Indhold

Kapitel 1

Indledende resultater

Følgende svarer til sætning 1.12 i rapporten.

Sætning 1.1
Lad G være en elementær graf, så er G perfekt. $\diamond$

Bevis
De elementære grafer betragtes enkeltvis, og ifølge sætning 1.6 i rapporten er det nok at vise sætningen for G.

Lad G være en todelt graf. Da er $\chi(G) \leq 2$ og $\omega(G) \leq 2$.
Antag, at $\chi(G) = 1$. Dermed er $|E(G)| = 0$, og så er $\omega(G) = 1$. Antag, at $\chi(G) = 2$, så eksisterer der mindst én kant $e \in E(G)$, og dermed er $\omega(G) = 2$.
Hvis $\omega(G) = 1$, så eksisterer der ingen kanter i grafen, og dermed er $\chi(G) = 1$. Hvis $\omega(G) = 2$, så findes der mindst en kant i grafen, og dermed er $\chi(G) = 2$. Altså er $\chi(G) = \omega(G)$ for alle tilfælde, hvor G er en todelt graf. Altså er $\chi(G) = \omega(G)$, når G er liniegrafen af en todelt graf.

Lad G være liniegrafen af en todelt graf H. Idet H er todelt er $\omega(G) = \Delta(H)$ og $\chi(G) = \chi'(H)$, hvor $\chi'(H)$ betegner det kantkromatiske tal. Ifølge [Bondy & Murty, 1976, side 93] er $\chi'(H) = \Delta(H)$ for enhver todelt graf.

Lad G være en bicograf. På grund af konstruktionen af bicografer udgør mængden $\{c_1, \ldots, c_n\}$ en komplet delgraf i G, og ligeledes udgør mængden $\{d_1, \ldots, d_n\}$ en komplet delgraf. Hermed må $\omega(G) \geq n$ og $\chi(G) \geq n$. Betragt tilfældet, hvor a_i er nabo til c_j, og b_i er nabo til d_j, da det analogt kan vises for tilfældet, hvor a_i er nabo til d_j, og b_i er nabo til c_j. Der kan i en bicograf højst være komplette delgrafer af orden $n+1$, da der ikke findes kanter mellem punkter c_j og d_j, og der findes ikke kanter mellem punkter a_i og $a_{i'}$ og ingen kanter mellem a_i og d_j. Desuden findes der ikke kanter mellem punkter b_i og $b_{i'}$ og ingen kanter mellem punkter b_i og c_j for $1 \leq i < i' \leq m$ og $1 \leq j \leq n$. Hermed kan c_j og d_j ikke være i samme komplette delgraf, ligesom $\{a_i, b_i\}$ ikke kan være i samme komplette delgraf som $\{a_{i'}, b_{i'}\}$. Desuden kan a_i og d_j ikke være i samme komplette delgraf, og b_i samt c_j kan ikke være i samme delgraf. Heraf er $\omega(G) \leq n+1$.
Antag, at $\chi(G) = n$. Da punkterne c_j, for $1 \leq j \leq n$, udgør en komplet delgraf, behøves der netop n forskellige farver for at farve punkterne c_j. Benyt farven j til punktet c_j for $1 \leq j \leq n$. Da punkterne a_i alle er naboer til punkterne c_j, for $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$, behøves endnu en farve, hvilket er i modstrid med, at $\chi(G) = n$.
Antag, at $\chi(G) \geq n+2$. Igen farves punkterne c_j med farve j, for $1 \leq j \leq n$, og punkterne a_i farves med farven $n+1$. Punkterne d_j udgør en komplet delgraf, så her behøves også n farver, lad dette være farverne $\{1, \ldots, n-1, n+1\}$. Betragt nu punkterne b_i. Et punkt b_i er nabo til samtlige d_j punkter og til punktet a_i. Da yderligere mindst én farve skal benyttes, skal det gælde, at b_i er nabo til netop det punkt c_n, der har farven n. Dette kan ikke være opfyldt på grund af definition 1.10 i rapporten.

Dermed må $\chi(G) = n + 1$ og her udgør $c_1, \ldots, c_n, a_1$ en komplet delgraf af orden $n + 1$. Dette er desuden en største komplet delgraf i G, og da er $\chi(G) = n + 1$. Dermed er $\chi(G) = \omega(G)$.
Antag, at $\omega(G) = n$. Dermed er størrelsen af en største klike i G lig n, men $c_1, \ldots, c_n, a_1$ er en komplet delgraf af orden $n+1$, så derfor opnåes en modstrid. Hermed må det for bicografer gælde, at $\chi(G) = \omega(G)$. □

Følgende svarer til lemma 2.2 i rapporten.

Lemma 1.2
Lad G være en Berge graf, og lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde. Lad P : $p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - X$ af ulige længde, hvor p_1 og p_n er komplette til X. Da vil en af følgende gælde:

(i) *En kant $e \in E(P)$ er komplet til X.*

(ii) *P har længde mindst fem, og X vil indeholde et afhop for P.*

(iii) *P har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter i P, hvis indre tilhører X.*

◇

I det følgende vises det, at omskrivnigen af Roussel-Rubios lemma er korrekt. Det vil sige, at lemma 1.2 bevises ud fra Roussel-Rubios lemma [Roussel & Rubio, 2000, side 174].
Bevis
Hvis P har længde en, så er (i) opfyldt. Hvis P har længde tre, så kan det antages, at der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter i P, hvis indre tilhører X, for ellers er (iii) opfyldt. Dermed er lemma 2.3(i) i [Roussel & Rubio, 2000, side 174] opfyldt. Hvis yderligere lemma 2.3(ii) i [Roussel & Rubio, 2000] er opfyldt, så vil der findes et punkt i det indre af P, som er komplet til X, og dermed vil en kant i P være komplet til X, og (i) er opfyldt. Det kan derfor antages, at lemma 2.3(ii) i [Roussel & Rubio, 2000] ikke er opfyldt. Det vil sige, at der findes en 2-vej af ulige længde mellem to ikke-nabopunkter i X, hvis indre tilhører det indre af P, og en sådan må have længde tre. Dermed er det også en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i P, hvis indre tilhører X, og en modstrid er opnået med antagelsen om, at en sådan anti 2-vej ikke findes. Lemmaet er dermed opfyldt, når P har længde tre.
Antag derfor, at P har længde mindst fem, og X ikke indeholder et afhop for P. Hvis lemma 2.3(i)-(ii) i [Roussel & Rubio, 2000] er opfyldt, så vil der findes et punkt p_i i det indre af P, som er komplet til X. Dermed vil enten $p_1, \ldots, p_i$ eller $p_i, \ldots, p_n$ have ulige længde. Ovenstående gentages på den nye kortere 2-vej af ulige længde, hvormed der igen fremkommer en kortere 2-vej af ulige længde, hvor begge endepunkter er komplette til X. Denne proces fortsættes, indtil der haves en 2-vej af længde tre. Da lemmaet allerede er vist for 2-veje af længde tre, må lemmaet også være opfyldt, når P har længde mindst fem, hvis det kan vises, at lemma 2.3(i)-(ii) i [Roussel & Rubio, 2000] er opfyldt. Antag derfor, at lemma 2.3(ii) i [Roussel & Rubio, 2000] ikke er opfyldt. Dermed vil der findes to ikke-nabopunkter x_1 og x_2 i X, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører det indre af P, lad det være 2-vejen $x_1, p_i, \ldots, p_j, x_2$. Hvis $p_i = p_2$ og $p_j = p_{n-1}$, så haves et afhop for P i X, hvilket per antagelse ikke forekommer. Dermed må $p_i \neq p_2$ eller $p_j \neq p_{n-1}$, lad det være $p_i \neq p_1$. Dermed dannes et hul $p_1, x_1, p_i, \ldots, p_j, x_2$ af ulige længde, hvilket ikke kan forekomme i en Berge graf. Altså er lemma 2.3(ii) i [Roussel & Rubio, 2000] opfyldt. Hvis lemma 2.3(i) i [Roussel & Rubio, 2000] ikke er opfyldt, så vil der findes to nabopunkter i P, som er forbundet af en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører X. Da P har længde mindst fem, er ikke både p_2 og p_{n-1} blandt de to nabopunkter fra P i anti 2-vejen, lad p_2 være et punkt, som ikke er med i anti 2-vejen. Da vil anti 2-vejen sammen med p_1 danne et antihul af ulige længde, da p_1 er komplet til X og ikke-nabo til de to nabopunkter i anti 2-vejen. Altså er lemma 2.3(i) i [Roussel & Rubio, 2000] opfyldt. Det vil sige, at når P har længde mindst fem, og X ikke indeholder et afhop for P, så er en kant i P komplet

til X. □

Lemma 1.3
Lad G være en Berge graf, og lad $X \subseteq V(G)$. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej af ulige længde i $G - X$, hvor p_1 og p_n er komplette til X, og hvor ingen kanter i P er komplette til X. Lad $v \in V(G)$ være et punkt, der er komplet til X. Da er v enten nabo til et af punkterne p_1 eller p_2, eller så har v kun en nabo i det indre af P, nemlig p_{n-1}. ◇

For bevis se [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002].

Lemma 1.4
Lad G være en Berge graf og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \geq 5$ er ulige, så p_1 er det eneste punkt fra P, der er komplet til X, og p_1 samt p_n er de eneste punkter fra P, som er komplette til Y. Da vil én af følgende være opfyldt:

(i) *Der findes et $x \in X$, som er ikke-nabo til samtlige $p_2, \ldots, p_n$.*

(ii) *Der er to ikke-naboer $x_1, x_2 \in X$, så $x_1, p_2, \ldots, p_n, x_2$ er en 2-vej.*

◇

Bevis
Det er nok at betragte delgrafen $H = \langle V(P) \cup X \cup Y \rangle_G$, da det er denne del af grafen, som lemmaet omhandler. Lad G' være opnået fra $H - Y$ ved at tilføje et nyt punkt y, som er nabo til alle punkter i $X \cup \{p_1, p_n\}$. Da y er nabo til p_1 og p_n, vil $D = \langle P \cup \{y\} \rangle_{G'}$ være et hul i G' af lige længde mindst seks.
Hvis G' er en Berge graf, så ifølge lemma 2.6 i rapporten vil X enten indeholde en hat eller et afhop for D ved $p_1 y$. Hvis X indeholder en hat, så følger af definition 2.5 i rapporten, at der findes et punkt $x \in X$, som ikke er nabo til $p_2, \ldots, p_n$, hvormed (i) er opfyldt. Hvis X indeholder et afhop, så følger af definition 2.1 i rapporten, at der findes en 2-vej $x_1, p_2, \ldots, p_n, x_2$, hvor $x_1, x_2 \in X$, hvormed (ii) er opfyldt.

Antag derfor, at G' ikke er en Berge graf. Først antages, at der findes et hul C af ulige længde mindst syv i G'. Da H er en Berge graf, må C indeholde y. Dermed findes der en 2-vej $Q = C - \{y\}$ af ulige længde mindst fem i $H - Y$. Begge endepunkter i Q er komplette til Y, og ingen indre punkter i Q er komplette til Y. Det vil sige, at Q's endepunkter tilhører $X \cup \{p_1, p_n\}$, og dens indre punkter tilhører $V(P) - \{p_1, p_n\}$. Fra lemma 1.2(ii) følger, at Y indeholder et afhop for Q. Ifølge definition 2.1 i rapporten vil det sige, at der findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så kanterne $y_1 q_1, y_1 q_2, y_1 q_m, y_2 q_1, y_2 q_{m-1}$ og $y_2 q_m$ findes for $Q : q_1, \ldots, q_m$. Der vil altså findes en 2-vej $R : y_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, y_2$ af ulige længde mindst fem, hvis indre tilhører $V(P) - \{p_1, p_n\}$. Idet R har ulige længde, og det indre af R er en delgraf af det indre af P, som har lige længde, kan R ikke indeholde alt fra det indre af P. Det vil sige, at ikke både p_2 og p_{n-1} vil tilhøre R. Hvis eksempelvis p_{n-1} ikke er med i R, så vil der dannes et hul af ulige længde bestående af R og kanterne $y_1 p_n$ og $y_2 p_n$, hvilket giver en modstrid, da H er en Berge graf. Det er hermed vist, at G' ikke kan indeholde et hul af ulige længde mindst syv.

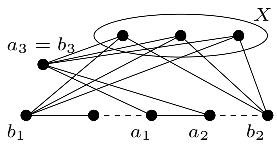
Et hul af længde fem er det samme som et antihul af længde fem, så derfor betragtes nu tilfældet, hvor G' indeholder et antihul D af ulige længde mindst fem. Ligesom for C må D indeholde y, og D må indeholde netop to ikke-nabopunkter til y, og disse punkter tilhører $V(P) - \{p_1, p_n\}$, lad det være u og v. Udover punkterne u, v og y må der findes en anti 2-vej Q af ulige længde mellem u og v for at D er et antihul af ulige længde. Da y skal være nabo til de indre punkter i anti 2-vejen Q, må de indre punkter i Q tilhøre $X \cup \{p_n\}$. Bemærk, at p_1 ikke kan være et indre punkt i Q, da

p_1 i $\overline{H}$ enten skal forbindes til både u og v, hvilket giver en kreds af længde fire, eller det tvinger p_n til at være forbundet til både u og v, hvilket ligeledes giver en kreds af længde fire. Idet u og v ikke er komplette til Y i H, så vil der findes en anti 2-vej R, hvis indre tilhører Y, og R må have ulige længde, da R sammen med Q danner et antihul i G, som derfor skal have lige længde. Da $n \geq 5$, vil mindst et af p_1 og p_n ikke være forbundet til u og v. Hvis p_1 ikke er forbundet til u og v, så vil kanterne up_1 og vp_1 findes i $\overline{H}$, hvormed de sammen med R danner et antihul af ulige længde i H, og en modstrid er opnået med, at G er en Berge graf. Ligeledes opnåes en modstrid, hvis p_n ikke er forbundet til u og v. □

Følgende svarer til lemma 2.11 i rapporten.

Lemma 1.5
Lad G være en Berge graf. Lad X være en antisammenhængende mængde, og antag, at X kan forbindes til en trekant $\{a_1, a_2, a_3\}$ via 2-vejene P_1, P_2 og P_3. For $i = 1, 2, 3$ lad P_i have endepunkter a_i og b_i, og lad b_i være det eneste punkt i P_i, som er komplet til X. Da vil enten mindst to af P_1, P_2 og P_3 have længde nul, hvormed to af a_1, a_2 og a_3 er komplette til X, eller en af P_1, P_2 eller P_3 har længde nul, og de andre to har længde en. ◇

Bevis
Mindst to af 2-vejene P_1, P_2 og P_3 har samme paritet, lad det være $P_1 : a_1, \ldots, b_1$ og $P_2 : a_2, \ldots, b_2$. Lad $Q : b_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, b_2$. Dermed har Q ulige længde, dens endepunkter er begge komplette til X, og ingen af dens indre punkter er komplette til X. Hvis Q har længde én, altså at både P_1 og P_2 har længde nul, da er lemmaet opfyldt, så det kan antages, at Q har længde mindst tre. Fra korollar 2.3 i rapporten vil hvert punkt, der er komplet til X, have en nabo i det indre af Q. Idet b_3 er et punkt, der er komplet til X, så skal b_3 have en nabo i det indre af Q, men da de eneste kanter mellem de tre 2-veje er $a_i a_j$, for $1 \leq i < j \leq 3$, så må $b_3 = a_3$. Altså har P_3 længde nul, så både P_1 og P_2 må have længde mindst én, for ellers er lemmaet opfyldt.
Antag, at Q har længde tre, det vil sige, at P_1 og P_2 har længde én, og så er lemmaet opfyldt. Antag derfor, at Q har længde mindst fem. Af symmetrigrunde kan det antages, at P_1 har længde mindst to.



Figur 1.1: Tilfældet, hvor Q har længde mindst fem, og P_1 har længde mindst to.

Idet b_3 er komplet til X og hverken er nabo til endepunktet b_1 eller dens nabo, da $a_i a_j$ er den eneste kant mellem $V(P_i)$ og $V(P_j)$, så følger af lemma 1.3, at b_3 kun har én nabo i det indre af Q. Dette danner modstrid med, at b_3 er forbundet til både a_1 og a_2, så det er ikke muligt, at Q har længde mindst fem. □

Lemma 1.6
Lad G være en Berge graf. Lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \geq 3$ er ulige, og p_1 er det eneste punkt fra P, der er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, der er komplet til Y. Da vil ét af følgende være opfyldt:

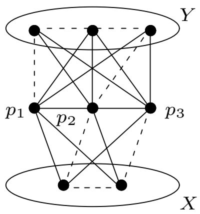
(i) *$n \geq 5$, og der findes to ikke-naboer $x_1, x_2 \in X$, så $x_1, p_2, \ldots, p_n, x_2$ er en 2-vej.*

(ii) *$n \geq 5$, og der findes to ikke-naboer $y_1, y_2 \in Y$, så $y_1, p_1, \ldots, p_{n-1}, y_2$ er en 2-vej.*

(iii) $n = 3$, *og der findes en anti 2-vej* Q *mellem* p_2 *og* p_3*, hvis indre tilhører* X*, og der findes en anti 2-vej* R *mellem* p_1 *og* p_2*, hvis indre tilhører* Y*, og nøjagtig én af* Q *og* R *har ulige længde.*

I hvert tilfælde vil enten $\{V(P) - p_1, X\}$ *eller* $\{V(P) - p_n, Y\}$ *ikke være et balanceret par.* ◇

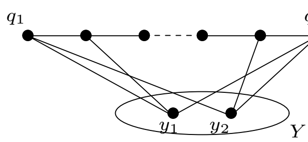
Bevis
Hvis P har længde to, altså at $n = 3$, så vælges en anti 2-vej Q mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X, og der vælges en anti 2-vej R mellem p_1 og p_2, hvis indre tilhører Y. Anti 2-vejen Q findes, da p_2 og p_3 ikke er naboer til alle punkter i X i G, da p_1 er det eneste punkt fra P, der er komplet til X. Anti 2-vejen R findes, da p_1 og p_2 ikke er nabo til samtlige punkter i Y, da p_3 er det eneste punkt fra P, der er komplet til Y.



Figur 1.2: De stiplede linier angiver 2-vejene Q og R i $\overline{G}$.

Desuden vil kanten p_1p_3 ikke være i grafen G, så p_2, Q, p_3, p_1, R, p_2 er et antihul. Da G er en Berge graf, indeholder den ikke et antihul af ulige længde. Det vil sige, at enten Q eller R har ulige længde, da længden af antihullet er summen af længden af Q, længden af R samt kanten p_1p_3. Hermed er (iii) opfyldt.

Det kan altså antages, at $n \geq 5$. Det er nok at betragte delgrafen $H = \langle V(P) \cup X \cup Y \rangle_G$ af G, da lemmaet kun omhandler denne del af grafen. Lad G' være opnået fra $H - Y$ ved at tilføje et nyt punkt y, som er nabo til alle punkter i $X \cup \{p_n\}$. Lad P' være 2-vejen $p_1, \ldots, p_n, y$ i G'. Da har P' ulige længde mindst fem. Hvis G' er en Berge graf, så følger af lemma 1.2(ii), at X indeholder et afhop for P'. Per definition af afhop vil det sige, at der findes to ikke-nabopunkter $x_1, x_2 \in X$, så kanterne x_1p_2 og x_2p_n findes, hvormed (i) er opfyldt. Antag derfor, at G' ikke er en Berge graf, altså at der findes enten et hul eller et antihul af ulige længde mindst fem.
Først antages, at der findes et hul C af ulige længde mindst syv i G'. Dette hul må nødvendigvis benytte y, da H er en Berge graf. Betragt y's naboer i C, som må være komplette til Y i H, og de må være de eneste punkter i C, som er komplette til Y. Dermed vil der i $H - Y$ være en 2-vej $Q = C - \{y\}$ af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y. Altså vil endepunkterne i Q tilhøre $X \cup \{p_n\}$, og dens indre vil tilhøre $V(P) - p_n$. Fra lemma 1.2(ii) følger, at Y indeholder et afhop for Q. Per definition af afhop vil det sige, at der findes to ikke-naboer $y_1, y_2 \in Y$, så kanterne $y_1q_1, y_1q_2, y_1q_m, y_2q_1, y_2q_{m-1}$ og y_2q_m findes for $Q : q_1, \ldots, q_m$.



Figur 1.3: Afhoppet y_1, y_2 for Q.

Der vil altså findes en 2-vej R af ulige længde mindst fem med endepunkter y_1 og y_2, hvis indre tilhører $V(P) - p_n$. Idet R findes i grafen G, må der ikke findes kanter y_1p_n og y_2p_n, så de sammen med R udgør et hul af ulige længde. For at undgå dette, må p_n have en nabo i det indre af P,

hvormed p_{n-1} må tilhøre R. Hvis yderligere p_1 også tilhører R, så er (ii) opnået. Det kan derfor antages, at $p_1 \notin R$.
Idet R har ulige længde, og P har lige længde, må p_2 heller ikke tilhøre R, og dermed har p_1 ingen nabo i det indre af R. Da R er en 2-vej af ulige længde, hvor begge endepunkter er komplette til X, og intet indre punkt i R er komplet til X, følger det fra korollar 2.3 i rapporten, at hvert punkt, der er komplet til X, skal have en nabo i det indre af R. Dette danner en modstrid, da p_1 er komplet til X, men ikke har naboer i det indre af R. Dermed må også p_1 tilhøre R, så (ii) er opfyldt.
Et hul af ulige længde fem er også et antihul af ulige længde fem, så det er nok at betragte tilfældet, hvor G' indeholder et antihul D af ulige længde. Ligesom for C må D indeholde y. Desuden må D indeholde netop to ikke-nabopunkter til y, og disse stammer fra $V(P) - p_n$, lad det være u og v. Disse to punkter er naboer i P. Da D er et antihul af ulige længde, må der findes en anti 2-vej Q af ulige længde mellem u og v med punkter fra $X \cup \{p_n\}$. Punkterne skal findes i denne mængde, da det er de eneste punkter, som y er nabo til i G'. Idet u og v ikke er komplette til Y i H, vil der findes en anti 2-vej R i G, hvis indre tilhører Y. Da R sammen med Q danner et antihul, må R ligeledes have ulige længde, da et antihul i H skal have lige længde. Idet R findes i grafen H, må der ikke findes kanter up_n og vp_n, så de sammen med R udgør et hul af ulige længde. For at undgå dette må p_n være nabo til enten u eller v, så det kan antages, at $u = p_{n-2}$ og $v = p_{n-1}$. Da $n \geq 5$, er $u \neq p_1$, og dermed vil der findes en anti 2-vej S fra u til v, hvis indre tilhører X. Som før har S ulige længde. Da S sammen med R danner et antihul i H, som skal være lige må S have ulige længde. I $\overline{H}$ findes kanterne up_1 og vp_1, som sammen med S danner et hul af ulige længde, hvilket danner modstrid med, at G er en Berge graf. Det er hermed for alle tilfælde vist, at (i), (ii) eller (iii) er opfyldt.

Det skal vises, at enten $\{V(P) - p_1, X\}$ eller $\{V(P) - p_n, Y\}$ ikke er balancerede par i hvert af de tre tilfælde.
For (i) er $\{V(P) - p_1, X\}$ ikke et balanceret par, da der findes en 2-vej $x_1, p_2, \ldots, p_n, x_2$ af ulige længde, idet P har lige længde, og denne 2-vej har en kant mere end P.
For (ii) er $\{V(P) - p_n, Y\}$ ikke et balanceret par, da der findes en 2-vej $y_1, p_1, \ldots, p_{n-1}, y_2$ af ulige længde, idet P har lige længde, og denne 2-vej har en kant mere end P.
For (iii) er der fundet to anti 2-veje Q og R, hvor den ene har ulige længde, så hvis Q har ulige længde, da er $\{V(P) - p_1, X\}$ ikke et balanceret par. Hvis R har ulige længde, så er $\{V(P) - p_n, Y\}$ ikke et balanceret par. □

Følgende svarer til lemma 2.16 i rapporten.

Lemma 1.7
Lad G være en Berge graf, og lad $P : p_1, \ldots, p_m$ være en 2-vej i G. Lad $2 \leq s \leq m - 2$, og lad $Q : p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ være en anti 2-vej, hvor $n \geq 3$ er ulige. Antag, at hvert punkt $q_1, \ldots, q_n$ har en nabo i både $S = \{p_1, \ldots, p_{s-1}\}$ og $R = \{p_{s+2}, \ldots, p_m\}$. Da vil et af følgende gælde:

- (i) *$s \geq 3$, og de eneste kanter, der ikke findes mellem $\{p_{s-2}, p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}\}$ og $\{q_1, \ldots, q_n\}$, er $p_{s-1}q_n, p_sq_1, p_{s+1}q_n$.*
- (ii) *$s \leq m - 3$, og de eneste kanter, der ikke findes mellem $\{p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}, p_{s+3}\}$ og $\{q_1, \ldots, q_n\}$, er $p_sq_1, p_{s+1}q_n, p_{s+2}q_1$.*

◇

Bevis
At G er en Berge graf, giver restriktioner på, hvilke punkter i henholdsvis $\{p_1, \ldots, p_{s-1}\}$ og $\{p_{s+2}, \ldots, p_m\}$ punkterne $q_1, \ldots, q_n$ kan have som naboer. Da $n \geq 3$ i anti 2-vejen Q, har Q længde mindst fire. Det er antaget, at hvert punkt i Q undtaget p_s og p_{s+1} har naboer i både R og S. Mængderne R og S er begge sammenhængende, og desuden er R antikomplet til S, og S er antikomplet til R, for ellers udgør $p_1, \ldots, p_n$ ikke en 2-vej. Derfor kan lemma 1.6 anvendes i $\overline{G}$,

hvor G i lemma 1.6 svarer til $\overline{G}$, Y svarer til $\overline{R}$, X svarer til $\overline{S}$, og P svarer til Q. Lemma 1.6(iii) er ikke opfyldt, da Q har længde mindst fire, så fra lemma 1.6 kan det antages, at der findes to ikke-nabopunkter $u, v \in \overline{S}$, så $u, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, v$ er en 2-vej i $\overline{G}$, eller at der findes to punkter $u, v \in \overline{R}$, der ikke er naboer, så $u, p_s, q_1, \dots, q_n, v$ er en 2-vej i G.

Først betragtes tilfældet, hvor $u, v \in \overline{R}$. Det vil sige, at der findes nabopunkter $u, v \in R$, så $u, p_s, q_1, \dots, q_n, v$ er en anti 2-vej i G. Da $n \geq 3$, vil anti 2-vejen i G mindst bestå af u, p_s, q_1, q_2, q_3, v. Derfor er v nabo til både p_s og u, hvor $s \geq 3$, $v = p_{s-1}$ samt $u = p_{s-2}$. Her er $p_{s-2}, p_s, q_1, \dots, q_n, p_{s-1}$ en anti 2-vej af ulige længde mindst fire, hvor dens endepunkter p_{s-2} og p_{s-1} er antikomplette til $\{p_{s+1}, \dots, p_m\}$, og dens indre punkter, $p_s, q_1, \dots, q_n$ er ikke antikomplette til $\{p_{s+1}, \dots, p_m\}$. Anvendes lemma 1.2 i $\overline{G}$, hvor G i lemma 1.2 svarer til $\overline{G}$, X svarer til $\{p_{s+1}, \dots, p_n\}$, og P svarer til $\{p_{s-2}, p_3, q_1, \dots, q_n, p_{s-1}\}$, følger det, at der findes nabopunkter $w, x \in \{p_{s+1}, \dots, p_m\}$ i G, så $w, p_s, q_1, \dots, q_n, x$ er en anti 2-vej. Eftersom x er nabo til både p_s og w, må $x = p_{s+1}$ og $w = p_{s+2}$. Det vil sige, at $s \geq 3$, og $p_{s-2}, p_s, q_1, \dots, q_n, p_{s-1}$ samt $p_{s+2}, p_s, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}$ er anti 2-veje i G, hvormed $q_1, \dots, q_n$ alle må være nabo til p_{s_2} og p_{s+2}, $q_1, \dots, q_{n-1}$ alle er nabo til p_{s-1} og p_{s+1}, og $q_2, \dots, q_n$ alle er nabo til p_s. Altså de kanter, der ikke findes mellem $\{p_{s-2}, p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}\}$ og $\{q_1, \dots, q_n\}$, er kanterne $q_n p_{s-1}, q_n p_{s+1}$ og $q_1 p_s$, hvormed (i) er opfyldt.

Nu betragtes tilfældet, hvor $u, v \in \overline{S}$. Her vil u og v være naboer i S, og $u, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, v$ vil være en anti 2-vej i G. Da u er nabo til både v og p_{s+1}, må $m \geq s + 3 \Leftrightarrow s \leq m - 3$, og $u = p_{s+2}$ samt $v = p_{s+3}$. Dermed er $p_{s+2}, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s+3}$ en anti 2-vej af ulige længde mindst fem, hvor p_{s+2} og p_{s+3} er antikomplette til $\{p_1, \dots, p_s\}$, og ingen af $q_1 \dots, q_n, p_{s+1}$ er antikomplette til $\{p_1, \dots, p_s\}$. Ved at anvende lemma 1.2 i $\overline{G}$, hvor G i lemma 1.2 svarer til $\overline{G}$, X svarer til $\{p_1, \dots, p_s\}$, og P svarer til $\{p_{s+2}, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s+3}\}$, vil lemma 1.2($ii$) være opfyldt, så der findes et afhop for $p_{s+2}, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s+3}$ i $\overline{G}$. Det vil sige, at der findes nabopunkter $w, x \in \{p_1, \dots, p_s\}$ i G, så $w, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, x$ er en anti 2-vej i G. Da w er nabo til både x og p_{s+1}, må $w = p_s$ og $x = p_{s-1}$. Opsummerende er $s \leq m - 3$, og der haves to anti 2-veje $p_{s+2}, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s+3}$ og $p_s, q_1, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s-1}$ i G. Dermed er $q_1, \dots, q_n$ alle nabo til p_{s-1} og p_{s+3}, $q_1, \dots, q_{n-1}$ er alle nabo til p_{s+1}, og $q_2, \dots, q_n$ er alle nabo til p_{s+2} og p_s. Altså de kanter, der ikke findes mellem $\{p_{s-1}, p_s, p_{s+1}, p_{s+2}, p_{s+3}\}$ og $\{q_1, \dots, q_n\}$, er kanterne $q_n p_{s+1}, q_1 p_{s+2}$ og $q_1 p_s$, hvormed (ii) er opfyldt. $\square$

Kapitel 2

Skæve opdelinger

Følgende svarer til lemma 3.7 i rapporten.

Lemma 2.1
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i en Berge graf G. Hvis et af følgende gælder:

(i) *der findes punkter $u, v \in B$, som er forbundet af en 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører A, og er forbundet af en 2-vej af lige længde, hvis indre tilhører A.*

(ii) *der findes punkter $u, v \in A$, som er forbundet af en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører B, og er forbundet af en anti 2-vej af lige længde, hvis indre tilhører B.*

Da er $\{A, B\}$ en løs skæv opdeling, og G vil derfor have en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Bemærk, at (ii) er (i) i komplementærgrafen, og da er $\{B, A\}$ en skæv opdeling i $\overline{G}$, så det er nok at vise (i).
Antag derfor, at (i) gælder. Lad $A_1, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B. Idet $u, v \in B$, og de er forbundet af en 2-vej af lige længde, så er de ikke naboer, da 2-vejen skal være induceret, og hvis de er naboer, så kan 2-vejen kun have længde en. Dermed må u og v tilhøre samme B_j, da de ikke er naboer, og B_j er komplet til alle de andre antikomponenter i B.
Antag, at $u, v \in B_1$. Her er u og v forbundet af en 2-vej P_1 af lige længde og en 2-vej P_2 af ulige længde, hvor det indre af P_1 og det indre af P_2 tilhører A. Hvis P_1 og P_2 danner et hul, så er det et hul af ulige længde mindst fem, hvilket ikke må optræde i en Berge graf, så P_1 og P_2 danner ikke et hul. Det kan antages, at P_1 har indre i A_1. Da alle punkter i A_1 er forbundet via veje, så kan P_2 også have indre i A_1, uden der dannes et hul af ulige længde. Det er desuden det eneste sted, hvor P_2 kan eksistere, for hvis u og v er forbundet af en 2-vej, hvis indre tilhører A_2, så vil den danne et hul af ulige længde med enten P_1 eller P_2. Altså vil enten u eller v ikke have en nabo i A_2, hviket betyder, at $\{A, B\}$ er en løs skæv opdeling. Da følger af lemma 3.6 i rapporten, at G indeholder en balanceret skæv opdeling. $\square$

Følgende svarer til lemma 3.12 i rapporten.

Lemma 2.2
Lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i en Berge graf G. Lad W være kerne for den skæve opdeling. Lad A_1 være en komponent i A, og antag, at $\{A_1, W\}$ er et balanceret par. Da vil G have en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
Fra lemma 3.6 i rapporten kan det antages, at $\{A, B\}$ ikke er en løs skæv opdeling, da lemmaet ellers vil være opfyldt.
Lad $A_1, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B.

Påstand: $\{A_i, W\}$ *er et balanceret par for* $1 \leq i \leq m$.

Påstanden er per antagelse opfyldt for $i = 1$. Antag derfor, at $i > 1$. Per lemma 3.6 i rapporten kan det antages, at $\{A_i, W\}$ ikke er en løs skæv opdeling, da påstanden så vil være opfyldt.
Fra lemma 2.1 findes der ikke en 2-vej af ulige længde mellem to punkter i W, hvis indre tilhører A_i. Antag, at der findes en anti 2-vej Q af ulige længde mindst tre, hvis endepunkter tilhører A_i, og hvis indre tilhører W. Da en anti 2-vej af længde tre også er en 2-vej af længde tre blot med modsatte roller af endepunkterne og de indre punkter, må Q have længde mindst fem. Endepunkterne for Q har ingen naboer i den sammenhængende mængde A_1, da $A_1, \ldots, A_m$ er maksimale sammenhængende mængder. De indre punkter i Q har alle en nabo i A_1, da $\{A, B\}$ ellers er en løs skæv opdeling. Ved at benytte lemma 1.2 i komplementærgrafen $\overline{G}$, hvor G i lemma 1.2 svarer til $\overline{G}$, X svarer til A_1, og P svarer til Q, så fåes, at A_1 indeholder et afhop for Q i $\overline{G}$. Altså findes der en anti 2-vej med endepunkter i A_1, hvis indre er lig det indre af Q. Da $\{A_1, W\}$ er et balanceret par, må der ikke findes en anti 2-vej af ulige længde mellem to nabopunkter i A_1 med indre i W, så en modstrid er opnået. Der kan dermed ikke findes en anti 2-vej Q af ulige længde, så $\{A_i, W\}$ er et balanceret par. Påstanden er dermed vist.

Idet W er en antisammenhængende mængde, kan det antages, at $W \subseteq B_1$. Fra påstanden følger, at $A_1, \ldots, A_m$ kan antage samme rolle, så det kan antages, at A_1 ikke indeholder et punkt, der er komplet til W, da den skæve opdeling ellers ville være løs. Fra lemma 3.9 i rapporten kan det antages, at $(1, 2)$ er et 2-vej par eller anti 2-vej par, da opdelingen ellers er balanceret, hvilket er det ønskede. Antag først, at det er et anti 2-vej par. Det vil sige, at der findes en anti 2-vej Q_1 af ulige længde mindst tre med endepunkter i A_1 og indre i B_2. Idet begge Q_1's endepunkter har ikke-nabopunkter i W, så er de også forbundet af en anti 2-vej Q_2 med indre i W. Ifølge 2.1(ii) må Q_2 have ulige længde, for ellers har G en balanceret skæv opdeling. Ifølge påstanden må Q_2 ikke have ulige længde, så der kan altså ikke findes en sådan anti 2-vej Q_1. Derfor må der findes en 2-vej P af ulige længde mindst tre, hvis endepunkter tilhører B_2, og hvis indre tilhører A_1. Da en anti 2-vej af længde tre også er en 2-vej af længde tre, må P have længde mindst fem. Ifølge lemma 1.2 vil W indeholde et afhop for P, da det indre af P ikke indeholder et punkt, som er komplet til W. Det vil sige, at der findes en 2-vej med endepunkter i W og indre lig det indre af P. Dette danner modstrid med påstanden, som giver, at $\{A_1, W\}$ er et balanceret par. Derfor må opdelingen være løs, så G indeholder en balanceret skæv opdeling. $\square$

Følgende svarer til lemma 3.14 i rapporten.

Lemma 2.3
Lad G være et minimalt modeksempel graf, og lad $\{A, B\}$ være en skæv opdeling i G. Lad $A_1, A_2, \ldots, A_m$ være komponenterne i A, og lad $B_1, B_2, \ldots, B_n$ være antikomponenterne i B. Da gælder, at

(i) *for alle i, hvor $1 \leq i \leq m$, findes der et j, hvor $1 \leq j \leq n$, så (i, j) er et 2-vej par eller et anti 2-vej par.*

(ii) *for alle j, hvor $1 \leq j \leq n$, findes der et i, hvor $1 \leq i \leq m$, så (i, j) er et 2-vej par eller et anti 2-vej par.*

$\diamond$

Bevis
Bemærk, at $\overline{G}$ også opfylder lemmaets betingelser, hvor $\{B, A\}$ er en skæv opdeling. Det er derfor nok at vise et af punkterne, da punkt (i) svarer til (ii) i $\overline{G}$. Her vises punkt (ii). Det antages, at $j = 1$, da de resterende tilfælde kan vises analogt.

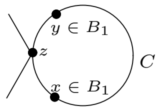
Lad G' være opnået fra G ved at tilføje et nyt punkt z, der er komplet til B_1. Der er nu to muligheder for G'. Nemlig, at

(I) G' ikke er en Berge graf.

(II) G' er en Berge graf.

Antag først, at (I) gælder, altså at G' ikke er en Berge graf. Det vil sige, at der findes et hul af ulige længde eller et antihul af ulige længde, der indeholder z. Dette skyldes, at G er en Berge graf, så det må være tilføjelsen af punktet z, der medfører, at grafen ikke længere er en Berge graf.

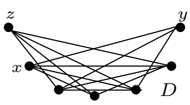
Antag først, at der findes et hul C af ulige længde, der indeholder z. Her vil z's naboer på kredsen, x og y, tilhøre mængden B_1, og ingen andre punkter på kredsen tilhører B_1, for ellers ville kredsen have korder, da z er komplet til B_1, se figur 2.1.



Figur 2.1: Situationen, hvor G' har et hul C af ulige længde, der indeholder punktet z.

Da $B_1, B_2, \ldots, B_n$ er disjunkte maksimale antisammenhængende delmængder, vil mængderne være komplette til hinanden. Altså vil ingen af punkterne $V(C) - \{z, x, y\}$ tilhøre en B_j-mængde, for ellers skulle det pågældende punkt være nabo til både x og y, og C vil dermed have længde fire. Hermed må $C - \{z\}$ være en 2-vej i G af ulige længde, hvis endepunkter tilhører B_1, og hvis indre tilhører A.
Betragt nu det indre af denne 2-vej. Da punkterne i 2-vejens indre er forbundet, må de alle tilhøre en af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_m$, lad det være A_i. Dette medfører ifølge definition 3.8 i rapporten, at $(i, 1)$ er et 2-vej par, og lemmaet er vist for dette tilfælde.

Antag derfor, at der ikke findes et hul af ulige længde i G', men et antihul D af ulige længde indeholdende z. Der vil i $D - \{z\}$ findes netop to punkter x og y, der ikke er naboer til z. Hermed vil $D - \{x, y\} \in B_1$ og $x, y \notin B_1$, se figur 2.2.



Figur 2.2: Situationen, hvor G' har et antihul D indeholdende z. Her er D skitseret med ulige længde syv.

Betragt nu den inducerede delgraf $\langle D - \{z\} \rangle_G$. Denne delgraf danner en anti 2-vej Q i G af ulige længde mindst tre, hvis endepunkter x og y ikke tilhører B_1, og hvis indre tilhører B_1. Punkterne x og y har ikke naboer blandt de indre punkter i Q, så derfor kan x og y ikke tilhøre B_j, for $2 \leq j \leq n$. Altså må punkterne x og y tilhøre A, og da de er naboer, må de tilhøre samme mængde, for eksempel A_i. Hermed udgør $(i, 1)$ et anti 2-vej par, og lemmaet er opfyldt i dette tilfælde. Lemmaet er nu vist, hvis G' ikke er en Berge graf.

Antag, at (II) gælder, altså at G' er en Berge graf. Lad $\omega(B_1) = s$, og lad $\omega(A \cup B) = t$. Da G ikke er en perfekt graf, vil $\chi(G) > t$. Antag, at der for $1 \leq i \leq m$ findes en delmængde $C_i \subseteq A_i$, så $\omega(C_i \cup B_1) = s$. Lad $H = \langle (B \cup A_i \cup \{z\}) \rangle_{G'}$. Ingen af punkterne i $A - A_i$ tilhører H. Idet et minimalt modeksempel ifølge [Chvátal, 1985, side 189] ikke kan indeholde en stjernesnitmængde, findes der mindst to punkter i G, som ikke findes i H. Da H kun indeholder ét punkt, som ikke findes i G, må $|V(H)| < |V(G)|$. Da G er et minimalt modeksempel, må H være en perfekt graf. Med kopiering af et punkt menes, at der dannes nye punkter $v_1, \ldots, v_k$, hvor $N(v_i) = N(v) \cup$

$\{v, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k\}$. Ifølge [Alfonsín & Reed, 2000, side 17] kan et punkt v i en perfekt graf kopieres, og der opnåes en ny perfekt graf. Ved at bruge dette resultat kan punktet $z \in H$ erstattes af en mængde af punkter Z, hvor $|Z| = t - s$, og hvor alle punkterne i Z er komplette til B_1 og naboer til hinanden. Desuden er intet punkt i Z nabo til punkter i $A_i \cup (B - B_1)$. Hermed er den fremkomne graf H' stadig perfekt. Ud fra konstruktionen af H' kan det ses, at $\omega(H') \leq t$, da $\omega(A \cup B) = t$. Da H' er en perfekt graf, kan den farves med t farver. Mængden Z er en klike i H', og den har størrelse $t - s$. Lad Z være farvet med farverne $s + 1, \ldots, t$, hvormed farverne $1, \ldots, s$ ikke optræder blandt punkterne i Z. Da Z er komplet til B_1, kan punkterne i B_1 ikke farves med farverne $s + 1, \ldots, t$, og da $\omega(B_1) = s$, skal farverne $1, \ldots, s$ alle benyttes. Da B_1 er komplet til $B - B_1$, kan punkterne i $B - B_1$ ikke farves med farverne $1, \ldots, s$. Lad C_i være de punkter fra A_i, der er farvet med farverne $1, \ldots, s$. Hermed er $C_i \cup B_1$ farvet med farverne $1, \ldots, s$, og $H - \{z\}$ er farvet med farverne $s + 1, \ldots, t$. Heraf er

$$\omega((A_i - C_i) \cup (B - B_1)) \leq t - s. \tag{2.1}$$

Lad $C = B_1 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_m$, og lad $D = V(G) - C$. Da $A_1, \ldots, A_m$ er maksimale sammenhængende delmængder, findes der ingen kanter mellem disse mængder, og der gælder ifølge ligning (2.1), at for hver mængde A_i er $\omega((A_i - C_i) \cup (B - B_1)) \leq t - s$, så $\omega(D) \leq t - s$. Ligeledes gælder der for hver mængde $C_i \subseteq A_i$, at $\omega(C_i \cup B_1) = s$, så $\omega(C) = s$. Da $|V(C)| < |V(G)|$ og $|V(D)| < |V(G)|$, må $\langle C \rangle_G$ og $\langle D \rangle_G$ begge være perfekte grafer. Dermed kan $\langle C \rangle_G$ farves med s farver, og $\langle D \rangle_G$ kan farves med $t - s$ farver. Dette giver, at G kan farves med t farver, men da G ikke er en perfekt graf, giver dette en modstrid, så antagelsen, om at G' er en Berge graf, må være forkert. $\square$

Kapitel 3

Cykliske 3-sammenhængende grafer

Følgende svarer til lemma 6.4 i rapporten.

Lemma 3.1
Lad H være en todelt og cyklisk 3-sammenhængende graf. Da vil et af følgende gælde:

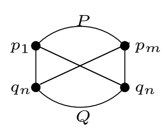
(i) $H = K_{3,3}$.

(ii) *H vil være en underdeling af K_4.*

(iii) *H vil indeholde en delgraf H', hvor H' er en underdeling af en K_4, og hvor H' ikke indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i H'.*

$\diamond$

Bevis
Det antages, at H ikke er isomorf med $K_{3,3}$ og ikke er en underdeling af K_4, og det skal så vises, at punkt (iii) er opfyldt. Da H er en cyklisk 3-sammenhængende graf, har H en delgraf H', som er en underdelt K_4, og det antages, at H' ikke opfylder punkt (iii). Altså vil der i H' findes en kreds, hvis punkter udgør mængden af forgreningspunkter i H'. Denne kreds vil være lig C_4, da der ved underdeling af K_4 ikke skabes punkter af grad mindst tre, men kun punkter af grad to. Dermed må der findes fire punkter p_1, q_1, p_m og q_n, der alle har grad tre, og hvor der er kanter p_1q_1, p_1q_n, p_mq_1 og p_mq_n. Desuden vil der findes to veje $P : p_1, p_2, \ldots, p_m$ og $Q : q_1, q_2, \ldots, q_n$, da H' er en underdeling af K_4. Længden af disse veje afhænger af, hvor mange gange K_4 blev underdelt for at skabe H'. Her vil det dog gælde, at $n, m \geq 3$, da der ellers vil fremkomme kredse af længde tre, som ikke må forekomme i todelte grafer, hvilket H' er, da H' er en delgraf af den todelte graf H. Desuden vil både P og Q have lige længde, for ellers dannes der kredse af ulige længde, hvilket ikke findes i en todelt graf.

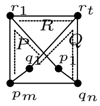


Figur 3.1: Delgrafen i H' bestående af vejene P og Q samt punkterne p_1, p_m, q_1 og q_n.

Antag, at enhver vej i H mellem $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ og $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ benytter en af kanterne p_1q_1, p_1q_n, p_mq_1 eller p_mq_n. Herved vil der ikke findes en vej $J : j_1, \ldots, j_k$, $k \geq 3$, mellem P og Q, hvor kun $j_1, j_k \in V(H')$, og ingen andre punkter fra J tilhører H'. For enhver sammenhængskomponent F i $H - (P \cup Q)$ vil der så gælde, at de punkter fra $P \cup Q$, som er forbundet til

punkter i F, enten alle vil tilhøre P, eller alle vil tilhøre Q.
Betragt nu en sådan komponent F, og hvorledes den er forbundet til for eksempel P. Her kan F ikke være forbundet af en enkelt kant, for så vil punktet i P, hvorpå F er fasthæftet, være et forgreningspunkt, og hvis dette punkt fjernes, bliver grafen usammenhængende, da sammenhængskomponenten F ikke ellers er forbundet til $P \cup Q$. Da H er en cyklisk 3-sammenhængende graf, må F derfor være forbundet til P med mindst to kanter. Bemærk, at $P \cup Q \cup F$ ikke må indeholde en delgraf H'', som er en underdeling af K_4, hvor H'' indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i H''. Hvis de forskellige muligheder for udseendet af F betragtes, vil der enten opnåes en modstrid med, at H er todelt, eller en modstrid med, at H er cyklisk 3-sammenhængende. Det vil altså sige, at F ikke kan eksistere og $H = H'$ under antagelse af, at enhver vej H mellem $\{p_1, \ldots, p_m\}$ og $\{q_1, \ldots, q_n\}$ benytter en af kanterne p_1q_1, p_1q_n, p_mq_1 eller p_mq_n.

Da det er antaget, at $H \neq H'$, må der findes en vej $R : r_1, \ldots, r_t$ mellem $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ og $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, som ikke benytter nogen af kanterne p_1q_1, p_1q_n, p_mq_1 eller p_mq_n. Det kan antages, at $r_1 \in \{p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}\}$, $r_t \in \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}\}$, og ingen af punkterne $r_2, \ldots, r_{t-1}$ tilhører $V(P) \cup V(Q)$, hvor delgrafen $P \cup Q \cup R \cup \{p_1q_n, p_mq_1, p_m, q_n\}$ ses på figur 3.2.



Figur 3.2: Delgrafen bestående af vejene P, Q og R samt kanterne p_1q_n, p_mq_1 og p_mq_n.

De resterende tilfælde kan vises analogt, hvor blot en anden delgraf vælges. Her ses det, at denne delgraf er en underdelt K_4, og hvis delgrafen ikke indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør delgrafens forgreningspunkter, så er punkt (iii) i lemmaet opfyldt. Generelt hvis H indeholder en delgraf H', som er en underdeling af K_4, og hvor H' indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i H', så er (iii) opfyldt. Det vil sige, at for alle delgrafer H' af H, som er en underdeling af K_4, skal der gælde, at H' indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i H', for at (iii) ikke er opfyldt.
Derfor antages det, at delgrafen har en kreds, hvis punktmængde udgør alle delgrafens forgreningspunkter. Da mængden $\{r_1, r_t, p_m, q_n\}$ består af punkter med grad tre i delgrafen, må det være disse punkter, der udgør en sådan kreds. Da H er todelt, p_mq_n er en kant, og kredsen r_1, r_t, p_m, q_n kun skal bestå af forgreningspunkter, må $t = 2$. Det kan ske, at $r_1 = p_1$, og det kan ske, at $r_2 = q_1$. Dog kan begge ikke forekomme samtidigt, for så er R en vej mellem P og Q, som benytter kanten p_1q_1, hvilket er i modstrid med, at R er en vej, som ikke benytter nogen af kanterne p_1q_1, p_1q_n, p_mq_1 og p_mq_n. Derfor må $r_1 = p_{m-1}$ og $r_2 = q_{n-1}$. I delgrafen $P \cup Q \cup R \cup \{p_1q_1, p_1q_n, p_mq_1\}$ er r_1, r_t, p_1 og q_n forgreningspunkter, så de må udgøre en kreds bestående af forgreningspunkterne for delgrafen. Da kredsen kun skal bestå af forgreningspunkter, må $t = 2$, og enten $r_1 = p_2$ og $r_2 = q_2$, eller $r_1 = p_m$ og $r_2 = q_n$. Da $r_1 \in \{p_1, p_{m-1}\}$, og $r_2 = r_t \in \{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$, må $r_1 = p_2$ og $r_2 = q_2$, så derfor må $m = 3$ og $n = 3$. Da kanten p_1q_1 findes i H, indeholder H en delgraf $J : p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, der er isomorf med $K_{3,3}$. Denne delgraf udgør ikke hele H, for det er antaget, at H ikke er isomorf med $K_{3,3}$.
Omnummerér delgrafen J, så den består af punkterne a_1, a_2, a_3 og b_1, b_2, b_3, hvor a_ib_j er en kant i J for $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Lad F være en sammenhængskomponent i $H - J$. Da H er cyklisk 3-sammenhængende, vil F være forbundet til J i mindst to punkter.
Hvis dette er punkterne a_1 og b_1, så vælges der en vej mellem a_1 og b_1, hvis indre tilhører F. Hermed vil delgrafen bestående af $P \cup (J - \{a_1b_1, a_2b_2\})$ være en underdelt K_4, som ikke indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i delgrafen. Hermed vil punkt (iii) i lemmaet være opfyldt.
Hvis F er forbundet til J i punkterne a_1 og a_2, så vælges der en vej mellem a_1 og a_2, hvis indre tilhører F. Hermed vil delgrafen bestående af $P \cup (J - \{a_1b_1, a_2b_3\})$ være en underdelt K_4, som ikke indeholder en kreds, hvis punktmængde udgør mængden af forgreningspunkter i delgrafen. Hermed vil punkt (iii) i lemmaet være opfyldt. De resterende mulige måder, hvorpå F kan for-

bindes til J, kan vises analogt med ovenstående. $\square$

Kapitel 4

Optræden af liniegrafer

Følgende svarer til lemma 7.2 i rapporten.

Lemma 4.1
Lad G være en Berge graf. Lad J være en 3-sammenhængende graf, og lad $L(H)$ være en optræden af J i G. Lad $y \in V(G) - V(L(H))$, og lad X være mængden af punkter i $L(H)$, der er naboer til y i G. Da gælder et af følgende:

(i) *Mængden X mætter $L(H)$.*

(ii) *Der findes et forgreningspunkt $v \in H$, hvor $X \subseteq \varrho_H(v)$.*

(iii) *Der findes en forgrening $B \subseteq H$, hvor $X \subseteq E(B)$.*

(iv) *Der findes en forgrening $B \subseteq H$ med endepunkter b_1 og b_2, så $X - E(B) = \varrho_H(b_1) - E(B)$.*

(v) *Der findes en forgrening $B \subseteq H$ af ulige længde med endepunkter b_1 og b_2, så $X - E(B) = (\varrho_H(b_1) \cup \varrho_H(b_2)) - E(B)$.*

(vi) *Der findes to punkter $c_1, c_2 \in V(H)$ med ulige biparitet, som ikke tilhører den samme forgrening i H, så $X = \varrho_H(c_1) \cup \varrho_H(c_2)$.*

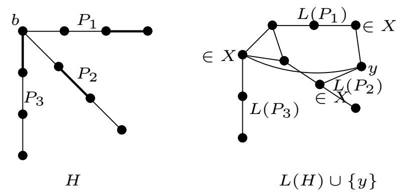
Specielt vil enten (i) eller (vi) gælde, eller så findes højst to forgreningspunkter i H, der er incidente med mere end en kant i X, og det er kun hvis (v) gælder, at der kan findes to forgreningspunkter i H, der er incidente med mere end en kant i X. ◇

Bevis
Lemmaets afsluttende kommentar følger af (i)-(vi) ovenfor. Det følger naturligt, at hvis (i) eller (vi) gælder, så gælder lemmaets afsluttende kommentar. Hvis (ii),(iii) eller (iv) gælder, så følger, at der vil findes højst ét forgreningspunkt incident med mere end en kant i X. Hvis (v) gælder, så er $B \subseteq H$ en forgrening af ulige længde med endepunkter b_1 og b_2, så $X - E(B) = (\varrho_H(b_1) \cup \varrho_H(b_2)) - E(B)$. Da B har ulige længde, følger det, at b_1 og b_2 ikke har nogen fælles nabo, og det vil sige, at der ikke findes et forgreningspunkt forskelligt fra b_1 og b_2, som er incident med mere end en kant i X, hvilket viser det sidste punkt i kommentaren. Tilbage er at vise, at et af punkterne (i)-(vi) gælder.

Påstand 1: *Enhver vej i H, hvis endekanter begge tilhører X, og hvis indre kanter ikke tilhører X, har enten ulige længde eller længde to.*

Argumentet for påstand 1 er, at eftersom X er mængden af et enkelt punkts naboer i $L(H)$, så følger det, at enhver 2-vej i $L(H)$, hvis endepunkter begge tilhører X, og hvis indre punkter ikke tilhører X, har lige længde eller længde en, da der ellers er et hul af ulige længde. Ifølge bemærkning 1.15 i rapporten vil den tilsvarende vej i H, hvis endekanter tilhører X, have ulige længde eller længde to, og dette viser påstand 1.

Da J er en 3-sammenhængende graf, og $L(H)$ er en optræden af J i G, er H per definition todelt og cyklisk 3-sammenhængende. Ifølge påstand 1 har enhver vej P i H, hvis endekanter begge tilhører X, og hvis indre kanter ikke tilhører X, enten ulige længde eller længde to. Hvis yderligere enhver kant i X har et endepunkt i det indre af P, vil det altså betyde, at P har lige længde mindst fire. Hermed er antagelserne i lemma 6.10(I) i rapporten opfyldte. Det skal nu undersøges, om antagelse (II) i lemma 6.10 i rapporten er opfyldt. Hvis antagelse (II) i lemma 6.10 i rapporten ikke er opfyldt, så skal der i H findes tre veje med et endepunkt b til fællles og ellers disjunkte, så hver vej indeholder en kant fra X, og mindst to af de tre vejes kanter incidente med b tilhører ikke X, se figur 4.1.



Figur 4.1: Eksempel på tre disjunkte veje med undtagelse af det fælles endepunkt b, hvor de fede kanter repræsenterer kanter, der tilhører X.

I G vil der så findes en trekant, som y er forbundet til via 2-veje. Her vil der også gælde, at y højst er nabo til et punkt fra trekanten, hvilket er i modstrid med lemma 2.9 i rapporten. Altså må antagelse (II) i lemma 6.10 i rapporten være opfyldt. Da antagelserne i lemma 6.10(I)-(II) i rapportener opfyldte vil et af udsagnene 6.10$(i) - (v)$ i rapporten være gældende. Hvis lemma 6.10(i)i rapporten er opfyldt, vil mængden X mætte $L(H)$, hvormed (i) er opfyldt. Antag derfor, at lemma 6.10 (i) i rapporten ikke er opfyldt. Ifølge lemma 6.10(iii) i rapporten findes en vej i H af lige længde mindst fire med begge endekanter i X og intet indre punkt i X, men ifølge påstand 1 findes der ikke sådanne veje af lige længde i H, hvormed lemma 6.10(iii) i rapporten ikke kan være opfyldt. Lemma 6.10(iv) i rapporten omhandler $|X| = 4$, hvor kanterne i X danner en kreds af længde fire, og alle punkter er forgreningspunkter. Hvis lemma 6.10(iv) i rapporten anvendes, lad da den tilsvarende kreds af længde fire have forgreningspunkter b_1, b_2, b_3 og b_4. Der vil så findes en vej T mellem b_1 og b_3 ikke indeholdende b_2 og b_4, da b_1 og b_3 er forgreningspunkter. Punkterne b_1 og b_3 har lige biparitet, da der haves en vej af lige længde to mellem dem, og H er todelt. Dermed har T lige længde, og så er vejen b_2, b_1, T, b_3, b_4 af lige længde, hvilket er i modstrid med påstand 1. Dermed kan lemma 6.10(iv) i rapporten ikke være opfyldt. Hvis lemma 6.10(v) i rapporten er opfyldt, vil der findes to punkter $c_1, c_2 \in V(H)$ af ulige biparitet, som ikke tilhører samme forgrening af H, så $X = \varrho_H(c_1) \cup \varrho_H(c_2)$, hvormed ($vi$) er opfyldt. Antag derfor, lemma 6.10(v) i rapporten ikke er opfyldt. Nu mangler kun lemma 6.10(ii) i rapporten at blive betragtet og det kan antages, at lemma 6.10(ii) i rapporten gælder.

Lad derfor C være en forgrening i H, så alle kanter i X har et endepunkt i C, og lad c_1 og c_2 være C's endepunkter. For $i = 1, 2$ lad A_i være mængden af kanter i $\varrho(c_i)$, der tilhører X og ikke tilhører C, og lad B_i være mængden af kanter i $\varrho(c_i)$, der tilhører hverken X eller C.

Der haves nu følgende muligheder, $A_1 = \emptyset$ og $A_2 = \emptyset$, hvilket svarer til $B_1 \neq \emptyset$ og $B_2 \neq \emptyset$, $B_1 = \emptyset$ og $B_2 = \emptyset$, hvilket svarer til $A_1 \neq \emptyset$ og $A_2 \neq \emptyset$, $B_1 = \emptyset$ og $A_2 = \emptyset$, hvilket svarer til $B_2 \neq \emptyset$ og $A_1 \neq \emptyset$, samt $A_1 = \emptyset$ og $B_2 = \emptyset$, hvilket svarer til $A_2 \neq \emptyset$ og $B_1 \neq \emptyset$. Kombinationerne $A_1 = \emptyset$ og $B_1 = \emptyset$, samt $A_2 = \emptyset$ og $B_2 = \emptyset$ kan ikke forekomme, da c_1 og c_2 så vil være isolerede punkter.
Hvis både A_1 og A_2 er tomme, så findes ingen kanter i X udover kanter på forgreningen C, da A_i indeholder kanter i X incidente med c_i udenfor C, og (iii) er opfyldt. Hvis både B_1 og A_2 er tomme, så vil kanter incidente med c_1 tilhøre X eller C, og da $A_2 = \emptyset$, så vil $X - E(C) = \delta_H(c_1) - E(C)$, og ($iv$) er opfyldt. Kombinationen $A_1 = \emptyset$ og $B_2 = \emptyset$ vises analogt. Antag, at både B_1 og B_2 er tomme. Hvis $c_1 = c_2$, så er $a_1 \in A_1$ og $a_2 \in A_2$ ikke disjunkte, og (ii) er opfyldt. Der kan derfor vælges $a_1 \in A_1$ og $a_2 \in A_2$, så de er disjunkte, og lad T være en vej i H fra c_1 til c_2 med endekanter a_1 og a_2. Da er ingen kant i T i X, og dets endekanter tilhører X. Ifølge påstand 1 kan

T ikke have lige længde. Derfor må c_1 og c_2 have ulige biparitet, og dermed er C af ulige længde, hvormed (v) er opfyldt. Det er nu vist, at i de tilfælde, hvor $A_1 = \emptyset$, og de tilfælde, hvor $B_1 = \emptyset$, er lemmaet opfyldt. Antag derfor, at A_1 og B_1 begge er ikke-tomme.

Påstand 2: *Det kan antages, at A_2 er ikke-tom.*

For at vise påstand 2 antages, at A_2 er tom. Hvis c_1 er incident med alle kanter i X, så gælder (ii). Det kan derfor antages, at der findes kanter i X, der ikke er incidente med c_1, og dermed, at der må findes en kant fra $C - \{c_1\}$ i X. Lad P være en minimal del af vejen C indeholdende c_2 og en kant i X. Vælg en kant $c_1a_1 \in A_1$. Da H er cyklisk 3-sammenhængende, er $H' = H - \{c_1, a_1\}$ sammenhængende, og dermed findes en vej Q i H' startende fra for eksempel b_1 til c_2, hvor $b_1c_1 \in B_1$. Vejen Q kan udvides til en vej Q' i H mellem a_1 og c_2, hvor det andet punkt er c_1, den første kant tilhører A_1, og den anden kant tilhører B_1. Ved foreningen af Q' og P udledes fra påstand 1, at længderne i P og Q' har forskellig paritet, og dermed har P og Q forskellig paritet. Desuden er der en vej $R \subseteq H - \{c_1\}$ mellem a_1 og c_2, og ved at udvide R til R' ved hjælp af kanten a_1c_1 og forene R' med P og anvende påstand 1, har R' og P forskellig paritet, og dermed har R og P samme paritet, hvilket indikerer, at R og Q har forskellig paritet. Da H er todelt, så findes der ikke kredse af ulige længde, hvilket R, Q, b_1, a_1 er, og en modstrid er opnået. Det vil altså sige, at antagelsen, om at A_2 er tom, er forkert, hvilket viser påstand 2.

Påstand 3: *Forgreningen C har lige længde.*

For at vise påstand 3 antages, at C har ulige længde, og dermed har c_1 og c_2 ulige biparitet. Som konsekvens er intet punkt incident med alle kanterne i $A_1 \cup A_2$, og dermed kan lemma 6.6(i) i rapporten anvendes på grafen H' opnået fra H ved at fjerne de indre punkter og kanter i C. Hermed haves en vej S i H', hvor første kant tilhører A_1, anden kant tilhører B_1, og dermed er det andet punkt c_1, det sidste punkt er c_2, og den sidste kant tilhører A_2. Men da c_1 og c_2 har ulige biparitet, er S af lige længde mindst fire, hvilket er i modstrid med påstand 1. Antagelsen, om at forgreningen C har ulige længde, er altså forkert, og dette viser påstand 3.

Nu antages, at der for $i = 1, 2$ findes disjunkte kanter $c_ia_i \in A_i$, hvor det vides, at A_i indeholder kanter, da det er antaget at $A_1 \neq \emptyset$, og det fra påstand 2 følger, at det kan antages, at $A_2 \neq \emptyset$. Der findes en vej U i $H - \{c_1, c_2\}$ mellem a_1 og a_2. Idet forgreningen C ifølge påstand 3 har lige længde, har U lige længde mindst to, og dermed har c_1 og c_2 samme paritet. Ved at udvide U ved hjælp af kanterne c_1a_1 og c_2a_2 til U' opnåes en modstrid med påstand 1. Modstriden nåes, idet c_1a_1 og c_2a_2, som nu er endekanter, begge tilhører X, da $c_ia_i \in A_i$, som per definition indeholder kanter tilhørende X. Det vil sige, at der ikke findes sådanne to disjunkte kanter. Dermed må der findes et punkt $a \in V(H)$, så $A_i = \{c_ia\}$ for $i = 1, 2$, altså c_1 og c_2 er naboer til det samme punkt a. Da J per definition ikke indeholder løkker, findes der kun en forgrening i H, der er incident med c_1 og c_2. Dermed tilhører a ikke det indre af en forgrening, men er derimod et forgreningspunkt. Vælg et forgreningspunkt $b \in H$, hvor $b \neq c_1$, $b \neq c_2$ samt $b \neq a$, og vælg tre 2-veje P_1, P_2 og P_3 mellem b og henholdsvis c_1, c_2 og a. Bortset fra forgreningspunktet b skal P_1, P_2 og P_3 være parvis disjunkte. Her har P_1 og P_2 længde af samme paritet, da $P_1 \cup P_2 \cup C$ ellers er en kreds af ulige længde, hvilket ikke findes i den todelte graf H. Desuden har P_3 længde af forskellig paritet med P_1 og P_2, da c_2, P_2, b, P_3, a og c_1, P_1, b, P_3, a ellers danner kredse af ulige længde. Hvis der kun findes kanter i X, der er incidente med a, så er (ii) opfyldt med $v = a$. Derfor antages, at der ikke kun findes sådanne kanter. For $i = 1, 2$ findes en minimal delgraf Q_i af vejen C indeholdende c_i samt en kant x i X. Da C ifølge påstand 3 har lige længde, så hvis $Q_1 = C$, er $P_1 \cup P_2$ det indre af en vej af lige længde med endekanter c_1a og x i X og ingen indre kanter tilhørende X. Dette er i modstrid med påstand 1. Det vil sige, at $c_2 \notin Q_1$. Tilsvarende hvis $Q_2 = C$, er $P_1 \cup P_2$ det indre af en vej af lige længde med endekanter ac_2 og x i X, og ingen indre kanter tilhørende X. Igen haves en modstrid med påstand 1, hvormed $c_1 \notin Q_2$. Fra vejen $Q_1, c_1, P_1, b, P_2, c_2, a$ og påstand 1 følger, at Q_1 har lige længde, men fra vejen $Q_1, c_1, P_1, b, P_3, a, c_2$ og påstand 1 følger, at Q_1 har ulige længde, hvilket danner en modstrid.
Det vil sige, at antagelsen, om at A_1 og B_1 begge er ikke-tomme, altså er forkert, og da det er vist at lemmaet er opfyldt i alle de tilfælde, hvor $A_1 = \emptyset$, og alle de tilfælde, hvor $B_1 = \emptyset$, er lemmaet vist. □

Følgende svarer til lemma 7.9 i rapporten.

Lemma 4.2
Lad G være en Berge graf, og lad $L(H)$ være en optræden af en 3-sammenhængende graf J i G. Lad desuden Y være en antisammenhængende mængde af punkter i $V(G) - V(L(H))$, og lad X være mængden af punkter i $L(H)$, som er komplette til Y. Da vil et af følgende være opfyldt:

(i) $J = K_{3,3}$ eller $J = K_4$, og $L(H)$ er degenereret, og der findes en forstørrelse af J, som har en optræden i $\overline{G}$.

(ii) X opfylder betingelse (I) og (II) i lemma 6.10 i rapporten.

◇

For bevis se [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002].

Følgende svarer til lemma 7.13 i rapporten.

Lemma 4.3
Lad G være en Berge graf, og lad $L(H)$ være en overskygget optræden af J i G, hvor J er en 3-sammenhængende graf. Da gælder et af følgende:

(i) Der findes en forstørrelse af J, som har en ikke-degenereret optræden i G.

(ii) G har en balanceret skæv opdeling.

◇

For bevis se [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002].

Kapitel 5

Knuder

Følgende svarer til lemma 8.2 i rapporten.

Lemma 5.1
Lad G være en Berge graf, og lad (P_1, P_2, Q_1, Q_2) være en knude i G. Da vil P_1, P_2, Q_1 samt Q_2 alle have ulige længde, og enten vil både P_1 og P_2 have længde en, eller så vil både Q_1 og Q_2 have længde en. $\diamond$

Bevis
I G danner x_1, a_1, P_1, b_1, y_2 et hul, så P_1 må have ulige længde. Ligeledes danner x_1, x_2, b_2, P_2, a_2 et hul, så P_2 har ulige længde. Anti 2-vejen Q_1 har ulige længde, da x_1, Q_1, y_1, a_1, b_2 er et antihul i G, og Q_2 har ulige længde, da a_2, a_1, y_2, Q_2, x_2 er et antihul i G.

Antag, at en af P_1 og P_2 samt en af Q_1 og Q_2 har længde mindst tre. Lad det være P_1 og Q_1. Ifølge definition 8.1(iv) i rapporten vil punkterne a_1, b_1, a_2 og b_2 være komplette til det indre af Q_1.
Da a_2 er komplet til det indre af Q_1, men a_2 ikke har naboer i det indre af P_1, kan korollar 2.3 i rapporten benyttes, hvor X i korollar 2.3 i rapporten svarer til det indre af Q_1, og P svarer til P_1, til at konkludere, at der må findes en kant i P_1, der er komplet til det indre af Q_1. Dermed vil der findes et punkt, der er komplet til det indre af Q_1, som tilhører det indre af P_1. Lad dette punkt være v. Hermed er a_1, x_1, y_1, b_1 en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til det indre af Q_1, mens hverken x_1 eller y_1 er komplette til det indre af Q_1, men v har ingen naboer i det indre af denne 2-vej. Dette er i modstrid med korollar 2.3 i rapporten, og derfor må der gælde, at enten vil både P_1 og P_2 have længde en, eller så vil både Q_1 og Q_2 have længde en. $\square$

Følgende svarer til lemma 8.7 i rapporten.

Lemma 5.2
Lad G være en Berge graf, og lad $K = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ være en knude i G. Antag, at der ikke findes en optræden af en forstørrelse af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$, og antag, at der ikke findes en overskygget optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. Lad F være en sammenhængende delmængde af $V(G) - V(K)$, så mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal med hensyn til knuden. Da vil et af følgende gælde:

(i) Der findes et punkt i F, så mængden bestående af punktets naboer i K mætter knuden.

(ii) Op til symmetri findes der en 2-vej P i F med endepunkter p_1 og p_2, så p_1 og a_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, og der ikke findes kanter mellem $P - \{p_1\}$ og $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Desuden har p_2 en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og der findes ikke kanter mellem $P - \{p_2\}$ og $P_1 - \{a_1\}$.

(iii) *Op til symmetri findes der en 2-vej L af ulige længde i F med endepunkter l_1 og l_2, så l_1 og a_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, l_2 samt b_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, der ikke findes kanter mellem $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$ og det indre af L, og der ikke findes kanter mellem L og P_1, bortset fra måske kanterne l_1a_1 og l_2b_1.*

(iv) *Op til symmetri findes der et punkt $f \in F$, så f og x_1 har de samme naboer i $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$, og f er ikke-nabo til y_1.*

$\diamond$

Bevis
Ifølge lemma 5.1 er der to situationer, der skal undersøges, nemlig hvis det er P_1 og P_2, der har længde en, og hvis det er Q_1 og Q_2, der har længde en.

Påstand 1: *Hvis Q_1 og Q_2 har længde en, så er (i), (ii) eller (iv) opfyldt.*

Når Q_1 og Q_2 begge har længde en, kan K betragtes som en degenereret optræden af K_4 i G ifølge bemærkning 8.3 i rapporten, så lad $K = L(H)$. Lad $f \in V(F)$, og lad X være mængden af f's naboer i K.

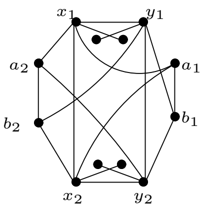
Antag, at X mætter $L(H)$. Hvis X har punkter i både $V(P_1)$ og $V(P_2)$, følger det af lemma 8.6 i rapporten, at X mætter knuden, og dermed er punkt (i) opfyldt. Det antages derfor, at X ikke har punkter i P_1. Hvis X ikke har punkter i $V(P_1)$, og X samtidig mætter $L(H)$, er der kun en mulighed, nemlig at $X = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$. Hermed er f nabo til x_1, y_1, x_2 og y_2, og der haves et hul $f, x_1, a_1, P_1, b_1, y_1$ af ulige længde. Dette kan ikke forekomme i en Berge graf, så antagelsen, om at X mætter $L(H)$, må være forkert. Det vil sige, at der ikke findes et $f \in V(F)$, hvor mængden af f's naboer i $L(H)$ mætter $L(H)$.

Hermed er antagelserne i lemma 7.6 i rapporten opfyldte, så der findes en 2-vej P i G, hvor $V(P) \subseteq V(F)$ og med endepunkter p_1 og p_2. Et af punkterne $(i), (ii)(a)$-$(ii)(d)$ i lemma 7.6 i rapporten må derfor være opfyldt. Hvis lemma 7.6(i) i rapporten er opfyldt, vil p_1 være komplet til $\varrho_H(x_1)$, og p_2 vil være komplet til $\varrho_H(x_2)$, for $x_1, x_2 \in V(J)$. Desuden vil der ikke findes flere kanter mellem $V(P)$ og $V(L(H))$. Hermed er $\langle V(L(H)) \cup V(P) \rangle_G$ en optræden i G af en graf H', hvor H' er en underdeling af en forstørrelse af K_4. Det er dog i lemmaet antaget, at en sådan optræden ikke findes i G, så derfor kan lemma 7.6(i) i rapporten ikke være gældende. Dermed må lemma 7.6(ii) i rapporten være opfyldt, og der findes en kant $b_1b_2 \in E(J)$, så et af punkterne $(ii)(a)$-$(ii)(d)$ i lemma 7.6 i rapporten er opfyldt.

Hvis $(ii)(d)$ er opfyldt, kan det på grund af symmetrien af K antages, at $N_{b_1} = \{x_1, y_2, a_2\}$ og $N_{b_2} = \{x_1, x_2, a_1\}$. Hermed vil p_1 være nabo til a_2 samt y_2, og p_2 vil være nabo til a_1 samt x_2. Der vil ifølge lemma 7.6$(ii)(d)$ i rapporten ikke findes andre kanter mellem $V(P)$ og $V(K) - x_1$. Desuden vil P have lige længde. Hvis P har længde nul, er $P = \{p_1\}$, og dermed har p_1 og x_1 de samme naboer i $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$, og p_1 er ikke nabo til y_1. Hermed er punkt (iv) opfyldt, så det antages, at P har længde mindst to.
Hvis P har længde mindst to, vil der i H findes en forgrening af ulige længde med endepunkter v_1 og v_2, så v_1 er endepunkt for kanten p_1, og v_2 er endepunkt for kanten p_2. Desuden vil der i G gælde, at x_1 højst har én ikke-nabo i $\varrho_H(v_1)$, nemlig p_1, og højst én ikke-nabo i $\varrho_H(v_2)$, nemlig p_2. Hermed findes der ifølge definition 7.11 i rapporten en overskygget optræden af K_4 i G. Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at sådanne ikke findes i hverken G eller $\overline{G}$. Hermed kan lemma 7.6$(ii)(d)$ i rapporten ikke være opfyldt.

Hvis lemma 7.6$(ii)(a)$ i rapporten er opfyldt vil punkt (ii) i dette lemma være opfyldt, hvor $a_1 = r_1$ og $P_1 = R_{b_1b_2}$. Hvis lemma 7.6$(ii)(b)$ i rapporten er opfyldt, vil punkt (iii) i dette lemma være opfyldt, da a_1 kan vælges som r_1, og b_1 kan vælges som r_2. Hvis lemma 7.6$(ii)(c)$ i rapporten er opfyldt, vil punkt (ii) i dette lemma være opfyldt, da a_1 kan vælges som r_1, $P - \{p_1\} = \emptyset$, og $P - \{p_2\} = \emptyset$, idet $p_1 = p_2$. Dette viser påstand 1.

Det kan derfor antages, at Q_1 og Q_2 begge har længde mindst tre, og P_1 samt P_2 begge har længde en, se figur 5.1.



Figur 5.1: Udseendet af $L(H)$, hvor Q_1 og Q_2 er skitseret med længde tre. Bemærk, at $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ er komplet til det indre af Q_1 og til det indre af Q_2, men disse kanter er ikke indtegnet. Desuden er det indre af Q_1 komplet til det indre af Q_2, som ligeledes ikke er indtegnet.

Påstand 2: *Hvis der findes et punkt $f \in V(F)$, så f ikke er et $L(H)$-overpunkt i $\overline{G}$, da er (i), (ii), (iii) eller (iv) opfyldt.*

Lad $f \in V(F)$ være et punkt, der ikke er et $L(H)$-overpunkt i $\overline{G}$. Lad X være mængden af f's naboer i K i G. Hvis X mætter knuden (P_1, P_2, Q_1, Q_2) i G, er (i) opfyldt, så det kan antages, at X ikke mætter knuden. Når X ikke mætter knuden i G, betyder det, at i $\overline{G}$ er mængden af f's naboer i $\overline{K}$ ikke lokal med hensyn til knuden $(\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{P_1}, \overline{P_2})$. Hvis mængden af f's naboer i $\overline{K}$ ikke mætter $L(H)$, vil f per definition 7.10 i rapporten være et $L(H)$-overpunkt. Derfor kan mængden af f's naboer i $\overline{K}$ ikke mætte $L(H)$, og dermed kan lemma 7.6 i rapporten anvendes. Da fåes som under påstand 1, at der enten findes en overskygget optræden af K_4 i G, f og a_1 har de samme naboer i $K - \{a_1\}$, eller så har f og x_1 de samme naboer i enten $V(Q_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$ eller $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$. I det første tilfælde opnåes en modstrid, og i det andet tilfælde fåes, at (ii) er opfyldt. I det sidste tilfælde fåes, at (iii) eller (iv) er opfyldt, hvilket viser påstand 2.

Det kan derfor antages, at alle punkter i F er $L(H)$-overpunkter i $\overline{G}$. Lad Y være mængden af punkter i $L(H)$, som ikke har en nabo i F. For at (i) ikke gælder, kan det antages, at for ethvert punkt i F vil mængden af punktets naboer i $L(H)$ ikke mætte $L(H)$, og så vil det gælde, at mængden af vedhæftninger for F i $L(H)$ ikke er lokal med hensyn til (P_1, P_2, Q_1, Q_2). Det vil sige, at $V(L(H)) - Y$ ikke er lokal med hensyn til knuden, da dette netop er mængden af vedhæftninger for F. Dermed mætter Y ikke knuden $(\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{P_1}, \overline{P_2})$ i $\overline{G}$.

Antag, at Y ikke mætter $L(H)$ i $\overline{G}$. I $\overline{G}$ er Y mængden af punkter fra $L(H)$, der er komplette til $V(F)$. Lad $F' \subset F$ være en antisammenhængende delmængde af F, og fra påstand 2 vil F' bestå af $L(H)$-overpunkter, så antagelserne i lemma 7.12 i rapporten er opfyldte, hvor Y i lemma 7.12 i rapporten svarer til F', og X svarer til Y. Lemma 7.12(i) i rapporten er ikke opfyldt, da det er antaget, at der i $\overline{G}$ ikke findes en optræden af en forstørrelse af K_4, og da $K_{3,3}$ kan betragtes som en forstørrelse af K_4. Lemma 7.12(ii) i rapporten er ikke opfyldt, da det er antaget, at der i $\overline{G}$ ikke findes en overskygget optræden af K_4. Lemma 7.12$(iii)(a)$ i rapporten er ikke opfyldt, da der i $\overline{G}$ ikke findes en overskygget optræden af K_4. Lemma 7.12$(iii)(c)$ i rapporten er ikke opfyldt, da Q_1 har længde mindst tre og dermed ikke længde en, som krævet. Lemma 7.12$(iii)(b)$ i rapporten må derfor være opfyldt, og der findes to punkter $x, y \in F'$, som ikke er naboer, så x er nabo til x_1, y_2 samt b_2, og y er nabo til a_2, x_2 samt y_1. Da $x, y \in F$, og F er sammenhængende, vil der i F findes en 2-vej L med endepunkter x og y. Her gælder der, at x har de samme naboer som a_2, og y har de samme naboer som b_2. Desuden findes der ikke kanter mellem $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$ og det indre af L, bortset fra måske kanterne i xa_2 og yb_2. Dermed er punkt (iii) opfyldt.

Det kan nu antages, at Y mætter $L(H)$ i $\overline{G}$. Da Y er mængden af punkter i $L(H)$, der i $\overline{G}$ er komplette til F, er det antaget, at Y ikke mætter knuden (Q_1, Q_2, P_1, P_2) i $\overline{G}$. Dermed følger det af lemma 8.6(ii) i rapporten, at punkterne tilhørende Y i $\overline{G}$ er ikke-naboer til enten punkterne i $V(Q_1)$ eller ikke-naboer til punkterne i $V(Q_2)$. Lad det være punkterne i $V(Q_1)$, som punkterne i Y ikke er nabo til i $\overline{G}$. Da Y mætter $L(H)$ i $\overline{G}$, og $V(Q_1) \cap Y = \emptyset$, må a_1, b_1, b_2 og a_2 alle tilhøre Y, for ellers mætter Y ikke $L(H)$. Da Q_1 har ulige længde, er a_1, y_1, Q_1, x_1, b_1 en anti 2-vej af ulige længde i G. Her har anti 2-vejens indre punkter alle en nabo i F, mens anti 2-vejens endepunkter ikke har en nabo i F. Hvis korollar 2.3 i rapporten anvendes på $\overline{G}$, hvor X i korollar 2.3 i rapporten svarer til $\overline{F}$, fåes det, at ethvert punkt i $\overline{G}$, der er komplet til $\overline{F}$, har en nabo i det indre af a_1, y_1, Q_1, x_1, b_1. Alle punkter, der i $\overline{G}$ er komplette til $V(F)$, tilhører Y. Det vil sige, at alle punkter i Y har en nabo tilhørende $V(Q_1)$ i $\overline{G}$. I G betyder det, at alle punkter i Y har en ikke-nabo i $V(Q_1)$. Da Q_1 er komplet til Q_2 i G, er $V(Q_2) \cap Y = \emptyset$.

Da Q_1 har længde mindst tre, vil der i $\overline{G}$ gælde, at 2-vejen a_1, y_1, Q_1, x_1, b_1 har længde mindst fem, og dens endepunkter er komplette til $V(F)$, da $a_1, b_1 \in Y$. Desuden er 2-vejens indre punkter ikke komplette til $V(F)$ i $\overline{G}$, og så indeholder $\overline{F}$ ifølge lemma 1.2 et afhop for a_1, y_1, Q_1, x_1, b_1. Det vil sige, at der findes to punkter $f_1, f_2 \in V(F)$, som ikke er naboer, så kanterne $f_1a_1, f_1y_1, f_1b_1, f_2a_1$, f_2x_1 og f_2b_1 eksisterer i $\overline{G}$. Det vil sige, at der findes en 2-vej af ulige længde mellem f_1 og f_2 i $\overline{G}$, hvis indre er lig Q_1. Hvis f_1 og f_2 har en fælles nabo v i $V(Q_2)$ i $\overline{G}$, vil v, f_1, Q_1, f_2 være et hul af ulige længde i $\overline{G}$. Derfor har f_1 og f_2 ikke en fælles nabo i $\overline{G}$. Punkterne a_1 og b_1 tilhører Y, så for 2-vejen a_1, y_2, Q_2, x_2, b_1 gælder der, at dens endepunkter er komplette til $V(F)$. Så vil der ifølge lemma 1.2 gælde, at enten indeholder $\overline{F}$ et afhop for a_1, y_2, Q_2, x_2, b_1, eller så har a_1, y_2, Q_2, x_2, b_1 længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem Q_2's to indre punkter, hvis indre tilhører $V(F)$. Da f_1 og f_2 ikke har en fælles nabo i Q_2, er f_1, f_2 et afhop for a_1, y_2, Q_2, x_2, b_1, og hvis Q_2 har længde tre, danner f_1 og f_2 en anti 2-vej af ulige længde mellem Q_2's to indre punkter. Hvis a_1, y_2, Q_2, x_2, b_1 har længde tre, kan f_1, f_2 således også betragtes som et afhop for a_1, y_2, Q_2, x_2, b_1, da f_1 kan være nabo til a_1, y_2 samt b_1, og desuden kan f_2 være nabo til a_1, x_2 og b_1. På grund af symmetrien kan det antages, at det er f_1, der er nabo til y_1 og y_2, og det er f_2, der er nabo til x_1 og x_2.

De eneste punkter i $V(L(H))$, som f_1 i $\overline{G}$ ikke er nabo til, er dermed punkterne i det indre af Q_1, punkterne i det indre af Q_2 samt punkterne x_1 og x_2. De eneste punkter i $V(L(H))$, som f_2 i $\overline{G}$ ikke er nabo til, er dermed punkterne i det indre af Q_1, punkterne i det indre af Q_2 samt punkterne y_1 og y_2. Hvis grafen G betragtes, vil f_1 i G kun være nabo til punkterne i det indre af Q_1, punkterne i det indre af Q_2 samt punkterne x_1 og x_2. Ligeledes vil f_2 i G være nabo til punkterne i det indre af Q_1, punkterne i det indre af Q_2 samt punkterne y_1 og y_2. Hermed har f_1 og a_1 de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$, og punkterne f_2 og b_1 har de samme naboer i $V(P_2) \cup V(Q_1) \cup V(Q_2)$. Hermed er punkt (iii) opfyldt. $\square$

Kapitel 6

Generaliserede liniegrafer

Følgende svarer til lemma 9.14 i rapporten.

Lemma 6.1
Lad G være en Berge graf, og lad J være en 3-sammenhængende graf, så G indeholder et maksimalt strengsystem (S, N) for J. Antag, at et af følgende gælder:

(I) *(S, N) er ikke-degenereret, og der findes ikke en forstørrelse af J med en ikke-degenereret optræden i G.*

(II) *$J = K_{3,3}$, og der findes ikke en forstørrelse af J, som har en optræden i enten G eller $\overline{G}$.*

Lad $F \subseteq V(G) - V(S, N)$ være en sammenhængende mængde, så intet punkt i F er et (S, N)-overpunkt. Da vil enten $J = K_4$, og der vil findes en overskygget optræden af J i G, eller så vil mængden af vedhæftninger af F i (S, N) være lokal. $\diamond$

For bevis se [Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002, side 44].

Følgende svarer til lemma 9.29 i rapporten.

Lemma 6.2
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en optræden af en forstørrelse af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$, og der ikke findes en overskygget optræden af K_4 i hverken G eller $\overline{G}$. Lad L være en maksimal samling af strenge i G, og lad $F \subseteq V(G) - V(L)$ være sammenhængende, så der for hvert punkt $f \in V(F)$ gælder, at mængden af dets naboer i $V(L)$ er lokal med hensyn til L. Da vil mængden af vedhæftninger for F i $V(L)$ være lokal med hensyn til L. $\diamond$

Bevis
Lad L have strenge $S_i = (A_i, C_i, B_i)$, for $1 \leq i \leq m$, og antistrenge $T_j = (X_j, Z_j, Y_j)$, for $1 \leq j \leq n$. Antag, at mængden af vedhæftninger for F i $V(L)$ ikke er lokal med hensyn til L, og lad F være mindst mulig, så det stadig er opfyldt, at mængden af dens vedhæftninger i $V(L)$ ikke er lokal med hensyn til L. Lad X være mængden af vedhæftninger for F i $V(L)$.

Påstand 1: $X \not\subseteq V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$.

For at bevise påstand 1 antages, at $X \subseteq V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$.
Idet X ikke er lokal, må X ifølge lemma 9.28 i rapporten mætte L. Det kan så ifølge definition 9.27(i) i rapporten antages, at X indeholder $V(Q_1)$ for en T_1-antisti x_1, Q_1, y_1. Lad x_j, Q_j, y_j være en T_j-antisti for $2 \leq j \leq n$. Her kan S_i og $S_{i'}$ på grund af definition 9.25(vi) i rapporten vælges, så $(S_i, S_{i'}, T_1, T_j)$ er en fordrejning. Der vælges en S_i-sti P_i og en $S_{i'}$-sti $P_{i'}$, og her vil $(P_i, P_{i'}, Q_1, Q_j)$ være en knude på grund af definition 9.25(iv) i rapporten. Antagelserne i lemma 5.2 er opfyldte, så et af de fire punkter i lemma 5.2 må være opfyldt. Da S_i og T_j er disjunkte for alle valg af i og

j, vil X ikke indeholde punkter fra hverken S_i eller $S_{i'}$, da $X \subseteq V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$. Lemma 5.2($i$) kan ikke være opfyldt, da der om et punkt $f \in V(F)$ vil gælde, at mængden af punktets naboer i L er en delmængde af X. Da X ikke indeholder punkter fra hverken S_i eller $S_{i'}$, kan mængden af f's naboer i L ikke mætte $(P_i, P_{i'}, Q_1, Q_j)$. Lemma 5.2(ii) kan ikke være opfyldt, da hvis der findes en 2-vej P i F med endepunkter p_1 og p_2, vil der netop findes kanter mellem $P - \{p_1\}$ og $V(Q_1) \cup V(Q_j)$, idet X er mængden af vedhæftninger for F i L, og $X \subseteq V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$. Lemma 5.2($iv$) kan ikke være opfyldt, da et punkt $f \in V(F)$ ikke har naboer i $V(P_i)$, mens $x_1 \in V(Q_1)$ netop har naboen a_1 i P_i. Altså må det være lemma 5.2(iii), der er opfyldt. Dette har flere konsekvenser.
For det første må der findes en 2-vej af ulige længde i F med punkter $f_1, \ldots, f_k$, så f_1 er nabo til x_1, x_j, punkterne i det indre af Q_1 og punkterne i det indre af Q_2 samt eventuelt nabo til a_1. Ligeledes vil f_k være nabo til y_1, y_j, punkterne i det indre af Q_1 og punkterne i det indre af Q_2 samt eventuelt nabo til b_1. Lad M være mængden af $\{f_1, \ldots, f_k\}$'s naboer i L. Da er M ikke lokal med hensyn til L, idet mængden $M \cap (V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_m))$, som er lig mængden af a_i, b_i samt punkterne fra det indre af Q_1 og fra det indre af Q_2, ikke er komplet til mængden $M \cap (V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n))$, som er lig mængden af x_j, y_j, x_1, y_1, samt punkterne fra det indre af Q_1 og fra det indre af Q_2. At disse to mængder ikke er komplette til hinanden, skyldes, at kanterne a_iy_1, a_iy_j, b_iy_1 samt b_ix_j ikke findes i G. Desuden findes der ikke kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$ og $Q_1 \cup Q_j$. Da M, som er mængden af vedhæftninger for $\{f_1, \ldots, f_k\}$, ikke er lokal med hensyn til L, må $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$, da F er valgt mindst mulig.
For det andet vil hvert punkt i Q_j tilhøre X, da f_1 er nabo til x_j, f_k er nabo til y_j, og de begge er nabo til punkterne i det indre af Q_j. Idet dette er opfyldt for alle Q_j, så følger det, at $V(T_j) \subseteq X$. Ved at ombytte T_1 og T_j følger det, at $V(T_1) \subseteq X$. Da det gælder for alle j, vil $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n) \subseteq X$, og da det er antaget, at $X \subseteq V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$, kan det konkluderes, at $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n) = X$. Dermed er symmetrien mellem T_1 og $T_2, \ldots, T_n$ genetableret.
For det tredje viser det, at der ikke findes kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$ og $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$, da der ikke findes kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$ og $Q_1 \cup Q_j$ for alle Q_j og alle j.
For det fjerde er hvert punkt i Z_j nabo til både f_1 og f_k for $1 \leq j \leq n$, da ethvert punkt i Q_j tilhører X og $Q_j \subseteq Z_j$. Idet k er lige, da $f_1, \ldots, f_k$ har ulige længde, så viser det, at enten $k = 2$ eller $Z_1 \cup \cdots \cup Z_n = \emptyset$, for ellers dannes huller af ulige længde.
Da S_i og $S_{i'}$ er valgt vilkårligt, så $(S_i, S_{i'}, T_1, T_j)$ er en fordrejning, vil der for det femte gælde, at hvert punkt i $X_1 \cup Y_1 \cup \cdots \cup X_n \cup Y_n$ er nabo til nøjagtigt et af f_1 og f_k Lad U være mængden af disse punkter, som er nabo til f_1, det vil sige, at U består af a_i-punkter og x_j-punkter, og lad V være mængden af disse punkter, som er nabo til f_k, det vil sige, at V består af b_i-punkter og y_j-punkter. Hold j fast. Dermed har hver T_j-antisti et endepunkt i U og et endepunkt i V. Lad M_j være foreningen af punktmængden af alle T_j-antistier x_j, Q_j, y_j, så $x_j \in U$, og lad N_j være foreningen af T_j-antistier med $x_j \in V$. Idet der ikke er en T_j-antisti med begge endepunkter i U eller begge endepunkter i V, så er $M_j \cap N_j = \emptyset$, og der findes ingen ikke-kanter mellem M_j og N_j, da Q_j'erne ifølge definition 9.25(iii) i rapporten er komplette til hinanden. Hvis M_j er ikke-tom, så er $(M_j \cap X_j, M_j \cap Z_j, M_j \cap Y_j)$ en antistreng, da der så vil findes mindst én anti 2-vej med første punkt i $M_j \cap X_j$, sidste punkt i $M_j \cap Y_j$ og indre i $M_j \cap Z_j$. Ligeledes hvis N_j er ikke-tom, så vil $(N_j \cap X_j, N_j \cap Z_j, N_j \cap Y_j)$ være en antistreng. Kald disse for afspring af T_j. Hvis en af M_j eller N_j er tom, så vil den anden være lig $V(T_j)$, så det eneste afspring af T_j er T_j selv. Hvis ingen af M_j og N_j er tomme, har T_j to afspring, nemlig T_{M_j} og T_{N_j}.
Hvis mængden $\{f_1, \ldots, f_k\}$ opdeles i tre mængder, kan disse betragtes som en streng $S_0 = (\{f_1\}, \{f_2, \ldots, f_{k-1}\}, \{f_k\})$. Betragt strengen S_0 og antistrengene T_{M_j} og T_{N_j}. Fra definition 9.25 i rapporten vil der nu gælde følgende:

- for alle j med $1 \leq j \leq n$ er $S_1, \ldots, S_m$ parallelle eller antiparallelle med afspringene T_{M_j} og T_{N_j}.

Da f_1 har de samme naboer i L som a_1, og f_k har de samme naboer som b_1, må S_0 være parallel eller antiparallel med T_{M_j} og T_{N_j}.

- for alle i med $1 \leq i \leq m$ findes der et j med $1 \leq j \leq n$, så S_1 og S_i er uenige om et af afspringene T_{M_j} og T_{N_j}, og der findes j, så S_1 og S_i er enige om et af afspringene T_{M_j} og T_{N_j}.

Igen da f_1 har de samme naboer som a_1, og f_k har de samme naboer som b_1, må der gælde, at for alle i med $1 \leq i \leq m$ findes der et j med $1 \leq j \leq n$, så S_0 og S_i er uenige om et af afspringene T_{M_j} og T_{N_j}, og der findes j, så S_0 og S_i er enige om et af afspringene T_{M_j} og T_{N_j}.
Hvis der ikke findes et j, så S_0 og S_i er uenige om et af afspringene, da vil hver af T_j'erne kun have et afspring, og f_1 vil kunne tilføjes A_i, $\{f_2, \dots, f_{k-1}\}$ vil kunne tilføjes C_i, og f_k vil kunne tilføjes B_i, hvilket er i modstrid med, at L er en maksimal samling af strenge. Hvis der ikke findes j, så S_0 og S_i er enige om et af afspringene, da vil ovenstående kunne gentages ved at ombytte f_1 og f_k.

- hvis T'_1 og T'_2 hver er afspring for en af $T_1, \dots, T_n$, det vil sige, at $T'_1 = T_{M_1}$ eller $T'_1 = T_{N_1}$ og $T'_2 = T_{M_2}$ eller $T'_2 = T_{N_2}$, så vil der findes et i med $0 \leq i \leq m$, så T'_1 og T'_2 er enige om S_i, og der findes et i, så de er uenige. Dette er opfyldt, hvis T'_1 og T'_2 er afspring af to forskellige af $T_1, \dots, T_n$, idet den, de er afspring af, vil tilhøre samme fordrejning. Hvis T'_1 og T'_2 er afspring af samme T_j, så er de uenige om S_0 og enige om alle af $S_1, \dots, S_m$.

Af ovenstående punkter følger det, at hvis mængden af strenge $S_1, \dots, S_m$ i L erstattes af mængden $S_0, \dots, S_m$, vil der dannes en ny samling af strenge, som er større end L, hvilket danner modstrid med, at L er maksimal. Dette beviser påstand 1.

Påstand 2: *X har punkter fælles med nøjagtig én af $S_1, \dots, S_m$.*

Fra påstand 1 vil X have punkter fælles med mindst én af mængderne $S_1, \dots, S_m$, da $X \not\subseteq (V(T_1) \cup \dots \cup V(T_n))$, så antag, at X har punkter fælles med to strenge, lad det være S_1 og S_2. Det kan på grund af definition 9.25(v) i rapporten antages, at (S_1, S_2, T_1, T_2) er en fordrejning. For $i = 1, 2$ vælg en S_i-sti a_i, P_i, b_i, så X har punkter fælles med P_i, og for $j = 1, 2$ lad x_j, Q_j, y_j være en Q_j-antisti. Da er (P_1, P_2, Q_1, Q_2) ifølge definition 9.25(iv) i rapporten og definition 9.22 i rapporten en knude K. Her er $X \cap V(K)$ ikke lokal med hensyn til K, da X har punkter fælles med både P_1 og P_2. Da F er valgt mindst mulig, så er F mindst mulig, så $X \cap V(K)$ ikke er lokal med hensyn til K. Antagelserne i lemma 5.2 er opfyldte, så en af de fire konklusioner må gælde. Her må det være punkt (i) eller (iv), der gælder. I tilfælde (i) vil der findes et punkt $f \in V(F)$, så hvis W er mængden af vedhæftninger for f, vil $W \cap V(P_1) \neq \emptyset$ og $W \cap V(P_2) \neq \emptyset$. I tilfælde ($iv$) vil der findes et $f \in V(F)$, så f og x_1 har de samme naboer i $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$. Da x_1 er nabo til a_1 og a_2, vil f have naboer i P_1 og P_2. I begge tilfælde vil der altså findes et $f \in V(F)$ med naboer i P_1 og P_2. Altså er mængden af naboer til f i $V(L)$ ikke lokal med hensyn til L. Dette er i modstrid med lemmaets antagelser, så påstand 2 er vist.

Påstand 3: *For hver T_j-antisti Q_j vil $V(Q_j) \not\subseteq X$, for $1 \leq j \leq n$.*

Antag, at $V(Q_1) \subseteq X$ for en T_1-antisti x_1, Q_1, y_1. Fra påstand 2 kan det antages, at X har punkter fælles med S_1 og ingen af $S_2, \dots, S_m$. Lad $2 \leq j \leq n$, og vælg i med $2 \leq i \leq m$, så (S_1, S_i, T_1, T_j) er en fordrejning, og dette kan gøres på grund af definition 9.25(v)-(vi) i rapporten. Lad Q_j være en x_j, T_j, y_j-antisti, lad a_1, P_1, b_1 være en S_1-sti, så X har punkter fælles med P_1, og lad a_i, P_i, b_i være en S_i-sti. Dermed er (P_1, P_i, Q_1, Q_j) en knude på grund af definition 9.25(iv) i rapporten og definition 9.22 i rapporten. Lemma 5.2 kan benyttes, og punkt (i) er ikke opfyldt, da X ifølge påstand 2 kun har punkter til fælles med nøjagtig én af $S_1, \dots, S_m$, og dermed kan X ikke mætte knuden. Lemma 5.2(ii) er ikke opfyldt, da F er valgt mindst muligt. Lemma 5.2(iv) er heller ikke opfyldt, da X kun har punkter til fælles med nøjagtig én af $S_1, \dots, S_m$, og x_1 har naboer i både S_1 og S_2. Dermed må lemma 5.2(iii) gælde. Dette har som før flere konsekvenser.
For det første, da F er mindst mulig, er $\langle F \rangle_G$ en 2-vej $f_1, \dots, f_k$ af ulige længde, så f_1 og a_1 har de samme naboer i $V(Q_1) \cup V(Q_j)$. Ifølge lemma 5.2(iii) bør $V(P_i)$ også medtages, men dette giver ikke et problem, da a_1 ikke har naboer i P_i, og dermed får f_1 heller ikke naboer i P_i. Ligeledes har f_k og b_1 de samme naboer, og der er ingen kanter mellem F og $V(P_1)$ undtaget muligvis $f_1 a_1$ og $f_k b_1$. Idet X har punkter fælles med P_1, så følger det, at mindst en af disse to kanter er til stede,

og begge kanter må findes, da $f_1, \dots, f_k$ er en 2-vej af ulige længde. Her er P_1 også en 2-vej og har på grund af lemma 5.1 ulige længde, for ellers vil foreningen af disse to 2-veje, med et af punkterne x_1 eller y_1, inducere et hul af ulige længde. Så f_1 er nabo til a_1 og ikke til andre punkter i P_1, og f_k er nabo til b_1 og ikke til andre punkter i P_1.
For det andet vil hvert punkt i Q_j tilhøre X, da f_1 er nabo til x_j, f_k er nabo til y_j, og de er begge nabo til punkterne i det indre af Q_j. Da dette er opfyldt for alle Q_j, så følger, at $V(T_j) \subseteq X$, og ved at ombytte T_1 og T_j kan det vises, at $V(T_1) \cup \dots \cup V(T_n) \subseteq X$. Desuden er $\{f_2, \dots, f_{k-1}\}$ antikomplet til $V(T_1) \cup \dots \cup V(T_n)$.
Lad x'_j, Q'_j, y'_j være en anden T_j-antisti. Ved for (P_1, P_i, Q_1, Q'_j) at benytte samme argument som for knuden (P_1, P_i, Q_1, Q_j) kan det konkluderes, at lemma 5.2(iii) gælder for (P_1, P_i, Q_1, Q_j). Dermed er et af f_1 og f_k nabo til x'_j, og det andet er nabo til y'_j. Yderligere er det punkt, som er nabo til x'_j, også nabo til a_1, og f_1 er nabo til x'_j. Idet dette er opfyldt for alle valg af Q_j og alle valg af j, vil f_1 og a_1 have de samme naboer i $V(T_1) \cup \dots \cup V(T_n)$, og ligeledes har f_k og b_1 samme naboer i $V(T_1) \cup \dots \cup V(T_n)$. Dermed kan f_1 tilføjes A_1, $\{f_2, \dots, f_{k-1}\}$ kan tilføjes C_1, og f_k kan tilføjes B_1, hvilket danner modstrid med, at samlingen af strenge er maksimal. Dermed er påstand 3 vist.

Da X ikke er lokal med hensyn til L, kan det fra påstand 2 og påstand 3 antages, at der findes en S_1-sti a_1, P_1, b_1 og en T_1-antisti x_1, Q_1, y_1, så et punkt fra $X \cap V(P_1)$ og et punkt fra $X \cap V(Q_1)$ ikke er naboer. Dette skyldes, at påstand 2 giver, at definition 9.26(i) i rapporten er opfyldt, og påstand 3 giver, at definition 9.26(ii) i rapporten er opfyldt, så definition 9.26(iii) i rapporten kan ikke være opfyldt. Ved eventuelt at benytte den omvendte antistreng af en af $T_1, \dots, T_n$ kan det antages, at S_1 er parallel til hver T_j. Idet hvert punkt i Z_1 er komplet til $A_1 \cup B_1$, hvormed A_1 er komplet til $V(T_1) - Y_1$, og B_1 er komplet til $V(T_1) - X_1$. Det kan derfor antages, at der findes en S_1-sti a_1, P_1, b_1 og en T_1-antisti x_1, Q_1, y_1, så $x_1 \in X$, og $X \cap V(P_1 - \{a_1\}) \neq \emptyset$. Lad $2 \le j \le n$, og vælg i med $2 \le i \le m$, så (S_1, S_i, T_1, T_j) er en fordrejning, og en sådan findes ifølge definition 9.25(vi) i rapporten. Lad P_i være en S_i-sti, og lad Q_j være en T_j-antisti. Da er (P_1, P_i, Q_1, Q_j) en knude K. Her kan $X \cap V(K)$ ifølge definition 8.4(iii) i rapporten ikke være lokal med hensyn til K, da P_1 og Q_1 indeholder punkter i X, som ikke indbyrdes er naboer.

Lemma 5.2 kan nu anvendes med F som sammenhængende mængde. Hvis lemma 5.2(i) er opfyldt, da vil der findes et punkt i F, så dets naboer X_f mætter K. Dette giver dog en modstrid med påstand 3, da $X_f \subseteq X$, og der ifølge bemærkningen efter definition 8.5 i rapporten gælder, at X_f skal indeholde Q_1 eller Q_2 for at mætte K. Hvis lemma 5.2(iii) er opfyldt, da vil der findes punkter f_1 og f_k, så f_1 er nabo til x_1, x_j, det indre af Q_1 og det indre af Q_j. Desuden vil f_k være nabo til y_1, y_j, det indre af Q_1 og det indre af Q_j. Det vil sige, at alle punkter i Q_1 og Q_j har en nabo i $\{f_1, f_k\}$, så $V(Q_1) \subset X$ og $V(Q_j) \subset X$, hvilket er i modstrid med påstand 3. Hvis lemma 5.2(iv) er opfyldt, indeholder F et punkt f, som har de samme naboer som x_1 i $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(Q_2)$. Da x_1 er komplet til $V(Q_2)$, vil f dermed være komplet til $V(Q_2)$, men dette er i modstrid med påstand 3. Derfor må det være lemma 5.2(ii), der er opfyldt. Lad R være en 2-vej i F, som opfylder lemma 5.2(ii), altså punkter i R er nabo til x_1, x_j, det indre af Q_1 og det indre af Q_j samt har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$. Lad D være mængden af vedhæftninger for R i L. Her vil $V(Q_1) - y_1 \in D$ og $V(Q_j) - y_j \in D$. Definition 9.26(iii) i rapporten er ikke opfyldt, da punktet i $P_1 - \{a_1\}$ i D ikke er nabo til x_1 og x_j ifølge definition 9.25(iv) i rapporten og definition 9.22(iv)-(v) i rapporten, så D er ikke lokal med hensyn til L. Derfor må $V(R) = F$, da F er valgt mindst mulig. Altså er F en 2-vej med punkter $f_1, \dots, f_k$, og $X = D$. Idet $x_1 \in X$, så følger det, at et af f_1 og f_k er nabo til x_1, og det kan antages, at det er f_1, som er nabo til x_1. Da a_1 i L er nabo til x_j, de indre punkter i Q_1 og de indre punkter i Q_j, er f_1 også nabo til x_j og til alle indre punkter i Q_1 og Q_j. Da a_1 ikke er nabo til y_1 og y_j, er f ligeledes ikke-nabo til y_1 og y_j. Fra lemma 5.2(ii) følger det desuden, at ingen af punkterne $f_2, \dots, f_{k-1}$ har naboer i $V(Q_1) \cup V(Q_j)$, f_k har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og f_k har ingen naboer i $V(Q_1) \cup V(Q_j)$. For ethvert valg af Q_j vil det samme forekomme, og f_1 og f_k kan ikke byttes rundt, da f_1 har en nabo i Q_1, og f_k ikke har naboer i Q_1. Deraf konkluderes, at f_1 er komplet til $X_j \cup Z_j$, da for alle T_j-antistier x_j, Q_j, y_j vil $X_j = \bigcup x_j$, og f_1 vil være nabo til alle x_j. Desuden vil Z_j være foreningen af de indre punkter af alle T_j-antistier, og f_1 er netop nabo til de indre punkter i samtlige T_j-antistier. Da $Y_j = \bigcup y_j$, og

f_1 ikke er nabo til et eneste y_j, vil f_1 være antikomplet til Y_j. Da ingen af punkterne $f_2, \ldots, f_{k-1}$ har naboer i $V(Q_j)$ for alle Q_j, vil $f_2, \ldots, f_{k-1}$ være antikomplet til $V(T_j)$. Specielt findes der et punkt i $X \cap V(S_1)$ og et punkt i $X \cap V(T_j)$, som er ikke-naboer, for ellers er lemmaet opfyldt, og så ved at ombytte T_1 og T_j i det ovenstående argument kan det konkluderes, at f_1 er komplet til $X_1 \cup Z_1$ og antikomplet til Y_1, og $\{f_2, \ldots, f_k\}$ er antikomplet til $V(T_1)$. Da dette gælder for alle j, så følger, at a_1 og f_1 har de samme naboer i $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$, og der findes ikke kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og $V(T_1) \cup \cdots \cup V(T_n)$. Men så kan f_1 tilføjes til A_1, og $\{f_2, \ldots, f_k\}$ kan tilføjes til C_1, hvilket danner modstrid med maksimaliteten af samlingen af strenge. Altså må antagelsen, om at vedhæftningerne for F i L ikke er lokale, være forkert. $\square$

Kapitel 7

Generelt om prismer

Følgende svarer til lemma 10.1 i rapporten.

Lemma 7.1
Lad G være en Berge graf, lad $Y \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, og for $i = 1, 2, 3$ lad a_i, P_i, b_i være en 2-vej i $G - Y$, der danner en prisme med trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Antag, at P_1, P_2 og P_3 alle har længde mindst to, og ethvert punkt i Y er nabo til mindst to punkter i A og til mindst to punkter i B. Da vil mindst to punkter i A og mindst to punkter i B være komplette til Y. ◇

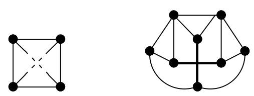
Bevis
Hvis to punkter ikke er komplette til Y i G, så vil de kunne forbindes af en 2-vej i $\overline{G}$, hvis indre tilhører Y, da de ikke er forbundet til hele Y i G. Antag, at der i en af trekanterne A og B kun findes ét punkt, der er komplet til Y. Da vil der altså findes en anti 2-vej Q i G, hvis indre tilhører Y, mellem de to punkter i A, der ikke er komplette til Y, eller mellem de to punkter i B, der ikke er komplette til Y. Dette skyldes, at for ethvert punkt i Y vil der gælde, at for ethvert par af punkter i A henholdsvis B vil punktet fra Y være nabo til mindst ét af parrets to punkter. Da højst ét af punkterne fra A henholdsvis B er komplet til Y, vil der mellem de to andre punkter fra A henholdsvis B kunne dannes en 2-vej, hvis indre tilhører Y. Lad Q være kortest mulig, og antag, at Q forbinder de to punkter $a_1, a_2 \in A$, hvormed a_3 må være det punkt, der er komplet til Y. Eftersom a_3 er eneste punkt fra A, som er komplet til Y, vil a_1 samt a_2 begge være forbundet til mindst ét punkt i Y. Hvis a_1 ikke er nabo til punkter i Y, vil antagelsen, om at punkter i Y er naboer til mindst to punkter fra A, medføre, at a_2 er komplet til Y. Anti 2-vejen Q mellem a_1 og a_2 har derfor længde mindst tre.

Da Q har indre tilhørende Y, og a_3 er komplet til Y, vil det sige, at a_3 er komplet til Q. Mindst ét af punkterne i B vil være komplet til det indre af Q, lad det være b_3. Da Q kan udvides til et antihul ved brug af a_1, b_3, a_2, følger det, at Q har lige længde, da G er en Berge graf. Da Q har længde mindst tre, men også er af lige længde, må Q have lige længde mindst fire. Dan et hul af $\langle P_1 \cup P_2 \rangle_G$. Da P_1 og P_2 har længde mindst to, vil hullet have længde mindst seks. Desuden haves, at Q har lige længde mindst fire, og a_3 er komplet til Q, så dermed kan lemma 2.17 i rapporten anvendes på hullet. Deraf følger, at punkter, der er komplette til det indre af Q, tilhører det indre af P_1 eller det indre af P_2, så dermed er hverken b_1 eller b_2 komplette til det indre af Q. Hermed findes en anti 2-vej mellem b_1 og b_2 med indre tilhørende det indre af Q. Ved minimaliteten af Q har de to anti 2-veje samme indre, men dette er i modstrid med lemma 2.17 i rapporten. Det vil altså sige, at antagelsen, om at der i en af trekanterne A og B kun findes ét punkt, der er komplet til Y, er forkert. □

Følgende svarer til korollar 10.7 i rapporten.

Korollar 7.2
Lad P_1, P_2 og P_3 danne en prisme K i en Berge graf G, hvor P_i har endepunkter a_i og b_i, for $i = 1, 2, 3$, og prismen har trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så mængden X af vedhæftninger for F i K ikke er lokal. Antag, at intet punkt i F er et K-overpunkt. Antag, at lemma 10.6(i) i rapporten er opfyldt. Da har enten P_1 og P_2 begge længde en, eller der findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. $\diamond$

Bevis
Lad $f_1, \ldots, f_n$ være en 2-vej i F, så f_1 har to naboer i P_1, som er indbyrdes naboer, og f_n har to naboer i P_2, som er indbyrdes naboer, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_n\}$ og $V(K)$. Her vil $\langle V(K) \cup \{f_1, \ldots, f_n\}\rangle_G$ være liniegrafen af en todelt underdeling H af K_4. Det kan antages, at underdelingen er degenereret, da korollaret ellers er opfyldt.
Hvis $X \cap V(P_i) \neq \emptyset$, så lad c_i og d_i være de punkter af P_i i X, som er tættest på henholdsvis a_i og b_i i P_i, for $i \in \{1, 2, 3\}$. Lad C_i være 2-vejen mellem a_i og c_i, og lad D_i være 2-vejen mellem d_i og b_i.



Figur 7.1: Udseendet af $L(H) = \langle V(K) \cup \{f_1, \ldots, f_n\}\rangle_G$.

Da $L(H)$ er en degenereret optræden af K_4, vil alle prismer indeholdt i $L(H)$ være ulige prismer. Altså må prismen K være ulige. Dermed har P_3 ulige længde samtidig med, at C_1, D_1, C_2 og D_2 har længde nul. Andre muligheder for længden af henholdsvis $\{f_1, \ldots, f_n\}, C_1, D_1, C_2$ og D_2 giver et hul af ulige længde i $L(H)$. Specielt har P_1 og P_2 begge længde en. $\square$

Følgende svarer til korollar 10.9 i rapporten.

Korollar 7.3
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad P_1, P_2 og P_3 danne en prisme K i G, hvor prismen har trekanter $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, hvor a_i og b_i er endepunkter i P_i, for $i = 1, 2, 3$. Lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så, hvis prismen er lige, da er intet punkt i F et K-overpunkt. Antag, at mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal, og ingen af vedhæftningerne tilhører P_3. Da er $|F| \geq 2$, og mængden af vedhæftninger for F i K er nøjagtig $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$. $\diamond$

Bevis
Hvis der findes et K-overpunkt $v \in F$, så er det nabo til a_1, a_2, b_1 og b_2, da det er antaget, at vedhæftninger ikke tilhører $V(P_3)$. Da $v, a_1, a_3, P_3, b_3, b_2$ er et hul, må P_3 have lige længde, og K er en lige prisme, og en modstrid er opnået, da det er antaget, at der ikke findes K-overpunkter, hvis prismen er lige. Altså findes der ikke overpunkter i F.
Hvis der findes et indre punkt i P_1, som er en vedhæftning for F i K, så følger af korollar 10.8 i rapporten, at der findes en vej $f_1, \ldots, f_n$ i F, så f_1 er nabo til a_2 og a_3, og f_n har mindst én nabo i $P_1 - \{a_1\}$. Dette er dog ikke muligt, da P_3 ikke indeholder vedhæftninger for F, så der findes ikke et indre punkt i P_1, som er en vedhæftning for F. Ligeledes kan det vises, at P_2 ikke indeholder et indre punkt, som er en vedhæftning for F. Fra lemma 10.6 i rapporten vil der findes en 2-vej $f_1, \ldots, f_n$ i F, som opfylder et af punkterne (i)-(iv) i lemma 10.6 i rapporten. Da der ikke er vedhæftninger i $V(P_3)$, kan lemma 10.6(ii) i rapporten og (iv) ikke være opfyldt. Hvis lemma 10.6(i) i rapporten er opfyldt, så er f_1 nabo til a_1 og b_1, da ingen indre punkter i P_1 er vedhæftninger, og f_n er nabo til a_2 og b_2, da ingen indre punkter i P_2 er vedhæftninger. Da der ikke findes prismeoverpunkter, så er $f_1 \neq f_n$, hvormed korollaret er opfyldt. Hvis lemma 10.6(iii)

i rapporten er opfyldt, så er f_1 nabo til a_1 og a_2, og f_n er nabo til b_1 og b_2. Da der ikke findes prismeoverpunkter, er $f_1 \neq f_n$, og korollaret er opfyldt. $\square$

Kapitel 8

Aflange ulige prismer

Følgende svarer til lemma 12.6 i rapporten.

Lemma 8.1
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder med hensyn til S. Antag, at $v \in V(G) - V(S)$ har en nabo i $A \cup C$ og ikke har en nabo i B. Antag yderligere, at P er en 2-vej i $G - (V(S) \cup \{a_0\})$ med endepunkter v og b_0, og der ikke findes kanter mellem det indre af P og $V(S)$. Da er v en venstrestjerne. $\diamond$

Bevis
Lad F være en sammenhængende delmængde af $V(P)$, der indeholder v, er disjunkt fra $V(P_0)$ samt har en vedhæftning i $P_0 - \{a_0\}$.

Påstand: *For ethvert trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 vil der gælde, at hvis v har en nabo i $P_1 \cup P_2$, så er v nabo til a_1 samt a_2 og ikke til andre punkter tilhørende $P_1 \cup P_2$.*

Da P_1 og P_2 sammen danner et trin, og P_0 er et gelænder, danner de tre sammen en prisme K. For at vise påstanden antages, at $v \in F$ har en nabo tilhørende $P_1 - \{b_1\}$, og dermed findes intet punkt tilhørende F, som er et K-overpunkt, idet hverken b_1 eller b_2 er nabo til et punkt tilhørende F. Eftersom F har en vedhæftning i $P_0 - \{a_0\}$ og en vedhæftning i $P_1 - \{b_1\}$, så er mængden af vedhæftninger for F ikke lokal. Da det haves, at G er en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G, P_0, P_1 og P_2 danner en prisme K, hvor F ikke indeholder et punkt, der er et K-overpunkt, og mængden af vedhæftninger for F ikke er lokal, kan korollar 7.3 anvendes. Ifølge korollar 7.3 vil det gælde, at hvis ingen af F's vedhæftninger tilhører $V(P_2)$, så vil mængden af vedhæftninger for F være $\{a_0, b_0, a_1, b_1\}$. Men idet b_1 ikke er en vedhæftninger for F, må det derfor gælde, at en af F's vedhæftninger tilhører P_2. Det vil sige, at v har en nabo i $P_2 - \{b_2\}$. Hvis v har naboer tilhørende $P_1 \cup P_2$, som er forskellige fra a_1 og a_2, for eksempel et punkt tilhørende det indre af P_1, så kan v forbindes til trekanten $\{b_0, b_1, b_2\}$ via 2-vejen v, P, b_0, 2-vejen med endepunkter i v og b_1 og med indre tilhørende $P_1 - \{a_1\}$ og 2-vejen med endepunkter i v og b_2 og med indre tilhørende P_2. Men da vil v ifølge lemma 2.9 i rapporten være nabo til mindst to af punkterne b_0, b_1 og b_2, hvilket ikke er tilfældet, så en modstrid er opnået. Det vil sige, at v ikke har andre naboer end a_1 og a_2 tilhørende $P_1 \cup P_2$, hvormed påstanden er vist.

Fra påstanden følger, at v ikke har naboer tilhørende C, da hvert punkt tilhører et trin, og dermed har v mindst én nabo tilhørende A, idet v per antagelse har en nabo i $A \cup C$. Da S er trin-sammenhængende, vil der kunne vælges et trin, hvor v er nabo til mindst ét af punkterne fra A. Men da følger af påstand 1, at v er nabo til begge af punkterne fra A i dette trin. Da dette gælder for ethvert trin i S, vil v være komplet til A. Det vil altså sige, at v er en venstrestjerne. $\square$

Følgende svarer til lemma 12.7 i rapporten.

Lemma 8.2
Lad G være en Berge graf, så der ikke findes en ikke-degenereret optræden af K_4 i G. Lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder med hensyn til S. Lad $v \in V(G) - V(S)$ have en nabo i $V(S)$ og være ikke-nabo til b_0. Lad P være en 2-vej i $G - (V(S) \cup \{a_0\})$ med endepunkter v og b_0, og lad Q være en 2-vej tilhørende $G - (V(S) \cup \{b_0\})$ med endepunkter v og a_0, så der ikke findes kanter mellem det indre af P forenet med det indre af Q og $V(S)$. Da er v enten komplet til B, eller v er en venstrestjerne. $\diamond$

Bevis
Hvis v ikke har naboer, der tilhører B, så følger af lemma 8.1, at v er en venstrestjerne, og lemmaet er opfyldt. Det antages derfor, at v har en nabo, der tilhører B. Hvis v er komplet til B, så er lemmaet opfyldt, så det kan antages, at v ikke er komplet til B. Da v ikke er komplet til B, findes et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så v er nabo til b_1 men ikke til b_2 eller omvendt. Af symmetri kan v's nabo vælges til at være b_1.

Lad $F \subseteq V(Q)$ være sammenhængende, og lad desuden F indeholde v, være disjunkt fra $V(P_0)$ og have en vedhæftning tilhørende $P_0 - \{b_0\}$. Da P_1 og P_2 sammen danner et trin, og P_0 er et gelænder, danner de tre sammen en prisme K. Der findes intet punkt tilhørende F, som er et K-overpunkt, idet ingen af b_0, b_1 eller b_2 er nabo til et punkt tilhørende F. Da F har en vedhæftning tilhørende $P_0 - \{b_0\}$, $v \in F$ er nabo til b_1 og dermed er en vedhæftning tilhørende F, er mængden af vedhæftninger for F ikke lokal med hensyn til K. Idet det haves, at G er en Berge graf, K er en prisme, F er sammenhængende, så mængden af vedhæftninger for F i K ikke er lokal, og intet punkt tilhørende F er et K-overpunkt, er antagelserne i lemma 10.6 i rapporten opfyldte, og dermed må en af konklusionerne (i)-(iv) gælde. Da der ikke findes en optræden af K_4 i G, kan lemma 10.6(i) i rapporten ikke gælde. Desuden kan punkt (ii) og (iii) i lemma 10.6 i rapporten ikke gælde, da v er det eneste punkt tilhørende F med naboer tilhørende $A \cup B$. Det vil sige, at lemma 10.6(iv) i rapporten gælder, og dermed har F en vedhæftning tilhørende P_2, hvilket betyder, at v kan forbindes til trekanten $\{b_0, b_1, b_2\}$ via 2-vejen v, P, b_0, 2-vejen v, b_1 og 2-vejen med endepunkter v og b_2, hvis indre tilhører P_2. Men da vil v ifølge lemma 2.9 i rapporten være nabo til mindst to af punkterne b_0, b_1 og b_2, hvilket ikke er tilfældet, så en modstrid er opnået. Det vil sige, at antagelserne, om at v ikke er komplet til B, eller v ikke er en venstrestjerne, er forkerte. $\square$

Følgende svarer til lemma 12.8 i rapporten.

Lemma 8.3
Lad G være en Berge graf, der ikke indeholder en lige prisme, lad $S = (A, C, B)$ være en trin-sammenhængende streng i G, og lad a_0, P_0, b_0 være et gelænder med hensyn til S. Da har enhver sti tilhørende S ulige længde. $\diamond$

Bevis
Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin. Da vil 2-vejen P_1 og P_2 sammen med P_0 fra gelænderet danne en prisme K. Per antagelse i lemmaet er K ikke lige, hvilket betyder, at alle tre 2-veje har ulige længde, da der ellers dannes et hul af ulige længde. Det betyder, at enhver sti a, P, b sammen med a_i, P_i, b_i, for $1 \leq i \leq 2$, skal danne et hul af lige længde, idet G er en Berge graf, hvormed P har ulige længde. $\square$

Følgende svarer til lemma 12.20 i rapporten.

Lemma 8.4
Lad G være en Berge graf, så der hverken findes en optræden af K_4, en lige prisme eller en 1-afbryder i G. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en maksimal trappe i G, og lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være sammenhængende, så mængden af vedhæftninger for F i $V(K)$ ikke er lokal med hensyn til K. Da vil F indeholde et af følgende:

(i) *Et K-overpunkt.*

(ii) *Et gelænder u, P, v, så der ikke findes kanter mellem $V(P)$ og $V(P_0)$.*

(iii) *Op til symmetri, en 2-vej u, P, v, hvor u er en venstrestjerne, v har en nabo i $P_0 - \{a_0\}$, og der ikke findes kanter mellem $V(P - \{u\})$ og $A \cup C \cup B$.*

$\diamond$

Bevis

Lad X være mængden af vedhæftninger for F i $V(K)$. Antag, at F er minimal og sammenhængende, så X ikke er lokal med hensyn til K. Her er en delmængde af $V(K)$ lokal, hvis og kun hvis den ikke har punkter i både $A \cup C$ og $V(P_0 - \{a_0\})$ og ikke har punkter i både $B \cup C$ og $V(P_0 - \{b_0\})$. Det kan derfor antages, at X har punkter i både $A \cup C$ og $V(P_0 - \{a_0\})$. Dermed følger på grund af minimaliteten af F, at der findes en 2-vej $f_1, \ldots, f_k$, hvor $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$, f_1 er det eneste punkt i F, der har en nabo i $A \cup C$, og f_k er det eneste punkt i F, der har en nabo i $V(P_0 - \{a_0\})$. Antag, at $k = 1$. Antagelserne i lemma 12.19 i rapporten er opfyldte, så en af konklusionerne må gælde. Når $k = 1$, er $f_1 = f_k$ nabo til punkter i $A \cup C$ og $V(P_0 - \{a_0\})$, og lemma 12.19(i) i rapporten kan ikke gælde for $v = f_1 = f_k$. Hvis lemma 12.19(ii) i rapporten gælder, så vil (i) gælde, og hvis lemma 12.19(iii) i rapporten gælder, må v være en venstrestjerne, der har en nabo i $P_0 - \{a_0\}$. Idet v kan betragtes som en 2-vej P af længde nul, er (iii) opfyldt, da $V(P) - v = \emptyset$. Det kan derfor antages, at $k \geq 2$.

Påstand: *Hvis f_1 er komplet til A, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at f_1 er komplet til A. Hvis der ikke findes kanter mellem F og $B \cup C$, da er (iii) opfyldt, idet F så er en 2-vej, hvor f_1 er en venstrestjerne, f_k har en nabo i $P_0 - \{a_0\}$, og der ikke findes kanter mellem $V(P - \{f_1\})$ og $V(S)$. Det kan derfor antages, at der findes en kant mellem F og $B \cup C$. Vælg i, hvor $1 < i \leq k$, mindst muligt, så f_i har en nabo i $B \cup C$.
Antag først, at der ikke findes en kant mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $V(P_0)$. Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin, så f_i har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og f_i ikke er nabo til b_2, hvis det er muligt. Da f_1 er komplet til A, og f_i har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, er mængden af vedhæftninger for $\{f_1, \ldots, f_i\}$ ikke indeholdt i en af trekanterne i prismen P' dannet af P_0, P_1 samt P_2 og er dermed ikke lokal med hensyn til P'. Antagelserne i korollar 7.3 er opfyldte, og dermed er $i \geq 2$, og $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ er vedhæftningerne for $\{f_1, \ldots, f_i\}$ i P'. De eneste kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $V(P_1 \cup P_2)$ er dermed f_1a_1, f_1a_2, f_ib_1 og f_ib_2. På grund af valget af trinet følger, at f_i er komplet til B. Det vil sige, at ethvert trin opfylder, at f_i har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og f_i ikke er nabo til b_2, hvis det er muligt. Dermed gælder også for ethvert trin, at f_i er komplet til B, hvormed (ii) er opfyldt, idet $f_1, \ldots, f_i$ er et gelænder for S, og der ikke findes kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $V(P_0)$.
Antag nu, at der findes en kant mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $V(P_0)$, og antag, at $i < k$. Da F er valgt mindst mulig, så f_k er det eneste punkt i F, der har en nabo i $V(P_0 - \{a_0\})$, findes der ikke en kant mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $V(P_0 - \{a_0\})$. Det vil sige, at a_0 er en vedhæftning for $\{f_1, \ldots, f_i\}$. Men $\{f_1, \ldots, f_i\}$ har også en vedhæftning i $B \cup C$, da f_i har en nabo i $B \cup C$, og dermed er mængden af vedhæftninger for $\{f_1, \ldots, f_i\}$ ikke lokal, hvilket er i modstrid med minimaliteten af F. Det vil altså sige, at antagelsen, om at $i < k$, er forkert, så dermed må $i = k$.
Da $k \geq 2$, medfører minimaliteten af F, at der ikke findes kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og $V(P_0 - \{b_0\})$, da mængden af vedhæftninger så ikke er lokal. Dermed er b_0 den eneste nabo til f_k i P_0. Heraf følger på grund af minimaliteten af F, at der ikke findes kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og $A \cup C$. På grund af minimaliteten af i findes der heller ikke kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ og $B \cup C$.
Vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så f_k er nabo til b_1, og f_k ikke er nabo til b_2, hvis det er muligt. Da P_1 har ulige længde, og $a_1, f_1, \ldots, f_k, b_1, P_1, a_1$ danner et hul, følger, at k er lige. Da $a_2, f_1, \ldots, f_k, b_0, b_2, P_2, a_2$ ikke danner et hul af ulige længde, er f_k nabo til b_2 og dermed til alle punkter i B på grund af valget af trin. Da $a_1, f_1, \ldots, f_k, b_0, P_0, a_0, a_1$ ikke danner et hul af ulige længde, og P_0 har ulige længde, følger, at f_1 er nabo til a_0. Hermed er f_k altså komplet til B og nabo til b_0, og f_1 er komplet til A og nabo til a_0. Men da kan f_1 tilføjes A, f_k kan tilføjes

B, og $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$ kan tilføjes C, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af K. Dette viser påstanden.

Fra påstanden kan det antages, at der findes et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så f_1 har en nabo i $P_1 - \{b_1\}$, og a_2 ikke er nabo til f_1. Da danner P_0, P_1 og P_2 en prisme K', og mængden af vedhæftninger for F i $V(K')$ er ikke lokal med hensyn til K'. Antag, at et punkt v i F er et K'-overpunkt. Hvis v har en nabo i A, en nabo i B og ikke har en nabo i P_0, så er v nabo til a_1, a_2, b_1 og b_2. Her danner $v, a_1, a_0, P_0, b_0, b_2$ et hul af ulige længde. Dermed må v have en nabo i A, en nabo i B og en nabo i P_0, hvormed v er et K-overpunkt, og dermed er (i) opfyldt. Det kan derfor antages, at intet punkt i F er et K'-overpunkt, og dermed er antagelserne i lemma 10.6 i rapporten opfyldte, og en af konklusionerne må gælde. Da det er antaget, at der ikke findes en optræden af K_4 i G, kan lemma 10.6(i) i rapporten ikke gælde. Da intet punkt i F er nabo til a_2, kan lemma 10.6(ii) i rapporten ikke gælde. Antag, at lemma 10.6(iii) i rapporten gælder. Da f_1 ikke er nabo til a_2, følger, at f_1 er nabo til a_0 og a_1, og der findes et i, hvor $2 \leq i \leq k$, så f_i er nabo til b_0 og b_1, og der findes ikke andre kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $V(K')$. Da kan f_1 tilføjes A, f_i tilføjes B, og $\{f_2, \ldots, f_{i-1}\}$ tilføjes C, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af K. Det vil sige, at lemma 10.6(iii) i rapporten ikke gælder, og det er lemma 10.6(iv) i rapporten, der gælder. Da lemma 10.6(iv) i rapporten gælder, findes en 2-vej p_1, P, p_2 i F, så der for et j, hvor $0 \leq j \leq 2$, gælder et af følgende:

(a) p_1 er nabo til de to punkter i $\{a_0, a_1, a_2\} - \{a_j\}$, og p_2 har naboer i $P_j - \{a_j\}$, og der findes ikke andre kanter mellem $V(P)$ og $V(K') - \{a_j\}$.

(b) p_1 er nabo til de to punkter i $\{b_0, b_1, b_2\} - \{b_j\}$, og p_2 har naboer i $P_j - \{b_j\}$, og der findes ikke andre kanter mellem $V(P)$ og $V(K') - \{b_j\}$.

På grund af minimaliteten af F, er $F = V(P)$. Hvis $j > 0$, så kan p_1 i tilfælde (a) tilføjes A, og $V(P - \{p_1\})$ kan tilføjes C, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af K. I tilfælde (b) kan p_1 tilføjes B, og $V(P - \{p_1\})$ kan tilføjes C, hvilket er i modstrid med maksimaliteten af K. Det vil sige, at $j = 0$. Her er tilfælde (a) ikke mulig, da intet punkt i F er nabo til a_2. Også tilfælde (b) er ikke mulig, da $f_1 \in F = V(P)$, og f_1 har en nabo i $P_1 - \{b_1\}$. Altså må der ikke findes et K'-overpunkt i F. □

Følgende svarer til lemma 12.21 i rapporten.

Lemma 8.5
Lad G være en Berge graf, så der hverken findes en optræden af K_4, en lige prisme eller en 1-afbryder i G. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en maksimal trappe i G, og lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være en sammenhængende mængde. Antag, at F indeholder en venstrestjerne, og har en vedhæftning i $B \cup C$. Da indeholder F enten et K-overpunkt eller et gelænder med hensyn til (A, C, B). ◇

Bevis
Antag, at F er mindst mulig, eventuelt ved at ombytte A og B, så der findes en 2-vej $f_1, \ldots, f_k$, hvor $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$, f_1 er den eneste venstrestjerne i F, og f_k er det eneste punkt i F, der har en nabo i $B \cup C$. Da f_1 er den eneste venstrestjerne, og f_k har en nabo i $B \cup C$, følger det, at $k \geq 2$. Det kan antages, at der ikke findes et K-overpunkt i F og ikke findes et gelænder med hensyn til (A, C, B), da lemmaet ellers er opfyldt.

Påstand 1: *Det kan antages, at ingen af $f_1, \ldots, f_k$ er en højrestjerne, og f_k ikke er komplet til B.*

Hvis der findes en højrestjerne i F, må det være f_k, da f_k er det eneste punkt, der har en nabo i $B \cup C$. På grund af minimaliteten af F, har intet punkt i F forskelligt fra f_1 en nabo i $A \cup C$, og dermed er $f_1, \ldots, f_k$ et gelænder med hensyn til (A, C, B), hvilket danner modstrid med antagelsen om, at F ikke indeholder et gelænder med hensyn til (A, C, B). Det kan derfor antages, at der ikke findes en højrestjerne i F.

Da f_k hverken er et K-overpunkt, en højrestjerne, en venstrestjerne eller har en nabo i $A \cup C$, gælder ifølge lemma 12.19(i) i rapporten, at f_k er et K-underpunkt. Idet f_k ikke er en højrestjerne, følger det, at f_k ikke er komplet til B, hvilket viser påstand 1.

Påstand 2: $F \cap V(P_0) = \emptyset$*, og der findes ikke kanter mellem* $\{f_2, \ldots, f_k\}$ *og* $V(P_0) - \{b_0\}$*.*

Fra påstand 1 er $b_0 \notin F$, da b_0 er en højrestjerne. Antag, at $V(P_0) - \{b_0\}$ og $\{f_1, \ldots, f_k\}$ enten har fælles punkter, eller der findes en kant, der sammenføjer $V(P_0) - \{b_0\}$ og $\{f_2, \ldots, f_k\}$. Vælg i, for $2 \leq i \leq k$, hvor i er størst muligt, så $f_i \in V(P_0) - \{b_0\}$, eller f_i har en nabo i $V(P_0) - \{b_0\}$. Det vises, at $f_i \notin V(P_0)$. Hvis $i = k$, og $f_i = f_k \in V(P_0) - \{b_0\}$, så haves en modstrid, idet f_k har naboer i $B \cup C$. Hvis $i = k$ og $f_k = f_i$ har en nabo i $V(P_0) - \{b_0\}$, så er $f_k = b_0$ den eneste mulighed, da f_k har naboer i $B \cup C$. Men da $b_0 \notin F$, så haves en modstrid, altså må $i < k$.
Hvis $i < k$, så har f_{i+1} på grund af maksimaliteten af i ingen naboer i $V(P_0) - \{b_0\}$, og dermed er $f_i \notin V(P_0)$, idet f_k er nabo til f_i. Det vil sige, at $f_i, \ldots, f_k \notin V(P_0)$. Da $\{f_i, \ldots, f_k\}$ har en vedhæftning i $B \cup C$ og i $V(P_0) - \{b_0\}$, er $\{f_i, \ldots, f_k\}$ ikke lokal og indeholder dermed ikke et K-underpunkt. Desuden indeholder $\{f_i, \ldots, f_k\}$ ikke et K-overpunkt, da lemmaet så vil være opfyldt, indeholder ikke en venstrestjerne, da det kun er f_1, der er en venstrestjerne, og indeholder heller ikke en højrestjerne på grund af påstand 1. Dette danner en modstrid med lemma 12.19 i rapporten, da ingen af konklusionerne i lemma 12.19 i rapporten så er opfyldte. Det vil sige, at $\{f_2, \ldots, f_k\}$ er disjunkt fra $V(P_0) - \{b_0\}$ og dermed disjunkt fra $V(P_0)$, og der findes ikke kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og $V(P_0) - \{b_0\}$. Da der findes en kant mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og f_1, følger det, at $f_1 \notin V(P_0)$, og dermed er $F \cap V(P_0) = \emptyset$, hvilket viser påstand 2.

Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin, så f_k har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, og f_k ikke er nabo til b_2. Et sådant trin findes, da f_k ikke er komplet til B.

Påstand 3: f_1a_2 *er den eneste kant mellem* F *og* P_2*.*

Hvis f_k har en nabo i P_2, så er mængden af naboer til f_k i prismen dannet af P_0, P_1 og P_2 ikke lokal med hensyn til prismen. Da har f_k en nabo i P_0 ifølge korollar 7.3, hvor F i korollar 7.3 svarer til $\{f_k\}$, da konklusionerne ikke gælder. Altså har f_k vedhæftninger i alle tre 2-veje P_0, P_1 og P_2, og da påstand 1 giver, at f_k ikke er en højrestjerne, er f_k ifølge lemma 12.19 i rapporten et K-overpunkt. Men dette er i modstrid med antagelsen om, at der ikke findes et K-overpunkt i F, så derfor har f_k ingen naboer i P_2. På grund af minimaliteten af F findes ingen kanter mellem F og $P_2 - \{a_2\}$, idet $V(P_2 - \{a_0\}) \subset B \cup C$.
Antag, at a_2 har en nabo i $\{f_2, \ldots, f_{k-1}\}$, og vælg i, for $2 \leq i \leq k-1$, størst muligt, så a_2 er nabo til f_i. Da f_k har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, er mængden af vedhæftninger for $\{f_i, \ldots, f_k\}$ ikke lokal med hensyn til prismen dannet af P_0, P_1 og P_2. Idet b_2 ikke er en vedhæftning, da det kun er f_k, der har naboer i $B \cup C$, og f_k ikke har naboer i P_2, følger det af korollar 7.3, at der findes en vedhæftning for $\{f_i, \ldots, f_k\}$ i $V(P_0)$. Fra påstand 2 følger det, at b_0 har en nabo i $\{f_i, \ldots, f_k\}$, men da er $\{f_i, \ldots, f_k\}$ i modstrid med lemma 8.4, idet hverken lemma 8.4(i), (ii) eller (iii) er opfyldt. Dette viser påstand 3.

Påstand 4: b_0 *har naboer i* $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$*.*

Antag, at b_0 ikke har en nabo i F. Da b_2 ifølge påstand 2 ikke er en vedhæftning for F, følger det fra korollar 7.3 anvendt på F og prismen dannet af P_0, P_1 og P_2, at der findes en kant mellem F og $V(P_0)$. Fra påstand 2 følger det, at f_1 er det eneste punkt i F, der kan være forbundet til $V(P_0) - b_0$. Dermed kan f_1 forbindes til trekanten $\{b_0, b_1, b_2\}$ via 2-vejen med første endepunkt f_1, andet endepunkt b_0 og med indre tilhørende $V(P_0)$, 2-vejen med første endepunkt f_1, andet endepunkt b_1 og med indre tilhørende $\{f_2, \ldots, f_k\} \cup (V(P_1) - \{a_1, b_1\})$, og 2-vejen f_1, a_2, P_2, b_2. Dette er i modstrid med lemma 2.9 i rapporten, da f_1 ikke har mindst to naboer i trekanten. Dermed må b_0 have en nabo i F.
Antag, at f_k er b_0's eneste nabo i F. Da f_k ikke er et K-overpunkt, en vestrestjerne eller en højrestjerne, følger det af lemma 8.4, at f_k er et K-underpunkt. Da f_k er nabo til b_0, må mængden af f_k's naboer være indeholdt i $B \cup \{b_0\}$. Da f_k har en nabo i $P_1 - \{a_1\}$, må b_1 være f_k's eneste nabo i P_1. Fra lemma 8.3 har P_1 og P_2 ulige længde, og da $f_1, \ldots, f_k, b_0, b_2, P_2, a_2$ danner et hul, er k ulige. Hvis a_1 ikke har en nabo i $\{f_2, \ldots, f_k\}$, så danner $f_1, \ldots, f_k, b_1, P_1, a_1$ et hul af ulige

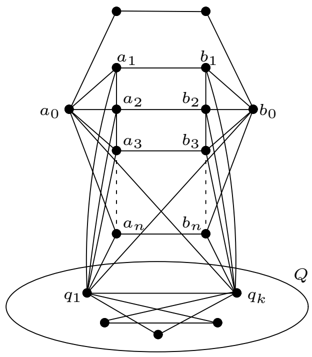
længde, og hvis a_1 har en nabo i $\{f_2, \ldots, f_k\}$, så er $\{f_2, \ldots, f_k\}$ i modstrid med lemma 8.4(iii). Dermed er f_k ikke den eneste nabo til b_0 i F, hvilket viser påstand 4.

Vælg i, for $1 \le i \le k-1$, mindst muligt, så b_0 er nabo til f_i, og lad P'_0 være 2-vejen $f_1, \ldots, f_i, b_0$. På grund af minimaliteten af F findes der ikke kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_i\}$ og $B \cup C$, og fra lemma 8.4 findes der ikke kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_i, b_0\}$ og $A \cup C$. Dermed er f_1, P'_0, b_0 et gelænder med hensyn til K, og de tre 2-veje P'_0, P_1 og P_2 danner en prisme K'. Lad $F' = \{f_{i+1}, \ldots, f_k\}$. Da er F' sammenhængende og disjunkt fra $V(K')$, og F' har vedhæftninger i $P_1 - \{b_1\}$ og $P'_0 - \{b_0\}$, men ikke i P_2 på grund af påstand 3. Ved at anvende korollar 7.3 på K', følger det, at F' indeholder en 2-vej med første endepunkt a_1 eller f_1, det andet endepunkt b_0 eller b_1, og hvor der ikke findes flere kanter mellem denne 2-vej og $V(P'_0) \cup V(P_1)$. Da f_2 er det eneste punkt i F, der er nabo til f_1, og f_k er det eneste punkt i F', der er nabo til b_1, må $i = 1$, og de eneste kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og $V(P'_0) \cup V(P_1)$ er $f_k b_1, f_k b_0, f_2 a_1$ og $f_2 f_1$. Men da kan a_1 ifølge påstand 2 forbindes til trekanten $\{b_0, b_1, f_k\}$ via 2-vejen a_1, a_0, P_0, b_0, 2-vejen a_1, P_1, b_1 og 2-vejen $a_1, f_2, \ldots, f_k$, hvilket er i modstrid med lemma 2.9, da a_1 ikke har mindst to naboer i $\{b_0, b_1, f_k\}$. Det vil sige, at antagelsen, om at F hverken indeholder et K-overpunkt eller et gelænder for (A, C, B), må være forkert. □

Følgende svarer til lemma 12.25 i rapporten.

Lemma 8.6
Lad G være en Berge graf, som hverken indeholder en optræden af K_4, en lige prisme, en 1-afbryder eller en 2-afbryder. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en stærk-maksimal trappe i G. Lad $q_1, \ldots, q_k$ være en anti 2-vej i G, så $q_2, \ldots, q_{k-1}$ er både venstrediagonale og højrediagonale punkter, q_1 er et venstrediagonalt men ikke et højrediagonalt punkt, og q_k er et højrediagonalt men ikke et venstrediagonalt punkt. Da er q_1 en venstrestjerne og q_k er en højrestjerne. ◇

Bevis
Lad $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$. For at lemmaets antagelser kan være opfyldte, må $k \ge 2$. Desuden haves, at $q_1, \ldots, q_{k-1}$ alle er komplette til $A \cup \{b_0\}$, og $q_2 \ldots, q_k$ alle er komplette til $B \cup \{a_0\}$, se figur 8.1.



Figur 8.1: Udseendet af K og anti 2-vejen Q, som her er skitseret med $|Q| = 5$. Punkterne $q_2, \ldots, q_{k-1}$ er komplette til $A \cup B \cup \{a_0, b_0\}$, men disse kanter er ikke indtegnet.

Lemmaet vises ved at betragte hvorledes $\{a_0, b_0\}$ kan være forbundet tíl $\{q_1, q_k\}$. På grund af symmetrien er tilfældet, hvor a_0 er nabo til q_1, og b_0 ikke er nabo til q_k, lig tilfældet, hvor a_0 ikke er nabo til q_1, og b_0 er nabo til q_k.

Påstand 1: *Hvis q_1 er nabo til a_0, og q_k er nabo til b_0, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at q_1 er nabo til a_0, og q_k er nabo til b_0. Hermed er a_0 og b_0 begge komplette til Q. Punktet q_1 har mindst en ikke-nabo i B, da q_1 ikke er komplet til $B \cup \{a_0\}$, og ligeledes har q_k mindst en ikke-nabo i A. Da P_0 er et gelænder, har det ulige længde mindst tre, og dermed må der om et punkt $q_i \in Q$, for $1 < i < k$, gælde, at q_i har en nabo i det indre af P_0, idet der ellers kan dannes et hul a_0, q_i, b_0, P_0 af ulige længde. Da G ikke indeholder en 1-afbryder, må et af punkterne i definition 12.10 ikke være opfyldte for (S, P_0, Q). Punkterne (i)-(vi) i definition 12.10 er alle opfyldte, så Q må indeholde en venstrestjerne. Det må være punktet q_1, som er venstrestjerne, da q_1 er det eneste punkt fra Q, som kan være antikomplet til B. På grund af symmetrien må q_k også være en højrestjerne, for ellers kan der ved en omnummerering af punkterne dannes en 1-afbryder i G. Lemmaet vil dermed være opfyldt, og påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Hvis q_1 er nabo til a_0, og q_k ikke er nabo til b_0, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at q_1 er nabo til a_0, og q_k ikke er nabo til b_0. Da q_1 ikke er komplet til $B \cup \{a_0\}$, har q_1 en ikke-nabo $b \in B$. Da der kan dannes et antihul $a_0, b, q_1, \ldots, q_k, b_0$, må k være lige. Hermed haves en 2-vej P_0 af ulige længde mindst tre, hvis endepunkter er komplette til $Q - q_k$, og ethvert punkt $a \in A$ er komplet til $Q - \{q_k\}$ og har ingen naboer i det indre af P_0. Dermed er der ifølge korollar 2.3 i rapporten et punkt t i det indre af P_0, som er komplet til $Q - \{q_k\}$, da korollarets konklusion ikke er opfyldt. Lad $T : t, \ldots, b_0$ være en delgraf af P_0, og vælg t, så t er det eneste punkt fra T, der er komplet til $Q - \{q_k\}$. Hvis t ikke er nabo til q_k, så er $t, b_0, q_1, \ldots, q_k$ et antihul af ulige længde, så t er nabo til q_k og er dermed komplet til Q. Som ved påstand 1 har punkterne i Q en nabo i det indre af Q, og antagelserne i lemma 12.9 i rapporten er opfyldte, hvor $F = P_0$. Da et af de seks punkter i lemma 12.9 i rapporten ikke kan gælde, og (i)-(v) er opfyldte, må Q indeholde en venstrestjerne. Dette må være punktet q_1, da dette punkt er det eneste fra Q, som ikke er komplet til $B \cup C$.

Det kan antages, at q_k ikke er en højrestjerne, for ellers er lemmaet opfyldt. Antagelserne i lemma 12.19 i rapporten er opfyldte så ét af de tre punkter i lemma 12.19 i rapporten må være opfyldt. Her er q_k ikke et underpunkt og ikke en højrestjerne eller en venstrestjerne. Altså må q_k være et K-overpunkt og har derfor en nabo i A, B og $V(P_0)$. Lad a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2 være et trin, hvor q_k er nabo til a_1 og hvis muligt ikke er nabo til a_2. Så er t, T, b_0, b_1, P_1, a_1 en 2-vej i G, hvis endepunkter er komplette til Q. Desuden vil 2-vejens indre punkter ikke være komplette til Q, da q_1 er en venstrestjerne og dermed er antikomplet til $B \cup C$. Lemma 1.7 kan nu benyttes, hvor t, T, b_0, b_1, P_1, a_1 er 2-vejen og $b_1, q_1, \ldots, q_k, b_0$ er anti 2-vejen. Da t er komplet til $q_1, \ldots, q_k$, og $q_1, \ldots, q_k$ alle er naboer til a_1, er antagelserne i lemma 1.7 opfyldte, så en af de to konklusioner må være gældende. Hvis lemma 1.7(i) er gældende, betyder det, at 2-vejen T indeholder mindst tre punkter. Yderligere skal punkterne i afstand to fra b_0 på 2-vejen være komplette til Q, og da t samt a_1 er de eneste punkter fra 2-vejen, som er komplette til Q, må t, T, b_0, b_1, P_1, a_1 have længde fire. Hvis lemma 1.7(ii) er opfyldt, betyder det, at 2-vejen P_1 indeholder mindst tre punkter. Ydermere skal der gælde, at b_0's nabo fra T er komplet til Q, det vil sige, at t er nabo til b_0, og T har dermed længde en. Desuden skal punktet i afstand tre fra b_0 på 2-vejen b_0, b_1, P_1, a_1 være komplet til Q, så dette punkt må være a_1. Heraf har b_0, b_1, P_1, a_1 længde tre, men dette er i modstrid med, at P_1 har ulige længde. Altså gælder lemma 1.7(i), og da P_1 har ulige længde, må det være P_1, der har længde en, og T, der har længde to. Da T har længde to, består den af tre punkter t, u, b_0. Fra lemma 1.7(i) er u komplet til $Q - \{q_k\}$ og ikke-nabo til q_k. Antag, at q_k ikke er nabo til a_2. Da q_1 er en venstrestjerne, er b_2 ikke-nabo til q_1, og da a_2 ikke er nabo til q_k, findes der ikke et punkt fra $V(P_2)$, som er komplet til Q. Ingen af P_1's indre punkter er komplette til Q, da de indre punkter tilhører C, og idet q_1 er en venstrestjerne, er q_1 antikomplet til C.
Hvis t ikke er nabo til a_0, vil $a_0, a_2, P_2, b_2, b_0, u, t$ være en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til Q, og hvis indre punkter ikke er komplette til Q. Ifølge lemma 1.2 indeholder Q et afhop for 2-vejen $a_0, a_2, P_2, b_2, b_0, u, t$. Dette kan dog ikke lade sig gøre, da alle punkterne i Q enten er nabo til b_2 eller til b_0, altså er t nabo til a_0.
Hvis t er nabo til a_0, altså at $P_0 : a_0, t, u, b_0$, så er $a_0, a_2, P_2, b_2, b_0, P_0$ et hul af længde mindst seks, og de eneste punkter herfra, som er komplette til Q, er nabopunkterne a_0 og t. Ifølge lemma 2.6 i rapporten indeholder Q en hat eller et afhop for $a_0, a_2, P_2, b_2, b_0, P_0$, men dette er igen umuligt, da ethvert punkt i Q er nabo til enten b_0 eller b_2. Da t hverken er nabo eller ikke-nabo til a_0, må antagelsen, om at q_k er ikke-nabo til a_2, være forkert. Altså må q_k være nabo til a_2.
Da ovenstående argumenter kan gennemføres for ethvert trin a_i, P_i, b_i og a_j, P_j, b_j, hvor q_k som udgangspunkt er nabo til a_i og muligvis a_j, fåes det, at q_k er nabo til a_j, og R_i har længde en for

alle trin. Det vil sige, at q_k er komplet til A, og $C = \emptyset$.
Nu er $S' = (A \cup \{t\}, \emptyset, B \cup \{u\})$ en trin-sammenhængende streng i $\overline{G}$, og $K' = (S', b_0, q_k, \ldots, q_1)$ er en trappe i $\overline{G}$, hvilket er i modstrid med, at K er en stærk-maksimal trappe. Derfor må q_k være en højrestjerne, og påstand 2 er vist.

Påstand 3: *Hvis q_1 ikke er nabo til a_0, og q_k ikke er nabo til b_0, så er lemmaet opfyldt.*

Hvis q_1 ikke er nabo til a_0, og q_k ikke er nabo til b_0, så er $a_0, q_1, \ldots, q_k, b_0$ et antihul, og k må være lige. Lad A_1 være de punkter i A, som er naboer til q_k, og lad $A_2 = A - A_1$, det vil sige de punkter fra A, som ikke er nabo til q_k. Lad B_1 være de punkter i B, som er naboer til q_1, og lad $B_2 = B - B_1$. Lad $a_1 \in A_1$ og $b_2 \in B_2$. Da $a_1, b_2, q_1, \ldots, q_k, b_0$ ikke kan være et antihul af ulige længde, må a_1 være nabo til b_2. Da dette gælder for alle valg af a_1 og b_2, må A_1 være komplet til B_2. Tilsvarende er A_2 komplet til B_1.
Hvis både A_1 og B_1 er tomme, hvilket vil sige, at q_1 er antikomplet til B, og q_k er antikomplet til A, så følger det af lemma 12.19 i rapporten, at q_1 er en venstrestjerne, og q_k er en højrestjerne, da hverken q_1 eller q_k er et K-overpunkt eller et K-underpunkt. Det kan derfor antages, at der findes $a_1 \in A_1$. Da a_1 tilhører et trin i G, findes der et punkt i B, som er ikke-nabo til a_1, lad det være b_1. Da a_1 er komplet til B_2, må $b_1 \in B_1$. Da a_1 i forvejen er nabo til $q_1, \ldots, q_{k-1}$, følger det, at a_1 er komplet til Q. Ligeledes er b_1 komplet til Q.
Idet det er antaget, at $\{K, Q\}$ ikke er en 2-afbryder, skal mindst et af punkterne i definition 12.23 i rapporten ikke være opfyldt. Da punkt (i)-(iv) i definition 12.23 i rapporten er opfyldte, må det gælde, at intet punkt i det indre af P_0 er komplet til Q. Hermed er a_1, a_0, P_0, b_0, b_1 en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til Q, og hvis indre punkter ikke er komplette til Q. Ifølge lemma 1.2 indeholder Q et afhop for a_1, a_0, P_0, b_0, b_1. Punkterne $q_2, \ldots, q_{k-1}$ har mindst to naboer i P_0, da de er komplette til $A \cup B \cup \{a_0, b_0\}$, altså kan ingen af disse punkter være en del af afhoppet. Da $q_1, \ldots, q_k$ er en anti 2-vej, og et afhop består af to ikke-nabopunkter, må det gælde, at $k = 2$ og dermed, at q_k, q_1 er afhoppet for a_1, a_0, P_0, b_0, b_1. Men så er $S' = (A \cup \{q_k\}, C, B \cup \{q_1\})$ en trin-sammenhængende streng i G, hvor a_1, q_1 og b_1, q_k er et trin, og $K' = (S', P_0)$ er en trappe i G. Dette danner en modstrid med, at K er en stærk-maksimal trappe. Altså må $A_1 = \emptyset$. Ligeledes kan det vises, at $B_1 = \emptyset$. Dette viser påstand 3.

Påstand 1, påstand 2 og påstand 3 dækker alle tilfælde op til symmetri. □

Følgende svarer til lemma 12.31 i rapporten.

Lemma 8.7
Lad G være en Berge graf, som hverken indeholder en optræden af K_4, en lige prisme, en 1-afbryder eller en 2-afbryder. Lad $K = ((A, C, B), a_0, P_0, b_0)$ være en stærk-maksimal trappe i G. Lad $X : x_1, \ldots, x_t$ være en højrefølge i G, lad b være en højrestjerne i G, lad a, P, b være et b-optimalt gelænder i G, og lad $a, w_1, \ldots, w_n$ være sporet af a. Da er n ulige, og et af følgende vil gælde:

(i) b er det eneste punkt fra P, som er komplet til $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

(ii) P har længde en, og der findes et m, hvor $1 \leq m < n$, så $a, w_1, \ldots, w_m, b$ er en anti 2-vej i G.

◇

Bevis
Beviset føres ved induktion over t. Antag derfor at lemmaet er opfyldt for alle mindre værdier af t. Hvis $w_1 \in \{x_1, \ldots, x_{t-1}\}$, haves en kortere højrefølge, og dermed er lemmaet per antagelse opfyldt. Det kan derfor antages, at $w_1 = x_t$. Lad $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, det vil sige, at W består af punkterne i en højrefølge, så ifølge definition 12.26(i) i rapporten er $\{B, W\}$ et komplet par.

Lad $a_2 \in A$, så a_2 ikke er nabo til w_n, hvor et sådant punkt findes ifølge definition 12.28(ii) i rapporten og lad $b_1 \in B$, så b_1 ikke er nabo til a_2. Da er $b_1, a, w_1, \ldots, w_n, a_2, b_1$ et antihul, da B er komplet til W, så n er ulige.

Det skal nu vises, at et af de to punkter i lemmaet altid vil være opfyldt.

Påstand 1: *Hvis w_n har en nabo i A, så er lemmaet opfyldt.*

Vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så w_n er nabo til a_1 og ikke-nabo til a_2. Så er a_1 og b_2 begge komplette til W, da $b_2 \in B$, og $w_1, \dots, w_{n-1}$ ifølge definition 12.28(iii) i rapporten er komplet til A.
Antag, at der i P findes et punkt, som er komplet til W. Hvis punktet b er det eneste punkt fra P, som er komplet til W, er (i) opfyldt, så det kan antages, at der findes et punkt $v \in P$, hvor $v \neq b$, og v er komplet til W. I G udgør $\{a, a_1, a_2\}$ en trekant, og W kan forbindes til denne via 2-vejen $a, \dots, v$, 2-vejen P_2 samt punktet a_1. Ifølge lemma 1.5 vil ethvert punkt, som er komplet til W, være nabo til a og a_1. Men punktet b_1 er komplet til W og ikke-nabo a, hvilket giver en modstrid. Altså findes der ikke et punkt i $P - \{b\}$, som er komplet til W.

Det kan derfor antages, at der i P ikke findes et punkt, som er komplet til W, for ellers er lemmaet opfyldt. Desuden har P ulige længde mindst tre, da det er et gelænder. Så er a_1, a, P, b, b_2 en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til W, og hvis indre punkter ikke er komplette til W. Antag først, at P har længde mindst to. Dermed er a_1, a, P, b, b_2 en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til W, og hvis indre punkter ikke er komplette til W, og ifølge lemma 1.2 indeholder W et afhop for a_1, a, P, b, b_2. Da $a, w_1, \dots, w_n$ er sporet af a, er w_1 ifølge definition 12.28 i rapporten, det eneste punkt fra W, som ikke er nabo til a. Altså må w_1, w_2 være afhoppet for a_1, a, P, b, b_2. Det vil altså sige, at de eneste kanter, der findes mellem $\{w_1, w_2\}$ og P, er kanterne $w_1 b$ og $w_2 a$. Da n er et ulige tal og $w_1, w_2 \in W$, må $n \geq 3$. Altså findes punktet w_3 i W. Det vil ifølge definition 12.28(iii) i rapporten og definition 12.26(i) i rapporten sige, at w_1 og w_2 er komplette til $A \cup B$. Men så er $S' = (A \cup \{w_2\}, C, B \cup \{w_1\})$ en trin-sammenhængende streng i G og $K' = (S', P)$ er en trappe i G. Dette danner en modstrid med, at K er en maksimal trappe i G.

Det kan derfor antages, at P har længde en. Så findes der en anti 2-vej Q mellem a og b, hvis indre tilhører W, da a og b ikke er komplette til W, og $w_1, \dots, w_n$ udgør en anti 2-vej. Der kan nu dannes et antihul a, Q, b, a_1, b_2, så Q må have ulige længde. Hermed er punkt (ii) opfyldt, og påstand 1 er vist.

Fra påstand 1 kan det nu antages, at w_n ikke har naboer i A. Lad $w_n = x_s$, og ifølge definition 12.26(iii) i rapporten følger det, at der findes et gelænder r', P', w_n, så r' har en ikke-nabo i $\{x_1, \dots, x_{s-1}\}$. Det kan derfor antages, at r', P', w_n er w_n-optimalt gelænder.

Påstand 2: *P' er disjunkt fra P, og der findes ingen kanter mellem $V(P) - a$ og $V(P') - w_n$.*

Antag, at $\langle (V(P) - a) \cup (V(P') - w_n) \rangle_G$ er sammenhængende. Det vil sige, at der findes en 2-vej, som forbinder r' og b, hvis indre tilhører foreningen af det indre af P og det indre af P'. Altså er denne 2-vej et gelænder. Men P er et b-optimalt gelænder, og udgangspunktet for r' er før udgangspunktet for a, idet $w_n = x_s$ er udgangspunktet for a, hvilket giver en modstrid med, at a, P, b er et b-optimalt gelænder. Det vil sige, at $V(P) - a$ er disjunkt fra $V(P') - w_n$, og der findes ingen kanter mellem dem. Da udgangspunktet for a er forskelligt fra udgangspunktet for r', er $a \neq r'$, og da a, P, b er et b-optimalt gelænder, må $b \neq w_n$. Dermed er P disjunkt fra P', hvilket viser påstand 2.

Lad $v_1, \dots, v_m$ være sporet af r', lad $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, og lad $W' = \{a, w_1, \dots, w_{n-1}\}$. Da hvert af $v_1, \dots, v_m$ er før w_n, følger det af definition 12.28 i rapporten, at $v_1, \dots, v_m$ alle er komplette til W' . Ifølge induktionsantagelsen er enten w_n det eneste punkt fra P', som er komplet til V, eller så har P' længde en, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem r' og w_n, hvis indre tilhører V.

Påstand 3: *Hvis $n = 1$, så er lemmaet opfyldt.*

Lad $n = 1$, og vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2. Antag, at a ikke har naboer i P'. Hermed er a komplet til V, og enten er w_1 det eneste punkt fra P', som er komplet til V, eller så har P' længde en, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem r' og w_1, hvis indre tilhører V. Hvis w_1 er det eneste punkt fra P', som er komplet til V, så er a, a_1, r', P', w_1 en 2-vej af ulige længde, hvis

endepunkter er komplette til V, og hvis indre punkter ikke er komplette til V. Desuden er punktet b_2 et punkt, der er komplet til V, men b_2 har ingen naboer i det indre af a, a_1, r', P', w_1, hvilket giver en modstid med korollar 2.3 i rapporten.
Hvis P' har længde en, og der findes en anti 2-vej Q af ulige længde mellem r' og w_1, hvis indre tilhører V, da vil a, r', Q, w_1 være et hul af ulige længde mindst fem. Dermed kan det ikke gælde, at a har ikke-naboer i P'.

Antag, at a har en nabo i P' forskellig fra r'. Så har P' længde mindst to, og w_1 er det eneste punkt fra P', som er komplet til V. Dermed findes der en 2-vej R' fra a til w_1, hvis indre tilhører $V(P') - r'$. Da endepunkterne i R' begge er komplette til V, de indre punkter ikke er komplette til V, og punktet b_1, som er komplet til V, ikke har en nabo i det indre af R', følger det af korollar 2.3 i rapporten, at P' har lige længde. Men så er $w_1, b_1, P_1, a_1, a, R'$ et hul af ulige længde, så derfor kan a ikke have en nabo i P' forskellig fra r'. Dette viser, at r' er det eneste punkt fra P', som er nabo til a. Da $a, r', P', w_1, b_1, b, R$ ikke er et hul af ulige længde, og der ifølge påstand 2 ikke findes kanter mellem $V(P) - a$ og $V(P') - w_1$, må w_1 have mindst en nabo i P. Hvis b er w_1's eneste nabo i P, da er lemmaet opfyldt, så det kan antages, at w_1 har en nabo $u \in P$, hvor $u \neq b$. Så findes der en 2-vej R fra w_1 til a, hvis indre tilhører $V(P) - b$. Da w_1, R, a, r', P' er et hul i G, må R have lige længde, men så er a, a_1, P_1, b_1, w_1, P et hul af ulige længde. Dermed må b være det eneste punkt fra P, som er nabo til w_1, og punkt (i) er opfyldt. Dermed er påstand 3 vist.

Det kan nu antages, at $n \geq 3$, da n er ulige.

Påstand 4: $C = \emptyset$.

Antag, at $C \neq \emptyset$, og vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så P_1 har længde mindst tre. Da G ikke indeholder lige prismer, har P_1 ulige længde, så derfor er a_1, P_1, b_1 en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til $W - w_n$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $W - w_n$. Da b_2 ikke har naboer i det indre af P_1, men er komplet til $W - w_n$, følger det af korollar 2.3 i rapporten, at der må findes et punkt v i det indre af P_1, som er komplet til $W - w_n$, da korollarets konklusioner ikke er opfyldte. Dermed er v ikke-nabo til både a og w_n, da de er henholdsvis en venstrestjerne og en højrestjerne. Da er $v, a, w_1, \ldots, w_n$ et antihul af ulige længde, så derfor må det gælde, at $C = \emptyset$, og påstand 4 er vist.

Påstand 5: *Hvis b ikke er komplet til $W - w_n$, og ingen kant i P er komplet til $W - w_n$, så er lemmaet opfyldt.*

Vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2, så er a_1, a, P, b, b_2 en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til $W - w_n$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $W - w_n$. Hvis P har længde mindst tre, følger det af lemma 1.2, at $W - w_n$ indeholder et afhop for a_1, a, P, b, b_2. Det vil sige, at der findes to ikke-nabopunkter $x, y \in W - w_n$, så x, a, P, b, y er en 2-vej. Men så er $S = (A \cup \{x\}, \emptyset, B \cup \{y\})$ en trin-sammenhængende streng, hvilket er i modstrid med, at K er en maksimal trappe i G. Derfor må P have længde en. Da følger af lemma 1.2, at der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem a og b, hvis indre tilhører W. Dermed er punkt (ii) opfyldt, og påstand 5 er vist.

Påstand 6: *Hvis intet punkt i P er komplet til W, så er lemmaet opfyldt.*

Ifølge påstand 5 kan det antages, at der findes et punkt $v \in P$, som er komplet til $W - w_n$. Dermed er v ikke-nabo til w_n, da intet punkt i P er komplet til W. Da $n \geq 3$, n er ulige, og idet $a, w_1, \ldots, w_n, v$ ikke må være et antihul af ulige længde, er v nabo til a. Da dette skal gælde for ethvert punkt fra P, som er komplet til $W - w_n$, må v være det eneste punkt fra P, som er komplet til $W - w_n$, da $a \in P$, og P er en 2-vej. Da ingen kant i P så er komplet til $W - w_n$, må b ifølge påstand 5 være komplet til $W - w_n$, da lemmaet ellers er opfyldt. Dermed er $v = b$, og P har længde en.
Vælg et trin a_1, P_1, b_1 og a_2, P_2, b_2. Så er $b_1, a, w_1, \ldots, w_n, b$ en anti 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis indre punkter alle har en nabo i $(V(P') - w_n) \cup \{a_2\}$, og hvis endepunkter ikke har en nabo deri. Her er $\langle (V(P') - w_n) \cup \{a_2\} \rangle_G$ sammenhængende, da r' er nabo til a_2. Det betyder, at i $\overline{G}$ haves der nu en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til $(V(P') - w_n) \cup \{a_2\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $((V(P') - w_n) \cup \{a_2\})$. Ved at anvende lemma 1.2 i $\overline{G}$

fåes det, at $((V(P') - w_n) \cup \{a_2\})$ i $\overline{G}$ indeholder et afhop x, y for $b_1, a, w_1, \ldots, w_n, b$. Det betyder, at i G findes der to nabopunkter $x, y \in (V(P') - w_n) \cup \{a_2\}$, så $x, a, w_1, \ldots, w_n, y$ er en anti 2-vej i G. Da x er nabo til w_n, og $x \in (V(P') - w_n) \cup \{a_2\}$, må x være w_n's nabo i P', og da y er nabo til x, og $y \in (V(P') - w_n) \cup \{a_2\}$, må y enten være x's anden nabo i P', eller så vil P' have længde en, det vil sige, at $x{=}r'$, og $y{=}a_2$. Antag først, at P' har længde mindst tre, hvilket vil sige, at både x og y tilhører det indre af P'. Dermed er både x og y antikomplette til $A \cup B$, og så er $K' = ((B \cup \{x\}, \emptyset, A \cup \{y\}), a, w_1, \ldots, w_n)$ en trappe i $\overline{G}$, hvilket er i modstrid med, at K er en stærk-maksimal trappe i G.
Antag, at P' har længde en. Så er $x{=}r'$, $y{=}a_2$ og $((B \cup \{r'\}, \emptyset, A \cup \{b\}), a, w_1, \ldots, w_n)$ er en trappe i $\overline{G}$, hvilket igen giver en modstrid. Når der foretages antagelser for at undgå, at lemmaet er opfyldt, så opnåes en modstrid, hvormed lemmaet må gælde, og påstand 6 er vist.

Det kan nu ifølge påstand 5 og påstand 6 antages, at der findes et punkt i $V(P) - b$, som er komplet til W, for ellers er lemmaet opfyldt. Lad a, L, l være en delgraf af P, så l er det eneste punkt fra L, der er komplet til W. Da $C = \emptyset$ ifølge påstand 4, vil der findes et punkt $a_1 \in A$ som er nabo til $b_1 \in B$. Hermed er l, L, a, a_1, b_1 en 2-vej i G, og $a, w_1, \ldots, w_n, a_1$ er en anti 2-vej af ulige længde. Lemma 1.7 kan nu benyttes, og da både l og b_1 er komplette til $w_1, \ldots, w_n$, er antagelserne opfyldte, så en af de to konklusioner må være gældende. Hvis lemma 1.7(i) gælder, betyder det, at L indeholder mindst tre punkter. Yderligere skal punkterne i afstand to fra a på 2-vejen være komplette til Q, og da l samt b_1 er de eneste punkter fra 2-vejen, som er komplette til Q, må l, L, a, a_1, b_1 have længde fire. Lemma 1.7(ii) kan ikke være opfyldt, da dette punkt kræver, at 2-vejen a, a_1, b_1 indeholder mindst fire punkter.
Dermed følger det af lemma 1.7, at P har længde to, hvilket vil sige, at $P : a, z, b$. Men så er $((B \cup \{p\}, \emptyset, A \cup \{z\}), a, w_1, \ldots, w_n)$ en trappe i $\overline{G}$, så derfor kan der ikke findes et punkt i $V(P) - b$, som er komplet til W. Derfor kan det ifølge påstand 6 antages, at b er komplet til W, og dermed er (i) opfyldt. Hermed er det vist, at enten (i) eller (ii) altid vil gælde. $\square$

Kapitel 9

Familien $\mathcal{F}_5$

Følgende svarer til lemma 14.3 i rapporten.

Lemma 9.1
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$, og lad P være en 2-vej i G af ulige længde. Lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, så begge endepunkter i P er komplette til X. Da vil et af følgende gælde:

(i) *En kant i P er komplet til X.*

(ii) *P har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde, som forbinder de indre punkter i P, hvis indre tilhører X.*

$\diamond$

Bevis
Fra lemma 1.2 gælder, at enten vil en kant i P være komplet til X, P vil have længde mindst fem, og X indeholder et afhop for P, eller P vil have længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde, som forbinder de indre punkter i P med indre tilhørende X. Altså er lemmaet opfyldt, med mindre P har længde mindst fem, og X indeholder et afhop for P. Så antag dette, og lad u, v være et afhop for P, så $u, p_2, \ldots, p_{n-1}, v$ er en 2-vej i G. Da danner 2-vejen p_1, v, 2-vejen u, p_n og 2-vejen $p_2, \ldots, p_{n-1}$ en prisme med trekanter $\{p_1, p_2, u\}$ samt $\{v, p_{n-1}, p_n\}$, og 2-vejen $p_2, \ldots, p_{n-1}$ har længde mindst tre, hvormed der findes en aflang prisme. Dette danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, da G per definition 14.1 i rapporten ikke må indeholde en aflang prisme. $\square$

Følgende svarer til lemma 14.4 i rapporten.

Lemma 9.2
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i G af lige længde mindst to, så p_1 er det eneste punkt i P, som er komplet til X, og p_n er det eneste punkt i P, som er komplet til Y. Da har P længde to, og der findes en anti 2-vej Q mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X. Desuden findes der en anti 2-vej R mellem p_1 og p_2, hvis indre tilhører Y, og nøjagtig en af Q eller R har ulige længde. $\diamond$

Bevis
Antagelserne i lemma 1.6 er opfyldte, og der haves dermed tre muligheder for strukturen af P. Hvis lemma 1.6(i) er gældende, har P længde mindst fire, og der findes to ikke-naboer $x_1, x_2 \in X$, så $P' : x_1, p_2, \ldots, p_n, x_2$ er en 2-vej. Dermed har P' ulige længde mindst fem. Endepunkterne x_1 og x_2 i P' er komplette til $Y \cup \{p_1\}$, og ingen indre punkter i P' er komplette til $Y \cup \{p_1\}$, hvilket

danner modstrid med lemma 9.1.
Hvis lemma 1.6(ii) er gældende, vil der findes ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så $y_1, p_1, \ldots, p_{n-1}, y_2$ er en 2-vej, og der opnåes analogt med før en modstrid. Altså må lemma 1.6(iii) gælde. Da har P længde to, og der findes en anti 2-vej Q mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X, og der findes en anti 2-vej R mellem p_1 og p_2, hvis indre tilhører Y, og nøjagtig en af Q og R har ulige længde. □

Følgende svarer til lemma 14.9 i rapporten.

Lemma 9.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_5$, lad $\{A, B, C, D\}$ være en maksimal kube i G, som danner K, lad $F \subseteq V(G) - V(K)$ være en sammenhængende mængde af K-underpunkter, og lad X være mængden af vedhæftninger for F i $V(K)$. Da er X en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Yderligere er $X \cap (A \cup C)$ komplet til $X \cap (B \cup D)$. ◇

Bevis
Antag, at X ikke er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$, og vælg F mindst mulig, så X ikke er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$. Da alle punkter i F er K-underpunkter, er lemmaet ifølge lemma 14.7 i rapporten opfyldt, hvis $|F| = 1$. Det kan derfor antages, at $|F| \geq 2$. Desuden kan det antages, at X har punkter i både A og D. Da F er valgt mindst mulig, vil F være en 2-vej $f_1, \ldots, f_k$, hvor $k \geq 2$. Det kan antages, at f_1 er det eneste punkt i F med en nabo i A, og f_k er det eneste punkt i F med en nabo i D, for ellers kunne F vælges mindre. Lad X_1 og X_2 være mængden af vedhæftninger for henholdsvis $F - \{f_k\}$ og $F - \{f_1\}$ i K. Da F er valgt mindst mulig, og f_1 har en nabo i A, må X_1 være en delmængde af en af $A \cup B$ eller $A \cup C$, og ligeledes da f_k har en nabo i D, må X_2 være en delmængde af en af $B \cup D$ eller $C \cup D$.

Påstand 1: *Ikke både $X_1 \subseteq A \cup B$ og $X_2 \subseteq B \cup D$.*

Antag, at både $X_1 \subseteq A \cup B$ og $X_2 \subseteq B \cup D$.

Hvis k er lige, så vælg et $a \in A$, som er nabo til f_1, og vælg et $d \in D$, som er nabo til f_k. Vælg desuden en nabo $c \in C$ til d. Da er $a, f_1, \ldots, f_k, d, c$ et hul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at G er en Berge graf, idet $G \in \mathcal{F}_5$. Det vil sige, at k er ulige.

Antag, at f_1 er komplet til A. Da $\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende, er intet punkt i B komplet til A. Idet f_1 er et K-underpunkt, hvormed $X \cap (A \cup C)$ er komplet til $X \cap (B \cup D)$, har f_1 ikke en nabo i B. Hvis der ikke findes kanter mellem B og F, så lad a_1, b_1, b_2, a_2 være en firkant, og lad $d \in D$ være nabo til f_k, hvormed 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen $f_1, \ldots, f_k, d$ danner en aflang prisme med trekanter $\{a_1, a_2, f_1\}$ og $\{b_1, b_2, d\}$, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$. Altså må der findes kanter mellem B og F. Vælg i, hvor $1 \leq i \leq k$, mindst muligt, så f_i har en nabo i B. Hvis f_i ikke er komplet til B, så vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så f_i er nabo til b_1, men ikke er nabo til b_2. Da kan b_1 forbindes til trekanten $\{f_1, a_1, a_2\}$ via 2-vejen $b_1, f_i, \ldots, f_1$, 2-vejen b_1, a_1 og 2-vejen b_1, b_2, a_2, hvilket danner modstrid med lemma 2.9 i rapporten, da b_1 ikke er nabo til hverken f_1 eller a_2. Det vil sige, at f_i er komplet til B. Lad a_1, b_1, b_2, a_2 være en firkant, da danner 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen $f_1, \ldots, f_i$ en prisme, og da $G \in \mathcal{F}_5$, må det ikke være en aflang prisme, så $i = 2$. Da k er ulige, må $k \geq 3$. Dermed kan f_1 tilføjes C, og f_2 kan tilføjes D, hvor f_1 og f_2 tilhører en antifirkant, da f_1 og f_2 begge har ikke-naboer i C og D, da $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende, og $X \cap C$ er komplet til $X \cap D$. Dette danner modstrid med, at K er maksimal, og hermed er påstand 1 vist, når f_1 er komplet til A.
Antag, at f_1 ikke er komplet til A. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så f_1 er nabo til a_1, men ikke er nabo til a_2. Vælg desuden $d \in D$, så f_k er nabo til d. Idet $a_1, f_1, \ldots, f_k, d, b_2, a_2$ ikke må være et hul af ulige længde, så har b_2 en nabo i F. Vælg i, hvor $1 \leq i \leq k$, mindst muligt, så b_2 er nabo til f_i. Lad $c \in C$ og $d \in D$ være et vilkårligt par af nabopunkter, da vil 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d danne en prisme. Idet mængden af vedhæftninger for $\{f_1, \ldots, f_i\}$ i prismen ikke er lokal med hensyn til prismen, og a_1 og b_2 tilhører mængden af vedhæftninger, og a_2 ikke er en vedhæftning, vil F ifølge korollar 7.3 have en vedhæftning i 2-vejen c, d af prismen. Da C per

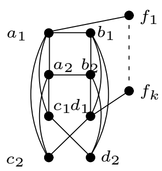
antagelse i denne påstand ikke har vedhæftninger for F, må $i = k$, og f_k er komplet til D, da d er valgt vilkårligt. Lad igen $c \in C$ og $d \in D$ være nabopunkter, da vil 2-vejen $a_1, f_1, \ldots, f_k$, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d danne en aflang prisme, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, hvormed påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup C$ *og* $X_2 \subseteq C \cup D$.

Antag, at både $X_1 \subseteq A \cup C$ og $X_2 \subseteq C \cup D$. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så f_1 er nabo til a_1, og vælg $d \in D$, så f_k er nabo til d. Hvis a_2 er nabo til f_1, så danner 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen $f_1, \ldots, f_k, d$ en aflang prisme, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, så a_2 er ikke-nabo til f_1. Dermed kan a_1 forbindes til trekanten $\{b_1, b_2, d\}$ via 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_1, a_2, b_2 og 2-vejen $a_1, f_1, \ldots, f_k, d$, hvilket ifølge korollar 7.3 danner en modstrid, da a_1 hverken er nabo til b_2 eller d. Dette viser påstand 2.

Påstand 3: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup B$ *og* $X_2 \subseteq C \cup D$.

Antag, at $X_1 \subseteq A \cup B$ og $X_2 \subseteq C \cup D$. Da er $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, hvormed f_1 er det eneste punkt i F, som har naboer i X_1, og f_k er det eneste punkt i F, som har naboer i X_2. Fra påstand 1 er $X_2 \not\subseteq B \cup D$, så $X_2 \cap C \neq \emptyset$. Fra påstand 2 er $X_1 \not\subseteq A \cup C$, så $X_1 \cap B \neq \emptyset$. Desuden er $X_1 \cap A \neq \emptyset$, og $X_2 \cap D \neq \emptyset$, da det er antaget, at X har punkter i både A og D. Lad $a_1 \in A \cap X_1$, og lad $c_1 \in C \cap X_2$. Da $a_1, f_1, \ldots, f_k, c_1$ er et hul, må k være lige. Idet f_1 er et K-underpunkt, vil $X_1 \cap A$ ifølge lemma 14.7(i) i rapporten være komplet til $X_1 \cap B$, og da A og B ikke er et komplet par, vil alle punkter i A og alle punkter i B ikke tilhøre X_1. Ligeledes er f_k et K-underpunkt, hvormed lemma 14.7(i) i rapporten giver, at $X_2 \cap C$ er komplet til $X_2 \cap D$, så alle punkter i C og alle punkter i D tilhører ikke X_2. Det vil sige, at alle otte mængder $A \cap X_1, A - X_1, B \cap X_1, B - X_1, C \cap X_2, C - X_2, D \cap X_2$ og $D - X_2$ er ikke-tomme. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så f_1 er nabo til a_1, men ikke er nabo til a_2, og vælg en antifirkant c_1, d_1, d_2, c_2, så f_k er nabo til d_1, men ikke er nabo til d_2, se figur 9.1.



Figur 9.1: Firkanten a_1, b_1, b_2, a_2, hvor f_1 er nabo til a_1 og ikke-nabo til a_2, samt antifirkanten c_1, d_1, d_2, c_2, hvor f_k er nabo til d_1 og ikke-nabo til d_2.

Idet $X_1 \cap A$ er komplet til $X_1 \cap B$, er f_1 ikke-nabo til b_2, og idet $X_2 \cap C$ er komplet til $X_2 \cap D$, er f_k ikke-nabo til c_1. Da er $a_1, f_1, \ldots, f_k, d_1, b_2, d_2, c_1$ et hul af ulige længde, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, hvormed påstand 3 er vist.

Påstand 4: *Ikke både* $X_1 \subseteq A \cup C$ *og* $X_2 \subseteq B \cup D$.

Antag, at både $X_1 \subseteq A \cup C$ og $X_2 \subseteq B \cup D$. Som i beviset for påstand 3 er $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, så f_1 er det eneste punkt i F, der har naboer i X_1, og f_k er det eneste punkt fra F, der har naboer i X_2. Fra påstand 2 er $X_2 \not\subseteq C \cup D$, så $X_2 \cap B \neq \emptyset$. Fra påstand 1 er $X_1 \not\subseteq A \cup B$, så $X_1 \cap C \neq \emptyset$. Desuden er $X_1 \cap A \neq \emptyset$ og $X_2 \cap D \neq \emptyset$, da det er antaget, at X har punkter i både A og D.
Antag, at k er ulige. Lad $a \in A \cap X_1$, og lad $b \in B \cap X_2$. Hvis a og b er naboer, så er $a, f_1, \ldots, f_k, b$ et hul af ulige længde, og en modstrid er opnået, hvormed a og b er ikke-naboer. Dermed er $A \cap X_1$ antikomplet til $B \cap X_2$. Da $\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende, vil der findes kanter mellem A og B, så $A - X_1$ og $B - X_2$ er begge ikke-tomme. Ligeledes hvis $c \in X_1 \cap C$ og $d \in X_2 \cap D$ er naboer, så er $c, f, \ldots, f_k, d$ et hul af ulige længde, hvormed c og d er ikke-naboer. Da $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende, vil der findes kanter mellem C og D, hvormed $C - X_2$ og $D - X_2$ begge er ikke-tomme. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så f_1 er nabo til a_1, men ikke er nabo til a_2, og vælg en antifirkant c_1, d_1, d_2, c_2, så f_k er nabo til d_1, men ikke er nabo til d_2. Da $a_1, f_1, \ldots, f_k, d_1, b_2, a_2$ ikke må være et hul af ulige længde, vil $b_2 \in X_2$. Da $A \cap X_1$ er antikomplet til $B \cap X_2$, vil $a_2 \notin X_1$, og da $C \cap X_1$ er komplet til $D \cap X_2$, vil $c_2 \notin X_1$. Her danner 2-vejen a_2, b_2, 2-vejen c_2, d_1 og 2-vejen

$a_1, f_1, \ldots, f_k$ en aflang prisme, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, hvormed k ikke er ulige. Antag, at k er lige. Lad $a \in A \cap X_1$, lad $b \in B - X_2$, hvis $B - X_2 \neq \emptyset$, og lad $d \in D \cap X_2$. Hvis a og b er naboer, så er $a, f_1, \ldots, f_k, d, b$ et hul af ulige længde, hvormed $A \cap X_1$ er antikomplet til $B - X_2$, og hvis $B - X_2 = \emptyset$, så kan det siges, at $A \cap X_2$ er antikomplet til $B - X_2$. Ligeledes er $A - X_1$ antikomplet til $B \cap X_2$, $C \cap X_1$ er antikomplet til $D - X_2$, og $C - X_1$ er antikomplet til $D \cap X_2$. Vælg $a \in A \cap X_1$, og vælg en nabo $b \in B$ til a, da vil $b \in X_2$, da $A \cap X_1$ er antikomplet til $B - X_2$. Vælg ligeledes $c \in C \cap X_1$ og $d \in D \cap X_2$, så de er naboer. Disse kan vælges, da $C \cap X_2 = \emptyset$, og $\{C, D\}$ er antifirkants-sammenhængende. Da vil 2-vejen a, b, 2-vejen c, d og 2-vejen $f_1, \ldots, f_k$ danne en prisme, hvormed $k = 2$, da det ikke må være en aflang prisme. Hvis f_1 er komplet til C, så idet $C \cap X_1 = C$ er antikomplet til $D - X_2$, er $f_k = f_2$ komplet til D. Nu kan f_1 tilføjes A, og f_2 kan tilføjes B, hvor a, f_1, f_2, b er en firkant, hvilket danner modstrid med, at kuben K er maksimal. Altså er f_1 ikke komplet til C, og $C - X_1 \neq \emptyset$. Vælg en antifirkant c_1, d_1, d_2, c_2, så f_1 er nabo til c_1, men ikke er nabo til c_2. Da er f_2 nabo til d_2, men ikke-nabo til d_1, da $C \cap X_1$ er antikomplet til $D - X_2$, og $C - X_1$ er antikomplet til $D \cap X_2$. Hvis f_1 er komplet til A, så idet $A \cap X_1 = A$ er antikomplet til $B - X_2$, er $f_k = f_2$ komplet til B, da $\{A, B\}$ er firkants-sammenhængende. Nu kan f_1 tilføjes C, og f_2 kan tilføjes D, hvor f_1, d_1, f_2, c_2 er en ny antifirkant, hvilket danner modstrid med, at kuben K er maksimal. Det vil sige, at f_1 har en ikke-nabo i A, og en firkant a_1, b_1, b_2, a_2 kan vælges, så f_1 er nabo til a_1, men ikke er nabo til a_2. Da $A \cap X_1$ er antikomplet til $B - X_2$, og $A - X_1$ er antikomplet til $B \cap X_2$, vil f_2 være nabo til b_1 og ikke-nabo til b_2. Da danner $a_1, f_1, f_2, d_2, b_2, d_1, c_2$ et hul af ulige længde, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$, hvormed påstand 4 er vist.

Fra påstand 1, påstand 2, påstand 3 og påstand 4 vil der i alle tilfælde opnåes en modstrid med antagelsen om, at X har punkter i både A og D, så der må gælde, at X er en delmængde af en af $A \cup B, C \cup D, A \cup C$ eller $B \cup D$.

Det skal nu vises, at $X \cap (A \cup C)$ er komplet til $X \cap (B \cup D)$.
Det kan antages, at X har punkter i både $A \cup C$ og $B \cup D$, for ellers er lemmaet opfyldt. Da følger fra første del af lemmaet, at enten er $X \subseteq C \cup D$, eller så er $X \subseteq A \cup B$.
Antag, at $X \subseteq C \cup D$. Hvis det er muligt, så vælg $c \in C \cap X$ og $d \in D \cap X$, så de ikke er naboer, og vælg en 2-vej P, som forbinder dem, og hvis indre tilhører F. Dermed har P længde mindst to. Lad a_1, b_1, b_2, a_2 være en firkant. Da vil 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, P, d danne en aflang prisme, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_5$. Det vil sige, at der ikke findes punkter c og d, så de ikke er naboer, hvormed lemmaet er opfyldt.
Antag, at $X \subseteq A \cup B$. Antag, at $X \cap A$ ikke er komplet til $X \cap B$, og vælg en 2-vej $a, f_1, \ldots, f_k, b$, hvor $a \in A$ og $b \in B$ ikke er naboer, og $f_1, \ldots, f_k \in F$, hvor k er mindst muligt. Idet f_1 er et K-underpunkt, er f_1's naboer i A ifølge lemma 14.7 i rapporten komplette til f_1's naboer i B, så $k \geq 2$, og f_1 er ikke-nabo til b. Lad A' være mængden af punkter $a \in A$, så a er nabo til f_1, og der findes en ikke-nabo $b \in B$ til a, hvor b er nabo til f_k. Da det er antaget, at $X \cap A$ ikke er komplet til $X \cap B$, er $A' \neq \emptyset$. Definér B' analogt i B. Hvis $A' = A$ og $B' = B$, så er f_1 komplet til A, og da F er valgt mindst mulig, findes der ikke kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ og B, og ligeledes er f_k komplet til B, og der findes ikke kanter mellem $\{f_2, \ldots, f_k\}$ og A. Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2. Da danner 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen $f_1, \ldots, f_k$ en prisme, så $k = 2$, da der ikke må findes aflange prismer i G. Da kan f_1 tilføjes C, og f_2 kan tilføjes D, hvilket danner modstrid med, at kuben K er maksimal. Det kan derfor antages, at $A' \neq A$.
Vælg en firkant a_1, b_1, b_2, a_2, så $a_1 \in A'$ og $a_2 \notin A'$. Vælg $c \in C$ og $d \in D$, så de er naboer. Vælg $b \in B'$, som er ikke-nabo til a_1, og en sådan vil findes per definition af A'. Da k er mindst mulig, vil $a_1, f_1, \ldots, f_k, b$ være en 2-vej, og da $a_1, f_1, \ldots, f_k, b, d, c$ er et hul, må k være lige. Idet b ikke er nabo til a_1, er $b \neq b_1$. Antag, at f_k er nabo til b_2. Mængden af vedhæftninger for $\{f_1, \ldots, f_k\}$ med hensyn til prismen dannet af 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d er ikke lokal med hensyn til prismen, og der findes ikke vedhæftninger for c og d, så fra korollar 7.3 er både a_2 og b_1 vedhæftninger. Idet a_2 og b_1 ikke er naboer, følger, af at k er valgt mindst muligt og lemma 10.6 i rapporten, at a_2 er nabo til f_1, og b_1 er nabo til f_k, hvilket danner modstrid med, at $a_2 \notin A'$. Det vil sige, at f_k ikke er nabo til b_2, hvormed $b \neq b_2$, da $b \in B'$. Idet c ikke har en nabo i den sammenhængende mængde $F' = \{f_1, \ldots, f_k, b\}$, og mængden af vedhæftninger for F' ikke er lokal

med hensyn prismen dannet af 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d, følger det af korollar 7.3, at F' har en vedhæftning i 2-vejen a_2, b_2. Hvis a_2 ikke er en vedhæftning, må b_2 være det, og da k er valgt mindst muligt, må b være den eneste nabo til b_2 i F', men da danner 2-vejen $a_1, f_1, \ldots, f_k, b$, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d en aflang prisme, og en modstrid er nået. Altså må a_2 være en vedhæftning for F'. Idet $a_2, a_1, f_1, \ldots, f_k, b$ ikke må være et hul af ulige længde, har a_2 en nabo i $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Hvis b_1 også har en nabo i $\{f_1, \ldots, f_k\}$, så følger det, af at k er valgt mindst muligt og lemma 10.6 i rapporten, da a_2 og b_1 ikke er naboer, at a_2 er nabo til f_1, og b_1 er nabo til f_k, hvormed $a_2 \in A'$, og en modstrid er opnået. Det vil sige, at b_1 ikke har en nabo i $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Idet $a_1, f_1, \ldots, f_k, b, b_1$ ikke må være et hul af ulige længde, er b_1 ikke-nabo til b, hvormed b_1 ikke har naboer i F'. Lad P være 2-vejen mellem a_2 og b med indre i F'. Fra korollar 7.3 har a_1 en nabo i $P - \{a_2\}$. Den eneste nabo til a_1 i F' er f_1, så f_1 tilhører $P - \{a_2\}$, hvormed f_1 er nabo til a_2, og der findes ikke andre kanter mellem a_2 og F'. Idet $a_2 \notin A'$, er a_2 nabo til b. Da er mængden af naboer til b i prismen dannet af 2-vejen a_1, b_1, 2-vejen a_2, b_2 og 2-vejen c, d ikke lokal med hensyn til prismen, og ingen vedhæftninger tilhører 2-vejen a_1, b_1, hvilket danner modstrid med korollar 7.3. Dermed må antagelsen, om at $X \cap A$ ikke er komplet til $X \cap B$, være forkert. $\square$

Kapitel 10

Familien $\mathcal{F}_6$

Følgende svarer til lemma 15.6 i rapporten.

Lemma 10.1
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, og lad $p_1, \ldots, p_m$ være en 2-vej i G. Lad $2 \leq s \leq m-2$, og lad $p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ være en anti 2-vej af længde mindst tre. Antag, at p_1 og p_m begge er naboer til alle af $q_1, \ldots, q_n$. Da er n lige, og $m = 4$. $\diamond$

Bevis
Hvis n er lige, så er $p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ en anti 2-vej af ulige længde, hvor p_1 og p_m er komplette til det indre af anti 2-vejen. Hvis p_1 ikke er nabo til hverken p_s eller p_{s+1}, så haves et antihul $p_1, p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ af ulige længde, og ligeledes med p_m. Det vil sige, at p_1 og p_m begge er nabo til enten p_s eller p_{s+1}. Dermed er $s = 2$ og $m = s + 2$, hvormed $m = 4$.
Antag, at n er ulige. Da er $p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ en anti 2-vej af lige længde mindst fire, hvor p_{s+1} er antikomplet til $\{p_1, \ldots, p_{s-1}\}$, og p_s er antikomplet til $\{p_{s+2}, \ldots, p_n\}$, hvilket danner modstrid med lemma 9.2 anvendt i komplementet $\overline{G}$, da lemma 9.2 giver, at $p_s, q_1, \ldots, q_n, p_{s+1}$ har længde to.
Det vil sige, at n ikke kan være ulige, og n dermed altid er lige. $\square$

Følgende svarer til lemma 15.7 i rapporten.

Lemma 10.2
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, lad C være et hul i G, og lad $X \subseteq V(G) - V(C)$ være en antisammenhængende mængde. Lad P være en 2-vej i C af længde mindst to, så 2-vejens endepunkter er komplette til X, og ingen af dens indre punkter er komplette til X. Da har P lige længde. $\diamond$

Bevis
Hvis C har længde fire, hvilket er den mindste længde for et hul, så har P længde to, da den ellers ikke er en 2-vej af længde mindst to. Det kan derfor antages, at C har længde mindst seks. Desuden kan det antages, at P har ulige længde, for ellers er lemmaet opfyldt.
Lad $C : p_1, \ldots, p_n$, og lad $P : p_1, \ldots, p_k$, hvor $3 \leq k \leq n-1$. Da P har ulige længde, vil det sige, at k er lige. Fra lemma 9.1 vil P have længde tre, hvormed $k = 4$. Fra korollar 2.3 i rapporten vil ethvert punkt, der er komplet til X, være nabo til p_2 eller p_3, så der findes ingen punkter blandt $\{p_5, \ldots, p_n\}$, som er komplette til X, da C er et hul. Dermed er $p_4, p_5, \ldots, p_n, p_1$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Da følger af lemma 9.1, at denne 2-vej også har længde tre, hvormed $n = 6$. Lad Q være den korteste anti 2-vej, hvis indre tilhører X, og som forbinder enten p_2 og p_3 eller p_5 og p_6. Af symmetrigrunde kan det antages, at Q har punkter $p_2, q_1, \ldots, q_m, p_3$. Da Q danner et antihul med p_3, p_1, p_4, p_2, må Q have ulige længde. Da p_5, p_2, Q, p_3 ikke må være et antihul, må p_5 have en ikke-nabo i det indre

af Q, og ligeledes må p_6 have en ikke-nabo i det indre af Q. Da Q er valgt kortest mulig, og p_5 samt p_6 begge må have én ikke-nabo i det indre af Q, vil den ene være ikke-nabo til q_1, og den anden vil være ikke-nabo til q_m. Antag, at $m \geq 3$. Hvis p_5 er ikke-nabo til q_1, så vil anti 2-vejen $q_1, \ldots, q_m$, anti 2-vejen p_6, p_3 og anti 2-vejen p_2, p_5 danne en aflang prisme i $\overline{G}$, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Hvis p_5 er ikke-nabo til q_m, så danner anti 2-vejen $q_1, \ldots, q_m$, anti 2-vejen p_6, p_3 og anti 2-vejen p_2, p_5 en aflang prisme i $\overline{G}$, og igen er det en modstrid. Det vil sige, at $m = 2$. Da er $\langle p_1, \ldots, p_6, q_1, q_2 \rangle_G$ lig $L(K_{3,3} - e)$, hvis p_5 er ikke-nabo til q_1, og $\langle p_1, \ldots, p_6, q_1, q_2 \rangle_G$ danner en dobbeltdiamant, hvis p_5 er ikke-nabo til q_2, hvilket igen giver en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Altså må antagelsen, om at P har ulige længde, være forkert. □

Følgende svarer til lemma 15.8 i rapporten.

Lemma 10.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, lad $C : p_1, \ldots, p_m$ være et hul i G af længde mindst seks, og lad $Q : p_1, q_1, \ldots, q_n, p_2$ være en anti 2-vej af lige længde mindst fire. Da findes højst et punkt i $\{p_3, \ldots, p_m\}$, der er komplet til enten $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ eller $\{q_2, \ldots, q_n\}$, og dette punkt er enten p_3 eller p_m. ◇

Bevis
Antag, at et af punkterne $q_1, \ldots, q_n$ tilhører hullet C, lad det være q_j, hvor $1 \leq j \leq n$. Idet q_j er nabo til mindst et af p_1 eller p_2, da Q er en anti 2-vej, kan det antages, at $q_j = p_m$. Idet p_m er ikke-nabo til p_2, må $p_m = q_n$. Da q_1 og q_n er naboer, og p_2 og q_1 er naboer, kan der ikke findes flere punkter i C, som tilhører Q. Punktet p_m kan godt være komplet til enten $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ eller $\{q_2, \ldots, q_n\}$, så længe der ikke findes et punkt i $\{p_3, \ldots, p_{m-1}\}$, som er komplet til en af de to mængder.
Antag, at der findes et i, hvor $3 \leq i \leq m-1$, så p_i er komplet til enten $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ eller $\{q_2, \ldots, q_n\}$. Hvis $i < m-1$, så er p_i ikke-nabo til $p_m = q_n$, og dermed må p_i være komplet til $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$. Da danner $p_i, p_1, q_1, \ldots, q_n$ et antihul af ulige længde, så $i = m-1$. Hvis p_{m-1} er komplet til $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$, så vil 2-vejen p_{m-1}, p_m, p_1, p_2 opfylde antagelserne i lemma 10.2, hvormed 2-vejen har lige længde. Dette giver dog en modstrid, da 2-vejen har ulige længde, så p_{m-1} er ikke komplet til $\{q_1, \ldots, q_{n-1}\}$, hvormed p_{m-1} må være komplet til $\{q_2, \ldots, q_n\}$ og ikke-nabo til q_1. Da danner $p_2, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_n$ et antihul af ulige længde, hvilket ikke må forekomme i $G \in \mathcal{F}_6$, så en modstrid er opnået, hvormed der ikke må findes et sådant i. Lemmaet er dermed opfyldt i det tilfælde, hvor $|V(Q) \cap V(C)| > 2$.

Det kan derfor antages, at intet af punkterne $q_1, \ldots, q_n$ tilhører C. Lad $X = \{q_1, \ldots, q_n\}$, og lad Y_1 og Y_2 være mængden af punkter i $\{p_3, \ldots, p_m\}$, som er komplette til $X - q_n$ henholdsvis $X - q_1$.

Påstand 1: $Y_1 \subseteq Y_2 \cup \{p_m\}$ *og* $Y_2 \subseteq Y_1 \cup \{p_3\}$.

Antag, at der findes et i, hvor $3 \leq i \leq m$, så $p_i \in Y_1$ og $p_i \notin Y_2$. Da p_i er komplet til $X - q_n$, og $Q - \{p_2\}$ er en anti 2-vej af ulige længde, vil $Q - \{p_2\}$ sammen med kanterne $p_i q_n$ og $p_i p_1$ danne et antihul af ulige længde, hvis $i \neq m$. Da $G \in \mathcal{F}_6$, må $i = m$, så $Y_1 \subseteq Y_2 \cup \{p_m\}$.
Ligeledes kan det vises, at $Y_2 \subseteq Y_1 \cup \{p_3\}$, og påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Hvis* $Y_1 \not\subseteq \{p_m\}$*, så vil* $p_3 \in Y_1 \cap Y_2$*, og hvis* $Y_2 \not\subseteq \{p_3\}$*, så vil* $p_m \in Y_1 \cap Y_2$.

Antag, at $Y_1 \not\subseteq \{p_m\}$. Vælg i, hvor $3 \leq i \leq m-1$, mindst muligt, så $p_i \in Y_1$. Fra påstand 1 vil $p_i \in Y_2$, så det kan antages, at $i > 3$, for ellers er påstanden opfyldt.
Fra lemma 10.2 anvendt på den antisammenhængende mængde $X - q_n$ følger det, at i er lige. Her er 2-vejen $p_1, \ldots, p_i$ af ulige længde, og dens endepunkter er komplette til $X - q_1$. Da følger det af lemma 10.2, at 2-vejens indre indeholder et punkt, som er komplet til $X - q_1$, lad det være p_h. Da i er valgt mindst muligt, må $p_h \notin Y_1$, så fra påstand 1 er $h = 3$, og fra lemma 10.2 anvendt på 2-vejen $p_3, \ldots, p_i$ følger det, at $i = 4$. Vælg j, hvor $4 \leq j \leq m$, størst muligt, så $p_j \in Y_2$. Fra påstand 1 er p_j komplet til X. Fra lemma 10.1 anvendt på $p_j, \ldots, p_m, p_1, \ldots, p_4$ følger det, at $j \leq 5$, hvormed $j \neq m$. Fra lemma 10.2 anvendt på 2-vejen $p_j, \ldots, p_m, p_1$ og den antisammenhængende mængde $X - q_n$ følger, at der findes et k, hvor $6 \leq k \leq m$, så $p_k \in Y_1$. Idet p_k ikke tilhører Y_2, følger det af

påstand 1, at $k = m$, hvormed $p_m \in Y_1 - Y_2$. Men da danner $p_3, q_1, \ldots, q_n, p_m$ et antihul af ulige længde, hvilket danner modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Altså må antagelsen, om at $i > 3$, være forkert, hvormed $i = 3$, og påstand 2 er opfyldt. Ligeledes hvis $Y_2 \not\subseteq \{p_3\}$, vil $p_m \in Y_1 \cap Y_2$. Dermed er påstand 2 vist.

Ikke både p_3 og p_m tilhører $Y_1 \cap Y_2$, for så vil Q danne et antihul af ulige længde med p_2, p_m, p_3, p_1. Det kan derfor antages, at $p_3 \notin Y_1 \cap Y_2$, og så følger af påstand 2, at $Y_1 \subseteq \{p_m\}$. Fra påstand 1 er $Y_2 \subseteq \{p_3\} \cup Y_1$, hvormed $Y_1 \cup Y_2 \subseteq \{p_3, p_m\}$. Det kan derfor antages, at $Y_1 \cup Y_2 = \{p_3, p_m\}$, altså at både p_3 og p_m er komplette til $X - q_n$ eller $X - q_1$, for ellers er lemmaet opfyldt. Specielt vil $p_3 \in Y_2$, da $p_3 \notin Y_1 \cup Y_2$ og $Y_1 \subseteq \{p_m\}$. Hvis yderligere $p_m \in Y_2$, så er $p_3, p_4, \ldots, p_m$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til $X - q_1$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $X - q_1$, hvilket danner modstrid med lemma 10.2, idet $m \geq 6$. Dermed vil $p_m \notin Y_2$, og så vil $p_m \in Y_1$, men da er $p_3, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_m$ et antihul af ulige længde, og en modstrid er opnået. Det vil sige, at under antagelse af, at $p_3 \notin Y_1 \cap Y_2$, så er p_3 komplet til $X - q_1$, og ikke andre punkter er komplette til $X - q_n$ eller $X - q_1$. Hvis den anden mulighed antages, altså at $p_m \notin Y_1 \cap Y_2$, så fremkommer, at p_m er komplet til $X - q_n$, og ikke andre punkter er komplette til $X - q_n$ eller $X - q_1$. □

Følgende svarer til lemma 15.15 i rapporten.

Lemma 10.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_6$, og lad $\{C, Y\}$ være et hjul i G. Lad $F \in V(G) - (V(C) \cup Y)$ være sammenhængende, så intet punkt i F er komplet til Y, og lad $X \subseteq V(C)$ være mængden af vedhæftninger for F i C. Antag, at der findes punkter i X, der har ulige hjulparitet, og der findes to punkter i X, der ikke er naboer. Da vil et af følgende gælde:

(i) *Der findes et punkt $v \in F$, så $\{C, Y \cup \{v\}\}$ er et hjul.*

(ii) *Der findes et punkt $v \in F$ med mindst fire naboer i C, og en 2-vej i C bestående af tre punkter p_1, p_2 og p_3, så de alle er komplette til $Y \cup \{v\}$, og alle andre naboer til v i C har lige hjulparitet med p_1.*

(iii) *Der findes en 2-vej p_1, p_2, p_3 i C, hvor p_1, p_2 og p_3 alle er komplette til Y, og en 2-vej $p_1, f_1, \ldots, f_k, p_3$ med indre i F, så der ikke findes kanter mellem $\{f_1, \ldots, f_k\}$ og $\{p_4, \ldots, p_n\}$.*

◇

Bevis
Antag, at F er minimal, så der findes punkter i X, der har ulige hjulparitet, og der findes ikke-nabopunkter i X. Hvis $|F| = 1$, så følger resultatet af lemma 15.14(iii) i rapporten. Det kan derfor antages, at $|F| \geq 2$.

Påstand 1: *Hvis X ikke indeholder ikke-nabopunkter, så er lemmaet opfyldt.*

Da det er antaget, at der findes punkter i X, der har ulige hjulparitet, og der findes to punkter i X, der ikke er naboer, må de punkter i X, der har ulige hjulparitet, være naboer. Lad C bestå af $p_1, \ldots, p_n$, og lad de to nabopunkter af ulige hjulparitet være p_1 og p_2. Det vil sige, at p_1 og p_2 begge er komplette til Y. Da det er antaget, at der findes to punkter i X, der ikke er naboer, findes der i C en tredje vedhæftning for F. Lad denne vedhæftning være p_i, for $3 \leq i \leq n$. Lad p_i være ikke-nabo til p_1. Hvis p_2 og p_i har lige hjulparitet, vil p_1 og p_i have ulige hjulparitet. Dette er dog ikke muligt, da p_i og p_1 ikke er naboer, og punkter af ulige hjulparitet er naboer. Dermed kan det antages, at p_2 og p_i har ulige hjulparitet, hvormed p_1 og p_i har lige hjulparitet. Dermed er p_2 og p_i naboer. Det vil sige, at $i = 3$, og p_3 er komplet til Y. Antag, at F har en fjerde vedhæftning p_j, for $4 \leq j \leq n$. På grund af symmetri kan det antages, at $j \neq n$, og dermed er p_j ikke-nabo til både p_1 og p_2. Desuden har et af p_1 og p_2 ulige hjulparitet med p_j, hvilket er i modstrid med, at de ikke er naboer. Dermed er p_1, p_2 og p_3 de eneste vedhæftninger, som F har, og (iii) er opfyldt, hvilket viser påstand 1.

Fra påstand 1 kan det antages, at der findes punkter x_1 og x_2 i X, der ikke er naboer og har ulige hjulparitet. På grund af minimaliteten af F udgør F dermed det indre af en 2-vej mellem x_1 og x_2. Lad C bestå af $p_1, \ldots, p_n$. Antag, at der findes et m, for $3 \leq m \leq n-1$, så p_1 og p_m har ulige hjulparitet, og der findes en 2-vej $p_1, f_1, \ldots, f_k, p_m$, hvor $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$, $p_1 = x_1$ og $p_2 = x_2$. Lad X_1 være mængden af vedhæftninger i C for $F - \{f_k\}$, og lad X_2 være mængden af vedhæftninger for $F - \{f_1\}$. På grund af minimaliteten af F har enten alle punkter i X_i, for $i = 1, 2$, lige hjulparitet, eller der findes højst to punkter i X_i, og hvis der findes sådanne to, så er de naboer. Da $|F| \geq 2$, er $k \geq 2$, og $X_1 \cup X_2 = X$.

Påstand 2: *X_1 og X_2 indeholder ikke begge punkter af ulige hjulparitet.*

Antag, at X_1 og X_2 begge indeholder punkter af ulige hjulparitet. Da kan det antages, at X_1 og X_2 begge består af netop to nabopunkter af ulige hjulparitet, lad det være $X_1 = \{p_1, p_2\}$ og $X_2 = \{p_s, p_{s+1}\}$. Det vil sige, at p_1, p_2, p_s og p_{s+1} alle er komplette til Y, og alle er forskellige. Idet to af dem er ikke-naboer og har ulige hjulparitet, er de eneste kanter mellem F og $\{p_1, p_2\}$ incidente med f_1, og på samme måde er de eneste kanter mellem F og $\{p_s, p_{s+1}\}$ incidente med f_k. Men da $n \geq 6$ indeholder G en aflang prisme med trekanter $\{p_1, p_2, f_1\}$ og $\{p_s, p_{s+1}, f_k\}$, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Dette viser påstand 2.

Påstand 3: *Hvis X_1 indeholder punkter af ulige hjulparitet, så er lemmaet opfyldt.*

Antag, at X_1 indeholder punkter af ulige hjulparitet. Antag, at de eneste punkter i X_1 er p_1 og p_2, hvormed de begge er komplette til Y. Fra påstand 1 kan det antages, at alle punkter i X_2 har lige hjulparitet med p_2, da de ikke er naboer til p_2. Specielt har p_1 ingen nabo i $F - \{f_1\}$. Dermed er de eneste kanter mellem F og C kanten f_1p_1, kanter, der er incidente med p_2, og kanter, der er incidente med f_k.

Antag, at p_2 heller ikke har en nabo i $F - \{f_1\}$, og derfor er p_2 nabo til f_1. Hvis f_k har en unik nabo x i C, da kan x forbindes til trekanten $\{p_1, p_2, f_1\}$ via 2-vejen $x, \ldots, p_2$, 2-vejen $x, \ldots, p_n, p_1$ og 2-vejen $x, f_k, \ldots, f_1$. Dette giver en modstrid med lemma 2.9 i rapporten, idet x ikke har to naboer i trekanten $\{p_1, p_2, f_1\}$. Hvis f_k har to naboer i C, der ikke er naboer til hinanden, så kan f_k forbindes til den samme trekant, og f_k har i modstrid med lemma 2.9 i rapporten ikke to naboer i trekanten $\{p_1, p_2, f_1\}$. Hvis f_k har to naboer, som indbyrdes er naboer til hinanden, så indeholder G en aflang prisme, da C har længde mindst seks, hvilket danner en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$. Det vil sige, at p_2 har en nabo i $F - \{f_1\}$.

Lad $P_1 : p_1, f_1 \ldots, f_k$, og lad P_2 være 2-vejen fra p_2 til f_k, hvis indre tilhører $F - \{f_1\}$. Da har p_1 ingen naboer i $P_2 - \{p_2\}$. Lad Q_1 være 2-vejen fra f_k til p_n med indre tilhørende $C - \{p_1\}$. Nu danner p_1, P_1, f_k, Q_1, p_n et hul, så P_1 og Q_1 må have længder af modsat paritet. Da dette hul indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til Y, idet alle f_k's naboer har ulige hjulparitet med p_1, følger det af korollar 2.4 i rapporten, at hullet indeholder netop to punkter, der er komplette til Y, og som indbyrdes er naboer, idet hullet har lige længde. Da p_1 er komplet til Y, er det andet punkt p_n, da p_2 ikke tilhører hullet. Her er p_2, P_2, f_k, Q_1, p_n en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y. Punktet p_1 er komplet til Y, men har ingen nabo i det indre af 2-vejen. Dermed har 2-vejen ifølge korollar 2.3 i rapporten lige længde, hvilket vil sige, at længden af P_1 og længden af P_2 har modsat paritet. Nu haves, at et punkt i $\{p_4, \ldots, p_{n-1}\}$ er komplet til Y, idet der findes mindst to disjunkte kanter i C, der er komplette til Y. Lad p_s være et sådant punkt, hvor $4 \leq s \leq n-1$.

Det vises, at f_k har en nabo i $\{p_4, \ldots, p_{n-1}\}$.

Antag, at f_k ikke har en nabo i $\{p_4, \ldots, p_{n-1}\}$. Da $X \neq \{p_n, p_1, p_2\}$, idet der findes punkter i X, der er ikke-naboer, og som har ulige hjulparitet, er f_k nabo til p_3. Da p_s ikke tilhører Q_1, følger det, at p_3 ikke tilhører Q_1, og så har f_k en anden nabo, som må være p_n. Men da danner $f_k, p_3, p_4, \ldots, p_n$ et hul af ulige længde. Det vil sige, at f_k har en nabo i $\{p_4, \ldots, p_{n-1}\}$, og derfor findes en 2-vej Q_2 fra f_k til et punkt x, så x er det eneste punkt i Q_2, der er komplet til Y, og $V(Q_2 - \{f_k\}) \subseteq \{p_4, \ldots, p_{n-1}\}$. Nu har 2-vejen p_2, P_2, f_k, Q_2 endepunkter, der er komplette til Y, ingen indre punkter, der er komplette til Y, mens p_1, der er komplet til Y, ikke har naboer i det indre af 2-vejen. Da følger det af korollar 2.3 i rapporten, at 2-vejen må have lige længde. Derfor har 2-vejen p_1, P_1, f_k, Q_2, x ulige længde, da længden af P_1 og længden af P_2 har modsat paritet, og igen er p_1, P_1, f_k, Q, x en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y. Det vil sige, at 2-vejen ifølge lemma 9.1 har længde tre, og dermed er $k = 2$, og ethvert punkt, der er komplet til Y, er nabo til et af f_1 eller f_2. Som konsekvens findes der intet punkt i C, der er forskellig fra p_1, og som har ulige hjulparitet med p_1, hvilket er i modstrid med antagelsen om, at X_1 indeholder punkter af ulige hjulparitet. Dette viser påstand 3.

Analogt kan det vises, at hvis X_2 indeholder punkter af ulige hjulparitet, så er lemmaet opfyldt. Fra påstand 3 kan det antages, at alle punkter i X_1 har lige hjulparitet, og alle punkter i X_2 har ulige hjulparitet. Det følger, at $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ og dermed findes der ingen kanter mellem C og det indre af F. Det vil sige, at X_1 er mængden af f_1's naboer i C, og X_2 er mængden af f_k's naboer i C.

Påstand 4: *Mindst et af f_1 eller f_k har kun én nabo i C.*

Antag, at f_1 og f_k hver har mindst to naboer i C. Da findes disjunkte 2-veje Q og P i C, der begge indeholder naboer til både f_1 og f_k. Vælg Q og P mindst mulige, og lad Q have endepunkter q_1 og q_2. Da følger af minimaliteten af Q, at q_1 er den eneste nabo til et af f_1 og f_k i Q, og q_2 er den eneste nabo til det andet, så antag, at f_1p_1 og f_kq_2 er kanter i G. På samme måde har P endepunkter r_1 og r_2, hvor det kan antages, at f_1r_1 og f_kr_2 er kanter i G. Da q_1 og q_2 har ulige hjulparitet, findes et ulige antal kanter i hullet $f_1, \dots, f_k, q_2, Q, q_1$, der er komplette til Y. Dermed følger af korollar 2.4 i rapporten, at der findes netop to punkter, der er komplette til Y, og disse er indbyrdes naboer. På samme måde vil der i hullet $f_1, \dots, f_k, r_2, P, r_1$ kun være to punkter, som er komplette til Y, og disse er indbyrdes naboer. Hvis der ikke findes kanter mellem Q og P, så opnåes en modstrid med lemma 15.5 i rapporten, hvor C i lemma 15.5 i rapporten svarer til $f_1, q_1, Q, q_2, f_k, r_2, P, r_1$, og F svarer til $\{f_1, \dots, f_k\}$, da konklusionen ikke er opfyldt. Da Q og P er disjunkte 2-veje i C, sammenføjer alle kanter mellem dem deres endepunkter, så det kan antages, at q_1 er nabo til et af r_1 eller r_2. Fra hullet dannet af $f_1, \dots, f_k, q_2, Q, q_1$ følger, at længden af Q har samme paritet som $k - 1$, og på samme måde har længden af P samme paritet som $k - 1$.
Antag, at q_1 er nabo til r_1. Da $q_1, Q, q_2, f_r, r_2, P, r_1$ ikke må danne et hul af ulige længde, følger det, at q_2 er nabo til r_2. Dermed indeholder G en aflang prisme, da C har længde mindst seks, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_6$, så q_1 er ikke-nabo til r_1. Altså er q_1 nabo til r_2. Da q_1 er nabo til f_1, og r_2 er nabo til f_k, følger det, at q_1 og r_2 har ulige hjulparitet, og da de er naboer, er de begge komplette til Y.
Lad q' være naboen til q_1 i Q, lad $Q' = Q - \{q_1\}$, lad r' være naboen til r_2 i P, og lad $P' = P - \{r_2\}$. Da der i hullet dannet af $f_1, \dots, f_k, q_2, Q, q_1$ kun findes to punkter, der er komplette til Y, og disse to punkter samtidig er naboer, følger, at det andet punkt er q', idet q' er nabo til q_1, som er komplet til Y. På samme måde er r' komplet til Y. Hvis q_2 er nabo til r_1, så er ikke både q_2 og r_1 komplette til Y, da $q_2 \neq r_1$, og C har længde mindst seks Der findes altså netop tre kanter i C, der er komplette til Y, hvilket er i modstrid med korollar 2.4 i rapporten. Altså er q_2 ikke-nabo til r_1. Fra hullet dannet af q_1, Q, q_2, f_r, r_2 følger det, at Q har ulige længde, og dermed har P ulige længde, så k er lige. Da har 2-vejen $q', Q', q_2, f_2, \dots, f_1, r_1, P', r'$ ulige længde, dens endepunkter er komplette til Y, og dens indre punkter er ikke komplette til Y. Dermed har den ifølge lemma 9.1 længde tre. Det vil sige, at Q og P har længde en, og $k = 2$. Dermed har 2-vejen r_1, f_1, f_2, q_2 ulige længde, dens endepunkter er komplette til Y, og dens indre punkter er ikke komplette til Y, så ethvert punkt, der er komplet til Y, er nabo til et af f_1 eller f_2 ifølge korollar 2.3 i rapporten. Lad ab og $a'b'$ være to disjunkte kanter i C, der er komplette til Y, så der ikke findes kanter mellem $\{a, b\}$ og $\{a', b'\}$. Da er hvert af a, b, a' og b' nabo til et af f_1 eller f_2, da hvert punkt, som er komplet til Y, er nabo til f_1 eller f_2. Da alle naboer til f_1 i C har ulige hjulparitet med alle naboer til f_2 i C, kan det antages, at a samt a' er naboer til f_1, og b samt b' er naboer til f_2. Dette er dog i modstrid med lemma 15.5 i rapporten, hvor C i lemma 15.5 i rapporten svarer til a, f_1, a', b', f_2, og F svarer til F. Dette viser påstand 4.

Fra påstand 4 kan det antages, at X_1 kun indeholder et punkt p_1. Vælg i og j, for $2 \leq i, j \leq n$, så p_i og p_j er naboer til f_k, hvor i er mindst muligt, og j er størst muligt. Fra hullet H_1 : $f_1, \dots, f_k, p_i, p_{i-1}, \dots, p_1$ må længden af $f_1, \dots, f_k$ og længden af $p_i, p_{i-1}, \dots, p_1$ have samme paritet, hvormed i og k har samme paritet. Fra hullet H_2 : $p_1, f_1, \dots, f_k, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n$ må

længden af $f_1, \ldots, f_k$ og længden af $p_j, p_{j+1}, \ldots, p_n, p_1$ have samme paritet, det vil sige, at længden af $f_1, \ldots, f_k$ og længden af $p_j, p_{j+1}, \ldots, p_n$ har modsat paritet. Altså har j og k samme paritet, og dermed har i, j og k alle samme paritet. Det vil sige, at enten er $p_i = p_j$, eller p_i og p_j er ikke-naboer. Da p_1 samt p_i har ulige hjulparitet, og p_1 samt p_j har ulige hjulparitet, findes der et ulige antal kanter i hver af H_1 og H_2, der er komplette til Y. Det vil ifølge korollar 2.4 i rapporten sige, at der findes netop én kant, der er komplet til Y, og netop to punkter, der er komplette til Y i hver af de to huller.
Antag, at $i = j$. Da findes kun to kanter i C, der er komplette til Y. De to kanter er disjunkte, og p_1 samt p_i er ikke komplette til Y, da H_1 og H_2 begge kun indeholder to punkter, der er komplette til Y, hvilket er i modstrid med lemma 15.5 i rapporten, idet der ikke findes et punkt i $p_1, f_1, \ldots, f_k, p_i$, som er komplet til Y. Det vil sige, at $j > i$, og dermed at $j \geq i + 2$, da i og j ikke er naboer.
Hvis p_1 ikke er komplet til Y, så er den kant, der er komplet til Y i H_1 disjunkt fra 2-vejen $p_1, f_1, \ldots, f_k$, og det er den kant i H_2, der er komplet til Y, også. Men det er i modstrid med lemma 15.5 i rapporten, idet der ikke findes et punkt i $p_1, f_1, \ldots, f_k, p_j$, der er komplet til Y. Dermed er p_1 komplet til Y. Da H_1 kun indeholder to punkter, der er komplette til Y, og de to punkter er naboer, må p_2 være det andet punkt. På samme måde er p_n komplet til Y.

Påstand 5: *f_k har ikke en nabo i $\{p_3, \ldots, p_{j-2}\}$.*

Antag, at f_k har en nabo i $\{p_3, \ldots, p_{j-2}\}$. Der findes et punkt i $\{p_3, \ldots, p_{j-2}\}$, som er komplet til Y, for ellers er de eneste punkter i C, der er komplette til Y, punkterne p_1, p_2, p_n og muligvis p_{j-1} Disse punkter kan dog ikke være de eneste punkter, der er komplette til Y, fordi der findes to disjunkte kanter, der er komplette til Y, hvilket kanterne $p_n p_1$ og $p_1 p_2$ ikke er. Desuden findes et lige antal kanter i C, der er komplette til Y. Det vil sige, at der findes en 2-vej R fra f_k til et punkt x, så x er det eneste punkt i R, der er komplet til Y, og $V(R - \{f_k\}) \subseteq \{p_3, \ldots, p_{j-2}\}$. Her har 2-vejen $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_j, f_k, R, x$ ifølge korollar 2.3 i rapporten lige længde, da dens endepunkter er komplette til Y, intet indre punkt er komplet til Y, og p_1, der er komplet til Y, har ingen nabo i 2-vejens indre. Dermed har 2-vejen $p_1, f_1, \ldots, f_k, R, x$ ulige længde, idet længden af $f_1, \ldots, f_k$ og længden af $p_j, \ldots, p_n$ har modsat paritet. Desuden er dens endepunkter komplette til Y og intet indre punkt er komplet til Y. Det vil ifølge lemma 9.1 sige, at 2-vejen har længde tre, og dermed at $k = 2$. Desuden er ethvert punkt, der er komplet til Y, ifølge korollar 2.3 i rapporten nabo til et af f_1 eller f_2. Dermed findes der ikke et punkt i $C - \{p_1\}$, der er komplet til Y, og som har lige hjulparitet med p_1, hvilket danner en modstrid. Dermed er antagelsen, om at f_k har en nabo i $\{p_3, \ldots, p_{j-2}\}$, forkert, hvilket viser påstand 5.

Da f_k er nabo til p_i, for $i < j$ og $j - i$ er lige, følger fra påstand 5, at $i = 2$. Ved at gentage beviset for påstand 5, hvor der i stedet benyttes mængden $\{p_4, \ldots, p_{n-1}\}$, fåes, at f_k ikke har naboer i $\{p_{i+2}, \ldots, p_{n-1}\}$, og $j = n$. Dermed har f_k ingen naboer i $\{p_3, \ldots, p_{j-2}\} \cup \{p_{i+2}, \ldots, p_{n-1}\} = \{p_3, \ldots, p_{n-1}\}$, og derfor er p_2 og p_n de eneste naboer til f_k, hvilket er i modstrid med, at der findes punkter i X, som ikke er naboer og har ulige hjulparitet. $\square$

Kapitel 11

Familien $\mathcal{F}_7$

Lemma 11.1
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$. Lad $F, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte mængder, så F er sammenhængende, og Y er antisammenhængende. Lad $a_0, b_0 \in V(G) - (F \cup Y)$ og $a, b \in F$, så a, a_0, b_0, b er en 2-vej af længde tre i G. Antag, at

(I) *a_0 og b_0 begge er komplette til Y, og a samt b begge ikke er komplette til Y.*

(II) *a og b er de eneste punkter fra F, som er naboer til a_0 og b_0.*

(III) *$F - a$ og $F - b$ er begge sammenhængende.*

Da vil et af følgende gælde:

(i) *Der findes et punkt i Y, som ikke har en nabo i F.*

(i) *Der findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så a er y_1's eneste nabo i F, og b er y_2's eneste nabo i F.*

◇

Bevis
Det antages, at ethvert punkt i Y har en nabo i F, for ellers er (i) opfyldt. Bemærk, at kravet, om at a, a_0, b_0, b er en 2-vej af længde tre, medfører, at a ikke er nabo til b.

Påstand 1: *Der findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så y_1 er nabo til a, men ikke er nabo til b, og y_2 er nabo til b, men ikke er nabo til a.*

Lad $y_1, y_2 \in Y$ være to ikke-nabopunkter, og lad P være en 2-vej mellem a og b i F, og dermed har P længde mindst tre, da $C : a_0, a, P, b, b_0$ er et hul i G, altså C har længde mindst seks. Hvis der i P findes punkter, som er komplette til Y, vil de tilhøre det indre af P, idet a og b ikke er komplette til Y. Ifølge korollar 2.4 i rapporten vil der findes et ulige antal kanter i P, som er komplette til Y. Men så er $\{C, Y\}$ et hjul af ulige længde, da kanten a_0b_0 er et udsnit af C, der er komplet til Y og har ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$. Det vil sige, at der ikke findes et punkt i det indre af P, som er komplet til Y. Altså er punkterne a_0 og b_0 de eneste punkter fra C, som er komplette til Y.
Ifølge lemma 2.6 i rapporten indeholder Y enten et afhop for C eller en hat for C ved a_0b_0. Hvis Y indeholder en hat for C, findes der et punkt $y \in Y$, som kun er nabo til a_0 og b_0 i C. Det vil sige, at y ikke er nabo til punkter fra P. Da det er antaget at ethvert punkt i Y har en nabo i F, vil punktet y have en nabo F. Dermed indeholder F en nabo til både a_0, b_0 og y, og F fanger trekanten $\{a_0, b_0, y\}$. Hermed er antagelserne i lemma 16.5 i rapporten opfyldte. Da a ifølge (II) er a_0's eneste nabo fra F, og b ifølge (II) er b_0's eneste nabo fra F, og y ikke er nabo til hverken

a eller b, findes der ikke et punkt i F, som har mindst to naboer i $\{a_0, b_0, y\}$. Da a ikke er nabo til b, og grafen ikke må indeholde en aflang prisme, kan F ikke indeholde et spejlbillede af $\{a_0, b_0, y\}$. Altså er ingen af konklusionerne i lemma 16.5 i rapporten opfyldte, hvilket giver en modstrid. Altså kan Y ikke indeholde en hat for C. Derfor må Y indeholde et afhop for C ved a_0b_0, og påstand 1 er opfyldt, da det kun er kanterne $y_1a_0, y_1a, y_1b_0, y_2a_0, y_2b$ og y_2b_0, der findes mellem $\{y_1, y_2\}$ og C.

Lad y_1 og y_2 være som i påstand 1.

Påstand 2: *Der findes ikke en 2-vej i F mellem a og b, så y_1 eller y_2 har en nabo i dens indre.*

Lad P være en 2-vej mellem a og b, hvis indre indeholder en nabo til enten y_1 eller y_2. Da er $C : a_0, a, P', b, b_0$ et hul af længde mindst seks, og mængden $\{y_1, y_2\}$ indeholder hverken et afhop for C eller en hat for C. Dermed er konklusionerne i lemma 2.6 i rapporten ikke opfyldte, så der findes et punkt i P, som er komplet til $\{y_1, y_2\}$. Ifølge korollar 2.4 i rapporten indeholder C et lige antal kanter, som er komplette til $\{y_1, y_2\}$, og da a og b ikke er komplette til $\{y_1, y_2\}$, er $\{C, \{y_1, y_2\}\}$ et hjul af ulige længde. Dermed er en modstrid opnået, da $G \in \mathcal{F}_7$. Dette viser påstand 2.

Hvis y_1 kun er nabo til a i F, og y_2 kun er nabo til b i F, er (ii) opfyldt, så det kan antages, at mindst et af dem har yderligere en nabo i F. Da både $F - a$ og $F - b$ er sammenhængende, findes der en sammenhængende delmængde F' af $F - \{a, b\}$, så både a og b har en nabo i F', og mindst et af y_1 og y_2 har en nabo i F'. Vælg F' mindst mulig, så dette er opfyldt. Lad $x \in F'$ være det punkt, som er nabo til y_1 eller y_2.

Påstand 3: *$F' - x$ er sammenhængende.*

Antag, at $F' - x$ ikke er sammenhængende. Da F' er sammenhængende, må x være et snitpunkt for F'. Lad N være en komponent i $F' - x$, og lad $M = F' - x - N$. På grund af minimaliteten af F', kan a og b ikke begge have naboer i $N \cup \{x\}$ og ikke begge have naboer i $M \cup \{x\}$, så derfor kan det antages, at a's naboer i F' er indeholdt i $N \cup \{x\}$, og b's naboer er indeholdt i $M \cup \{x\}$. Da findes der i F en 2-vej mellem a og b, hvis indre indeholder x, hvilket er i modstrid med påstand 2. Dette viser påstand 3.

På grund af påstand 2 og idet F' er sammenhængende, må der findes en 2-vej L mellem a og b i F, hvis indre tilhører F', og hvor $x \notin V(L)$. Her må L have længde mindst to, da a og b ikke er naboer. Altså har både a og b en nabo i $F' - x$. På grund af minimaliteten af F' må det gælde, at både y_1 og y_2 ikke har naboer i $F' - x$. Altså er x det eneste punkt fra F', som er nabo til y_1 eller y_2. Hvis x kun er nabo til y_1, så lad Q være 2-vejen mellem x og b, hvis indre tilhører F'. Da er y_1, x, Q, b en 2-vej, idet y_1 ikke har naboer i $F' - x$, og y_1 ikke er nabo til b. Da b_0, y_1, x, Q, b er et hul i G, må Q have ulige længde. Men så er a_0, y_1, x, Q, b, y_2 et hul af ulige længde, og derfor må x være nabo til både y_1 og y_2.
Da Q har ulige længde, må y_2, x, Q, b ikke være et hul, så Q må have længde en, hvilket vil sige, at x er nabo til b.
Lad Q' være 2-vejen mellem x og a, hvis indre tilhører F'. Da er y_2, x, Q', a en 2-vej, idet y_2 ikke har naboer i $F' - x$, og y_2 ikke er nabo til a_0. Da a_0, y_2, x, Q', a er et hul i G, må Q' have ulige længde. Da y_1, x, Q', a ikke må være et hul af ulige længde, må Q' have længde en, så x er nabo til a. Men da er x, a, a_0, b_0, b et hul af ulige længde, hvilket giver en modstrid. Det vil sige, at når der laves antagelser for at undgå, at en af lemmaets to konklusioner er opfyldt, så opnåes en modstrid. □

Følgende svarer til lemma 16.6 i rapporten.

Lemma 11.2
Lad $G \in \mathcal{F}_7$. Lad $F, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte mængder, så F er sammenhængende, og Y er antisammenhængende. Lad $a_0, b_0 \in V(G) - (F \cup Y)$, og lad $a, b \in F$, så a, a_0, b_0, b er en 2-vej af længde tre i G. Antag, at

(I) a_0 og b_0 begge er komplette til Y, og a samt b begge ikke er komplette til Y.

(*II*) *a og b er de eneste punkter fra F, som er naboer til a_0 og b_0.*

(*III*) *$F - a$ er sammenhængende.*

Da vil der findes et punkt $y \in Y$, som ikke har naboer i $F - a$. $\diamond$

Bevis
Hvis $F - b$ er sammenhængende, følger det af lemma 11.1(i), at der findes et $y \in Y$, som ikke har naboer i F og dermed ikke har naboer i $F - a$. Derfor kan det antages, at $F - b$ ikke er sammenhængende. Lad F_1' være den komponent i $F - b$, der indeholder a, og lad $F_2' = F - b - F_1'$. Lad $F_i = F_i' \cup \{b\}$ for $i = 1, 2$. Dermed er $F_1 - b$ sammenhængende, og $F_1 - a$ er sammenhængende, da $F - a$ er sammenhængende. Ifølge lemma 11.1 findes der enten et $y \in Y$, som ikke har naboer i F_1, eller to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så a er y_1's eneste nabo i F_1, og b er y_2's eneste nabo i F_1.

Antag først, at der findes et $y \in Y$, som ikke har naboer i F_1. Hvis y har en nabo f_2 i F_2, så kan b forbindes til trekanten $\{a_0, b_0, y\}$ via 2-vejen $b, \ldots, a, a_0$, 2-vejen $b, \ldots, f_2, y$ og kanten bb_0. Dette er i modstrid med lemma 2.9 i rapporten, idet b kun har én nabo i trekanten $\{a_0, b_0, y\}$. Derfor har y ikke en nabo i F_2. Idet $F_1 \cup F_2 = F$, er lemmaet hermed opfyldt.

Antag derfor, at der findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så a er y_1's eneste nabo i F_1, og b er y_2's eneste nabo i F_1. Hvis y_1 ikke har en nabo i F_2, vil a være y_1's eneste nabo i F, og lemmaet er opfyldt. Antag, at y_1 har en nabo i F_2. Da vil $(F - a) \cup \{y_2\}$ fange trekanten $\{a, a_0, y_1\}$, da y_1 har en nabo i F_2, a har en nabo i $F - a$, og a_0 er nabo til y_2. Ifølge lemma 16.5 i rapporten vil $(F - a) \cup \{y_2\}$ enten indeholde et spejlbillede af $\{a, a_0, y_1\}$, eller et punkt i $(F - a) \cup \{y_2\}$ er nabo til mindst to punkter i trekanten $\{a, a_0, y_1\}$. Her indeholder $(F - a) \cup \{y_2\}$ ikke et spejlbillede af $\{a, a_0, y_1\}$, da der ikke findes kanter mellem y_1 og $F_1 - a$. Desuden tilhører naboerne til $\{a, a_0, y_1\}$ i $(F - a) \cup \{y_2\}$ tre disjunkte mængder, nemlig F_1', $\{y_2\}$ og F_2'. Det vil sige, at intet punkt fra $(F - a) \cup \{y_2\}$ er nabo til mindst to punkter fra trekanten, hvilket er i modstrid med lemma 16.5 i rapporten. Det vil sige, at y_1 ikke har en nabo i F_2, og dermed har y_1 ingen naboer i $F - a$. $\square$

Følgende svarer til lemma 16.7 i rapporten.

Lemma 11.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i G af længde mindst to. Lad $X, Y \subseteq V(G) - V(P)$ være to antisammenhængende mængder, så $X \cup Y$ er antisammenhængende, p_1 er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til Y. Lad $z \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ være et punkt, der er komplet til $X \cup Y$, og som ikke har naboer i P. Antag, at p_n ikke er komplet til X, og lad $y \in Y$, så $p_n, x_1, \ldots, x_k, y$ er en anti 2-vej, hvis indre tilhører X. Da er p_{n-1} ikke-nabo til x_1. $\diamond$

Bevis
Lad $F = \{p_{n-1}, x_1, \ldots, x_k\} \cup Y$. Da p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til Y, er p_{n-1} ikke komplet til Y. Dermed er F antisammenhængende, idet $X \cup Y$ er antisammenhængende. Ligeledes er $F - x_1$ og $F - p_{n-1}$ antisammenhængende. Blandt punkterne i F er det kun punktet p_{n-1}, som ikke er nabo til z, idet z er komplet til $X \cup Y$, og det er kun punktet x_1 i F, der ikke er nabo til p_n, idet $p_n, x_1, \ldots, x_k, y$ er en anti 2-vej, og p_n er komplet til Y.

Antag, at p_{n-1} er nabo til x_1. Betragt anti 2-vejen p_{n-1}, z, p_n, x_1. Dette er i $\overline{G}$ en 2-vej, hvor desuden F er en sammenhængende mængde, og $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$ er antisammenhængende. Desuden er z og p_n i $\overline{G}$ komplette til $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$, men p_{n-1} samt x_1 er ikke komplette til $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$, idet p_{n-1} er ikke-nabo til p_{n-2}, og x_1 er ikke-nabo til p_1 i $\overline{G}$. Lemma 11.1 kan nu anvendes i $\overline{G}$, og der findes derfor et punkt p_i i $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$, som ikke har naboer i $F - p_{n-1}$. Det vil sige, at i G er p_i komplet til $F - p_{n-1}$. Dermed er p_i komplet til Y, hvilket er i modstrid med, at p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til Y. Derfor kan p_{n-1} ikke være nabo til x_1. $\square$

Lemma 11.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i G af ulige længde mindst tre. Lad $X, Y \subseteq V(G) - V(P)$ være to antisammenhængende mængder, så $X \cup Y$ er antisammenhængende, p_1 er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til Y. Lad $z \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ være et punkt, der er komplet til $X \cup Y$, og som ikke har naboer i P. Da vil et ulige antal af kanter i P være komplette til X. $\diamond$

Bevis
Bemærk, at hvis der ikke findes et modeksempel, da er lemmaet vist, så vælg et minimalt modeksempel ved først at betragte alle mulige modeksempler, og vælg dem, hvor P er mindst mulig. Vælg derefter de modeksempler, hvor mængderne X og Y er mindst mulige. Vælg et modeksempel, hvor der yderligere gælder, at $|X| + |Y|$ er mindst mulig.

Påstand 1: *Intet punkt i $V(P) - p_1$ er komplet til X.*

Antag, at der findes et punkt i $V(P)$, der er komplet til X. Hvis punktet p_n er komplet til X, følger det af korollar 2.3 i rapporten, at der findes en kant i P, som er komplet til X, idet punktet z er komplet til X, men ikke har en nabo i det indre af P. Dermed findes der mindst tre punkter i P, som er komplette til X. Da P har ulige længde mindst tre, følger det af korollar 2.4 i rapporten, at der findes et ulige antal kanter i P, som er komplette til X, og lemmaet er vist. Derfor kan det antages, at p_n ikke er komplet til X.

Ifølge lemma 11.3 er punktet p_{n-1} ikke-nabo til x_1, og dermed ikke komplet til X. Da p_1 er komplet til X, indeholder P punkter, som er komplette til X. Vælg et punkt $p_i \in V(P)$, hvor $1 \leq i \leq n-2$ er størst muligt, så p_i er komplet til X. Hvis i er lige, er $p_1, \ldots, p_i$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X, og da fåes som før fra korollar 2.3 i rapporten og korollar 2.4 i rapporten, at $p_1, \ldots, p_i$ og dermed P indeholder et ulige antal kanter, som er komplette til X. Derfor må i være ulige. Hvis $i > 1$, er $p_i, \ldots, p_n$ en 2-vej med de samme egenskaber i forhold til X og Y som P, men hvor $|\{p_i, \ldots, p_n\}| < |V(P)|$. Dette er i modstrid med, at P er valgt mindst mulig. Derfor må $i = 1$, og dette viser påstand 1.

Påstand 2: *Hvis der findes to forskellige punkter $x_1, x_2 \in X$, så $X - x_i$ er antisammenhængende for $i = 1, 2$, da vil $X \cap Y = \emptyset$, og et af punkterne x_1 eller x_2 er det eneste punkt fra X, der ikke er komplet til Y.*

Antag, at $(X - x_i) \cup Y$ ikke er antisammenhængende, og idet X og Y begge er antisammenhængende, er Y disjunkt fra $X - x_i$. Desuden er Y komplet til $X - x_i$, for hvis der findes et $y \in Y$, som har en ikke-nabo i $X - x_i$, bliver Y i $\overline{G}$ netop forbundet til $X - x_i$ via y. Da x_i har en ikke-nabo i X, må $x_i \notin Y$, og dermed er $X \cap Y = \emptyset$, og x_i er det eneste punkt fra X, der ikke er komplet til Y, og påstand 2 er opfyldt. Det kan derfor antages, at $(X - x_i) \cup Y$ er antisammenhængende. Da X og Y er valgt minimale, så lemmaets konklusion ikke er opfyldt, må der for P, $X - x_i$ og Y gælde, at der findes et ulige antal kanter i P, der er komplette til $X - x_i$, for $i = 1, 2$. Lad W_i være mængden af punkter i P, der er komplette til $X - x_i$, for $i = 1, 2$. Da p_1 ifølge påstand 1 er det eneste punkt fra P, som er komplet til X, vil $W_1 \cap W_2 = \{p_1\}$. Lad Q være en anti 2-vej i X mellem x_1 og x_2. Da $W_1 \cap W_2 = \{p_1\}$ findes der to ikke-nabopunkter p_i og p_j i P, hvor $p_i \in W_1 - W_2$, og $p_j \in W_2 - W_1$. Dermed er p_i, x_1, Q, x_2, p_j et antihul, og derfor må Q have ulige længde.

Lad L være en minimal delgraf af 2-vejen $P - \{p_1\}$, så L indeholder punkter fra både W_1 og W_2. I det følgende kaldes en sådan delgraf for en linie i P. Da $W_1 \cap W_2 = \{p_1\}$, har enhver linie i P længde mindst to, det ene endepunkt tilhører W_1, og det andet tilhører W_2. Desuden vil det om enhver linie gælde, at ingen indre punkter tilhører hverken W_1 eller W_2, for ellers kan linien vælges mindre.

Antag, at der findes en linie $L : p_i, \ldots, p_j$ i P af ulige længde mindst tre. Da L ikke har kanter, der er komplette til $X - x_1$, og idet p_i er komplet til $X - x_1$ samt p_j er det eneste punkt fra L, som er komplet til $X - x_2$, udgør L, $X - x_1$ og $X - x_2$ et modeksempel til lemmaet. Dette er i modstrid med valget af P, X og Y. Derfor kan en linie ikke have ulige længde mindst tre. Hvis en linie i P har længde en, lad det være $p_i p_{i+1}$, så p_i er komplet til W_1, og p_{i+1} er komplet til W_2, da er $z, p_i, x_1, Q, x_2, p_{i+1}$ et antihul af ulige længde. Derfor må enhver linie i P have lige længde mindst to.

Da $P - \{p_1\}$ indeholder punkter fra både W_1 og W_2, kan der vælges et k, hvor $1 < k \leq n$, så $\{p_2, \ldots, p_k\}$ indeholder en linie, og hvor k er valgt mindst muligt. Da enhver linie har længde mindst to, må $k \geq 4$. Da linien er valgt mindst mulig, vil $\{p_2, \ldots, p_{k-1}\}$ ikke indeholde en linie, så $\{p_2, \ldots, p_k\}$ er en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til $X - (x_1 \cup x_2)$. Punktet z er komplet til X og dermed også til $X - (x_1 \cup x_2)$, men z har ingen naboer i det indre af $p_2, \ldots, p_k$, så ifølge korollar 2.3 i rapporten må 2-vejen $p_2, \ldots, p_k$ have lige længde, hvilket vil sige, at k er lige. Vælg l, hvor $l \geq 2$, størst muligt, så $\{p_l, \ldots, p_n\}$ indeholder en linie. Da enhver linie har lige længde mindst to, må $2 \leq l \leq n-2$. Da l er valgt størst muligt, vil p_l være det eneste punkt fra $p_l \ldots, p_n$, der er komplet til enten $X - x_1$ eller $X - x_2$ lad det være $X - x_1$.
Hvis $p_l, \ldots, p_n$ har ulige længde, dannes en modstrid med valget af P, X og Y, idet p_l er komplet til $X - x_1$, p_n er komplet til Y, og $(X - x_1) \cup Y$ er antisammenhængende. Derfor må $p_l, \ldots, p_n$ have lige længde. Da n er lige, må l derfor ligeledes være lige.
Hermed haves, at k er ulige, og l er lige, og hvis $k > l$, så er $p_l, \ldots, p_k$ en linie af ulige længde, hvilket er vist ikke findes i P, så $k < l$, og $l - k$ er ulige. Det vil sige, at kanterne $p_k p_{k-1}$ og $p_l p_{l+1}$ begge tilhører linier i P. Altså kan der vælges et r og et s, hvor $k \leq r < s \leq l$, så $p_r, p_s \in W_1 \cup W_2$, og kanterne $p_{r-1} p_r$ og $p_s p_{s+1}$ tilhører linier i P. Tilsvarende som for k og l, må $s - r$ være ulige, og derfor kan de vælges, så $s - r$ er mindst muligt. Hvis $p_r, \ldots, p_s$ indeholder en linie, for eksempel $p_t, \ldots, p_u$, vil $u - t$ være ulige, og dette giver en modstrid med, at $s - r$ er valgt mindst muligt. Derfor indeholder $p_r, \ldots, p_s$ ikke en linie. Det må derfor gælde, at punkterne $p_r, \ldots, p_s$ alle tilhører W_1, eller alle tilhører W_2, lad det være W_1. Da kanterne $p_{r-1} p_r$ og $p_s p_{s+1}$ begge tilhører linier, findes der et q og et w, hvor $2 \leq q < r < s < w \leq n$, så $p_q, \ldots, p_r$ og $p_s, \ldots, p_w$ er linier. Da alle linier har lige længde, er $r - q$ og $w - s$ lige tal, og derfor må $w - q$ være ulige. Desuden vil $p_q, p_w \in W_2$, da det er antaget, at $p_r, \ldots, p_s \in W_1$. Da $p_q, \ldots, p_r$ og $p_s, \ldots, p_w$ er linier, og $p_r, \ldots, p_s \in W_1$, vil ingen af punkterne $p_{q+1}, \ldots, p_{w-1}$ tilhøre W_2. Desuden er $p_q, \ldots, p_w$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter tilhører W_2, det vil sige, at endepunkterne er komplette til $X - x_2$, og ingen af de indre punkter er komplette til $X - x_2$. Da punktet z ikke er nabo til punkter i det indre af $p_q, \ldots, p_w$, haves en modstrid med korollar 2.4 i rapporten, hvilket viser påstand 2.

Påstand 3: *Der findes en anti 2-vej $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t$ i G, så $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$ og $Y = \{y_1, \ldots, y_t\}$, hvor $s > 1$ og $t > 1$.*

Antag, at $|X| = 1$, hvor $X = \{x\}$. Da vil $z, x, p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej af ulige længde mindst fem, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y, hvilket er i modstrid med lemma 9.1. Så derfor er $|X| \geq 2$, og tilsvarende er $|Y| \geq 2$. Det vil sige, at X indeholder mindst to punkter x_i, for $i = 1, 2$, så $X - x_i$ er antisammenhængende, og da følger det af påstand 2, at $X \cap Y = \emptyset$, og der findes et punkt $x \in X$, som er det eneste punkt fra X, der ikke er komplet til Y. Ifølge påstand 2 findes der ikke to punkter $x_j \in X - x_i$, så $X - x_j$ er antisammenhængende, og derfor er X en anti 2-vej, hvis ene endepunkt er lig x_j. Tilsvarende for Y. Dette viser påstand 3.

Vælg t', hvor $1 \leq t' \leq t$, mindst muligt, så p_1 ikke er nabo til $y_{t'}$, og idet p_1 ikke er komplet til Y, findes et sådant punkt. Dermed er $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_{t'}, p_1$ en anti 2-vej i G. Lad $W = (X - x_1) \cup \{y_1, \ldots, y_{t'-1}\}$.

Påstand 4: *I enhver delgraf P' af P, hvis endepunkter er naboer til x_1, vil der findes et lige antal kanter, som er komplette til W.*

Antag, at der findes en delgraf P' af P, hvis endepunkter er naboer til x_1, men som indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til W. Vælg P', så ingen indre punkter i P' er nabo til x_1, og lad $P' : p_h, \ldots, p_k$, hvor $1 \leq h < k \leq n$. Vælg i og j, hvor $h \leq i \leq j \leq k$, så p_i og p_j er komplette til W, hvor i er valgt mindst muligt, og j er valgt størst muligt. Sådanne to punkter findes, da P' indeholder et ulige antal kanter, og p_k ikke er komplet til W, idet $k > 1$, p_k ikke er komplet til X, og p_k er nabo til x_1. Da P' indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til W, må $k \geq h+2$, og idet $C : x_1, p_h, \ldots, p_k$ er et hul i G, må $k-h$ være lige. Desuden må C indeholde et ulige antal kanter, der er komplette til W, idet C indeholder P', og x_1 ikke er komplet til $X - x_1$, idet X er antisammenhængende. Ifølge korollar 2.4 i rapporten kan C kun indeholde en enkelt kant, der er komplet til W, og disse to punkter er de eneste punkter fra C, der er komplette til W. Da p_i og p_j er to punkter fra C, som er komplette til W, må det gælde, at $i = j-1$. Hermed er $z, x_1, p_h, \ldots, p_i$ en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til W, og hvis indre punkter ikke er komplette til W. Punktet p_j er komplet til W, men har ingen naboer i det indre af $z, x_1, p_h, \ldots, p_i$, idet $j < k$, og p_j dermed ikke er nabo til x_1. Ifølge korollar 2.3 i rapporten må $z, x_1, p_h, \ldots, p_i$ derfor have lige længde, hvilket vil sige, at $i-h$ er lige. Da $k-h$ er lige, og $j = i+1$, følger det, at $p_j, \ldots, p_k, x_1, z$ er en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til W, og hvis indre punkter ikke er komplette til W. Ifølge lemma 9.1 må $p_j, \ldots, p_k, x_1, z$ have længde tre, så $k = j+1$. Ifølge korollar 2.3 i rapporten må ethvert punkt, der er komplet til W, være nabo til p_k eller til x_1, da disse udgør de indre punkter i p_j, p_k, x_1, z. Da det eneste punkt i P, der er komplet til W, og som samtidig er nabo til x_1, er punktet p_1, må ethvert punkt fra $P - \{p_1\}$, der er komplet til W, være nabo til p_k. Da P er en 2-vej, kan det derfor kun være punkterne p_{k-1} og p_{k+1}, der udover p_1 er komplette til W. Da p_i er komplet til W, og $i < k-1$, må $i = 1$, og dermed er $p_i = p_1$. Da $j = i+1$, må $p_j = p_2$, og da $k = j+1$, må $p_k = p_3$. Dermed er punkterne p_1, p_2 og muligvis p_4 de eneste punkter fra P, der er komplette til W.

Hvis der i lemma 11.3 benyttes anti 2-vejen $p_1, y_{t'}, \ldots, y_1, x_s$, 2-vejen $p_n, \ldots, p_1$ og mængderne Y og X, fåes, at p_2 er ikke-nabo til $y_{t'}$. Vælg d, for $1 \leq d \leq n$, mindst muligt, så p_d er nabo til $y_{t'}$. Dermed er $p_1, \ldots, p_d, y_{t'}, z$ en 2-vej af længde mindst fire, hvis endepunkter er komplette til $W \cup \{x_1\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $W \cup \{x_1\}$. Dette skyldes, at punkterne p_2 og muligvis p_4 er komplette til W, men ingen af dem er nabo til x_1, og punktet p_3 er ikke komplet til W. Ifølge lemma 9.1 må $p_1, \ldots, p_d, y_{t'}, z$ have lige længde, hvilket vil sige, at d er ulige. Betragt nu 2-vejen $p_1, \ldots, p_d, y_{t'}$. Den har ulige længde, ingen af dens indre punkter er komplette til X, endepunktet p_1 er komplet til X, og punktet z er komplet til X, men har ingen naboer i det indre af denne 2-vej. Derfor kan punktet $y_{t'}$ ifølge korollar 2.3 i rapporten ikke være komplet til X. Da alle punkterne i $Y - y_1$ ifølge påstand 3 er komplette til X, må $y_{t'} = y_1$. Dermed er $W = X - x_1$.

Lad $V = X - x_s$. Da er $p_1, \ldots, p_d, y_1$ en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til V, og som har ulige længde, da d er ulige. Da punktet z ikke har en nabo i det indre af denne 2-vej, følger det af korollar 2.3 i rapporten, at der må være et punkt i $p_2, \ldots, p_d$, der er komplet til V. Vælg c, hvor $2 \leq c \leq d$, mindst muligt, så p_c er komplet til V. Da $x_1 \in V$, og p_2 ikke er nabo til x_1, må $c \geq 3$. Da $p_1, \ldots, p_c$ er en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til V, hvis indre punkter ikke er komplette til V, og hvor z ikke har en nabo i det indre, følger det af korollar 2.3 i rapporten, at $p_1, \ldots, p_c$ har lige længde, hvilket vil sige, at c er ulige. Da p_1, p_2 og muligvis p_4 er komplette til W, og $c \geq 3$, kan der vælges et b, hvor $2 \leq b < c$, størst muligt, så p_b er komplet til W. Det vil sige, at $b = 2$ eller $b = 4$. Dermed er $p_b, \ldots, p_c$ en 2-vej af ulige længde, hvor p_b er komplet til W, og p_c er komplet til V, og ingen indre punkter er komplette til hverken W eller V. Hvis $c - b > 1$, haves et modeksempel med $p_b, \ldots, p_c$ som 2-vej og W samt V som de to antisammenhængende mængder. Dette er i modstrid med valget af P, X og Y, så $c = b+1$. Dermed er $z, p_b, x_1 \ldots, x_s, p_c$ et antihul i G, og derfor må s være ulige. Men så er $p_2, x_1, \ldots, x_s, y_1$ et antihul af ulige længde i G, hvilket giver en modstrid, og viser påstand 4.

Vælg h, hvor $1 \leq h \leq n$, størst muligt, så p_h er nabo til x_1. Da $s > 1$, er x_1 komplet til Y, og $x_1, p_h, \ldots, p_n$ er en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y. Idet punktet z ikke har naboer i det indre af denne 2-vej, følger det af korollar 2.3 i rapporten0, at $x_1, p_h, \ldots, p_n$ enten har længde en eller lige længde. Det vil sige, at enten er $h = n$, eller så er h ulige. På grund af valget af P, X og Y er P, W og Y ikke et modeksempel, idet $|W| < |X|$. Derfor findes der et ulige antal kanter i P, der er komplette til W. Da både p_1 og p_h er naboer til x_1, findes der ifølge påstand 4 et lige antal kanter i 2-vejen $p_1, \ldots, p_h$, der er komplette til W. For at P kan indeholde et ulige antal kanter, der er komplette til W, må $p_h, \ldots, p_n$ indeholde et ulige antal kanter, der er komplette til W. Det vil sige, at $h < n$. Vælg i

og j, hvor $h \leq i \leq j \leq n$, så p_i og p_j er komplette til W, og i er valgt mindst muligt, og hvor j er valgt størst muligt. Da $p_h, \ldots, p_n$ indeholder mindst en kant, der er komplet til W, må $i < j$. Her er $z, x_1, p_h, \ldots, p_i$ en 2-vej af længde mindst to, hvis endepunkter er komplette til W, og hvis indre punkter ikke er komplette til W. Punktet p_j er komplet til W, men har ikke en nabo i det indre af $z, x_1, p_h, \ldots, p_i$. Bemærk, at p_j ikke er nabo til x_i, da h er valgt størst muligt, så p_h er nabo til x_1. Dermed følger det af korollar 2.3 i rapporten, at $z, x_1, p_h, \ldots, p_i$ må have lige længde, hvilket vil sige, at $h - i$ er lige.

Påstand 5: $h > 1$.

Antag, at $h = 1$, det vil sige, at p_1 er det eneste punkt fra P, der er nabo til x_1.
Lad $Q : x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_{t'}, p_1$ være en anti 2-vej. Dermed er x_1, Q, p_1, z en anti 2-vej af længde mindst fire, hvis indre punkter alle har en nabo i $P - \{p_1\}$, og hvis endepunkter ikke har en nabo i $P - \{p_1\}$. I $\overline{G}$ er x_1, Q, p_1, z dermed en 2-vej af længde mindst fire, hvis endepunkter er komplette til $P - \{p_1\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $P - \{p_1\}$. Ifølge lemma 9.1 har x_1, Q, p_1, z lige længde, da ingen af konklusionerne er opfyldte. Det vil sige, at Q har ulige længde. Da Q er en anti 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter ikke har en nabo i $P - \{p_1, p_2\}$, og hvis indre punkter alle har en nabo i $P - \{p_1, p_2\}$, følger det, at i $\overline{G}$ er Q en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til $P - \{p_1, p_2\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $P - \{p_1, p_2\}$. Punktet z er i $\overline{G}$ komplet til P, men har ingen naboer i det indre af Q. Ifølge korollar 2.3 i rapporten må et indre punkt i Q være komplet til $P - \{p_1, p_2\}$. Det betyder, at i G findes der et punkt i det indre af Q, som ikke har en nabo i $P - \{p_1, p_2\}$. Da punktet p_j er komplet til W, betyder det, at punkterne $x_1, \ldots, x_s$ alle er naboer til p_j. Ligeledes, da p_n er komplet til Y, er punkterne $y_1, \ldots, y_{t'}$ alle naboer til p_n. Da $x_1, \ldots, x_s, y_1 \ldots, y_{t'}$ er de indre punkter i Q, må $p_j = p_2$, for ellers kan det indre af Q ikke indeholde et punkt, som ikke har en nabo i $P - \{p_1, p_2\}$. Ved at anvende lemma 11.3 på Q og 2-vejen $p_n, \ldots, p_1$ fåes, at p_2 ikke er nabo til $y_{t'}$. Da p_1 er det eneste punkt fra P, som er nabo til x_1, er p_2 ikke-nabo til x_1, og dermed er $D : p_2, x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_{t'}$ et antihul i G. Vælg d, hvor $1 \leq d \leq n$, mindst muligt, så p_d er nabo til $y_{t'}$. Da p_1 og p_2 ikke er naboer til $y_{t'}$, må $d \geq 3$. Dermed er $C : x_1, p_1, \ldots, p_d, y_{t'}$ et hul af længde mindst seks, hvor $|V(C) \cap V(D)| = 3$, så ifølge lemma 16.9 i rapporten har D længde fire. Dermed må $y_{t'} = y_1$ og $x_s = x_2$, da $s > 1$.

Mellem P og $X = \{x\}$ findes der nu kun kanterne x_1p_1, x_2p_1 og x_2p_2. Dette skyldes, at p_1 er det eneste punkt fra P, som er nabo til x_1, og $p_j = p_2$ er det eneste punkt fra P, der er komplet til $W = \{x_2\}$. Hermed udgør $\{p_1, p_2, x_2\}$ en trekant, og ligeledes udgør $\{x_1, y_1, z\}$ en trekant. Disse to trekanter er forbundet via kanterne p_1x_1, x_2z og 2-vejen $p_2, \ldots, p_d, y_1$. Det vil sige, at der i G findes en aflang prisme, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$, hvormed påstand 5 er vist.

Da p_h er nabo til x_1, følger det fra påstand 5, at p_h ikke er komplet til $X - x_1$, og derfor må det gælde, at $h < i < j$.
Vælg s', hvor $1 \leq s' \leq s$, mindst muligt, så p_h er nabo til $x_{s'}$. Dermed er $p_j, x_1, \ldots, x_{s'}, p_h$ et antihul, hvormed s' er lige. Heraf følger, at $x_1, \ldots, x_{s'}, p_h, z$ er en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre punkter har naboer i $\{p_{h+1}, \ldots, p_n\}$, og hvis endepunkter ikke har naboer i $\{p_{h+1}, \ldots, p_n\}$. Da følger af lemma 9.1, at $x_1, \ldots, x_{s'}, p_h, z$ har længde tre, hvormed $s' = 2$. Mængden $F = \{x_2, p_h, \ldots, p_n\}$ er sammenhængende, og den eneste nabo til x_1 i F er p_h, samt den eneste nabo til z i F er x_2. Idet x_1 og z er komplette til $(X - \{x_1, x_2\}) \cup Y$, og p_h samt x_2 ikke er komplette til $(X - \{x_1, x_2\}) \cup Y$, da p_h ikke er komplet til Y, følger det af lemma 11.1, at der findes et punkt i $(X - \{x_1, x_2\}) \cup Y$, der ikke har en nabo i F undtaget muligvis x_2. Men da ethvert punkt i $(X - \{x_1, x_2\}) \cup Y$ er nabo til enten p_j eller p_n, haves en modstrid. Dermed må antagelsen, om at P, X og Y udgør et modeksempel, være forkert. □

Lemma 11.5
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte og antisammenhængende mængder, der udgør et komplet par. Lad $P : p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ være en vej i $G - (X \cup Y)$, hvor p_2p_5 er eneste mulige kant mellem punkterne i P udover kanterne i P. Lad p_1 og p_5 være de eneste

punkter fra P, som er komplette til X. Hvis p_1, p_3 og p_4 er komplette til Y, så er et af punkterne p_2 eller p_5 ligeledes komplet til Y. ◇

Bevis
Antag, at p_1, p_3 og p_4 er komplette til Y, men at hverken p_2 eller p_5 er komplet til Y. I $\overline{G}$ udgør $\{p_1, p_3, p_5\}$ en trekant, og $F = X \cup Y \cup \{p_2, p_4\}$ er en sammenhængende mængde. I $\overline{G}$ vil F fange trekanten $\{p_1, p_3, p_5\}$, da p_1 er nabo til p_4, p_3 har naboer i X, og p_5 har naboer i Y. Punktet p_5 har i $\overline{G}$ alle sine naboer fra F i $Y \cup \{p_2\}$, punktet p_3 har alle sine naboer fra F i X, og p_1 er i F kun nabo til p_4. Her er $Y \cup \{p_2\}$, X og $\{p_4\}$ disjunkte delmængder, så intet punkt fra F har mere end en nabo i $\{p_1, p_3, p_5\}$. Ifølge lemma 16.5 i rapporten må F derfor indeholde et spejlbillede af $\{p_1, p_3, p_5\}$. Lad det være $\{b_1, b_2, p_4\}$, hvor $b_1 \in X$, $b_2 \in Y \cup \{p_2\}$. Det vil sige, at i G er b_1 nabo til p_1, p_5 og muligvis p_2, men er ikke-nabo til p_3 og p_4. Ligeledes er b_2 nabo til p_1, p_3 og muligvis p_2, men er ikke-nabo til p_4 og p_5. Da p_4 er komplet til Y, vil $b_2 \notin Y$, da b_2 ikke er nabo til p_4. Derfor må $b_2 = p_2$. Hvis p_2 er nabo til p_5, kan lemma 15.5 i rapporten anvendes, hvor C svarer til kredsen $p_1, \ldots, p_4, b_1$. Da hverken p_2 eller p_5 per antagelse er komplette til Y, fåes en modstrid med lemma 15.5 i rapporten. Derfor kan p_2 ikke være nabo til p_5. Da er $p_1, \ldots, p_5, b_1$ et hul af længde seks, og kanten p_3p_4 er komplet til Y, mens punkterne p_2 og p_5 ikke er komplette til Y. Dermed haves et hjul af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_7$, så p_2 eller p_5 må være komplette til Y, når p_1, p_3 og p_4 er komplette til Y. □

Følgende svarer til lemma 16.8 i rapporten.

Lemma 11.6
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være to disjunkte og antisammenhængende delmængder, der udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i G af lige længde mindst to, hvor p_1 er komplet til X, p_n ikke er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, som er komplet til Y. Antag, at der i G findes et punkt u, der er komplet til Y, og som ikke er nabo til hverken p_{n-1} eller p_{n-2}. Da vil et af følgende gælde:

(i) *Der findes et ulige antal kanter i P, som er komplette til X.*

(ii) *$n = 3$, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem p_{n-1} og p_n, hvis indre tilhører X.*

◇

Bevis
Da p_1 er komplet til X, indeholder P punkter, som er komplette til X. Vælg et punkt $p_i \in V(P)$, hvor $1 \leq i \leq n-1$ er størst muligt, så p_i er komplet til X. Antag, at i er lige, da har 2-vejen $p_1, \ldots, p_i$ ulige længde. Det kan antages, at $p_1, \ldots, p_i$ indeholder et lige antal kanter, der er komplette til X, for ellers er (i) opfyldt. Da både p_1 og p_i er komplette til X, må $p_1, \ldots, p_i$ have ulige længde mindst tre, idet i er lige. Ifølge korollar 2.4 i rapporten skal antallet af kanter i $p_1, \ldots, p_i$, som er komplette til X, have samme paritet som længden af $p_1, \ldots, p_i$, eller så er p_1 og p_i de eneste punkter, der er komplette til X. Da $p_1, \ldots, p_i$ har ulige længde, men indeholder et lige antal kanter, der er komplette til X, må p_1 og p_i være de eneste punkter, der er komplette til X. Altså er intet punkt i det indre af $p_1, \ldots, p_i$ komplet til X. Ifølge lemma 9.1 vil $p_1, \ldots, p_i$ dermed have længde tre, og der findes en anti 2-vej Q_X mellem p_2 og p_3 af ulige længde, hvis indre tilhører X. Der findes en anti 2-vej Q_Y mellem p_2 og p_3 med indre tilhørende Y, da hverken p_2 eller p_3 er komplet til Y, og denne har ulige længde, da Q_X og Q_Y ellers danner et hul af ulige længde. Da p_2, Q_Y, p_3, p_n ikke må være et antihul af ulige længde, må $n \leq 4$. Da n er ulige, og $p_1, \ldots, p_i$ har ulige længde mindst tre, må $n = 3$ og $i = 2$. Det er antaget, at der findes et punkt u, der er komplet til Y og ikke-nabo til både $p_{n-1} = p_2$ og $p_{n-2} = p_1$, men da er v, p_1, p_3, Q_Y, p_2 et antihul af ulige længde i G, og en modstrid er opnået. Hvis i er lige, vil (i) dermed altid være opfyldt.

Hvis i er ulige, er $p_i, \ldots, p_n$ en 2-vej af lige længde. Ifølge lemma 9.2 må den have længde to, da i er valgt størst muligt, så p_i er komplet til X. Desuden vil der findes en anti 2-vej Q_X mellem

p_{n-1} og p_n, hvis indre tilhører X og en anti 2-vej Q_Y mellem p_{n-2} og p_{n-1}, hvis indre tilhører Y. Ydermere vil præcis én af Q_X og Q_Y have ulige længde. Per antagelse findes der et punkt u, som er komplet til Y, og ikke-nabo til både p_{n-1} og p_{n-2}, så derfor må Q_Y have lige længde, hvormed Q_X har ulige længde. Da p_{n-1}, Q_X, p_n, p_1 ikke må være et antihul af ulige længde, må $n = 3$, og dermed er (ii) opfyldt. $\square$

Følgende svarer til lemma 16.16 i rapporten.

Lemma 11.7
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $\{X; Y; P\}$ være et optimalt pseudohjul i G. Lad $v \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ være et punkt, som ikke er komplet til Y. Da findes en sammenhængende delgraf P' af $P : p_1, \ldots, p_n$, så følgende er opfyldt:

- (i) *$V(P')$ indeholder alle v's naboer i P.*
- (ii) *Intet indre punkt i P' er komplet til Y.*
- (iii) *Hvis v er komplet til X, da vil enten $P' = \{p_1\}$ eller $p_n \in V(P')$.*

$\diamond$

Bevis
Vælg h mindst muligt, og k størst muligt, hvor $1 \leq h \leq k \leq n$, så p_h samt p_k er naboer til v, bemærk, at $p_h = p_k$ er en mulighed. Hvis sådanne punkter ikke findes, betyder det, at v ikke har naboer i P, og (i) er opfyldt for enhver delgraf P' af P. Desuden kan P' altid vælges, så (ii) er opfyldt, hvis v ikke har naboer i P. Hvis v ikke har naboer i P og samtidig er komplet til X, så vil enten $P' = \{p_1\}$ opfylde (i)-(iii), eller P' med $p_n \in V(P')$ opfylder (i)-(iii).

Vælg i mindst muligt og j størst muligt, hvor $2 \leq i \leq j \leq n$, så p_i samt p_j er komplet til Y. Sådanne punkter findes, idet P tilhører et pseudohjul og dermed indeholder mindst to punkter, som er komplette til Y. Ifølge lemma 16.9 i rapporten er i ulige, og j er lige. Da $p_i, \ldots, p_j$ indeholder samtlige kanter fra P, som er komplette til Y, følger det af lemma 16.13 i rapporten, at $j - i \geq 3$.

Påstand 1: *Hvis v både er nabo til p_1 og komplet til X, da er lemmaet opfyldt.*

Da $\{X; Y; P\}$ er et optimalt pseudohjul, vil $\{X; Y \cup \{v\}; P\}$ ikke være et pseudohjul. Altså må en af antagelserne i definition 16.12 i rapporten ikke være opfyldt. Da X og P ikke ændres, og p_1 er komplet til $Y \cup \{v\}$, må det gælde, at der ikke findes et punkt i $\{p_3, \ldots, p_{n-1}\}$, som er komplet til $Y \cup \{v\}$.
Da v er komplet til X, udgør $\{X, Y \cup \{v\}\}$ et komplet par. Ved at anvende lemma 1.4 på mængderne $Y \cup \{v\}$ og X samt 2-vejen P fåes, at enten findes der et $y \in Y \cup \{v\}$, som ikke har naboer i $\{p_2, \ldots, p_n\}$, eller så findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y \cup \{v\}$, så $y_1, p_2, \ldots, p_n, y_2$ er en 2-vej i G. Men $y_1, p_2, \ldots, p_n, y_2$ er ikke en 2-vej, idet p_i, for $3 \leq i \leq n-1$, er komplet til Y. Altså må der findes et $y \in Y \cup \{v\}$, som ikke har naboer i $\{p_2, \ldots, p_n\}$, og dette kan kun være opfyldt for $y = v$, idet $p_i \in \{p_2, \ldots, p_n\}$ er komplet til Y. Hermed er lemmaet opfyldt, da v kun er nabo til p_1 i P, og $P' = \{p_1\}$ opfylder (i)-(iii). Dermed er påstand 1 vist.

Påstand 2: *Det kan antages, at der findes en 2-vej Q mellem v og $q \in \{p_{i+1} \ldots, p_{j-1}\}$, så q er det eneste punkt fra Q, der er komplet til Y, og $V(Q - \{v\}) \subseteq \{p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}\}$.*

Da $\{X; Y; P\}$ er et pseudohjul, findes der ifølge lemma 16.13 i rapporten mindst tre kanter i P, som er komplette til Y. Derfor findes der et punkt i $\{p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}\}$, som er komplet til Y. Hvis v har en nabo i $\{p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}\}$, så er påstanden opfyldt. Det kan derfor antages, at v ikke har en nabo i $\{p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}\}$. Hvis v ikke har en nabo i $\{p_1, \ldots, p_i\}$, vil $p_h, p_k \in \{p_j, \ldots, p_n\}$, da p_h og p_k er naboer til v. Dermed kan P' vælges som 2-vejen $p_j, \ldots, p_n$, og lemmaet er opfyldt. Derfor antages det, at v har en nabo i $\{p_1, \ldots, p_i\}$, lad det være p_a, hvor $1 \leq h \leq a \leq i$, og a er størst muligt. Hvis v også har en nabo i $\{p_j, \ldots, p_n\}$, lad det være p_b, hvor $j \leq b \leq k \leq n$, og b er mindst muligt, så danner $C : v, p_a, \ldots, p_b$ et hul i G, hvor $\{p_i, \ldots, p_j\} \subset C$, og C må have lige længde.

Da de kanter i P, som er komplette til Y, alle tilhører 2-vejen $p_i,\ldots,p_j$, vil C indeholde disse kanter. Her vil C ifølge lemma 16.13 i rapporten indeholde et ulige antal kanter, som er komplette til Y, og C indeholder mindst tre sådanne kanter. Dette giver dog en modstrid med korollar 2.4 i rapporten, så v kan ikke have en nabo i $p_j,\ldots,p_n$. Det vil sige, at $p_k \in \{p_1,\ldots,p_i\}$, altså $k \leq i$.
Hvis v ikke er komplet til X, kan P' vælges til $p_1,\ldots,p_i$, og lemmaet er opfyldt. Derfor antages det, at v er komplet til X. Hvis yderligere $h = k = 1$, så er lemmaet ifølge påstand 1 opfyldt, hvormed $k > 1$. Da $j - i \geq 3$, er $v, p_k,\ldots,p_i,\ldots,p_j,\ldots,p_n$ en 2-vej af længde mindst fire, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Ifølge lemma 9.1 har $v, p_k,\ldots,p_n$ lige længde. Da i er ulige, har 2-vejen $v, p_k,\ldots,p_i$ dermed lige længde. I 2-vejen $v, p_k,\ldots,p_i$ er v det eneste punkt, som er komplet til X, da $k > 1$, og p_i er det eneste punkt, som er komplet til Y. Ifølge lemma 9.2 vil $v, p_k,\ldots,p_i$ have længde to, så $k = i - 1$. Fra lemma 9.2 følger yderligere, at der findes en anti 2-vej Q_X mellem p_k og p_i, hvis indre tilhører X, og en anti 2-vej Q_Y mellem v og p_k, hvis indre tilhører Y. Desuden vil præcis én af Q_X og Q_Y have ulige længde. Hvis Q_X har ulige længde, er p_k, Q_X, p_i, p_n et antihul af ulige længde, idet p_n er komplet til X samt er ikke-nabo til både p_k og p_i. Hvis Q_Y har ulige længde, er v, Q_Y, p_k, p_j et antihul af ulige længde, idet p_j er komplet til Y samt er ikke-nabo til både v og p_k. Altså opnåes en modstrid. Det vil sige, at når der foretages antagelser for at undgå, at påstanden er opfyldt, da opnåes en modstrid, hvormed påstand 2 er vist.

Påstand 3: *Hvis v er komplet til X, så er lemmaet opfyldt.*

Hvis v er komplet til X, kan det ifølge påstand 1 antages, at v ikke er nabo til p_1, for ellers er lemmaet opfyldt. Hvis h er ulige, er $p_1,\ldots,p_h,v$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Ifølge lemma 9.1 har $p_1,\ldots,p_h,v$ længde tre. Da punktet p_n er komplet til X, og $n \geq 5$, har p_n ikke en nabo i det indre af $p_1,\ldots,p_h,v$, hvilket er i modstrid med korollar 2.3 i rapporten. Altså er h lige.
Antag, at der findes et punkt i $\{p_2,\ldots,p_h\}$, som er komplet til Y. Idet p_2 ifølge definition 16.12 i rapporten ikke er komplet til Y, må $h \geq 4$. Da opfylder $\{X;Y;p_1,\ldots,p_h,v\}$ definition 16.12 i rapporten, men dette er i modstrid med, at $\{X;Y;P\}$ er et optimalt pseudohjul, da $p_1,\ldots,p_h,v$ indeholder færre punkter, der er komplette til Y, end P gør. Dette skyldes, at p_h ifølge påstand 2 tilhører $\{p_1,\ldots,p_{j-1}\}$. Altså findes der ikke et punkt i $\{p_2,\ldots,p_h\}$, som er komplet til Y, hvilket giver, at $i > h$. Ifølge påstand 2 findes der en 2-vej Q mellem v og q, hvor q er det eneste punkt fra Q, som er komplet til Y, og $V(Q - \{v\}) \subseteq \{p_{i+1},\ldots,p_{j-1}\}$. Da punktet p_1 er komplet til X og antikomplet til $V(Q)$, er $\{V(Q), X\}$ ifølge lemma 2.13 i rapporten et balanceret par. Ligeledes, da p_1 er komplet til Y, er $\{V(Q), Y\}$ et balanceret par. Når $\{V(Q), X\}$ er et balanceret par, er $\{V(Q - \{v\}), X\}$ også et balanceret par, og ligeledes er $\{V(Q - \{v\}), Y\}$ et balanceret par. Hvis lemma 1.6 benyttes, hvor P i lemma 1.6 svarer til Q, ses det, at konklusionerne ikke er opfyldte. Altså må Q have ulige længde.
Hermed er $p_1,\ldots,p_h,v,Q,q$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til Y, og hvis indre punkter ikke er komplette til Y. Ifølge lemma 9.1 har $p_1,\ldots,p_h,v,Q,q$ længde tre, hvilket vil sige, at $h = 2$, og v er nabo til q. Ifølge korollar 2.3 i rapporten vil ethvert punkt, som er komplet til Y, være nabo til enten v eller p_2, idet disse punkter udgør de indre punkter i 2-vejen p_1, p_2, v, q. Da p_1 samt p_3 er de eneste punkter, som i P er nabo til p_2, vil v være nabo til ethvert punkt i $V(P - \{p_1, p_3\})$, som er komplet til Y. Da P indeholder mindst tre kanter, som er komplette til Y, vil der findes et punkt $p \in V(P - \{p_1, p_3\})$, som er komplet til Y og dermed komplet til $Y \cup \{v\}$.
Antag, at $i > 3$, så er p_i komplet til $Y \cup \{v\}$. Da i er ulige, er $i \geq 5$, og $p_1,\ldots,p_i$ er en 2-vej af lige længde, hvor p_1 er det eneste punkt, som er komplet til X, og p_i er det eneste punkt, som er komplet til $Y \cup \{v\}$. Ifølge lemma 9.2 har $p_1,\ldots,p_i$ længde to, hvilket er i modstrid med, at $i \geq 5$. Derfor må $i = 3$, og $p_i = p_3$ er ikke-nabo til v.
Vælg $h' > i$ mindst muligt, så v er nabo til $p_{h'}$, og da $p_k \in \{p_4,\ldots,p_n\}$, findes et sådant punkt. Da $h = 2$, er v nabo til p_2, og da $v, p_2,\ldots,p_{h'}$ er et hul, må h' være lige. Nu kan lemma 11.6 anvendes, hvor P i lemma 11.6 svarer til $p_3\ldots,p_{h'},v$, X svarer til Y, og Y svarer til X. Desuden er punktet p_1 komplet til $X \cup Y$, men har ingen naboer i $p_3,\ldots,p_{h'},v$. Da $n \geq 5$, må det være lemma 11.6(i), som er opfyldt. Det vil sige, at $p_3,\ldots,p_{h'},v$ indeholder et ulige antal kanter, som er komplette til Y. Altså findes der mindst et punkt i $\{p_4,\ldots,p_{h'}\}$, som er komplet til Y. Da v er

nabo til ethvert punkt i $V(P - \{p_1, p_3\})$, som er komplet til Y, kan det kun være punktet $p_{h'}$ fra $\{p_4, \ldots, p_{h'}\}$, som er komplet til Y, idet h' er valgt mindst muligt, så $p_{h'}$ er nabo til v. Dermed må $h' = 4$, idet p_3p_4 så er en kant, der er komplet til Y. Vejen $p_1, \ldots, p_4, v$ danner en modstrid med lemma 11.5, idet p_1, p_3 samt p_4 er komplette til Y, men hverken p_2 eller v er komplet til Y. Altså findes der ikke et sådant h', men dette er i modstrid med, at $p_k \in \{p_4, \ldots, p_n\}$. Derfor må antagelsen, om at v ikke er nabo til p_1, være forkert, hvilket viser påstand 3.

Ifølge påstand 3 kan det nu antages, at v ikke er komplet til X. Hvis $k \leq h + 1$, så er $k = h$ eller $k = h + 1$, da $h \leq k$, og da kan P' vælges til p_h, p_k, og lemmaet er opfyldt. Det vil sige, at det kan antages, at $k > h + 1$.

Påstand 4: *Hvis v ikke er nabo til p_1, så er lemmaet opfyldt.*

Lad $P^* : p_1, \ldots, p_h, v, p_k, \ldots, p_n$. Hvis der blandt punkterne $\{p_2, \ldots, p_h, p_k, \ldots, p_n\}$ findes et punkt, som er komplet til Y, må P^* have længde mindst fire, idet p_2 samt p_n per definition 16.12 i rapporten ikke er komplette til Y. Hermed er $\{X; Y; P^*\}$ et pseudohjul. Da $\{X; Y; P\}$ er et optimalt pseudohjul, og $V(P) \cap V(P^*) = \{p_1, \ldots, p_h, p_k, \ldots, p_n\}$, må det gælde, at intet punkt i $\{p_{h+1}, \ldots, p_{k-1}\}$ er komplet til Y, for ellers findes et pseudohjul som beskrevet i definition 16.15(i) i rapporten. Da kan P' vælges som $p_h, \ldots, p_k$, og lemmaet er opfyldt. Derfor kan det antages, at intet punkt i $\{p_2, \ldots, p_h, p_k, \ldots, p_n\}$ er komplet til Y. Dermed er $1 \leq h < i \leq j < k \leq n$, og da $j - i \geq 3$, er $k - h \geq 5$.
Ifølge påstand 2 findes der en 2-vej Q mellem v og q, hvor q er det eneste punkt fra Q, som er komplet til Y, og $V(Q - \{v\}) \subseteq \{p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}\}$.
Dermed er $R : q, Q, v, p_k, \ldots, p_n$ en 2-vej, hvor kun punktet q er komplet til Y, og kun punktet p_n er komplet til X. Da punktet p_1 er komplet til X og antikomplet til $V(R)$, er $\{V(R), X\}$ ifølge lemma 2.13 i rapporten et balanceret par. Ligeledes er $\{V(R), Y\}$ et balanceret par, da p_1 er komplet til Y. Når $\{V(R), X\}$ er et balanceret par, er $\{V(R - \{q\}), X\}$ også et balanceret par, og ligeledes er $\{V(Q - \{q\}), Y\}$ et balanceret par. Hvis lemma 1.6 benyttes, hvor P i lemma 1.6 svarer til R, ses det, at konklusionerne ikke er opfyldte. Altså må R have ulige længde.
Hvis 2-vejene $S : p_1, \ldots, p_h, v, Q, q$ og $T : p_1, \ldots, p_h, v, p_k, \ldots, p_n$ betragtes, ses det, at deres længder har modsat paritet, idet $V(S) \cap V(T) = \{p_1, \ldots, p_h, v\}$, og $R : q, Q, v, p_k, \ldots, p_n$ har ulige længde, $V(S) \cap V(R) = \{q, V(Q), v\}$ og $V(T) \cap V(R) = \{v, p_k, \ldots, p_n\}$. Altså vil en af 2-vejene S eller T have ulige længde. Hvis lemma 9.1 benyttes på den af S eller T, der har ulige længde, fåes, at den må have længde tre. For begge 2-veje vil et krav, om at længden er lig tre, medføre, at $h = 2$. Desuden fåes fra lemma 9.1, at der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem p_2 og v, hvis indre tilhører enten X eller Y. Da hverken p_2 eller v er komplet til X eller Y, vil der findes en anti 2-vej Q_X mellem p_2 og v, hvis indre tilhører X, og der vil findes en anti 2-vej Q_Y mellem p_2 og v, hvis indre tilhører Y. Fra lemma 9.1 fåes altså, at enten har Q_X ulige længde, eller så har Q_Y ulige længde. Da v, Q_X, p_2, Q_Y danner et antihul, må både Q_X og Q_Y have ulige længde. Hvis p_1, p_2, v, p_k, p_n har længde tre, er $p_k = p_n$, og R bliver lig 2-vejen q, v, p_n, hvilket er i modstrid med, at R har ulige længde. Derfor må det være 2-vejen p_1, p_2, v, Q, q der har længde tre. Da følger det af korollar 2.3 i rapporten, at ethvert punkt, der er komplet til X, har en nabo i det indre af p_1, p_2, v, q, hvilket vil sige, at punktet er nabo til enten v eller p_2. Altså vil det gælde, at v er nabo til ethvert punkt fra $V(P - \{p_1, p_3\})$, som er komplet til X. Da p_n er komplet til X, vil der altså gælde, at p_n er nabo til v. Det vil sige, at $k = n$, idet $h + 2 \leq k \leq n$ er valgt maksimalt, så p_k er nabo til v. Igen haves en modstrid, da $R : q, v, p_n$ ikke har ulige længde. Det vil sige, at antagelsen, om at intet punkt i $\{p_2, \ldots, p_h, p_k, \ldots, p_n\}$ er komplet til Y, må være forkert. Dette viser påstand 4.

Det kan nu antages, at v ikke er komplet til X, men er nabo til p_1.

Påstand 5: *p_{n-1} er ikke komplet til $Y \cup \{v\}$.*

Antag, at p_{n-1} er komplet til $Y \cup \{v\}$. Ifølge lemma 16.13 i rapporten har P lige længde mindst seks, så $n \geq 7$, og n er ulige. Ved at anvende lemma 9.1 på 2-vejen $P - \{p_n\}$ og den antisammenhængende mængde $Y \cup \{v\}$, fåes, at der findes et punkt i $\{p_2, \ldots, p_{n-2}\}$, som er komplet til $Y \cup \{v\}$. Vælg j' maksimalt, så $2 \leq j' \leq n - 2$, og $p_{j'}$ er komplet til $Y \cup \{v\}$. Derfor må $j > j'$, og $j = n - 1$

på grund af valget af $j \leq n$, så p_j er komplet til Y. Hvis $j' < j - 1$, da er $p_{j'}, \ldots, p_j$ en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til $Y \cup \{v\}$, og hvis indre punkter ikke er komplette til $Y\{v\}$. Da punktet p_1 er komplet til $Y \cup \{v\}$, men ikke har naboer i det indre af $p_{j'}, \ldots, p_j$, må $p_{j'}, \ldots, p_j$ ifølge korollar 2.3 i rapporten have lige længde. Det vil sige, at j' er lige, idet j er lige. Dermed er $p_{j'}, \ldots, p_n$ en 2-vej af ulige længde, hvor $p_{j'}$ er komplet til $Y \cup \{v\}$, p_n er det eneste punkt, der er komplet til X. Desuden er p_1 komplet til $Y \cup \{v\} \cup X$. Hvis lemma 11.4 benyttes, hvor X og Y i lemma 11.4 svarer til $Y \cup \{v\}$ og X, samt hvor P svarer til $p_{j'}, \ldots, p_n$, fåes en modstrid, idet $p_{j'}, \ldots, p_n$ ikke indeholder kanter, der er komplette til $Y \cup \{v\}$.
Altså må $j' = j - 1$. Lad $F = X \cup Y \cup \{v, p_{n-1}\}$. Dermed er F antisammenhængende, idet $p_{n-1} = p_j$, og v ikke er komplette til X, og punkterne $p_1, p_{n-2} = p_{j'}$ samt p_n alle har en ikke-nabo i F. I $\overline{G}$ er $\{p_1, p_{j'}, p_n\}$ en trekant, hvor punkterne alle har en nabo i F. Det vil sige, at F fanger trekanten $\{p_1, p_{j'}, p_n\}$ i $\overline{G}$. Ifølge lemma 16.5 i rapporten vil F i $\overline{G}$ indeholde et spejlbillede af $\{p_1, p_{j'}, p_n\}$, eller et punkt i F er nabo til to punkter i trekanten. Da p_1 kun er nabo til p_{n-1} i $\overline{G}$, naboerne til $p_{j'}$ alle tilhører X, og naboerne til p_n alle tilhører $Y \cup \{v\}$, kan et punkt i F ikke være nabo til to punkter i trekanten $\{p_1, p_{j'}, p_n\}$. Altså må F indeholde et spejlbillede af trekanten. Det vil sige, at der findes tre punkter $b_1 = p_{n-1}$, $b_2 \in X$ og $b_3 \in Y \cup \{v\}$, så $\{b_1, b_2, b_3\}$ er en trekant i $\overline{G}$. Da punktet $p_{n-1} = p_j$ i G er komplet til $Y \cup \{v\}$, kan dette ikke lade sig gøre. Det vil sige, at antagelsen, om at p_{n-1} er komplet til $Y \cup \{v\}$, er forkert, hvormed påstand 5 er vist.

Påstand 6: *v er ikke-nabo til p_n.*

Antag, at v er nabo til p_n. Ifølge lemma 16.13 i rapporten indeholder P mindst tre kanter, som er komplette til Y. Derfor findes der et punkt p_a, hvor $3 \leq a < n - 1$, og a er lige. Da j er lige, må $j - a$ være lige. Dermed findes der ifølge korollar 2.4 i rapporten et lige antal kanter i 2-vejen $p_a, \ldots, p_j$, som er komplette til Y. Det vil sige, at 2-vejen $p_a, \ldots, p_n$ indeholder et lige antal kanter, der er komplette til Y. Her er p_a komplet til Y, og p_n er det eneste punkt fra $p_a, \ldots, p_n$, som er komplet til $X \cup \{v\}$. Da punktet p_1 er komplet til $Y \cup X \cup \{v\}$ og ikke har naboer i $p_a, \ldots, p_n$, haves der en modstrid med lemma 11.4, idet $p_a, \ldots, p_n$ har ulige længde og indeholder et lige antal kanter, der er komplette til Y. Dette viser påstand 6.

Det vil sige, at det nu kan antages, at v er nabo til p_1, ikke-nabo til p_n og ikke komplet til X.

Påstand 7: *Der findes ikke en nabo p_m til v, hvor $p_m \in V(P)$, så der mellem v og p_m findes en anti 2-vej af ulige længde, hvis indre tilhører Y.*

Antag, at p_m er nabo til v, og der findes en anti 2-vej Q_Y af ulige længde mellem v og p_m, hvis indre tilhører Y. Det vil sige, at p_m ikke er komplet til Y. Ifølge påstand 6 vil $m < n$, og da p_1 er komplet til $X \cup Y \cup \{v\}$, må $1 < m$. Da p_1 og p_n er de eneste punkter fra P, som er komplette til X, vil p_m ikke være komplet til X. Da v ikke er komplet til X, vil der findes en anti 2-vej Q_X mellem v og p_m, hvis indre tilhører X. Da Q_X og Q_Y danner et antihul, og Q_Y har ulige længde, må Q_X have ulige længde. Da v, Q_X, p_m, p_n ikke må være et antihul, da det så har ulige længde, må $m = n - 1$, og dermed er m lige. Da j er lige, vil p_j være ikke-nabo til p_m, da p_m ikke er komplet til Y, og de dermed ikke er det samme punkt. Da Q_Y er en anti 2-vej mellem v og p_m af ulige længde, vil der i Y findes to punkter y_1 og y_2, så v er nabo til y_1, men ikke til y_2. Hvis p_j ikke er nabo til v, vil der dannes et hul v, y_1, p_j, y_2, p_1, så p_j må være nabo til v. Da p_{n-1} ifølge påstand 5 ikke er komplet til $Y \cup \{v\}$, vil $p_j \neq p_{n-1}$, hvilket vil sige, at $n - j \geq 3$. Hermed er $p_j, \ldots, p_n$ en 2-vej af ulige længde, hvor p_j er komplet til $Y \cup \{v\}$, og p_n er det eneste punkt, der er komplet til X. Da punktet p_1 er komplet til $Y \cup \{v\} \cup X$, fåes ifølge lemma 11.4, at $p_j, \ldots, p_n$ indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til $Y \cup \{v\}$. Dette er dog i modstrid med, at j er valgt størst muligt, så p_j er komplet til Y, idet p_n ikke er komplet til Y. Dette viser påstand 7.

Antag, at $j \geq k$, og lad $P^* : p_1, v, p_k, \ldots, p_n$. Hvis $p_k = p_{n-1}$, må $p_k = p_j$, idet $j \geq k$, og p_n ikke er komplet til Y. Dermed er $p_k = p_j$ komplet til Y og nabo til v. Dette giver en modstrid, da $p_k = p_{n-1}$ ifølge påstand 5 ikke er komplet til $Y \cup \{v\}$. Altså har P^* længde mindst fire. Dermed er $\{X; Y; P^*\}$ et pseudohjul, og da $\{X; Y; P\}$ er et optimalt pseudohjul, kan P^* ikke indeholde færre punkter, der er komplette til Y, end P. Det vil sige, at intet punkt i $\{p_2, \ldots, p_{k-1}\}$ er komplet til Y. Dette danner dog en modstrid med påstand 2, som giver, at der findes et punkt

$q \in \{p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}\}$, der er komplet til Y. Derfor må $j < k$.

Lad Q være en 2-vej mellem v og q, så påstand 2 er opfyldt for Q. Hvis Q har lige længde, har 2-vejen p_1, v, Q, q ulige længde, dens endepunkter er komplette til Y, og dens indre punkter er ikke komplette til Y. Ifølge lemma 9.1 har p_1, v, Q, q længde tre, det vil sige, at $Q : v, w, q$, og der findes en anti 2-vej mellem v og w af ulige længde, hvis indre tilhører Y. Dette er dog i modstrid med påstand 7, da $w \in V(P)$ ifølge påstand 2. Det vil sige, at Q har lige længde.
Hvis k er lige, er $p_1, v, p_k, \ldots, p_n$ en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X, og hvis indre punkter ikke er komplette til X. Ifølge lemma 9.1 har $p_1, v, p_k, \ldots, p_n$ derfor længde tre, så $k = n - 1$. Desuden følger det, at der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem v og p_k, hvis indre tilhører X. Da $p_k = p_{n-1}$ ifølge påstand 5 ikke er komplet til $Y \cup \{v\}$, og v per antagelse ikke er komplet til Y, findes der også en anti 2-vej mellem v og p_k, hvis indre tilhører Y. Dette er dog i modstrid med påstand 7, så k er ulige.
Da Q har ulige længde, er $L : q, Q, v, p_k, \ldots, p_n$ en 2-vej af lige længde. Da q er det eneste punkt fra Q, som er komplet til Y, og $k > j$, er q det eneste punkt fra L, som er komplet til Y. Da p_n er det eneste punkt fra L, som er komplet til X, fåes fra lemma 9.2, at L har længde to. Dette danner en modstrid, da v ifølge påstand 6 ikke er nabo til p_n, og L dermed har længde mindst fire. □

Definition 11.8 (Ramme)
Lad G være en graf, lad $z \in V(G)$, og lad $A_0 \subseteq V(G) - N[z]$ være en ikke-tom sammenhængende mængde. Da siges $\{z, A_0\}$ at være en ramme i G. ◇

Bemærk, at $N[z]$ betegner mængden bestående af punktet z samt alle z's naboer i G.

Definition 11.9 (Hjulsystem)
Lad G være en graf, og lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G. Lad $x_0, \ldots, x_t$, hvor $t \geq 1$, være en følge af forskellige punkter i $V(G) - (A_0 \cup \{z\})$, som opfylder følgende:

(*i*) *A_0 indeholder naboer til x_0 og x_1, men intet punkt i A_0 er nabo til både x_0 og x_1.*

(*ii*) *For $2 \leq i \leq t$ findes der en sammenhængende delmængde af G, som indeholder A_0, indeholder en nabo til x_i, ikke indeholder naboer til z og ikke indeholder punkter, der er komplette til $\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$.*

(*iii*) *For $1 \leq i \leq t$ er x_i ikke komplet til $\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$.*

(*iv*) *z er komplet til $\{x_0, \ldots, x_t\}$.*

En sådan følge $x_0, \ldots, x_t$ kaldes et hjulsystem i G af højde t. ◇

Bemærk, at der er symmetri mellem x_0 og x_1, hvilket vil sige, at $x_1, x_0, x_2, \ldots, x_t$ er et andet hjulsystem i G af højde t.

Definition 11.10 (X_i og A_i)
Lad G være en graf, og lad $x_0, \ldots, x_t$ være et hjulsystem i G af højde t. For $1 \leq i \leq t$ defineres $X_i = \{x_0, \ldots, x_i\}$, og A_i defineres til at være en maksimal sammenhængende delmængde af $V(G)$, som indeholder A_0, ikke indeholder naboer til z og ikke indeholder punkter, der er komplette til X_i. ◇

Bemærk, at per definition vil $A_{i-1} \subseteq A_i$.

Bemærkning 11.11
Definition 11.9(ii) kan nu omformuleres til, at x_i har en nabo i A_{i-1}. ◇

Definition 11.12 (Y-diamant, Y-firkant og Y-firkantsdiamant)
Lad G være en graf, og lad $x_0, \dots, x_t$ være et hjulsystem i G af højde t. Lad desuden X_i og A_i være som i definition 11.10. Lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde, så $Y \cap \{z, x_0, \dots, x_t\} = \emptyset$, og $x_0, \dots, x_{t-1}$ alle er komplette til Y, mens x_t ikke er komplette til Y. Hvis $t \geq 3$, x_t er komplet til X_{t-2}, og x_t har en nabo i A_{t-2}, da siges $x_0, \dots, x_t$ at være en Y-diamant af højde t.
Hvis $t \geq 3$, x_t er nabo til x_{t-1}, x_t ikke har en nabo i A_{t-2}, og der findes et punkt i A_{t-1}, som er nabo til x_t og har en nabo i A_{t-2}, da siges $x_0, \dots, x_t$ at være en Y-firkant af højde t.
Hvis $t \geq 4$, x_t er komplet til X_{t-2}, x_{t-1} ikke er komplet til X_{t-3}, x_t ikke har en nabo i A_{t-3}, x_{t-1} har en nabo i A_{t-3}, og der findes et punkt i A_{t-2}, som er nabo til både x_t og x_{t-1} og har en nabo i A_{t-3}, da siges $x_0, \dots, x_t$ at være en Y-firkantsdiamant af højde t. $\diamond$

Bemærk, at en Y-firkantsdiamant også er en Y-diamant, men ikke er en Y-firkant.

Lemma 11.13
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G, og lad $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde. Da findes der ingen Y-firkant af højde tre, og der findes ingen Y-firkantsdiamant af højde fire i G. Hvis $x_0, \dots, x_3$ er en Y-diamant af højde tre, så er z komplet til Y, og G indeholder et hjul $\{C, Y \cup \{x_3\}\}$. $\diamond$

Bevis
Lad $x_0, \dots, x_t$ være et hjulsystem i G, og lad X_i og A_i være som i definition 11.10.

Antag, at $x_0, \dots, x_t$ er en Y-firkant af højde tre. Dermed er $t = 3$, x_3 er nabo til x_2, x_3 har ingen nabo i A_1, og der findes et punkt q i A_2, som er nabo til x_3 og har en nabo i A_1. Da q er nabo til x_3, og x_3 ikke har en nabo i A_1, må $q \in A_2 - A_1$, og da q har en nabo i A_1, og A_1 er maksimal, må q være komplet til X_1. Da A_2 ikke må indeholde punkter, der er komplette til X_2, må q og x_2 ikke være naboer. Lad Q være en 2-vej fra q til x_2, hvis indre tilhører A_1, og en sådan findes, da x_2 ifølge bemærkning 11.11 har en nabo i A_1, og A_1 er sammenhængende. Dermed har Q længde mindst to. Da Q sammen med x_2, x_3, q danner et hul, må Q have lige længde. Dermed er q, Q, x_2, z en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X_1, og hvis indre punkter per definition 11.10 og definition 11.9(iii) ikke er komplette til X_1. Da følger af lemma 9.1(ii), at q, Q, x_2, z har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter i 2-vejen, og anti 2-vejens indre tilhører X_1. Lad r være punktet i Q, som tilhører A_1, så vil anti 2-vejen være mellem r og x_2. Denne anti 2-vej danner et antihul med r, z, q, x_2, så anti 2-vejen må have ulige længde, og da X_1 kun indeholder x_0 og x_1, må anti 2-vejen have længde tre. Dermed er antihullet af længde mindst seks, og det indeholder blandt andet punkterne x_0, x_1 og z. Lad P være en 2-vej fra x_0 til x_1, hvis indre tilhører A_0, og da har P længde mindst tre, idet definition 11.9(i) giver, at x_0 og x_1 ikke har en fælles nabo i A_0. Dermed er z, x_0, P, x_1 et hul af længde mindst seks, som også indeholder x_0, x_1 og z, hvilket danner modstrid med lemma 15.9 i rapporten, så $x_0, \dots, x_t$ er ikke en Y-firkant af højde tre.

Antag, at $x_0, \dots, x_t$ er en Y-firkantsdiamant af højde fire. Dermed er $t = 4$, x_4 er komplet til X_2, x_3 er ikke komplet til X_1, x_4 har ingen naboer i A_1, x_3 har en nabo i A_1, og der findes et punkt q i A_2, som er nabo til både x_4 og x_3 og har en nabo i A_1. Da x_4 ikke har naboer i A_1, og q er nabo til x_4, må $q \in A_2 - A_1$. Da q har en nabo i A_1, og A_1 er maksimal, må q være komplet til X_1. Desuden er q ikke-nabo til x_2, da A_2 ifølge definition 11.10 ikke må indeholde punkter, som er komplette til X_2. Lad Q være en 2-vej mellem q og x_2, hvis indre tilhører A_1, hvormed Q har længde mindst to. Da Q sammen med x_2, x_4, q danner et hul, må Q have lige længde. Dermed er q, Q, x_2, z en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X_1, og hvis indre punkter per definition 11.10 og definition 11.9(iii) ikke er komplette til X. Da følger af lemma 9.1(ii), at q, Q, x_2, z har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter i 2-vejen, og anti 2-vejen har indre tilhørende X_1. Lad r være punktet i Q, som tilhører A_1, så vil anti 2-vejen være mellem r og x_2. Denne anti 2-vej danner et antihul med r, z, q, x_2, så anti 2-vejen må have ulige længde, og da X_1 kun indeholder x_0 og x_1, må anti 2-vejen have længde tre. Dermed er antihullet af længde mindst seks, og det indeholder blandt andet punkterne x_0, x_1 og z. Lad P være en 2-vej fra x_0 til x_1, hvis indre tilhører A_0, så har P længde mindst tre, idet definition 11.9(i) giver, at x_0 og x_1 ikke har en fælles nabo i A_0. Dermed er z, x_0, P, x_1 et hul af længde mindst seks, som også indeholder x_0, x_1 og z, hvilket danner modstrid med lemma 15.9 i rapporten, så $x_0, \ldots, x_t$ er ikke en Y-firkantsdiamant af højde fire.

Antag, at $x_0, \ldots, x_t$ er en Y-diamant af højde tre. Dermed er $t = 3$, x_3 er komplet til X_1, og x_3 har en nabo i A_1. Da x_3 er komplet til X_1, følger af definition 11.9(iii), at x_3 er ikke-nabo til x_2. Lemma 16.10 i rapporten er opfyldt med $Y \cup \{x_3\}$ som antisammenhængende mængde, A_1 som sammenhængdende mængde, og x_0, x_1, x_2 og z som fire forskellige punkter i $V(G) - (Y \cup \{x_3\} \cup A_1)$, hvor lemma 16.10($i$) i rapporten er opfyldt per definition 11.9(iii) og definition 11.12, lemma 16.10 i rapporten(ii) er opfyldt per definition 11.9(iv), lemma 16.10(iii) i rapporten er opfyldt per definition 11.10, lemma 16.10(iv) i rapporten er opfyldt per definition 11.9(iii), samt fordi x_2 og x_3 er ikke-naboer, lemma 16.10(v) i rapporten er opfyldt, da x_3 er det eneste punkt i $Y \cup \{x_3\}$, som ikke er nabo til x_2 ifølge definition 11.12, og lemma 16.10(vi) i rapporten er opfyldt per definition 11.9(i)-(ii). Da følger fra lemma 16.10 i rapporten, at z er komplet til Y, og G indeholder et hjul $\{C, Y \cup \{x_3\}\}$. □

Lemma 11.14
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G, og lad $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde. Lad $x_0, \ldots, x_t$ være en Y-diamant i G af højde $t \geq 4$. Antag, at der ikke findes en antisammenhængende mængde Y', hvor $Y \subseteq Y' \subseteq V(G)$, så et af følgende er opfyldt:

(i) *Der findes en Y'-diamant i G af højde $t - 1$.*

(ii) *Der findes en Y'-firkant i G af højde $t - 1$.*

(iii) *Der findes en Y'-firkantsdiamant i G af højde t.*

Da vil z være komplet til Y, og G indeholder et hjul $\{C, Y\}$. ◇

Bevis
Antag, at enten z ikke er komplet til Y, eller G ikke indeholder et hjul $\{C, Y\}$. Definér X_i og A_i som i definition 11.10. Da $x_0, \ldots, x_t$ er en Y-diamant, er x_t komplet til X_{t-2}, og x_t har en nabo i A_{t-2}. Desuden er Y komplet til X_{t-1}, men x_t er ifølge definition 11.12 ikke komplet til X_{t-1}.

Påstand 1: *Ikke både x_t og x_{t-1} har naboer i A_{t-3}.*

Antag, at x_t og x_{t-1} begge har naboer i A_{t-3}. Hvis x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $Y \cup \{x_t\}$-diamant af højde $t - 1$, da $x_0, \ldots, x_{t-2}$ alle er komplette til $Y \cup \{x_t\}$, mens x_{t-1} ikke er komplet til $Y \cup \{x_t\}$, x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, og x_{t-1} har per antagelse en nabo i A_{t-3}. Dette danner modstrid med, at det er antaget, at der ikke findes Y', så der er en Y'-diamant af højde $t - 1$. Hvis x_{t-1} ikke er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_t$ en Y-diamant af højde $t - 1$, da x_t er komplet til X_{t-3}, og x_t per antagelse har en nabo i A_{t-3}, hvilket ligeledes giver en modstrid. Dermed kan x_t og x_{t-1} ikke begge have naboer i A_{t-3}, hvormed påstand 1 er vist.

Påstand 2: *Der findes et punkt q i A_{t-2}, som er nabo til både x_t og x_{t-1}, og der findes en 2-vej R i A_{t-2} fra q til A_{t-3}, så ikke både x_t og x_{t-1} har naboer i $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$.*

Lad F være en minimal sammenhængende delgraf af A_{t-2}, som indeholder A_{t-3} og indeholder naboer til både x_t og x_{t-1}.

Hvis x_t og x_{t-1} har en fælles nabo q i F, så vil $q \in A_{t-2} - A_{t-3}$ ifølge påstand 1. Da F er minimal, og A_{t-2} er sammenhængende, vil der findes en 2-vej R i A_{t-2} mellem q og A_{t-3}, så ikke både x_t og x_{t-1} har naboer i $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$, hvormed påstand 2 er opfyldt. Det kan derfor antages, at x_t og x_{t-1} ikke har en fælles nabo i F.

Lad P være en 2-vej mellem x_t og x_{t-1}, hvis indre tilhører F, og lad $P : x_t, p_1, \ldots, p_n, x_{t-1}$. Dermed må P have længde mindst tre, og fra hullet $C : z, x_t, P, x_{t-1}$ følger, at P har lige længde. De eneste punkter i C, der er komplette til X_{t-2}, er z og x_t, da A_{t-2} ifølge definition 11.10 ikke må indeholde punkter, som er komplette til X_{t-2}. Lemma 2.6 i rapporten med X_{t-2} som den antisammenhængende mængde, C som hullet af længde mindst seks, og zx_t som kanten, der er komplet til X_{t-2}, giver, at X_{t-2} indeholder enten en hat for C eller et afhop for C ved zx_t.
Antag først, at X_{t-2} indeholder et afhop. Da vil der findes to ikke-nabopunkter $x_i, x_j \in X_{t-2}$, så $x_i, p_1, \ldots, p_n, x_{t-1}, x_j$ er en 2-vej af ulige længde. Idet x_i og x_j er komplette til $Y \cup \{x_t\}$, følger af lemma 9.1, at 2-vejen $x_i, p_1, \ldots, p_n, x_{t-1}, x_j$ må indeholde yderligere mindst et punkt, som er komplet til $Y \cup \{x_t\}$, og da p_1 er det eneste punkt i 2-vejen, som er nabo til x_t, må p_1 være et sådant punkt. Desuden er endepunkterne i 2-vejen $x_i, p_1, \ldots, p_n, x_{t-1}, x_j$ komplette til $Y \cup \{x_t, z\}$, og intet indre punkt er komplet til $Y \cup \{x_t, z\}$, så ifølge lemma 9.1 vil $Y \cup \{x_t, z\}$ ikke være antisammenhængende, hvormed z må være komplet til Y. Da vil $C_1 : z, x_i, p_1, \ldots, p_n, x_{t-1}$ danne et hul af længde mindst seks, og $\{C_1, Y\}$ er et hjul, hvor zx_{t-1} og x_ip_1 er de to disjunkte kanter, der er komplette til Y. Dette danner en modstrid, da det er antaget, at ikke både z er komplet til Y, og der findes et hjul.
Dermed må X_{t-2} indeholde en hat for C ved zx_t. Det vil sige, at der findes et punkt $x_i \in X_{t-2}$, som kun er nabo til z og x_t i C. Dermed vil 2-vejen x_i, x_t, P, x_{t-1} have ulige længde mindst fem, dens endepunkter er komplette til $Y \cup \{z\}$, mens intet indre punkt er komplet til $Y \cup \{z\}$, da intet punkt i A_{t-2} er nabo til z. Da følger af lemma 9.1, at $Y \cup \{z\}$ ikke er antisammenhængende, så z er komplet til Y. Lad S være en 2-vej mellem x_i og x_{t-1}, hvis indre tilhører F, og en sådan vil findes, da $x_i \in X_{t-2}$ ifølge bemærkning 11.11 har en nabo i $A_{t-3} \subseteq F$, og F er sammenhængende. Da vil $F' = (V(S) \cup V(P)) - \{x_i, x_t\}$ fange trekanten $\{z, x_i, x_t\}$. Den eneste nabo til z i F' er x_{t-1}, som er ikke-nabo til både x_i og x_t. Hvis F' indeholder et spejlbillede af $\{z, x_i, x_t\}$, altså at der findes en nabo r til x_i i F', og der findes en nabo s til x_t i F', så $\{r, s, x_{t-1}\}$ danner en trekant, og der kun findes kanterne $x_{t-1}z, rx_i$ og sx_t mellem de to trekanter, så vil der dannes et antihul $z, s, x_i, x_{t-1}, x_t, r$ af længde seks. Antihullet og C har punkterne z, x_t og x_{t-1} til fælles, hvilket er i modstrid med lemma 15.9 i rapporten. Det vil sige, at F' ikke indeholder et spejlbillede af $\{z, x_i, x_t\}$, hvormed lemma 16.5 i rapporten giver, at der findes et punkt i F', som har to naboer i trekanten $\{z, x_i, x_t\}$. Da x_{t-1} er det eneste punkt i F', som er nabo til z, og x_{t-1} ikke har andre naboer i trekanten, så må der findes et punkt i F', som er nabo til både x_i og x_t, lad det være v. Idet x_i ikke har en nabo i $P - \{x_t\}$, da x_i er en hat for $C : z, x_t, P, x_{t-1}$ ved zx_t, følger det, at $v \notin P - \{x_t\}$. Det vil sige, at $v \in V(S)$. Idet x_i ikke er nabo til x_{t-1}, må v tilhøre det indre af S. Altså har x_i og x_t en nabo i det indre af S. Da x_{t-1} er endepunkt for S, har x_{t-1} ligeledes en nabo i det indre af S. Dermed findes der en 2-vej $P' : x_t, v, \ldots, x_{t-1}$ mellem x_t og x_{t-1}, hvor $P' - \{x_t\}$ er en delgraf af 2-vejen $S - \{x_i\}$. Da x_t og x_{t-1} ikke har en fælles nabo i F, og P' dermed har længde mindst tre, og P' danner et hul med x_t, z, x_{t-1}, har P' længde mindst fire. Dermed har også S længde mindst fire. Da både P' og S danner et hul med z, må de begge have lige længde. Det følger af lemma 9.2 med Y og X_{t-2} som antisammenhængende mængder og P' som 2-vejen, at der findes en kant i P', som er komplet til Y, da konklusionen ikke er opfyldt, $P' \subseteq A_{t-2}$, og A_{t-2} ifølge definition 11.10 ikke indeholder et punkt, som er komplet til X_{t-2}, og x_{t-1} ikke er komplet til X_{t-2}, så x_t er det eneste punkt i P', som er komplet til X_{t-2}. Idet x_t ikke er komplet til Y, må kanten, der er komplet til Y, tilhøre $P' - \{x_t\} \subseteq S - \{x_i\}$, så kanten tilhører S. Idet kanterne zx_{t-1} og zx_i også er komplette til Y, vil der findes mindst tre kanter i hullet z, x_i, S, x_{t-1}, der er komplette til Y, og dermed er hullet omkredsen af et hjul med Y som centrum. Altså vil der findes et hjul $\{z, x_i, S, x_{t-1}, Y\}$, hvilket danner modstrid med antagelsen om, at der ikke både findes et hjul, og z er komplet til Y. Som beskrevet først i beviset for denne påstand vil der findes det ønskede q og den ønskede P. Dermed er påstand 2 vist.

Vælg q og R som i påstand 2, hvor R er mindst mulig. Lad $R : r_1, \ldots, r_n$, hvor $r_1 = q$, og r_n er det eneste punkt tilhørende R i A_{t-3}.

Påstand 3: *x_{t-1} har naboer i A_{t-3}.*

Antag, at x_{t-1} ikke har naboer i A_{t-3}. Dermed må $q \notin A_{t-3}$, da q skal være nabo til både x_t og x_{t-1}. Da R er en 2-vej mellem q og A_{t-3}, må R have længde mindst en.

Antag først, at enhver anti 2-vej mellem x_{t-1} og q, hvis indre tilhører X_{t-2}, har ulige længde, og lad Q være en sådan anti 2-vej. Idet alle indre punkter i Q har naboer i A_{t-3}, og z er komplet til det indre af Q og antikomplet til A_{t-3}, så vil i $\overline{G}$ ingen kanter i Q være komplette til den antisammenhængende mængde A_{t-3}, og z vil ikke have en nabo i det indre af Q, men vil være komplet til A_{t-3}. Da følger af korollar 2.2 i rapporten anvendt i $\overline{G}$, at ikke begge endepunkter x_{t-1} og q er komplette til A_{t-3} i $\overline{G}$, hvormed det ene endepunkt må have en nabo i A_{t-3} i G. Da det er antaget, at x_{t-1} ikke har, så må q have en nabo i A_{t-3}. Da $q \notin A_{t-3}$, men har en nabo deri, så må q ifølge maksimaliteten af A_{t-3} være komplet til X_{t-3}. Da $q \in A_{t-2}$, må q være ikke-nabo til x_{t-2}. Da det er antaget, at enhver anti 2-vej mellem x_{t-1} og q har ulige længde, og q er ikke-nabo til x_{t-2}, må x_{t-2} og x_{t-1} være naboer, da der ellers haves en anti 2-vej af længde to. Dermed er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $Y \cup \{x_t\}$-firkant af højde $t-1$, da $x_0, \ldots, x_{t-2}$ alle er komplette til $Y \cup \{x_t\}$, men x_{t-1} er ikke komplet til $Y \cup \{x_t\}$, x_{t-1} er nabo til x_{t-2}, x_{t-1} har per antagelse ingen naboer i A_{t-3}, og der findes et punkt q i A_{t-2}, som er nabo til x_{t-1} og har en nabo i A_{t-3}. Dette danner modstrid med, at det er antaget, at der ikke findes en mængde Y', så der findes en Y'-firkant af højde $t-1$.

Det kan derfor antages, at der findes en anti 2-vej Q mellem x_{t-1} og q af lige længde, hvis indre tilhører X_{t-2}. Fra påstand 2 har ikke både x_t og x_{t-1} naboer i $A_{t-3} \cup V(R-\{q\})$. Da det er antaget, at x_{t-1} ikke har naboer i A_{t-3}, vil x_{t-1} kun have naboer i det indre af R i $A_{t-3} \cup V(R-\{q\})$. Antag, at x_{t-1} har en nabo deri, hvormed x_t ikke har en nabo i $A_{t-3} \cup V(R-\{q\})$. Dermed må R have længde mindst to. Anti 2-vejen x_t, x_{t-1}, Q, q har ulige længde, og dens endepunkter har ingen naboer i den sammenhængende mængde $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$, hvor x_t ikke har naboer deri, da x_{t-1} har naboer deri, og q ikke har naboer deri, da R er mindst mulig og har længde to. Punktet z er komplet til det indre af anti 2-vejen og antikomplet til $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$. Ved at anvende korollar 2.3 i rapporten i $\overline{G}$ med $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$ som antisammenhængende mængde og x_t, x_{t-1}, Q, q som 2-vej af ulige længde, følger det, at der må findes en kant i x_t, x_{t-1}, Q, q i $\overline{G}$, som er komplet til $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$. Det vil sige, at i G vil der findes mindst et punkt i det indre af anti 2-vejen x_t, x_{t-1}, Q, q, som ikke har naboer i $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$. Alle indre punkter i Q tilhører X_{t-2}, og har dermed hver en nabo i A_{t-3} ifølge bemærkning 11.11, hvormed det må være punktet x_{t-1}, der ikke har en nabo i $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$. Da det er antaget, at x_{t-1} har en nabo i $A_{t-3} \cup V(R-\{q\})$, så må x_{t-1} og r_2 være naboer, da r_2 er det eneste punkt, som tilhører $A_{t-3} \cup V(R-\{q\})$, men ikke tilhører $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$. Antag, at enhver anti 2-vej mellem x_{t-1} og r_2, hvis indre tilhører X_{t-2}, har ulige længde, og lad Q' være en sådan anti 2-vej. Alle indre punkter i Q' har naboer i den sammenhængende mængde A_{t-3}, og z er komplet til det indre af Q' og antikomplet til A_{t-3}, hvormed intet indre punkt i Q' i $\overline{G}$ vil være komplet til den antisammenhængende mængde A_{t-3}, og z vil være komplet til A_{t-3}, men ikke have naboer i det indre af Q'. Da følger af korollar 2.3 i rapporten, at ikke begge endepunkter i Q' i $\overline{G}$ er komplette til A_{t-3}. Dermed vil r_2 i G have en nabo i A_{t-3}, da det er antaget, at x_{t-1} ikke har naboer i A_{t-3}. Da $r_2 \in A_{t-2} - A_{t-3}$, må r_2 grundet maksimaliteten af A_{t-3} være komplet til X_{t-3}. Dermed er r_2 ikke-nabo til x_{t-2}. Da det er antaget, at enhver anti 2-vej Q' mellem x_{t-1} og r_2 med indre tilhørende X_{t-2} har ulige længde, må x_{t-2} og x_{t-1} være naboer, for ellers haves en anti 2-vej x_{t-1}, x_{t-2}, r_2 af længde to. Dermed er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $Y \cup \{x_t\}$-firkant af højde $t-1$, da $x_0, \ldots, x_{t-2}$ alle er komplette til $Y \cup \{x_t\}$, men x_{t-1} er ikke komplet til $Y \cup \{x_t\}$, x_{t-1} er nabo til x_{t-2}, x_{t-1} har per antagelse ikke en nabo i A_{t-3}, og der findes et punkt r_2 i A_{t-2}, som er nabo til x_{t-1} og har en nabo i A_{t-3}. Dette giver en modstrid, så der må findes en anti 2-vej Q' mellem x_{t-1} og r_2, hvis indre tilhører X_{t-2}, der har lige længde. Dermed vil anti 2-vejen x_{t-1}, Q', r_2, z have ulige længde, og dens endepunkter vil ikke have en nabo i den sammenhængende mængde $A_{t-3} \cup \{r_3, \ldots, r_n\}$, mens alle dens indre punkter vil. Ifølge lemma 9.1 anvendt i $\overline{G}$ vil x_{t-1}, Q', r_2, z have længde tre, hvormed Q' har længde to. Lad x_i være midterpunktet i Q', altså $Q' : x_{t-1}, x_i, r_2$. Dermed vil den sammenhængende mængde $F : A_{t-3} \cup V(R-\{q, r_2\}) \cup \{x_i, x_t, z\}$ fange trekanten $\{q, r_2, x_{t-1}\}$. Her er x_t og muligvis x_i naboer til q i F, $A_{t-3} \cup \{r_3\}$ indeholder naboerne til r_2 i F, og z er naboen til x_{t-1} i F. Ifølge lemma 16.5 i rapporten skal F enten indeholde et spejlbillede af $\{q, r_2, x_{t-1}\}$ eller indeholde et punkt, der har

mindst to naboer i $\{q, r_2, x_{t-1}\}$. Da z ikke har naboer i $A_{t-3} \cup \{r_3\}$, så kan F ikke indeholde et spejlbillede, og da de tre punkter q, r_2 og x_{t-1} ikke har en fælles nabo, er en modstrid opnået, så antagelsen, om at x_{t-1} har en nabo i $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$, må være forkert.
Da x_{t-1} ikke har naboer i $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$, vil z, q, Q, x_{t-1} være en anti 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter ikke har naboer i $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$, og hvis indre punkter alle har naboer deri. Da følger af lemma 9.1, at anti 2-vejen har længde tre, hvormed Q har længde to. Lad Q's midterpunkt være x_i. Da $x_i \in X_{t-2}$ ifølge bemærkning 11.11 har en nabo i A_{t-3}, så vil der findes en 2-vej P mellem q og x_i, hvis indre tilhører $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$. Lad C være hullet z, x_{t-1}, q, P, x_i, så har C længde mindst seks, da q ikke har naboer i A_{t-3}. Ifølge lemma 15.9 vil der ikke findes et antihul af længde mindst seks, som indeholder punkterne q, x_i og x_{t-1}. Hvis q ikke er komplet til Y, så findes der en anti 2-vej mellem q og x_t, hvis indre tilhører Y. Denne anti 2-vej danner et antihul med x_t, x_{t-1}, x_i, q, og et sådant antihul må ikke findes, så q er komplet til Y. Hvis z ikke er komplet til Y, så findes der en anti 2-vej mellem z og x_t, hvis indre tilhører Y. Denne anti 2-vej danner et antihul med x_t, x_{t-1}, x_i, q, z, og et sådant antihul må ikke findes, så z er også komplet til Y. Både x_i og q er komplette til $Y \cup \{x_t\}$, og z, som også er komplet til $Y \cup \{x_t\}$, har ikke en nabo i det indre af P. Dermed følger af korollar 2.3 i rapporten, at P må indeholde en kant, som er komplet til $Y \cup \{x_t\}$. Dermed vil hullet C indeholde mindst to kanter, som er komplette til Y, så $\{C, Y\}$ er et hjul, hvilket giver en modstrid, da det er antaget, at der ikke både findes et hjul, og z er komplet til Y. Hermed er påstand 3 vist.

Fra påstand 3 og valget af R følger det, at x_t ikke har naboer i $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$. Lad Q være en anti 2-vej mellem q og x_{t-1}, hvis indre tilhører X_{t-2}. Da er z, q, Q, x_{t-1}, x_t en anti 2-vej af længde mindst fire, hvis endepunkter ikke har naboer i den sammenhængende mængde $A_{t-3} \cup V(R - \{q\})$, og hvis indre punkter alle har en nabo deri. I $\overline{G}$ er ingen af konklusionerne i lemma 9.1 opfyldte, så z, q, Q, x_{t-1}, x_t må have lige længde, hvormed Q også har lige længde. Anti 2-vejen q, Q, x_{t-1}, x_t har derfor ulige længde, og alle dens indre punkter har naboer i A_{t-3}. Da z er komplet til det indre af anti 2-vejen og antikomplet til A_{t-3}, så følger af korollar 2.3 i rapporten anvendt i $\overline{G}$, at et af endepunkterne x_t eller q har en nabo i A_{t-3}, hvormed q må have en nabo i A_{t-3}. Da $q \in A_{t-2} - A_{t-3}$, og A_{t-3} er valgt størst mulig, må q være komplet til X_{t-3} og ikke-nabo til x_{t-2}. Hvis x_{t-1} ikke er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_t$ en Y-firkantsdiamant af højde t, da x_t er komplet til X_{t-2} grundet $x_0, \ldots, x_t$ er en Y-diamant, x_{t-1} er ikke komplet til X_{t-3}, x_t har ifølge påstand 3 ingen nabo i A_{t-3}, x_{t-1} har en nabo i A_{t-3}, og der findes et punkt q i A_{t-2}, som er nabo til både x_t og x_{t-1} og har en nabo i A_{t-3}. Dette er i modstrid med antagelsen om, at der ikke findes en sådan Y'. Hvis x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $Y \cup \{x_t\}$-diamant af højde $t-1$, da $x_0, \ldots, x_{t-2}$ alle er komplette til $Y \cup \{x_t\}$, men x_{t-1} er ikke komplet til $Y \cup \{x_t\}$, x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, og x_{t-1} har ifølge påstand 3 en nabo i A_{t-3}. Dette giver ligeledes en modstrid med antagelsen om, at der ikke findes en sådan Y'. Det vil sige, at antagelsen, om at enten z ikke er komplet til Y, eller G ikke indeholder et hjul $\{C, Y\}$, må være forkert. □

Lemma 11.15
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G, og lad $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde. Lad $x_0, \ldots, x_t$ være en Y-firkant i G af højde $t \geq 4$. Da findes der en antisammenhængende mængde Y', hvor $Y \subseteq Y' \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$, så et af følgende er opfyldt:

(i) *Der findes en Y'-diamant i G af højde $t-1$.*

(ii) *Der findes en Y'-firkant i G af højde $t-1$.*

(iii) *Der findes en Y'-firkantsdiamant i G af højde t.*

◇

Bevis
Antag, at der ikke findes en sådan mængde Y'. Lad X_i og A_i være som i definition 11.12. Da

$x_0, \ldots, x_t$ er en Y-firkant, vil x_t være nabo til x_{t-1}, x_t vil have en nabo i A_{t-2}, og der vil findes et punkt q i A_{t-1}, som er nabo til x_t og har en nabo i A_{t-2}. Per definition 11.10 er Y komplet til X_{t-1}, men ikke til x_t. Da q er nabo til x_t, og x_t ikke har en nabo i A_{t-2}, må $q \in A_{t-1} - A_{t-2}$, og da q har en nabo i A_{t-2}, og A_{t-2} er maksimal, må q være komplet til X_{t-2}. Da A_{t-1} ikke må indeholde punkter, der er komplette til X_{t-1}, må q og x_{t-1} ikke være naboer.

Påstand 1: *x_{t-1} har en nabo i A_{t-3}.*

Antag, at x_{t-1} ikke har naboer i A_{t-3}. Lad R være en 2-vej mellem q og x_{t-1}, hvis indre tilhører A_{t-2}, da har R længde mindst to. Da R danner et hul med x_{t-1}, x_t, q, må R have lige længde. Dermed er q, R, x_{t-1}, z en 2-vej af ulige længde, hvis endepunkter er komplette til X_{t-2}, og hvis indre punkter ikke er komplette til X_{t-2}. Da følger af lemma 9.1, at 2-vejen q, R, x_{t-1}, z har længde tre, altså har R længde to. Desuden følger det af lemma 9.1 at der findes en anti 2-vej mellem de indre punkter i q, R, x_{t-1}, z, hvor anti 2-vejens indre tilhører X_{t-2}. Lad r være R's midterpunkt. Idet det er antaget, at x_{t-1} ikke har naboer i A_{t-3}, så må $r \in A_{t-2} - A_{t-3}$. Lad Q være en anti 2-vej mellem r og x_{t-1} med indre i X_{t-2}. Idet r, Q, x_{t-1}, q, z er et antihul, må Q have ulige længde. Alle punkter i X_{t-2} har en nabo i A_{t-3} ifølge bemærkning 11.11. Dermed har alle indre punkter i Q en nabo i A_{t-3}, men x_{t-1} har ikke en nabo i A_{t-3}. Desuden er z komplet til det indre af Q og antikomplet til A_{t-3}. Anvendes korollar 2.3 i rapporten i $\overline{G}$ på Q med A_{t-3} som antisammenhængende delmængde, må r ikke være komplet til A_{t-3}. I G vil det sige, at r har en nabo i A_{t-3}, og da $r \notin A_{t-3}$, og A_{t-3} er maksimal, må r være komplet til X_{t-3} og ikke-nabo til x_{t-2}. Idet $z, x_{t-1}, r, q, x_{t-2}$ ikke må være et hul, så er x_{t-2} og x_{t-1} naboer. Da er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $Y \cup \{q\}$-firkant af højde $t-1$, hvilket er i modstrid med antagelsen, idet $Y \cup \{q\} \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$. Dermed må x_{t-1} have naboer i A_{t-3}, og påstand 1 er vist.

Påstand 2: *q har naboer i A_{t-3}.*

Antag, at q ikke har naboer i A_{t-3}. Lad S være en anti 2-vej mellem x_t og x_{t-1}, hvor $V(S) \subseteq X_t$, hvilket vil sige, at S har indre i X_{t-2}. Da er x_t, S, x_{t-1}, q en anti 2-vej af længde mindst tre. Fra bemærkning 11.11 og påstand 1 vil alle anti 2-vejens indre punkter have naboer i A_{t-3}, og dens endepunkter har ikke naboer i A_{t-1}. Punktet z er komplet til anti 2-vejens indre og antikomplet til A_{t-3}, så ifølge korollar 2.3 i rapporten anvendt i $\overline{G}$, har x_t, S, x_{t-1}, q lige længde, hvormed S har ulige længde. Dermed har x_t, S, x_{t-1}, q, z ulige længde mindst fem, dens indre punkter har alle en nabo i A_{t-2}, og dens endepunkter har ikke naboer i A_{t-2}. Anvendes lemma 9.1 i $\overline{G}$ opnåes en modstrid, da der ikke findes kanter i Q, som er komplette til A_{t-3}, og Q ikke har længde tre. Dermed er påstand 2 vist.

Hvis x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $Y \cup \{q\}$-diamant af højde $t-1$, da x_{t-1} ifølge påstand 1 har naboer i A_{t-3}. Dette danner modstrid med antagelsen, idet $Y \cup \{q\} \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$. Det vil sige, at x_{t-1} ikke er komplet til X_{t-3}. Hvis x_t er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_{t-2}, x_t$ en Y-firkantsdiamant af højde t, da x_t er komplet til $X_{t-3} \cup \{x_{t-1}\}$, x_{t-1} ikke er komplet til X_{t-3}, x_t ikke har en nabo i A_{t-3}, x_{t-2} har en nabo i A_{t-3} ifølge bemærkning 11.11, og q tilhører A_{t-1}, q er nabo til både x_t og x_{t-2} samt har en nabo i A_{t-3} ifølge påstand 2. Dette danner en modstrid, da $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$. Hvis x_t ikke er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_t$ en Y-firkant af højde $t-1$, da x_t er nabo til x_{t-1}, x_t ikke har en nabo i A_{t-3}, og q tilhører A_{t-1}, q er nabo til x_t og har ifølge påstand 2 en nabo i A_{t-3}. Dette danner modstrid med antagelsen, idet $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$. Altså må antagelsen, om at der ikke findes en sådan mængde Y', være forkert. □

Lemma 11.16

Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G, og lad $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde. Lad $x_0, \ldots, x_{t+1}$ være en Y-firkantsdiamant i G af højde $t+1 \geq 5$. Da findes der en ikke-tom antisammenhængende mængde Y', hvor $Y' \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$, så enten $Y \subseteq Y'$, eller z ikke er komplet til Y', og så et af følgende er opfyldt:

(i) *Der findes en Y'-diamant i G af højde $t-1$.*

(ii) *Der findes en Y'-firkant i G af højde $t-1$.*

(iii) *Der findes en Y'-firkantsdiamant i G af højde t.*

◇

Bevis
Antag, at der ikke findes en mængde Y', så lemmaet er opfyldt. Det vil sige, at en modstrid er opnået, hvis der findes en antisammenhængende mængde Y', hvor $Y \subseteq Y'$, z ikke er komplet til Y', og (i),(ii) eller (iii) er opfyldt. Lad X_i og A_i være som i definition 11.10. Da $x_0, \ldots, x_{t+1}$ er en Y-firkantsdiamant, vil det ifølge definition 11.12 sige, at X_t er komplet til Y, x_{t+1} er ikke komplet til Y, x_{t+1} er komplet til X_{t-1}, x_t er ikke komplet til X_{t-2}, x_{t+1} har ikke en nabo i A_{t-2}, x_t har en nabo i A_{t-2}, og der findes et punkt q i A_{t-1}, som er nabo til både x_{t+1} og x_t samt har en nabo i A_{t-2}. Da $q \in A_{t-1}$ har en nabo i A_{t-2}, og A_{t-2} er valgt størst mulig, må q være komplet til X_{t-2} og ikke-nabo til x_{t-1}.

Vælg en 2-vej $v_1, \ldots, v_s$, så s er mindst muligt, $v_1, \ldots, v_s \in A_{t-2}$, v_1 er nabo til q, og $v_s \in A_{t-3}$. Bemærk, at hvis q har en nabo i A_{t-3}, så er $s = 1$. Lad R være en 2-vej mellem q og x_{t-1}, hvis indre tilhører A_{t-2}, og hvis det er muligt, så dens indre tilhører $A_{t-3} \cup \{v_1, \ldots, v_s\}$. Dermed har R længde mindst to, og da 2-vejen danner et hul med x_{t-1}, x_{t+1}, q, har R lige længde. Det vil sige, at 2-vejen q, R, x_{t-1}, z har ulige længde, og dens endepunkter er komplette til X_{t-2}, mens dens indre punkter ikke er komplette til X_{t-2}. Da følger af lemma 9.1, at q, R, x_{t-1}, z har længde tre, hvormed R har længde to. Lad r være midterpunktet i R.

Påstand 1: *x_{t-1} har en nabo i A_{t-3}.*

Antag, at x_{t-1} ikke har naboer i A_{t-3}. Det følger da, at $r \in A_{t-2} - A_{t-3}$. Lad Q være en anti 2-vej mellem r og x_{t-1}, hvis indre tilhører X_{t-2}. Idet r, Q, x_{t-1}, q, z er et antihul, må Q have ulige længde. Alle indre punkter i Q har en nabo i A_{t-3}, og endepunktet x_{t-1} har per antagelse ikke en nabo i A_{t-3}. Desuden er z komplet til det indre af Q og antikomplet til A_{t-3}. Det følger af korollar 2.3 i rapporten anvendt i $\overline{G}$, at r har en nabo i A_{t-3}. Dermed er r komplet til X_{t-3} grundet maksimaliteten af A_{t-3}, og r er ikke-nabo til x_{t-2}. Idet $z, x_{t-1}, r, q, x_{t-2}$ ikke må være et hul, må x_{t-2} og x_{t-1} være naboer. Dermed er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $\{q\}$-firkant af højde $t-1$, og z er ikke komplet til $\{q\}$, hvilket danner en modstrid, da q kan betragtes som en Y' mængde, hvilken per antagelse ikke findes. Dette viser påstand 1.

Fra påstand 1 følger, at det er muligt at vælge R, så 2-vejens indre tilhører $A_{t-3} \cup \{v_1, \ldots, v_s\}$, da x_{t-1} har en nabo i A_{t-3}. Hermed har R indre tilhørende $A_{t-3} \cup \{v_1, \ldots, v_s\}$.

Påstand 2: *q har naboer i A_{t-3}, hvormed $r \in A_{t-3}$.*

Antag, at q ikke har naboer i A_{t-3}. Lad Q være en anti 2-vej mellem x_{t-1} og r, hvis indre tilhører X_{t-2}. Da x_{t-1}, Q, r, z, q danner et antihul, må Q have ulige længde. Dermed har anti 2-vejen $q, x_{t-1}, Q, r, x_{t+1}$ ligeledes ulige længde, og anti 2-vejen må have længde mindst fem. Punkterne i Q har alle en nabo i $A_{t-3} \cup \{v_2, \ldots, v_s\}$, mens hverken q eller x_{t+1} har naboer i $A_{t-3} \cup \{v_2, \ldots, v_s\}$, hvor q ikke har naboer deri, da q er komplet til X_{t-2} og nabo til v_1 i 2-vejen $v_1, \ldots, v_s$. Dette er i modstrid med lemma 9.1 anvendt i $\overline{G}$, så q har naboer i A_{t-3}.
Da R er valgt med indre tilhørende $A_{t-3} \cup \{v_1, \ldots, v_s\}$, og q har en nabo i A_{t-3}, må $r \in A_{t-3}$. Hermed er påstand 2 vist.

Påstand 3: *x_{t-1} er ikke komplet til X_{t-3}.*

Hvis x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-1}$ en $\{q\}$-diamant af højde $t-1$, da x_{t-1} er komplet til X_{t-3}, og x_{t-1} ifølge påstand 1 har en nabo i A_{t-3}. Dette danner en modstrid, da z ikke er komplet til $\{q\}$, og idet q kan betragtes som en Y' mængde, hvilken per antagelse ikke eksisterer. Dette viser påstand 3.

Påstand 4: *x_t har ikke en nabo i A_{t-3}.*

Antag, at x_t har en nabo i A_{t-3}. Hvis x_t er komplet til X_{t-3}, så er x_t ikke-nabo til x_{t-2}, da x_t ikke er komplet til X_{t-2}. Dermed er $x_0, \ldots, x_{t-2}, x_t$ en $Y \cup \{x_{t+1}\}$-diamant af højde $t-1$, da x_{t+1} ikke er komplet til $Y \cup \{x_{t+1}\}$, hvormed $Y \cup \{x_{t+1}\}$ er antisammenhængende, $x_0, \ldots, x_{t-2}$ alle er komplette til $Y \cup \{x_{t+1}\}$, x_t er ikke-nabo til x_{t+1}, da x_{t+1} er komplet til X_{t-1} og ifølge definition 11.9(iii), x_t er komplet til X_{t-3}, og x_t har en nabo i A_{t-3}. Dette danner modstrid, da $Y \cup \{x_{t+1}\}$ kan betragtes som en Y' mængde, hvilken per antagelse ikke findes. Hvis x_t ikke er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}$ en Y-firkantsdiamant af højde t, da $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_t$ alle er komplette til Y, mens x_{t+1} ikke er komplet til Y, x_{t+1} er komplet til X_{t-1}, x_t er ikke komplet til X_{t-3}, x_{t+1} har ikke en nabo i A_{t-3}, og der findes et punkt q i A_{t-1}, som er nabo til både x_{t+1} og x_t samt har en nabo i A_{t-3}. Dette giver en modstrid, da Y kan betragtes som en Y' mængde. Dermed er påstand 4 vist.

Ifølge påstand 2 vil $r \in A_{t-3}$, og påstand 4 giver, at x_t ikke har naboer i A_{t-3}, så x_t og r er ikke naboer. Idet z, x_t, q, r, x_{t-1} ikke må være et hul, er x_t og x_{t-1} naboer. Hvis x_t er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_{t-2}, x_t$ en $Y \cup \{x_{t+1}\}$-firkantsdiamant af højde t, da X_{t-1} er komplet til $Y \cup \{x_{t+1}\}$, mens x_t ikke er komplet til $Y \cup \{x_{t+1}\}$, x_t er komplet til $X_{t-3} \cup \{x_{t-1}\}$, x_{t-2} er ikke komplet til X_{t-3} ifølge definition 11.9(iii), x_t har ingen naboer i A_{t-3} ifølge påstand 4, x_{t-2} har en nabo i A_{t-3} ifølge bemærkning 11.11, og der findes et punkt q, som er nabo til både x_t og x_{t-2} (da q er komplet til X_{t-2}) og har en nabo i A_{t-3} ifølge påstand 2. Dette danner en modstrid, da $Y \cup \{x_{t+1}\}$ kan betragtes som en Y' mængde. Hvis x_t ikke er komplet til X_{t-3}, så er $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}, x_t$ en $Y \cup \{x_{t+1}\}$-firkant af højde $t-1$, da $x_0, \ldots, x_{t-3}, x_{t-1}$ alle er komplette til $Y \cup \{x_{t+1}\}$, mens x_t ikke er komplet til $Y \cup \{x_{t+1}\}$, x_t er nabo til x_{t-1}, x_t har ikke naboer i A_{t-3} ifølge påstand 4, og der findes et punkt q i A_{t-1}, som er nabo til x_t og har en nabo i A_{t-3}. Igen er en modstrid opnået, så antagelsen, om at der ikke findes en mængde Y' som beskrevet i lemmaet, må være forkert. $\square$

Lemma 11.17
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme i G, og lad $Y \subseteq V(G) - (A_0 \cup \{z\})$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde. Antag, at der findes enten en Y-diamant, en Y-firkant eller en Y-firkantsdiamant i G. Da vil z være komplet til Y, og G vil indeholde et hjul $\{C, Y\}$. $\diamond$

Bevis
Påstand: *Hvis $Y_1 \subseteq V(G)$ er en antisammenhængende mængde, hvor $Y \subseteq Y_1$, og der findes en Y_1-firkantsdiamant i G af højde $t+1$, så kan det antages, at der findes en antisammenhængende mængde Y_2, hvor $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq V(G)$, så der findes en Y_2-firkant eller en Y_2-diamant i G af højde højst $t-1$.*

Dette bevises ved induktion over t. Induktionsbasis er $t = 3$, hvor lemma 11.13 giver, at der enten ikke findes en Y-firkant eller en Y-firkantsdiamant, eller så er lemmaet opfyldt. Det kan derfor antages, at $t \geq 4$. Ifølge lemma 11.16 vil der enten findes en antisammenhængende mængde Y_2, hvor $Y_1 \subseteq Y_2$, eller z er ikke komplet til Y_2, og desuden følger, at der findes en Y_2-diamant af højde $t-1$, en Y_2-firkant af højde $t-1$ eller en Y_2-firkantsdiamant af højde t. Hvis der findes en Y_2-diamant af højde $t-1$ eller en Y_2-firkant af højde $t-1$, så er påstanden opfyldt. Det kan derfor antages, at der findes en Y_2-firkantsdiamant af højde t. Ifølge induktionsantagelsen vil der findes en antisammenhængende mængde Y_3, hvor $Y_2 \subseteq Y_3$, så G indeholder en Y_3-diamant eller en Y_3-firkant af højde højst $t-2$. Da $Y_1 \subseteq Y_2$ og $Y_2 \subseteq Y_3$, vil $Y_1 \subseteq Y_3$, hvormed påstanden er opfyldt. Dette viser påstanden.

Det er i lemmaet antaget, at der findes en Y-diamant, en Y-firkant eller en Y-firkantsdiamant. Hvis der findes en Y-firkantsdiamant, så følger af påstanden, at der findes en antisammenhængende mængde Y_1, hvor $Y \subseteq Y_1$. Det vil sige, at G indeholder en Y_1-diamant eller en Y_1-firkant. Det kan altså antages, at der findes en Y_1-diamant eller en Y_1-firkant i G af højde t for et t. Vælg t mindst muligt. Hvis $t = 3$, så følger lemmaet af lemma 11.13, hvormed det kan antages, at $t \geq 4$. Fra påstanden vil der ikke findes en antisammenhængende mængde Y_2, så $Y_1 \subseteq Y_2$, og G indeholder en Y_2-firkantsdiamant af højde højst t. Hvis der findes en Y_1-diamant, så følger lemmaet af lemma 11.14. Hvis der findes en Y_1-firkant, så opnåes en modstrid med lemma 11.15, da Y_2, hvor $Y_1 \subseteq Y_2$, er vist ikke at findes. $\square$

Følgende svarer til lemma 16.11 i rapporten.

Lemma 11.18
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_7$, og lad $X, Y \subseteq V(G)$ være ikke-tomme disjunkte antisammenhængende mængder, som er komplette til hinanden. Lad $p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$ af længde mindst fire, så p_1 og p_n er komplette til X, mens punkterne $p_2, \ldots, p_{n-1}$ ikke er komplette til X. Antag, at et af følgende er opfyldt:

(*i*) *p_1, p_2 og p_3 er alle komplette til Y.*

(*ii*) *Der findes i, hvor $1 \leq i \leq n-3$, så p_i, p_{i+1}, p_{i+2} og p_{i+3} alle er komplette til Y.*

(*iii*) *Der findes i, hvor $1 \leq i \leq n-3$, så p_{i+1} og p_{i+2} er komplette til Y, mens p_i og p_{i+3} ikke er komplette til Y.*

Da findes der et hjul i G med Y som centrum, og hvis (iii) er opfyldt, så vil G yderligere have en balanceret skæv opdeling. $\diamond$

Bevis
For (*i*) lad $i = 1$, og for (*ii*) og (*iii*) lad i være som givet der. Lad Q være en anti 2-vej mellem p_{i+1} og p_{i+2}, hvis indre tilhører X, og en sådan vil findes, da $p_{i+1}, p_{i+2} \in \{p_2, \ldots, p_{n-1}\}$ ikke er komplette til X. Idet $2 \leq i+1 < i+2 \leq n-1$, $n \geq 5$, og både p_1 og p_n er komplette til det indre af Q, så følger af lemma 10.1, at Q har længde to, da konklusionen i lemmaet ikke er opfyldt. Dermed vil der findes et punkt $x \in X$, som er ikke-nabo til både p_{i+1} og p_{i+2}. Vælg h, hvor $1 \leq h \leq i$, størst muligt, så x er nabo til p_h. Vælg j, hvor $i+3 \leq j \leq n$, mindst muligt, så x er nabo til p_j. Dermed er $x, p_h, \ldots, p_j$ et hul C af længde mindst fem, men da $G \in \mathcal{F}_7$, vil hullet have længde mindst seks. Hullet C vil indeholde punkterne x, p_i, p_{i+1}, p_{i+2} og p_{i+3}, hvor x, p_{i+1} samt p_{i+2} ifølge valget af i og (*i*)-(*iii*), alle er komplette til Y . Ved (*i*) er $h = 1$, da $i = 1$, hvormed kanterne xp_1, p_1p_2 og p_2p_3 alle findes i C, og alle er komplette til Y, hvormed $\{C, Y\}$ per definition 15.10 i rapporten er et hjul. Ved (*ii*) er kanterne $p_ip_{i+1}, p_{i+1}p_{i+2}$ og $p_{i+2}p_{i+3}$ alle i C og alle komplette til Y, så $\{C, Y\}$ er et hjul. I (*iii*) er punkterne x, p_{i+1} og p_{i+2} alle komplette til Y. Fra korollar 2.4 i rapporten anvendt på den antisammenhængende mængde Y og hullet C følger da, at der findes et lige antal kanter, som er komplette til Y, og da $p_{i+1}p_{i+2}$ er en kant, som er komplet til Y, må der findes mindst en anden kant. Da hverken p_ip_{i+1} eller $p_{i+2}p_{i+3}$ er komplette til Y, vil der findes to disjunkte kanter, som er komplette til Y, hvormed $\{C, Y\}$ er et hjul. Da $p_{i+1}p_{i+2}$ er et udsnit af C af ulige længde, er $\{C, Y\}$ et hjul af ulige længde, hvormed sætning 15.16 i rapporten giver, at G har en balanceret skæv opdeling. $\square$

Kapitel 12

Familien $\mathcal{F}_8$

Lemma 12.1
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme med $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$, og lad $x_0, \ldots, x_{t+1}$ være et hjulsystem med Y som centrum, og $t \geq 2$. Lad X_i og A_i være som i definition 11.10. Da vil et af følgende være opfyldt:

(i) *x_{t+1} har en nabo i A_{t-1}.*

(ii) *Der findes et punkt i Y, som er ikke-nabo til x_{t+1} og er antikomplet til A_t.*

(iii) *Der findes mindst to punkter i Y, som er ikke-naboer til x_{t+1} og antikomplette til A_{t-1}.*

(iv) *Der findes et hjul i G med Y som centrum.*

$\diamond$

Bevis
Antag, at x_{t+1} ikke har en nabo i A_{t-1}, altså at (i) ikke gælder.

Påstand 1: *Der findes ikke punkter $x_i, x_j \in X_t$, som er forbundet af en 2-vej x_i, x_{t+1}, P, x_j af ulige længde, så P's indre tilhører A_t.*

Antag, at der findes en sådan 2-vej P, og lad $P : x_{t+1}, a_1, \ldots, a_n, x_j$. Lad S være en 2-vej mellem x_i og x_j, hvis indre tilhører A_{t-1}. Da har S lige længde, fordi S danner et hul med 2-vejen x_i, z, x_j. Idet x_{t+1}, P, x_j, S, x_i ikke må være et hul, og det er antaget, at x_{t+1} ikke har naboer i A_{t-1}, må der findes kanter mellem det indre af P og det indre af S, altså er $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup A_{t-1}$ sammenhængende. Da x_{t+1} ikke har naboer i A_{t-1}, må $a_1 \in A_t - A_{t-1}$, og der må findes k, hvor $1 \leq k \leq n$, så $a_k \in A_t - A_{t-1}$, og a_k har en nabo i A_{t-1}. Da A_{t-1} er maksimal, må a_k være komplet til X_{t-1}. Mindst et af x_i og x_j må tilhøre X_{t-1}, så $k = n$, lad det være x_j som tilhører X_{t-1}, og da x_i ikke må have naboer i det indre af P, vil $i = t$. Mængden $F = \{a_1, \ldots, a_n, x_j\} \cup A_{t-1}$ er sammenhængende og fanger trekanten $\{z, x_{t+1}, x_t\}$, hvor x_j er den eneste nabo til z i F, a_1 er den eneste nabo til x_{t+1} i F, og x_t har ifølge bemærkning 11.11 en nabo i A_{t-1}. Da x_j og a_1 ikke er naboer, kan F ikke indeholde et spejlbillede af $\{z, x_{t+1}, x_t\}$, og da hverken x_j eller a_1 tilhører A_{t-1}, findes der ikke et punkt i F, som har mindst to naboer i $\{z, x_{t+1}, x_t\}$, hvilket danner en modstrid med lemma 16.5 i rapporten. Altså vil der ikke findes en sådan 2-vej P, hvormed påstand 1 er vist.

Idet x_{t+1} ifølge bemærkning 11.11 har en nabo i A_t, og det er antaget, at x_{t+1} ikke har en nabo i A_{t-1}, vil der findes en 2-vej mellem x_{t+1} og A_{t-1}, hvis indre tilhører $A_t - A_{t-1}$. Det vil sige, at der findes en 2-vej $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m$, så $a_1, \ldots, a_m \in A_t - A_{t-1}$, a_m har en nabo i A_{t-1}, og $a_1, \ldots, a_{m-1}$ ikke har en nabo i A_{t-1}. Dermed er $m \geq 1$, og a_m er komplet til X_{t-1}, da A_{t-1} er maksimal og sammenhængende. Hvis det er muligt, så vælg en sådan 2-vej $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m$, så hvert punkt i Y har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$.

Påstand 2: *Det kan antages, at et af $x_0, \ldots, x_t$ er ikke-nabo til både x_{t+1} og a_1.*

Da x_{t+1} og a_1 begge ikke er komplette til X_t, vil der findes en anti 2-vej Q mellem dem, hvis indre tilhører X_t.

Antag, at Q har ulige længde. Ethvert punkt i det indre af Q har en nabo i den sammenhængende mængde A_{t-1}, mens x_{t+1} per antagelse ikke har en nabo i A_{t-1}. Desuden er z komplet til det indre af Q og antikomplet til A_{t-1}. Da følger af korollar 2.3 i rapporten anvendt i $\overline{G}$, at a_1 ikke er komplet til A_{t-1} i $\overline{G}$. Det vil sige, at i G har a_1 en nabo i A_{t-1}. Dermed er $m = 1$, og $a_1 = a_m$ er komplet til X_{t-1}. Da $a_1 \in A_t$ er komplet til X_{t-1}, vil a_1 være ikke-nabo til x_t. Hvis x_t ikke er nabo til x_{t+1}, så er påstanden opfyldt, da x_t så er ikke-nabo til både a_1 og x_{t+1}. Hvis x_t er nabo til x_{t+1}, så er $x_0, \ldots, x_{t+1}$ en Y-firkant, da x_{t+1} er nabo til x_t, x_{t+1} per antagelse ikke har en nabo i A_{t-1}, og der findes et punkt a_1 i A_t, som er nabo til x_{t+1} og har en nabo i A_{t-1}. Da følger af lemma 11.17, at G indeholder et hjul med Y som centrum, hvormed (iv) er opfyldt.

Antag nu, at Q har lige længde. Anti 2-vejen z, a_1, Q, x_{t+1} har dermed ulige længde mindst tre. Alle dens indre punkter har en nabo i den sammenhængende mængde $A_{t-1} \cup \{a_2, \ldots, a_m\}$, og dens endepunkter z og x_{t+1} har ikke naboer deri. Ved at anvende lemma 9.1 i $\overline{G}$ kan det konkluderes, at z, a_1, Q, x_{t+1} har længde tre, hvormed Q har længde to. Det vil sige, at der i G findes et punkt tilhørende X_t, som er ikke-nabo til både a_1 og x_{t+1}, hvormed påstand 2 er vist.

Påstand 3: *Det kan antages, at ethvert punkt i Y har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$.*

Antag, at der findes et $y \in Y$, som ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$.
Hvis y ikke har en nabo i A_t, så er (ii) opfyldt, da y så er ikke-nabo til x_{t+1} og ikke har en nabo i A_t. Det kan derfor antages, at y har en nabo i A_t. Dermed vil der findes en sammenhængende delmængde F af A_t indeholdende $A_{t-1} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$, som indeholder en nabo til y, og vælg F mindst mulig, så dette er opfyldt. Idet det er antaget, at y ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$, må y have en unik nabo f i F, da F er valgt mindst mulig. Dermed vil $f \in A_t - A_{t-1}$. Da y har en nabo f i F, og x_{t+1} har en nabo a_1 i F, vil der findes en 2-vej R mellem dem, hvis indre tilhører F. Da danner $C : z, x_{t+1}, R, y$ et hul, så R har lige længde.
Antag, at R har længde mindst fire. De eneste punkter i C, som er komplette til X_t, er z og y, og da følger af lemma 2.6 i rapporten, at X_t enten indeholder en hat eller et afhop for C ved zy. Et afhop for C ved zy i X_t vil betyde, at der findes to ikke-nabopunkter $x_i, x_j \in X_t$, så der findes en 2-vej x_i, x_{t+1}, P, x_j, hvor P er det indre af R. En sådan 2-vej findes ifølge påstand 1 ikke, så der må findes en hat for C ved zy. Det vil sige, at der findes $x \in X_t$, som kun er nabo til z og y i C. Da vil $F \cup \{x_{t+1}\}$ fange trekanten $\{x, y, z\}$, hvor x har naboer i A_{t-1}, den eneste nabo til y i $F \cup \{x_{t+1}\}$ er f, og den eneste nabo til z i $F \cup \{x_{t+1}\}$ er x_{t+1}. Da R har længde mindst fire, er f og x_{t+1} ikke-naboer, så $F \cup \{x_{t+1}\}$ indeholder ikke et spejlbillede af $\{x, y, z\}$. Desuden findes der ikke et punkt i $F \cup \{x_{t+1}\}$, som har mindst to naboer i $\{x, y, z\}$, da både f og x_{t+1} er ikke-naboer til x. Dette danner en modstrid med lemma 16.5 i rapporten, så R må have længde to.
Dermed er x_{t+1} nabo til f. Idet det er antaget, at y ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}\}$, så må alle andre punkter i Y have en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}\}$, for ellers er (iii) opfyldt. Der er valgt en 2-vej $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m$, og i denne 2-vej er y det eneste punkt, som ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$, og de andre har alle en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}\}$. Hvis der kan vælges en anden 2-vej, hvor y har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$, så er en modstrid opnået.
Hvis f har en nabo i A_{t-1}, og 2-vejen $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_n$ vælges lig x_{t+1}, f, vil dette være et bedre valg, idet y så har en nabo $f = a_1 = a_m$ i $\{a_1, \ldots, a_m\}$, og en modstrid er nået.
Hvis f er nabo til et af $a_2, \ldots, a_m$, så vil der ligeledes kunne træffes et bedre valg, hvor y har en nabo $f \in \{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, og en modstrid er opnået.
Altså vil f ikke have en nabo i A_{t-1}, og f er ikke-nabo til alle af $a_2, \ldots, a_m$. Lad Q være en anti 2-vej mellem f og x_{t+1}, hvis indre tilhører X_t, og en sådan vil findes, da $f \in A_t - A_{t-1}$ og x_{t+1} begge ikke er komplette til X_t. Ethvert indre punkt i Q har en nabo i A_{t-1}, mens anti 2-vejens endepunkter ikke har en nabo i A_{t-1}. Desuden er z komplet til det indre af Q og antikomplet

til A_{t-1}. Anvendes korollar2.3 i rapporten i $\overline{G}$ følger det, at Q har lige længde. Dermed har anti 2-vejen y, x_{t+1}, Q, f ulige længde, og dens indre punkter har alle en nabo i $A_{t-1} \cup \{a_1, \dots, a_m\}$, mens det er antaget, at y ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{a_1, \dots, a_m\}$. Desuden er z komplet til det indre af anti 2-vejen og antikomplet til $A_{t-1} \cup \{a_1, \dots, a_m\}$. Fra korollar 2.3 i rapporten anvendt i $\overline{G}$ følger, at f ikke er komplet til $A_{t-1} \cup \{a_1, \dots, a_m\}$ i $\overline{G}$. Dermed har f en nabo i $A_{t-1} \cup \{a_1, \dots, a_m\}$ i G. Da det tidligere er vist, at f ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{a_2, \dots, a_m\}$, må f og a_1 være naboer. Fra påstand 2 vil der findes $x \in X_t$, som er ikke-nabo til både x_{t+1} og a_1, nabo til z og y samt har en nabo i A_{t-1}. Dermed vil $F' = \{z, y, x, a_2, \dots, a_m\} \cup A_{t-1}$ være sammenhængende og fange trekanten $\{x_{t+1}, f, a_1\}$, hvor den eneste nabo til x_{t+1} i F' er z, den eneste nabo til f i F' er y, og a_1 er nabo til a_2. Der vil ikke findes et punkt i F', som er nabo til to punkter i $\{x_{t+1}, f, a_1\}$, da hverken z eller y er nabo til a_1. Da følger af lemma 16.5 i rapporten, at F' indeholder et spejlbillede af $\{x_{t+1}, f, a_1\}$, hvilket vil sige, at der findes et punkt i F', som er nabo til y, z og a_1. De eneste naboer til z i F' er x og y, men de er begge ikke-naboer til a_1, og en modstrid er opnået, hvormed antagelsen, om at der findes et $y \in Y$, som ikke har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \dots, a_m\}$, må være forkert, og påstand 3 er vist.

Idet a_m er komplet til X_{t-1}, har $x_0, \dots, x_{t-1}$ alle en nabo i $a_1, \dots, a_m$. Idet både x_t og a_m har en nabo i A_{t-1}, og ingen af $x_{t+1}, a_1, \dots, a_{m-1}$ har naboer i A_{t-1} per antagelse og definition af 2-vejen $x_{t+1}, a_1, \dots, a_m$, kan 2-vejen $x_{t+1}, a_1, \dots, a_m$ udvides til 2-vejen $x_{t+1}, a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$, som indeholder naboer til alle punkter i X_t. Denne nye 2-vej har den egenskab, at alle punkter i X_t har en nabo deri, og den første del $x_{t+1}, a_1, \dots, a_m$ af 2-vejen har samme egenskaber som hidtil. Ifølge påstand 2 kan der vælges i, hvor $2 \leq i \leq n$, størst muligt, så der findes et punkt i X_t, som er ikke-nabo til samtlige af punkterne $x_{t+1}, a_1, \dots, a_{i-1}$. Vælg s, hvor $0 \leq s \leq t$, så x_s er antikomplet til $x_{t+1}, a_1, \dots, a_{i-1}$. Idet alle punkter i X_t har en nabo i $\{x_{t+1}, a_1, \dots, a_n\}$, så grundet maksimaliteten af i vil alle punkter i X_t have en nabo blandt punkterne i $\{x_{t+1}, a_1, \dots, a_i\}$, og specielt er x_s nabo til a_i og ikke til andre punkter i $\{x_{t+1}, a_1, \dots, a_i\}$. Bemærk, at hvis $i > m$, så er $s = t$, da alle punkter i X_{t-1} har en nabo i $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Påstand 4: *i er ulige, og a_i er komplet til Y.*

Her vil $C : z, x_{t+1}, a_1, \dots, a_i, x_s$ danne et hul, hvormed i er ulige, og $i \geq 3$. Dermed har C længde mindst seks.

Antag, at a_i ikke er komplet til Y. Da er C et hul af længde mindst seks, hvor z og x_s er komplette til Y, og x_{t+1} samt a_i ikke er komplet til Y. Da der ikke må findes et hjul i G med Y som centrum, kan der ikke findes yderligere en kant i C, som er komplet til Y. Hvis der i C findes andre punkter, som er komplette til Y, må der findes mindst to sådanne punkter i $C - \{z, x_s, x_{t+1}, a_i\}$, for ellers dannes et hul af ulige længde. Da $a_1, \dots, a_n$ har lige længde, vil der, hvis der findes mindst to sådanne punkter, findes et ulige antal kanter, der er komplette til Y, for ellers haves et hul af ulige længde. Men så haves et hjul $\{C, Y\}$ af ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_8$. Det vil sige, at $C - \{z, x_s\}$ ikke indeholder punkter, der er komplette til Y.
Da følger af lemma 2.6 i rapporten, at Y enten indeholder et afhop eller en hat for C ved zx_s. Antag, at C indeholder et afhop. Det vil sige, at der findes to ikke-nabopunkter $y_1, y_2 \in Y$, så $y_1, x_{t+1}, a_1, \dots, a_i, y_2$ er en 2-vej. Denne 2-vej har ulige længde mindst fem, dens endepunkter er komplette til X_t, og dens indre punkter er ikke komplette til X_t, da de tilhører $\{x_{t+1}\} \cup A_t$. Dette danner modstrid med lemma 9.1, da der ikke findes en kant i 2-vejen, som er komplet til X_t, og 2-vejen ikke har længde tre. Altså må Y indeholde en hat for C ved zx_s. Det vil sige, at der findes $y \in Y$, så y kun er nabo til z og x_s i C, altså y er ikke-nabo til alle af $x_{t+1}, a_1, \dots, a_i$. Fra påstand 3 kan det så antages, at y har en nabo i $A_{t-1} \cup \{a_{i+1}, \dots, a_m\}$.
Antag først, at $i \leq m$. Lad $a_i, r_1, \dots, r_k, y$ være en 2-vej mellem a_i og y, hvis indre tilhører $A_{t-1} \cup \{a_{i+1}, \dots, a_m\}$. Da er $C_1 : z, x_{t+1}, a_1, \dots, a_i, r_1, \dots, r_k, y$ et hul af længde mindst seks, hvor z og y er de eneste punkter, der er komplette til X_t, da x_{t+1} ifølge definition 11.9(iii) ikke er komplet til X_t, $\{a_1, \dots, a_i\} \subseteq A_t$ og $\{r_1, \dots, r_k\} \subseteq A_{t-1} \cup \{a_{i+1}, \dots, a_m\} \subseteq A_t$ og ifølge definition 11.10 dermed ikke indeholder punkter, der er komplette til X_t. Ifølge lemma 2.6 i rapporten vil X_t indeholde en hat eller et afhop for C_1 ved zy. Ifølge påstand 1 vil X_t ikke indeholde et afhop for C_1 ved zy, så der må findes $x \in X_t$, så x ikke har naboer i $\{x_{t+1}, a_1, \dots, a_i, r_1, \dots, r_k\}$, hvilket danner

modstrid med, at x_s er valgt for i størst muligt, så x_s ikke har naboer i $\{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_{i-1}\}$, men er nabo til a_i, dog findes der her et $x \in X_t$, som yderligere ikke er nabo til a_i. Antagelsen, om at $i \leq m$, må derfor være forkert.

Antag nu, at $i > m$. Dermed er $s = t$. Lad $a_m, r_1, \ldots, r_k, y$ være en 2-vej mellem a_m og y, hvis indre tilhører A_{t-1}, og en sådan vil findes, da y er ikke-nabo til $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_i$, og ifølge påstand 3 har en nabo i $A_{t-1} \cup \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$, og a_m per definition har en nabo i A_{t-1}. Da er $C_2 : z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_k, y$ et hul af længde mindst seks, og de eneste punkter deri, som er komplette til X_t, er z og y, da x_{t+1} ifølge definition 11.9(iii) ikke er komplet til X_t, $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq A_t$ og $\{r_1, \ldots, r_k\} \subseteq A_{t-1}$ og ifølge definition 11.10 dermed ikke indeholder punkter, der er komplette til X_t. Da følger af lemma 2.6 i rapporten, at X_t indeholder en hat eller et afhop for C_2 ved zy. Ifølge påstand 1 vil X_t ikke indeholde et afhop, så der må findes $x \in X_t$, som ikke har naboer i $\{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_k\}$. Idet a_m er komplet til X_{t-1}, så må $x = x_t$. Dermed vil $F = \{x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_i, r_1, \ldots, r_k\}$ være sammenhængende og fange trekanten $\{y, z, x_t\}$, hvor r_k er den eneste nabo til y i F, da C_2 er et hul, og y er ikke-nabo til $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_i$, x_{t+1} er den eneste nabo til z, da alle de andre punkter er indeholdt i A_t, og a_i er den eneste nabo til x_t i F, da x_t er en hat til C_2, og $x_s = x_t$ er ikke-nabo til samtlige af $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_{i-1}$. Da $i > m$, er x_{t+1} ikke-nabo til a_i, så F indeholder ikke et spejlbillede af $\{y, z, x_t\}$. Desuden findes der ikke et punkt i F, som har to naboer i $\{y, z, x_t\}$, hvormed en modstrid er opnået med lemma 16.5 i rapporten. Altså må antagelsen, om at a_i ikke er komplet til Y, være forkert, hvormed påstand 4 er vist.

Påstand 5: *Lad R være en 2-vej mellem x_t og r, hvor r er det eneste punkt i R, der er komplet til X_{t-1}, og $V(R - \{x_t\}) \subseteq A_{t-1} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. Da har R ulige længde mindst tre. Specielt er x_t ikke-nabo til a_m og a_{m-1}.*

Antag, at R har lige længde. Da har 2-vejen z, x_t, R, r ulige længde, dens endepunkter er komplette til X_{t-1}, mens dens indre punkter ikke er komplette til X_{t-1}. Da følger af lemma 9.1, at 2-vejen har længde tre, og der findes en anti 2-vej af ulige længde mellem de indre punkter i 2-vejen, og anti 2-vejens indre tilhører X_{t-1}, hvormed R har længde to. Lad q være det midterste punkt i R og lad Q være anti 2-vejen mellem q og x_t, hvis indre tilhører X_{t-1}. Da a_m er komplet til X_{t-1} og ikke-nabo til x_t, og Q ikke må danne et antihul med 2-vejen x_t, a_m, q, må a_m og q være naboer.

Antag først, at $q \in \{a_1, \ldots, a_m\}$. Da vil $q = a_{m-1}$. Dermed er q, Q, x_t, a_m en anti 2-vej af lige længde mindst fire, hvor q er det eneste punkt, som er antikomplet til A_{t-1}, da det indre af Q er indeholdt i X_{t-1}, og ifølge bemærkning 11.11 vil alle punkter i det indre af Q samt x_t dermed have en nabo i A_{t-2}, og a_m har per definition en nabo i A_{t-1}. Desuden er a_m det eneste punkt i anti 2-vejen, som er antikomplet til $\{z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_{m-2}\}$, da $q = a_{m-1}$ er nabo til a_{m-2}, og punkterne i det indre af Q samt x_t er nabo til z. Idet mængderne A_{t-1} og $\{z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_{m-2}\}$ begge er sammenhængende og antikomplette til hinanden, så danner det en modstrid med lemma 9.2 anvendt i $\overline{G}$, da q, Q, x_t, a_m har længde mindst fire. Det kan derfor antages, at $q \in A_{t-1}$. Specielt er x_t ikke-nabo til a_m og a_{m-1}, hvor x_t er ikke-nabo til a_m, da $a_m \in A_t$ er komplet til X_{t-1}, og x_t er ikke-nabo til a_{m-1}. Da a_m er nabo til q og komplet til X_{t-1}, så er $r = a_m$ en mulighed, og x_t, q, a_m er 2-vejen R. Lad R' være en 2-vej mellem x_t og a_m, hvis indre tilhører $\{z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$, og en sådan vil findes, da x_t og z er naboer, og a_m har en nabo deri, da mængden er sammenhængende. Desuden vil R' have længde mindst tre, da x_t og a_m ikke har en fælles nabo i $\{z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_m\}$. Dermed er q, a_m, R', x_t et hul af længde mindst seks. Hullet indeholder blandt andet punkterne x_t, q og a_m, hvilket antihullet q, Q, x_t, a_m, z også gør. Dette danner en modstrid med lemma 15.9 i rapporten og dermed må R have ulige længde.

Da $r \in A_{t-1} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$ er komplet til X_{t-1}, må $r \in \{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq A_t$. Dermed er r ikke-nabo til x_t, da der ellers dannes modstrid med definition 11.10, hvormed R har længde mindst tre. Per definition er $a_m \in A_t$ komplet til X_{t-1}, så x_t og a_m er ikke-naboer. Desuden er a_{m-1} og x_t ikke-naboer. Dermed er påstand 5 vist.

Påstand 6: *Det kan antages, at ingen af $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_{i-1}$ er komplette til X_{t-1}, og specielt at $i \leq m$.*

Antag, at et af $a_1, \dots, a_{i-1}$ er komplet til X_{t-1}, og vælg h, hvor $1 \leq h \leq i-1$, størst muligt, så a_h er komplet til X_{t-1}. Idet a_h per definition af x_s ikke er nabo til x_s, hvor $0 \leq s \leq t$, må $s = t$, da a_h er komplet til X_{t-1}. Da $x_s = x_t$ er nabo til a_i, må $a_i \in A_t$ ikke være komplet til X_{t-1}. Dermed følger af påstand 5, at 2-vejen $x_t, a_i, a_{i-1}, \dots, a_h$ har ulige længde mindst tre, hvormed 2-vejen $z, x_t, a_i, \dots, a_h$ har lige længde mindst fire. Idet de eneste punkter, der er komplette til X_{t-1}, er 2-vejens endepunkter, og idet z, x_t samt a_i ifølge påstand 4 er komplette til Y, følger det af lemma 11.18(i), at der findes et hjul i G med Y som centrum, hvormed (iv) er opfyldt. Det kan derfor antages, at ingen af $a_1, \dots, a_{i-1}$ er komplette til X_{t-1}. Specielt er $i \leq m$, da a_m er komplet til X_{t-1}, hvormed $a_m \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$.

Antag, at x_{t+1} er komplet til X_{t-1}. Idet x_{t+1} per definition af x_s ikke er nabo til x_s, hvor $0 \leq s \leq t$, må $s = t$. Lad R være en 2-vej mellem x_t og a_m, som har indre tilhørende A_{t-1}, og en sådan vil findes, da x_t ifølge bemærkning 11.11 har en nabo i A_{t-1}, og a_m vil per definition have en nabo i A_{t-1}, og ingen punkter i det indre af R er komplette til X_{t-1}, da A_{t-1} ifølge definition 11.10 ikke indeholder punkter, som er komplette til X_{t-1}. Dermed følger af påstand 5, at R har ulige længde mindst tre, hvormed $x_{t+1}, a_1, \dots, a_i, x_t, R, a_m$ er en 2-vej af ulige længde mindst fem, da i ifølge påstand 4 er ulige. Endepunkterne x_{t+1} og a_m er begge komplette til X_{t-1}, mens ingen af dens indre punkter er komplette til X_{t-1}, hvor det tidligere i denne påstand er vist, at $a_1, \dots, a_i$ ikke er komplette til X_{t-1}. Dette danner modstrid med lemma 9.1. Dermed er x_{t+1} ikke komplet til X_{t-1}, og påstand 6 vist.

Ifølge påstand 6 vil der ikke findes a_j, hvor $1 \leq j \leq i-1$, så a_j er komplet til X_{t-1}, men da påstanden ligeledes giver, at $i \leq m$, og det vides, at a_m er komplet til X_{t-1}, da vælges k, hvor $i \leq k \leq m$, mindst muligt, så a_k er komplet til X_{t-1}.

Påstand 7: *k er ulige.*

Ifølge påstand 4 er i ulige, og da $i \geq 2$, må $i \geq 3$, og da $k \geq i$, må 2-vejen $z, x_{t+1}, a_1, \dots, a_k$ have længde mindst fire. Endepunkterne z og a_k er komplette til X_{t-1}, mens ingen af 2-vejens indre punkter er komplette til X_{t-1}. Da følger af lemma 9.1, at 2-vejen har lige længde, da hverken lemma 9.1(i) eller lemma 9.1(ii) er opfyldt. Dermed må k være ulige, og påstand 7 er vist.

Påstand 8: *x_t er nabo til et af $a_1, \dots, a_k$.*

Antag, at x_t er ikke-nabo til alle af $a_1, \dots, a_k$. Fra valget af i følger, at x_t er nabo til x_{t+1}, da $k > i-1$, og x_t er ikke-nabo til alle de andre. Lad S være en 2-vej mellem x_t og a_k, hvis indre tilhører $A_{t-1} \cup \{a_{k+1}, \dots, a_m\}$, og lad C være hullet $x_{t+1}, a_1, \dots, a_k, S, x_t$. Da C skal have lige længde, og k ifølge påstand 7 er ulige, må S have lige længde. Da følger af påstand 5, at der må findes et punkt i det indre af S, som er komplet til X_{t-1}. Da S har lige længde, har z, x_t, S, a_k ulige længde, og dens endepunkter er komplette til X_{t-1}, og da følger af korollar 2.4 i rapporten, at 2-vejen indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til X_{t-1}, idet S indeholder et indre punkt, der er komplet til X_{t-1}. Da x_t ikke er komplet til X_{t-1}, så vil de kanter, der er komplette til X_{t-1}, alle tilhøre S, hvormed de også tilhører C, og der findes ikke andre kanter i C, som er komplette til X_{t-1}, da ingen af $x_{t+1}, a_1, \dots, a_{k-1}$ er komplette til X_{t-1}. Det vil sige, at C indeholder et ulige antal kanter, der er komplette til X_{t-1}. Da følger af korollar 2.4 i rapporten, at der er nøjagtig en kant i C, der er komplet til X_{t-1}, det vil sige, at S har længde en, og dermed nøjagtig to punkter, der er komplette til X_{t-1}. Idet a_k er komplet til X_{t-1}, så må det andet punkt v, der er komplet til X_{t-1}, være nabo til a_k i S. Dermed vil v ikke tilhøre A_{t-1}, så $v \in \{a_{k+1}, \dots, a_m\}$. Dermed må $k < m$, og $v = a_{k+1}$. Fra lemma 2.6 i rapporten anvendt på C med X_{t-1} som antisammenhængende mængde kan det konkluderes, at X_{t-1} indeholder en hat eller et afhop for C ved $a_k a_{k+1}$. I begge tilfælde vil der findes $x \in X_{t-1}$, som er ikke-nabo til x_t, x_{t+1} og a_1, og som er nabo til a_k. Dermed vil $F = (V(C) - \{x_t, x_{t+1}\}) \cup \{x\}$ være sammenhængende og fange trekanten $\{z, x_t, x_{t+1}\}$, hvor x er den eneste nabo til z, den eneste nabo til x_t er dens nabo i S, som er indeholdt i $A_{t-1} \cup \{a_{k+1}, \dots, a_m\}$, og a_1 er den eneste nabo til x_{t+1}. Da x og a_1 ikke er naboer, vil F ikke indeholde et spejlbillede af $\{z, x_t, x_{t+1}\}$, og F vil ikke indeholde et punkt, som har to naboer i $\{z, x_t, x_{t+1}\}$ idet hvert punkt i $\{z, x_t, x_{t+1}\}$ kun har én nabo i F, $a_1 \notin A_{t-1} \cup \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ og $x \notin A_{t-1} \cup \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$. Dette danner en modstrid med lemma

16.5 i rapporten, hvormed x_t må have en nabo blandt $a_1, \ldots, a_k$. Dermed er påstand 8 vist.

Påstand 9: *a_k er komplet til Y.*

Antag, at a_k ikke er komplet til Y. Da følger af påstand 4, at $i \neq k$, altså $i < k$. Dermed er $\{X_{t-1}; Y; z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_k\}$ et pseudohjul, da X_{t-1} og Y begge er antisammenhængende og komplette til hinanden, $z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_k$ har længde mindst fire, z og a_k er begge komplette til X_{t-1}, mens ingen af $x_{t+1}, a_1, \ldots, a_k$ er komplette til X_{t-1}, a_1 er komplet til Y, mens x_{t+1} og a_k ikke er komplette til Y, og $a_i \in \{a_3, \ldots, a_{k-1}\}$ er komplet til Y. Da $G \in \mathcal{F}_8$, må der ikke findes et pseudohjul i G, så en modstrid er opnået, og påstand 9 er vist.

Ifølge påstand 8 kan der vælges j, hvor $1 \leq j \leq k$, størst muligt, så x_t er nabo til a_j. Fra påstand 5 vil 2-vejen $x_t, a_j, \ldots, a_k$ have ulige længde mindst tre, hvormed $a_j, \ldots, a_k$ har lige længde mindst to. Antag, at a_j er komplet til Y. Da har 2-vejen $z, x_t, a_j, \ldots, a_k$ lige længde mindst fire, dens endepunkter er komplette til X_{t-1}, dens indre punkter er ikke komplette til X_{t-1}, og z, x_t og a_j er alle komplette til Y, og da følger af lemma 11.18(i), at der findes et hjul, som har Y som centrum, hvormed (iv) er opfyldt. Det kan derfor antages, at a_j ikke er komplet til Y. Nu har 2-vejen $x_t, a_j, \ldots, a_k$ ulige længde mindst tre, og dens endepunkter er komplette til Y. Da følger det af korollar 2.3 i rapporten, at $x_t, a_j, \ldots, a_k$ indeholder en kant, der er komplet til Y, idet punktet z er komplet til Y, men ikke har naboer i $a_j, \ldots, a_{k-1}$. Da følger af korollar 2.4 i rapporten, at 2-vejen indeholder et ulige antal kanter, som er komplette til Y. Idet a_j ikke er komplet til Y, så vil $a_j, \ldots, a_k$ indeholde et ulige antal kanter, der er komplette til Y. Her har 2-vejen $P : z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_k$ lige længde ifølge påstand 7, og dens endepunkter er komplette til Y, og da følger af korollar 2.4 i rapporten, at P indeholder et lige antal kanter, der er komplette til Y. Da et lige antal kanter i $z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k$ er komplette til Y, og et ulige antal kanter i $a_j, \ldots, a_k$ er komplette til Y, så vil et ulige antal kanter i $z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_j$ være komplette til Y. Dermed vil der findes et udsnit P' af P, der er komplet til Y, som har ulige længde. Hvis P' har længde mindst tre, da vil lemma 11.18(ii) være opfyldt, hvor P er 2-vejen, hvis endepunkter er komplette til X_{t-1}, og ingen af dens indre punkter er komplette til X_{t-1}, og punkterne i P' er a_i, a_{i+1}, a_{i+2} og a_{i+3}, som er komplette til Y. Dermed vil der findes et hjul, som har Y som centrum, hvormed (iv) er opfyldt. Det kan derfor antages, at P' har længde en. Da hverken x_{t+1} eller a_j er komplet til Y, må punkterne i P' begge være indre punkter i 2-vejen $z, x_{t+1}, a_1, \ldots, a_j$. Dermed er lemma 11.18($iii$) opfyldt med P som 2-vejen, hvis endepunkter er komplette til X_{t-1}, mens ingen af dens indre punkter er komplette til X_{t-1}, og punkterne i P' er a_{i+1}og a_{i+2}, der er komplette til Y. Deraf følger, at der findes et hjul i G med Y som centrum, hvormed (iv) er opfyldt.

Der vil altså altid enten være et af (i)-(iv), der er opfyldt, eller der opnåes en modstrid. □

Følgende svarer til korollar 17.8 i rapporten.

Korollar 12.2
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, lad $Y \subseteq V(G)$ være en ikke-tom og antisammenhængende mængde, lad $\{z, A_0\}$ være en ramme, hvor $Y \cap (A_0 \cup \{z\}) = \emptyset$, og lad $x_0, \ldots, x_{t+1}$ være et hjulsystem med Y som centrum, og $t \geq 1$. Lad X_i og A_i være som i definition 11.10, og antag, at højst et $y \in Y$ er antikomplet til A_1. Antag desuden, at der ikke findes et hjul med Y som centrum. Da vil der findes et punkt $y \in Y$ og indeks r, hvor $1 \leq r \leq t$, som opfylder følgende:

(i) *y er ikke-nabo til x_{t+1} og er antikomplet til A_r.*

(ii) *x_{t+1} har en nabo i A_r og en ikke-nabo i X_r.*

◇

Bevis
Dette bevises ved induktion over t. Hvis $t = 1$, så er $r = 1$. Lemma 16.10 i rapporten ønskes anvendt med Y som antisammenhængende mængde, A_1 som sammenhængende mængde samt

x_0, x_1, x_2 og z som punkterne. Her er lemma 16.10(i) i rapporten opfyldt ifølge definition 11.9(iii) og definition 11.10, lemma 16.10(ii) i rapporten er opfyldt ifølge definition 11.9(iv) og definition 11.10, lemma 16.10(iii) i rapporten er opfyldt ifølge definition 11.10, lemma 16.10(iv) i rapporten er opfyldt ifølge definition 11.9(iii) og definition 11.12, lemma 16.10(vi) i rapporten er opfyldt ifølge definition 11.9(i) og bemærkning 11.11, og konklusionen i lemma 16.10 i rapporten er ikke opfyldt, så lemma 16.10(v) i rapporten må ikke være opfyldt. Altså vil der findes $y \in Y$, som er ikke-nabo til x_2 og antikomplet til A_1. Dermed er korollaret opfyldt, da y og x_2 er ikke-naboer, y ikke har naboer i A_1 samt x_2 har en nabo i A_1 ifølge bemærkning 11.11, og x_2 har en ikke-nabo i X_1 ifølge definition 11.9(iii). Det kan derfor antages, at $t \geq 2$.
Hvis x_{t+1} ikke har en nabo i A_{t-1}, da giver lemma 12.1, at korollaret er opfyldt, da højst et punkt i Y er antikomplet til A_{t-1}, hvormed lemma 12.1(i),(iii) og (iv) ikke er opfyldt, og lemma 12.1(ii) giver, at korollaret er opfyldt med $r = t$. Det kan derfor antages, at x_{t+1} har en nabo i A_{t-1}. Hvis x_{t+1} er komplet til X_{t-1}, så er $x_0, \dots, x_{t+1}$ en Y-diamant, og korollaret følger af lemma 11.17. Hvis x_{t+1} ikke er komplet til X_{t-1}, så er $x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}$ et mindre hjulsystem med Y som centrum, og korollaret følger af induktionsantagelsen. □

Lemma 12.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og lad $\{C, Y\}$ være et optimalt hjul i G. Lad $z \in V(C)$, og lad x_0 samt x_1 være naboerne til z i C. Lad T være en hale for z, og lad y være nabo til z i T. Lad $A_0 = V(C) - \{z, x_0, x_1\}$, og lad $x_0, \dots, x_{t+1}$ være et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$ med $Y \cup \{y\}$ som centrum. Lad X_i og A_i være som i definition 11.10. Da er y enten nabo til x_{t+1}, eller y har en nabo i A_t. ◇

Bevis
Antag, at y ikke er nabo til x_{t+1}, og y ikke har en nabo i A_t. Lad $y, u_1, \dots, u_n$ være en minimal 2-vej i $T - \{z\}$, så u_n har en nabo i A_t, hvilket vil sige, at $n \geq 1$. På grund af maksimaliteten af A_t følger det, at u_n er komplet til X_t, og dermed er komplet til X_1, idet $t \geq 1$. Da T er en hale, er ingen af $u_1, \dots, u_n$ ifølge definition 17.14(v) i rapporten komplette til Y. Lad P være en 2-vej fra u_n til et punkt $p \in C$, hvor p er komplet til Y, mens intet punkt i $P - \{p\}$ er komplet til Y, og 2-vejens indre tilhører A_t.

Påstand 1: *P har ulige længde.*

Intet punkt i $T - \{z\}$ er ifølge defintition 17.14(v) i rapporten komplet til Y, og p er det eneste punkt i P, der er komplet til Y. I P er u_n komplet til X_t, ingen af de indre punkter er komplette til X_t, så hvis p er komplet til X_t, haves en modstrid med korollar 2.3 i rapporten, idet y er komplet til X_t, men ikke har en nabo i det indre af P. Derfor må u_n være det eneste punkt i P, der er komplet til X_t. Dermed har P længde mindst en. Det haves ifølge definition 11.9, at z er komplet til X_t, og ifølge definition 17.14(i) i rapporten er z komplet til Y. Desuden er z antikomplet til $V(P)$, idet z ifølge definition 17.14(iii) i rapporten ikke har andre naboer end y i T, hvormed u_n og z ikke er naboer, x_0 og x_1 er de eneste punkter i C, der er naboer til z, og z er antikomplet til $V(P) - \{u_n, p\} \subseteq A_t$. Dermed er $\{V(P), X_t\}$ og $\{V(P), Y\}$ balanceret par ifølge lemma 2.13 i rapporten. Når $\{V(P), X_t\}$ er et balanceret par, er $\{V(P - \{u_n\}), X_t\}$ et balanceret par, og ligeledes er $\{V(P - \{u_n\}), Y\}$ et balanceret par. Da ingen af konklusionerne i lemma 1.6 er opfyldte, må P have ulige længde, hvilket viser påstand 1.

Da $y, u_1, \dots, u_n$ er en minimal 2-vej i $T - \{z\}$, så u_n har en nabo i A_t, har $y, u_1, \dots, u_{n-1}$ ikke naboer i A_t, hvormed $Q : z, y, u_1, \dots, u_n, P, p$ er en 2-vej.

Påstand 2: *Det kan antages, at Q har lige længde mindst fire, og dermed er n lige.*

Antag, at Q har ulige længde. Det haves, at Q's endepunkter er komplette til Y. Dermed er antagelserne i lemma 9.1 opfyldte, hvormed en af konklusionerne må gælde. Antag, at Q har længde tre, hvormed $n = 1$. Da hverken y eller u_1 er komplette til Y, er intet indre punkt i Q komplet til Y. Det vil sige, at det må være lemma 9.1(ii), der er opfyldt, hvormed der findes en anti 2-vej U af ulige længde mellem y og u_1, hvis indre tilhører Y. Dermed er ethvert punkt i G, der er komplet til Y, nabo til y eller u_1, idet der ellers er et antihul a, u_1, U, y af ulige længde, hvor a er komplet til Y. Da det er antaget, at y ikke har naboer i A_t, er u_1 nabo til alle punkter i $C - \{z, x_0, x_1\}$, der er komplette til Y. Da $u_1 = u_n$ er komplet til X_t, er u_1 nabo til alle punkter i $C - \{z\}$, der er komplette til Y. Her er u_1 ikke nabo til z, fordi z kun er nabo til y i T. Dette betyder dog, at u_1 er en drage med hensyn til $\{C, Y\}$, hvilket er i modstrid med, at T er en hale, da intet punkt i G ifølge definition 17.14(vi) i rapporten er en drage med hensyn til $\{C, Y\}$. Det kan derfor antages, at Q ikke har længde tre. Det følger, at ingen af konklusionerne i lemma 9.1 kan være opfyldte, hvormed det må gælde, at Q har lige længde. Da Q har lige længde, og P ifølge påstand 1 har ulige længde, betyder det, at n må være lige, og påstand 2 er vist.

Påstand 3: *x_{t+1} er nabo til et af $u_1, \ldots, u_{n-1}$.*

Antag, at x_{t+1} ikke er nabo til et af $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Vælg en 2-vej N mellem x_{t+1} og u_n, hvis indre tilhører A_t. Da er $z, y, u_1, \ldots, u_n, N, x_{t+1}$ et hul, og da n er lige, følger det dermed, at N har lige længde. Idet N har lige længde, er $M : z, x_{t+1}, N, u_n$ en 2-vej af ulige længde. Desuden er M's endepunkter komplette til X_t, mens de indre punkter ikke er komplette til X_t. Dermed kan korollar 2.3 i rapporten anvendes med X_t som antisammenhængende mængde og M som 2-vejen. Men da y, som er komplet til X_t, ikke har en nabo i det indre af M, opnåes en modstrid med korollar 2.3 i rapporten. Dermed må antagelsen, om at x_{t+1} ikke er nabo til et af $u_1, \ldots, u_{n-1}$, være forkert, og påstand 3 er vist.

Påstand 4: *x_{t+1} er ikke komplet til Y.*

Antag, at x_{t+1} er komplet til Y. Idet $G \in \mathcal{F}_8$, må $\{Y; X_{t+1}; Q\}$ ikke være et pseudohjul. Det skal så undersøges hvilken af betingelserne i definition 16.12 i rapporten, der ikke er opfyldt. Det vides, at Y og X_t begge er antisammenhængende og komplette til hinanden ifølge definition 11.12 og antagelsen her, Q er en anti 2-vej af længde mindst fire, z og p er de eneste punkter i Q, som er komplette til Y, z er komplet til X_{t+1}, og y er ikke komplet til X_{t+1}. Da y ikke er nabo til x_{t+1}, og p heller ikke er komplet til X_{t+1}, da $p \in C$, og P dermed ikke kan være nabo til både x_0 og x_1, er intet indre punkt i Q komplet til X_{t+1}. Ved at anvende lemma 1.4, hvor P i lemma 1.4 svarer til Q, Y svarer til Y, og X svarer til X_{t+1}, følger af lemma 1.4(i), at der findes $x \in X_{t+1}$, som er ikke-nabo til alle punkter i $Q - \{z\}$, og det følger af lemma 1.4(ii), at der findes $x \in X_{t+1}$, som er ikke-nabo til alle punkter i $Q - \{z, p\}$. Det vil sige, at der findes $x \in X_{t+1}$, som er ikke-nabo til alle punkter i $Q - \{z\}$ undtaget muligvis punktet p. Da x_{t+1} ifølge påstand 3 er nabo til et af $u_1, \ldots, u_{n-1}$, og alle andre punkter i X_{t+1} er naboer til y, kan et sådant x ikke eksistere. Der er altså opnået en modstrid, hvormed antagelsen, om at x_{t+1} er komplet til Y, er forkert, og påstand 4 er vist.

Da x_{t+1} har en nabo i A_t, findes en 2-vej R mellem x_{t+1} og et punkt r i A_t, der er komplet til Y, hvor $V(R - \{x_{t+1}\}) \subseteq A_t$, så intet punkt i $R - \{r\}$ er komplet til Y.

Påstand 5: *R har ulige længde.*

Da $x_{t+1} \notin A_t$, har R længde mindst en.
Antag, at R har længde to, og lad det midterste punkt i R være a. Da intet punkt i $R - \{r\}$ er komplet til Y, findes en anti 2-vej S mellem x_{t+1} og a, hvis indre tilhører Y. Da S sammen med a, z, r, x_{t+1} danner et antihul, har S ulige længde. Det haves, at x_{t+1} ikke er komplet til X_t, og da $a \in A_t$, er a heller ikke komplet til X_t. Dermed haves en anti 2-vej T mellem x_{t+1} og a, hvis indre tilhører X_t. Da T sammen med S danner et antihul, har T ligesom S ulige længde. Da y er komplet til X_t og ikke er nabo til både x_{t+1} og a, idet y ikke har naboer i A_t, danner T sammen med a, y, x_{t+1} et antihul. Men da T har ulige længde, har det fremkomne antihul ulige længde, hvilket er i modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_8$. Det vil sige, at antagelsen, om at R har længde to, er forkert. Da R ikke har længde to, har 2-vejen $U : z, x_{t+1}, R, r$ ikke længde tre, og idet U's endepunkter er komplette til Y, mens de indre punkter ikke er komplette til Y, følger af lemma 9.1, at U har lige længde, idet ingen af konklusionerne er opfyldte. Idet U har lige længde, følger det, at R har ulige længde, hvormed påstand 5 er vist.

Påstand 6: *Hvis x_{t+1} er nabo til u_1, så er u_1 komplet til X_t.*

Lad x_{t+1} være nabo til u_1. Antag, at u_1 ikke er komplet til X_t. Idet x_{t+1} ikke er komplet til X_t, findes der en anti 2-vej L mellem x_{t+1} og u_1, hvis indre tilhører X_t. Her er $K : z, u_1, L, x_{t+1}, y$ en anti 2-vej af længde mindst fire. Desuden har alle indre punkter i K naboer i $A_t \cup \{u_2, \ldots, u_n\}$, mens endepunkterne ikke har naboer i $A_t \cup \{u_2, \ldots, u_n\}$. I $\overline{G}$ er K en 2-vej, hvis endepunkter er komplette til $A_t \cup \{u_2, \ldots, u_n\}$, mens de indre punkter ikke er komplette til $A_t \cup \{u_2, \ldots, u_n\}$. Dermed følger af lemma 9.1, at K i $\overline{G}$ har lige længde, hvormed K i G er en anti 2-vej af lige længde, og u_1, L, x_{t+1}, y er en anti 2-vej af ulige længde. Idet u_1 og y ikke er komplette til Y, kan de forbindes via en anti 2-vej M, hvis indre tilhører Y. Da M og u_1, L, x_{t+1}, y danner et antihul, må M have ulige længde. Da $p \in A_t$ er komplet til Y, danner M sammen med y, p, u_1 et antihul af ulige længde. Det vil sige, at antagelsen, om at u_1 ikke er komplet til X_t, må være forkert, og påstand 6 er vist.

Påstand 7: *Ingen af* $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *er komplette til* X_t.

Antag, at et af punkterne $u_1, \ldots, u_{n-1}$ er komplet til X_t. Lad S være en 2-vej mellem x_{t+1} og $s \in \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, hvor s er komplet til X_t, og $V(S - \{x_{t+1}\}) \subseteq \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, så s er det eneste punkt i S, der er komplet til X_t. Da S er en 2-vej mellem x_{t+1} og s, har S længde mindst en.
Antag, at S har lige længde, hvormed 2-vejen $T : z, x_{t+1}, S, s$ har ulige længde. Desuden er T's endepunkter komplette til X_t, mens de indre punkter i T ikke er komplette til X_t. Heraf følger det af korollar 2.3 i rapporten, at y, som er komplet til X_t, har en nabo i det indre af T. Den eneste nabo til y i $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, x_{t+1}\}$ er u_1, og u_1 er kun nabo til u_2 i $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, så enten er $u_1 = s$, eller u_1 er nabo til x_{t+1}. Hvis $u_1 = s$, så opnåes en modstrid, da y så ikke har en nabo i det indre af T. Hvis u_1 er nabo til x_{t+1}, så følger af påstand 6, at u_1 er komplet til X_t, hvormed $u_1 = s$, og S har længde en i modstrid med antagelsen om, at S har lige længde.
Det vil sige, at S har ulige længde. Dermed har 2-vejen $U : s, S, x_{t+1}, R, r$ lige længde, idet R ifølge påstand 5 har ulige længde. Det eneste punkt i U, der er komplet til X_t, er s, og det eneste punkt i U, der er komplet til Y, er r. Antagelserne i lemma 9.2 er opfyldte, og U har dermed længde to. Det vil sige, at S og R begge har længde en. Yderligere følger af lemma 9.2, at der findes en anti 2-vej Q_{X_t} mellem x_{t+1} og r, hvis indre tilhører X_t, der findes en anti 2-vej Q_Y mellem s og x_{t+1}, hvis indre tilhører Y, og netop én af Q_{X_t} og Q_Y har ulige længde. Hvis Q_{X_t} har ulige længde, så danner den sammen med r, y, x_{t+1} et antihul af ulige længde, hvormed Q_{X_t} ikke kan have ulige længde. Dermed må det være Q_Y, der har ulige længde. Det gælder, at ethvert punkt, der er komplet til Y, er nabo til et af x_{t+1} eller s, da der ellers findes et antihul af ulige længde. Alle punkter i A_t, som er komplette til Y, er nabo til x_{t+1}, og x_{t+1} er nabo til alle punkter i C, der er komplette til Y, undtaget muligvis x_0 og x_1. Fra definition 17.14(ii) i rapporten findes en kant i $C - \{x_0, z, x_1\}$, der er komplet til Y, og dermed har x_{t+1} to naboer i C, der er indbyrdes naboer, og som har ulige hjulparitet, samt x_{t+1} har mindst en anden nabo i C. Dette punkt er dog ikke er drage, idet intet punkt i G ifølge definition 17.14(vi) i rapporten er en drage. Dermed er hjulet optimalt . Det er dog i modstrid med lemma 15.14(iii) i rapporten. Det vil sige, at antagelsen, om at et af punkterne $u_1, \ldots, u_{n-1}$ er komplet til X_t, må være forkert, hvormed påstand 7 er vist.

Fra påstand 3 følger det, at der kan vælges i, for $1 \leq i \leq n-1$, mindst muligt, så x_{t+1} er nabo til u_i. I hullet $D : z, y, u_1, \ldots, u_i, x_{t+1}$ er z og y de eneste punkter, der er komplette til X_t, idet $u_1, \ldots, u_i$ ifølge påstand 7 ikke er komplette til X_t. Det følger da af påstand 6, at u_1 ikke er nabo til x_{t+1}, hvormed D har længde mindst seks. Antagelserne i lemma 2.6 i rapporten er opfyldte, hvormed X_t indeholder enten en hat for D eller et afhop for D ved zy. Hvis X_t indeholder et afhop for D, så findes en 2-vej U af ulige længde mindst fem mellem to ikke-nabopunkter i X_t, hvis indre tilhører $\{u_1, \ldots, u_i, x_{t+1}\}$. Det betyder, at intet indre punkt er komplet til Y. Idet begge endepunkter er komplette til Y, intet indre punkt er komplet til Y, og U har længde mindst fem, haves en modstrid med lemma 9.1, idet ingen af konklusionerne er opfyldte. Der findes dermed ikke et afhop for D, hvormed der findes en hat for D ved zy. Det vil sige, at der findes $x \in X_t$, hvor x kun er nabo til z og y. Altså har x ikke naboer i $\{u_1, \ldots, u_i, x_{t+1}\}$. Det haves nu, at $F = A_t \cup \{u_1, \ldots, u_n, x_{t+1}\}$ fanger trekanten $\{z, y, x\}$. Den eneste nabo til z i F er x_{t+1}, den eneste nabo til y i F er u_1, og både x_{t+1} og u_1 er ikke-naboer til x, så F indeholder ikke et punkt, som har mindst to naboer i $\{z, y, x\}$. Derudover er x_{t+1} ikke-nabo til u_1, hvormed F ikke kan indeholde et spejlbillede af

$\{z, y, x\}$. Dette er i modstrid med lemma 16.5 i rapporten, så antagelsen, om at y hverken er nabo til x_{t+1} eller har en nabo i A_t, må være forkert. □

Følgende svarer til lemma 17.15 i rapporten.

Lemma 12.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_8$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling, og lad $\{C, Y\}$ være et optimalt hjul i G. Da har intet punkt i C en hale. ◇

Bevis
Antag, at $z \in V(C)$ har en hale T. Lad y være naboen til z i T, og lad x_0 samt x_1 være naboerne til z i C. Lad $A_0 = V(C) - \{z, x_0, x_1\}$, så x_0, x_1 er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$, og x_0 samt x_1 er komplette til $Y \cup \{y\}$. Antagelserne i lemma 17.9 i rapporten er opfyldte, hvormed der findes $x_2, \ldots, x_{t+1}$, hvor $t \geq 1$, så $x_0, \ldots, x_{t+1}$ er et hjulsystem med hensyn til rammen $\{z, A_0\}$ med $Y \cup \{y\}$ som centrum. Lad X_i og A_i være som i definition 11.10. Idet $\{C, Y\}$ er et hjul, findes to disjunkte kanter, der er komplette til Y, hvilket vil sige, at der findes et punkt i A_0, som er komplet til Y. Dermed har alle punkter i Y en nabo i A_0. Ifølge lemma 12.2 findes r, for $1 \leq r \leq t$, så y er ikke-nabo til x_{t+1}, og så y ikke har en nabo i A_r. Endvidere følger af lemma 12.2, at x_{t+1} har en nabo i A_r samt en ikke-nabo i X_r. Det vil sige, at $x_0, \ldots, x_r, x_{t+1}$ er et hjulsystem, hvor $Y \cup \{y\}$ er centrum, og T er en hale for z. Dette er i modstrid med lemma 12.3, idet y ikke er nabo til x_{t+1} og ikke har en nabo i A_t. □

Kapitel 13

Familien $\mathcal{F}_{11}$

Følgende svarer til lemma 20.3 i rapporten.

Lemma 13.1
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej af ulige længde i G. Lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde, så p_1 og p_n er komplette til X. Da vil en kant i P være komplet til X. $\diamond$

Bevis
Antag, at ingen kanter i P er komplette til X. Da følger af lemma 9.1, at P har længde tre. Desuden findes der en anti 2-vej Q af ulige længde mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X. Men da er p_2, Q, p_3, p_1, p_4 et antihul af ulige længde, så P må indeholde en kant, som er komplet til X. $\square$

Følgende svarer til lemma 20.4 i rapporten.

Lemma 13.2
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og lad $X \subseteq V(G)$ være en antisammenhængende mængde. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej af længde mindst tre i $G - X$, så p_1 og p_n er komplette til X, og $p_2, \ldots, p_{n-1}$ ikke er komplette til X. Da findes der ikke et punkt $y \in V(G) - (X \cup \{p_2, \ldots, p_{n-1}\})$, som er komplet til X og nabo til både p_1 og p_2. $\diamond$

Bevis
Lad $y \in V(G) - (X \cup \{p_2, \ldots, p_{n-1}\})$, og antag, at y er komplet til X og nabo til både p_1 og p_n. Da intet indre punkt i P er komplet til X, og P har længde mindst tre, vil P ifølge lemma 13.1 have lige længde. Det vil sige, at n er ulige, og $n \geq 5$. Da p_2 og p_3 ikke er komplette til X, findes der en anti 2-vej Q mellem p_2 og p_3, hvis indre tilhører X. Da p_2, Q, p_3, p_n er et antihul i G, må Q have længde to, idet $G \in \mathcal{F}_{11}$. Det vil sige, at $Q : p_2, x, p_3$, hvor $x \in X$ er ikke-nabo til både p_2 og p_3. Da x er nabo til p_n, findes der i $\{p_4, \ldots, p_n\}$ punkter, som er nabo til x. Vælg i mindst muligt, så $p_i \in \{p_4, \ldots, p_n\}$, og p_i er nabo til x. Hvis $i = 4$, så er $p_1, \ldots, p_4, x$ et hul af længde fem, så $i > 4$. Hermed er $p_1, \ldots, p_i, x$ et hul af længde mindst seks, hvor y er nabo til p_1, p_2 samt x, og p_1, p_2 samt x er tre på hinanden følgende punkter. Dette giver en modstrid med, at $G \in \mathcal{F}_{11}$. $\square$

Følgende svarer til lemma 20.6 i rapporten.

Lemma 13.3
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad $X, Y \subseteq V(G)$ være disjunkte ikke-tomme antisammenhængende mængder, som udgør et komplet par. Lad $P : p_1, \ldots, p_n$ være en 2-vej i $G - (X \cup Y)$, hvor $n \geq 2$, så p_1 er det eneste punkt fra P, som er komplet til X, og p_n er det eneste punkt fra P, der er komplet til Y. Da findes der ikke et punkt $z \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$, som er komplet til $X \cup Y$ og ikke-nabo til både p_1 og p_n. $\diamond$

Bevis
Antag, at $z \in V(G) - (X \cup Y \cup V(P))$ er komplet til $X \cup Y$ og ikke-nabo til både p_1 og p_n. Vælg X maksimal, så X er antisammenhængende og komplet til Y. Ifølge lemma 15.4 i rapporten vil $V(G) - (X \cup Y)$ være sammenhængende. Altså findes der en 2-vej P' mellem p_1 og z, hvis indre punkter ikke tilhører X. Denne 2-vej kan vælges, så intet indre punkt er komplet til X, da lemma 15.4 i rapporten i modsat fald anvendes igen på mængderne X samt Y forenet med de indre punkter, der er komplette til X. Da intet punkt i $\{p_2, \ldots, p_n\}$ er komplet til X, kan P' vælges, sådan at hvis z har en nabo i $\{p_2, \ldots, p_n\}$, vil $V(P') \subseteq (\{z\} \cup V(P))$. Lad $F = V(P' - \{z\}) \cup V(P)$, da er F sammenhængende og indeholder et punkt, der er komplet til X, et punkt, der er komplet til Y, og et punkt, der er komplet til $\{z\}$. Da p_1 er det eneste punkt fra F, som er komplet til X, og p_1 ikke er komplet til hverken Y eller $\{z\}$, følger det af lemma 20.5 i rapporten, at der findes et punkt $u \in F - p_1$, så u er komplet til $Y \cup \{z\}$.
Hvis z har en nabo i $\{p_2, \ldots, p_n\}$, vil $V(P') \subseteq (\{z\} \cup \{p_1, \ldots, p_n\})$, og dermed er p_n det eneste punkt fra F, som er komplet til Y. Men p_n er ikke-nabo til z, så dette giver en modstrid med lemma 20.5 i rapporten. Det vil sige, at z ikke har en nabo i $\{p_2, \ldots, p_n\}$. Punktet z har altså kun én nabo i F, nemlig punktet fra P', som er nabo til z. Lad dette punkt være p', og dermed er p' ifølge lemma 20.5 i rapporten komplet til Y. Hvis p' er nabo til p_1, er P' lig 2-vejen p_1, p', z, men da kan p' tilføjes X, og z er komplet til $X \cup \{p'\}$, p_1 er komplet til $X \cup \{p'\}$, og $X \cup \{p'\}$ er komplet til Y. Men dette er i modstrid med maksimaliteten af X, så p' er ikke-nabo til p_1. Det vil sige, at P' har længde mindst tre.
Ved at anvende lemma 13.2, hvor X svarer til X, og P svarer til $z, p', \ldots, p_1$, fåes en modstrid, da et vilkårligt $y \in Y$ altid er nabo til z og p'. Det vil sige, at antagelsen, om at der findes et punkt z, som er komplet til $X \cup Y$ og ikke-nabo til både p_1 og p_n, må være forkert. □

Følgende svarer til lemma 20.7 i rapporten.

Lemma 13.4
Lad G være en graf, så $G \in \mathcal{F}_{11}$, og G ikke har en balanceret skæv opdeling. Lad C være et hul i G. Hvis et punkt $z \in V(G) - V(C)$ har to naboer i C, som indbyrdes er naboer, da har z en tredje nabo i C, og C har længde fire. Specielt indeholder G ikke en anti 2-vej af længde mindst fire. ◇

Bevis
Lad $C : p_1, \ldots, p_n$, og antag, at z er nabo til p_i og p_{i+1}, for $1 \leq i \leq n$. Ifølge lemma 13.3, hvor X svarer til $\{p_i\}$, Y svarer til $\{p_{i+1}\}$, og P svarer til $p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots, p_n, \ldots, p_{i+2}$, er z nabo til enten p_{i-1} eller p_{i+2}. Da $G \in \mathcal{F}_{11}$, og C indeholder tre på hinanden følgende punkter, som alle er naboer til z, må C have længde fire.

Hvis en anti 2-vej a, b, c, d, e af længde fire i G betragtes, ses det, at a, e, b, d udgør et hul af længde fire, og punktet c har to naboer i hullet, nemlig a og e, som indbyrdes er naboer. Da vil c ifølge ovenstående være nabo til enten b eller d, og dermed er a, b, c, d, e ikke en anti 2-vej. □

Litteratur

[Bondy & Murty, 1976] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R.: *Graph Theory with Applications*, The MacMillan Press LTD, 1976, (SBN 333 17791 6).

[Chartrand & Lesniak, 1996] Chartrand, Gary & Lesniak, Linda: *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, 1996, (ISBN 0 412 98721 x).

[Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour & Robin Thomas: *The Strong Perfect Graph Theorem*, Submitted for publication.

[Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2003] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour & Robin Thomas: *The Strong Perfect Graph Theorem*, Submitted for publication.

[Chvátal, 1985] Chvátal, V.: *Star-Cutsets and Perfect Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, volume 39, 1985.

[Chvátal & Sbihi, 1987] Chvátal, V. & Sbihi, N.: *Bull-Free Berge Graphs Are Perfect*, Graphs and Combinatorics, volume 3, 1987, (ISSN 0911-0119).

[Cornuéjols & Cunningham, 1985] Cornuéjols, G. & Cunningham, W.H.: *Compositions for perfect graphs*, Discrete Mathematics, volume 55, 1985.

[Lovász, 1984] Lovász, L.: *Normal Hypergraphs and the weak perfect graph conjecture*, Annals of Discrete Mathematics, volume 21, 1984.

[Alfonsín & Reed, 2000] Alfonsín, Jorge L. Ramírez & Reed, Bruce A.: *Perfect Graphs* , Wiley, 2000, (ISBN 0-471-48970-0).

[Roussel & Rubio, 2000] Roussel, F. & Rubio, P.: *About Skew Partitions in Minimal Imperfect Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, volume 83, 2001.