $|L_i \cap L_3| \neq 2$ for $i = 1, 2$.
Bevis:
Antag, at $|L_i \cap L_3| = 2$ for $i = 1$ eller $i = 2$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$. Lad $L_1 \cap L_3 = \{x_1, x_3\}$. Grafen $G - \{v, x_1, x_2\}$ er ifølge lemma 4.3 4-sammenhængende, og følgeligt findes der 4 disjunkte $(L_2 - \{v\}, (L_1 \cup L_3) - \{v, x_1, x_2\})$-veje $P_1, \cdots, P_4$ i $G - \{v, x_1, x_2\}$. Punkterne v, x_1, x_2 og vejene $P_1, \cdots, P_4$ indeholder en K_7-minor, hvilket er i modstrid med, at G opfylder betingelse (ii), og vi må derfor konkludere, at $|L_i \cap L_3| \neq 2$ for $i = 1$ og $i = 2$.
Det bemærkes, at tilfældet hvor $|L_1 \cap L_3| = |L_2 \cap L_3| = 2$, er indeholdt i ovenstående, eftersom vi så har, at v_1, v_2, hvor $L_2 \cap L_3 = \{v_1, v_2\}$, er to af vejene

$P_1, \cdots, P_4$.

□

Følgende lemma følger, som lemma 4.11, af at G er 7-sammenhængende.

Lemma 4.13
Lad G, L_1, L_2 og L_3 være graferne fra tidligere, og antag, at $|L_1 \cap L_2| = 2$. Så er $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$.

Definition 4.14 Triangular
Lad v_1, v_2, v_3 være punkterne i en delgraf T af en graf H, hvor $T = K_3$. Grafen H kaldes triangular mht. T, hvis H opfylder en af følgende tre betingelser.

(1) Der findes et $i \in \{1, 2, 3\}$, sådan at $\Delta(H - \{v_i\}) \leq 2$, og grafen $H - \{v_i\}$ er enten en kreds eller indeholder ingen kredse.

(2) For alle $x \in V(H)$ gælder, at $\deg_H(x) \leq 3$, og der findes højst et punkt $y \in (V(H) - \{v_1, v_2, v_3\})$, hvor $\deg_H(y) = 3$. $H - \{v_1, v_2, v_3\}$ indeholder ingen kredse.

(3) For alle $x \in V(H)$ gælder, at $\deg_H(x) \leq 3$. Der findes en $K_3 = C$ i $H - \{v_1, v_2, v_3\}$. For ethvert $y \in V(H)$, hvor $\deg_H(y) = 3$, gælder, at $y \in (\{v_1, v_2, v_3\} \cup V(C))$. Enhver kreds i G, som er forskellig fra T og C, indeholder både et punkt fra T og et punkt fra C.

Følgende lemma stammer fra [RST93], og der henvises til samme artikel for bevis af lemmaet. Det bemærkes, at begrebet triangular (definition 4.14) ligeledes stammer fra [RST93].

Lemma 4.15
Lad H være en 4-sammenhængende ikke-planar graf, og lad T være en delmængde af $V(H)$, hvor $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ og $H[T] = K_3$. Lad Z være en induceret delgraf af H, hvor $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V(Z)$, og antag, at Z ikke er triangular mht. T. Så findes der punktmængder $Z_1, Z_2 \subseteq V(H)$, hvor $Z_1 \cap V(Z - \{v_1, v_2, v_3\}) \neq \emptyset$ og $Z_2 \cap V(Z - \{v_1, v_2, v_3\}) \neq \emptyset$, sådan at delgrafen af H induceret af $Z_1 \cup Z_2 \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ har en K_5-minor.

Lemma 4.16
Lad graferne G, L_1, L_2 og L_3 være som tidligere, og antag, at $|L_1 \cap L_2| = 2$. Lad $L_1 \cap L_2 = \{x, y\}$ og $L_i' = L_i - \{x, y\}$ for $i = 1, 2$. Så gælder, at

$$(L_1 \cup L_2) \cap L_3 \neq \{x, y\}$$

og hvis $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x, y\}$, så gælder yderligere, at

$$|L_i' \cap L_3| \neq 2, \text{ for } i = 1, 2.$$

Bevis:
Grafen $H = G - \{x, y\}$ er 5-sammenhængende ifølge lemma 4.3 og ikke-planar ifølge lemma 4.8. Lad $Z = (L_1 \cup L_2 \cup L_3) - \{x, y\}$. Hvis $(L_1 \cup L_2) \cap L_3 = \{x, y\}$, lader vi $T = L_1'$, og vi har så, at Z ikke er triangular mht. T, da hverken $(1), (2)$ eller (3) i definition 4.14 er opfyldt. Vi har så ifølge lemma 4.15, at H har en K_5-minor, og følgeligt har G en K_7-minor. Denne modstrid giver, at $(L_1 \cup L_2) \cap L_3 \neq \{x, y\}$.
Antag nu, at $|L_i' \cap L_3| = 2$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$. Så er $L_2' \cap L_3 = \emptyset$, da vi ellers får, at G indeholder en graf isomorf med $K_{3,4}$, hvilket er i modstrid med lemma 4.6. Lad $T = L_2'$. Så er $Z = (L_1 \cup L_2 \cup L_3) - \{x, y\}$ ikke triangular mht. T, da hverken $(1), (2)$ eller (3) i definition 4.14 er opfyldt, og vi har derfor igen jf. lemma 4.15, at G har en K_7-minor. Denne modstrid giver, at $|L_i' \cap L_3| \neq 2$ for $i = 1, 2$.

□

Lemma 4.17
Lad graferne G, L_1, L_2 og L_3 være som før. Så er $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \leq 1$.
Bevis:
Ifølge lemma 4.10 er $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| \leq 2$, og ifølge lemma 4.16 medfører $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| = 2$, hvor $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x, y\}$, at $|(L_i \cap L_3) - \{x, y\}| \neq 2$ for $i = 1, 2$. Lemma 4.9 medfører, at $|(L_i \cap L_3) - \{x, y\}| \neq 1$ for $i = 1, 2$, da $|L_i \cap L_j| \neq 3$ for alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$. Vi har dermed, at $|(L_i \cap L_3) - \{x, y\}| = 0$ for $i = 1, 2$, men dette er i modstrid med lemma 4.16, da vi har, at $L_3 \cap (L_1 \cup L_2) = \{x, y\}$. Denne modstrid beviser lemmaet.

□

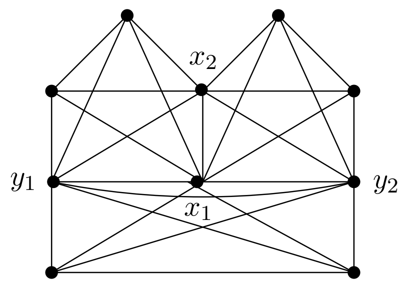
4.4 G indeholder tre næsten disjunkte K_5 grafer

Lemma 4.18
Lad G, L_1, L_2 og L_3 være graferne fra forrige afsnit. Så kan L_1, L_2 og L_3 vælges sådan, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$.
Bevis:
Antag, at for alle L_1, L_2, L_3 i G er $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \leq 11$. Vælg L_1 og L_2 sådan, at $|L_1 \cup L_2|$ er størst mulig.
Vi vil først vise følgende påstand.

Påstand (1) $|L_1 \cup L_2| \geq 9$.

Antag, at $|L_1 \cup L_2| < 8$. Da $|L_i \cap L_j| \neq 3$ for alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$, får vi, at $|L_1 \cup L_2| = 6$. Da L_1, L_2 er valgt sådan, at $|L_1 \cup L_2|$ er størst mulig, får vi yderligere, at $|L_i \cup L_3| = 6$ for $i = 1, 2$. Dette er i modstrid med lemma 4.17, da vi nu har, at $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| > 1$.
Antag nu, at $|L_1 \cup L_2| = 8$ og dermed $|L_1 \cap L_2| = 2$. Lad $L_1 \cap L_2 = \{x_1, x_2\}$, og lad $L_3 \neq L_1, L_2$ være en K_5 i G, hvor $L_3 - (L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$. Vi kan vælge

grafen L_3 sådan jf. (d). Ifølge lemma 4.13 er $L_3 \cap \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$, og ifølge lemma 4.17 er $|L_3 \cap \{x_1, x_2\}| = 1$. Vi kan WLOG antage, at $x_1 \in L_3$ og dermed, at $x_2 \notin L_3$. Lad $L'_i = L_i - \{x_1, x_2\}$ for $i = 1, 2$. Da $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \leq 11$, får vi, at $|L_3 \cap (L_1 \cup L_2)| \geq 2$ og da L_1, L_2 er valgt sådan, at $|L_1 \cup L_2|$ er størst mulig, får vi, at $|L_3 \cup L'_i| \geq 1$ for $i = 1, 2$. Lemma 4.9, (1) medfører, at $|L_3 \cap L'_i| = 1$ for $i = 1, 2$. Lad $y_1 \in L_3 \cap L'_1$ og $y_2 \in L_3 \cap L'_2$, se figur 4.4.



Figur 4.4: De tre grafer L_1, L_2 og L_3, hvor $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x_1\}$, $L_1 \cap L_2 = \{x_1, x_2\}$ og $L_3 \cap L'_1 = \{y_1\}$, $L_3 \cap L'_2 = \{y_2\}$.

Vi har, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| = 10$, og ifølge (d) kan vi vælge endnu en $K_5 = L_4$, hvor $L_4 \neq L_1, L_2, L_3$ og $L_4 - (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \neq \emptyset$. Med samme argumentation som for L_3 får vi, at $|L_i \cap L_4| = 2$ for $i = 1, 2, 3$ og $|L_i \cap L_j \cap L_k| = 1$ for alle kombinationer af tre forskellige $i, j, k \in \{1, \ldots, 4\}$, idet vi kan bruge vilkårlige to af graferne L_1, L_2, L_3 som L_1, L_2 i argumentationen ovenfor.

Vi skal nu betragte følgende to tilfælde.

Tilfælde 1 $x_1 \in L_4$.

Tilfælde 2 $x_1 \notin L_4$.

Tilfælde 1: Hvis $x_1 \in L_4$, får vi, at $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ indeholder en graf isomorf med $K_{3,4}$ med partitionerne $\{x_1, x_2, a\}$ og $\{y_1, y_2, b, c\}$, hvor $a = (L_3 \cap L_4) - \{x_1\}$, $b = (L_1 \cap L_4) - \{x_1\}$ og $c = (L_2 \cap L_4) - \{x_1\}$. Dette er i modstrid med lemma 4.6.

Tilfælde 2: Da $x_1 \notin L_4$, $L_4 - (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \neq \emptyset$, $|L_i \cap L_4| = 2$ for $i = 1, 2, 3$ og $|L_i \cap L_j \cap L_k| = 1$ for alle kombinationer af tre forskellige $i, j, k \in \{1, \ldots, 4\}$, får vi, at $x_2, y_1, y_2 \in L_4$ og $(L_i \cap L_4) - \{x_2, y_1, y_2\} = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$. Vi har så, at $|L_1 \cup \cdots \cup L_4| = 12$, dvs. vi kan vælge endnu en $K_5 = L_5$, hvor $L_5 \neq L_i$ for $i = 1, \ldots, 4$ og $L_5 - (L_1 \cup \cdots L_4) \neq \emptyset$ ifølge lemma 4.5 og (c). Tager vi L_5 istedet for L_4, får vi ligeledes, at $x_2, y_1, y_2 \in L_5$, men så er $|L_1 \cap L_4 \cap L_5| \geq 2$, hvilket er i modstrid med lemma 4.15. Vi har hermed vist, at $|L_1 \cup L_2| \geq 9$ for alle L_1, L_2, i G, hvor L_1 og L_2 er valgt sådan, at $|L_1 \cup L_2|$ er størst mulig.
Vi skal nu bevise følgende påstand.

Påstand (2) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, dvs. $|L_1 \cup L_2| = 10$.

Antag, at L_1 og L_2 ikke er disjunkte. Så har vi jf. påstand (1), at $|L_1 \cup L_2| = 9$. Lad $L_1 \cap L_2 = \{x_1\}$, og lad L_j være en vilkårlig K_5 i G, hvor $L_j \neq L_1, L_2$ og $L_j - (L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$. Da vi har antaget, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_j| \leq 11$ for alle L_1, L_2, L_j i G, får vi, at $|L_j - (L_1 \cup L_2)| \leq 2$ og dermed, at $|L_j \cap (L_1 \cup L_2)| \geq 3$. Antag, at $x_1 \notin L_j$. Så har vi ifølge lemma 4.12, at $|L_j \cap L_1| \neq 2$ og $|L_j \cap L_2| \neq 2$. Desuden har vi jf. lemma 4.9 (1), at $|L_j \cap L_1| \neq 3$ og $|L_j \cap L_2| \neq 3$, dvs. vi har, at $|L_j \cap L_i| = 4$ for $i = 1$ eller $i = 2$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $|L_j \cap L_1| = 4$ og dermed, at $L_j \cap L_2 = \emptyset$, men dette er i modstrid med, at L_1 og L_2 er valgt sådan, at $|L_1 \cup L_2|$ er størst mulig. Vi får derfor, at $x_1 \in L_j$, og dermed er $|L_1 \cap L_2 \cap L_j| = 1$. Da $\deg_G(x_1) \geq 8$ og $|L_1 \cup L_2| = 9$ har vi, at grafen $G - (L_1 \cup L_2)$ indeholder mindst 8 punkter med valens 7 ifølge lemma 4.5 og jf. (c) er alle disse indeholdt i en K_5 i G. Vi har dermed, at der findes mindst fire forskellige grafer L_j, $j = 3, 4, 5, 6$. Da vi jf. lemma 4.17 har, at $|L_i \cap L_j \cap L_k| \leq 1$ for alle L_i, L_j, L_k i G, får vi, at $L_j \cap L_i \cap (L_1 \cup L_2) - \{x_1\} = \emptyset$. Der kan derfor ikke findes yderligere grafer L_j foruden de 4 grafer L_3, L_4, L_5, L_6. Vi har så, at alle de mindst 8 punkter i G af valens 7, som ikke er indeholdt i $L_1 \cup L_2$, er indholdt i $L_3 \cup \cdots \cup L_6$. Dette medfører, at $(L_i \cap L_j) - \{x_1\} = \emptyset$ og dermed, at $|L_3 \cup L_4 \cup L_5| = 13$, hvilket er i modstrid med vores antagelse om, at der for alle L_i, L_j, L_k i G gælder, at $|L_i \cup L_j \cup L_k| \leq 11$. Denne modstrid beviser påstand (2).

Ifølge påstand (2) kan vi vælge to grafer L_1, L_2 i G sådan, at de er disjunkte. Da G indeholder mindst 16 punkter af valens 7 jf. lemma 4.5, og alle disse er indeholdt i en K_5 i G jf. (c), kan vi vælge endnu en graf L_3, som er isomorf med K_5 sådan, at $L_3 - (L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$. Da vi har antaget, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \leq 11$ for alle L_1, L_2, L_3 i G får vi, at $|L_3 - (L_1 \cup L_2)| = 1$, dvs. $|L_3 \cap (L_1 \cup L_2)| = 4$. Ifølge lemma 4.9 er $|L_i \cap L_j| \neq 3$ for alle $i \neq j$ og $i, j \in \{1, 2, 3\}$ og ifølge lemma 4.11, er $|L_i \cap L_3| \neq 2$ for $i = 1, 2$, når L_1 og L_2 er disjunkte. Vi har dermed, at $|L_i \cap L_3| = 4$ for $i = 1$ eller $i = 2$. Vi kan WLOG antage, at $|L_1 \cap L_3| = 4$, men så har vi, at der kun kan findes yderligere en delgraf L_4 af G, som er isomorf med K_5 nemlig den hvor $|L_2 \cap L_4| = 4$, idet vi ellers får en modstrid med vores antagelse om, at $|L_i \cup L_j \cup L_k| \leq 11$, jf. $L_1 \cap L_4 = L_3 \cap L_4 = \emptyset$. Vi har dermed, at G højst indeholder $|L_1 \cup \cdots \cup L_4| = 12$ punkter, som er indeholdt i en K_5, men dette er i modstrid med lemma 4.5 og (c), som siger, at G indeholder mindst 16 punkter, der er indeholdt i en K_5.

□

4.5 K_7-minor eller $K_{4,4}$-minor

I en graf $G = (V, E)$, hvor $Z_1, \cdots, Z_h \subseteq V$, kaldes en (x, y)-vej P god hvis der findes to forskellige $i, j \in \{1, \ldots, h\}$ sådan, at $x \in Z_i$ og $y \in Z_j$.

Følgende sætning er bevist i [RST93] og er en variant af en sætning af Mader [M78].

Sætning 4.19
Lad $G = (V, E)$ være en graf, lad $Z_1, \cdots, Z_h \subseteq V$, og lad $k \geq 0$ være et heltal.

Så er præcis et af følgende udsagn sandt.

(1) *Der findes k indbyrdes disjunkte gode veje i G.*

(2) *Der findes en punktmængde $W \subseteq V$ samt en partition $Y_1, \cdots, Y_n$ af $V - W$ og for $1 \leq i \leq n$ en delmængde $X_i \subseteq Y_i$ sådan, at følgende tre betingelser er opfyldt.*

(a) $|W| + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |X_i| \rfloor < k$.

(b) *For ethvert i, hvor $1 \leq i \leq n$, gælder, at der ikke findes et punkt i $Y_i - X_i$, som har en nabo i $V - (W \cup Y_i)$ og $Y_i \cap (\bigcup_{j=1}^{h} Z_j) \subseteq X_i$.*

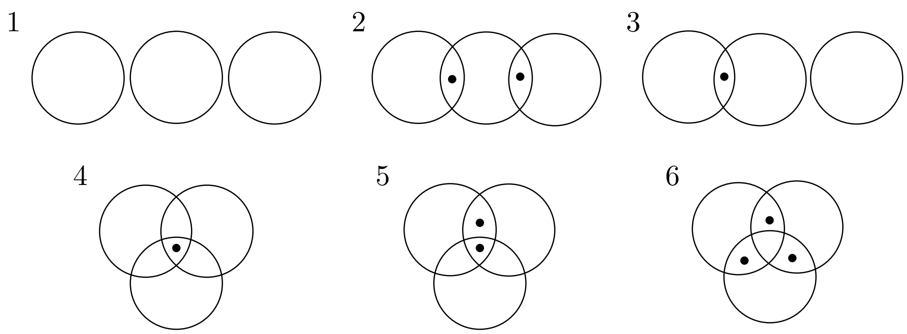
(c) *For enhver god vej P i $G - W$ gælder, at der findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$ sådan, at P indeholder en kant, som er incident med to punkter i Y_i.*

Sætning 4.20
Enhver graf G, som er 7-kromatisk har en K_7-minor eller $K_{4,4}$-minor.
Bevis:
Antag, at der findes en graf, som opfylder betingelserne $(i), (ii), (iii)$ og (iv), og lad $G = (V, E)$ være en mindste sådan graf. Lad desuden L_1, L_2, L_3 være tre delgrafer af G isomorfe med K_5, som er valgt sådan, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$. Det bemærkes, at vi kan vælge L_1, L_2 og L_3 sådan, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$ jf. lemma 4.18. Da vi jf. lemma 4.9 har, at $|L_i \cap L_j| \neq 3$ for alle i, j, hvor $i \neq j$ og $i, j \in \{1, 2, 3\}$, findes der med betingelsen om, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$ jf. lemma 4.9 og lemma 4.13 kun seks muligheder, se figur 4.4. Vi vil kalde en (u, v)-vej P i G god, hvis der findes i, j, hvor $i \neq j$ og $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sådan, at $u \in L_i$ og $v \in L_j$. Det bemærkes, at $|V(P)| = 1$ er tilladt hvis $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ og en vej P,

hvor $V(P) = L_1 \cap L_2 \cap L_3$ også kaldes god.

(1) Der findes ikke 7 indbyrdes disjunkte gode veje i G.

Først bemærkes, at alle seks tilfælde på figur 4.5 indeholder tilstrækkeligt med punkter til, at der er mulighed for 7 indbyrdes disjunkte gode veje i G. Antag, at der findes 7 indbyrdes disjunkte gode veje $P_1, \cdots, P_7$ i G og lad $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Så gælder for alle i, j, hvor $i \neq j$ og $i, j \in \{1, 2, 3, \}$, at $N_L(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$, eftersom der findes et i', hvor $1 \leq i' \leq 3$ sådan, at $V(P_i) \cap V(L_{i'}) \neq \emptyset$ og $V(P_j) \cap V(L_{i'}) \neq \emptyset$. Følgeligt har vi, at $V(P_1), \cdots, V(P_7)$ indeholder en K_7-minor. Dette er i modstrid med, at G opfylder betingelse (ii), og beviser dermed påstand (1).



Figur 4.5: De seks muligheder når $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$.

Vi har nu jf. påstand (1) og sætning 4.19 følgende.

(2) Der findes en punktmængde $W \subseteq V(G)$ samt en partition $Y_1, \cdots, Y_n$ af $V(G) - W$ og for $1 \leq i \leq n$ en delmængde $X_i \subseteq Y_i$ sådan, at følgende tre betingelser er opfyldt.

(a) $|W| + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |X_i| \rfloor < 7$.

(b) For ethvert i, hvor $1 \leq i \leq n$ gælder, at der ikke findes et punkt i $Y_i - X_i$, som har en nabo i $V - (W \cup Y_i)$ og $Y_i \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \subseteq X_i$.

(c) For enhver god vej P i $G - W$ gælder, at der findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$ sådan, at P indeholder en kant, som er incident med to punkter i Y_i.

Lad $M = (L_1 \cap L_2) \cup (L_2 \cap L_3) \cup (L_1 \cap L_3)$, og vælg W, $Y_1, \cdots, Y_n$ og $X_1, \cdots, X_n$ sådan, at $|W|$ er størst mulig. Vi kan WLOG antage, at $Y_i \neq \emptyset$ for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, da vi ellers blot kan undlade Y_i. Ifølge (2)(c) får vi, følgende.

(3) $M \subseteq W$

Næste påstand, vi vil vise, er følgende.

(4) $|W| + \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq 14 - |W|$.

Da $Y_i \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \subseteq X_i$ og $M \subseteq W$, får vi, at

$$|W| + \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq |L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12.$$

Antag, at $|W| \geq 2$. Så har vi, at $|W| + \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq 14 - |W|$, eftersom $14 - |W| \leq 12$. Antag, at $|W| = 1$. Da $M \subseteq W$, følger det, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 13$, og dermed er $|W| + \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq 13 = 14 - |W|$. Antag, at $|W| = 0$. Så er $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| = 15$, og følgeligt er $|W| + \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq 15 \geq 14 - |W|$.

(5) $n \geq 2$.

Da $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$ og $|W| \leq 6$ ifølge (2)(a), har vi ifølge (4), at $\sum_{i=1}^{n} |X_i| > 0$ og følgeligt, at $n \geq 1$. Antag, at $n = 1$. Så har vi jf. (2)(a), at $2\,(|W| + \lfloor\frac{1}{2}|X_1|\rfloor) \leq 12$, og da $2\,\lfloor\frac{1}{2}|X_1|\rfloor \geq |X_1| - 1$, får vi, at $2\,(|W| + \lfloor\frac{1}{2}|X_1|\rfloor) \geq 2\,|W| + |X_1| - 1$. Ifølge (4) er $|W| + |X_1| \geq 14 - |W|$, og vi har derfor, at $2\,|W| + |X_1| - 1 \geq |W| + 14 - |W| - 1 = 13$. Samles disse uligheder, får vi følgende.

$$\begin{aligned} 12 &\geq 2\,(|W| + \lfloor\frac{1}{2}|X_1|\rfloor) \geq 2\,|W| + |X_1| - 1 \\ &\geq |W| + 14 - |W| - 1 = 13. \end{aligned}$$

Denne modstrid beviser (5).

(6) $X_i \neq \emptyset$ for alle $i = 1, \ldots, n$.

Antag, at der findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$, hvor $X_i = \emptyset$. Vi ved, at $Y_i \neq \emptyset$ for alle $i = 1, \ldots, n$, og ifølge (2)(b) har ingen af punkterne i Y_i en nabo i $V - (W \cup Y_i)$, men så er W en punktsnitmængde i G. Ifølge (2)(a) er $|W| \leq 6$, hvilket er i modstrid med, at G er 7-sammenhængende (lemma 4.3). Denne modstrid beviser (6).

(7) Hvis $Y_i - X_i \neq \emptyset$ så er $W \cup X_i$ en punktsnitmængde i G.

Dette følger af (2)(b) og (5), idet ingen af punkterne i $Y_i - X_i$ har en nabo i $V - (W \cup Y_i)$ og $|W \cup X_i| < |V - (W \cup Y_i)|$.

(8) For alle $i = 1, \ldots, n$ gælder, at $|X_i|$ er ulige.

Antag, at der findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$, hvor $|X_i|$ er lige. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$. Vi har så, at $|X_1| \geq 2$ jf. (6). Lad $v \in X_1$, og definer $W' = W \cup \{v\}$, $Y_1' = Y_1 - \{v\}$, $X_1' = X_1 - \{v\}$ og $Y_j' = Y_j, X_j' = X_j$ for alle $j = 2, \ldots, n$. Så opfylder W', Y_j' og X_j' for $j = 1, \ldots, n$ (2). Da $|W'| > |W|$, har vi en modstrid med, at W var valgt sådan, at $|W|$ er størst mulig. Denne modstrid beviser (8).

Definer for $i = 1, 2, 3$ punktmængden Z_i som foreningsmængden af $V(P)$, hvor P er en vej i G, som ikke indeholder en kant incident med to punkter i et Y_j for alle $j = 1, \ldots, n$ og $V(P) \cap W = \emptyset$ samt $V(P) \cap L_i \neq \emptyset$.
Fra definitionen af Z_i får vi følgende.

(9) Følgende tre udsagn er sande.

(1.) $L_i - W \subseteq Z_i \subseteq V - W$ for $i = 1, 2, 3$.

(2.) $Z_i \subseteq X_1 \cup \cdots \cup X_n$ for $i = 1, 2, 3$.

(3.) Z_1, Z_2, Z_3 er indbyrdes disjunkte.

Punkt $(1.)$ følger direkte af definitionen af Z_i og punkt $(2.)$ følger af definitionen af Z_i samt (2)(b). For at bevise punkt $(3.)$ antager vi, at $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$ for et $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$. Lad $v \in Z_i \cap Z_j$. Da $v \in Z_i \cap Z_j$ findes der en (L_i, v)-vej P, hvor $V(P) \subseteq Z_i$ og en (L_j, v)-vej Q, hvor $V(Q) \subseteq Z_j$. Så indeholder $P \cup Q$ en (L_i, L_j)-vej, dvs. en god vej som jf. (2)(c) indeholder en kant, der er incident med to punkter fra Y_k for et $k \in \{1, \cdots, n\}$. Dette er en modstrid, eftersom vi så har, at de to punkter incidente med denne kant enten er indeholdt i Z_i eller Z_j, dvs. Z_i eller Z_j indeholder to punkter fra Y_k.

(10) Enhver (Z_i, Z_j)-vej, for $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$, i $G - W$ indeholder mindst to punkter fra X_k for et $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Antag, at der findes en (u, v)-vej P i $G - W$, hvor $u \in Z_i$, $v \in Z_j$ og $i \neq j$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$ og $j = 2$. Jf. definitionen af Z_1 og Z_2 findes der to disjunkte veje Q, R, hvor $V(Q) \subseteq Z_1$ og $V(R) \subseteq Z_2$ sådan, at Q er en (x, u)-vej i $G - W$, hvor $x \in L_1$ og R er en (y, v)-vej i $G - W$, hvor $y \in L_2$. Så findes der ikke et $k \in \{1, \ldots, n\}$ sådan, at R eller Q indeholder en kant, som er incident med to punkter i Y_k. Vi har, at $Q \cup P \cup R$ indeholder en (x, y)-vej, hvor $x \in L_1$ og $y \in L_2$, dvs. $Q \cup P \cup R$ indeholder en god vej. Denne vej indeholder jf. (2)(c) en kant $e = x_1 y_1$, som er incident med to punkter $x_1, y_1 \in Y_k$ for et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Jf. vores valg af Q og R har vi, at $e \notin E(Q)$ og $e \notin E(R)$, dvs. $e \in E(P)$. Antag, at P ikke indeholder to punkter, som er indeholdt i X_k. Men delvejen af P fra x_1 til u må indeholde mindst et punkt fra X_k og tilsvarende må delvejen af P fra y_1 til v indeholde mindst et punkt fra X_k, eftersom vi ellers får en modstrid med (2)(b).

(11) For alle $i = 1, 2, 3$ gælder, at $|Z_i| \leq 6 - |W|$.

Antag, at der findes et $i \in \{1, 2, 3\}$ sådan, at $|Z_i| \geq 7 - |W|$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$. Da $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$, er $|L_2 \cup L_3| \geq 7$, og hvis $|L_2 \cup L_3| = 7$, er $|L_2 \cap L_3| = 3$, men dette er i modstrid med lemma 4.9. Vi har derfor, at $|L_2 \cup L_3| \geq 8$ og at $|L_2 \cup L_3 - W| \geq 8 - |W|$. Eftersom $G - W$ er $(7 - |W|)$-sammenhængende jf. lemma 4.3, findes der $7 - |W|$ indbyrdes disjunkte $(Z_1, L_2 \cup L_3 - W)$-veje $P_1, \cdots, P_{7-|W|}$ i $G - W$. Det bemærkes, at $7 - |W| \geq 1$ da $|W| \leq 6$ jf. (2)(a). Ifølge (10) indeholder enhver af disse $7 - |W|$ indbyrdes disjunkte veje mindst to punkter fra X_i for et $i \in \{1, \ldots, n\}$, eftersom $L_2 \cup L_3 - W \subseteq Z_2 \cup Z_3$. Vi har dermed, at

$$\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq 2\,(7 - |W|),$$

og da $|X_i|$ er ulige for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, har vi, at der for ethvert X_i, som indeholder to punkter fra en af vejene $P_1, \cdots, P_{7-|W|}$, gælder, at $|X_i| \geq 3$. Vi får dermed, at

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |X_i| \rfloor \geq 7 - |W|,$$

men denne ulighed er i modstrid med (2)(a).

(12) $\sum_{i=1}^{3} |L_i \cap W| \leq |W| + 3.$

Antag, at $\sum_{i=1}^{3} |L_i \cap W| > |W| + 3$, dvs. $\sum_{i=1}^{3} |L_i \cap W| - |W| \geq 4$. Eftersom $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \leq 15 - \sum_{i=1}^{3} |L_i \cap W| + |W|$, da $M \subseteq W$ jf. (3), får vi, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \leq 15 - 4 = 11$, hvilket er i modstrid med, at L_1, L_2 og L_3 er valgt sådan, at $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$.

(13) $|W| \leq 3.$

Ifølge (9) har vi, at $L_i - W \subseteq Z_i$ og dermed, at $|L_i| - |L_i \cap W| \leq |Z_i|$ for $i = 1, 2, 3$. Vi har desuden jf. (11), at $|Z_i| \leq 6 - |W|$, og jf. (12), at $\sum_{i=1}^{3} |L_i \cap W| \leq |W| + 3$. Vi får derfor følgene udregninger.

$$\begin{aligned} 15 = \sum_{i=1}^{3} |L_i| &\leq \sum_{i=1}^{3} (|Z_i| + |L_i \cap W|) \\ &\leq 3\,(6 - |W|) + |W| + 3 = 21 - 2\,|W|. \end{aligned}$$

Af disse udregninger følger, at $15 \leq 21 - 2\,|W|$, dvs. $|W| \leq 3$.

(14) $|X_i| \geq 3$ for $i = 1, 2, 3$.

Vi har ifølge (8), at $|X_i|$ er ulige for alle $i = 1, 2, 3$, og vi kan derfor antage, at der findes et m, hvor $1 \leq m \leq n$, sådan at $|X_1| = \cdots = |X_m| = 1$ og $|X_{m+1}|, \cdots, |X_n| \geq 3$. Da $|X_i| = 1$ for $i = 1, \ldots, m$ og $|W| \leq 3$ jf. (13), har vi, at $|W \cup X_i| \leq 4$ for $i = 1, \ldots, m$. Derfor er $W \cup X_i$ for $i = 1, \ldots, m$ ikke en punktsnitmængde idet G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende, og følgeligt er $X_i = Y_i$ jf. (7).
Lad $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$. Vi skal nu vise følgende påstand.

(14)(i) $Z_i \cap X = \emptyset$.

Antag, at der findes et $i \in \{1, 2, 3\}$ sådan, at $Z_i \cap X \neq \emptyset$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $Z_1 \cap X \neq \emptyset$. Lad $N = N_G(Z_1 \cap X)$. Hvis N er en punktsnitmængde, er $|N| \geq 7$, eftersom G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende, og hvis N ikke er en punktsnitmængde, følger det, at $|N| \geq |V - (Z_1 \cap X)| \geq 13$, hvor sidste ulighed følger af, at $|V| \geq 19$ jf. (b) og $|Z_i| \leq 6 - |W|$ jf. (11). Vi har altså, at $|N| \geq 7$ og følgeligt, at $|N - W| \geq 7 - |W|$. Det bemærkes, at vi jf. (13) har, at $7 - |W| \geq 4$. Da $|Z_1| \leq 6 - |W|$ jf. (11), får vi, at $N - Z_1 - W \neq \emptyset$, eftersom $|N - W| - |Z_1| \geq 7 - |W| - (6 - |W|) = 1$. Lad $x \in (N - Z_1 - W)$, og lad $v \in N_G(x) \cap (Z_1 \cap X)$. Så har vi, at $xv \in E$ og $x \notin Z_1$. Da $v \in Z_1$, findes der en (L_1, v)-vej P, hvor $V(P) \subseteq Z_1$. Eftersom $v \in X$, findes der et j, sådan at $1 \leq j \leq m$, hvor $v \in X_j$ og $|X_j| = 1$. Så har vi, at $x \notin X_j$, dvs. $x \in Y_j - X_j$, men dette er i modstrid med, at $Y_j - X_j = \emptyset$. Vi har dermed vist, at $Z_i \cap X = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$.

Da vi fra (9) har, at $L_i - W \subseteq Z_i$ for $i = 1, 2, 3$, får vi, at

$$\sum_{i=1}^{3} |Z_i| \geq |L_1 \cup L_2 \cup L_3| - |W| \geq 12 - |W|,$$

eftersom $\sum_{i=1}^{3} |Z_i| \geq \sum_{i=1}^{3} |L_i - W|$ og $\sum_{i=1}^{3} |L_i - W| \geq |L_1 \cup L_2 \cup L_3| - |W|$.

Ifølge (2)(a) har vi yderligere, at

$$\begin{aligned}\sum_{j=m+1}^{n} |X_j| &\leq 3 \sum_{j=m+1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |X_j| \rfloor \\ &\leq 3\,(6 - |W|) = 18 - 3|W|.\end{aligned}$$

Første ulighed følger af, at $|X_j| \geq 3$ for $j = m+1, \ldots, n$.

Lad $N = N_G(X)$. Det bemærkes, at under antagelsen om, at der findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$ sådan, at $|X_i| = 1$ er $X \neq \emptyset$.

$(14)(ii)$ $N \subseteq W \cup X_{m+1} \cup \cdots \cup X_n$.

Da $N_G(X) \cap X = \emptyset$, $X_i = Y_i$ for $i = 1, \ldots, m$ og $V - W - X = Y_{m+1} \cup \cdots \cup Y_n$, får vi, at $N \subseteq W \cup Y_{m+1} \cup \cdots \cup Y_n$. Ifølge (2)(b) er intet punkt i $Y_j - X_j$ for $j = 1, \ldots, n$ nabo til et punkt i $V - (W \cup Y_i)$, og vi har derfor, at $N \subseteq W \cup X_{m+1} \cup \cdots \cup X_n$.

$(14)(iii)$ $N \cap Z_i = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$.

Antag, at $N \cap Z_i \neq \emptyset$ for et $i \in \{1, 2, 3\}$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $N \cap Z_1 \neq \emptyset$. Så findes der et $v \in X_j$, hvor $1 \leq j \leq m$, som er nabo til et punkt $y \in Z_1$. Vi har dermed, at der findes en (v, L_1)-vej P. Da $|X_j| = 1$ og $X_j = Y_j$ for $1 \leq j \leq m$, indeholder P ikke en kant, som er incident med to punkter fra Y_j, dvs. vi får, at $v \in Z_1$. Dette er i modstrid med $(14)(i)$, da vi nu har, at $Z_1 \cap X \neq \emptyset$.

$(14)(iv)$ $|N| \geq 7$.

$N = N_G(X)$ er en punktsnitmængde, eftersom $X \cap Z_i = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$ jf. $(14)(i)$ og $N \cap Z_i = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$ jf. ovenstående.

Da $Z_i \subseteq X_1 \cup \cdots \cup X_n$ jf. $(9)(2.)$ og $Z_i \cap X = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$ jf. $(14)(i)$ får vi, at $Z_i \subseteq X_{m+1} \cup \cdots \cup X_n$. Desuden har vi jf. $(14)(ii)$, at $N \subseteq W \cup X_{m+1} \cup \cdots \cup X_n$ og jf. $(14)(iii)$, at $N \cap Z_i = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$. Dette medfører, at

$$|N| + \sum_{i=1}^{3} |Z_i| \leq |W| + \sum_{j=m+1}^{n} |X_j|.$$

Eftersom $|N| \geq 7$ jf. $(14)(iv)$, $\sum_{i=1}^{3} |Z_i| \geq 12 - |W|$ jf. tidligere og

$$\sum_{j=m+1}^{n} |X_j| \leq 18 - 3\,|W|,$$

får vi, at

$$7 + 12 - |W| \leq |W| + 18 - 3\,|W| = 18 - 2\,|W|,$$

dvs. vi har, at $19 - |W| \leq 18 - 2\,|W|$ og dermed, at $|W| \leq -1$. Denne modstrid beviser (14).

Lad $Z = \bigcup_{j=1}^{n} X_j - (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$. Det bemærkes, at der findes $i \in \{1, \ldots, n\}$ og $j \in \{1, 2, 3\}$ sådan, at $X_i \cap L_j \neq \emptyset$ jf. (2)(b) og (13).

(15) Hvis $X_i \cap L_j \neq \emptyset$, så gælder, at $(X_i - L_j) \cup W \cup Z \cup (L_j - X_i)$ er en punktsnitmængde i G, som separerer $(X_i \cap L_j) \cup (Y_i - X_i)$ fra $L_1 \cup L_2 \cup L_3 - (W \cup L_j)$. Desuden gælder, at $|(X_i - L_j) \cup W \cup Z \cup (L_j - X_i)| \leq |X_i - L_j| + |W| + |Z| + |L_j - (X_i \cup W)|$.

De tre mængder $(X_i - L_j) \cup W \cup Z \cup (L_j - X_i)$, $(X_i \cap L_j) \cup (Y_i - X_i)$ og $(L_1 \cup L_2 \cup L_3) - W - L_j$ er ikke-tomme, og desuden gælder, at

$$N_G\big((X_i \cap L_j) \cup (Y_i - X_i)\big) \subseteq (X_i - L_j) \cup W \cup Z \cup (L_j - X_i)$$

samt

$$N_G(L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W - L_j) \subseteq (X_i - L_j) \cup W \cup Z \cup (L_j - X_i).$$

Vi har derfor, at $(X_i - L_j) \cup W \cup Z \cup (L_j - X_i)$ er en punktsnitmængde i G, som separerer $(X_i \cap L_j) \cup (Y_i - X_i)$ fra $(L_1 \cup L_2 \cup L_3) - W - L_j$.

(16) $|W| \leq 2$.

Ifølge (13) er $|W| \leq 3$. Antag, at $|W| = 3$. Så er $\sum_{j=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |X_j| \rfloor \leq 3$ da $|W| + \sum_{j=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |X_j| \rfloor \leq 6$ jf. (2)(a). Da vi jf. (2) har, at $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subseteq W \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ og $|L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W| \geq 9$, får vi desuden, at $\sum_{j=1}^{n} |X_i| \geq 9$. Da $|X_i|$ er ulige for alle $i = 1, \ldots, n$ jf. (8) og $|X_j| \geq 3$ jf. (14), følger, at $n = 3$ og $|X_1| = |X_2| = |X_3| = 3$. Da $|V| \geq 19$ jf. (b) og dermed $|V - W| = |Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3| \geq 16$, følger det, at $Y_k - X_k \neq \emptyset$ for et $k \in \{1, 2, 3\}$. Vi kan WLOG antage, at $Y_1 - X_1 \neq \emptyset$. Så er $X_1 \cup W$ en punktsnitmængde jf. (7), men $|X_1 \cup W| = 6$, hvilket er i modstrid med lemma 4.3. Vi har dermed, at $|W| \leq 2$.

(17) $\sum_{i=1}^{n}|X_i| \leq 12 + n - 2|W|$.

Ifølge (2)(a) er $2\left(\sum_{j=1}^{n}\lfloor\frac{1}{2}|X_j|\rfloor + |W|\right) \leq 12$, og dermed er $2\sum_{j=1}^{n}\lfloor\frac{1}{2}|X_j|\rfloor \leq 12 - 2|W|$. Da $|X_i| \geq 3$ jf. (14) og ulige jf. (8) for alle $i = 1,\dots,n$, får vi, at $2\lfloor\frac{1}{2}|X_i|\rfloor = |X_i| - 1$ og dermed, at $2\sum_{i=1}^{n}\lfloor\frac{1}{2}|X_i|\rfloor = \sum_{i=1}^{n}(|X_i| - 1)$. Af dette følger, at

$$2\sum_{i=1}^{n}\lfloor\frac{1}{2}|X_i|\rfloor = \sum_{i=1}^{n}|X_i| - n \leq 12 - 2|W|.$$

Påstand (17) følger direkte af ovenstående.

(18) $n \leq 4$ og hvis $|W| \geq 1$ så er $n \leq 3$.

Vi har ifølge (7), at $W \cup X_i$ er en punktsnitmængde i G hvis $Y_i - X_i \neq \emptyset$. Der findes mindst et $i \in \{1,\dots,n\}$ sådan, at $Y_i - X_i \neq \emptyset$, da vi ellers får, at $V = W \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ og dermed jf. (2)(a) en modstrid med, at $|V| \geq 19$ jf. (b). Følgeligt har vi, at der findes et $i \in \{1,\dots,n\}$, hvor $|W \cup X_i| = |W| + |X_i| \geq 7$, da G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende. Så findes der et $i \in \{1,\dots,n\}$ sådan, at $|X_i| \geq 5$ da $|W| \leq 2$ jf. (16). Da $|X_i| \geq 3$ for alle $i = 1,\dots,n$, får vi så, at $\sum_{i=1}^{n}|X_i| \geq 3(n-1) + 5 = 3n + 2$. Desuden har vi ifølge (17), at $\sum_{i=1}^{n}|X_i| \leq 12 + n - 2|W|$. Hvis $|W| = 2$, får vi, at $3n + 2 \leq 8 + n$, dvs. $n \leq 3$. Hvis $|W| = 1$ er findes der et $i \in \{1,\dots,n\}$ sådan, at $|X_i| \geq 6$, da $|W| + |X_i| \geq 7$, og eftersom $|X_i|$ er ulige, får vi, at $|X_i| \geq 7$. Så har vi, at $\sum_{i=1}^{n}|X_i| \geq 3(n-1) + 7 = 3n + 4$ og dermed, at $3n + 4 \leq 10 + n$ jf. (17), dvs. $n \leq 3$. Hvis $|W| = 0$, har vi igen, at $|X_i| \geq 7$ for mindst et $i \in \{1,\dots,n\}$ og dermed, at $\sum_{i=1}^{n}|X_i| \geq 3n + 4$. Fra (17) får vi, at $\sum_{i=1}^{n}|X_i| \leq 12 - n$ og dermed, at $3n + 4 \leq 12 + n$, dvs. $n \leq 4$.

(19) Lad $Z = \bigcup_{i=1}^{n} X_i - (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$. Så gælder, at $|Z| \leq 1$.

Vi ved jf. (16), at $|W| \leq 2$. Antag, at $|W| = 2$. Så har vi jf. (17), at $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \leq 8 + n \leq 11$, da $n \leq 3$ for $|W| \geq 1$ jf. (18). Desuden har vi, at $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq \sum_{j=1}^{3} |L_j - W| \geq 10$ jf. (3), dvs. $|Z| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - |L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W| \leq 1$. Antag, at $|W| = 1$. Så har vi jf. (17), at $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \leq 13$ og desuden, at $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq \sum_{j=1}^{3} |L_j - W| \geq 12$ jf. (3), dvs. igen har vi, at $|Z| \leq 1$.
Antag nu, at $|W| = 0$. Så er $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \leq 16$, da $n \leq 4$ for $|W| = 0$ jf. (18) og $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq \sum_{j=1}^{3} |L_j - W| \geq 15$, dvs. igen har vi, at $|Z| \leq 1$.

Af ovenstående følger, at hvis $|Z| = 1$, har vi følgende tre muligheder:

$(19)(i)$ $|W| = 0$ og dermed er L_1, L_2, L_3 indbyrdes disjunkte.

$(19)(ii)$ $|W| = 1$ og $\sum_{j=1}^{3} |L_j - W| = 12$.

$(19)(iii)$ $|W| = 2$ og $\sum_{j=1}^{3} |L_j - W| = 10$.

(20) $|X_i| \geq 5$ for alle $i = 1, \ldots, n$.

Vi har jf. (8) og (14), at $|X_i| \geq 3$ og ulige for alle $i = 1, \ldots, n$. Antag nu, at der findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$, hvor $|X_i| = 3$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $|X_1| = 3$. Vi vil først vise, at vi så har, at

$(20)(i)$ $|X_1 \cap L_j| \leq 1$.

Antag, at $|X_1 \cap L_j| \geq 2$ for et $j \in \{1, 2, 3\}$. Vi kan WLOG antage, at $j = 1$, dvs. $|X_1 \cap L_1| \geq 2$. Så er $(X_1 - L_1) \cup W \cup Z \cup (L_1 - X_1)$ jf. (15) en punktsnitmængde, og denne punktsnitmængde indeholder højst $|X_1 - L_1| + |W| + |Z| + |L_1 - X_1 - W| \leq 1 + |W| + |Z| + |L_1| - |L_1 \cap X_1| - |L_1 \cap W| \leq 4 - |L_1 \cap W| + |W| + |Z|$ punkter. Da G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende, får vi, at $4 + |W| + |Z| - |L_1 \cap W| \geq 7$ og følgeligt, at $|W| + |Z| - |L_1 \cap W| \geq 3$, men jf. (19) er $|Z| \leq 1$ og jf. (16) er $|W| \leq 2$, dvs. vi har, at $|W| = 2, |Z| = 1$ og $|L_1 \cap W| = 0$. Ifølge $(19)(iii)$ medfører $|Z| = 1$ og $|W| = 2$, at $\sum_{i=1}^{3} |L_i - W| = |L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W| = 10$, men så er $|L_1 \cap W| \neq 0$, eftersom hvis $|L_1 \cap W| = 0$, får vi, at $L_1 \cap (L_2 \cup L_3) = \emptyset$ og $|L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W| = |L_1| + |L_2 \cup L_3 - W| = 10$, dvs. $|L_2 \cup L_3 - W| = 5$. Denne modstrid beviser $(20)(i)$.

Antag, at $|W| = 2$. Ifølge $(20)(i)$ og (19) har vi, at der findes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sådan, at $|X_1 \cap L_i| = |X_1 \cap L_j| = 1$, hvor $i \neq j$. Vi kan WLOG antage, at $i, j = 1, 2$, dvs. $|X_1 \cap L_1| = |X_1 \cap L_2| = 1$.

Hvis $X_1 \cap L_3 = \emptyset$, er $|Z| = 1$ og da $|W| = 2$, får vi jf. $(19)(iii)$, at $\sum_{i=1}^{3} |L_i - W| = 10$, dvs. der findes mindst et $i \in \{1, 2\}$ sådan, at $|L_i \cap W| = 2$. Hvis $X_1 \cap L_3 \neq \emptyset$ kan vi ved evt. at omnummerere L_1, L_2, L_3 igen antage, at der for mindst et $i \in \{1, 2\}$ gælder, at $|L_i \cap W| = 2$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $|L_1 \cap W| = 2$.

Vi bemærker, at $Y_1 - X_1 = \emptyset$ jf. (7), da $|X_1| = 3$ og $|W| \leq 2$ medfører, at $X_1 \cup W$ ikke kan være en punktsnitmængde, eftersom $|X_1 \cup W| \leq 5$, og G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende. Da $X_1 \cap L_1 \neq \emptyset$, har vi jf. (15), at $(X_1 - L_1) \cup W \cup Z \cup (L_1 - X_1) = (X_1 - L_1) \cup Z \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde i G og $|(X_1 - L_1) \cup Z \cup (L_1 - X_1)| \leq 6 + |Z| - |Z \cap X_1|$. Da G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende, er $|Z| - |Z \cap X_1| \geq 1$, dvs. $|Z| = 1$ og $|Z \cap X_1| = 0$ eftersom $|Z| \leq 1$ jf. (19). Desuden får vi, at $Z \subseteq N_G(X_1 \cap L_1)$ da vi ellers ville have, at $(X_1 - L_1) \cup (L_1 - X_1)$ var en punktsnitmængde i G på kun 6 punkter. Da $Z \cap X_1 = \emptyset$, har vi, at $X_1 \subseteq L_1 \cup L_2 \cup L_3$, og da vi jf. $(20)(i)$ har, at $|X_1 \cap L_j| \leq 1$ og $|X_1| = 3$, har vi, at $|X_1 \cap L_j| = 1$ for $j = 1, 2, 3$. Da $|Z| = 1$ og $|W| = 2$, har vi jf. $(19)(iii)$, at $\sum_{j=1}^{3} |L_j - W| = 10$, og vi kan derfor antage, at $|L_2 \cap W| = 2$, jf. ellers er $|L_3 \cap W| = 2$ og vi kan omnummerere L_1, L_2, L_3. Vi får desuden, at $N_G(L_2 \cap X_1) \cap Z = \emptyset$, idet vi ellers ville have en god vej $P = (X_1 \cap L_1) \cup Z \cup (X_1 \cap L_2)$, som ikke indeholder en

kant incident med to punkter i et Y_i, da $Z \cap X_1 = \emptyset$, hvilket er i modstrid med (2)(c). Vi har så jf. (15), at $(X_1 - L_2) \cup (L_2 - X_1)$ er en punktnitmængde i G, men $|(X_1 - L_2) \cup (L_2 - X_1)| = 2 + 4 = 6$, dvs. en modstrid med, at G er 7-sammenhængende jf. lemma 4.3.
Antag, at$|W| = 1$. Da $|Z| \leq 1$ jf. (19) og $|X_1 \cap L_k| \leq 1$ for $k = 1, 2, 3$ jf. $(20)(i)$, har vi, at der findes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sådan, at $|X_1 \cap L_i| = |X_1 \cap L_j| = 1$. Vi kan WLOG antage, at $i, j = 1, 2$, dvs. $|X_1 \cap L_1| = |X_1 \cap L_2| = 1$. Da $|W| = 1$, har vi jf. (17), at der findes et $k \in \{1, 2\}$ sådan, at $L_k \cap W \neq \emptyset$, og vi kan WLOG antage, at $k = 1$, dvs. $W \subseteq L_1$. Vi har dermed jf. (15), at $(X_1 - L_1) \cup W \cup Z \cup (L_1 - X_1) = (X_1 - L_1) \cup Z \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde, og denne punktsnitmængde indeholder højst $|X_1 - L_1| + |Z| - |Z \cap X_1| + |L_1 - X_1| = 6 + |Z| - |Z \cap X_1|$ punkter. Da G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende, er $|Z| - |Z \cap X_1| \geq 1$, og eftersom $|Z| \leq 1$ jf. (19), har vi, at $|Z| = 1$ og $Z \cap X_1 = \emptyset$. Yderligere har vi jf. $(19)(ii)$, at $\sum_{j=1}^{3} |L_j - W| = 12$, idet $|Z| = 1$ og $|W| = 1$. Da $Z \cap X_1 = \emptyset$ er $X_1 \subseteq (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$, og dermed følger det af $(20)(i)$, at $|X_1 \cap L_j| = 1$ for $j = 1, 2, 3$. Desuden har vi, at $W \cap L_j \neq \emptyset$ for mindst et $j \in \{2, 3\}$ jf. $\sum_{j=1}^{3} |L_j - W| = 12$, og vi kan WLOG antage, at $L_2 \cap W \neq \emptyset$. Som det var tilfældet for $|W| = 2$, har vi igen, at $N_G(X_1 \cap L_2) \cap Z = \emptyset$ jf. (2)(c) og dermed jf. (15), at $(X_1 - L_2) \cup (L_2 - X_1)$ er en punktsnitmængde i G, som indeholder 6 punkter, hvilket er i modstrid med, at G er 7-sammenhængende jf. lemma 4.3.
Antag nu, at $|W| = 0$. Da $|Z| \leq 1$ jf. (19), $|X_1| = 3$ og $|X_1 \cap L_j| \leq 1$ jf. $(20)(i)$, har vi igen, at $|X_1 \cap L_j| = |X_1 \cap L_k| = 1$, hvor $j, k \in \{1, 2, 3\}$, og vi kan WLOG antage, at $j, k = 1, 2$. Ifølge (15) har vi så, at $(X_1 - L_1) \cup Z \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde i G, og denne punktsnitmængde indeholder højst $|X_1 - L_1| + |Z| - |X_1 \cap Z| + |L_1 - X_1| = 6 + |Z| - |X_1 \cap Z|$ punkter. Da G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende, er $|Z| - |X_1 \cap Z| \geq 1$, og følgeligt er $|Z| = 1$ og $|X_1 \cap Z| = 0$ jf. (19). Yderligere gælder, at $N_G(X_1 \cap L_1) \cap Z \neq \emptyset$, idet vi ellers får, at $(X_1 - L_1) \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde med kun 6 punkter i G. Igen har vi jf. (2)(c), at $N_G(X_1 \cap L_2) \cap Z = \emptyset$. Men så er $(X_1 - L_2) \cup (L_2 - X_2)$ en punktsnitmængde i G og $|(X_1 - L_2) \cup (L_2 - X_1)| = 6$, hvilket er i modstrid med, at G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende. Vi har hermed vist, at $|X_i| \geq 5$ for $i = 1, \ldots, n$.

(21) $n = 2$

Vi har jf. (19), (20) og (5), at $2 \leq n \leq 3$. Antag, at $n = 3$. Så har vi jf. (17) og (20), at $15 \leq \sum_{i=1}^{3} |X_i| \leq 12 + 3 - 2|W| = 15 - 2|W|$, dvs. $|W| = 0$. Så er $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| = 15$ jf. (3) og $\sum_{i=1}^{3} |X_i| = 15$, dvs. $|X_1| = |X_2| = |X_3| = 5$. Ifølge (7) gælder, at hvis $Y_i - X_i \neq \emptyset$, er $X_i \cup W$ en punktsnitmængde i G, men $|X_i \cup W| = |X_i| = 5$, dvs. $X_i \cup W$ kan ikke være en punktsnitmængde da G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende. Følgeligt får vi, at $Y_i - X_i = \emptyset$ for $i = 1, 2, 3$, dvs. $V = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, da $W = \emptyset$. Dette er en modstrid, da $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = 15$ og $|V| \geq 19$ jf. (b).

Vi har altså, at $n = 2$ og dermed, at $|W| \geq 1$ eftersom hvis $|W| = 0$, er $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| = 15$ og $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subseteq X_1 \cup X_2$, dvs. $|X_1| + |X_2| \geq 15$, hvilket er i modstrid med (17) jf. for $n = 2$ og $|X_1| + |X_2| \geq 15$ får vi, at $15 \leq 14 - 2|W|$. Vi har dermed jf. (17), at eneste muligheder er $|W| = 1$, $|X_1| = 5$ og $|X_2| = 7$ eller $|W| = 2$, $|X_1| = |X_2| = 5$ da $|X_i| \geq 5$ og ulige jf. (20) og (8) og $L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W \subseteq X_1 \cup X_2$. Vi skal nu undersøge disse to tilfælde.

Tilfælde 1. $|W| = 2$, $|X_1| = 5$ og $|X_2| = 5$.

Da $(L_1 \cup L_2 \cup L_3) - W \subseteq X_1 \cup X_2$ og $|X_1| + |X_2| = 10$, får vi, at $Z = (X_1 \cup X_2) - (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$. Antag, at der findes et $i \in \{1, 2, 3\}$, hvor $|X_1 \cap L_i| \geq 3$. Så har vi, jf. (15), at $(X_1 - L_i) \cup W \cup (L_i - X_1)$ er en punktsnitmængde i G, og denne punktsnitmængde indeholder højst $|(X_1 - L_i) \cup W \cup (L_i - X_1)| \leq 2 + 2 + 2 = 6$ punkter, hvilket er i modstrid med, at G jf. lemma 4.3 er 7-sammenhængende. Vi har altså, at $|X_1 \cap L_i| \leq 2$ for $i = 1, 2, 3$. Da $X_1 \cup X_2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W$ og $|W| = 2$, kan vi WLOG antage, at $|X_1 \cap L_1| = |X_1 \cap L_2| = 2$ og $|X_2 \cap L_3| = 2$. Antag, at $|L_i \cap W| = 2$ for et $i \in \{1, 2, 3\}$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $|L_1 \cap W| = 2$. Så har vi jf. (15), at $(X_1 - L_1) \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde i G, da $W \subseteq (L_1 - X_1)$ og $Z = \emptyset$. Men $|(X_1 - L_1) \cup (L_1 - X_1)| = 3 + 3 = 6$, hvilket er i modstrid med, at G er 7-sammenhængende jf. lemma 4.3. Vi har dermed, at $|L_i \cap W| \leq 1$ for $i = 1, 2, 3$. Dette medfører, at $\sum_{i=1}^{3} |L_i - W| \geq 12 \geq |X_1| + |X_2|$, hvilket er en modstrid da $L_1 \cup L_2 \cup L_3 - W \subseteq X_1 \cup X_2$.

Tilfælde 2. $|W| = 1$, $|X_1| = 5$ og $|X_2| = 7$.

Da vi jf. (3) har, at $(L_1 \cap L_2) \cup (L_2 \cap L_3) \cup (L_1 \cap L_3) \subseteq W$ og $|W| = 1$ er $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 13 = |X_1| + |X_2| + |W|$, dvs. $Z = (X_1 \cup X_2) - (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$. Antag, at $|X_1 \cap L_j| \geq 3$ for et $j \in \{1, 2, 3\}$. Vi kan WLOG antage, at $i = 1$, dvs. $|X_1 \cap L_1| \geq 3$. Så har vi ifølge (15), at $(X_1 - L_1) \cup W \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde i G, men $|(X_1 - L_1) \cup W \cup (L_1 - X_1)| \leq 5$, hvilket er i modstrid med, at G ifølge lemma 4.3 er 7-sammenhængende. Vi har dermed, at $|X_1 \cap L_j| \leq 2$ for $j = 1, 2, 3$. Vi kan WLOG antage, at $|X_1 \cap L_1| = 2$. Da $|X_1| + |X_2| = 12$ har vi, at $|L_1 \cap W| = 1$ da vi ellers får, at $|X_1| + |X_2| \geq |L_1| + |L_2 - W| + |L_3 - W| = 5 + 4 + 4 = 13$. Så har vi jf. (15), at $(X_1 - L_1) \cup W \cup (L_1 - X_1)$ er en punktsnitmængde i G, som højst indeholder $|(X_1 - L_1)| + |W| + |L_1 - X_1 - W| = 3 + 1 + 2 = 6$ punkter, hvilket er i modstrid med, at G er 7-sammenhængende ifølge lemma 4.3.
Denne modstrid fuldfører beviset for sætning 4.20.

$\square$

Kapitel 5

Grafer, som ikke kan sammentrækkes til K_7

Wagner [W37] karakteriserede i 1937 fuldstændigt, hvilke grafer som er kant-maksimale mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_5. En karakterisering af grafer, som er kant-maksimale mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_6 eller K_7, findes på nuværende tidspunkt ikke. Artiklen [KJ89] bestemmer nogle egenskaber ved grafer, som er kant-maksimale mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_6. Denne artikel har være inspiration til dette kapitel.

Vi vil i dette kapitel forsøge at bestemme nogle egenskaber ved grafer, som ikke kan sammentrækkes til K_7, dog begrænset til det tilfælde, hvor graferne er på formen $E_3 + H$.

5.1 Egenskaber ved grafer, som ikke kan sammentrækkes til K_7

Lad $G = (V, E)$ være en graf på formen $G = E_3 + H$, hvor $E_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$, som ikke kan sammentrækkes til K_7. Så gælder følgende.

(1) H kan ikke sammentrækkes til K_6.

(2) For ethvert $u \in V(H)$ gælder, at $H - \{u\}$ ikke kan sammentrækkes til K_5.

(3) For ethvert par af forskellige punkter $u, v \in V(H)$ gælder, at $H - \{u, v\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.

(4) $|E(G)| \leq 5|V(G)| - 15$.

Påstandene $(1), (2)$ og (3) følger direkte idet x_1, x_2, x_3 er naboer til alle punkterne i H. Påstand (4) følger af sætning 2.11, som siger, at enhver graf med n punkter og mindst $5n - 14$ kanter kan sammentrækkes til K_7.

(5) $|E(H)| \leq 2|V| - 6 = 2|V(H)|$.

Påstand (5) følger af (4), da $|E(H)| \leq 5|V| - 15 - 3(|V| - 3) = 2(|V| - 3)$ og $|V(H)| = |V| - 3$.

(6) $\delta(H) \leq 4$.

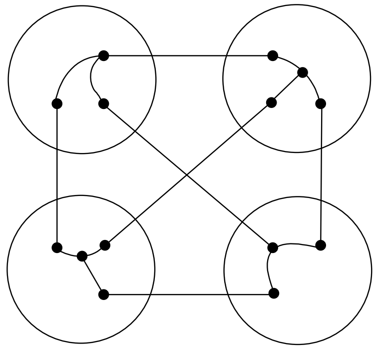
Påstand (6) følger af, at $2|V(H)| \geq |E| \geq \frac{1}{2}\delta(H)|V(H)|$. Desuden får vi, at hvis $\delta(H) = 4$, så er H en 4-regulær graf og $|E(G)| = 5|V(G)| - 15$.

Grafer, som har $|V(G)|$ punkter og præcis $5|V(G)| - 15$ kanter og ikke kan sammentrækkes til K_7, viste vi i kapitel 2 var grafer isomorfe med $K_{2,2,2,3}$ og MP_2-cockader. Vi har dermed, at hvis $\delta(H) = 4$, så er $G = K_{2,2,2,3}$ eller en MP_2-cockade. Grafen $K_{2,2,2,3}$ er ikke 7-sammenhængende, og en MP_2-cockade med mere end et cockade-element er heller ikke 7-sammenhængende. Dvs. de eneste 7-sammenhængende grafer på formen $E_3 + H$, som ikke kan sammentrækkes til K_7, er MP_2-cockader med kun et cockade-element, og dette cockade-element er en maksimal-planar graf, samt to punkter, som er naboer til alle andre punkter i grafen. Dette giver, at der ikke findes et modeksemple på formen $E_3 + H$ til formodning 5.1, som stammer fra [KT05], idet vi netop i en MP_2-cockade, bestående af kun et cockade-elemenet, som er forskellig fra K_6, har at der findes to punkter sådan, at grafen minus de to punkter er planar.

Formodning 5.1
Enhver 7-sammenhængende graf G har en K_7-minor, undtaget hvis der i G findes to forskellige punkter a, b sådan, at $G - \{a, b\}$ er planar.

Vi har yderligere jf. ovenstående argumentation, at hvis G ikke er en MP_2-cockade eller isomorf med $K_{2,2,2,3}$, så er $\delta(H) \leq 3$.

Lemma 5.2
En graf $G = (V, E)$ kan sammentrækkes til K_4, hvis og kun hvis G indeholder en underdeling af K_4.
Bevis:
Antag, at G kan sammentrækkes til K_4. Så indeholder G fire disjunkte punktmængder $V_1, \cdots, V_4 \subseteq V$, hvor $G[V_i]$ er sammenhængende for $i = 1, \ldots, 4$, og der findes i G en kant $e_{i,j}$ for alle $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, hvor $i \neq j$, mellem $G[V_i]$ og $G[V_j]$, se figur 5.1. Da $G[V_i]$ er sammenhængende, findes der en vej i $G[V_i]$ mellem ethvert par af punkter, dvs. hvis $v_{1,2}, v_{1,3}$ og $v_{1,4}$ er punkterne i V_1, som er incidente med kanterne til hhv. V_2, V_3 og V_4, findes der i $G[V_1]$ en vej mellem $v_{1,2}$ og $v_{1,3}$ og en vej mellem et punkt på denne vej og $v_{1,4}$, se figur 5.1. Vi har dermed, at G indeholder en underdeling af K_4.



Figur 5.1: En graf, som kan sammentrækkes til K_4.

Hvis G indeholder en underdeling af K_4 følger der direkte, at G kan sammentrækkes til K_4.

$\square$

Sætning 5.3
Hvis en graf på formen $E_3 + H$ er kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7, så er H en af følgende grafer.

(i) *En underdeling af $K_1 + C_r$ for $r \geq 4$, hvor kun kanterne på C_r kan være underdelt samt et punkt u, som er forbundet til underdelingen af $K_1 + C_r$ på en sådan måde, at der for alle $x, y \in V(H)$ gælder, at $H - \{x, y\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.*

(ii) *$K_{3,3}$ samt et punkt u, som er forbundet til $K_{3,3}$ på en sådan måde, at der for alle $x, y \in V(H)$ gælder, at $H - \{x, y\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.*

(iii) *Prismegrafen, se figur 5.2, hvor kanterne mellem de to disjunkte trekanter evt. er underdelte samt et punkt u. Punktet u er forbundet til grafen på en* *sådan måde, at der for alle $x, y \in V(H)$ gælder, at $H - \{x, y\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.*

(iv) *En underdeling af K_4 samt et punkt u. Punktet u er forbundet til underdelingen af K_4 på en sådan måde, at der for alle $x, y \in H$ gælder, at $H - \{x, y\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.*

Bevis:
Lad $G = E_3 + H$, hvor $E_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

(A) G kan sammentrækkes til K_7, hvis og kun hvis der findes to punkter $x, y \in V(H)$ sådan, at $H - \{x, y\}$ kan sammentrækkes til K_4.

Antag, at G kan sammentrækkes til K_7. Hvis $G - \{x_i, x_j\}$ for $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$ kan sammentrækkes til K_7, kan H sammentrækkes til K_6, og dermed findes der to forskellige punkter $x, y \in V(H)$ sådan, at $H - \{x, y\}$ kan sammentrækkes til K_4. Hvis $G - \{x_i, x_j\}$ for $i, j \in \{1, 2, 3\}$, hvor $i \neq j$, ikke kan sammentrækkes til K_7, men $G - \{x_i\}$ kan sammentrækkes til K_7 for et $i \in \{1, 2, 3\}$,så findes der et punkt $x \in V(H)$ sådan, at $H - \{x\}$ kan sammentrækkes til K_5, og dermed har vi, at der findes et $y \in (V(H) - \{x\})$ sådan, at $H - \{x, y\}$ kan sammentrækkes til K_4. Vi kan derfor antage, at alle punkterne x_1, x_2, x_3 skal bruges for at sammentrække G til K_7. Da $x_i x_j \notin E$ for $i, j \in \{1, 2, 3\}$ hvor $i \neq j$, må vi sammentrække to af disse med to forskellige punkter x, y i H for at tilføje kanterne x_1x_2, x_1x_3, og x_2x_3. Så har vi, at $K_3 + (H - \{x, y\})$ kan sammentrækkes til K_7, dvs. $H - \{x, y\}$ kan sammentrækkes til K_4.
Hvis $H - \{x, y\}$ for $x, y \in V(H)$ kan sammentrækkes til K_4, følger det trivielt, at G kan sammentrækkes til K_7.

Det følger af (A), at G er kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7, hvis og kun hvis H er kant-maksimal mht. egenskab (B).

(B) $H - \{u\}$ kan sammentrækkes til K_4 for mindst et $u \in V(H)$, men for alle $x, y \in V(H)$, hvor $x \neq y$, gælder, at $H - \{x, y\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.

Dette ses ved, at hvis der ikke findes et $u \in V(H)$ sådan, at $H - \{u\}$ kan sammentrækkes til K_4, kan vi tilføje en kant $x_i x_j$ mellem et par af punkter $x_i, x_j \in V(E_3)$, og $G + x_i x_j$ kan heller ikke sammentrækkes til K_7, dvs. grafen G er ikke kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7.

Lad H være en graf, som er kant-maksimal mht. egenskab (B). Da en graf kan sammentrækkes til K_4, hvis og kun hvis grafen indeholder en underdeling af K_4 jf. lemma 5.2, gælder, at $H - \{u\}$ indeholder en underdeling af K_4. Eftersom H er kant-maksimal mht. egenskaben (B), må underdelingen af K_4 i $H - \{u\}$ indeholde ethvert punkt i $H - \{u\}$. Vi har så, at $\delta(H - \{u\}) \geq 2$. Lad H^* være grafen, som fås fra $H - \{u\}$ ved at ignorere alle punkter af valens 2, dvs. hvis et punkt v har valens 2 i $H - \{u\}$ og $e_1 = vv_1, e_2 = vv_2$ er kanterne incidente med v, vil vi i H^* ikke have punktet v, og kanterne e_1, e_2 vil give anledning til en ny kant $e = v_1 v_2$. Så gælder, at $\delta(H^*) \geq 3$.

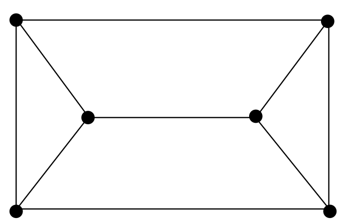
Det bemærkes, at da $H - \{u\}$ indeholder en underdeling af K_4, som indeholder alle punkter i $H - \{u\}$, har vi, at H^* ikke indeholder multiple kanter. Dette ses ved, at hvis H^* indeholdt multiple kanter, så har vi en overflødig kant i forhold til underdelingen af K_4, og eftersom de multiple kanter er fremkommet ved at fjerne punkter af valens 2, er der et punkt af valens 2 i $H - \{u\}$, som ikke er indholdt i underdelingen af K_4 i $H - \{u\}$.

Lad $S \subseteq V(H^*)$ være en punktsnitmængde i H^*, og antag, at $|S| \leq 2$. Lad H_1^* og H_2^* være ægte delgrafer af H^*, hvor $H^* = H_1^* \cup H_2^*$ og $H^*[S] = H_1^* \cap H_2^*$. Da H^* indeholder en underdeling af K_4, som indeholder alle punkter i H^* og $|S| \leq 2$, må en af delgraferne H_i^* for $i \in \{1, 2\}$ være en vej mellem to punkter i S. Dette er i modstrid med, at $\delta(H^*) \geq 3$. Vi har dermed, at H^* er 3-sammenhængende.

Ifølge Tutte [T61] findes der en følge af 3-sammenhængende grafer $H_0, H_1, \cdots, H_s$, hvor $H_0 = H^*$, $H_s = K_1 + C_r$ og H_{i+1} fås fra H_i ved enten, at slette en kant eller ved at sammentrække en kant, som ikke er indeholdt i en K_3 for $0 \leq i < s$. Ifølge Dirac [D52] kan enhver 3-sammenhængende graf sammentrækkes til K_4, og da H_i for $0 \leq i \leq s$ er en minor af H^* og $H^* \cup \{u\}$ har egenskab (B), har vi, at H_i kan sammentrækkes til K_4, og at der for alle $v \in V(H_i)$ for $0 \leq i \leq s$ gælder, at $H_i - \{v\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4.

Da $H_s = K_1 + C_r$ er kant-maksimal mht. at $K_1 + C_r$ kan sammentrækkes til K_4, og for alle $v \in V(K_1 + C_r)$ gælder, at $(K_1 + C_r) - \{v\}$ ikke kan sammentrækkes til K_4, har vi, at $s = 0$ eller G_{s-1} kan fås fra G_s ved, at dele punktet af valens r i to punker, hvor begge de nye punkter højst er naboer til to punkter på kredsen C_r. Af dette følger at hvis $s > 0$, så er $r = 4$.

Der findes to 3-regulære grafer med 6 punkter, nemlig $K_{3,3}$ og prismegrafen, se figur 5.2.



Figur 5.2: Prismegrafen.

Begge disse 3-regulære grafer er kant-maksimale mht. at grafen kan sammentrækkes til K_4, men fjernes et vilkårligt punkt kan grafen uden punktet ikke sammentrækkes til K_4, og vi har derfor, at H^* enten er isomorf med $K_{3,3}$, prismegrafen eller $K_1 + C_r$. Dette følger af, at hvis $H_{s-1} = K_{3,3}$ eller H_{s-1} er isomorf med prismegrafen, er H_{s-1} fremkommet fra H_{s-2} ved at sammentrække en kant, som ikke er indeholdt i en trekant, og da H_i er 3-sammenhængende er $\delta(H_i) \geq 3$ for alle $i = 0, 1, \dots, s$, dvs. vi får et punkt af valens 4 i den 3-regulære graf i H_{s-1}.

Grafen $H - \{u\}$ er en underdeling af H^* og hvis $H^* = K_1 + C_r$ for $r \geq 4$, er ingen af kanterne fra K_1 til C_r underdelt. Dette ses ved, at hvis blot en af kanterne fra K_1 til C_r var underdelt, kunne vi fjerne et punkt og stadig have en graf, som indeholdt en underdeling af K_4.

Hvis $H^* = K_{3,3}$, er ingen af kanterne underdelt i $H - \{u\}$, da en graf, som fås fra $K_{3,3}$ ved at slette en vilkårlig kant, er en underdeling af K_4, dvs. vi kan fjerne et punkt og stadig have en underdeling af K_4.

Hvis H^* er isomorf med prismegrafen, er kanterne mellem de to disjunkte trekanter indeholdt i enhver underdeling af K_4 i H^*, mens de andre kanter kan undgås. Derfor er det kun kanterne mellem de to disjunkte trekanter, som kan være underdelt i $H - \{u\}$.

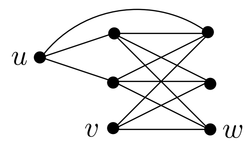
□

Vi vil forsøge at bestemme, hvordan punktet u kan tilføjes graferne nævnt i sætning 5.3 på en sådan måde, at for ethvert par af punkter gælder, at grafen minus de 2 punkter ikke kan sammentrækkes til K_4.

Hvis $H - \{u\} = K_{3,3}$, er $\deg_H(u) \leq 3$, da vi ellers får, at der findes $x, y \in V(H)$ sådan, at $H - \{x, y\}$ kan sammentrækkes til K_4. Desuden har vi, at hvis $\deg_H(u) = 3$, så er u nabo til 3 punkter i samme partition af $K_{3,3}$. Dette følger af, at vi ellers får, at grafen minus to punkter v, w kan sammentrækkes til K_4, se figur 5.3. Hvis $\deg_H(u) = 2$, er u nabo til to nabo punkter i $K_{3,3}$, da vi ellers får, at H ikke er kant-maksimal, idet vi kan tilføje en kant til H sådan, at u er nabo til 3 punkter i samme partition af $K_{3,3}$.

Vi har jf. (5), at $|E(H)| \leq 2|V(H)|$. Hvis $H - \{u\} = K_1 + C_r$ er $|E(H - \{u\})| = \frac{1}{2}(r + 3r) = 2r$ og $|V(H)| = r + 2$, dvs. $|E(H)| \leq 2r + 4$ og dermed, at $\deg(u) \leq 4$.

Hvis $H - \{u\} = K_1 + C_4$, får vi følgende for $\deg_H(u) \geq 2$.



Figur 5.3: $K_{3,3}$ samt punktet u, hvor $\deg_H(u) = 3$ og u ikke er nabo til 3 punkter i samme partition.

- Hvis $\deg_H(u) = 4$ er $N(u) = C_4$, dvs. $G = K_{2,2,2,3}$.

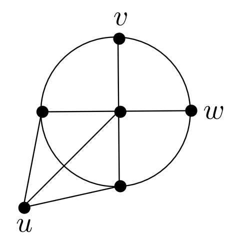
Dette følger af, at hvis u er nabo til K_1 samt 3 vilkålige punkter på C_4, er delgrafen induceret af K_1, u og 2 af naboerne til u på C_4 en K_4, og der er yderligere to punkter på C_4, som vi kan fjerne. Det bemærkes, at vi allerede i kapitel 2 viste, at $K_{2,2,2,3}$ er kant-maksimal mht. ikke at kunne sammentrækkes til K_7.

- Hvis $\deg_H(u) = 3$, er u er nabo til K_1 samt to ikke incidente punkter på C_4.

Dette følger af, at hvis u er nabo til 3 punkter på C_4, er grafen ikke kant-maksimal jf. forrige tilfælde, og hvis u er nabo til K_1 samt 2 nabopunkter på C_4, se figur 5.4, findes der to punkter v, w, hvor grafen minus v, w er en K_4.

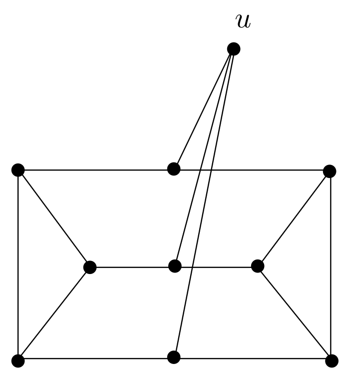
Hvis $\deg_H(u) \leq 2$ og $H - \{u\} = K_1 + C_4$, er H ikke maksimal mht. egenskab (B). jf. de forrige tilfælde.

Hvis $H - \{u\}$ er isomorf med prismegrafen, hvor kanterne mellem de to disjunkte trekanter evt. er underdelte, får vi, at $\deg_H(u) \leq 2$, eftersom $H - \{u\}$ indeholder kredse C af længde mindst 4, hvor mindst 2 punkter i $H - \{u\}$ ikke er indeholdt i C, dvs. hvis u har 3 eller flere naboer på en af disse kredse, har vi, at der findes $x, y \in V(H)$, sådan at $H - \{x, y\}$ kan sammetrækkes til K_4. Desuden kan u ikke være nabo til et punkt på hver af vejene mellem de to disjunkte trekanter, idet vi



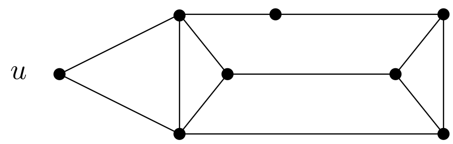
Figur 5.4: $H - \{u\} = K_1 + C_4$ og $\deg_H(u) = 3$, hvor u er nabo til K_1 samt to nabo punkter på C_4. Det bemærkes, at denne graf er isomorf med $K_{1,2,3}$ som netop indeholder en K_4.

så får, at mindst to punkter i grafen kan fjernes og resten sammentrækkes til K_4, se figur 5.5



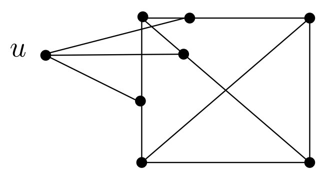
Figur 5.5: Prismegrafen samt punktet u. Det bemærkes, at naboerne til u på vejene mellem de to disjunkte trekanter kan være endepunkter, dvs. punkter indeholdt i trekanterne.

Af tidsmæssige årsager er tilfældet, hvor $H - \{u\}$ er en underdeling af prismegrafen på måden beskrevet ovenfor og $\deg_H(u) = 2$ ikke blevet undersøgt. Et eksempel på en graf H, hvor $H - \{u\}$ er en underdeling af prismegrafen og $\deg_H(u) = 2$, som er kant-maksimal mht. egenskab (B), ses på figur 5.6



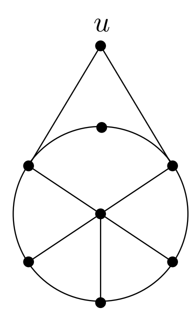
Figur 5.6: $H - \{u\}$ er en underdeling af prismegrafen.

Tilfældet, hvor $H - \{u\}$ er en underdeling af K_4, er heller ikke blevet undersøgt. Grafen på figur 5.7 er et eksempel på en graf H, hvor $H - \{u\}$ er en underdeling af K_4, som er kant-maksimal mht. egenskab (B).



Figur 5.7: $H - \{u\}$ er en underdeling af K_4.

Ligeledes er tilfældet, hvor $H - \{u\}$ er en underdeling af $K_1 + C_r$ for $r \geq 4$ eller $H - \{u\} = K_1 + C_r$ for $r \geq 5$, heller ikke blevet undersøgt. På figur 5.8 ses en graf H, hvor $H - \{u\}$ er en underdeling af $K_1 + C_5$, som er kant-maksimal mht. egenskab (B).



Figur 5.8: $H - \{u\}$ er en underdeling af $K_1 + C_5$.

Kapitel 6

Summary

This Master thesis deals with Hadwiger's Conjecture for $k = 7$ which says that any 7-chromatic graph has a K_7-minor and the weaker form of Hadwiger's Conjecture for $k = 7$ which says that any 7-chromatic graph has K_7 or $K_{4,4}$ as a minor. We show that any graph with $n \geq 6$ vertices and at least $5n - 14$ edges has a K_7-minor. The graphs with n vertices and exactly $5n - 15$ edges without a K_7-minor are shown to be graphs isomorphic to $K_{2,2,2,3}$ and MP_2-cockades. Next, we prove that any 4-connected graph with n vertices and at least $4n - 7$ edges is a K_7 or has a $K_{4,4}$-minor. We then use this result to prove the weaker form of Hadwiger's Conjecture, viz. that any 7-chromatic graph has a K_7-minor or a $K_{4,4}$-minor. We prove this without using the Four Colour Theorem. In the last chapter, we determine some properties of graphs on the form $E_3 + H$ which are maximal without a K_7-minor.

Bilag A

Resultater af Menger

Der henvises til [DR96] mht. bevis for følgende to sætninger.

Sætning A.1 Global version af Mengers sætning
En graf G er k-sammenhængende, hvis og kun hvis G indeholder k internt disjunkte veje mellem ethvert par af punkter.

Sætning A.2 Menger
Lad $G = (V, E)$ være en graf og $A, B \subseteq V$. Så er det mindste antal punkter, som separerer A fra B i G, lig det maksimale antal disjunkte (A, B)-veje i G.

Lemma A.3
Lad $G = (V, E)$ være en k-sammenhængende graf, og lad $A \subseteq V$, hvor $|A| = k$. For ethvert $u \in V \backslash A$ findes der k veje $P_1, \cdots, P_k$ fra u til A, hvor $V(P_i) \cap V(P_j) = \{u\}$ for $i \neq j$.
Bevis:
Tilføj til G et punkt $w \notin V$ samt kanter fra w til ethvert punkt i A. Da G er k-sammenhængende er $G + w$ også k-sammenhængende. Ifølge Mengers sætning (sætning A.1) finder der k internt disjunkte veje mellem ethvert par af punkter i

en k-sammenhængende graf, dvs. vi har k internt disjunkte (u, w)-veje i $G + w$. Da $|A| = k$ og $N(w) = A$, har vi præcis en vej igennem ethvert punkt i A. Heraf følger, at der i G findes k veje $P_1, \ldots, P_k$ fra u til A, hvor $V(P_i) \cap V(P_j) = \{u\}$ for $i \neq j$.

$\square$

Bilag B

Resultater vedrørende planare grafer

Der henvises til [CL96] mht. bevis for følgende sætning.

Sætning B.1 Wagner
En graf G er planar, hvis og kun hvis G ikke har en K_5-minor eller en $K_{3,3}$-minor.

Lemma B.2
En 4-sammenhængende planar graf indeholder ikke en K_4.
Bevis:
Antag, at $G = (V, E)$ er en 4-sammenhængende planar graf samt, at G indeholder en K_4. Lad $S \subseteq V$, hvor $|S| = 4$, og antag, at $G[S] = K_4$. Da G er 4-sammenhængende, indeholder G 4 disjunkte (S, v)-veje, hvor $v \in V - S$ jf. Mengers sætning (sæting A.2). Sammentrækkes disse veje, får vi, at G har en K_5-minor. At G har en K_5-minor, er en modstrid med, at G er planar jf. Wagners sætning (sætning B.1).

$\square$

Litteratur

[B98] Brandt, S.: "On the structure of dense triangle-free graphs", Electronic J. Combin. 5, R43, (1 - 5), 1998.

[CGH71] Chartrand, G., Geller, D. P., Hedetniemi, T. : "Graphs with forbidden subgraphs", J. Combin. Theory 10, (12 - 41), 1971.

[CL96] Chartrand, G. og Lesnaik, L.: "Graphs and Digraphs", 3. udgave, Chapman and Hall/CRC, 1996 (ISBN: 0-412-98721-x).

[D52] Dirac, G. A.: "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", J. London Math. Soc. 27, (85 - 92), 1952.

[D60] Dirac, G. A.: "Trennende Knotenpunktmengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem", J. Reine Angew. Math. 204, (116 - 131), 1960.

[D64] Dirac, G. A.: "On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs", J. Reine Angew. Math. 214/215, (43 - 52), 1964.

[DR96] Diestel, Reinhard: "Graph Theory", 1. udgave, Springer, 1997 (ISBN: 0-387-98210-8).

[J71] Jakobsen, I. T.: "A homomorphism theorem with an application to the conjecture of Hadwiger", Studia Sci Math. Hung. 6, (151 - 160), 1971.

[KJ01] Jørgensen, L. K.: "Vertex Partitions of $K_{4,4}$-Minor Free Graphs", Graphs and Combinatotics 17, (265 - 274), 2001.

[KJ88] Jørgensen, L. K.: "Extremal graphs for contraction to K_7", Ars Combinatoria 25C, (133 - 148), 1988.

[KJ89] Jørgensen, L. K.: "Some maximal graphs that are not contractible to K_6", ikke publiceret, 1989.

[KT05] Kawarabayashi, K. og Toft, B.: "Any 7-chromatic graph has K_7 or $K_{4,4}$ as a minor", Combinatorica 25 (3), (327 - 353), 2005

[M68] Mader, W: "Homomorphiesätze für Graphen", Math. Ann. 178, (154 - 168), 1968.

[M78] Mader, W: "Über die Maximalzahl kreuzungfreier H-Wege", Arch. Math. 31, (387 - 402), 1978.

[RST93] Robertson, N., Seymour, P. og Thomas, R.: "Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs", Combinatorica 13, (279 - 361), 1993.

[ST95] Stiebitz, M. og Toft, B.: "An abstract generalization of a map reduction theorem of Birkhoff", J. Combin. Theory Ser. B 65, (165 - 185), 1995.

[T61] Tutte,W. T.: "A theory of 3-connected graphs", Indag. Math. 23, (441 - 455), 1961.

[W37] Wagner, K.: "Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe", Math. Ann. 114, (570 - 590), 1937.

[WD90] Woodall, D. R. : "Improper colourings of graphs" i Graph Colourings (ed. Nelson, R. og Wilson, R. J.), Pitman Research Notes 218, (45 - 63), 1990