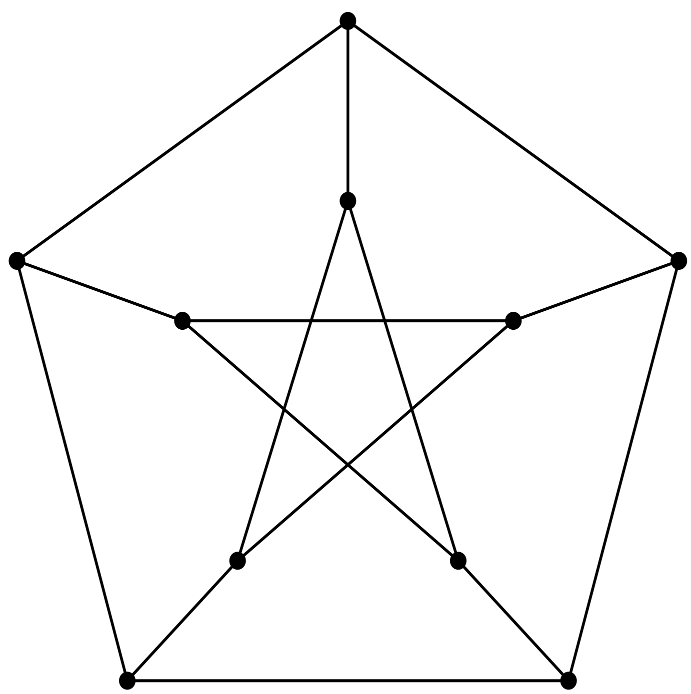
Stærkt Regulære Grafer

Af Jakob Peter Thomsen



Aalborg Universitet
Institut for matematiske videnskaber

Speciale

Efteråret 2001

Aalborg Universitet
Institut for matematiske videnskaber

Titel:

Stærkt regulære grafer

Projektperiode:

1. september til 14. december 2001

Projektgruppe:

Mat6, G4-105b

Gruppemedlemmer:

Jakob Peter Thomsen

Vejleder:

Leif Kjær Jørgensen

Oplagstal: 7

Sideantal: 113

Afsluttet den: 14.12.2001

Synopsis:

Stærkt regulær grafer introduceres og sættes i relation til egenværdier via nabomatricen. Heltalsbetingelsen og den absolutte grænse vises for stærkt regulære grafer. Konference, Paley og latinsk kvadrat grafer beskrives; alle typer af stærkt regulære grafer.
Retningsbestemte stærkt regulære grafer (RSRG) introduceres og relateres til stærkt regulære grafer. Heltalsbetingelsen vises for en RSRG. Der gives en konstruktionsmetode ved Kroneckerproduktet, som benyttes til at vise eksistens og entydighed af en $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG. Yderligere vises eksistensen af en RSRG med $t = 0$ ved brug af turneringer og Hadamard matricer.
Der afsluttes med et eksempel på konstruktion af en RSRG ud fra en stærkt regulær graf.

Forord

Denne rapport er lavet som speciale i algebraisk grafteori på 7. semester ved Aalborg Universitet, Institut for matematiske fag. Forudsætningerne for udarbejdelsen af specialet har sin oprindelse i et projektenhedskursus i algebraisk grafteori på Mat4.

Den behandlede teori i dette speciale vedrører to overordnede emner indenfor algebraisk grafteori; de stærkt regulære grafer og de retningsbestemte stærkt regulære grafer. Motivationen af dette valg beror på grafernes interessante egenskaber, som muliggører mange forskellige konstruktionsmetoder. Teorien omfatter primært den mulige eksistens af disse grafer. I den forbindelse søges generelle resultater for de tilfælde, der ikke giver anledning til eksistens.

I indledningen gives et resume af hvert kapitel. Herunder redegøres for de kilder, der har fungeret som inspiration. Kildehenvisninger angives efter Haward-princippet; dvs [forfatter, årstal, sætning/sidetal]. Beviser afsluttes med $\blacksquare$ og eksempler med $\square$.

Specialet er skrevet i dataprogrammet LaTeX.

Aalborg, den 14. december 2001

Jakob Peter Thomsen

Indholdsfortegnelse

Indledning

De stærkt regulære grafer blev opdaget i 1959 af R.C. Bose og D.M. Mesner i en artikel, hvori der redegøres for relationen mellem *algebraer og associeringsskemaer* [Bose and Mesner, 1959]. Men først i 1963 introduceres de stærkt regulære grafer af R.C. Bose [Bose, 1963]. Syv år senere i 1970 udledes de af teorien om *kombinatoriske designs* [Goethals and Seidel, 1970]. Året efter relateres de til *permutationsgrupper* af D.G. Higman [Higman, 1971] og efter yderligere fire år til *egenværdier* af A.J. Hoffman [Hoffman, 1975]. Herefter forskes meget i teorien vedrørende *de stærkt regulære grafer* og i dag findes omfattende litteratur indenfor emnet.

Med introduktion i 1963 er teorien om *de stærkt regulære grafer* en forholdsvis ny disciplin indenfor algebraisk grafteori. Endnu nyere er teorien om *de retningsbestemte stærkt regulære grafer*, som blev indført af A.M. Duval i 1986 [Duval, 1988].

Den grafteoretiske notationen i dette speciale er primært inspireret af [Biggs, 1993] og [Chartrand and Lesniak, 1996]. Mange symboler har samme betydning gennem rapporten, og er anført i *symbollisten* bagerst i rapporten. Enkelte gange forekommer symboler med en bestemt betydning som variable, men i disse tilfælde fremgår det af teksten.

Efterfølgende gives et kort resume af hvert kapitel og bilag.

Kapitel 1: Stærkt regulære grafer

De *stærkt regulær grafer* defineres og inddeles i to klasser; de primitive og de imprimitive. Der redegøres for hvornår en stærkt regulær graf er *imprimitiv*, hvorefter det *kun* er de *primitive* der betragtes. Efter indførelsen af *nabomatricen* og *egenværdier* gives en betingelse for hvornår en graf er stærkt regulær. Egenværdierne til en stærkt regulær graf samt multipliciteterne af disse bestemmes. Ved bestemmelse af multipliciteterne fås *heltalsbetingelsen*. Denne giver restriktioner på parametrene til en stærkt regulær graf ved multipliciteterne til en sådan. Dermed fungerer heltalsbetingelsen som et redskab til evt. at afvise eksistensen af en stærkt regulær graf.

Kapitlet er inspireret af [Godsil, 1993, pp. 177-180] og [Godsil and Royle, 2001, pp. 217-221].

Kapitel 2: Ikke-eksistenssætninger

I forlængelse af heltalsbetingelsen i kapitel 1 vises yderligere et resultat vedrørende eksistens; den *absolutte grænse* for stærkt regulære grafer. Denne begrænser antallet af punkter i en stærkt regulær graf, Γ, ved multipliciteterne til egenværdierne til Γ. Således kan den absolutte grænse bruges til evt. at afvise eksistensen af en stærkt regulær graf.

Kapitlet er inspireret af [Neumaier, 1981], [Cameron and van Lint, 1991, pp. 200-204], [Kveiborg and Laursen, 1997, pp. 31-37] og [Jørgensen, 2000].

Kapitel 3: Typer af stærkt regulære grafer

To typer af stærkt regulære grafer defineres; *konference* og *latinsk kvadrat* grafer. Der vises at en stærkt regulær graf af primtalsorden er en konference graf. Den uendelige familie af konference grafer kaldet *Paley grafer* defineres og parametrene for en sådan bestemmes. Latinske kvadrater defineres og bruges til konstruktion af en type af stærkt regulære grafer. Indbyrdes ortogonale latinske kvadrater defineres, og disse giver anledning til endnu en konstruktion. Parametrene til de to sidstnævnte konstruktioner af stærkt regulær grafer bestemmes.

Kapitlet er inspireret af [Godsil, 1993, pp. 180-184], [Gramkow and Hansen, 1997, p. 17], [Laywine and Mullen, 1998, pp. 3-9, 18-22, 120-123] og [Godsil and Royle, 2001, pp. 221-223].

Kapitel 4: Retningsbestemte stærkt regulære grafer

De *retningsbestemte stærkt regulær* defineres, og mange af resultaterne vedrørende betingelser for parametersættet af en (ikke-retningsbestemt) stærkt regulær graf vises at gælde for denne type grafer. De retningsbestemte stærkt regulære grafers relation til de *dobbelt regulære turneringer* defineret i bilag A undersøges. *Heltalsbetingelsen* for en retningsbestemt stærkt regulær graf vises at være ækvivalent med den for (ikke-retningsbestemte) stærkt regulære grafer. Der vises at en retningsbestemt stærkt regulær graf ikke kan have *primtalsorden*.

Kapitlet er inspireret af [Duval, 1988] og [Jørgensen, 2000, Theorem 10].

Kapitel 5: Kroneckerprodukt konstruktion

To familier af retningsbestemte stærkt regulære grafer konstrueres ved brug af *Kroneckerproduktet*. Parametrene til disse grafer bestemmes. Den ene af disse konstruktioner vil senere vise sig nyttig i kapitel 7 til at vise eksistensen af en $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG.

Kapitlet er inspireret af [Duval, 1988], [Kveiborg and Laursen, 1997, pp. 37-38] og [Godsil and Royle, 2001, p. 206].

Kapitel 6: Eksistens af RSRG med $t = 0$

En *Hadamard* og en *skæv Hadamard matrix* defineres. Der gives et resultat til konstruktion af en Hadamard matrix via *Kroneckerproduktet* defineret i forrige kapitel. Ved brug af skæv Hadamard matricer, dobbelt regulære turneringer samt deres relation til retningsbestemte stærkt regulære grafer (undersøgt i kapitel 4) vises at der eksisterer en retningsbestemt stærkt regulær graf med $t = 0$.

Kapitlet er inspireret af [Ryser, 1963, pp. 102-108], [Reid and Brown, 1972] og [Hall, 1986, Lemma 14.1.6, p. 247].

Kapitel 7: Eksistens og entydighed af en $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG

Der vises at rangen af en $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG er tre og, at der eksisterer en entydig $(8, 4; 1, 3, 3)$-RSRG. Ved disse to resultater samt en række lemmaer vises at der eksisterer en entydig $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG for ethvert heltal s.

Kapitlet er inspireret af [Hammersley, 1983, pp. 49-51] og [Jørgensen, 2000].

Kapitel 8: Epilog

Der afrundes med et eksempel på konstruktion af en retningsbestemt stærkt regulær graf ud fra en (ikke-retningsbestemt) stærkt regulær graf.

Kapitlet er inspireret af [Hobart, 2001].

Bilag A: Turneringer

Dobbelt regulære og *homogene* turneringer defineres og vises at være ækvivalente. Resultatet benyttes i kapitel 4 til at vise, at en retningsbestemt stærkt regulær graf med $t = 0$ er en dobbelt regulær turnering og i kapitel 6 til at vise den modsatte vej.

Bilaget er inspireret af [Reid and Brown, 1972].

Bilag B: Lineær Algebra

Spektralsætningen for symmetriske $n \times n$ matricer vises hvoraf den *spektrale dekomposition* i afsnit B.1.1 følger. Den spektrale dekomposition benyttes i kapitel 2 til at skrive nabomatricen for en stærkt regulær graf, Γ, som en linearkombination af projektionsmatricerne på egenrummene for egenværdier til Γ. Yderligere benyttes spektralsætningen i kapitel 1 og 3 til at bestemme summen af multipliciteterne til egneværdierne til en stærkt regulær graf.

Nabomatricen for en retningsbestemt stærkt regulær graf er *ikke* symmetrisk, hvorfor vi i afsnit B.2 bestemmer summen af multipliciteterne for egenværdierne til en *retningsbestemt stærkt regulær graf.* Yderligere udledes et resultat vedrørende rangen af nabomatricen for en retningsbestemt regulær graf, som benyttes i kapitel 7.

Til sidst gives et resultat vedrørende dimensionen af et vektorrum, udtrykt som en *direkte sum* af underrum.

Bilaget er inspireret af [Sernesi, 1993], [Fraleigh and Beauregard, 1995], [Lay, 1997], [Axler, 1997], [Jørgensen, 1999] og [Meyer, 2000].

Bilag C: Hjælperesultater

Multipliciteten af egenværdien k til både retningsbestemte og ikke-retningsbestemte stærkt regulære grafer bestemmes til én. Dette resultat bruges flere gange gennem specialet. Yderligere findes to elementære resultater fra algebra til brug i kapitel 4 samt et resultat vedrørende Kroneckerproduktet til brug i kapitel 5.

Bilaget er inspireret af [Biggs, 1993, Proposition 3.1] og [Allenby, 1991].

KAPITEL 1

Stærkt regulære grafer

En endelig graf Γ består af en endelig mængde punkter $V\Gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, hvor to forskellige punkter i Γ enten er naboer eller ikke-naboer. Er to punkter i Γ naboer udgør de en kant. Kantmængden, $E\Gamma$, kan betragtes som mængden af uordnede par af elementer i $V\Gamma$. Vi betragter kun endelige grafer uden multiple kanter mellem nabopunkter og uden loops [Biggs, 1993, pp. 3-4].

En graf Γ siges at være *regulær* af valens k (eller k-*regulær*), hvis ethvert punkt $u \in V\Gamma$ har valens k.

Definition 1.0.1 (Stærkt regulær graf)
En graf Γ med n punkter er stærkt regulær med parametre $(n, k; \lambda, \mu)$, hvis

1. *Γ er regulær af valens k*
2. *ethvert par af nabopunkter har λ fælles naboer*
3. *ethvert par af ikke-nabopunkter har μ fælles naboer.*

Γ siges at være $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær.

En komplet og en tom graf er trivielle eksempler på stærkt regulære grafer. Ved en tom graf forstås det komplementære til en komplet graf. Definition 1.0.1 udvides til *ikke* at omhandle komplette og tomme grafer.

Et andet eksempel på en stærkt regulær graf er petersen grafen (se forside), som er $(10, 3; 0, 1)$-stærkt regulær. Komplementærgrafen til petersen grafen er en $(10, 6; 3, 4)$-stærkt regulær graf.

Sætning 1.0.2
Hvis Γ er en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf, så er den komplementære graf $\overline{\Gamma}$ stærkt regulær med parametre $(n, \overline{k} = n-k-1; \overline{\lambda} = n-2k-2+\mu, \overline{\mu} = n-2k+\lambda)$.

Bevis:
For ethvert par af punkter $u, v \in V\Gamma = V\overline{\Gamma}$ gælder

$$\{u,v\} \in E\overline{\Gamma} \Leftrightarrow \{u,v\} \notin E\Gamma \quad \text{og} \quad \{u,v\} \notin E\overline{\Gamma} \Leftrightarrow \{u,v\} \in E\Gamma. \tag{1.1}$$

Idet der findes $n-k-1$ ikke-nabopunkter til ethvert punkt $u \in \Gamma$ fås, at $\overline{\Gamma}$ er regulær med valens $\overline{k} = n-k-1$.

Ethvert par af nabopunkter u, v i Γ har, ifølge definition 1.0.1, λ fælles naboer. Punktet u har $k-\lambda-1$ naboer i Γ, som ikke er nabo til v og ligeledes har v præcis $k-\lambda-1$ naboer i Γ, som ikke er nabo til u. Dermed findes $n-2(k-\lambda-1)-2-\lambda = n-2k+\lambda$ punkter i Γ, som ikke er nabo til hverken u eller v. Bemærk at der trækkes to fra n, idet punkterne u og v ikke tæller som ikke-nabopunkter. Det følger af (1.1), at ethvert par af ikke-nabopunkter u, v i $\overline{\Gamma}$ har $\overline{\mu} = n-2k+\lambda$ fælles naboer.

Ethvert par af ikke-nabopunkter u, v i Γ har, ifølge definition 1.0.1, μ fælles naboer i Γ. Punktet u (hhv. v) har $k-\mu$ naboer, som ikke er nabo til v (hhv. u). Således findes $n-2(k-\mu)-2-\mu = n-2k-2+\mu$ punkter i Γ, som ikke er nabo til hverken u eller v. Det følger af (1.1), at ethvert par af nabopunkter u, v i $\overline{\Gamma}$ har $\overline{\lambda} = n-2k-2+\mu$ fælles naboer. ■

Parameteren $\overline{k}$ i foregående bevis kan udtrykkes ved k, λ og μ forudsat, at $\mu \neq 0$.

Sætning 1.0.3
Lad Γ være en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf og lad $\overline{\Gamma}$ være den komplementære graf til Γ med valens $\overline{k} = n-k-1$. Så gælder

$$k(k-1-\lambda) = (n-k-1)\mu.$$

Bevis:
Beviset følger ved at tælle kanter på to forskellige måder.

1. Lad $u, v \in V\Gamma$, $\{u, v\} \in E\Gamma$, så har u og v præcis λ fælles naboer idet Γ er $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær. Yderligere er der $k-1-\lambda$ naboer til v, som ikke er nabo til u. Idet u har k naboer som v, findes der $k(k-1-\lambda)$ kanter i Γ, som forbinder naboer til u med ikke-naboer til u.

2. Lad $u, v \in V\Gamma$, $\{u, v\} \notin E\Gamma$, så har u og v præcis μ fælles naboer. Idet u har $n-k-1$ ikke-naboer som v, findes der $(n-k-1)\mu$ kanter, som forbinder ikke-naboer til u med naboer til u.

Af punkt 1 og punkt 2 fås

$$k(k-1-\lambda) = (n-k-1)\mu.$$

■

En stærkt regulær graf Γ kaldes *primitiv* hvis både Γ og dens komplementære $\overline{\Gamma}$ er sammenhængende. Hvis Γ ikke er primitiv, siges den at være *imprimitiv.*

Proposition 1.0.4 *En $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf Γ er imprimitiv hvis og kun hvis $\mu = k$ eller $\mu = 0$.*

Bevis:
Først vises, at Γ er usammenhængende $\Leftrightarrow \mu = 0$. Antag Γ er usammenhængende og lad Γ_1 være en komponent af Γ. For vilkårlige punkter $u \in V\Gamma_1$ og $v \in V\Gamma$, $v \notin V\Gamma_1$ gælder, at $\{u,v\} \notin E\Gamma$ samt u og v har ingen fælles naboer. Da Γ er $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær fås, at $\mu = 0$. Omvendt hvis $\mu = 0$ og $\{u,v\} \notin E\Gamma$ for $u,v \in V\Gamma$, så findes der ingen vej [Chartrand and Lesniak, 1996, p. 17] fra u til v, og dermed er Γ usammenhængende. Dvs at Γ er sammenhængende hvis og kun hvis $\mu > 0$. Tilsvarende gælder, at $\overline{\Gamma}$ er sammenhængende hvis og kun hvis $\overline{\mu} > 0$.

Nu vises, at $\overline{\Gamma}$ er usammenhængende $\Leftrightarrow \mu = k$. Antag at $\overline{\Gamma}$ er usammenhængende, så er $\overline{\mu} = 0$. Af sætning 1.0.2 følger, at $\overline{\mu} = n - 2k + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2k - n$. Så følger af sætning 1.0.3

$$\begin{aligned} k(k-1-\lambda) &= (n-k-1)\mu \\ k(k-1-2k+n) &= (n-k-1)\mu \\ k(n-k-1) &= (n-k-1)\mu \\ k &= \mu. \end{aligned}$$

Omvendt hvis $\mu = k$, så fås af sætning 1.0.3, at $\lambda = 2k - n$. Af sætning 1.0.2 følger, at $\overline{\mu} = n - 2k + \lambda = n - 2k + 2k - n = 0$. Vi fandt i starten af beviset, at hvis $\overline{\mu} = 0$ er $\overline{\Gamma}$ usammenhængende. Dvs $\overline{\Gamma}$ er usammenhængende hvis og kun hvis $\mu = k$. ■

Af ovenstående proposition følger, at en imprimitiv stærkt regulær graf enten er en disjunkt foreningsmængde af komplette grafer eller en komplet mangedelt graf. I efterfølgende korollar betegner K_{k+1} en komplet graf med $k+1$ punkter og $K_{(k+1)_1,(k+1)_2,\ldots,(k+1)_m}$ en komplet mangedelt graf med m punktklasser hver bestående af $k+1$ punkter.

Korollar 1.0.5 *Lad Γ være en imprimitiv $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf. Hvis*

1. $\mu = 0$, *så er Γ isomorf med mK_{k+1} for et $m > 1$;*
2. $\mu = k$, *så er Γ isomorf med $K_{(n-k)_1,(n-k)_2,\ldots,(n-k)_m}$ for et $m > 1$.*

Bevis:

ad. 1 Lad $u,v,w \in V\Gamma$ med $\{u,v\} \in E\Gamma$ og $\{u,w\} \in E\Gamma$. Idet $\mu = 0$ følger, at $\{v,w\} \in E\Gamma$. Dvs ethvert par af nabopunkter til et punkt $u \in V\Gamma$ er naboer og da Γ er k-regulær er $\lambda = k - 1$. Betragt nu kun punkterne $u,v \in V\Gamma$. Idet $\lambda = k - 1$ og u har k naboer, så er de resterende $k - 1$ naboer til v præcis de $\lambda = k - 1$ punkter, som u og v har tilfælles. Dermed er enhver komponent af Γ en komplet graf med $k+1$ punkter; dvs Γ er en disjunkt foreningsmængde af et antal K_{k+1}.

ad. 2 Ved indsættelse af $\mu = k$ i sætning 1.0.3 fås, at $\lambda = 2k - n$. Betragt nu den komplementære graf $\overline{\Gamma}$, så følger af sætning 1.0.2

$$\overline{\mu} = n - 2k + \lambda = n - 2k + 2k - n = 0.$$

Dvs den komplementære graf til Γ ifølge punkt 1 er en foreningsmængde af m, $m > 1$, disjunkte komplette grafer, hver med $\overline{k} + 1 = (n - k - 1) + 1 = n - k$ punkter. Dermed er Γ en komplet m-delt graf, $m > 1$, med $(n - k)$ punkter i hver punktklasse.

■

Fremtidige resultater om stærkt regulære grafer indbefatter ikke *imprimitive* stærkt regulære grafer.

1.1 Egenværdier

Egenværdierne til en stærkt regulær graf, Γ, er bestemt af parametrene til Γ. Ved egenværdier til Γ forstås egenværdierne hørende til nabomatricen for Γ.

Definition 1.1.1 (Nabomatrix)
Lad Γ være en graf med punktmængde $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, så er nabomatricen for Γ en $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$, hvis indgange er givet ved

$$(\mathbf{A})_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{hvis } \{v_i, v_j\} \in E\Gamma; \\ 0, & \textit{ellers.} \end{cases}$$

Det følger af definition 1.1.1, at $\mathbf{A}$ er en reel, symmetrisk matrix og at $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0$. Da vi kun betragter grafer uden loops, er alle diagonalindgange i $\mathbf{A}$ nul.

Lemma 1.1.2 *Lad $\mathbf{A}$ være en reel symmetrisk matrix. Hvis $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ er egenvektorer til $\mathbf{A}$ med forskellige egenværdier, så er $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ indbyrdes ortogonale.*

Bevis:
Lad $\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \phi\boldsymbol{u}$ og $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \tau\boldsymbol{v}$. Da $\mathbf{A}$ er symmetrisk fås

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^T\mathbf{A}\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}^T\mathbf{A}\boldsymbol{u})^T \\ \boldsymbol{u}^T\tau\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}^T\phi\boldsymbol{u})^T \\ \boldsymbol{u}^T\tau\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u}^T\phi\boldsymbol{v} \\ \tau\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} - \phi\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} &= 0 \\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}(\tau - \phi) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Hvis $\tau \neq \phi$ følger det af (1.2), at $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 0$ og dermed $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. ■

Lemma 1.1.3 *Lad Γ være en graf af orden n med nabomatrix $\mathbf{A}$. Antallet af veje af længde l fra v_i til v_j i Γ er lig indgangen på position (i,j) i matricen $\mathbf{A}^l$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Bevis:
Beviset følger ved induktion efter l.

Lemmaet er opfyldt for $l = 0, 1$ idet $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ og $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$. For $l = 2$ fås position (i,j) i $\mathbf{A}^2$ til

$$(\mathbf{A}^2)_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{A})_{ij} = \sum_{h=1}^{n} (\mathbf{A})_{ih}(\mathbf{A})_{hj}. \tag{1.3}$$

Række i i $\mathbf{A}$ udpeger nabopunkter til $v_i \in V\Gamma$, og søjle j i $\mathbf{A}$ udpeger nabopunkter til $v_j \in V\Gamma$. Dvs (1.3) er antallet af punkter, der er nabo til både v_i og v_j og dermed antallet af veje af længde to fra v_i til v_j.

Induktionsantagelse: Antag at lemmaet er opfyldt for $l-1$ med $l > 2$, så skal lemmaet vises for l.

Position (i,j) i $\mathbf{A}^l$ er givet ved

$$(\mathbf{A}^l)_{ij} = (\mathbf{A}^{l-1}\mathbf{A})_{ij} = \sum_{h=1}^{n} (\mathbf{A}^{l-1})_{ih}(\mathbf{A})_{hj}. \tag{1.4}$$

Ifølge induktionsantagelsen er $(\mathbf{A}^{l-1})_{ih}$ antal veje af længde $l-1$ fra v_i til v_h, og $(\mathbf{A})_{hj}$ er antal veje af længde én fra v_h til v_j. Dermed er (1.4) antal veje af længde l fra v_i til v_j. ■

Lad $\mathbf{J}$ betegne matricen der opfylder, at $(\mathbf{J})_{ij} = 1$.

Lemma 1.1.4 *Lad Γ være en graf, som ikke er komplet eller tom, med nabomatrix $\mathbf{A}$. Så er Γ $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær hvis og kun hvis*

$$\mathbf{A}^2 = k\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A} + \mu(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}). \tag{1.5}$$

Bevis:
Ifølge lemma 1.1.3 er (i,j)-indgangen i $\mathbf{A}^2$ antal veje af længde to fra v_i til v_j i Γ. Hvis Γ er $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær, er der tre mulige værdier for $(\mathbf{A}^2)_{ij}$.

1. $i = j$

   I dette tilfælde er v_i og v_j det samme punkt. En vej af længde to fås således ved at gå til et nabopunkt til $v_i = v_j$ og tilbage igen. Da Γ er k-regulær får vi k veje af længde to.

2. $i \neq j$, v_i og v_j naboer

   En vej af længde to fra v_i til v_j fås ved at gå gennem et fælles punkt til v_i og v_j. Da Γ er $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær, er der λ veje af længde to.

3. $\underline{i \neq j,\ v_i \text{ og } v_j \text{ ikke-naboer}}$

   En vej af længe to fra v_i til v_j fås igen ved at gå gennem et fælles punkt til v_i og v_j. Da Γ er $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær, er der μ veje af længde to.

Ved at sammenholde de tre ovenstående tilfælde fås, at

$$\mathbf{A}^2 = k\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A} + \mu(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Hvis vi omvendt tager udgangspunkt i ligning (1.5) fås, ved brug af de tre ovenstående muligheder for indgangene i $\mathbf{A}^2$, at grafen Γ hørende til $\mathbf{A}$ er $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær. ■

Bemærkning 1.1.5 *Idet Γ fra lemma 1.1.4 er k-regulær indholder hver søjle og række i $\mathbf{A}$ præcis k ét-taller, hvormed*

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{JA} = k\mathbf{J}.$$

Ved brug af ligning (1.5) kan egenværdierne til en stærkt regulær graf Γ med nabomatrix $\mathbf{A}$ bestemmes.

Korollar 1.1.6 *Lad Γ være en $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf med nabomatrix $\mathbf{A}$. Hvis $\Delta := (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, så er egenværdierne for $\mathbf{A}$ k, $\theta = \frac{\lambda-\mu+\sqrt{\Delta}}{2}$ og $\rho = \frac{\lambda-\mu-\sqrt{\Delta}}{2}$.*

Bevis:
Idet Γ er k-regulær fås

$$\mathbf{A}\boldsymbol{j} = k\boldsymbol{j},$$

hvor $\boldsymbol{j}$ er vektoren bestående af ét-taller. Dermed er k en egenværdi til $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{j}$. Lad $\theta \neq k$ være en anden egenværdi til $\mathbf{A}$ med egenvektor $\boldsymbol{z}$, så følger af lemma 1.1.2, at $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{j}$. Af lemma 1.1.4 fås

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= k\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A} + \mu(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{A}^2 - (\lambda-\mu)\mathbf{A} - (k-\mu)\mathbf{I} &= \mu\mathbf{J}. \end{aligned}$$

Ved multiplikation af $\boldsymbol{z}$ på begge sider af lighedstegnet fås

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2\boldsymbol{z} - (\lambda-\mu)\mathbf{A}\boldsymbol{z} - (k-\mu)\boldsymbol{z} &= \mu\mathbf{J}\boldsymbol{z} \\ \mathbf{A}^2\boldsymbol{z} - (\lambda-\mu)\mathbf{A}\boldsymbol{z} - (k-\mu)\boldsymbol{z} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

hvor der benyttes, at $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{j}$. At θ er en egenværdi til $\mathbf{A}$ med egenvektor $\boldsymbol{z}$ betyder, at $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \theta\boldsymbol{z}$. Heraf følger at $\mathbf{A}^2\boldsymbol{z} = \theta^2\boldsymbol{z}$. Udnyt dette i (1.6), så fås

$$\begin{aligned} \theta^2\boldsymbol{z} - (\lambda-\mu)\theta\boldsymbol{z} - (k-\mu)\boldsymbol{z} &= \mathbf{0} \\ \theta^2 - (\lambda-\mu)\theta - (k-\mu) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

For at finde de resterende egenværdier løses andengradsligningen (1.7).

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu), \quad \theta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\lambda - \mu) + \sqrt{\Delta}}{2} \tag{1.8}$$

$$\rho = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\lambda - \mu) - \sqrt{\Delta}}{2}. \tag{1.9}$$

■

Proposition 1.1.7 *Lad Γ være en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf med egenværdier k, θ og ρ og nabomatrix $\mathbf{A}$. Så er egenværdierne $\overline{k}, \overline{\theta}$ og $\overline{\rho}$ til komplementærgrafen $\overline{\Gamma}$ givet ved*

$$\overline{k} = n - k - 1\,, \quad \overline{\theta} = -1 - \theta \quad \textit{og} \quad \overline{\rho} = -1 - \rho.$$

Bevis:
I beviset for korollar 1.1.6 fandt vi, at $\mathbf{A}\boldsymbol{j} = k\boldsymbol{j}$. Idet nabomatricen for $\overline{\Gamma}$ er $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A})$ gælder

$$\begin{aligned}(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{j} &= \mathbf{J}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j} - \mathbf{A}\boldsymbol{j} \\ &= n\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j} - k\boldsymbol{j} \\ &= (n - 1 - k)\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

og dermed er $\overline{k} = n - k - 1$ egenværdi til $\overline{\Gamma}$.

Idet θ er egenværdier til $\mathbf{A}$, findes der en vektor $\boldsymbol{x}$, så $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$. Af lemma 1.1.2 følger, at $\boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{x}$. Idet $\mathbf{J}$ er matricen, hvis rækker (og søjler) er $\boldsymbol{j}$, får vi

$$\begin{aligned}(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{x} &= \underbrace{\mathbf{J}\boldsymbol{x}}_{=0} - \boldsymbol{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{x} \\ &= (-1 - \theta)\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Dermed er $\overline{\theta} = -1 - \theta$ egenværdi for $\overline{\Gamma}$. Tilsvarende kan vises, at $\overline{\rho} = -1 - \rho$ er egenværdi for $\overline{\Gamma}$.

■

For egenværdierne i korollar 1.1.6 gælder, at $\theta\rho = (\mu - k)$. Da Γ er stærkt regulær er $\mu \leq k$. Hvis $\mu = k$ følger af proposition 1.0.4, at Γ er imprimitiv, hvormed vi ønsker $\mu < k$. Dvs θ og ρ har modsat fortegn, hvormed det følger af (1.8) og (1.9), at $\rho < 0 < \theta$. Multipliciteten m_θ og m_ρ af hhv. θ og ρ er ligesom egenværdierne bestemt ved parametrene til Γ. Multipliciteten af egenværdien k er én ifølge sætning B.1.3 og proposition C.1.1. Af sætning B.1.3 følger at

$$m_\theta + m_\rho = n - 1. \tag{1.10}$$

Summen af alle egenværdierne er $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0$ [Axler, 1997, p. 217], hvormed

$$m_\theta\theta + m_\rho\rho = -k. \tag{1.11}$$

(1.10) og (1.11) er to ligninger med to ubekendte, som ved løsning giver

$$m_\theta = -\frac{(n-1)\rho + k}{\theta - \rho}, \quad m_\rho = \frac{(n-1)\theta + k}{\theta - \rho}. \tag{1.12}$$

Af (1.8) og (1.9) følger, at $(\theta - \rho) = \sqrt{\Delta}$ og ved indsættelse af parametrene for hhv. θ og ρ i (1.12) fås

$$m_\theta = \frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{2k + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{\Delta}}\right) \tag{1.13}$$

$$m_\rho = \frac{1}{2}\left(n - 1 + \frac{2k + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{\Delta}}\right). \tag{1.14}$$

Da m_θ og m_ρ nødvendigvis er positive heltal giver (1.13) eller (1.14) en betingelse for, om den givne $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulære graf Γ eksisterer. Dette er kendt som *heltalsbetingelsen.*

Bemærkning 1.1.8 *Ved at udføre ovenstående argumenter og beregninger på egenværdierne* $(-1-\theta)$ *og* $(-1-\rho)$ *for den komplementære graf* $\overline{\Gamma}$ *fås, at multipliciteten for disse er*

$$m_{(-1-\theta)} = m_\theta \quad og \quad m_{(-1-\rho)} = m_\rho\,,$$

hvor m_θ *og* m_ρ *er multipliciteterne for egenværdier* θ *og* ρ *hørende til den* $(n, k; \lambda, \mu)$*-stærkt regulære graf* Γ.

Lemma 1.1.9 *En sammenhængende regulær graf med præcis tre forskellige egenværdier er en stærkt regulær graf.*

Bevis:
Antag at Γ er en sammenhængende k-regulær graf med n punkter, nabomatrix $\mathbf{A}$ og præcis tre egenværdier. Idet Γ er k-regulær, er k en egenværdi til Γ. Lad θ og ρ være de to andre egenværdier. Lad $p(x) = (x-k)(x-\theta)(x-\rho)$, så gælder [Axler, 1997, Cayley-Hamilton Theorem 9.20]

$$p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - k\mathbf{I})\underbrace{(\mathbf{A} - \theta\mathbf{I})(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})}_{=q(\mathbf{A})} = 0.$$

Dvs søjlerne i $q(\mathbf{A})$ er i $\ker\{\,\mathbf{A} - k\mathbf{I}\,\}$, som kaldes egenrummet af $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien k. Da Γ er sammenhængende, er k en simpel egenværdi ifølge proposition C.1.1, hvormed $\dim\{\,\ker\{\,\mathbf{A} - k\mathbf{I}\,\}\,\} = 1$. Idet

$$\mathbf{A}\boldsymbol{j} = k\boldsymbol{j} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - k\mathbf{I})\boldsymbol{j} = \mathbf{0},$$

er egenrummet af $\mathbf{A}$ hørende til k udspændt af $\boldsymbol{j}$. Dvs enhver søjle i $q(\mathbf{A})$ er et multiplum af $\boldsymbol{j}$, og da $q(\mathbf{A})$ er en symmetrisk matrix fås

$$\begin{aligned} q(\mathbf{A}) &= c\mathbf{J}\,, \qquad \text{for et } c \in \mathbb{R} \\ (\mathbf{A} - \theta\mathbf{I})(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I}) &= c\mathbf{J} \\ \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}(\rho + \theta) + \theta\rho\mathbf{I} &= c\mathbf{J} \\ \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}(\rho + \theta) - \theta\rho\mathbf{I} + c\mathbf{J}. \end{aligned}$$

Dvs $\mathbf{A}^2$ er en linearkombination af $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$ og $\mathbf{J}$, hvormed det følger af lemma 1.1.4, at Γ er en stærkt regulær graf. ■

Kapitel 2

Ikke-eksistenssætninger

En stor del af den teori der foreligger om stærkt regulære grafer fokuserer på eksistensen af disse. I afsnit 1.1, side 12 udledte vi *heltalsbetingelsen*, som i kraft af multipliciteten af egenværdierne til en stærkt regulær graf giver restriktioner på parametrene til denne. Kendes parametrene til en stærkt regulær graf fungerer heltalsbetingelsen som et redskab til evt. at udelukke eksistensen af en sådan. Der findes andre generelle resultater, der ligesom heltalsbetingelsen kan udnyttes til at undersøge muligheden for, at en given stærkt regulær graf eksisterer. Bl.a kan nævnes half-case [Belevitch, 1950], Krein betingelserne [Scott, 1973], klo grænsen [Neumaier, 1979] og μ-grænsen [Neumaier, 1979]. For et nyere bevis af Krein betingelserne henvises til [Godsil and Royle, 2001, pp. 231-235].

I dette kapitel vises den *absolutte grænse*, som begrænser antallet af punkter i en stærkt regulær graf Γ ved multipliciteten af egenværdierne til Γ. Den absolutte grænse blev først vist af [Koornwinder, 1976]. Beviset for den absolutte grænse i dette kapitel er inspireret af [Neumaier, 1981], [Cameron and van Lint, 1991, pp. 200-204], [Kveiborg and Laursen, 1997, pp. 31-37] og [Jørgensen, 2000]. For at bevise den absolutte grænse gøres brug af en række resultater fra lineær algebra. I denne forbindelse henvises til bilag B.

2.1 Absolut grænse

Beviset i dette afsnit for den *absolutte grænse* forudsætter at der findes en *spektral dekomposition* af nabomatricen for en stærkt regulær graf. Yderligere er det nødvendigt at undersøge projektionsmatricerne i denne dekomposition gennem en række lemmaer.

Lad Γ være en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf med tre forskellige egenværdier k, θ og ρ, hvis multiplicitet er hhv. $1, m_\theta$ og m_ρ. Lad $\mathbf{A}$ være nabomatrix til Γ. Af definition 1.1.1 følger, at $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ symmetrisk matrix, hvormed $\mathbf{A}$ ifølge sætning B.1.3 kan ortogonalt diagonaliseres. Dvs der findes en spektral dekomposition af $\mathbf{A}$ (afsnit B.1.1) givet ved

$$\mathbf{A} = k\mathbf{E}_k + \theta\mathbf{E}_\theta + \rho\mathbf{E}_\rho, \tag{2.1}$$

hvor $\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta$ og $\mathbf{E}_\rho$ er projektionsmatricer på egenrummene $\mathbb{V}_k, \mathbb{V}_\theta$ og $\mathbb{V}_\rho$ for egenværdierne k, θ og ρ til $\mathbf{A}$. Yderligere gælder for $i, j_1, j_2 \in \{k, \theta, \rho\}$, at

$$\begin{aligned}\mathrm{null}\{\,\mathbf{E}_i\,\} &= \{\,\boldsymbol{x} \mid \mathbf{E}_i\boldsymbol{x} = 0\,\} \\ &= \{\,\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_{j_1} \oplus \mathbb{V}_{j_2} \mid i \neq j_1 \neq j_2 \wedge i \neq j_2\,\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

da egenrummene $\mathbb{V}_k, \mathbb{V}_\theta$ og $\mathbb{V}_\rho$ er indbyrdes ortogonale (sætning B.1.3). En anden konsekvens af den indbyrdes ortogonalitet mellem $\mathbb{V}_k, \mathbb{V}_\theta$ og $\mathbb{V}_\rho$ er, at $\mathrm{Span}\{\,\mathbb{V}_k, \mathbb{V}_\theta, \mathbb{V}_\rho\,\} = \mathbb{R}^n$. Således kan enhver vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ udtrykkes ved

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{u}_\theta + \boldsymbol{u}_\rho,$$

hvor $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{V}_i$ for $i \in \{k, \theta, \rho\}$. Vi ønsker at udtrykke projektionsmatricerne ved linearkombinationer af $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ og $\mathbf{A}$.

Lemma 2.1.1 *Projektionsmatricerne* $\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta$ *og* $\mathbf{E}_\rho$ *er givet ved*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_k &= \frac{1}{n}\mathbf{J}\,; \\ \mathbf{E}_\theta &= -\frac{\rho}{\theta-\rho}\mathbf{I} + \frac{\rho-k}{n(\theta-\rho)}\mathbf{J} + \frac{1}{\theta-\rho}\mathbf{A}\,; \\ \mathbf{E}_\rho &= \frac{\theta}{\theta-\rho}\mathbf{I} + \frac{k-\theta}{n(\theta-\rho)}\mathbf{J} - \frac{1}{\theta-\rho}\mathbf{A}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Bevis:
Idet k er en simpel egenværdi til $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{j}$, er enhver vektor $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{V}_k$ et multiplum af $\boldsymbol{j}$. Dermed fås for enhver vektor $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{V}_k$, at

$$\mathbf{J}\boldsymbol{u}_k = n\boldsymbol{u}_k = n\mathbf{E}_k\boldsymbol{u}_k.$$

Dvs

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{n}\mathbf{J}.$$

Af den spektrale dekomposition følger (se afsnit B.1.1), at

$$\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_\theta + \mathbf{E}_\rho = \mathbf{I}. \tag{2.4}$$

Idet $\mathbf{E}_k = \frac{1}{n}\mathbf{J}$, er (2.1) og (2.4) to ligninger med to ubekendte $\mathbf{E}_\theta$ og $\mathbf{E}_\rho$, som ved løsning giver

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta &= -\frac{\rho}{\theta-\rho}\mathbf{I} + \frac{\rho-k}{n(\theta-\rho)}\mathbf{J} + \frac{1}{\theta-\rho}\mathbf{A} \\ \mathbf{E}_\rho &= \frac{\theta}{\theta-\rho}\mathbf{I} + \frac{k-\theta}{n(\theta-\rho)}\mathbf{J} - \frac{1}{\theta-\rho}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

■

Lemma 2.1.2 *Lad* Γ *være en* $(n,k;\lambda,\mu)$*-stærkt regulær graf med egenværdier* k,θ *og* ρ. *Lad* $\mathbf{E}_i$ *være projektionsmatrix på egenrummet* $\mathbb{V}_i$ *for* $i \in \{k,\theta,\rho\}$. *Så gælder*

$$rank\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\} = rank\{\, a\mathbf{E}_k \,\} + rank\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\} + rank\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\},$$

for $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

Bevis:
For enhver vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ fås, at

$$\underbrace{(a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho)\boldsymbol{x}}_{\in \mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\}} = \underbrace{a\mathbf{E}_k\boldsymbol{x}}_{\in \mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\}} + \underbrace{b\mathbf{E}_\theta\boldsymbol{x}}_{\in \mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\}} + \underbrace{c\mathbf{E}_\rho\boldsymbol{x}}_{\in \mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\}}.$$

Dermed kan enhver vektor i $\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\}$ udtrykkes som en sum af vektorer i hhv. $\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\}, \mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\}$ og $\mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\}$. Dvs

$$\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\} \subseteq \mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\} + \mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\} + \mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\}.$$

Omvendt gælder at

$$\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\} \supseteq \mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\} + \mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\} + \mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\},$$

idet $\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\}, \mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\}, \mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\} \subseteq \mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\}$. Dvs

$$\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\} = \underbrace{\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\}}_{\subseteq \mathbb{V}_k} + \underbrace{\mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\}}_{\subseteq \mathbb{V}_\theta} + \underbrace{\mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\}}_{\subseteq \mathbb{V}_\rho}. \qquad (2.5)$$

Idet $\mathbb{V}_k, \mathbb{V}_\theta$ og $\mathbb{V}_\rho$ er indbyrdes ortogonale følger, at summen i (2.5) er entydig hvormed

$$\mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\} = \mathrm{Range}\{\, a\mathbf{E}_k \,\} \oplus \mathrm{Range}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\} \oplus \mathrm{Range}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\}.$$

Nu følger af sætning B.3.4, at

$$\mathrm{rank}\{\, a\mathbf{E}_k + b\mathbf{E}_\theta + c\mathbf{E}_\rho \,\} = \mathrm{rank}\{\, a\mathbf{E}_k \,\} + \mathrm{rank}\{\, b\mathbf{E}_\theta \,\} + \mathrm{rank}\{\, c\mathbf{E}_\rho \,\}.$$

■

For at vise den *absolutte grænse* gør vi brug af en ulighed (lemma 2.1.7), hvori rangen af *Schur-Hadamard produktet* af to ens projektionsmatricer (undtagen projektionsmatricen på egenrummet $\mathbb{V}_k$) indgår.

Definition 2.1.3 (Schur-Hadamard produkt)
Lad $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *være matricer af samme dimension, så er Schur-Hadamard produktet af* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *givet ved*

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad \textit{hvor} \quad (\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B})_{ij}.$$

Vi ønsker at vise at Schur-Hadamard produktet af to ens projektionsmatricer er veldefineret. Dette vil vise sig at være opfyldt, hvis vektorrummet $\mathbb{V} = \mathrm{Span}\{\, \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{J} \,\}$ med Schur-Hadamard produktet er en algebra.

Definition 2.1.4 (Algebra over $\mathbb{R}$)
En algebra over $\mathbb{R}$ er et vektorrum $\mathbb{V}$ over $\mathbb{R}$ med et produkt $*$, så der for ethvert $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{V}$ og ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{C} + \mathbf{B} * \mathbf{C}$;
2. $\mathbf{A} * (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} * \mathbf{B} + \mathbf{A} * \mathbf{C}$;
3. $a(\mathbf{A} * \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) * \mathbf{B} = \mathbf{A} * (a\mathbf{B})$.

Vi betegner algebraen med $\langle\, \mathbb{V}, * \,\rangle$.

Punkt 1 og 2 i definition 2.1.4 kaldes de *distributive love*. Hvis den *associative lov* $\mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{C}) = (\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{C}$ gælder for alle $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{V}$ siges algebraen i definition 2.1.4 at være *associativ*. Hvis den *kommutative lov* $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{B} * \mathbf{A}$ gælder for alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{V}$ siges algebraen i definition 2.1.4 at være *kommutativ*.

Lemma 2.1.5 *Lad $\mathbb{V} = Span\{\, \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{J} \,\}$ være et underrum af mængden af reelle $n \times n$ matricer, hvor $\mathbf{A}$ er nabomatrix for en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf. Så er $\mathcal{A}_1 = \langle\, \mathbb{V}, \circ \,\rangle$ og $\mathcal{A}_2 = \langle\, \mathbb{V}, \cdot \,\rangle$ begge en algebra over $\mathbb{R}$, som er associativ og kommutativ.*

Bevis:
Det ses let at $\mathbb{V} = \mathrm{Span}\{\, \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{J} \,\}$ opfylder de nødvendige krav [Lay, 1997, p. 211] for at være et vektorrum over $\mathbb{R}$.

Først vises at $\mathcal{A}_1$ er en matrixalgebra. Lad $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ være reelle $n \times n$ matricer. Bemærk at $\mathbf{A}$ i denne sammenhæng *ikke* betegner nabomatricen for stærkt regulær graf. Af definition 2.1.3 fås for $a, b \in \mathbb{R}$, at

$$\begin{aligned}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \circ \mathbf{C} &= (a(\mathbf{A})_{ij} + b(\mathbf{B})_{ij})(\mathbf{C})_{ij} \\ &= a(\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{C})_{ij} + b(\mathbf{B})_{ij}(\mathbf{C})_{ij} \\ &= a(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}) + b(\mathbf{B} \circ \mathbf{C}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tilsvarende kan vises, at

$$\mathbf{A} \circ (a\mathbf{B} + b\mathbf{C}) = a(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) + b(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}). \tag{2.7}$$

Af (2.6) og (2.7) følger punkt 1, 2 og 3 i definition 2.1.4 samt, at Schur-Hadamard produktet er lineært. Idet $\mathbf{I}$ er identitetsmatricen og $\mathbf{J}$ er matricen bestående af ét-taller, fås følgende multiplikationstabel ved benyttelse af definition 2.1.3.

$\circ$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{J}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$

Tabel 2.1: Multiplikationstabel for Schur-Hadamard produktet

Det ses at alle produkter i multiplikationstabellen ligger i $\mathbb{V}$. Da Schur-Hadamard produktet er lineært, er $\mathbb{V}$ lukket under Schur-Hadamard multiplikation. Dvs

Schur-Hadamard produktet er veldefineret for $\mathbb{V} = \text{Span}\{\,\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{J}\,\}$ og $\mathcal{A}_1$ opfylder de nødvendige krav for at være en algebra over $\mathbb{R}$. Det ses let af definition 2.1.3, at Schur-Hadamard produktet er associativt og kommutativt.

Nu vises at $\mathcal{A}_2$ er en matrixalgebra. Det er klart, at sædvanlig matrixmultiplikation [Lay, 1997, pp. 100-106] opfylder kravene i definition 2.1.4 og er lineært. Ved bemærkning 1.1.5 fås følgende multiplikationstabel for sædvanlig matrixmultiplikation

$\cdot$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{J}$	$\mathbf{J}$	$n\mathbf{J}$	$k\mathbf{J}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$k\mathbf{J}$	$\mathbf{A}^2$

Tabel 2.2: Multiplikationstabel for sædvanlig matrixmultiplikation

Af lemma 1.1.4 følger, at

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 &= k\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A} + \mu(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= (k-\mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{J} + (\lambda - \mu)\mathbf{A}.\end{aligned}$$

Dermed er $\mathbf{A}^2$ en linearkombination af $\mathbf{I}, \mathbf{A}$ og $\mathbf{J}$, hvormed alle produkter i tabel 2.2 ligger i $\mathbb{V}$. Dvs $\mathbb{V}$ er lukket under sædvanlig matrixmultiplikation, som dermed er veldefineret. Sædvanlig matrixmultiplikation ses let at være associativt. Af tabel 2.2 følger at sædvanlig matrixmultiplikation er kommutativt for $\mathbb{V} = \text{Span}\{\,\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{J}\,\}$. ∎

Det følger af den spektrale dekomposition i afsnit B.1.1 og lemma B.1.2, at $\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta$ og $\mathbf{E}_\rho$ er indbyrdes ortogonale mht. sædvanlig matrixmultiplikation ($\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j = 0$ for $i \neq j$). Dermed er $\{\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\rho\}$ en lineært uafhængig mængde. Så fås af (2.1), (2.3) og (2.4), at $\{\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\rho\}$ er en basis for $\mathcal{A}_2$. Dermed følger af lemma 2.1.5 at sædvanlig matrixmultiplikation er veldefineret for $\text{Span}\{\,\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\rho\,\}$.

Da $\mathbf{I}, \mathbf{A}$ og $\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}$ har indgange lig én på forskellige positioner følger af definition 2.1.3, at de er indbyrdes ortogonale mht. Schur-Hadamard multiplikation. Dvs $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}\}$ udgør en basis for $\mathcal{A}_1$. Det følger af lemma 2.1.1 og lemma 2.1.5 at Schur-Hadamard multiplikation er veldefineret for $\text{Span}\{\,\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\rho\,\}$.

Bemærkning 2.1.6 *En konsekvens af multiplikationstabel 2.1 er, at*

$$\begin{aligned}(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \mathbf{J} \circ (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{I} \circ (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{A} \circ (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Før vi beviser den absolutte grænse for en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf, er det nødvendigt med endnu et lemma.

Lemma 2.1.7 *Lad* $\mathbf{A}$ *være en* $m \times n$ *matrix med* $\mathit{rank}\{\,\mathbf{A}\,\} = f$*, så er*

$$\mathit{rank}\{\,\mathbf{A} \circ \mathbf{A}\,\} \leq \frac{1}{2}f(f+1).$$

Bevis:
Idet $\operatorname{rank}\{\,\mathbf{A}\,\} = f$ findes f lineært uafhængige søjler (og rækker) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_f$ i $\mathbf{A}$. Dvs enhver søjle $\boldsymbol{a}_k$, $k = 1, \ldots, n$, i $\mathbf{A}$ kan skrives

$$\boldsymbol{a}_k = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_f\boldsymbol{x}_f \quad \text{for} \quad c_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, f.$$

For enhver søjle $(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a})_k$, $k = 1, \ldots, n$, i $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}$ fås ved definition 2.1.3, at

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a})_k = \boldsymbol{a}_k \circ \boldsymbol{a}_k &= \left(\sum_{i=1}^{f} c_i\boldsymbol{x}_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{f} c_i\boldsymbol{x}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{f} c_i^2(\boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{x}_i) + \sum_{i=1}^{f}\sum_{j\neq i} c_ic_j(\boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{x}_j). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

I (2.8) er der f led på formen $c_i^2(\boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{x}_i)$. Antal blandede led på formen $c_ic_j(\boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{x}_j)$ er antal måder at vælge to elementer ud af f mulige, som er $\binom{f}{2}$. Dermed kan enhver søjle $(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a})_k$ i $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}$ skrives som en linearkombination af $f + \binom{f}{2}$ søjler i $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}$. Dvs

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\{\,\mathbf{A} \circ \mathbf{A}\,\} &\leq f + \binom{f}{2} \\ &= f + \frac{f!}{2!(f-2)!} \\ &= f + \frac{1}{2}f(f-1) \\ &= \frac{1}{2}f(f+1).\end{aligned}$$

■

Sætning 2.1.8 (Absolut grænse)
Lad Γ være en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf med nabomatrix $\mathbf{A}$. Lad k, θ og ρ være egenværdier til Γ med multiplicitet hhv. $1, m_\theta$ og m_ρ, så gælder

$$\begin{aligned}n &\leq \frac{1}{2}m_\theta(m_\theta + 3)\,; \\ n &\leq \frac{1}{2}m_\rho(m_\rho + 3).\end{aligned}$$

Bevis:
Idet $\operatorname{Range}\{\,\mathbf{E}_\theta\,\} = \mathbb{V}_\theta$ følger, at $\operatorname{rank}\{\,\mathbf{E}_\theta\,\} = m_\theta$. Så følger af lemma 2.1.7, at

$$\operatorname{rank}\{\,\mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta\,\} \leq \frac{1}{2}m_\theta(m_\theta + 1). \qquad (2.9)$$

Nu viser vi, at rank$\{\,\mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta\,\} \geq n - m_\theta$. Fra lemma 2.1.1 fås, at

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta &= -\frac{\rho}{\theta-\rho}\mathbf{I} + \frac{\rho-k}{n(\theta-\rho)}\mathbf{J} + \frac{1}{\theta-\rho}\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{\theta-\rho}\left(-\rho\mathbf{I} + \frac{\rho-k}{n}\mathbf{J} + \mathbf{A}\right) \\
&= \frac{1}{\theta-\rho}\left[\left(-\rho\mathbf{I} + \frac{\rho-k}{n}\mathbf{J} + \mathbf{A}\right) - \left(\frac{\rho-k}{n}(\mathbf{I}+\mathbf{A}) - \frac{\rho-k}{n}(\mathbf{I}+\mathbf{A})\right)\right] \\
&= \frac{1}{\theta-\rho}\left[-\frac{k-\rho}{n}(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{A}) - \left(\rho + \frac{k-\rho}{n}\right)\mathbf{I} + \left(1 - \frac{k-\rho}{n}\right)\mathbf{A}\right]. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Idet $\mathbf{I}, \mathbf{A}$ og $\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{A}$ har indgange lig én på forskellige positioner følger af tabel 2.1, bemærkning 2.1.6, (2.10) samt lineariteten af Schur-Hadamard produktet, at

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta = \left(\frac{1}{\theta-\rho}\right)^2 &\left[\left(\frac{k-\rho}{n}\right)^2 (\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{A})\right. \\
&\left. + \left(\rho + \frac{k-\rho}{n}\right)^2 \mathbf{I} + \left(1 - \frac{k-\rho}{n}\right)^2 \mathbf{A}\right]. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Af (2.1),(2.3) og (2.4) følger, at

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{A} &= n\mathbf{E}_k - (\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_\theta + \mathbf{E}_\rho) - (k\mathbf{E}_k + \theta\mathbf{E}_\theta + \rho\mathbf{E}_\rho) \\
&= (n-1-k)\mathbf{E}_k - (1+\theta)\mathbf{E}_\theta - (1+\rho)\mathbf{E}_\rho.
\end{aligned}$$

Ved at indsætte ovenstående samt (2.1) og (2.4) i (2.11) fås, at

$$\mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta = q_{\theta\theta}^k \mathbf{E}_k + q_{\theta\theta}^\theta \mathbf{E}_\theta + q_{\theta\theta}^\rho \mathbf{E}_\rho,$$

hvor

$$\begin{aligned}
q_{\theta\theta}^k &= \frac{n(\rho^2+k) - (k-\rho)^2}{n(\theta-\rho)^2}; \\
q_{\theta\theta}^\theta &= \frac{n(\rho^2+\theta) + 2(k-\rho)(\rho-\theta)}{n(\theta-\rho)^2}; \\
q_{\theta\theta}^\rho &= \frac{n\rho(1+\rho)}{n(\theta-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

Nu vises at $q_{\theta\theta}^k \neq 0$ og $q_{\theta\theta}^\rho \neq 0$.

Først vises ved (1.12), at $q_{\theta\theta}^k = \frac{m_\theta}{n}$; dvs

$$\begin{aligned}
\frac{n(\rho^2+k) - (k-\rho)^2}{n(\theta-\rho)^2} &= -\frac{(n-1)\rho + k}{n(\theta-\rho)} \\
n(\rho^2+k) - (k-\rho)^2 &= (-(n-1)\rho - k)(\theta-\rho) \\
n\rho^2 + nk - k^2 - \rho^2 + 2k\rho &= -\rho\theta n + \theta\rho - \theta k + \rho^2 n - \rho^2 + \rho k \\
nk + \rho\theta n &= k^2 + \theta\rho - \theta k - \rho k \\
n(k+\rho\theta) &= (k-\rho)(k-\theta). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Dermed er det nok at vise (2.12). Af (1.8) og (1.9) fås, at

$$\theta\rho = \mu - k \iff \mu = \theta\rho + k \quad \text{og} \quad -\theta - \rho = \mu - \lambda. \tag{2.13}$$

Ved disse to ligninger fås af sætning 1.0.3, at

$$\begin{aligned} k(k-1-\lambda) &= (n-k-1)\mu \\ \frac{k^2 - k - k\lambda + \mu k + \mu}{\mu} &= n \\ \frac{k^2 + k(\mu - \lambda) - k + \mu}{\mu} &= n \\ \frac{k^2 + k(-\theta - \rho) - k + \theta\rho + k}{\theta\rho + k} &= n \\ \frac{k^2 - k\theta - k\rho + \theta\rho}{\theta\rho + k} &= n. \end{aligned}$$

Indsæt denne værdi for n på venstresiden af (2.12) hvormed følger, at

$$\begin{aligned} n(k+\rho\theta) &= \frac{k^2 - k\theta - k\rho + \theta\rho}{\theta\rho + k}(k+\rho\theta) \\ &= k^2 - k\theta - k\rho + \theta\rho \\ &= (k-\rho)(k-\theta). \end{aligned}$$

Dermed er vist, at $q^k_{\theta\theta} = \frac{m_\theta}{n} \neq 0$.

Nu vises at $q^\rho_{\theta\theta} \neq 0$. I afsnit 1.1, side 11 fandt vi, at

$$\rho < 0 < \theta. \tag{2.14}$$

Da $\overline{\Gamma}$ er $(n, \overline{k}; \overline{\lambda}, \overline{\mu})$-stærkt regulær fås tilsvarende (2.13), at

$$\overline{\theta}\overline{\rho} = \overline{\mu} - \overline{k}. \tag{2.15}$$

Hvis $\rho = -1$ fås af proposition 1.1.7, at $\overline{\rho} = -1 - \rho = 0$. Således følger af (2.15), at $\overline{\mu} = \overline{k}$, hvilket ifølge proposition 1.0.4 strider mod antagelsen, at Γ ikke er imprimitiv. Sammenhold dette med (2.14) så fås, at $\rho \notin \{0, -1\}$. Dermed er $q^\rho_{\theta\theta} \neq 0$.

Hvis $q^\theta_{\theta\theta} = 0$ fås af lemma 2.1.2, at

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\{\, \mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta \,\} &= \operatorname{rank}\{\, q^k_{\theta\theta}\mathbf{E}_k + q^\theta_{\theta\theta}\mathbf{E}_\theta + q^\rho_{\theta\theta}\mathbf{E}_\rho \,\} \\ &= \operatorname{rank}\{\, q^k_{\theta\theta}\mathbf{E}_k \,\} + \underbrace{\operatorname{rank}\{\, q^\theta_{\theta\theta}\mathbf{E}_\theta \,\}}_{=0} + \operatorname{rank}\{\, q^\rho_{\theta\theta}\mathbf{E}_\rho \,\} \\ &= 1 + m_\rho \\ &= 1 + m_\theta + m_\rho - m_\theta \\ &= n - m_\theta. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Hvis $q_{\theta\theta}^{\theta} \neq 0$ fås af lemma 2.1.2, at

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}\{\, \mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta \,\} &= \operatorname{rank}\{\, q_{\theta\theta}^{k}\mathbf{E}_k + q_{\theta\theta}^{\theta}\mathbf{E}_\theta + q_{\theta\theta}^{\rho}\mathbf{E}_\rho \,\} \\
&= \operatorname{rank}\{\, q_{\theta\theta}^{k}\mathbf{E}_k \,\} + \operatorname{rank}\{\, q_{\theta\theta}^{\theta}\mathbf{E}_\theta \,\} + \operatorname{rank}\{\, q_{\theta\theta}^{\rho}\mathbf{E}_\rho \,\} \\
&= 1 + m_\theta + m_\rho \\
&= n. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Af (2.16) og (2.17) følger, at

$$\operatorname{rank}\{\, \mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta \,\} \geq n - m_\theta.$$

Sammenhold dette med (2.9), så fås

$$\begin{aligned}
n - m_\theta \leq \operatorname{rank}\{\, \mathbf{E}_\theta \circ \mathbf{E}_\theta \,\} &\leq \frac{1}{2}m_\theta(m_\theta + 1) \\
&\Downarrow \\
n &\leq \frac{1}{2}m_\theta(m_\theta + 1) + m_\theta \\
n &\leq \frac{1}{2}m_\theta(m_\theta + 3).
\end{aligned}$$

Tilsvarende kan vises, at $n \leq \frac{1}{2}m_\rho(m_\rho + 3)$ ved at tage udgangspunkt i $\mathbf{E}_\rho$ frem for $\mathbf{E}_\theta$. ■

Kapitel 3

Typer af stærkt regulære grafer

Der findes forskellige typer af stærkt regulære grafer. Indenfor bestemte typer findes familier af stærkt regulære grafer. Dette er tilfældet for typen af stærkt regulære grafer kaldet konference grafer.

3.1 Konference grafer

Lad Γ være en $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf med egenværdier k,θ og ρ. Lad m_θ og m_ρ være multipliciteter for hhv. θ og ρ, så kaldes Γ en *konference graf*, hvis $m_\theta = m_\rho$.

Lemma 3.1.1 *Lad Γ være en $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf med forskellige egenværdier k,θ og ρ. Så gælder*

$$(\theta-\rho)^2 = \frac{nk\overline{k}}{m_\theta m_\rho}.$$

Bevis:
Lad følgende matricer være givet

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & k & \overline{k} \\ 1 & \theta & -1-\theta \\ 1 & \rho & -1-\rho \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_\theta & 0 \\ 0 & 0 & m_\rho \end{bmatrix}.$$

Så fås, at

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & \theta & \rho \\ \overline{k} & -1-\theta & -1-\rho \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{QP} = \begin{bmatrix} 1 & k & \overline{k} \\ m_\theta & m_\theta\theta & m_\theta(-1-\theta) \\ m_\rho & m_\rho\rho & m_\rho(-1-\rho) \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker at vise, at

$$\underbrace{\mathbf{P}^T\mathbf{QP}}_{=\mathbf{M}} = n\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \overline{k} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{R}}. \tag{3.1}$$

Idet $\mathbf{Q}$ er en symmetrisk matrix gælder

$$\mathbf{M}^T = (\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{P}^{TT} = \mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{M}\,,$$

og dermed er $\mathbf{M}$ en symmetrisk matrix. Derfor er det nok at bestemme diagonalindgangene i $\mathbf{M}$ samt indgangene $(\mathbf{M})_{12}$, $(\mathbf{M})_{13}$ og $(\mathbf{M})_{23}$. Idet summen af alle egenværdierne til Γ er $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ fås, at

$$(\mathbf{M})_{12} = k + m_\theta\theta + m_\rho\rho = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0. \tag{3.2}$$

Hvis $\overline{\mathbf{A}}$ betegner nabomatricen for $\overline{\Gamma}$ fås tilsvarende af proposition 1.1.7 og bemærkning 1.1.8, at

$$(\mathbf{M})_{13} = \overline{k} + m_\theta(-1-\theta) + m_\rho(-1-\rho) = \mathrm{tr}(\overline{\mathbf{A}}) = 0. \tag{3.3}$$

I beviset for proposition 1.1.7 fandt vi, at hvis $\boldsymbol{x}$ er egenvektor hørende til egenværdien k (hhv. θ, ρ) til $\mathbf{A}$, så er $\boldsymbol{x}$ egenvektor til egenværdien $\overline{k} = n-k-1$ (hhv. $(-1-\theta), (-1-\rho)$) til $\overline{\mathbf{A}}$. Lad $\boldsymbol{x}$ være egenvektor hørende til egenværdien k til $\mathbf{A}$, så gælder

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \overline{\mathbf{A}}k\boldsymbol{x}\\ &= k\overline{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}\\ &= k\overline{k}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Dvs $k\overline{k}$ er egenværdi til $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}$. Tilsvarende kan vises, at $\theta(-1-\theta)$ og $\rho(-1-\rho)$ er egenværdier til $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}$. Dermed er $\mathrm{tr}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}) = k\overline{k} + m_\theta\theta(-1-\theta) + m_\rho\rho(-1-\rho)$, så

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{23} &= k\overline{k} + m_\theta\theta(-1-\theta) + m_\rho\rho(-1-\rho)\\ &= \mathrm{tr}(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}) = \sum_{ij}(\overline{\mathbf{A}})_{ij}(\mathbf{A})_{ij} = 0,\end{aligned} \tag{3.4}$$

idet $(\overline{\mathbf{A}})_{ij} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A})_{ij} = 1$ og omvendt. Det følger af (3.2),(3.3) og (3.4), samt at $\mathbf{M}$ er symmetrisk, at alle ikke-diagonalindgange i $\mathbf{M}$ er nul. Vi mangler at bestemme diagonalindgangene. Det følger af sætning B.1.3 at summen af multipliciteterne af egenværdierne til $\mathbf{A}$ er n. Hermed fås at

$$(\mathbf{M})_{11} = 1 + m_\theta + m_\rho = n. \tag{3.5}$$

Det følger af lemma 1.1.3, at position (i,i) i $\mathbf{A}^2$ er antal veje af længde to fra punktet $v_i \in V\Gamma$ og tilbage igen, som vi kalder en lukket vej. Dermed er $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$ antallet af alle lukkede veje af længde to i Γ. Tilsvarende er $\mathrm{tr}(\overline{\mathbf{A}}^2)$ antal lukkede veje af længde to i $\overline{\Gamma}$. Hermed fås

$$\begin{aligned}(\mathbf{M})_{22} &= k^2 + \theta^2 m_\theta + \rho^2 m_\rho = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) = nk\\ (\mathbf{M})_{33} &= \overline{k}^2 + (-1-\theta)^2 m_\theta + (-1-\rho)^2 m_\rho = \mathrm{tr}(\overline{\mathbf{A}}^2) = n\overline{k}.\end{aligned}$$

Således er alle indgange i $\mathbf{M}$ bestemt og det ses, at (3.1) er opfyldt. Ved at tage determinanten af begge sider i (3.1) fås

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}) &= \det(n\mathbf{R}) \\
\det(\mathbf{P}^T)\det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{P}) &= n^3\det(\mathbf{R}) \\
\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{P}) &= n^3 k\overline{k} \\
(\det(\mathbf{P}))^2 m_\theta m_\rho &= n^3 k\overline{k} \\
(n(\rho-\theta))^2 &= \frac{n^3 k\overline{k}}{m_\theta m_\rho} \\
(\theta-\rho)^2 &= \frac{nk\overline{k}}{m_\theta m_\rho}.
\end{aligned}$$

■

Korollar 3.1.2 *Lad Γ være en $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf med forskellige egenværdier k,θ og ρ. Hvis Γ er en konference graf, så har Γ og den komplementære $\overline{\Gamma}$ de samme parametre:*

$$\left(n,\frac{n-1}{2};\frac{n-5}{4},\frac{n-1}{4}\right).$$

Bevis:
Det er tilstrækkeligt at vise, at Γ har de givne parametre, idet korollaret således følger af sætning 1.0.2. Hvis $m_\theta = m_\rho$ følger af (1.10), at $m_\theta = \frac{n-1}{2}$. Dermed er m_θ relativt primisk til n. Af (1.8) og (1.9) fås, at $(\theta-\rho)^2 = \Delta \in \mathbb{Z}$, hvormed det følger af lemma 3.1.1, at m_θ^2 går op i $k\overline{k}$. Af sætning 1.0.2 har vi, at $k+\overline{k} = n-1$, hvormed

$$k\overline{k} \leq \frac{(k+\overline{k})^2}{4} = \frac{(n-1)^2}{4} = m_\theta^2,$$

hvor lighedstegn gælder hvis og kun hvis $k = \overline{k}$. Idet m_θ^2 går op i $k\overline{k}$ gælder lighedstegn og dermed

$$k = \overline{k} = n-k-1 \Leftrightarrow n = 2k+1. \tag{3.6}$$

Benyt (3.6) samt det faktum, at summen af egenværdierne er $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, så gælder

$$\begin{aligned}
m_\theta(\theta+\rho)+k &= 0 \\
\frac{n-1}{2}(\theta+\rho) &= -k \\
(\theta+\rho) &= \frac{-2k}{n-1} \\
(\theta+\rho) &= \frac{-2k}{2k+1-1} = -1.
\end{aligned}$$

Nu følger af (1.8) og (1.9), at

$$-1 = \theta+\rho = \lambda-\mu \Leftrightarrow \lambda = \mu-1. \tag{3.7}$$

Af sætning 1.0.3 og (3.7) fås, at

$$\begin{aligned} k(k-1-\lambda) &= k\mu \\ k-1-(\mu-1) &= \mu \\ \frac{k}{2} &= \mu. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Korollaret følger af (3.6),(3.7) og (3.8). ■

Proposition 3.1.3 *Lad Γ være en $(p,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf, hvor p er et primtal. Så er Γ en konference graf.*

Bevis:
Fra lemma 3.1.1 har vi, at

$$(\theta-\rho)^2 = \frac{pk\overline{k}}{m_\theta m_\rho}. \tag{3.9}$$

Af (1.13) og (1.14) fås

$$m_\rho - m_\theta = \frac{2k+(n-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{\Delta}}. \tag{3.10}$$

Hvis $\theta-\rho=\sqrt{\Delta}\notin\mathbb{Z}$ og $m_\theta \neq m_\rho$ gælder, at differensen (3.10) er irrationel, hvilket stider mod det faktum, at m_θ og m_ρ er heltal. Dermed følger, at hvis $\theta-\rho=\sqrt{\Delta}\notin\mathbb{Z}$, så er $m_\theta=m_\rho$. Dvs hvis Γ *ikke* er en konference graf, kan vi antage, at $\sqrt{\Delta}=\sqrt{(\theta-\rho)^2}\in\mathbb{Z}$, hvormed venstre side af (3.9) er et kvadrat. Idet Γ hverken er tom eller komplet, er konstanterne $k,\overline{k},m_\theta$ og m_ρ forskellig fra nul og dermed ikke-delelig med p. Heraf følger, at venstre side af (3.9) er delelig med p, men ikke med p^2, hvilket er en modstrid [Allenby, 1991, Definition 1.3.5 (iii)]. ■

Følgende korollar fås umiddelbart af beviset for proposition 3.1.3.

Korollar 3.1.4 *Lad Γ være en $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf med egenværdier k,θ og ρ. Så gælder, at*

1. *Γ er en konference graf eller;*
2. *$(\theta-\rho)^2$ er et kvadrat og $\theta,\rho\in\mathbb{Z}$.*

Bevis:
Det eneste der ikke gøres rede for under forrige bevis er, at $\theta,\rho\in\mathbb{Z}$.

ad. 2 Idet $\sqrt{\Delta}=\theta-\rho\in\mathbb{Z}$ følger, at $\theta,\rho\in\mathbb{Q}$. I beviset for korollar 1.1.6 fandt vi, at θ og ρ er rødder i et *monisk* andengradspolynomium med heltallige koefficienter. Hvis $\theta=\frac{r}{s}\notin\mathbb{Z}$ gælder, at r og s er indbyrdes primiske og $s\neq 1$. Men så går s op i én [Allenby, 1991, Theorem 1.11.6], hvilket er en modstrid. Dermed er $\theta\in\mathbb{Z}$. Tilsvarende vises, at $\rho\in\mathbb{Z}$.

■

Nu konstrueres en uendelig familie af konference grafer, hvis medlemmer kaldes for Paley grafer.

3.1.1 Paley grafer

Lad GF(q) være et endeligt legeme med q elementer [Pless, 1998, pp. 51-66], hvor $q \equiv 1 \pmod 4$ og q er en primtalspotens. Kongruensbetingelsen på q medfører, at -1 er et kvadrat i GF(q) [Pless, 1998, Theorem 68]. Lad $Q \subset$ GF(q) betegne mængden af kvadrater forskellig fra nul; dvs $Q = \left\{ \alpha^2 \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{GF}(q) \backslash \{0\} \right\}$.

Definition 3.1.5 (Paley graf)
En Paley graf Γ med q punkter er grafen, hvis punktmængde og kantmængde er givet ved

$$\begin{aligned} V\Gamma &= GF(q), \quad hvor \quad q \equiv 1 \pmod 4; \\ E\Gamma &= \left\{ \{x,y\} \;\middle|\; x,y \in V\Gamma \,\wedge\, x-y \in Q \right\}. \end{aligned}$$

Kongruensbetingelsen på q sikrer, at en Paley graf Γ ikke er en retningsbestemt graf (se definition 4.0.12 og definition 4.0.14), hvilket er formuleret i følgende lemma.

Lemma 3.1.6 *Lad Γ være en Paley graf med q punkter, så gælder*

$$\{x,y\} \in E\Gamma \Leftrightarrow \{y,x\} \in E\Gamma.$$

Bevis:
Af definition 3.1.5 følger, at

$$\{x,y\} \in E\Gamma \Leftrightarrow x-y \in Q.$$

Produktet af to kvadrater er et kvadrat og produktet af et kvadrat og et ikke-kvadrat er et ikke-kvadrat. Dvs idet $-1 \in Q$ følger

$$\begin{aligned} x-y \in Q &\Leftrightarrow -(x-y) = y-x \in Q \\ &\Leftrightarrow \{y,x\} \in E\Gamma. \end{aligned}$$

■

Sætning 3.1.7
Lad Γ være en Paley graf med q punkter, så er Γ en stærkt regulær graf med parametre

$$\left(q, \frac{q-1}{2}; \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4} \right).$$

Bevis:
Lad $x \in V\Gamma$ og betragt afbildningen

$$\varphi : x \to x + \alpha \qquad \text{for et fast } \alpha \in \mathrm{GF}(\,q\,). \tag{3.11}$$

Det ses umiddelbart, at φ er surjektiv. For $x, y \in V\Gamma$ gælder, at

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x + \alpha = y + \alpha \Leftrightarrow x = y,$$

hvormed φ er injektiv. Dvs φ er en permutation [Allenby, 1991, p. 75] af $V\Gamma$. Lad $\{x, y\} \in E\Gamma$ for $x, y \in V\Gamma$, så gælder

$$\begin{aligned}\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E\Gamma &\Leftrightarrow (x + \alpha) - (y + \alpha) \in Q \\ &\Leftrightarrow x - y \in Q \\ &\Leftrightarrow \{x, y\} \in E\Gamma,\end{aligned}$$

og dermed er φ en automorfi [Chartrand and Lesniak, 1996, p. 40] af $V\Gamma$ med $\varphi(0) = \alpha$. Idet der findes en automorfi af Γ, der afbilder nul i α for ethvert $\alpha \in \mathrm{GF}(\,q\,)$ gælder, at Γ er regulær med en givet valens k.

Lad $x \in V\Gamma$ og betragt afbildningen

$$\psi : x \to x\beta \qquad \text{for et fast } \beta \in Q. \tag{3.12}$$

ψ er surjektiv og idet der for $x, y \in V\Gamma$ gælder

$$\psi(x) = \psi(y) \Leftrightarrow x\beta = y\beta \Leftrightarrow x = y,$$

er ψ injektiv. Dvs ψ er en permutation af $V\Gamma$. Lad $\{x, y\} \in E\Gamma$ for $x, y \in V\Gamma$, så fås

$$\begin{aligned}\{\psi(x), \psi(y)\} \in E\Gamma &\Leftrightarrow x\beta - y\beta \in Q \\ &\Leftrightarrow (x - y)\beta \in Q \\ &\Leftrightarrow (x - y) \in Q \qquad (3.13) \\ &\Leftrightarrow \{x, y\} \in E\Gamma,\end{aligned}$$

hvor (3.13) følger af, at produktet af et kvadrat og et ikke-kvadrat er et ikke-kvadrat. Heraf følger, at ψ er en automorfi af Γ, hvor $\psi(0) = 0$ og $\psi(1) = \beta$. Dermed er antallet af fælles naboer til 0 og 1 lig med antallet af fælles naboer til 0 og β, hvor $0, 1, \beta \in V\Gamma$ og $\{0, 1\}, \{0, \beta\} \in E\Gamma$. Både α i (3.11) og β i (3.12) er valgt vilkårligt. Ved valget $\beta = \gamma - \alpha \in Q$ fås for ethvert par af nabopunkter $\alpha, \gamma \in V\Gamma$, at

$$\begin{aligned}\varphi\left(\psi(0)\right) &= \varphi(0) = \alpha \\ \varphi(\psi(1)) &= \varphi(\gamma - \alpha) = \gamma.\end{aligned}$$

Dermed har ethvert par af nabopunkter $\alpha, \gamma \in V\Gamma$ samme antal λ af fælles naboer.

Lad $x \in V\Gamma$ og betragt afbildningen

$$\Phi : x \to x\delta \qquad \text{for et fast } \delta \notin Q.$$

Da produktet af et kvadrat og et ikke-kvadrat er et ikke-kvadrat, samt at produktet af to ikke-kvadrater er et kvadrat fås, at

$$\begin{aligned}\{x,y\} \in E\Gamma &\Leftrightarrow x-y \in Q \\ &\Leftrightarrow \delta(x-y) = \delta x - \delta y \notin Q \\ &\Leftrightarrow \{\Phi(x), \Phi(y)\} \notin E\Gamma \\ &\Leftrightarrow \{\Phi(x), \Phi(y)\} \in E\overline{\Gamma}.\end{aligned}$$

Idet Φ er injektiv følger af ovenstående, at Φ er en isomorfi [Chartrand and Lesniak, 1996, p. 3] mellem Γ og den komplementære $\overline{\Gamma}$ til Γ. Dermed er $\Gamma \approx \overline{\Gamma}$, og $\overline{\Gamma}$ har således samme valens k som Γ. Yderligere fandt vi, at ethvert par af nabopunkter i Γ har λ fælles naboer, hvormed ethvert par af nabopunkter i $\overline{\Gamma}$ ligeledes har λ fælles naboer. Idet $\overline{\Gamma}$ er den komplementære til Γ følger af sætning 1.0.2, at ethvert par af ikke-nabopunkter i Γ har $\mu = q - 2k + \lambda$ fælles naboer. Derfor er Γ en stærkt regulær graf. Vi mangler blot at bestemme parametrene k, λ og μ.

Eftersom $\Gamma \approx \overline{\Gamma}$ følger af sætning 1.0.2, at

$$k = \overline{k} = q - k - 1 \Leftrightarrow k = \frac{q-1}{2}, \tag{3.14}$$

og

$$\lambda = \overline{\lambda} = q - 2k - 2 + \mu \Leftrightarrow \lambda - \mu = q - 2\left(\frac{q-1}{2}\right) - 2 = -1. \tag{3.15}$$

Af sætning 1.0.3 fås

$$\begin{aligned} k(k-\lambda-1) &= \overline{k}\mu \\ k - 1 &= \lambda + \mu. \end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.15) og (3.16) giver to ligninger med to ubekendte μ og ρ, som ved løsning giver, at $\mu = \frac{k}{2}$ og $\lambda = \frac{k-2}{2}$. Ved indsættelse af k i (3.14) i de to sidstnævnte ligninger, fås det ønskede resultat. ■

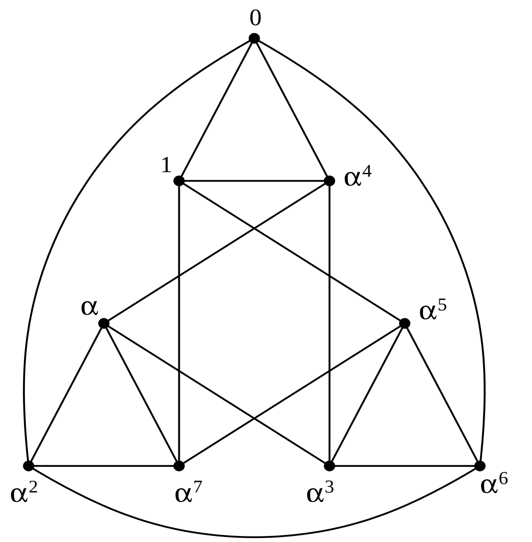
Eksempel 3.1.8
Vi konstruerer Paley grafen med ni punkter fra

$$GF(3^2) = \{\, a_1\alpha + a_2 \mid a_i \in GF(3), i = 1,2 \,\} = \{\, (a_1, a_2) \mid a_i \in GF(3), i = 1,2 \,\}.$$

Først konstrueres $GF(3^2)$ ud fra det irreducible polynomium $f(x) = x^2 + 2x + 2$ over $GF(3)$. Lad α være en rod i $f(x)$, så gælder

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = -2\alpha - 2 = \alpha + 1,$$

idet koefficienterne reduceres modulo tre. Således får vi følgende elementer.



Figur 3.1: Paley grafen med ni punkter

Ternære talsystem	$(a_1,a_2)\in GF(3^2)$	$a_1\alpha+a_2\in GF(3^2)$
$0\times 3^1+0\times 3^0=0$	$(0,0)$	0
$0\times 3^1+1\times 3^0=1$	$(0,1)$	1
$1\times 3^1+0\times 3^0=3$	$(1,0)$	α
$1\times 3^1+1\times 3^0=4$	$(1,1)$	$\alpha^2=\alpha+1$
$2\times 3^1+1\times 3^0=7$	$(2,1)$	$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha^2+\alpha=2\alpha+1$
$0\times 3^1+2\times 3^0=2$	$(0,2)$	$\alpha^4=\alpha\alpha^3=2\alpha^2+\alpha=3\alpha+2=2$
$2\times 3^1+0\times 3^0=6$	$(2,0)$	$\alpha^5=\alpha\alpha^4=2\alpha$
$2\times 3^1+2\times 3^0=8$	$(2,2)$	$\alpha^6=\alpha\alpha^5=2\alpha^2=2\alpha+2$
$1\times 3^1+2\times 3^0=5$	$(1,2)$	$\alpha^7=\alpha\alpha^6=4\alpha+2=\alpha+2$
$0\times 3^1+1\times 3^0=1$	$(0,1)$	$\alpha^8=\alpha\alpha^7=\alpha^2+2\alpha=3\alpha+1=1$

Lad Q betegne mængden af kvadrater og $N=GF(3^2)\backslash(Q\cup\{0\})$ mængden af ikke-kvadrater, så fås

$$Q=\{1,\overbrace{\alpha+1}^{=\alpha^2},\overbrace{\ 2\ }^{=(\alpha^2)^2},\overbrace{2\alpha+2}^{=(\alpha^3)^2}\}$$
$$N=\{\alpha,\ 2\alpha+1,\ 2\alpha,\ \alpha+2\}.$$

Ved brug af definition 3.1.5 konstrueres Paley grafen med ni punkter, som er illustreret ved figur 3.1.

□

Vi ser på en anden type af stærkt regulære grafer kaldet *latinsk kvadrat grafer.*

3.2 Latinsk kvadrat grafer

Ved brug af et latinsk kvadrat ønsker vi, at konstruere en stærkt regulær graf. Et latinsk kvadrat er det todimensionelle analog til en permutation.

Definition 3.2.1 (Latinsk kvadrat)
Et latinsk kvadrat *af orden n er en $n \times n$ tabel indeholdene n forskellige symboler, så hvert symbol optræder præcis én gang i hver række og søjle. Et latinsk kvadrat af orden n betegnes med LK_n.*

Sætning 3.2.2
For ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes et LK_n.

Bevis:
Lad heltallene $1, 2, \ldots, n$ være den første række i et LK_n. Lad række to i dette LK_n være den cykliske forskydning til venstre af række ét. Cyklisk forskyd på denne måde n gange ialt, så fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{bmatrix},$$

som er et LK_n. ■

Vi konstruerer en graf fra et LK_n.

Definition 3.2.3 (Latinsk kvadrat graf)
En latinsk kvadrat graf $L_1(n)$ med n^2 punkter er grafen med

$$\begin{aligned} VL_1(n) = \big\{ ijk \;\big|\; & i \text{ angiver en række i } LK_n,\ j \text{ angiver en søjle i } LK_n, \\ & k \text{ er symbolet på position } (i,j) \text{ i } LK_n \big\} \end{aligned}$$

$$EL_1(n) = \big\{ \{ijk, i'j'k'\} \;\big|\; i = i' \vee j = j' \vee k = k' \big\}.$$

Hvis $u = ijk \in VL_1(n)$, kaldes i, j og k koordinaterne til punktet u.

Sætning 3.2.4
$L_1(n)$ er en $(n^2, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf med

1. $k = 3(n-1)$;
2. $\lambda = n$;
3. $\mu = 6$.

Bevis:

ad. 1 Ethvert punkt $u = ijk \in VL_1(n)$ er nabo til de punkter, der har indgange i LK_n i samme række, samme søjle og de der har samme symbol. Idet der er $n-1$ muligheder i hver af de tre tilfælde fås, at $k = 3(n-1)$.

ad. 2 Lad $\overbrace{i_1j_1k_1}^{=u}, \overbrace{i_2j_2k_2}^{=v} \in VL_1(n)$ og antag W.L.O.G at $i_1 = i_2 = i$, hvormed $\{u,v\} \in EL_1(n)$. Nabopunkterne u og v er begge naboer til de resterende $n-2$ punkter i række i. Yderligere findes der to punkter $i'j_1k_2, i''j_2k_1 \in VL_1(n)$ i hhv. række $i' \neq i$ og $i'' \neq i$, som er nabo til både u og v. Dermed har ethvert par af nabopunkter $u, v \in VL_1(n)$ præcis $\lambda = n - 2 + 2 = n$ fælles naboer. Tilsvarende kan vises, at $\lambda = n$ hvis $j_1 = j_2$ eller $k_1 = k_2$.

ad. 3 Lad $\overbrace{i_1j_1k_1}^{=u}, \overbrace{i_2j_2k_2}^{=v} \in VL_1(n)$ med $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ og $k_1 \neq k_2$; dvs $\{u,v\} \notin EL_1(n)$. Et punkt $p \in VL_1(n)$ er nabo til både u og v, hvis det er lig u på én koordinat og lig v på en anden. Fastholdes én koordinat i p, er der to mulige valg af de to sidste koordinater i p. Idet der er tre koordinater i p fås, at ethvert par af ikke-nabopunkter $u, v \in VL_1(n)$ har $\mu = 3 \cdot 2 = 6$ fælles naboer.

■

Eksempel 3.2.5
Vi konstruerer $L_1(3)$ med ni punkter ud fra følgende LK_3

$$L_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$L_1(3)$ er ifølge sætningen 3.2.4 en $(9,6;3,6)$-stærkt regulær graf. Af definition 3.2.3 konstrueres punktmængden $VL_1(3) = \{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$, som er givet ved

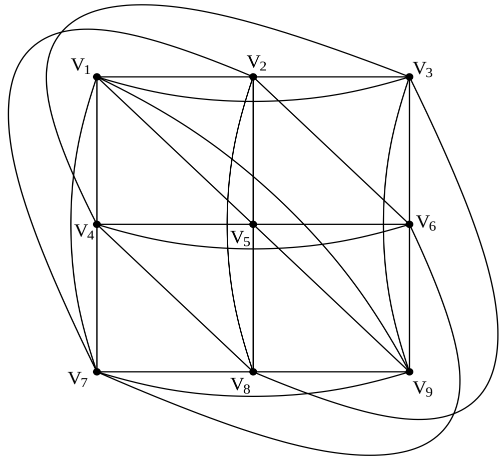
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
i	1	1	1	2	2	2	3	3	3
j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
k	1	2	3	3	1	2	2	3	1

Ved brug af definition 3.2.3 konstrueres $L_1(3)$, som er illustreret ved figur 3.2.

□

3.2.1 Net grafer

Vi konstruerer en anden type af latinske kvadrat grafer ud fra en mængde af indbyrdes ortogonale LK_n.



Figur 3.2: $L_1(3)$ med ni punkter

Definition 3.2.6 (Ortogonale LK_n)
Lad L_1, L_2 være to LK_n og konstruer ordnede par $((L_1)_{ij}, (L_2)_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$. Så siges L_1 og L_2 at være ortogonale, hvis alle n^2 ordnede par er forskellige. Yderligere siges mængden $\{L_1, L_2, \ldots, L_t\}$ af $t \geq 2$ LK_n at være indbyrdes ortogonale, hvis L_i og L_j er ortogonale for $i \neq j$.

Der gælder, at vi højest kan have $n-1$ indbyrdes ortogonale LK_n [Laywine and Mullen, 1998, Theorem 2.1]. En mængde af $n-1$ indbyrdes ortogonale LK_n siges at være *fuldstændig*. Vi ønsker at vise, at for enhver primtalspotens q, kan en fuldstændig mængde af $q-1$ indbyrdes ortogonale LK_q konstrueres.

Definition 3.2.7
Nummerer rækkerne og søjlerne i et LK_q med elementerne i det endelige legeme $GF(q)$, hvor q er en primtalspotens. Lad $f_a(x, y) = ax + y$ for $a \in GF(q)\backslash\{0\}$. Så siges $f_a(x, y)$ at repræsentere et LK_q for ethvert $a \in GF(q)\backslash\{0\}$, hvis $(LK_q)_{ij} = f_a(i, j)$.

Sætning 3.2.8
For enhver primtalspotens q repræsenterer $f_a(x, y)$ for a gennemløbende $GF(q)\backslash\{0\}$ en fuldstændig mængde af $q-1$ indbyrdes ortogonale LK_q.

Bevis:
Først viser vi, at $f_a(x, y) = ax + y$ repræsenterer et LK_q for ethvert $a \in$ GF$(q)\backslash\{0\}$. Antag at et element forekommer to gange i samme søjle $\boldsymbol{l}_{y_j}$ (x_k'te og x_l'te række) i det formodede LK_q repræsenteret ved $f_a(x, y)$, så fås

$$\begin{aligned} f_a(x_k, y_j) &= f_a(x_l, y_j) \\ ax_k + y_j &= ax_l + y_j \\ ax_k &= ax_l. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Idet $a \neq 0$ følger af (3.17), at $x_k = x_l$. Dermed er alle elementer i enhver søjle $\boldsymbol{l}_{y_j}$ forskellige. Antag at et element forekommer to gange i samme række $\boldsymbol{l}_{x_i}$ (y_k'te og y_l'te søjle) i det formodede LK_q repræsenteret ved $f_a(x,y)$, så fås

$$\begin{aligned} f_a(x_i,y_k) &= f_a(x_i,y_l) \\ ax_i + y_k &= ax_i + y_l \\ y_k &= y_l. \end{aligned}$$

Dvs at alle elementer i enhver række $\boldsymbol{l}_{x_i}$ er forskellige. Af definition 3.2.1 følger, at $f_a(x,y)$ repræsenterer et LK_q for et ethvert $a \in \mathrm{GF}(q)$.

Nu vises at $f_a(x,y)$ og $f_b(x,y)$ repræsenterer ortogonale LK_q, hvis $a \neq b$ og $a,b \in \mathrm{GF}(q)\backslash\{0\}$. Antag at (x_i,y_j) og (x_k,y_l) er to pos. i hhv. $f_a(x,y)$ og $f_b(x,y)$, som giver anledning til det samme ordnede par (se definition 3.2.6); dvs

$$\begin{aligned} ax_i + y_j &= ax_k + y_l \\ bx_i + y_j &= bx_k + y_l. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Af (3.18) fås

$$\begin{aligned} ax_i - bx_i &= ax_k - bx_k \\ (a-b)x_i &= (a-b)x_k. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Idet $a \neq b$ følger af (3.19), at $x_i = x_k$ og dermed $y_j = y_l$ ved (3.18). Dvs vi befinder os på samme position, hvormed alle ordnede par $(f_a(x_i,y_j), f_b(x_i,y_j))$, $1 \leq i,j \leq q$, er forskellige. Det følger af definition 3.2.6, at de to LK_q repræsenteret ved $f_a(x,y)$ og $f_b(x,y)$ er ortogonale. ■

Lad $T = \{L_1, L_2, \ldots, L_r\}$, $1 \leq r \leq n-1$, være en mængde af r ortogonale LK_n, så konstrueres en graf af T.

Definition 3.2.9 (Net graf)
En latinsk kvadrat graf $L_r(n)$ med n^2 punkter konstrueret af r indbyrdes ortogonale LK_n er grafen med

$$\begin{aligned} VL_r(n) = \big\{ ijk_1k_2\ldots k_r \;\big|\; & i \text{ angiver en række i et } LK_n \in T, \\ & j \text{ angiver en søjle i et } LK_n \in T, \\ & k_l,\ {\scriptstyle l=1,\ldots,r} \text{ er symbolet på position } (i,j) \text{ i det } l\text{'te } LK_n \big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EL_r(n) = \big\{ \{ijk_1k_2\ldots k_r, i'j'k'_1k'_2\ldots k'_r\} \;\big|\; & i = i' \vee j = j' \vee k_1 = k'_1 \vee \\ & k_2 = k'_2 \vee \ldots \vee k_r = k'_r \big\}. \end{aligned}$$

$L_r(n)$ kaldes en net graf.

En net graf konstrueret af en fuldstændig mængde af indbyrdes ortogonale LK_n er komplet. Det følger af definition 3.2.1, at de ordnede koordinatpar (i,k_l) og (j,k_l) for $l = 1,\ldots,r$ antager hver mulig værdi præcis én gang. Dette kalder vi *latinsk kvadrat egenskaben.* Af definition 3.2.6 følger, at for ethvert par af ortogonale kvadrater L_s, L_t antager koordinatparret (k_s,k_t) enhver mulig værdi præcis én gang. Dette kalder vi *ortogonal egenskaben.*

Sætning 3.2.10
For $1 \leq r-2 \leq n$ er net grafen $L_{r-2}(n)$ en $(n^2, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf med

1. $k = r(n-1)$;
2. $\lambda = (r-1)(r-2) + (n-2)$;
3. $\mu = r(r-1)$.

Bevis:

ad. 1 Et punkt $u = ijk_1 \dots k_{r-2} \in VL_{r-2}(n)$ er nabo til ethvert punkt $v = i'j'k'_1 \dots k'_{r-2} \in VL_{r-2}(n)$, hvis u og v stemmer overens på én af de r koordinater. For enhver valgt koordinat i v, kan de resterende koordinater vælges på $n-1$ forskellige måder. Dvs ethvert punkt $u \in VL_{r-2}(n)$ har $k = r(n-1)$ naboer.

ad. 2 Lad $\overbrace{ijk_1 \dots k_{r-2}}^{=u}, \overbrace{i'j'k'_1 \dots k'_{r-2}}^{=v} \in VL_{r-2}(n)$ og lad $\{u, v\} \in EL_{r-2}(n)$. Antag W.L.O.G at $i = i'$, hvormed både u og v er naboer til de resterende $n-2$ punkter med samme i-koordinat. Yderligere er ethvert punkt $p = i''j''k''_1 \dots k'_{r-2} \in VL_{r-2}(n)$ med $i'' \neq i = i'$ nabo til både u og v, hvis to af de resterende $r-1$ koordinater i p stemmer overens med en koordinat i hhv. u og v. Antag W.L.O.G, at $k''_1 = k_1$ og $k''_2 = k'_2$. Bemærk at der ikke findes blot en enkelt koordinat i p, som stemmer overens med samme koordinat i både u og v (f.eks $k''_1 = k'_1 = k_1$), da det strider mod latinsk kvadrat egenskaben. k''_1 vælges ud af $r-1$ mulige og derefter vælges k''_2 ud af $r-2$ mulige. Dvs koordinatparret (k''_1, k''_2) vælges ud af $(r-1)(r-2)$ mulige. Pga ortogonal egenskaben giver ethvert koordinatpar (k''_1, k''_2) anledning til præcis ét punkt. Dermed har ethvert par af nabopunkter $u, v \in VL_{r-2}(n)$ præcis $\lambda = (n-2) + (r-1)(r-2)$ fælles naboer.

ad. 3 Lad $\overbrace{ijk_1 \dots k_{r-2}}^{=u}, \overbrace{i'j'k'_1 \dots k'_{r-2}}^{=v} \in VL_{r-2}(n)$ og lad $i \neq i', j \neq j', k_1 \neq k'_1, \dots, k_{r-2} \neq k'_{r-2}$; dvs $\{u, v\} \notin EL_{r-2}(n)$. Ethvert punkt $p = i''j''k''_1 \dots k''_{r-2} \in VL_{r-2}(n)$ er nabo til både u og v, hvis det er lig u på én koordinat og lig v på en anden koordinat. Antag W.L.O.G, at $k''_1 = k_1$ og $k''_2 = k'_2$. Bemærk at vi ikke kan nøjes med én koordinat; f.eks kan vi ikke have $k''_1 = k_1 = k'_1$, idet $k_1 \neq k'_1$. k''_1 vælges ud af r mulige og derefter vælges k''_2 ud af $r-1$ mulige. Dvs koordinatparret (k''_1, k''_2) vælges ud af $r(r-1)$ mulige. Pga ortogonal egenskaben fås, at ethvert koordinatpar (k''_1, k''_2) giver anledning til præcis ét punkt. Dermed har ethvert par af ikke-naboer $u, v \in VL_{r-2}(n)$ præcis $\mu = r(r-1)$ fælles naboer.

■

Bemærk at for $r = 3$ i sætning 3.2.10 fås sætning 3.2.4.

Eksempel 3.2.11
Vi konstruerer tre indbyrdes ortogonale LK_4 ud fra det endelige legeme

$$GF(2^2) = \{\, a_1\alpha + a_2 \mid a_i \in GF(2), i = 1,2 \,\} = \{\, (a_1, a_2) \mid a_i \in GF(2), i = 1,2 \,\}.$$

Elementerne i $GF(2^2)$ konstrueres af det irreducible polynomium $f(x) = x^2 + x + 1$ over $GF(2)$. Lad α være rod i $f(x)$, så fås

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = -\alpha - 1 = \alpha + 1,$$

idet koefficienterne reduceres modulo to. Elementerne i $GF(2^2)$ konstrueres.

Binære talsystem	$(a_1, a_2) \in GF(2^2)$	$a_1\alpha + a_2 \in GF(2^2)$
$0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 0$	$(0,0)$	0
$0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1$	$(0,1)$	1
$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$	$(1,0)$	α
$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$	$(1,1)$	$\alpha^2 = \alpha + 1$
$0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1$	$(0,1)$	$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha = 1$

Dvs $GF(2^2) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$. Ved at benytte definition 3.2.7 og sætning 3.2.8 fås følgende tre indbyrdes ortogonale LK_4.

1. *$f_1(x,y)$ repræsenterer L_1*

$$L_1 = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+1 & 0 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha & 1 & 0 \end{array}$$

2. *$f_\alpha(x,y)$ repræsenterer L_α*

$$L_\alpha = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha+1 & 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha \end{array}$$

3. *$f_{\alpha+1}(x,y)$ repræsenterer $L_{\alpha+1}$*

$$L_{\alpha+1} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ \alpha+1 & \alpha & \alpha+1 & 0 & 1 \end{array}$$

Ved definition 3.2.9 kan vi konstruere $L_1(4)$ ved brug af ét af ovenstående LK_4, $L_2(4)$ ved brug af to af ovenstående LK_4 og $L_3(4)$ ved brug af alle tre. □

Kapitel 4

Retningsbestemte stærkt regulære grafer

En endelig retningsbestemt graf Γ er en endelig ikke-tom mængde af objekter kaldet punkter med en (muligvis tom) mængde af ordnede par af forskellige punkter kaldet buer eller retningsbestemte kanter. Mængden af punkter betegnes med $V\Gamma$.

Definition 4.0.12 (Retningsbestemt kant)
En kant er retningsbestemt fra $u \in V\Gamma$ til $v \in V\Gamma$, hvis man via kanten kan komme fra u til v (men ikke nødvendigvis fra v til u). For $u, v \in V\Gamma$ betegnes en retningsbestemt kant fra u til v med $u \to v$.

En kant mellem to punkter $u, v \in V\Gamma$ der er retningsbestemt både fra u til v og fra v til u kaldes *ikke-retningsbestemt* og betegnes med $u \leftrightarrow v$ eller $v \leftrightarrow u$. For $u, v \in V\Gamma$ betegner $u \nrightarrow v$, at der *ikke* er en retningsbestemt kant fra u til v. Yderligere defineres *indgraden* af et punkt $u \in V\Gamma$ til at være antal forskellige kanter, som går ind i u og *udgraden* til antal forskellige kanter, som går ud fra u. I dette kapitel betragtes kun endelige retningsbestemte grafer uden multiple kanter og loops [Biggs, 1993, pp. 3-4]. En retningsbestemt graf Γ kan karakteriseres ved nabomatricen.

Definition 4.0.13 (Nabomatrix for en retningsbestemt graf)
Lad Γ være en retningsbestemt graf med $V\Gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Så er nabomatricen for Γ en $n \times n$ matrix $\mathbf{B}$, hvis indgange er givet ved

$$(\mathbf{B})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } v_i \to v_j; \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Idet vi kun betragter retningsbestemte grafer uden loops er alle diagonalindgange i $\mathbf{B}$ nul.

Definitionen af en stærkt regulær graf udvides til at omhandle retningsbestemte grafer. En sådan graf kaldes en *retningsbestemt stærkt regulær graf*, som fremover betegnes med RSRG. For en RSRG er indgraden og udgraden ækvivalente konstanter.

I følgende definition er en *sti* fra et punkt u til et punkt v en vej fra u til v, hvor intet punkt i vejen gentages [Chartrand and Lesniak, 1996, p. 17].

Definition 4.0.14 (RSRG)
En retningsbestemt graf $\digamma$ med n punkter er stærkt regulær med parametre $(n,k;\lambda,\mu,t)$, hvis nabomatricen $\mathbf{B}$ for $\digamma$ opfylder

$$\mathbf{B}^2 = t\mathbf{I} + \lambda\mathbf{B} + \mu(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B}) \iff \mathbf{B}^2 + (\mu-\lambda)\mathbf{B} - (t-\mu)\mathbf{I} = \mu\mathbf{J} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{BJ} = \mathbf{JB} = k\mathbf{J}, \tag{4.2}$$

hvor

- k *er indgraden og udgraden af et punkt* $v \in V\digamma$;
- λ *er antal stier af længde to fra* $u \in V\digamma$ *til* $v \in V\digamma$ *givet, at* $u \to v$;
- μ *er antal stier af længde to fra* $u \in V\digamma$ *til* $v \in V\digamma$ *givet, at* $u \nrightarrow v$;
- t *er antal ikke-retningsbestemte kanter incident med et punkt* $u \in V\digamma$.

$\digamma$ siges at være $(n,k;\lambda,\mu,t)$-stærkt regulær.

Da indgangene i $\mathbf{B}$ kun kan være nul eller én følger af (4.1), at $\lambda,\mu \geq 0$. Yderligere gælder at $0 \leq t \leq k \leq n-1$. En $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG med $t=k$ er en (ikke-retningsbestemt) $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf. En $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG med $k=n-1$ er en (ikke-retningsbestemt) komplet $(n,k;\lambda,\mu)$-stærkt regulær graf.

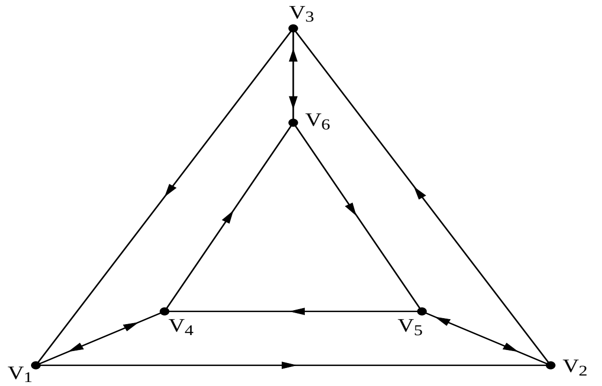
Eksempel 4.0.15
Lad $\digamma$ være en $(6,2;0,1,1)$-RSRG med nabomatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Af $\mathbf{B}$ og definition 4.0.13 konstrueres grafen for $\digamma$ givet ved figur 4.1. □

4.1 Betingelser for parametersættet

Mange af resultaterne i kapitel 1 for stærkt regulære grafer kan vises at gælde for en RSRG. Vi starter med at vise sætning 1.0.2 for en RSRG.



Figur 4.1: En $(6,2;0,1,1)$-RSRG

Lemma 4.1.1 *Lad $\mathcal{F}$ være en $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG med nabomatrix* $\mathbf{B}$. *Så er komplementærgrafen $\overline{\mathcal{F}}$ en $(n,\overline{k};\overline{\lambda},\overline{\mu},\overline{t})$-RSRG med nabomatrix* $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B}$, *hvor*

$$\begin{aligned}\overline{k} &= (n-2k)+(k-1);\\ \overline{\lambda} &= (n-2k)+(\mu-2);\\ \overline{\mu} &= (n-2k)+\lambda;\\ \overline{t} &= (n-2k)+(t-1).\end{aligned}$$

Bevis:
Idet $\mathcal{F}$ er $(n,k;\lambda,\mu,t)$-stærkt regulær fås af definition 4.0.14, at

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{B}}\mathbf{J} &= (\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{J}\\ &= \mathbf{J}\mathbf{J}-\mathbf{I}\mathbf{J}-\mathbf{B}\mathbf{J}\\ &= n\mathbf{J}-\mathbf{J}-k\mathbf{J}\\ &= (n-1-k)\mathbf{J}\\ &= \overline{k}\mathbf{J}.\end{aligned}$$

Tilsvarende kan vises at $\mathbf{J}\overline{\mathbf{B}} = \overline{k}\mathbf{J}$, hvormed (4.2) er opfyldt for $\overline{\mathcal{F}}$. Udnyt igen at $\mathcal{F}$ er $(n,k;\lambda,\mu,t)$-stærkt regulær så fås af definition 4.0.14, at

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{B}}^2 &= (\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B})^2\\ &= n\mathbf{J}+\mathbf{I}+\mathbf{B}^2-2\mathbf{J}-2k\mathbf{J}+2\mathbf{B}\\ &= (n-2k-2)\mathbf{J}+\mathbf{I}+2\mathbf{B}+(t\mathbf{I}+\lambda\mathbf{B}+\mu(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B}))\\ &= (n-2k-2)\mathbf{J}+(1+t)\mathbf{I}+(2+\lambda)\mathbf{B}+\mu(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B})\\ &= (n-2k+t-1)\mathbf{I}+(n-2k+\mu-2)(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{B})+(n-2k+\lambda)\mathbf{B}\\ &= \underbrace{(n-2k+t-1)}_{=\overline{t}}\mathbf{I}+\underbrace{(n-2k+\mu-2)}_{=\overline{\lambda}}\overline{\mathbf{B}}+\underbrace{(n-2k+\lambda)}_{=\overline{\mu}}(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\overline{\mathbf{B}}).\end{aligned}$$

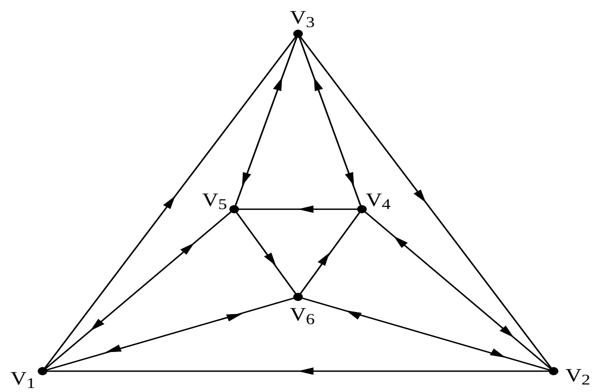
Dvs (4.1) er opfyldt for $\overline{\mathcal{F}}$ med de ønskede parametre. ■

For $t=k$ giver ovenstående bevis et andet bevis for sætning 1.0.2.

Eksempel 4.1.2
Lad $\mathbf{B}$ *være nabomatrix for den* $(6,2;0,1,1)$*-RSRG givet i eksempel 4.0.15. Så er* $\overline{\mathcal{F}}$ *ifølge sætning 4.1.1 en* $(6,3;1,2,2)$*-RSRG med nabomatrix*

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Af $\overline{\mathbf{B}}$ *og definition 4.0.13 konstrueres grafen for* $\overline{\mathcal{F}}$ *givet ved figur 4.2.*



Figur 4.2: En $(6,3;1,2,2)$-RSRG

□

I efterfølgende bevis betegner DRT_n en *dobbelt regulær turnering* af orden n. I den forbindelse hevises til bilag A.

Sætning 4.1.3
Lad $\mathcal{F}$ *være en* $(n,k;\lambda,\mu,t)$*-RSRG med nabomatrix* $\mathbf{B}$*, som ikke er en* $(n,k;\lambda,\mu)$*-stærkt regulær graf* $(t=k)$ *eller en komplet graf* $(\mathbf{B}=\mathbf{J}-\mathbf{I})$*. Så er* $\mathbf{B}$ *nabomatrix for en* DRT_n *samt at* $\mathbf{B}+\mathbf{B}^T=\mathbf{J}-\mathbf{I}$ *og* $\mathbf{B}\mathbf{B}^T=(\mu-1)\mathbf{J}+\mu\mathbf{I}$*; eller for* $\sqrt{\Delta}\in\mathbb{N}$ *gælder, at*

1. $k(k+(\mu-\lambda)) = t+(n-1)\mu$;
2. $(\mu-\lambda)^2+4(t-\mu)=\Delta$;
3. $\sqrt{\Delta}$ *går op i* $2k-(\mu-\lambda)(n-1)$;
4. $\frac{2k+(\lambda-\mu)(n-1)}{\sqrt{\Delta}} \equiv n-1 \pmod 2$;
5. $\left|\frac{2k+(\lambda-\mu)(n-1)}{\sqrt{\Delta}}\right| \leq n-1$.

Bevis:
Af (4.2) følger at k er egenværdi til $\mathbf{B}$ med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{j}$. Eftersom $\mathbf{B}\boldsymbol{j} = k\boldsymbol{j}$ medfører at $\mathbf{B}^2\boldsymbol{j} = k^2\boldsymbol{j}$ fås af (4.1), at

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^2\boldsymbol{j} + (\mu - \lambda)\mathbf{B}\boldsymbol{j} - (t-\mu)\boldsymbol{j} &= \mu\mathbf{J}\boldsymbol{j} \\
k^2\boldsymbol{j} + (\mu - \lambda)k\boldsymbol{j} - (t-\mu)\boldsymbol{j} &= \mu n\boldsymbol{j} \\
k^2 + (\mu - \lambda)k - (t-\mu) &= \mu n \\
k(k + (\mu - \lambda)) &= t + (n-1)\mu.
\end{aligned}$$

Dermed er punkt 1 vist. Bemærk at for $t = k$ giver ovenstående et andet bevis for sætning 1.0.3.

Lad $\theta \neq k$ være en anden egenværdi til $\mathbf{B}$ med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{z}$. Så gælder ifølge (4.2), at

$$\theta\mathbf{J}\boldsymbol{z} = \mathbf{J}\theta\boldsymbol{z} = \mathbf{J}\mathbf{B}\boldsymbol{z} = k\mathbf{J}\boldsymbol{z}.$$

Idet $\theta \neq k$ og $\theta, k \neq 0$ følger af ovenstående, at $\mathbf{J}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$. Dermed fås af (4.1), at

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^2\boldsymbol{z} + (\mu - \lambda)\mathbf{B}\boldsymbol{z} - (t-\mu)\boldsymbol{z} &= \mu\mathbf{J}\boldsymbol{z} \\
\theta^2\boldsymbol{z} + (\mu - \lambda)\theta\boldsymbol{z} - (t-\mu)\boldsymbol{z} &= \mathbf{0} \\
\theta^2 + (\mu - \lambda)\theta - (t-\mu) &= 0.
\end{aligned}$$

De resterende egenværdier til $\mathbf{B}$ findes ved løsning af ovenstående andengradsligning

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\mu-\lambda)^2 + 4(t-\mu), \quad \tau = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\lambda-\mu)+\sqrt{\Delta}}{2}; \tag{4.3}$$

$$\sigma = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{\Delta}}{2}. \tag{4.4}$$

Lad m_τ og m_σ være multipliciteten af hhv. τ og σ. Multipliciteten af k er én ifølge proposition B.2.2 og proposition C.1.1. Så følger af korollar B.2.3 og [Axler, 1997, p. 217], at

$$m_\tau + m_\sigma = n - 1 \tag{4.5}$$

$$k + m_\tau\tau + m_\sigma\sigma = \mathrm{tr}(\mathbf{B}) = 0. \tag{4.6}$$

(4.5) og (4.6) er to ligninger med to ubekendte m_τ og m_σ, som ved løsning giver

$$m_\tau = -\frac{(n-1)\sigma + k}{\tau - \sigma} \quad , \quad m_\sigma = \frac{(n-1)\tau + k}{\tau - \sigma}. \tag{4.7}$$

Ifølge (4.3) og (4.4) er $\tau + \sigma = \lambda - \mu$ og $\tau - \sigma = \sqrt{\Delta}$. Hermed fås af (4.7), at

$$m_\sigma - m_\tau = \frac{2k + (\tau+\sigma)(n-1)}{\tau - \sigma} = \frac{2k + (\lambda-\mu)(n-1)}{\sqrt{\Delta}}. \tag{4.8}$$

Af (4.8) ses at beviset for korollar 3.1.4 også gælder for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG. Antag først at $\tau - \sigma = \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$, så følger af korollar 3.1.4 at $m_\tau = m_\sigma$. Dermed giver (4.8), at

$$k = \frac{(\mu-\lambda)(n-1)}{2}. \tag{4.9}$$

Heraf følger at $\mu - \lambda \in \{1, 2\}$ idet $0 < k \leq n-1$ og $\mu, \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a. $\underline{\mu - \lambda = 2}$

Hvis $\mu - \lambda = 2$ følger af (4.9), at $k = n - 1$. Af (4.2) fås, at

$$\mathbf{BJ} = \mathbf{JB} = k\mathbf{J} = (n-1)\mathbf{J}.$$

Dvs summen af enhver række i $\mathbf{B}$ er $n - 1$. Da $\mathbf{B}$ er en $n \times n$ matrix med diagonalindgange lig nul følger, at $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$. Dette strider mod antagelsen, at $\mathcal{F}$ ikke er komplet. Dermed er $\mu - \lambda \neq 2$.

b. $\underline{\mu - \lambda = 1}$

Hvis $\mu - \lambda = 1$ følger af (4.9), at $n = 2k+1$. Så fås af punkt 1 i sætningen, at

$$\begin{aligned} k(k + (\mu - \lambda)) &= t + (n-1)\mu \\ k(k+1) &= t + 2k\mu \\ k(k+1-2\mu) &= t. \end{aligned}$$

Idet $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ er $k, (k+1-2\mu) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ og da $0 \leq t < k$ gælder, at

$$t = k + 1 - 2\mu = 0. \tag{4.10}$$

Vi ser nærmere på konsekvenserne af tilfælde b.

Eftersom $t = 0$ er der ingen ikke-retningsbestemte kanter i $\mathcal{F}$. Dvs for ethvert par af forskellige punkter $v_i, v_j \in V\mathcal{F}$ gælder, at

$$v_i \to v_j \Longrightarrow v_j \nrightarrow v_i.$$

Dermed opfylder indgangene i nabomatricen $\mathbf{B}$, at

$$(\mathbf{B})_{ij} = 1 \Longrightarrow (\mathbf{B})_{ji} = 0 \qquad \text{for} \quad i \neq j. \tag{4.11}$$

Idet hver række og søjle i $n \times n$ matricen $\mathbf{B}$ har præcis $k = \frac{n-1}{2}$ indgange lig én (ifølge punkt b) følger af (4.11), at

$$(\mathbf{B})_{ji} = 1 \iff (\mathbf{B})_{ij} = 0 \qquad \text{for} \quad i \neq j. \tag{4.12}$$

Dermed findes der kun retningsbestemte kanter i $\mathcal{F}$. Dvs $\mathcal{F}$ ifølge definition A.0.6 og definition A.0.10 er en HT_n med $\tau(e) = \mu$ for enhver retningsbestemt kant e i $\mathcal{F}$. Af (4.10) følger at $k = 2\mu - 1$; dvs at $n = 2k + 1 = 4\mu - 1$ ifølge punkt b. Nu følger af sætning A.0.11 og lemma A.0.9 at $\mathcal{F}$ er en DRT_n med

$$\begin{aligned} \mathrm{od}(v) &= k = 2\mu - 1 \quad \text{for ethvert punkt } v \text{ i } DRT_n; \\ \mathrm{od}(v, w) &= \mu - 1 \quad \text{for ethvert par af forskellige punkter } v, w \text{ i } DRT_n; \\ n &= 4\mu - 1. \end{aligned}$$

Yderligere fås af (4.12) at

$$(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)_{ij} = (\mathbf{B})_{ij} + (\mathbf{B}^T)_{ij} = (\mathbf{B})_{ij} + (\mathbf{B})_{ji} = (\mathbf{J} - \mathbf{I})_{ij}\,;$$

dvs

$$\mathbf{B} + \mathbf{B}^T = \mathbf{J} - \mathbf{I}. \tag{4.13}$$

Idet $\mu - \lambda = 1$ og $t = 0$ fås af (4.1), at

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 + (\mu - \lambda)\mathbf{B} &= \mu\mathbf{J} + (t - \mu)\mathbf{I} \\ \mathbf{B}^2 + \mathbf{B} &= \mu(\mathbf{J} - \mathbf{I}). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Af (4.10),(4.13) og (4.14) følger, at

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{B}^T &= \mathbf{B}(\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{B}) \\ &= k\mathbf{J} - \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \\ &= k\mathbf{J} - \mathbf{B} - (\mu(\mathbf{J} - \mathbf{I}) - \mathbf{B}) \\ &= k\mathbf{J} - \mu(\mathbf{J} - \mathbf{I}) \\ &= (k - \mu)\mathbf{J} + \mu\mathbf{I} \\ &= ((2\mu - 1) - \mu)\mathbf{J} + \mu\mathbf{I} \\ &= (\mu - 1)\mathbf{J} + \mu\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Dermed er første del af sætningen vist og nu vises ellers-delen.

Antag at $\tau - \sigma = \sqrt{\Delta} \in \mathbb{N}$. Da m_τ og m_σ er multipliciteter til egenværdier gælder, at $m_\tau, m_\sigma \in \mathbb{N}$. Heraf følger at $m_\sigma - m_\tau \in \mathbb{Z}$. Dermed fås af (4.8) at $\sqrt{\Delta}$ går op i $2k - (\mu - \lambda)(n - 1)$, hvormed punkt 3 er vist.

Eftersom

$$m_\sigma - m_\tau = m_\sigma + m_\tau - 2m_\tau \equiv m_\sigma + m_\tau \pmod 2,$$

følger punkt 4 ved (4.5) og (4.8).

Idet $m_\tau, m_\sigma \in \mathbb{N}$ følger, at

$$|m_\sigma - m_\tau| \leq m_\sigma + m_\tau = n - 1,$$

hvormed punkt 5 er vist ved brug af (4.8). ■

I kapitel 6 viser vi, at der eksisterer en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med $t = 0$ og $n = 4\mu - 1$ (punkt b i beviset for sætning 4.1.3) givet, at der er visse restriktioner på n.

Bemærkning 4.1.4 (Heltalsbetingelsen for en RSRG) *Da m_τ og m_ρ er heltal giver ligningerne i* (4.7) *en betingelse for om den givne $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG eksisterer. Dette kaldes* heltalsbetingelsen *for en RSRG. Ved at sammenligne* (4.7) *med* (1.13) *og* (1.14) *ses, at heltalsbetingelsen for hhv. en RSRG og en (ikke-retningsbestemt) stærkt regulær graf er ækvivalente.*

Fremover antager vi, at $t < k$ og at $\mathbf{B}$ ikke er nabomatrix for en DRT_n. Bemærk at $t < k$ sikrer, at $\mathcal{F}$ ikke er en (ikke-retningsbestemt) stærkt regulær graf og ikke er komplet ($t < k \Rightarrow k \neq n - 1$).

Sætning 4.1.5
Lad $\digamma$ være en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG. Så gælder, at

$$0 \leq \lambda < t < k \quad \textit{og} \quad 0 < \mu \leq t < k.$$

Bevis:
Først vises at $t \geq \mu$. Antag modsat at $t - \mu < 0$, så følger af punkt 2 i sætning 4.1.3, at

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)^2 - \Delta = -4(t - \mu) &> 0 \\ &\Downarrow \\ |\mu - \lambda| > |\sqrt{\Delta}| &= \sqrt{\Delta}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dette giver to mulige tilfælde for $\mu - \lambda$.

1. $\underline{\mu - \lambda < 0}$

   Hvis $\mu - \lambda < 0$ fås af (4.15), at $\sqrt{\Delta} < -(\mu - \lambda)$. Idet $m_\sigma, m_\tau \in \mathbb{N}$ fås af (4.5), at $m_\sigma - m_\tau \leq m_\sigma + m_\tau = n - 1$. Dermed følger af (4.8), at

$$\begin{aligned} k &= \frac{(n-1)(\mu - \lambda) + (m_\sigma - m_\tau)\sqrt{\Delta}}{2} \\ &< \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - (n-1)(\mu - \lambda)}{2} = 0. \end{aligned}$$

   Dette er en modstrid.

2. $\underline{\mu - \lambda > 0}$

   Hvis $\mu - \lambda > 0$ fås af (4.15), at $\sqrt{\Delta} < \mu - \lambda$. Ifølge sætning 4.1.3 gælder at $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{N}$ og da $\mu - \lambda \in \mathbb{N}$ fås, at $(\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta} \in \mathbb{N}$. Af punkt 2 i sætning 4.1.3 og lemma C.2.2 følger, at $(\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta}$ er et *lige* positivt heltal. Dvs $(\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta} \geq 2$. Eftersom $|m_\sigma - m_\tau| \leq n - 1$ (punkt 5 i sætning 4.1.3) fås så af (4.8), at

$$\begin{aligned} k &= \frac{(n-1)(\mu - \lambda) + (m_\sigma - m_\tau)\sqrt{\Delta}}{2} \\ &\geq \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - (n-1)\sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{(n-1)(\mu - \lambda - \sqrt{\Delta})}{2} \geq n - 1. \end{aligned}$$

   Dvs $k = n - 1$ hvormed følger, at $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$ (se punkt a i beviset for sætning 4.1.3). Dette strider mod antagelsen, at $\digamma$ ikke er komplet.

Dermed giver både tilfælde 1 og 2 en modstrid hvormed sluttes, at $\mu \leq t$.

Lad $\overline{\Gamma}$ være komplementærgrafen til Γ, så følger af lemma 4.1.1, at

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} &\leq \overline{t}\\
n-2k+\lambda &\leq n-2k+t-1\\
\lambda &\leq t-1\\
\lambda &< t. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Tilsidst vises at $\mu > 0$. Antag modsat at $\mu = 0$, så følger af punkt 1 i sætning 4.1.3, at

$$t = k(k-\lambda). \qquad (4.17)$$

Eftersom vi har antaget $t < k$ følger af (4.16), at $0 \leq \lambda < t < k$ hvormed $k - \lambda > 0$ og $0 < t < k$. Sammenhold dette med (4.17) og vi får en modstrid. Dvs $\mu > 0$. ■

Sætning 4.1.6
Lad Γ være en $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG. Så gælder, at

$$-2(k-t-1) \leq \mu - \lambda \leq 2(k-t).$$

Bevis:
Lad $u \to v$ men $v \nrightarrow u$ for $u, v \in V\Gamma$. Så følger af definition 4.0.14

$$\mu = \left|\left\{\, x \in V\Gamma \;\middle|\; v \to x \to u \,\vee\, v \to x \leftrightarrow u \,\vee\, v \leftrightarrow x \to u \,\vee\, v \leftrightarrow x \leftrightarrow u \,\right\}\right|. \qquad (4.18)$$

Idet der er $k - t$ kanter, der går *ind i* eller *ud af* et givet punkt i Γ fås, at

$$\begin{aligned}
\left|\left\{\, x \in V\Gamma \;\middle|\; v \to x \to u \,\vee\, v \to x \leftrightarrow u \,\right\}\right| \leq \left|\left\{\, x \in V\Gamma \;\middle|\; v \to x \,\right\}\right| &\leq k - t\,;\\
\left|\left\{\, x \in V\Gamma \;\middle|\; v \leftrightarrow x \to u \,\right\}\right| \leq \left|\left\{\, x \in V\Gamma \;\middle|\; x \to u \,\right\}\right| &\leq k - t.
\end{aligned}$$

Eftersom $u \to v$ er der, ifølge definition 4.0.14, λ stier af længde to fra u til v. Dermed fås, at

$$\left|\left\{\, x \in V\Gamma \;\middle|\; v \leftrightarrow x \leftrightarrow u \,\right\}\right| \leq \lambda.$$

Således fås af (4.18), at

$$\begin{aligned}
\mu &\leq 2(k-t) + \lambda\\
\mu - \lambda &\leq 2(k-t).
\end{aligned}$$

Heraf følger ved brug af lemma 4.1.1, at

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} - \overline{\lambda} &\leq 2(\overline{k} - \overline{t})\\
(n-2k+\lambda) - (n-2k+\mu-2) &\leq 2((n-k-1) - (n-2k+t-1))\\
\lambda - \mu + 2 &\leq 2(k-t)\\
\lambda - \mu &\leq 2(k-t-1)\\
\mu - \lambda &\geq -2(k-t-1).
\end{aligned}$$

■

Sætning 4.1.7
Lad $\digamma$ være en $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG. Så gælder, at

$$(k-t)(\mu-(k-t)) \leq \lambda t.$$

Bevis:
Lad $x, y \in V\digamma$ så $x \to y$ men $y \nrightarrow x$. Så gælder ifølge definition 4.0.14, at

$$\left|\left\{\, z \in V\digamma \;\middle|\; y \to z \to x \,\right\}\right| = \mu.$$

Da $k-t$ er antal kanter der *kun* går *ind i* (eller *ud af*) $x \in V\digamma$, er der mindst $\mu-(k-t)$ af disse punkter z som opfylder, at $z \leftrightarrow x$. Idet $x \to y$ og $y \nrightarrow x$ kan y vælges på $k-t$ forskellige måder (for fastholdt x). Dvs

$$\left|\left\{\, y \to z \;\middle|\; z \leftrightarrow x \,\wedge\, x \to y \nrightarrow x \,\right\}\right| \geq (k-t)(\mu-(k-t)). \tag{4.19}$$

Idet $z \to x$ (og $x \to z$) for ethvert af disse z gælder ifølge definition 4.0.14 (for z og x fastholdt), at

$$\left|\left\{\, y \in V\digamma \;\middle|\; x \to y \to z \,\right\}\right| = \lambda.$$

Eftersom der ialt er t ikke-retningsbestemte kanter incident med $x \in V\digamma$ gælder (for x fastholdt), at

$$\left|\left\{\, y \to z \;\middle|\; z \leftrightarrow x \,\wedge\, x \to y \nrightarrow x \,\right\}\right| \leq \lambda t. \tag{4.20}$$

Sammenhold (4.19) og (4.20) hvormed det ønskede resultat følger. ■

4.2 Ikke-eksistens af primtalsorden

Ved brug af de viste betingelser for parametersættet for en RSRG i forrige afsnit viser vi, at der ikke eksisterer en RSRG af primtalsorden.

Sætning 4.2.1
Lad $\digamma$ være en $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG. Så er n ikke et primtal.

Bevis:
Antag n er et primtal. Hvis $n = 2$ er det klart, at $\digamma$ ikke er en $(n,k;\lambda,\mu,t)$-RSRG. Lad derfor n være et ulige primtal; dvs $n = 2p+1$. Antag W.L.O.G at $k \leq p = \frac{n-1}{2}$. Bemærk at hvis vi istedet vælger $k \geq p$ fås af sætning 4.1.1, at

$$\begin{aligned}
k &\geq \frac{n-1}{2} \\
k &\geq n-1-\frac{n-1}{2} \\
\frac{n-1}{2} &\geq n-1-k \\
p &\geq \overline{k}.
\end{aligned}$$

Dvs at vise sætningen for tilfældet $k \geq p$ er ækvivalent med at vise sætningen for den komplementære $(n, \overline{k}; \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{t})$-RSRG til $\mathcal{F}$.

Sætning 4.1.5 giver, at

$$|\mu - \lambda| < k \leq p \tag{4.21}$$

og

$$0 \leq t - \mu < k \leq p. \tag{4.22}$$

Benyt disse uligheder i punkt 2 i sætning 4.1.3 hvormed fås, at

$$\begin{gathered}\Delta = (\mu - \lambda)^2 + 4(t - \mu) < p^2 + 4p < p^2 + 4p + 4 = (p + 2)^2 \\ \Updownarrow \\ \sqrt{\Delta} < p + 2.\end{gathered} \tag{4.23}$$

Ved at benytte punkt 1 og 2 i sætning 4.1.3 fås, at

$$\begin{aligned}\mu n &= t + \mu n - \mu - t + \mu \\ \mu n &= t + (n - 1)\mu - (t - \mu) \\ \mu n &= k(k + (\mu - \lambda)) - \frac{1}{4}(\Delta - (\mu - \lambda)^2) \\ 4\mu n &= 4k^2 + 4k(\mu - \lambda) - \Delta + (\mu - \lambda)^2 \\ 4\mu n &= (2k + (\mu - \lambda) + \sqrt{\Delta})(2k + (\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta}).\end{aligned}$$

Dvs n går op i $(2k + (\mu - \lambda) + \sqrt{\Delta})(2k + (\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta})$. Idet n er et primtal følger [Allenby, 1991, Definition 1.3.5 (iii)], at n går op i $(2k + (\mu - \lambda) + \sqrt{\Delta})$ eller $(2k + (\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta})$ eller dem begge.

Af punkt 2 i sætning 4.1.3 og lemma C.2.2 følger at $(\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta}$ og $(\mu - \lambda) + \sqrt{\Delta}$ er lige tal. Dvs 2 går op i $(2k + (\mu - \lambda) \pm \sqrt{\Delta})$.

Eftersom 2 og n er indbyrdes primiske får vi af lemma C.2.1, at

- $\star$ $2n$ går op i $(2k + (\mu - \lambda) + \sqrt{\Delta})$ eller $(2k + (\mu - \lambda) - \sqrt{\Delta})$ eller dem begge.

Vi ønsker at udnytte dette ved at finde et interval for $(2k + (\mu - \lambda) \pm \sqrt{\Delta})$.

Af (4.21) og (4.23) fås, at

$$2k + (\mu - \lambda) \pm \sqrt{\Delta} < 2p + p + (p + 2) = 2n;$$

og ved yderligere at benytte (4.22) fås

$$2k + (\mu - \lambda) \pm \sqrt{\Delta} > -2p - p - (p + 2) = -2n.$$

Dvs

$$-2n < 2k + (\mu - \lambda) \pm \sqrt{\Delta} < 2n. \tag{4.24}$$

Ved at sammenholde $\star$ og (4.24) følger, at $2k+(\mu-\lambda)+\sqrt{\Delta}$ eller $2k+(\mu-\lambda)-\sqrt{\Delta}$ eller dem begge er nul. Hermed fås, at

$$
\begin{aligned}
4\mu n &= (2k+(\mu-\lambda)+\sqrt{\Delta})(2k+(\mu-\lambda)-\sqrt{\Delta}) = 0 \\
&\Downarrow \\
\mu &= 0;
\end{aligned}
$$

hvilket er i modstrid med sætning 4.1.5. Dermed er n ikke et primtal. ■

Kapitel 5

Kroneckerprodukt konstruktion

I dette kapitel konstrueres to familier af retningsbestemte stærkt regulære grafer ved brug af Kroneckerproduktet. Dette produkt har sit navn fra den polske matematiker *Leopold Kronecker*.

Leopold Kronecker (1823-1891) blev født d. 7. december, 1823 i Liegnitz, Preussen (nu Legnica, Polen). Kronecker kom fra en velhavende købmandsfamilie, som ansatte private lærerer til at undervise ham indtil han startede i Gymnasiet i Liegnitz. Kronecker tog til Berlin Universitet i 1841, hvor han under *Dirichlets* (1805-1859) tilsyn erhvervede sin doktorgrad i emnet ' algebraisk tal teori '. I 1848 vendte Kronecker tilbage til Liegnitz for at gifte sig med hans afdøde onkels datter, som han fik seks børn med. Kronecker arvede velstand efter den afdøde onkel, som gjorde forretning indenfor bankverdenen og landbruget. Kronecker forblev forretningsmand indtil 1855, hvorefter han overlod forretningsarbejdet til andre og helligede sig matematikken.

Kronecker var af den mening, at matematik skulle reduceres til argumenter, der kun indeholdte heltal og et endeligt antal trin. Han betvivlede gyldigheden af eksistensbeviser uden konstruktion og brød sig ikke om brugen af irrationale eller transcendente tal. Kronecker er kendt for at have sagt, at

“ *Gud skabte heltallene, alt andet er menneskets værk.* ”

Kronecker var i matematisk korrespondance med den tyske matematiker *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* (1815-1897). Weierstrass arbejdede med geometri og analyse, hvorimod Kronecker beskæftigede sig med algebra. Dette førte ofte til stridigheder.

Kronecker kom sig aldrig af hans kones død. Han døde af bronkitis d. 29. december, 1891 i Berlin; få måneder efter hans kones død.

5.1 Kroneckerproduktet

Før vi påbegynder konstruktionen af de to familier af RSRG defineres Kroneckerproduktet.

Definition 5.1.1 (Kroneckerprodukt)
Lad $\mathbf{A} = [(\mathbf{A})_{ij}] = [a_{ij}]$ *være en* $m \times n$ *matrix og* $\mathbf{B} = [(\mathbf{B})_{kl}] = [b_{kl}]$ *en* $p \times q$ *matrix. Kroneckerproduktet* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *er* $mp \times nq$ *matricen givet ved*

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & & a_{1j}\mathbf{B} & & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}\mathbf{B} & \cdots & & \begin{bmatrix} a_{ij}b_{11} & \cdots & a_{ij}b_{1l} & \cdots & a_{ij}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij}b_{k1} & \cdots & a_{ij}b_{kl} & \cdots & a_{ij}b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij}b_{p1} & \cdots & a_{ij}b_{pl} & \cdots & a_{ij}b_{pq} \end{bmatrix} & & \cdots & a_{in}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & & a_{mj}\mathbf{B} & & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Indgangen $(\mathbf{A})_{ij}\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *kaldes en blok-indgang, og den* (ik, jl)*'te position i* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *er* $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ik,jl} = (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B})_{kl} = a_{ij}b_{kl}$*. Bemærk at* ik *(hhv.* jl*) ikke betegner et produkt, men derimod række* i *og* k *(hhv. søjle* j *og* l*) i hhv.* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$.

Kroneckerproduktet kaldes ligeledes for *det direkte produkt*. Kroneckerproduktet opfylder en række egenskaber, men vi får kun brug for de to følgende. For en fuldstændig liste af egenskaber henvises til [Meyer, 2000, pp. 597-598].

Lemma 5.1.2 *Lad* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *og* $\mathbf{D}$ *være fire reelle matricer, så produkterne* $\mathbf{AC}$ *og* $\mathbf{BD}$ *eksisterer. Så gælder*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.$$

Bevis:
Eftersom produkterne $\mathbf{AC}$ og $\mathbf{BD}$ eksisterer, er position (ij, mn) i $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$ ifølge definition 5.1.1 givet ved

$$\begin{aligned} ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}))_{ij,mn} &= \sum_k \sum_l (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ij,kl}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_{kl,mn} \\ &= \sum_k \sum_l (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{jl}(\mathbf{C})_{km}(\mathbf{D})_{ln} \\ &= \sum_k (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{C})_{km} \sum_l (\mathbf{B})_{jl}(\mathbf{D})_{ln} \\ &= (\mathbf{AC})_{im}(\mathbf{BD})_{jn} \\ &= (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD})_{ij,mn}. \end{aligned}$$

Dvs $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$. ■

Lemma 5.1.3 *Lad* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *og* $\mathbf{C}$ *være reelle matricer, hvor* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *har samme format. Så gælder for* $a, b \in \mathbb{R}$, *at*

$$\begin{aligned} (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= a(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + b(\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}); \\ \mathbf{C} \otimes (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) &= a(\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) + b(\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Dvs Kroneckerproduktet opfylder de distributive love.

Bevis:
Eftersom $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ eksisterer, er position (ik, jl) i $(a\mathbf{A}+b\mathbf{B})\otimes\mathbf{C}$ ifølge definition 5.1.1 givet ved

$$\begin{aligned}((a\mathbf{A}+b\mathbf{B})\otimes\mathbf{C})_{ik,jl} &= (a\mathbf{A}+b\mathbf{B})_{ij}(\mathbf{C})_{kl}\\ &= (a(\mathbf{A})_{ij}+b(\mathbf{B})_{ij})(\mathbf{C})_{kl}\\ &= a(\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{C})_{kl}+b(\mathbf{B})_{ij}(\mathbf{C})_{kl}\\ &= a(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})_{ik,jl}+b(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C})_{ik,jl}.\end{aligned}$$

Dvs $(a\mathbf{A}+b\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} = a(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})+b(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C})$ for $a, b \in \mathbb{R}$.

Tilsvarende vises at $\mathbf{C}\otimes(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}) = a(\mathbf{C}\otimes\mathbf{A})+b(\mathbf{C}\otimes\mathbf{B})$. ■

5.2 Konstruktion

Vi konstruerer to familier af RSRG hver efterfulgt af et eksempel. Den første konstruktion vil vise sig nyttig i kapitel 7 til at vise eksistensen af en $(8s, 4s, s, 3s, 3s)$-RSRG.

For ethvert k betegner $\mathbf{J}_k$ $k\times k$ matricen med $(\mathbf{J}_k)_{ij} = 1$ og $\mathbf{I}_k$ $k\times k$ identitetsmatricen.

Sætning 5.2.1
Lad $\mathcal{F}$ være en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med nabomatrix $\mathbf{B}$. Så er $\mathbf{B}' = \mathbf{B}\otimes\mathbf{J}_m$, $m > 1$, nabomatrix for en $(n', k'; \lambda', \mu', t')$-RSRG $\mathcal{F}'$ med

$$\begin{aligned}n' &= nm;\\ k' &= km;\\ \lambda' &= \lambda m;\\ \mu' &= \mu m;\\ t' &= tm;\end{aligned}$$

hvis og kun hvis $t = \mu$. Resultatet gælder ligeledes for $\mathbf{J}_m\otimes\mathbf{B}$.

Bevis:
Da $\mathbf{B}' = \mathbf{B}\otimes\mathbf{J}_m$ er en $nm\times nm$ matrix vil en mulig RSRG med nabomatrix $\mathbf{B}'$ have $n' = nm$ punkter.

Hver række og søjle i $\mathbf{B}$ har k indgange lig én og $n-k$ indgange lig nul. Dermed er der ifølge definition 5.1.1 præcis $k' = km$ indgange lig én i hver række og søjle i $\mathbf{B}'$; dvs

$$\mathbf{B}'\mathbf{J}_{nm} = \mathbf{J}_{nm}\mathbf{B}' = k'\mathbf{J}_{nm}. \tag{5.1}$$

Dermed opfylder $\mathbf{B}'$ (4.2). Vi mangler at vise at $\mathbf{B}'$ opfylder (4.1).

Af lemma 5.1.2, lemma 5.1.3 og (4.1) fås, at

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}')^2 &= (\mathbf{B}\otimes\mathbf{J}_m)^2 = \mathbf{B}^2\otimes\mathbf{J}_m^2 = (-(\mu-\lambda)\mathbf{B}+t\mathbf{I}_n+\mu(\mathbf{J}_n-\mathbf{I}_n))\otimes m\mathbf{J}_m\\ &= -(\mu m-\lambda m)(\mathbf{B}\otimes\mathbf{J}_m)+tm(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{J}_m)+\mu m((\mathbf{J}_n-\mathbf{I}_n)\otimes\mathbf{J}_m)\\ &= -(\mu'-\lambda')\mathbf{B}'+t'(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{J}_m)+\mu'((\mathbf{J}_n-\mathbf{I}_n)\otimes\mathbf{J}_m)\end{aligned} \tag{5.2}$$

$\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n$ er $n \times n$ matricen hvis indgange er givet ved

$$(\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i \neq j; \\ 0, & \text{hvis } i = j. \end{cases}$$

Dermed er $(\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m$ ifølge definition 5.1.1 $nm \times nm$ matricen givet ved

$$(\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} 0\mathbf{J}_m & \mathbf{J}_m & \cdots & \mathbf{J}_m \\ \mathbf{J}_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{J}_m \\ \mathbf{J}_m & \cdots & \mathbf{J}_m & 0\mathbf{J}_m \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Idet $\mathbf{I}_n$ er $n \times n$ identitetsmatricen fås af definition 5.1.1, at

$$\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_m & 0\mathbf{J}_m & \cdots & 0\mathbf{J}_m \\ 0\mathbf{J}_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\mathbf{J}_m \\ 0\mathbf{J}_m & \cdots & 0\mathbf{J}_m & \mathbf{J}_m \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Ved at sammenholde (5.3) og (5.4) med (5.2) følger, at blok-diagonalindgangene i $(\mathbf{B}')^2 + (\mu' - \lambda')\mathbf{B}'$ er $t'\mathbf{J}_m$ og blok-indgangene forskellig fra disse er $\mu'\mathbf{J}_m$. Idet $m > 1$ er nogle af elementerne i blok-diagonalen ikke på diagonalen. Dvs der står t' på nogle af ikke-diagonalindgange i $(\mathbf{B}')^2 + (\mu' - \lambda')\mathbf{B}'$.

Men (4.1) er opfyldt for $\mathbf{B}'$ hvis og kun hvis alle diagonalindgange i $(\mathbf{B}')^2 + (\mu' - \lambda')\mathbf{B}'$ er t' og alle ikke-diagonalindgange er μ'. Dvs (4.1) er opfyldt for $\mathbf{B}'$ hvis og kun hvis

$$t' = \mu' \iff tm = \mu m \iff t = \mu.$$

For $t = \mu \iff t' = \mu'$ giver (5.2), at

$$(\mathbf{B}')^2 = (\mu' - \lambda')\mathbf{B}' + \mu'\mathbf{J}_{nm}. \tag{5.5}$$

Af (5.1) og (5.5) følger at $\mathbf{B}$ opfylder definition 4.0.14 med de ønskede parametre.

Beviset for $\mathbf{J}_m \otimes \mathbf{B}$ forløber analogt. ■

Eksempel 5.2.2

Lad $\mathbf{B}$ *være nabomatricen givet i eksempel 4.0.15 for en* $(6, 2; 0, 1, 1)$*-RSRG* $\mathcal{F}$. *Det ses at* $t = \mu$ *er opfyldt for* $\mathcal{F}$, *hvormed vi kan konstruere nabomatricen* $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_2$ *for en* $(12, 4; 2, 0, 2)$*-RSRG* $\mathcal{F}'$. *Nabomatricen* $\mathbf{B}'$ *er givet ved*

$$\mathbf{B}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 \\ \hline \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ud fra $\mathbf{B}'$ *og definition 4.0.13 kan* Γ' *konstrueres.*

Yderligere er $\mathbf{B}'' = \mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{B}$ *ligeledes nabomatrix for en* $(12,4;2,0,2)$*-RSRG* Γ''*. Nabomatricen* $\mathbf{B}''$ *er givet ved*

$$\mathbf{B}'' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

Ud fra $\mathbf{B}''$ *og definition 4.0.13 kan* Γ'' *konstrueres. Bemærk at* Γ' *og* Γ'' *er isomorfe grafer. Grafen* Γ'' *konstrueres ved at spalte ethvert punkt* $v_i,\ i = 1,\ldots,6$*, i figur 4.1 i to. Antag at punktet* $v_i \in V\Gamma$ *spaltes hvorved punktet* $u_i \in V\Gamma''$ *fås. Der gælder at* u_i *er forbundet med samme slags hhv. ikke-retningsbestemt og retningsbestemte kanter til nøjagtig de samme oprindelige punkter, som* v_i *er forbundet til. Dvs* v_i *og* u_i *har samme mængde ind- og ud-naboer (hvis* $u \to v$ *er* u *ind-nabo til* v *og* v *er ud-nabo til* u*).* □

Sætning 5.2.3
Lad Γ *være en* $(n,k;\lambda,\mu,t)$*-RSRG med nabomatrix* $\mathbf{B}$*. Så er* $\mathbf{B}' = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))$*,* $m > 1$*, nabomatrix for en* $(n',k';\lambda',\mu',t')$*-RSRG* Γ' *med*

$$\begin{aligned}
n' &= nm; \\
k' &= (k+1)m - 1; \\
\lambda' &= (t+1)m - 2; \\
\mu' &= \mu m; \\
t' &= (t+1)m - 1;
\end{aligned}$$

hvis og kun hvis $\lambda = t - 1$*.*

Bevis:
Da $\mathbf{B}' = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))$ er en $nm \times nm$ matrix vil en mulig RSRG med nabomatrix $\mathbf{B}'$ have $n' = nm$ punkter.

$\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m$ er $m \times m$ matricen hvis indgange er givet ved

$$(\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i \neq j; \\ 0, & \text{hvis } i = j. \end{cases}$$

Dermed er $\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)$ $nm \times nm$ matricen givet ved

$$\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

Dvs hver række og søjle i $\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)$ indeholder præcis $(m-1)$ ét-taller, som alle er placeret på blok-diagonalindgangene. $\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m$ er $nm \times nm$ matricen med blok-diagonalindgange lig nul og præcis km ét-taller i hver række og søjle (se bevis for sætning 5.2.1). Dermed er der præcis $k' = km + (m-1) = (k+1)m - 1$ ét-taller i hver række og søjle i $\mathbf{B}'$. Heraf følger, at

$$\mathbf{BJ}_{nm} = \mathbf{J}_{nm}\mathbf{B} = k'\mathbf{J}_{nm}.$$

Således opfylder $\mathbf{B}'$ (4.2). Vi mangler at vise at $\mathbf{B}'$ opfylder (4.1).

Af lemma 5.1.2, lemma 5.1.3 og lemma C.3.1 følger

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}')^2 &= [(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))]^2 \\
&= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)^2 + (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))^2 + 2(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) \\
&= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)^2 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m - \mathbf{I}_{nm})^2 + 2(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m - \mathbf{I}_{nm}) \\
&= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)^2 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m)^2 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m)^2 - 2(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m)\mathbf{I}_{nm} \\
&\qquad + 2(\mathbf{B} \otimes m\mathbf{J}_m - \mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) \\
&= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)^2 + m(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m - 2(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) \\
&\qquad + 2m(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) - 2(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m).
\end{aligned}$$

Ved at benytte resultatet for $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)^2$ i beviset for sætning 5.2.1 fås ovenstående til

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}')^2 &= -(\mu m - \lambda m)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + tm(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) + \mu m((\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m) \\
&\quad + m(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m - 2(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) + 2m(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) - 2(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) \\
&= -((\mu - \lambda - 2)m + 2)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + ((t+1)m - 2)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) \\
&\qquad + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m + \mu m((\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m) \\
&= -((\mu - \lambda - 2)m + 2)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + \mathbf{I}_n \otimes [((t+1)m - 1)\mathbf{I}_m \\
&\qquad + ((t+1)m - 2)(\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)] + \mu m((\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

For at $\mathbf{B}'$ opfylder (4.1) kræves, at

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}')^2 &= -(\mu' - \lambda')\mathbf{B}' + t'\mathbf{I}_{nm} + \mu'(\mathbf{J}_{nm} - \mathbf{I}_{nm}) \\
&= -(\mu' - \lambda')[(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))] + t'(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m) \\
&\qquad + \mu'[(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) + ((\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m)] \\
&= -(\mu' - \lambda')(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + (\lambda' - \mu')(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) + t'(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m) \\
&\qquad + \mu'(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) + \mu'((\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m) \\
&= -(\mu' - \lambda')(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) + \mathbf{I}_n \otimes (t'\mathbf{I}_m + \lambda'(\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) \\
&\qquad + \mu'((\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{J}_m).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Af (5.6) og (5.7) følger at $\mathbf{B}'$ opfylder (4.1) med

$$\mu' - \lambda' = (\mu - \lambda - 2)m + 2; \tag{5.8}$$

$$\lambda' = (t+1)m - 2; \tag{5.9}$$

$$\mu' = \mu m; \tag{5.10}$$

$$t' = (t+1)m - 1.$$

Af (5.8), (5.9) og (5.10) følger, at denne konstruktion er mulig hvis og kun hvis

$$(\mu - \lambda - 2)m + 2 = \mu' - \lambda' = \mu m - (t+1)m + 2,$$

hvilket er ækvivalent med $\lambda = t - 1$. ■

Eksempel 5.2.4

Lad igen $\mathbf{B}$ *være nabomatricen for den i eksempel 4.0.15 givne* $(6, 2; 0, 1, 1)$*-RSRG* $\mathit{\Gamma}$*. Det ses at* $\lambda = t - 1$ *er opfyldt for* $\mathit{\Gamma}$*, hvormed vi kan konstruere nabomatricen* $\mathbf{B}' = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_2) + (\mathbf{I}_2 \otimes (\mathbf{J}_2 - \mathbf{I}_2))$ *for en* $(12, 5; 2, 2, 3)$*-RSRG* $\mathit{\Gamma}'$*. Nabomatricen* $\mathbf{B}'$ *er givet ved*

$$\mathbf{B}' = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

Ud fra $\mathbf{B}'$ *og definition 4.0.13 kan* $\mathit{\Gamma}'$ *konstrueres.* □

Kapitel 6

Eksistens af RSRG med $t = 0$

I dette kapitel bruges en række betegnelser, hvor den tilhørende definition findes i bilag A. For nøjagtig sideangivelse af de tilhørende definitioner henvises til *symbollisten*.

I dette kapitel defineres en skæv Hadamard matrix. Vi viser at eksistens af en DRT_n er ækvivalent med eksistensen af en skæv Hadamard matrix af orden $(n+1)$. Ved hjælp af dette vises at der eksisterer en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med $t = 0$ givet, at der er visse restriktioner på n.

For at kunne definere en skæv Hadamard matrix, er det nødvendigt først at definere en Hadamard matrix. Denne matrix har fået sit navn fra den franske matematiker *Jacques Hadamard*.

Jacques Hadamard blev født d. 8. december, 1865 i Versailles, Frankrig. Han blev nummer ét ved indgangseksamener til universiteterne École Polytechnique og École Normale Supérieure og valgte optagelse på det sidstnævnte. Han skrev speciale om funktioner defineret af Taylor serier og modtog hans doktorgrad i 1892.

I 1893 opdagede Hadamard kvadratiske matricer af orden 12 og 20, med indgange lig ± 1, hvis rækker (og søjler) er parvis ortogonale. For hver af disse matricer $\mathbf{X}$ gælder lighedstegn i uligheden

$$|\det \mathbf{X}|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |(\mathbf{X})_{ij}|^2.$$

Dvs disse matricer har maksimal determinant blandt matricer med indgange lig ± 1. Hadamard's største bidrag til matematikken var hans bevis af primtalssætningen i 1896. Sætningen siger, at

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \frac{\ln x}{x} = 1;$$

hvor $\pi(x)$ betegner antal positive primtal $\leq x$. Hadamard beviste sætningen ved brug af kompleks analyse.

Hadamard underviste som professor på Collège de France (1897-1935), the École Polytechnique (1912-1935) og École Centrales des Arts et Manufactures (1920-1935); alle universiteter i Paris. Til stor sorg døde to af Hadamard's sønner under første verdenskrig. Han flygtede til Amerika ved Frankrig's fald i 1940 (anden verdenskrig). Hadamard returnerede til Paris i 1944. I 1950 blev han valgt til hæderspræsident for den Internationale Matematiske Kongres i Cambridge, Massachusetts i Amerika.

Hadamard døde d. 17 oktober, 1963 i Paris.

6.1 Hadamard matrix

Vi definerer en Hadamard matrix.

Definition 6.1.1 (Hadamard matrix)
En Hadamard matrix $\mathbf{H}$ *af orden* n *er en* $n \times n$ *matrix med indgange lig* ± 1, *som opfylder at*

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = n\mathbf{I}.$$

Det følger af definition 6.1.1 at

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{H}^{-1} n\mathbf{I} = n\mathbf{H}^{-1}.$$

Heraf følger at

$$\mathbf{H}^T\mathbf{H} = n\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H} = n\mathbf{I} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T;$$

dvs at en Hadamard matrix $\mathbf{H}$ af orden n er *normal*.

Bemærk at hvis søjlerne i en Hadamard matrix ombyttes, er den opnåede matrix ligeledes en Hadamard matrix. Dette benyttes i proposition 6.1.2.

Proposition 6.1.2 *En Hadamard matrix* $\mathbf{H}$ *af orden* n *har*

$$n = 1, 2 \quad \textit{eller} \quad n \equiv 0 \pmod 4.$$

Bevis:
Ifølge korollar 6.2.3 kan vi antage, at første søjle og række i en Hadamard matrix har indgange lig $+1$. En sådan Hadamard matrix kaldes *normaliseret*.

Dvs Hadamard matricerne af orden én og to er givet ved

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lad nu $\mathbf{H}$ være en Hadamard matrix af orden $n \geq 3$. Eftersom den første række i $\mathbf{H}$ er $\boldsymbol{j}_n^T$ følger, at første søjle i $\mathbf{H}^T$ er $\boldsymbol{j}_n$. Dermed følger af definition 6.1.1 at n er lige, og hver række i $\mathbf{H}$ (undtagen den første) har $\frac{n}{2}$ indgange lig $+1$ og $\frac{n}{2}$ indgange lig -1.

Ombyt søjlerne i $\mathbf{H}$, så anden række i har de første $\frac{n}{2}$ indgange lig $+1$ og de sidste $\frac{n}{2}$ indgange lig -1 og betegn denne matrix med $\mathbf{H}'$. Bemærk at $\mathbf{H}'$ er en Hadamard matrix. Lad $t \in \mathbb{N}$ betegne antal indgange lig $+1$ i de første $\frac{n}{2}$ positioner af række tre i $\mathbf{H}'$ og $t' \in \mathbb{N}$ antal indgange lig $+1$ i de sidste $\frac{n}{2}$ positioner af række tre i $\mathbf{H}'$. Dermed indeholder de første $\frac{n}{2}$ positioner af række tre $(\frac{n}{2} - t)$ indgange lig -1 og de sidste $\frac{n}{2}$ positioner af række tre indholder $(\frac{n}{2} - t')$ indgange lig -1.

Idet $(\mathbf{H}'^{\,T})_{j1} = (\mathbf{H}')_{1j} = +1$ for alle j fås af definition 6.1.1, at

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{H}'\mathbf{H}'^{\,T})_{31} &= \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{H}')_{3l}(\mathbf{H}'^{\,T})_{l1} = \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{H}')_{3l} \\ &= \left(t - \left(\frac{n}{2} - t\right)\right) + \left(t' - \left(\frac{n}{2} - t'\right)\right) = 2t + 2t' - n\,; \end{aligned}$$

dvs

$$2t + 2t' = n. \tag{6.1}$$

Da

$$(\mathbf{H}')_{2j} = \begin{cases} +1, & \text{for } j = 1, \ldots, \frac{n}{2}; \\ -1, & \text{for } j = (\frac{n}{2} + 1), \ldots, n; \end{cases}$$

fås af definition 6.1.1 at

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{H}'\mathbf{H}'^{\,T})_{32} &= \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{H}')_{3l}(\mathbf{H}'^{\,T})_{l2} = \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{H}')_{3l}(\mathbf{H}')_{2l} \\ &= \left(t - \left(\frac{n}{2} - t\right)\right) - \left(t' - \left(\frac{n}{2} - t'\right)\right) = 2t - 2t'. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Af (6.1) og (6.2) følger at $n = 4t$ for $t \in \mathbb{N}$. ■

Det er vist, at der eksisterer Hadamard matricer af orden $2^2 q$ for de fleste $q < 3000$ [Seberry and Yamada, 1992, p. 435]. Der findes mange forskellige konstruktionsmetoder til at frembringe disse matricer. Hadamard's originale konstruktion af Hadamard matricer er en *multiplikationssætning*, som benytter sig af det faktum at Kroneckerproduktet af to Hadamard matricer af orden hhv. $2^a m$ og $2^b n$, er en Hadamard matrix af orden $2^{a+b} mn$. Vi beskriver en simpel konstruktion via Kroneckerproduktet defineret i kapitel 5.

Først er det nødvendigt at vise en egenskab for Kroneckerproduktet.

Lemma 6.1.3 *Lad* $\mathbf{C}$ *være en reel* $n \times m$ *matrix og* $\mathbf{D}$ *en reel* $p \times q$ *matrix. Så gælder at*

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^T = \mathbf{C}^T \otimes \mathbf{D}^T.$$

Bevis:
Lad position (i, j) i $\mathbf{C}$ være $(\mathbf{C})_{ij}$ og position (k, l) i $\mathbf{D}$ være $(\mathbf{D})_{kl}$. Så er position (ik, jl) i $(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^T$ ifølge definition 5.1.1 givet ved

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^T\right)_{ik,jl} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_{jl,ik} &= (\mathbf{C})_{ji}(\mathbf{D})_{lk} \\ &= (\mathbf{C}^T)_{ij}(\mathbf{D}^T)_{kl} = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{D}^T)_{ik,jl}. \end{aligned}$$

Dvs $(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^T = \mathbf{C}^T \otimes \mathbf{D}^T$. ■

Sætning 6.1.4
Lad $\mathbf{H}$ og $\mathbf{H}'$ være Hadamard matricer af orden hhv. n og n'. Så er $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}'$ en Hadamard matrix af orden nn'.

Bevis:
Først vises at $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}'$ er en Hadamard matrix.

Af lemma 6.1.3, lemma 5.1.2 og definition 6.1.1 fås at

$$\begin{aligned}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}')(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}')^T &= (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}')(\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{H}'^T) \\ &= \mathbf{H}\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{H}'\mathbf{H}'^T = n\mathbf{I}_n \otimes n'\mathbf{I}_{n'} = nn'\mathbf{I}_{nn'}.\end{aligned}$$

■

For at kunne vise den ønskede sætning om eksistensen af en RSRG med $t = 0$, er det nødvendigt med en betingelse for Hadamard matricerne. De Hadamard matricer der opfylder denne betingelse kaldes for *skæv Hadamard* matricer.

6.2 Skæv Hadamard matrix

I dette afsnit defineres en skæv Hadamard matrix, som benyttes til at vise eksistensen af en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med $t = 0$.

Definition 6.2.1 (Skæv Hadamard matrix)
En Hadamard matrix $\mathbf{H}$ er skæv hvis og kun hvis

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = 2\mathbf{I}.$$

Bemærk at idet ombytningen af søjler i beviset for proposition 6.1.2 ikke er nødvendig (men udføres for overblikkets skyld) gælder, at resultatet ligeledes gælder for en skæv Hadamard matrix. Dvs en skæv Hadamard matrix har orden $n = 1, 2$ eller $n \equiv 0 \pmod 4$.

Vi viser et resultat, som udtaler sig om udseendet af en skæv Hadamard matrix.

Lemma 6.2.2 *Lad $\mathbf{H}$ være en skæv Hadamard matrix af orden n og lad $\mathbf{H}'$ være matricen, som opnås ved at multiplicere række r og søjle r i $\mathbf{H}$ med -1, for $1 \leq r \leq n$. Så er $\mathbf{H}'$ en skæv Hadamard matrix.*

Bevis:
Lad $\mathbf{E}_r$ være $n \times n$ matricen, der for $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$, er givet ved

$$(\mathbf{E}_r)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = j \neq r; \\ -1, & \text{hvis } i = j = r; \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{6.3}$$

Dermed fås at

$$(\mathbf{E}_r\mathbf{H})_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{E}_r)_{il}(\mathbf{H})_{lj} = \begin{cases} (\mathbf{H})_{ij}, & \text{hvis } i \neq r; \\ -(\mathbf{H})_{ij}, & \text{hvis } i = r. \end{cases}$$

og

$$(\mathbf{HE}_r)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{E}_r)_{lj} = \begin{cases} (\mathbf{H})_{ij}, & \text{hvis } j \neq r; \\ -(\mathbf{H})_{ij}, & \text{hvis } j = r. \end{cases}$$

Dvs $\mathbf{E}_r\mathbf{H}$ har den effekt at multiplicere række r i $\mathbf{H}$ med -1, og $\mathbf{HE}_r$ har den effekt at multiplicerer søjle r i $\mathbf{H}$ med -1. Dermed har $\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r$ den effekt at multiplicere række r og søjle r i $\mathbf{H}$ med -1. Vi viser, at $\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r$ er en Hadamard matrix.

Af (6.3) ses at $\mathbf{E}_r^T = \mathbf{E}_r$ og $\mathbf{E}_r\mathbf{E}_r = \mathbf{I}$ hvormed følger af definition 6.1.1, at

$$(\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r)(\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r)^T = \mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r\mathbf{E}_r\mathbf{H}^T\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r\mathbf{HH}^T\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r(n\mathbf{I})\mathbf{E}_r = n\mathbf{I}.$$

Dvs $\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r$ er en Hadamard matrix.

Vi viser, at $\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r$ er en skæv Hadamard matrix. Af definition 6.2.1 følger at

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r) + (\mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r)^T &= \mathbf{E}_r\mathbf{HE}_r + \mathbf{E}_r\mathbf{H}^T\mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{E}_r(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r(2\mathbf{I})\mathbf{E}_r = 2\mathbf{I}.\end{aligned}$$

■

Korollar 6.2.3 *Lad* $\mathbf{H}$ *være en Hadamard matrix af orden* n *og lad* $\mathbf{H}'$ *være matricen, som opnås ved at multiplicere en række eller en søjle i* $\mathbf{H}$ *med* -1. *Så er* $\mathbf{H}'$ *en Hadamard matrix.*

Bevis:
Lad $\mathbf{E}_r$ være $n \times n$ matricen konstrueret i beviset for proposition 6.2.2. Eftersom $\mathbf{E}_r^T = \mathbf{E}_r$ og $\mathbf{E}_r\mathbf{E}_r = \mathbf{I}$ fås af definition 6.1.1, at

$$(\mathbf{E}_r\mathbf{H})(\mathbf{E}_r\mathbf{H})^T = \mathbf{E}_r\mathbf{HH}^T\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r(n\mathbf{I})\mathbf{E}_r = n\mathbf{I}.$$

Tilsvarende kan vises at $(\mathbf{HE}_r)(\mathbf{HE}_r)^T = n\mathbf{I}$. ■

Hvis $\mathbf{H}$ er en skæv Hadamard matrix følger af definition 6.2.1, at $(\mathbf{H})_{11} = +1$. Dermed kan vi ifølge lemma 6.2.2 antage, at første række i $\mathbf{H}$ har indgange lig $+1$.

For at vise eksistensen af en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med $t = 0$, får vi brug for følgende lemma [Hall, 1986, Lemma 14.1.6, p. 247].

Lemma 6.2.4 *Der eksisterer en skæv Hadamard matrix af orden* n, *hvis* $n = 2^l b_1 \cdots b_m$, *hvor hvert* b_i *er på formen* $p^r + 1 \equiv 0 \pmod 4$, p *et primtal.*

De eneste ordner $n \leq 100$ der ikke dækkes af lemma 6.2.4, er $n = 36, 52, 76, 92, 100$. Men skæv Hadamard matricer er vist at eksisterer for orden 36 [Goethals and Seidel], orden 52 [Blatt and Szekeres] og orden 76 [Szekeres, 1969]. Dvs det mindste ikke-viste tilfælde for eksistens af en skæv Hadamard matrix er $n = 92$.

6.3 Eksistens

Vi mangler blot et enkelt resultat for at kunne vise eksistensen af en RSRG med $t = 0$.

Sætning 6.3.1
Lad $n = 4c+3$ for $c \in \mathbb{N}$. Så eksisterer en DRT_n hvis og kun hvis, der eksisterer en skæv Hadamard matrix af orden $n+1$.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag der eksisterer en DRT_n med $n \times n$ nabomatrix $\mathbf{B}$.

Vi konstruerer en $(n+1) \times (n+1)$ matrix $\mathbf{H}$ af $\mathbf{B}$. Lad første række og søjle i $\mathbf{H}$ være givet ved

$$(\mathbf{H})_{1j} = +1 \qquad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n+1; \tag{6.4}$$
$$(\mathbf{H})_{i1} = -1 \qquad \text{for} \quad 2 \leq i \leq n+1. \tag{6.5}$$

For $i, j = 2, \ldots, n+1$ er de resterende indgange i $\mathbf{H}$ givet ved

$$(\mathbf{H})_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{hvis } (\mathbf{B})_{(i-1)(j-1)} = 1 \text{ eller } i = j; \\ -1 & \text{hvis } (\mathbf{B})_{(i-1)(j-1)} = 0 \text{ og } i \neq j. \end{cases} \tag{6.6}$$

For at vise at $\mathbf{H}$ er en Hadamard matrix betragtes indgangene i $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$, hvor den (i,j)'te position er givet ved

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H}^T)_{lj} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H})_{jl}. \tag{6.7}$$

Først betragtes diagonalindgangene i $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$; dvs de indgange hvor $i = j$.

1. $i = j$:
   Idet $\mathbf{H}$ er en $(n+1) \times (n+1)$ matrix hvis indgange er ± 1 fås af (6.7), at
   $$(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{ii} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H})_{il} = \sum_{l=1}^{n+1} ((\mathbf{H})_{il})^2 = n+1.$$

2. $1 = i \neq j$:
   Første række i $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Eftersom række j i $\mathbf{B}$ ifølge lemma A.0.9 indeholder $\text{od}(v_j) = 2c+1$ indgange lig 1 og $n - \text{od}(v_j) = (4c+3) - (2c+1) = 2c+2$ indgange lig 0 følger af (6.4) og (6.6), at række j i $\mathbf{H}$ indeholder $2c+2$ indgange lig 1 og $2c+2$ indgange lig -1. Da $(\mathbf{H})_{1j} = +1$ for alle j ifølge (6.4) fås af (6.7), at
   $$(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{1j} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{1l} (\mathbf{H})_{jl} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{jl} = (2c+2) - (2c+2) = 0.$$

3. $1 = j \neq i$:
   Første søjle i $\mathbf{HH}^T$. Ved ækvivalente argumenter til de i punkt 2 fås af (6.7) at

$$(\mathbf{HH}^T)_{i1} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H})_{1l} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} = (2c+2) - (2c+2) = 0.$$

4. $1 \neq i \neq j \neq 1$:
   De resterende indgange i $\mathbf{HH}^T$. Betegn antal punkter i DRT_n der dominerer v_i i DRT_n med $\mathrm{id}(\, v_i \,)$ og antal punkter der dominerer både v_i og v_j med $\mathrm{id}(\, v_i, v_j \,)$. Eftersom et vilkårligt punkt v i DRT_n ifølge definition A.0.6 er forbundet til alle punkter i DRT_n fås af antagelsen og lemma A.0.9, at

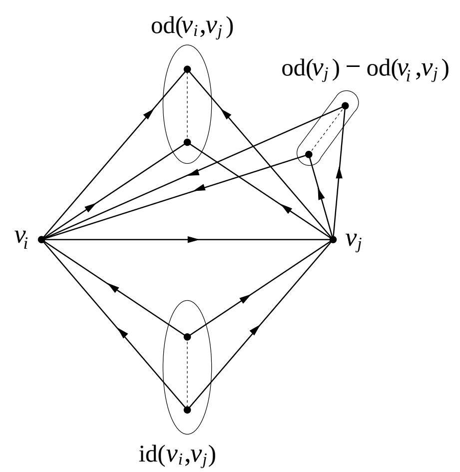
$$\mathrm{id}(\, v \,) = n - \mathrm{od}(\, v \,) - 1 = (4c+3) - (2c+1) - 1 = 2c+1;$$

   for ethvert punkt v i DRT_n. Antag W.L.O.G at $v_i \to v_j$ for $1 \neq i \neq j \neq 1$, hvormed følger af definition A.0.6 at

$$(\mathbf{B})_{ji} = 0. \tag{6.8}$$

   Eftersom $(\mathbf{B})_{ii} = 0$ fås følgende to ligninger ved brug af antagelsen, lemma A.0.9 og (6.8) (se figur 6.1)

$$\begin{aligned} \big|\{\, l \mid (\mathbf{B})_{il} = (\mathbf{B})_{jl} = 1 \,\}\big| &= \mathrm{od}(\, v_i, v_j \,) = c; \\ \big|\{\, l \mid (\mathbf{B})_{il} = (\mathbf{B})_{jl} = 0 \,\}\big| &= \mathrm{id}(\, v_i, v_j \,) + \underbrace{1}_{(\mathbf{B})_{ii}=0} \\ &= \mathrm{id}(\, v_i \,) - (\mathrm{od}(\, v_j \,) - \mathrm{od}(\, v_i, v_j \,)) + 1 \\ &= 2c + 1 - ((2c+1) - c) + 1 = c + 1. \end{aligned}$$



Figur 6.1: Antal punkter i DRT_n der dominerer både v_i og v_j

Eftersom $(\mathbf{H})_{i1} = (\mathbf{H})_{j1} = -1$ $(1 \neq i \neq j \neq 1)$ ifølge (6.5) fås ved at sammenholde ovenstående med (6.6), at

$$\left|\left\{\, l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il}(\mathbf{H})_{jl} = +1 \,\right\}\right| = c + (c+1) + 1 = 2c + 2. \tag{6.9}$$

Idet $\mathbf{H}$ er en $(n+1) \times (n+1)$ matrix med indgange lig ± 1 fås, at

$$\begin{aligned} \left|\left\{\, l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il}(\mathbf{H})_{jl} = -1 \,\right\}\right| &= (n+1) - \left|\left\{\, l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il}(\mathbf{H})_{jl} = 1 \,\right\}\right| \\ &= (4c+4) - (2c+2) = 2c + 2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Dermed fås af (6.9), (6.10) og (6.7) at

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il}(\mathbf{H})_{jl} = (2c+2) - (2c+2) = 0.$$

Af punkt 1, 2, 3 og 4 følger at $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = (n+1)\mathbf{I}$.

For at vise at $\mathbf{H}$ er skæv betragtes indgangene i $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$, hvor den (i, j)'te position er givet ved

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)_{ij} = (\mathbf{H})_{ij} + (\mathbf{H}^T)_{ij} = (\mathbf{H})_{ij} + (\mathbf{H})_{ji}. \tag{6.11}$$

Først betragtes diagonalindgangene.

a. $i = j$:
Af (6.4), (6.6) og (6.11) følger at

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)_{ii} = (\mathbf{H})_{ii} + (\mathbf{H})_{ii} = 1 + 1 = 2.$$

b. $1 = i \neq j$:
Første række i $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$. Af (6.4), (6.5) og (6.11) følger at

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)_{1j} = (\mathbf{H})_{1j} + (\mathbf{H})_{j1} = 1 - 1 = 0.$$

c. $1 = j \neq i$:
Første søjle i $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$. Af (6.5), (6.4) og (6.11) følger at

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)_{i1} = (\mathbf{H})_{i1} + (\mathbf{H})_{1i} = -1 + 1 = 0.$$

d. $1 \neq i \neq j \neq 1$:
De resterende indgange i $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$. Idet $\mathbf{B}$ er nabomatrix for en DRT_n følger af definition A.0.6, at

$$(\mathbf{B})_{ij} = 1 \iff (\mathbf{B})_{ji} = 0.$$

Dermed følger af (6.6) at

$$(\mathbf{H})_{ij} = 1 \iff (\mathbf{H})_{ji} = -1.$$

Således fås af (6.11) at

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)_{ij} = (\mathbf{H})_{ij} + (\mathbf{H})_{ji} = 1 - 1 \text{ (eller } -1 + 1) = 0.$$

Af punkt a, b, c og d følger at $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = 2\mathbf{I}$.

$\Leftarrow$: Antag at $\mathbf{H}$ er en skæv Hadamard matrix af orden $n+1$.

Pga lemma 6.2.2 kan vi antage, at alle indgange i første række af $\mathbf{H}$ er $+1$. Dermed følger af definition 6.2.1 at $(\mathbf{H})_{i1} = -1$ for $i = 2, \ldots, (n+1)$ og at $(\mathbf{H})_{ii} = +1$ for $i = 1, \ldots, (n+1)$.

Ved at fjerne række ét og søjle ét i $\mathbf{H}$ konstrueres en $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ af $\mathbf{H}$, hvor position (i, j) i $\mathbf{A}$ for $i, j = 1, \ldots, n$ er givet ved

$$(\mathbf{A})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } (\mathbf{H})_{(i+1)(j+1)} = +1 \text{ og } i \neq j; \\ 0, & \text{hvis } (\mathbf{H})_{(i+1)(j+1)} = -1 \text{ eller } i = j. \end{cases} \tag{6.12}$$

Idet $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = 2\mathbf{I}$ ifølge definition 6.2.1 fås, at

$$(\mathbf{H})_{ij} = -(\mathbf{H}^T)_{ij} = -(\mathbf{H})_{ji} \qquad \text{for } i \neq j. \tag{6.13}$$

Dermed følger af (6.12) og (6.13) at position (i, j) i $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ er givet ved

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{A})_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i \neq j; \\ 0 & \text{hvis } i = j. \end{cases}$$

Heraf følger at $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{J} - \mathbf{I}$; dvs $\mathbf{A}$ er nabomatrix for en T_n (se definition A.0.6) med $n = 4c + 3$. Vi viser at $\mathbf{A}$ er nabomatrix for en *regulær* T_n.

Eftersom $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = (n+1)\mathbf{I}$ ifølge definition 6.1.1 og $(\mathbf{H})_{1j} = +1$ for alle j fås for $i \neq 1$, at

$$0 = (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{i1} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H}^T)_{l1} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H})_{1l} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il}.$$

Dvs hver række i $\mathbf{H}$ (undtagen den første) indeholder $\frac{n+1}{2} = 2c + 2$ indgange lig $+1$ og $\frac{n+1}{2} = 2c + 2$ indgange lig -1. Eftersom $(\mathbf{H})_{ii} = +1$ for alle i fås af (6.12), at antal indgange lig én i hver række i $\mathbf{A}$ præcis er

$$(2c + 2) \underbrace{-1}_{(\mathbf{H})_{ii} = +1} = 2c + 1. \tag{6.14}$$

Bemærk at idet første søjle i $\mathbf{H}$ fjernes, er antal indgange lig nul i hver række i $\mathbf{A}$ ifølge (6.12) givet ved

$$(2c + 2) \underbrace{-1}_{-\text{første søjle}} \underbrace{+1}_{(\mathbf{H})_{ii} = +1 \Leftrightarrow (\mathbf{A})_{ii} = 0} = 2c + 2\,;$$

hvilket sammenholdt med (6.14) er i overensstemmelse med, at $n = 4c+3$.

Af (6.14) følger at $\mathbf{A}$ er nabomatrix for en regulær T_n af valens $\mathrm{od}(\,v\,) = (2c + 1)$ for ethvert punkt v i T_n.

Vi mangler at vise at T_n er dobbelt regulær. Vi ønsker at vise at $\mathrm{od}(v_i, v_j) = c$ for to forskellige punkter v_i, v_j i T_n.

Betragt række i og j i $\mathbf{H}$ med $i < j$. Eftersom indgangene i $\mathbf{H}$ er plus eller minus én, fås fire mulige og forskellige par af indgange på formen $((\mathbf{H})_{il}, (\mathbf{H})_{jl})$. Indgangsparrene samt deres forekomst opstilles i følgende skema

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Forekomst} & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline \text{Række } i & +1 & -1 & +1 & -1 \\ \text{Række } j & +1 & -1 & -1 & +1 \end{array} \tag{6.15}$$

hvor

$$\begin{aligned} \alpha &= \left|\left\{ l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il} = (\mathbf{H})_{jl} = +1 \right\}\right| \\ \beta &= \left|\left\{ l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il} = (\mathbf{H})_{jl} = -1 \right\}\right| \\ \gamma &= \left|\left\{ l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il} = -(\mathbf{H})_{jl} = +1 \right\}\right| \\ \delta &= \left|\left\{ l \;\middle|\; (\mathbf{H})_{il} = -(\mathbf{H})_{jl} = -1 \right\}\right|. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Bemærk at α ifølge (6.12) er antal punkter domineret af v_i og v_j i en T_n med nabomatrix $\mathbf{A}$; dvs $\alpha = \mathrm{od}(v_i, v_j)$ for $i < j$.

Idet $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = n\mathbf{I}$ ifølge definition 6.1.1 og $(\mathbf{H})_{1r} = +1$ for alle r fås for $r = i, j$ $(i < j)$ at

$$0 = (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{1r} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{1l} (\mathbf{H}^T)_{lr} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{1l} (\mathbf{H})_{rl} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{rl}. \tag{6.17}$$

Sammenhold ovenstående med (6.15) hvormed fås ($\frac{n+1}{2} = 2c + 2$) at

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2c + 2 = \beta + \gamma = \alpha + \delta \tag{6.18}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \beta \quad \text{og} \quad \gamma = \delta. \tag{6.19}$$

Bemærk at (6.19) ligeledes følger af (6.17) og (6.15). Da $i < j$ er en anden konsekvens af $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = n\mathbf{I}$, at

$$0 = (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H}^T)_{lj} = \sum_{l=1}^{n+1} (\mathbf{H})_{il} (\mathbf{H})_{jl}.$$

Sammenhold ovenstående med (6.15) hvormed følger at

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Indsæt (6.19) i ovenstående hvoraf fås at

$$\alpha = \gamma \quad \text{og} \quad \beta = \delta.$$

Indsæt ovenstående i (6.18) hvormed fås at

$$2\alpha = 2c + 2 \iff \alpha = c + 1.$$

Da $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = 2\mathbf{I}$ ifølge definition 6.2.1 fås for $i < j$ at

$$0 = (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)_{ij} = (\mathbf{H})_{ij} + (\mathbf{H}^T)_{ij} = (\mathbf{H})_{ij} + (\mathbf{H})_{ji}.$$

Dermed har $(\mathbf{H})_{ij}$ og $(\mathbf{H})_{ji}$ modsat fortegn for $i < j$, og enten er $(\mathbf{H})_{ij}$ eller $(\mathbf{H})_{ji}$ lig $+1$. Dvs blandt de $c+1$ indgangspar talt af α gælder ifølge (6.16), at enten $l = i$ eller $l = j$ forekommer (men *ikke* dem begge).

Antag W.L.O.G at $l = i$ forekommer blandt de $c+1$ indgangspar talt af α. Dermed findes ifølge (6.16) præcis ét indgangspar $((\mathbf{H})_{ii}, (\mathbf{H})_{ji})$, blandt de $c+1$ indgangspar talt af α, hvor den ene koordinat $(\mathbf{H})_{ii}$ er en diagonalindgang. Så følger af (6.16) og (6.12) at der for præcis $\alpha - 1 = c$ søjler l gælder, at

$$(\mathbf{A})_{(i-1)l} = (\mathbf{A})_{(j-1)l} = +1.$$

Dvs ethvert par af rækker i, j i $\mathbf{A}$ indeholder præcis c ét-taller i samme søjle. Dermed er $\mathbf{A}$ nabomatrix for en DRT_n med $\mathrm{od}(\,v_i, v_j\,) = c$ for ethvert par af forskellige $(i < j)$ punkter v_i, v_j i DRT_n.

■

Således kan vi give det ønskede resultat.

Sætning 6.3.2
Der eksisterer en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG $\mathcal{F}$ med $t = 0$, hvis $n+1 = 2^l b_1 \cdots b_m$, hvor hvert b_i er på formen $p^r + 1 \equiv 0 \pmod 4$, p et primtal.

Bevis:
I beviset for sætning 4.1.3 fandt vi, at hvis en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG $\mathcal{F}$ har $t = 0$, er $\mathcal{F}$ en DRT_n med

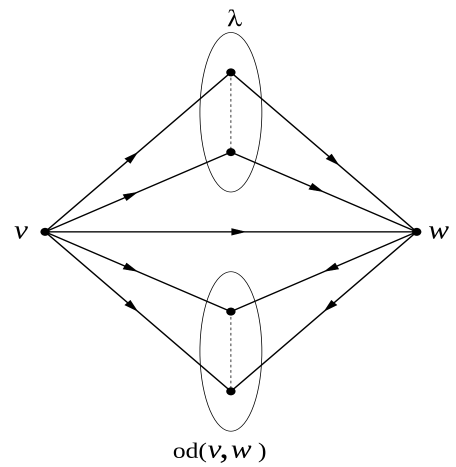
$$\begin{aligned} \mathrm{od}(\,v\,) &= 2\mu - 1 \quad \text{for ethvert punkt } v \text{ i } DRT_n; \\ \mathrm{od}(\,v, w\,) &= \mu - 1 \quad \text{for ethvert par af forskellige punkter } v, w \text{ i } DRT_n; \\ n &= 4\mu - 1. \end{aligned}$$

Omvendt er en DRT_n med $n = 4\mu - 1$ ifølge sætning A.0.11 $(c = \mu - 1)$ ækvivalent med en HT_n med $\tau(\,e\,) = \mu$. Lad v, w være to vilkårlige punkter i DRT_n med $v \to w$. Dermed er DRT_n ifølge lemma A.0.9 og definition A.0.8 en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med (se figur 6.2)

$$\begin{aligned} n &= 4\mu - 1; \\ k &= \mathrm{od}(\,v\,) = 2\mu - 1; \\ \lambda &= \mathrm{od}(\,v\,) - \mathrm{od}(\,v, w\,) - 1 = (2\mu - 1) - (\mu - 1) - 1 = \mu - 1; \\ \mu &= \tau(\,e\,) = \mu; \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Bemærk at $t = 0$ følger af definition A.0.6.

Dvs at en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med $t = 0$ er ækvivalent med en DRT_n med $n = 4\mu - 1$.



Figur 6.2: Fire typer retningsbestemte kanter

Så følger af sætning 6.3.1 ($c = \mu - 1$) at der eksisterer en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med $t = 0$ hvis og kun hvis, der eksisterer en skæv Hadamard matrix af orden $n + 1 = 4\mu$.

Nu følger det ønskede resultat af lemma 6.2.4. ■

Kapitel 7

Eksistens og entydighed af en $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG

I kapitel 4 viste vi, at der ikke eksisterer en RSRG af primtalsorden. I det efterfølgende kapitel 5 konstruerede vi to familier af RSRG beskrevet i hhv. sætning 5.2.1 og sætning 5.2.3. Ved hjælp af konstruktionen i sætning 5.2.1 vises i dette kapitel, at der for ethvert heltal s eksisterer en entydig $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG $\mathcal{F}$.

Yderligere vises at hvis nabomatricen $\mathbf{B}$ for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG er højest tre, så er parametersættet enten $(6s, 2s, 0, s, s)$ eller $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$.

7.1 Rang af nabomatricen

Lad $\mathbf{B}$ være nabomatrix for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG og lad rangen af $\mathbf{B}$ være r. Lad $\mathbf{B}'$ være den $r \times n$ delmatrix af $\mathbf{B}$, som består af r lineært uafhængige rækker i $\mathbf{B}$. Så har $\mathbf{B}'$ samme rækkerum som $\mathbf{B}$. Eftersom $\boldsymbol{j}_n$ ifølge (4.2) er indeholdt i $\mathbf{B}$'s rækkerum, er $\boldsymbol{j}_n$ således indeholdt i rækkerummet af $\mathbf{B}'$. For at udtale sig om parametrene til en RSRG ud fra kendskab til rangen af nabomatricen $\mathbf{B}$, er det nødvendigt at analysere delmatricen $\mathbf{B}'$.

For ethvert k betegner $\boldsymbol{j}_k$ vektoren bestående af k ét-taller. En matrix med indgange lig én eller nul skrives som en $\{0, 1\}$-matrix.

Lemma 7.1.1 *Lad $\mathbf{C}$ være en $m \times n$ $\{0, 1\}$-matrix med konstant rækkesum k og $\boldsymbol{j}_n$ indeholdt i rækkerummet. Så gælder at*

1. *hvis $\boldsymbol{j}_m$ er en søjle i $\mathbf{C}$, så er $n = k$;*
2. *$\mathbf{C}$ har ingen nul-søjler;*

Bevis:

ad. 1 Lad

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m^T \end{bmatrix};$$

dvs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ udspænder $\mathbf{C}$'s rækkerum hvor $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ for $i = 1, \ldots, m$. Da $\boldsymbol{j}_n$ er i $\mathbf{C}$'s rækkerum eksisterer $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, så

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{v}_i^T = \boldsymbol{j}_n^T. \tag{7.1}$$

Eftersom hver række i $\mathbf{C}$ har konstant rækkesum k fås af (7.1), at

$$n = \boldsymbol{j}_n^T \boldsymbol{j}_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{j}_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i k = k \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.$$

Dvs

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \frac{n}{k}. \tag{7.2}$$

Antag W.L.O.G at den j'te søjle i $\mathbf{C}$ er $\boldsymbol{j}_m$; dvs $(\boldsymbol{v}_i^T)_j = 1$ for $i = 1, \ldots, m$. Af (7.1) følger så at

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\boldsymbol{v}_i^T)_j = 1.$$

Sammenhold ovenstående med (7.2) hvormed det ønskede resultat følger.

ad. 2 Af (7.1) følger at $\mathbf{C}$ ikke kan have en nul-søjle.

■

Ved hjælp af foregående lemma kan vi, ud fra kendskab til antal rækker i delmatricen $\mathbf{B}'$ af nabomatricen $\mathbf{B}$ til en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG, give en liste af mulige værdier for $\frac{k}{n}$.

Lemma 7.1.2 *Lad $\mathbf{C}$ være en $m \times n$ $\{0, 1\}$-matrix med konstant rækkesum k og $\boldsymbol{j}_n$ indeholdt i rækkerummet. Så gælder at*

1. *hvis $m = 1$, så er $k = n$;*
2. *hvis $m = 2$, så er $\frac{k}{n} \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$;*
3. *hvis $m = 3$, så er $\frac{k}{n} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$;*
   - ⋆ *hvis $k = \frac{1}{2}n$, så er $\boldsymbol{j}_n$ summen af to rækker i $\mathbf{C}$.*

Bevis:
Lad $\boldsymbol{v}_1^T, \ldots, \boldsymbol{v}_m^T$ være rækkerne i $\mathbf{C}$, hvor $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ for $i = 1, \ldots, m$. Da $\boldsymbol{j}_n$ er indeholdt i rækkerummet er (7.1) opfyldt for $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.

Antag at $\alpha_l = 0$ for et $l \in \{1, \ldots, m\}$. Så kan række l i $\mathbf{C}$ fjernes hvormed vi får en $(m-1) \times n$ $\{0,1\}$-matrix med konstant rækkesum k. Dvs at vise sætningen for en $m \times n$ $\{0,1\}$-matrix hvor $\alpha_l = 0$ for et $l \in \{1, \ldots, m\}$ er ækvivalent med at vise sætningen for en $(m-1) \times n$ $\{0,1\}$-matrix med $\alpha_i \neq 0$ for alle i.

Antag derfor at $\alpha_i \neq 0$ for $i = 1, \ldots, m$.

ad. 1 Hvis $m = 1$ har $\mathbf{C}$ én række $\boldsymbol{v}_1^T$. Da $\mathbf{C}$ er en $\{0,1\}$-matrix, og $\boldsymbol{j}_n^T$ er antaget at tilhøre $\mathbf{C}$'s rækkerum gælder, at $\boldsymbol{v}_1^T = \boldsymbol{j}_n^T$. Dermed følger at $k = n$.

ad. 2 Hvis $m = 2$ har $\mathbf{C}$ to rækker. Af punkt 2 i lemma 7.1.1 følger, at de mulige søjler i $\mathbf{C}$ er

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lad a, b_1 og b_2 være antal søjler af hhv. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1$ og $\boldsymbol{y}_2$ i $\mathbf{C}$. Hvis $a > 0$ følger af punkt 1 i lemma 7.1.1, at $k = n \iff \frac{k}{n} = 1$.

Antag at $a = 0$. Idet søjlerne $\boldsymbol{y}_1$ og $\boldsymbol{y}_2$ har indgange lig én på forskellige positioner og hver række i $\mathbf{C}$ har konstant rækkesum k følger, at både $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ forekommer præcis k gange i $\mathbf{C}$. Dvs $k = b_1 = b_2$ og dermed er antal søjler i $\mathbf{C}$ givet ved

$$n = b_1 + b_2 = 2k \Longrightarrow \frac{k}{n} = \frac{1}{2}.$$

ad. 3 Hvis $m = 3$ har $\mathbf{C}$ tre rækker. Igen får vi af punkt 2 i lemma 7.1.1, at nul-søjlen ikke forekommer i $\mathbf{C}$. Vi opstiller de mulige søjler i $\mathbf{C}$ samt forekomsten af disse i et skema.

a	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1

(7.3)

Hvis $a > 0$ fås af punkt 1 i lemma 7.1.1, at $\frac{k}{n} = 1$.

Antag at $a = 0$ og W.L.O.G at $b_1 > 0$ (alternativt b_2 eller b_3). Så følger af (7.1) og (7.3), at $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Eftersom $\alpha_i \neq 0$ for alle i fås, at $\alpha_1 \neq 1$ og $\alpha_2 \neq 1$. Dermed er $c_1 = c_2 = 0$ pga (7.1) og (7.3).

Hvis $c_3 > 0$ er $\alpha_3 = 1$ hvormed $b_2 = b_3 = 0$ ifølge (7.1) og (7.3). Idet rækkesummen i $\mathbf{C}$ er k fås, at $b_1 = c_3 = k$ og dermed er antal søjler givet ved

$$n = b_1 + c_3 = 2k \Longrightarrow \frac{k}{n} = \frac{1}{2}.$$

I dette tilfælde (punkt $\star$ i lemmaet) ses af (7.3), at $\boldsymbol{j}_n$ er summen af række ét og tre samt række to og tre.

Eftersom $\mathbf{C}$ har konstant rækkesum k følger af (7.3), at hvis $c_3 = 0$ er $b_2, b_3 > 0$ (bemærk at vi ikke kan nøjes med kun at $b_2 > 0$ eller $b_3 > 0$, da rækkesummen er konstant for *hver* række). Dvs $b_1 + b_2 = k$, $b_1 + b_3 = k$, $b_2 + b_3 = k$. Således fås

$$2n = 2(b_1 + b_2 + b_3) = (b_1 + b_2) + (b_1 + b_3) + (b_2 + b_3) = 3k$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{k}{n} = \frac{2}{3}.$$

Antag nu at $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Så ses af (7.3) at $c_1 = c_2 = c_3 = k$, hvormed antal søjler i $\mathbf{C}$ er givet ved

$$n = c_1 + c_2 + c_3 = 3k \Longrightarrow \frac{k}{n} = \frac{1}{3}.$$

$\blacksquare$

Kendes rangen af nabomatricen for en RSRG gør lemma 7.1.2 det muligt at bestemme de mulige parametre til denne.

Sætning 7.1.3
Lad Γ være en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med nabomatrix $\mathbf{B}$ og rank$\{\,\mathbf{B}\,\} \leq 3$. Så er rank$\{\,\mathbf{B}\,\} = 3$, og parametrene er for $s \in \mathbb{N}$ givet ved

$$(n, k; \lambda, \mu, t) = (6s, 2s; 0, s, s) \quad \textit{eller} \quad (n, k; \lambda, \mu, t) = (8s, 4s; s, 3s, 3s).$$

Bevis:
Af (4.2) følger at $\mathbf{B}$ har konstant rækkesum (og søjlesum) k. Idet hver søjle (og række) i $\mathbf{B}$ indeholder k ét-taller fås, at summen af rækkerne i $\mathbf{B}$ er $k\boldsymbol{j}_n$. Dvs $\boldsymbol{j}_n$ er indeholdt i $\mathbf{B}$'s rækkerum. Lad rank$\{\,\mathbf{B}\,\} = r$ og lad $\boldsymbol{v}_1^T, \ldots, \boldsymbol{v}_r^T$ være r rækker i $\mathbf{B}$, som udgør en basis for $\mathbf{B}$'s rækkerum. Så er $r \times n$ matricen

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^T \end{bmatrix}$$

en $\{0, 1\}$-matrix, som opfylder betingelserne i lemma 7.1.1 og lemma 7.1.2. Der gælder at rank$\{\,\mathbf{B}\,\} = $ rank$\{\,\mathbf{B}'\,\} = r$.

Af definition 4.0.14 følger at $k \leq n - 1$ for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG. Dvs tilfældet $n = k$ er umuligt hvormed det følger af punkt 1 i lemma 7.1.2, at

$$\text{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = \text{rank}\{\,\mathbf{B}'\,\} \geq 2.$$

Antag at rank$\{\,\mathbf{B}\,\} = 2$. Så fås [Lay, 1997, Rank Theorem] at

$$\begin{aligned} \text{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} + \dim\{\,\text{null}\{\,\mathbf{B}\,\}\,\} &= n \\ \dim\{\,\text{null}\{\,\mathbf{B}\,\}\,\} &= n - 2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Idet $\operatorname{null}\{\,\mathbf{B}\,\} = \left\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{x} \,\right\}$ følger af (7.4), at nul er egenværdi til $\mathbf{B}$ med multiplicitet $n-2$. I beviset for sætning 4.1.3 fandt vi egenværdierne k, τ og σ for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG. En af disse egenværdier er nul. Hvis $k = 0$ er $\mathit{\Gamma}$ en tom graf (komplementære til en komplet), som ikke betragtes. Dvs at enten τ eller σ er nul. Af (4.3) og (4.4) følger at

$$\tau = \frac{(\lambda-\mu)+\sqrt{\Delta}}{2} > \frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{\Delta}}{2} = \sigma. \tag{7.5}$$

Eftersom $k + m_\tau \tau + m_\sigma \sigma = 0$ og $k > 0$ følger, at hvis $\sigma = 0$, er $\tau < 0$. Sammenhold dette med (7.5) og vi får en modstrid. Dvs at $\tau = 0$. Så fås af (4.3) at

$$\sqrt{\Delta} = \mu - \lambda. \tag{7.6}$$

Dermed følger af punkt 2 i sætning 4.1.3 at

$$\begin{aligned}
(\mu-\lambda)^2 + 4(t-\mu) &= \Delta \\
(\mu-\lambda)^2 + 4(t-\mu) &= (\mu-\lambda)^2 \\
4(t-\mu) &= 0 \\
t-\mu &= 0 \iff t = \mu.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Idet $\tau = 0$ fås af proposition B.2.4 og (4.7) at

$$\operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = 1 + m_\sigma = 1 + \frac{(n-1)\tau + k}{\tau - \sigma} = 1 + \frac{k}{\sqrt{\Delta}}.$$

Da $\operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = 2$ fås af ovenstående, at

$$k = \sqrt{\Delta}. \tag{7.8}$$

Eftersom $\mu \leq k$ ifølge sætning 4.1.5 fås af (7.8) og (7.6), at

$$\mu \leq \mu - \lambda \iff \lambda = 0.$$

Sammenhold ovenstående med (7.6) og (7.8) hvoraf følger at $k = \mu$. Dermed fås af (7.7) at

$$t = \mu = k. \tag{7.9}$$

Dvs $\mathit{\Gamma}$ er en (ikke-retningsbestemt) $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf. Idet $\operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = \operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}'\,\} = 2$ fås af punkt 2 i lemma 7.1.2, at $n = 2k$. Sammenhold dette med (7.9) hvormed følger af korollar 1.0.5 at $\mathit{\Gamma}$ er en komplet todelt graf med $k = \frac{1}{2}n$ punkter i hver punktklasse. En sådan graf betragtes ikke i sætning 7.1.3 hvormed $\operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} > 2$.

Antag at $\operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = 3$. Så følger at nul er egenværdi med multiplicitet [Lay, 1997, Rank Theorem]

$$\dim\{\,\operatorname{null}\{\,\mathbf{B}\,\}\,\} = n - \operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = n - 3.$$

Ved samme argumenter som tidligere (rank$\{\,\mathbf{B}\,\} = 2$) følger at $\tau = 0$ og, at

$$\operatorname{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} = 1 + \frac{k}{\sqrt{\Delta}} = 3 \iff k = 2\sqrt{\Delta}; \tag{7.10}$$

$$\sqrt{\Delta} = \mu - \lambda; \tag{7.11}$$

$$t = \mu. \tag{7.12}$$

Ved ovenstående ligninger og punkt 1 i sætning 4.1.3 fås at

$$\begin{aligned} k(k + (\mu - \lambda)) &= t + (n-1)\mu \\ k(2\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}) &= \mu + (n-1)\mu \\ 3\sqrt{\Delta} &= \frac{n}{k}\mu. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Fra punkt 3 i lemma 7.1.2 har vi, at rank$\{\,\mathbf{B}\,\} =$ rank$\{\,\mathbf{B}'\,\} = 3$ medfører, at $\frac{k}{n} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Vi undersøger hvert tilfælde.

<u>$n = k$:</u>

Idet $k \leq n - 1$ for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG er dette tilfælde ikke muligt.

<u>$n = 2k$:</u>

Hvis $n = 2k$ følger af (7.13), at

$$3\sqrt{\Delta} = 2\mu. \tag{7.14}$$

Dermed fås af (7.11) at

$$3\sqrt{\Delta} = 2\mu = 2(\sqrt{\Delta} + \lambda) \iff \sqrt{\Delta} = 2\lambda, \tag{7.15}$$

for $\lambda \in \mathbb{N}$. Af ovenstående samt (7.12) og (7.14) fås at

$$t = \mu = \frac{3}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{3}{2}2\lambda = 3\lambda.$$

Af (7.10) og (7.15) fås at

$$k = 2\sqrt{\Delta} = 4\lambda.$$

Idet $n = 2k$ fås af ovenstående, at $n = 8\lambda$.

Dvs $\mathcal{F}$ er en $(8\lambda, 4\lambda; \lambda, 3\lambda, 3\lambda)$-RSRG for $\lambda \in \mathbb{N}$.

<u>$n = 3k$:</u>

Hvis $n = 3k$ følger af (7.13), at $3\sqrt{\Delta} = 3\mu \iff \sqrt{\Delta} = \mu$. Dermed fås af (7.12) at $t = \mu = \sqrt{\Delta}$. Af (7.11) følger så at $\lambda = \mu - \sqrt{\Delta} = 0$. (7.10) giver at $k = 2\sqrt{\Delta}$ hvormed $n = 3k = 6\sqrt{\Delta}$.

Dvs $\mathcal{F}$ er en $(6\sqrt{\Delta}, 2\sqrt{\Delta}; 0, \sqrt{\Delta}, \sqrt{\Delta})$-RSRG for $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{N}$ ifølge sætning 4.1.3.

$n = \frac{3}{2}k$:

Hvis $n = \frac{3}{2}k$ følger af (7.13), at $3\sqrt{\Delta} = \frac{3}{2}\mu \iff 2\sqrt{\Delta} = \mu$. Dermed giver (7.12) at $t = \mu = 2\sqrt{\Delta}$ og (7.10) at $k = 2\sqrt{\Delta}$. Heraf fås at $t = \mu = k$ hvormed $\mathcal{F}$ er en ikke-retningsbestemt stærkt regulær graf. Yderligere følger af korollar 1.0.5, at $\mathcal{F}$ for ethvert lige heltal k ($n = \frac{3}{2}k$) er en ikke-retningsbestemt komplet 3-delt graf med $\frac{1}{2}k = \frac{1}{3}n$ punkter i hver punktklasse. En sådan graf betragtes ikke i sætning 7.1.3.

■

Dvs en nabomatrix for en RSRG med rang højest tre giver anledning til to forskellige parametersæt. Men findes der grafer til hvert af disse parametersæt, og er graferne til samme parametersæt i givet fald forskellige? Vi undersøger eksistens og entydighed af den $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG.

For at vise entydigheden af den $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG $\mathcal{F}$, er det nødvendigt at kende rangen af nabomatricen $\mathbf{B}$ til $\mathcal{F}$.

Lemma 7.1.4 *Lad $\mathcal{F}$ være en $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG med nabomatrix $\mathbf{B}$ og egenværdier k, τ og σ. Så er rank$\{\mathbf{B}\} = 3$.*

Bevis:
Idet $t = 3s = \mu$ fås af punkt 2 i sætning 4.1.3, at

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(t - \mu)} = \mu - \lambda.$$

Dermed fås af (4.3) at

$$\tau = \frac{(\lambda - \mu) + \sqrt{\Delta}}{2} = 0.$$

Så følger af (4.3),(4.4),(4.7) og proposition B.2.4 at

$$\text{rank}\{\mathbf{B}\} = 1 + \frac{(n-1)\tau + k}{\tau - \sigma} = 1 + \frac{k}{\sqrt{\Delta}} = 1 + \frac{k}{\mu - \lambda} = 1 + \frac{4s}{2s} = 3.$$

■

7.2 Eksistens og entydighed

I bestræbelserne på at vise entydigheden af den $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG, vil det vise sig nødvendigt at kende resultatet for $s = 1$.

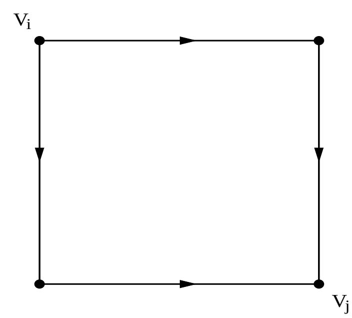
Proposition 7.2.1 *Der eksisterer en entydig $(8, 4; 1, 3, 3)$-RSRG.*

Bevis:
Lad $\mathcal{F}$ være en $(8, 4; 1, 3, 3)$-RSRG. Komplementærgrafen $\overline{\mathcal{F}}$ til $\mathcal{F}$ er ifølge lemma 4.1.1 en $(8, 3; 1, 1, 2)$-RSRG. Vi viser at $\overline{\mathcal{F}}$ er entydig hvormed følger, at $\mathcal{F}$ er entydig.

Først viser vi, at

$\star$ enhver firkant i $\overline{\mathcal{F}}$ har mindst ét par af modsatstående sider, som er modsatrettede retningsbestemte kanter.

Antag at $\star$ ikke gælder. Så vil $\mathcal{F}$ indeholde en firkant, hvori der findes to diagonalt modsatte punkter v_i og v_j således, at der er to forskellige veje fra v_i til v_j (se figur 7.1). Dette er ifølge definition 4.0.14 i modstrid med, at $\mu = 1$.



Figur 7.1: Firkant uden et par modsatstående sider, som er modsatrettede retningsbestemte kanter

Lad $\overline{\mathcal{F}}'$ betegne grafen der fås, ved at fjerne alle retningsbestemte kanter fra $\overline{\mathcal{F}}$. Eftersom hvert punkt i $\overline{\mathcal{F}}'$ har lige grad følger af [Chartrand and Lesniak, 1996, Eulers Theorem 4.1], at $\overline{\mathcal{F}}'$ består af en mængde disjunkte kredse. Vi viser at $\overline{\mathcal{F}}'$ er en 8-kreds.

Af $\star$ følger at $\overline{\mathcal{F}}'$ ikke indeholder en 4-kreds.

Antag at $\overline{\mathcal{F}}'$ indeholder en 3-kreds gennem punkterne v_i, v_j og v_k. Da $k = 3$ og $t = 2$, går der én retningsbestemt ind i og ud af hvert af punkterne v_i, v_j og v_k. Punkterne i den anden ende af hver af disse retningsbestemte kanter må nødvendigvis være forskellige, idet vi ellers får en modstrid ved $\star$. Dvs der er seks punkter fraregnet v_i, v_j og v_k. Således består $\overline{\mathcal{F}}'$ af ni punkter, hvilket er en modstrid ($n = 8$). Dvs $\overline{\mathcal{F}}'$ indeholder ikke en 3-kreds.

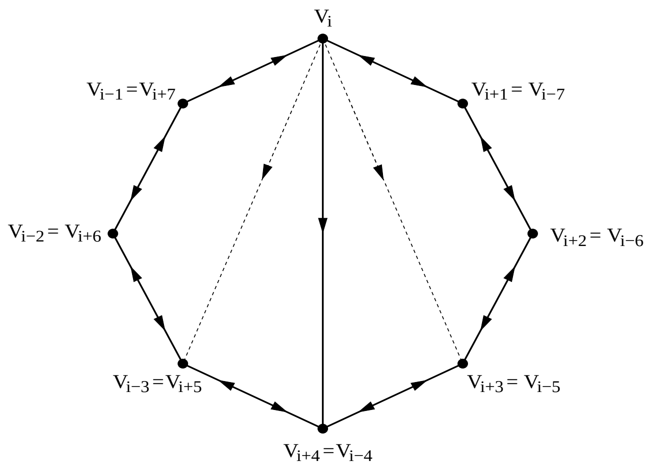
Eftersom $n = 8$ og $t = 2$, er de eneste mulige disjunkte kredse i $\overline{\mathcal{F}}'$ en 3- og en 5-kreds eller to 4-kredse eller en 8-kreds. Da vi lige har vist, at $\overline{\mathcal{F}}'$ ikke indeholder 3- og 4-kredse gælder, at $\overline{\mathcal{F}}'$ er en 8-kreds. Vi undersøger de retningsbestemte kanter i $\overline{\mathcal{F}}$.

Navngiv punkterne i 8-kredsen efterfølgende med $v_1, \ldots, v_8$, hvor indicierne betragtes modulo otte.

1. Vi kan ikke have en retningsbestemt kant fra v_i til v_{i+1} eller v_{i-1}, da en sådan kant vil være sammenfaldene med en ikke-retningsbestemt kant.

2. Der kan ikke være en kant fra v_i til v_{i+3} eller v_{i-3}, idet det ifølge $\star$ vil være en modstrid (se figur 7.2).

3. Antag at $v_i \to v_{i+4}$. Så er $v_{i+4} \to v_i$ umuligt, da vi således får en ikke-retningsbestemt kant mellem v_i og v_{i+4}. Der gælder at $v_{i+4} \to v_{i+6}$, $v_{i+4} \to v_{i+2}$, $v_{i+4} \to v_{i+7}$ og $v_{i+4} \to v_{i+1}$ alle er i modstrid med $\star$ (se figur 7.2).

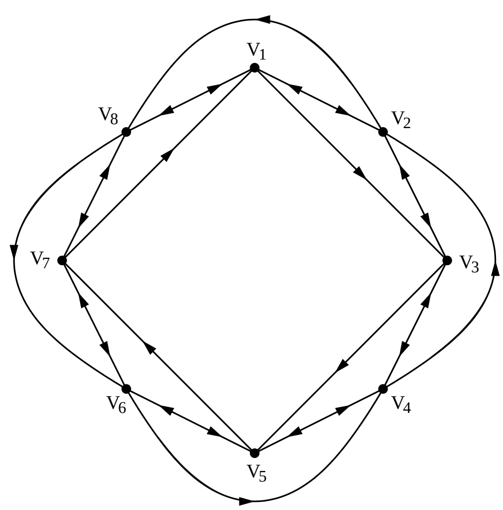


Figur 7.2: 8-kredsen i $\overline{F}$

Dvs at der ikke går en retningsbestemt kant fra v_{i+4}, hvilket er en modstrid ($k = 3$). Dermed gælder at $v_i \nrightarrow v_{i+4}$.

Af punkt 1, 2 og 3 følger at $v_i \to v_{i+2}$ eller $v_i \to v_{i-2}$.

Antag at $v_1 \to v_3$ (ved modsat navngivning af punkter i 8-kredsen fås $v_1 \to v_7$). Idet vejen langs ikke-retningsbestemte kanter fra v_1 til både v_3 og v_7 er to, er det ligegyldigt (mht. udseendet af $\overline{F}$) hvilket af de to punkter v_3 og v_7, der vælges som ud-nabo til v_1 (det handler blot om i hvilken retning navngivningen af punkterne startes). For ikke at få ekstra ikke-retningsbestemte kanter medfører dette valg, at $v_1 \to v_3 \to v_5 \to v_7 \to v_1$. Så er $v_2 \nrightarrow v_4$ pga $\star$, hvormed $v_2 \to v_8 \to v_6 \to v_4 \to v_2$. Dette giver grafen i figur 7.3, som er entydig op til isomorfi. ■



Figur 7.3: Den entydige $(8, 3; 1, 1, 2)$-RSRG

Sætning 7.2.2
Der eksisterer en entydig $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$*-RSRG for ethvert* $s \in \mathbb{N}$.

Bevis:
Lad $\mathcal{F}$ være en $(n = 8s, k = 4s; \lambda = s, \mu = 3s, t = 3s)$-RSRG, $s \in \mathbb{N}$, med nabomatrix $\mathbf{B}$ og punktmængde $V\mathcal{F}$. Ifølge lemma 7.1.4 er $\text{rank}\{\mathbf{B}\} = 3$. Lad $\boldsymbol{v}_1^T, \boldsymbol{v}_2^T$ og $\boldsymbol{v}_3^T$ være tre lineært uafhængige rækker i $\mathbf{B}$ og lad

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \boldsymbol{v}_3^T \end{bmatrix},$$

for $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, 3$. Eftersom $\boldsymbol{j}_n$ ifølge (4.2) tilhører $\mathbf{B}$'s rækkerum og $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ er en basis for dette gælder, at $\boldsymbol{j}_n$ er i rækkerummet af $\mathbf{B}'$. Yderligere er $\mathbf{B}'$ en $\{0,1\}$-matrix med konstant rækkesum k. Dvs $\mathbf{B}'$ opfylder betingelserne i lemma 7.1.1 og lemma 7.1.2. Af punkt 2 i lemma 7.1.1 fås at $\mathbf{B}'$ ikke har en nul-søjle. Eftersom $n = 2k$ følger af punkt 1 i lemma 7.1.1, at $\boldsymbol{j}_3$ ikke er en søjle i $\mathbf{B}'$ og af punkt 3$\star$ i sætning 7.1.2, at summen af to af rækkerne i $\mathbf{B}'$ er $\boldsymbol{j}_n$. De mulige søjler i $\mathbf{B}'$ er givet ved (7.3) (fraregnet $\boldsymbol{j}_3$). Vi vælger søjlerne i $\mathbf{B}'$, så summen af de to første rækker giver $\boldsymbol{j}_n$. Dvs typen af søjler samt forekomsten af disse i $\mathbf{B}'$ ifølge (7.3) er givet ved

$$\begin{array}{c|cccc} & a & (k-a) & (k-a) & a \\ \hline \boldsymbol{v}_1^T & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{v}_2^T & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{v}_3^T & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \tag{7.16}$$

for et $a \in \mathbb{N}$, $0 < a < k$. Bemærk at $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^{2a+2(k-a)} = \mathbb{R}^n$ for $i = 1, 2, 3$. Det ses af (7.16) at den eneste $\{0,1\}$-vektor med k ét-taller i rækkerummet af $\mathbf{B}'$ forskellig fra $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_3$, er $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$. Idet $\mathbf{B}$ har konstant søjlesum k ifølge (4.2) følger af (7.16), at hhv. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ og $\boldsymbol{v}_4$ forekommer mindst én gang som række i $\mathbf{B}$. Ligeledes findes kun fire forskellige type søjler i $\mathbf{B}$; nemlig de søjler der fremkommer ved at bruge $\boldsymbol{v}_1^T, \boldsymbol{v}_2^T, \boldsymbol{v}_3^T$ og $\boldsymbol{v}_4^T$ som rækker. Eftersom søjlesummen af $\mathbf{B}$ er k fås af (7.16), at hvis forekomsten af række $\boldsymbol{v}_1^T$ er b, er forekomsten af hhv. række $\boldsymbol{v}_2^T, \boldsymbol{v}_3^T, \boldsymbol{v}_4^T$ givet ved hhv. $b, k-b, k-b$ for $b \in \mathbb{N}$, $0 < b < k$. Lad $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ betegne de fire forskellige søjler i $\mathbf{B}$, så opstiller vi for overblikkets skyld de forskellige rækker og søjler samt forekomsten af disse i et skema.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 & \text{Forekomst} \\ \hline \boldsymbol{v}_1^T & 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ \boldsymbol{v}_2^T & 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ \boldsymbol{v}_3^T & 1 & 0 & 1 & 0 & (k-b) \\ \boldsymbol{v}_4^T & 0 & 1 & 0 & 1 & (k-b) \\ \hline \text{Forekomst} & a & (k-a) & a & (k-a) & \end{array} \tag{7.17}$$

Vi inddeler $V\mathcal{F}$ på to forskellige måder.

1. Inddel $V\mathcal{F}$ efter ækvivalente søjler i $\mathbf{B}$ (søjle j repræsenterer punktet v_j, $j = 1, \ldots, n$). Dvs to punkter er i samme mængde hvis og kun hvis søjlerne, som repræsenterer dem, er ens. Således fås to mængder hver med $(k-a)$ punkter og to mængder hver med a punkter. Af (7.17) ses at to punkter i $V\mathcal{F}$ tilhører samme mængde hvis og kun hvis, de har sammen mængde af ind-naboer ($u \in V\mathcal{F}$ er ind-nabo til $v \in V\mathcal{F}$ hvis og kun hvis $u \to v$). Dermed findes der ikke en retningsbestemt kant (og dermed heller ikke en ikke-retningsbestemt kant) mellem to punkter i samme mængde. Vi siger, at to punkter i samme mængde ikke er *naboer*.

2. Tilsvarende kan $V\mathcal{F}$ inddeles efter ækvivalente rækker i $\mathbf{B}$ således, at to punkter befinder sig i samme mængde hvis og kun hvis, de har samme mængde af ud-naboer (v er ud-nabo til u hvis og kun hvis $u \to v$). Dette giver to mængder hver med b punkter og to mængder hver med $(k-b)$ punkter.

Lad W være én af de fire mængder beskrevet i inddeling 1; antag W.L.O.G at

$$W = \{\underbrace{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_1}_{a}\}.$$

Inddel W i de fire delmængder $W_1, \ldots, W_4$ beskrevet ved inddeling 2 således, at punkter i W med samme mængde ud-naboer er i samme delmængde. Lad W_i være delmængden inddelt efter $\boldsymbol{v}_i^T$ for $i = 1, \ldots, 4$. Lad x og y være to vilkårlige og forskellige punkter i W. Punktet x hhv. y er indeholdt i én af de fire delmængder $W_1, \ldots, W_4$. Eftersom x hhv. y ifølge inddeling 1 ikke er nabo med et punkt i W, og $\boldsymbol{u}_1$ indeholder to ét-taller følger af (7.17), at hverken x eller y er indeholdt i W_1 eller W_3. Idet x og y i W er valgt vilkårligt følger, at W højest kan inddeles i to forskellige delmængder W_2 og W_4.

Dermed kan vi inddele $V\mathcal{F}$ i højest otte mængder $V\mathcal{F}_1, \ldots, V\mathcal{F}_8$ således, at ethvert par af punkter tilhører samme mængde hvis og kun hvis de har samme mængde af ind- og ud-naboer.

Betragt en mængde $V\mathcal{F}_i$ og lad $x \in V\mathcal{F}_i$ for $i = 1, \ldots, 8$. Lad $y \in V\mathcal{F}$ så $y \to x$ men $x \not\to y$. Eftersom ethvert punkt i $V\mathcal{F}$ har udgrad $k = \frac{1}{2}n$ gælder, at x og y har en fælles ud-nabo z. For ethvert punkt $x' \in V\mathcal{F}_i$ forskellig fra $x \in V\mathcal{F}_i$ gælder, at $y \to x' \to z$ idet x og x' har samme mængde af ind- og ud-naboer. Dermed følger af definition 4.0.14 at $|V\mathcal{F}_i| \leq \lambda = s$. Da $n = 8s$ fås at $|V\mathcal{F}_1| = \cdots = |V\mathcal{F}_8| = s$.

Lad $\mathcal{F}'$ være grafen opnået ved at sammentrække mængden $V\mathcal{F}_i$ til et enkelt punkt for hvert $i = 1, \ldots, 8$. Så er $\mathcal{F}'$ ifølge proposition 7.2.1 den entydige $(8, 4; 1, 3, 3)$-RSRG hvormed, $\mathcal{F}$ er den entydige $(8s, 4s; s, 3s, 3s)$-RSRG konstrueret af $\mathcal{F}'$ ved brug af sætning 5.2.1. ∎

Kapitel 8

Epilog

Specialet afsluttes med et eksempel på konstruktion af en retningsbestemt stærkt regulær graf ud fra en stærkt regulær graf.

Hvis der eksisterer en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf Γ med $\mu = \lambda + 1$ kan det vises [Hobart, 2001, 2.15 M1], at der eksisterer en $(n_F, k_F; \lambda_F, \mu_F, t_F)$-RSRG med

$$\begin{aligned} n_F &= nk; \\ k_F &= (n-k-1)k; \\ \lambda_F &= (n-k-2)(k-\mu); \\ \mu_F &= (n-k-1)(k-\mu); \\ t_F &= (n-k-1)(k-\mu). \end{aligned}$$

For at konstruere F vil det vise sig nødvendigt med følgende definition.

Definition 8.0.3 (Afstand)
For en sammenhængende endelig graf Γ defineres afstanden $d(v, w)$ mellem to punkter v og w i Γ til at være den korteste vej fra v til w i Γ.

Konstruktionen af F er givet ved følgende.

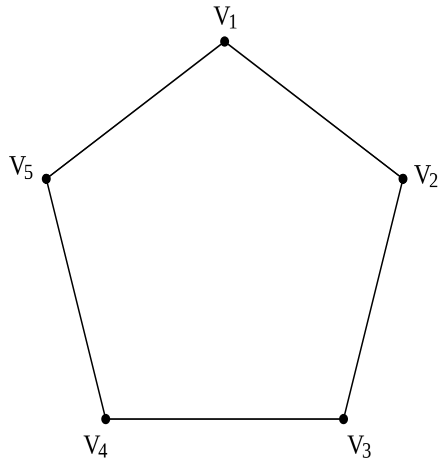
Definition 8.0.4
Lad Γ være en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf med punktmængde $V\Gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$. Så er F den $(n_F, k_F; \lambda_F, \mu_F, t_F)$-RSRG, hvis punktmængde er givet ved

$$VF = \left\{ v_i v_j \;\middle|\; \{v_i, v_j\} \in E\Gamma \wedge i \neq j \right\}.$$

De retningsbestemte kanter i F er givet ved

$$v_i v_j \to v_k v_l \quad i \quad F \iff d(v_j, v_k) = 2.$$

Eksempel 8.0.5
Lad Γ være en $(5, 2; 0, 1)$-stærkt regulær graf med punktmængde $\{v_1, \dots, v_5\}$. Så er F givet ved figur 8.1

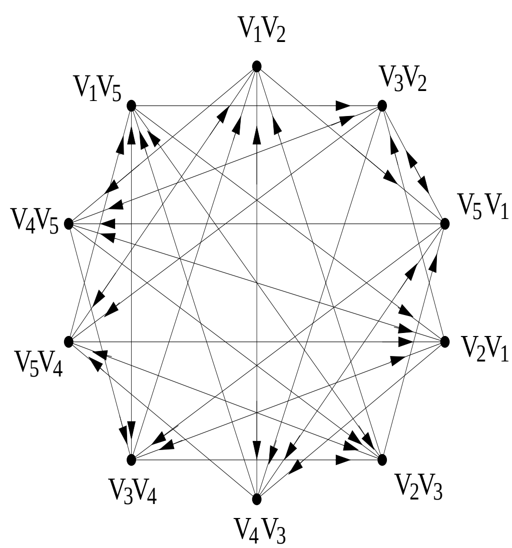


Figur 8.1: En $(5,2;0,1)$-stærkt regulær graf

Af definition 8.0.4 følger at $\digamma$ *er en* $(10,4;1,2,2)$*-RSRG med punktmængde*

$V\digamma$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
	v_1	v_1	v_2	v_2	v_3	v_3	v_4	v_4	v_5	v_5
	v_2	v_5	v_1	v_3	v_2	v_4	v_3	v_5	v_4	v_1

Af definition 8.0.4 kan $\digamma$ *konstrueres, som er illustreret på figur 8.2.*



Figur 8.2: En $(10,4;1,2,2)$-RSRG

$\square$

Ved at benytte konstruktionen på *petersen grafen* (se forside) fås en $(30,18;12,10,12)$-RSRG.

Bilag A

Turneringer

Dobbelt regulære og homogene turneringer defineres og vises at være ækvivalente.

Først defineres en *turnering* af orden n, som vi fremover betegner med T_n.

Definition A.0.6 (T_n)
En T_n er en retningsbestemt graf med n punkter, så ethvert par af forskellige punkter v, w i denne er forbundet med præcis én af de retningsbestemte kanter $v \to w$ eller $w \to v$.

Hvis v er et punkt i en T_n betegnes *udgraden* af v med $\text{od}(v)$. Vi siger at $\text{od}(v)$ er antal punkter i T_n *domineret* af v; dvs antal punkter z i T_n der opfylder $v \to z$. Hvis v, w er forskellige punkter i en T_n betegner $\text{od}(v, w)$ antal punkter domineret af både v og w.

Bemærkning A.0.7 *Bemærk at ovenstående definition af udgraden er ækvivalent med udgraden defineret i kapitel 4. Med definitionen af ud-naboer i punkt 2 i beviset for sætning 7.2.2 betegner $od(v, w)$ antal fælles ud-naboer for v og w.*

Nu kan vi definere en *dobbelt regulær turnering* af orden n, som fremover betegnes med DRT_n.

Definition A.0.8 (DRT_n)
En DRT_n er en T_n for hvilken der eksisterer heltal m_1 og m_2, så

1. *$od(v) = m_1$ for ethvert punkt v i T_n;*
2. *$od(v, w) = m_2$ for ethvert par af forskellige punkter v, w i T_n.*

Hvis vi kender kender $\text{od}(v, w)$ i en DRT_n, kan de resterende oplysninger udledes heraf.

Lemma A.0.9 *For enhver DRT_n med $od(v, w) = c$ gælder, at*

$$od(v) = 2c + 1 \quad og \quad n = 4c + 3.$$

Bevis:
Lad en DRT_n være givet og antag, at $\text{od}(v, w) = c$ for ethvert par af forskellige punkter v, w i DRT_n. Først vises at $\text{od}(v) = 2c+1$ for ethvert punkt v i DRT_n.

Lad v være et vilkårligt punkt i DRT_n og betegn mængden af punkter domineret af v med D, hvor $|D| = \text{od}(v)$ ifølge definition A.0.8. Lad w være et vilkårligt punkt i D. Lad $D_1 \subseteq D$ betegne delmængden af punkter i D, som er ind-nabo til w. Lad $D_2 \subseteq D$ betegne delmængden af punkter i D, som er ud-nabo til w.

Punkterne i D_2 er domineret af både v og w. Dvs ifølge antagelsen og definition A.0.8 gælder, at

$$|D_2| = \text{od}(v, w) = c. \tag{A.1}$$

Vi tæller de retningsbestemte kanter i D på to forskellige måder.

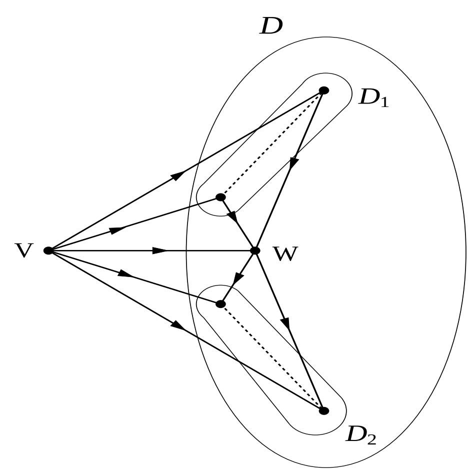
1. *Ind-kanter*

   De retningsbestemte kanter i D tælles ved de retningsbestemte kanter, som går ind i w. Ifølge definition A.0.6 er alle punkter x, y i DRT_n forbundet med enten $x \to y$ eller $y \to v$. Dvs D_1, D_2 og w udgør alle punkter i D. Eftersom $|D| = \text{od}(v)$, er antal punkter i D_1, ifølge (A.1), givet ved (se figur A.1)

   $$|D_1| = |D| - |D_2| = \text{od}(v) - c - 1.$$

   Dvs antal retningsbestemte kanter, der går ind i w er $\text{od}(v) - c - 1$. Idet der findes $|D| = \text{od}(v)$ punkter som w i D gælder, at antal retningsbestemte kanter i D er givet ved

   $$\text{od}(v)(\text{od}(v) - c - 1).$$



Figur A.1: Antal retningsbestemte kanter i D

2. *Ud-kanter*

   De retningsbestemte kanter i D tælles ved de retningsbestemte kanter, som går ud af w. Ifølge (A.1) er der $|D_2| = c$ retningsbestemt kanter, der går ud af w. Da der findes $|D| = \mathrm{od}(v)$ punkter som w i D gælder, at antal retningsbestemte kanter i D er givet ved

$$\mathrm{od}(v)c.$$

Idet v og w er vilkårligt valgt følger af punkt 1 og 2, at

$$\mathrm{od}(v)(\mathrm{od}(v) - c - 1) = \mathrm{od}(v)c$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{od}(v) = 2c + 1 \quad \text{for ethvert punkt } v \text{ i } DRT_n. \tag{A.2}$$

Nu viser vi, at $n = 4c + 3$.

Lad v være et vilkårligt punkt i DRT_n. Ifølge definition A.0.6 er v forbundet til alle kanter i DRT_n ved en retningsbestemt kant, som enten går ind i eller ud af v.

Vi tæller antal retningsbestemte kanter i DRT_n på to forskellige måder.

a. *Ud-kanter*

Der er $\mathrm{od}(v)$ retningsbestemte kanter, der går ud af v. Da der findes n punkter som v i DRT_n gælder, at antal retningsbestemte kanter i DRT_n er givet ved

$$n\,\mathrm{od}(v).$$

b. *Ind-kanter*

Der er $n - \mathrm{od}(v) - 1$ retningsbestemte kanter, der går ind i v. Da der findes n punkter som v i DRT_n gælder, at antal retningsbestemte kanter i DRT_n er givet ved

$$n\,(n - \mathrm{od}(v) - 1).$$

Af punkt a og b samt (A.2) følger at

$$n\,\mathrm{od}(v) = n\,(n - \mathrm{od}(v) - 1)$$
$$\Updownarrow$$
$$n = 2\,\mathrm{od}(v) + 1 = 2(2c + 1) + 1 = 4c + 3.$$

■

Lad e være en retningsbestemt kant i T_n. Så defineres $\tau(e)$ til at være antal kredse af længde tre i T_n, som indeholder e.

Hermed kan vi definere en *homogen turnering* af orden n, som fremover betegnes med HT_n.

Definition A.0.10 (HT_n)
En HT_n er en T_n for hvilken der eksisterer et heltal $r > 0$, så $\tau(e) = r$ for enhver retningsbestemt kant e i T_n.

Nu kan vi give beviset for den ønskede sætning.

Sætning A.0.11
Så er en T_n en DRT_n med $n = 4c + 3$ hvis og kun hvis, en T_n er en HT_n med $\tau(e) = c + 1$ for enhver retningsbestemt kant e i T_n.

Bevis:

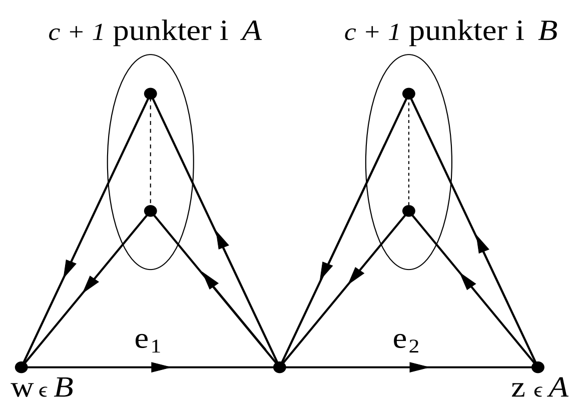
$\Rightarrow$: Antag at en T_n er en DRT_n og lad $x \to y$ være en retningsbestemt kant i T_n. Af definition A.0.8 følger, at der er $\mathrm{od}(x, y) = c$ punkter i T_n domineret af både x og y. Eftersom der ifølge definition A.0.8 er $\mathrm{od}(y) = 2c + 1$ punkter i T_n domineret af y fås, at antal punkter i T_n domineret af y men *ikke* af x, er $2c + 1 - c = c + 1$. Ifølge definition A.0.6 er ethvert par af punkter i en T_n forbundet med en retningsbestemt kant hvormed gælder, at disse $c + 1$ punkter dominerer x (og er domineret af y). Idet x og y er vilkårligt valgt, er T_n ifølge definition A.0.10 en HT_n med $\tau(e) = c + 1$ for enhver retningsbestemt kant e i T_n.

$\Leftarrow$: Antag at en T_n er en HT_n med $\tau(e) = c + 1$ for enhver retningsbestemt kant e i T_n. Vi skal vise, at T_n er dobbelt regulær. Først viser vi, at T_n er regulær.

Lad x være et punkt i T_n, og betegn mængden af punkter domineret af x med A, og mængden af punkter der dominerer x med B. Vi tæller de retningsbestemte kanter fra A til B på to forskellige måder.

Lad $z \in A$ og $w \in B$ og lad hhv. e_1 og e_2 betegne de retningsbestemte kanter $w \to x$ og $x \to z$.

1. Eftersom $\tau(e_2) = c+1$ ifølge antagelsen og definition A.0.10 gælder, at z dominerer præcis $c + 1$ punkter i B (se figur A.2). Da z er vilkårligt valgt, er antal retningsbestemte kanter fra A til B lig $|A|(c+1)$.



Figur A.2: Tilfældet hvor T_n er en HT_n

2. Idet $\tau(e_1) = c+1$ ifølge antagelsen og definition A.0.10 gælder, at w er domineret af præcis $c+1$ punkter i A (se figur A.2). Da w er valgt vilkårligt er antal retningsbestemte kanter fra A til B lig $|B|\,(c+1)$.

Af punkt 1 og punkt 2 fås at

$$|A|\,(c+1) = |B|\,(c+1) \iff |A| = |B|.$$

Eftersom x er vilkårligt valgt i T_n fås af ovenstående, at T_n er regulær af valens m for et $m \in \mathbb{N}$.

Af definition A.0.6 følger at ethvert par af punkter v, w i T_n er forbundet med én af de retningsbestemte kanter $v \to w$ eller $w \to v$. Således er x forbundet til alle punkter i T_n (fraregnet x selv) ved retningsbestemte ind- og ud-kanter. Dvs A, B og x udgør alle punkter i T_n og

$$n = 2m + 1. \tag{A.3}$$

Nu viser vi, at $m = 2c + 1$.

Vi finder et udtryk for $\mathrm{od}(x, y)$. Lad x og y være to forskellige og vilkårlige punkter i T_n og antag W.L.O.G at $x \to y$. Betegn mængden af punkter der dominerer x og er domineret af y med D og mængden af punkter domineret af både x og y med E. Eftersom ethvert par af punkter i en T_n er forbundet med en retningsbestemt kant følger, at ethvert punkt domineret af y er indeholdt i enten D eller E. Idet x og y er vilkårligt valgt og T_n er regulær af valens m fås af antagelsen, at (se figur A.3)

$$\begin{aligned} \mathrm{od}(x, y) &= |E| = \mathrm{od}(y) - |D| \\ &= \mathrm{od}(y) - (\text{antal 3-kredse indeholdene } x \to y) \\ &= m - (c+1) \end{aligned} \tag{A.4}$$

for ethvert par af forskellige og vilkårlige punkter x, y i T_n.

Nu følger af lemma A.0.9 og (A.4) at

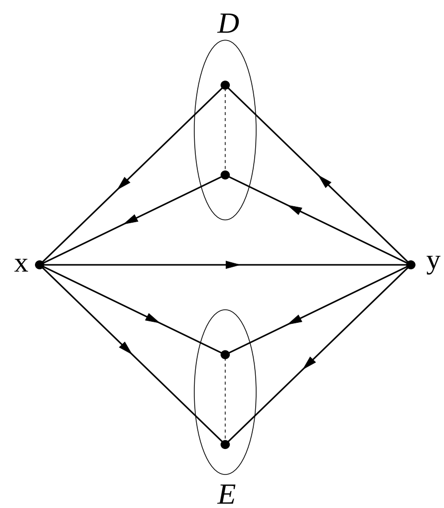
$$\begin{gathered} m = \mathrm{od}(y) = 2\,\mathrm{od}(x, y) + 1 = 2(m - c - 1) + 1 = 2m - 2c - 1 \\ \Updownarrow \\ m = 2c + 1. \end{gathered} \tag{A.5}$$

Dvs T_n ifølge (A.3), (A.4) og (A.5) er en DRT_n med

$$\begin{aligned} n &= 2m + 1 = 2(2c+1) + 1 = 4c + 3; \\ \mathrm{od}(x) &= m = 2c + 1 \quad \text{for ethvert punkt } x \text{ i } T_n; \\ \mathrm{od}(x, y) &= m - (c+1) = c; \end{aligned}$$

for ethvert par af forskellige punkter x, y i T_n.

■



Figur A.3: Tilfældet hvor T_n er en HT_n

Bilag B

Lineær Algebra

Dette bilag indeholder resultater fra lineær algebra, som bruges til at beskrive egenværdierne til en ikke-retningsbestemt og en retningsbestemt stærkt regulær graf. Resultaterne i efterfølgende afsnit gælder for nabomatricen $\mathbf{A}$ til en ikke-retningsbestemt $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf.

B.1 Spektralsætningen

Før spektralsætningen vises er det nødvendigt med et par lemmaer.

Lemma B.1.1 *En $m \times n$ matrix $\mathbf{U}$ har ortonormale søjler hvis og kun hvis* $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Bevis:
Lad

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix},$$

hvor $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^m$ for $i = 1, \ldots, n$. Så fås

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \boldsymbol{u}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^T\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_n^T\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n^T\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}. \tag{B.1}$$

Søjlerne i $\mathbf{U}$ er indbyrdes ortogonale hvis og kun hvis

$$\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j^T\boldsymbol{u}_i = 0, \quad \text{for } i \neq j \text{ og } i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{B.2}$$

Søjlerne i $\mathbf{U}$ er af længde én hvis og kun hvis

$$\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_i = 1 \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{B.3}$$

Af (B.2) og (B.3) følger at matricen i (B.1) er identitetsmatricen. ■

Lemma B.1.2 *Lad* $\mathbf{A}$ *være en* $m \times n$ *matrix. Lad* λ_k *være en egenværdi til* $\mathbf{A}$ *med multiplicitet* k*. Hvis* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ *er de forskellige egenvektorer hørende til* λ_k *så gælder for* $l \leq k$*, at*

$$\mathbf{A} \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{x}_i = \lambda_k \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{x}_i \qquad \textit{for } c_i \in \mathbb{R}.$$

Bevis:
For $c_i \in \mathbb{R}$ og $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$ fås, at

$$\mathbf{A} \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{A} c_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{l} c_i \mathbf{A} \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{l} c_i \lambda_k \boldsymbol{x}_i = \lambda_k \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{x}_i.$$

■

Den *algebraiske multiplicitet* af en egenværdi λ til $\mathbf{A}$ er multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium. Den *geometriske multiplicitet* af λ er dimensionen af egenrummet $\mathbb{V}_\lambda$ til λ eller ækvivalent antal uafhængige egenvektorer hørende til λ.

Sætning B.1.3 (Spektralsætningen for symmetriske matricer)
Lad $\mathbf{A}$ *være en reel symmetrisk* $n \times n$ *matrix. Så gælder*

1. $\mathbf{A}$ *har* n *reelle egenværdier talt med algebraisk multipliciteter;*
2. *egenrummene er indbyrdes ortogonale;*
3. $\mathbf{A}$ *kan ortogonalt diagonaliseres;*
4. *den algebraiske og den geometriske multiplicitet af hver egenværdi* λ *til* $\mathbf{A}$ *er ækvivalente.*

Bevis:

ad. 1 Vi kan betragte $\mathbf{A}$ som en matrix over $\mathbb{C}$ (komplekse indgange). Lad $\lambda \in \mathbb{C}$ være egenværdi til $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$; dvs

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{B.4}$$

Tag den kompleks konjugerede [Axler, 1997, p. 69] på begge sider af (B.4), så fås

$$\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\mathbf{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda \boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}. \tag{B.5}$$

Dvs $\overline{\lambda}$ er egenværdi til $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\overline{\boldsymbol{x}}$. Eftersom $\mathbf{A}$ er symmetrisk fås af (B.4) og (B.5), at

$$\lambda \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T \lambda \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x} = (\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x}. \tag{B.6}$$

Idet

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

og $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ får vi af (B.6), at $\lambda = \overline{\lambda}$. Dermed er λ reel.

Et tal λ er egenværdi til $\mathbf{A}$, hvis der er en ikke-triviel løsning $\boldsymbol{x}$ til

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

hvor $\boldsymbol{x}$ er egenvektor til λ. Dvs egenværdierne er de tal λ der opfylder, at $\text{null}\{\, \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \,\} \neq \{\mathbf{0}\}$. Dette er opfyldt hvis og kun hvis $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ er singulær (ikke invertibel). $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ er singulær hvis og kun hvis

$$\det \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = 0.$$

Idet $\mathbf{A}$ er en reel $n \times n$ matrix har vi, at

$$\det \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = (-1)^n \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n \ ,$$

for $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Dvs egenværdierne er løsninger til et n'te gradspolynomium, hvormed der findes n reelle egenværdier talt med multiplicitet.

ad. 2 Følger af lemma 1.1.2.

ad. 3 Lad λ_k være en egenværdi til $\mathbf{A}$ med multiplicitet k. Lad $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ være de forskellige egenvektorer til λ_k, som udgør en basis for egenrummet $\mathbb{V}_{\lambda_k}$ til λ_k. Ved brug af Gram-Schmidt metoden [Lay, 1997, p. 399] fås

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{x}_k - \frac{\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{v}_{k-1}}{\boldsymbol{v}_{k-1} \cdot \boldsymbol{v}_{k-1}}\boldsymbol{v}_{k-1},
\end{aligned}$$

hvor $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ er en ortogonal basis for egenrummet $\mathbb{V}_{\lambda_k}$. Bemærk at

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{v}_i$$

er ortogonalprojektionen af $\boldsymbol{x}_j$ på $\text{Span}\{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1} \,\}$ for $j = 1, 2, \ldots, k$ [Lay, 1997, p. 390]. Lad

$$\boldsymbol{v}_i' = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|} = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}}, \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Så er $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \ldots, \boldsymbol{v}_k'\}$ en ortonormal basis for $\mathbb{V}_{\lambda_k}$, som ifølge lemma B.1.2 består af egenvektorer til λ_k. Således kan vi konstruere en ortonormal basis for hver af egenrummene til $\mathbf{A}$ bestående af egenvektorer til den tilhørende egenværdi til $\mathbf{A}$. Idet egenrummene er indbyrdes ortogonale (punkt 2) fås en ortonormal basis $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer til $\mathbf{A}$. Lad

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{v}'_1 & \boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{array} \right].$$

Idet søjlerne i $\mathbf{P}$ er ortonormale følger af lemma B.1.1, at $\mathbf{P}$ er invertibel og $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$. Lad

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

så er

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= \mathbf{A} \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{v}'_1 & \boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}\boldsymbol{v}'_1 & \mathbf{A}\boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \mathbf{A}\boldsymbol{v}'_n \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1\boldsymbol{v}'_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}'_n \end{array} \right] \end{aligned} \tag{B.7}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{PD} &= \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{v}'_1 & \boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1\boldsymbol{v}'_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}'_n \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Af (B.7) og (B.8) følger, at

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \iff \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PDP}^T.$$

ad. 4 Af punkt 3 følger, at $\mathbf{A}$ kan ortogonalt diagonaliseres; dvs $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Lad λ_k være en egenværdi til $\mathbf{A}$ med algebraisk multiplicitet $k \leq n$, hvormed λ_k forekommer k gange på diagonalen i $\mathbf{D}$. Antag W.L.O.G at λ_k forekommer på de første k diagonalindgange i $\mathbf{D}$, så fås af beviset for punkt 3, at

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} = \left[\begin{array}{ccccccc} \lambda_k\boldsymbol{v}'_1 & \lambda_k\boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \lambda_k\boldsymbol{v}'_k & \lambda_{k+1}\boldsymbol{v}'_{k+1} & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}'_n \end{array} \right],$$

hvor $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_k$ er lineært uafhængige egenvektorer hørende til λ_k. Dermed er $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_k\}$ en basis for egenrummet $\mathbb{V}_{\lambda_k}$ til λ_k hvormed $\dim\{\ \mathbb{V}_{\lambda_k}\ \} = k$.

■

I kapitel 2 udnytter vi, at der findes en spektral dekomposition af nabomatricen $\mathbf{A}$ til en $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf.

B.1.1 Spektral dekomposition

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ symmetrisk matrix. Hvis $\mathbf{A}$ kan ortogonalt diagonaliseres gælder, at $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, hvor søjlerne i $\mathbf{P}$ er ortonormale egenvektorer $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ til $\mathbf{A}$ hørende til egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i diagonalmatricen $\mathbf{D}$. Idet $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ fås, at

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^T \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T. \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

Denne repræsentation af $\mathbf{A}$ kaldes en *spektral dekomposition* . Hvert led i (B.9) er en $n \times n$ matrix af rang én

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T &= \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i_1} & \cdots & u_{i_n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_{i_1} u_{i_1} & \cdots & u_{i_1} u_{i_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i_n} u_{i_1} & \cdots & u_{i_n} u_{i_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i_1} \boldsymbol{u}_i^T \\ \vdots \\ u_{i_n} \boldsymbol{u}_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i u_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{u}_i u_{i_n} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

for $i = 1, \ldots, n$. Det ses, at hver række og søjle er et multiplum af $\boldsymbol{u}_i$. Yderligere er hver matrix $\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$ en *ortogonal projektionsmatrix* på Span$\{ \boldsymbol{u}_i \}$ [Lay, 1997, p. 447].

Specielt gælder for identitetsmatricen $\mathbf{I}$, at

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} = \mathbf{PP}^{-1} &= \mathbf{PP}^T \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^T \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T.
\end{aligned}
$$

I forlængelse af resultater vedrørende egenværdier til en ikke-retningsbestemt stærkt regulær graf ser vi på resultater i forbindelse med egenværdierne til en retningsbestemt stærkt regulær graf.

B.2 Retningsbestemte stærkt regulære grafer

Eftersom nabomatricen $\mathbf{B}$ for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG ikke er symmetrisk, er spektralsætningen B.1.3 ikke opfyldt for $\mathbf{B}$. Derfor er det nødvendigt at udlede separate resultater for $\mathbf{B}$.

Egenværdierne til en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med nabomatrix $\mathbf{B}$ er de λ som opfylder, at der er en ikke-triviel løsning $\boldsymbol{x}$ til

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Dermed kan vi ved ækvivalente argumenter til de i beviset for punkt 1 i sætning B.1.3 vise, at en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG har n egenværdier talt med algebraisk multiplicitet. Vi ønsker at vise, at de algebraiske og geometriske multipliciteter for egenværdierne til en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG er ækvivalente. For at kunne gøre dette er det nødvendigt med følgende generelle resultat [Griffel, 1989, Theorem 10B-3].

Lemma B.2.1 *Lad* $\mathbf{C}$ *være en* $n \times n$ *matrix. Så er den geometriske multiplicitet mindre end eller lig den algebraiske multiplicitet for enhver egenværdi* λ *til* $\mathbf{C}$.

I sætning 4.1.3 fandt vi, at en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG har tre egenværdier k, τ og σ.

Proposition B.2.2 *Lad* Γ *være en* $(n, k; \lambda, \mu, t)$*-RSRG med nabomatrix* $\mathbf{B}$ *og egenværdier* k, τ *og* σ. *Så er den algebraiske og den geometriske multiplicitet af hhv.* k, τ *og* ρ *ækvivalente.*

Bevis:
I beviset for sætning 4.1.3 fandt vi, at

$$\tau = \frac{(\lambda - \mu) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{og} \quad \sigma = \frac{(\lambda - \mu) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

hvor $\Delta = (\mu - \lambda)^2 + 4(t - \mu)$. Heraf følger at

$$\tau + \sigma = \lambda - \mu \quad \text{og} \quad \tau\sigma = -(t - \mu).$$

Indsæt disse to ligninger i (4.1) hvormed fås

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 + (\mu - \lambda)\mathbf{B} - (t - \mu)\mathbf{I} &= \mu\mathbf{J} \\ \mathbf{B}^2 - (\tau + \sigma)\mathbf{B} + \tau\sigma\mathbf{I} &= \mu\mathbf{J} \\ &\Updownarrow \\ (\mathbf{B} - \tau\mathbf{I})(\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I}) = (\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})(\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}) &= \mu\mathbf{J}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Lad m_τ, m_σ og r, s være hhv. de geometriske og de algebraiske multipliciteter af hhv. τ og σ.

Vi viser at $m_\tau = r$. Af lemma B.2.1 følger at $m_\tau \leq r$. Således fås [Lay, 1997, Rank Theorem] at

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\{\, \mathbf{B} - \tau\mathbf{I} \,\} &= n - \dim\{\, \operatorname{null}\{\, \mathbf{B} - \tau\mathbf{I} \,\}\,\} \\ &= n - m_\tau \\ &\geq n - r. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Antag at rank$\{\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}\} \geq n - r + 1$ og lad $\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_{n-r}$ være $n - r + 1$ lineært uafhængige søjler i $\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}$. Så fås af (B.10) at $(\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})\boldsymbol{v}_i = \mu\boldsymbol{j}$ for $i = 0, \dots, n-r$. Heraf følger at

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0) &= (\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})\boldsymbol{v}_i - (\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})\boldsymbol{v}_0 \\ &= \mu\boldsymbol{j} - \mu\boldsymbol{j} = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{B.12}$$

for $i = 0, \dots, n - r$. Idet null$\{\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I}\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}$ fås af (B.12), at $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_{n-r} - \boldsymbol{v}_0$ er $n - r$ lineært uafhængige vektorer i nulrummet af $(\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I})$. Da dim$\{$null$\{\mathbf{B} - \sigma\mathbf{I}\}\} = m_\sigma$ følger, at $m_\sigma \geq n - r$. Eftersom der er n egenværdier talt med algebraisk multiplicitet og k, τ og σ har algebraisk multiplicitet hhv. $1, r$ og s fås, at

$$s = n - r - 1 < n - r \leq m_\sigma.$$

Dette er ifølge lemma B.2.1 en modstrid. Dvs

$$\text{rank}\{\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}\} < n - r + 1 \iff \text{rank}\{\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}\} \leq n - r.$$

Sammenhold ovenstående med (B.11) hvormed følger at rank$\{\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}\} = n - r$. Dermed fås [Lay, 1997, Rank Theorem] at

$$m_\tau = \dim\{\text{null}\{\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}\}\} = n - \text{rank}\{\mathbf{B} - \tau\mathbf{I}\} = n - (n - r) = r.$$

Tilsvarende kan vises at $m_\sigma = s$. ■

Bemærk at for $t = k$ gælder proposition B.2.2 for en (ikke-retningsbestemt) $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf Γ, hvilket ligeledes er tilfældet for følgende korollar.

Korollar B.2.3 *Lad $\mathit{\Gamma}$ være en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med egenværdier k, τ og σ. Hvis $1, m_\tau$ og m_σ er multipliciteten af hhv. k, τ og σ gælder, at*

$$m_\tau + m_\sigma + 1 = n.$$

Bevis:
Da en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG $\mathit{\Gamma}$ har n egenværdier talt med algebraisk multiplicitet følger af proposition B.2.2, at $\mathit{\Gamma}$ har n egenværdier talt med geometrisk multiplicitet. Dvs vi skelner ikke mellem algebraisk og geometrisk multiplicitet for de fundne egenværdier til $\mathit{\Gamma}$ i sætning 4.1.3 og

$$m_\tau + m_\sigma + 1 = n.$$

■

Yderligere får vi brug for følgende resultat vedrørende rangen af en matrix. Bemærk at vi efterfølgende ikke skelner mellem algebraisk og geometrisk multiplicitet for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG.

Proposition B.2.4 *Lad $\mathcal{F}$ være en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG med nabomatrix* $\mathbf{B}$ *og n egenværdier talt med multiplicitet. Lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ for $l \leq n$ være de forskellige ikke-trivielle egenværdier til $\mathcal{F}$ og lad m_{λ_i} være multipliciteten af λ_i for $i = 1, \ldots, l$. Så gælder at*

$$rank\{\,\mathbf{B}\,\} = \sum_{i=1}^{l} m_{\lambda_i}.$$

Bevis:
Da $\mathrm{null}\{\,\mathbf{B}\,\} = \left\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{C}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{x} \,\right\}$ fås, at $\dim\{\,\mathrm{null}\{\,\mathbf{B}\,\}\,\}$ er multipliciteten af nul som egenværdi til $\mathbf{B}$. Eftersom n er antallet af alle egenværdier til $\mathbf{B}$ talt med multiplicitet fås [Lay, 1997, Rank Theorem] at

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\{\,\mathbf{B}\,\} &= n - \dim\{\,\mathrm{null}\{\,\mathbf{B}\,\}\,\} \\ &= \sum_{i=1}^{l} m_{\lambda_i}\,,\end{aligned}$$

hvor m_{λ_i} er multipliciteten af den ikke-trivielle egenværdi λ_i for $i = 1, \ldots, l$. ■

I kapitel 2 får vi brug for et resultat fra lineær algebra vedrørende dimensionen af et vektorrum, der er udtrykt som en direkte sum af underrum.

B.3 Sum og direkte sum

For at vise den ønskede sætning får vi brug for en sætning omhandlende dimensionen et vektorrum, som er summen af to underrum. Men først er det nødvendigt med et lemma.

Lemma B.3.1 *Enhver lineært uafhængig mængde af vektorer i et endeligt-dimensionalt vektorrum kan udvides til en basis for vektorrummet.*

Bevis:
Lad $\mathbb{V}$ være et n-dimensionalt vektorrum og $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$, $m \leq n$, en lineært uafhængig mængde i $\mathbb{V}$. Lad $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ være en basis for $\mathbb{V}$. Så udvides $\mathcal{B}$ til en basis for $\mathbb{V}$ ved at gennemløbe følgende trin for $j = 1, \ldots, n$.

Trin j

Hvis $\boldsymbol{w}_j \in \mathrm{Span}\{\,\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\,\}$, så lad $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$. Hvis $\boldsymbol{w}_j \notin \mathrm{Span}\{\,\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\,\}$, så lad $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_j\}$.

Efter trin n gælder, at $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\} \in \mathrm{Span}\{\,\mathcal{B}\,\}$ og måden $\mathcal{B}$ blev konstrueret på sikrer, at $\mathcal{B}$ er en lineært uafhængig mængde. Dvs $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{V}$. ■

Sætning B.3.2
Hvis $\mathbb{U}_1$ og $\mathbb{U}_2$ er underrum af et endeligt-dimensionalt vektorrum gælder, at

$$dim\{\,\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2\,\} = dim\{\,\mathbb{U}_1\,\} + dim\{\,\mathbb{U}_2\,\} - dim\{\,\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2\,\}.$$

Bevis:
Lad $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ være en basis for $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$; dvs $\dim\{\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2\} = m$. Idet $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ er en basis for $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$, er det en lineært uafhængig mængde i $\mathbb{U}_1$ (og $\mathbb{U}_2$). Dermed kan $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ ifølge lemma B.3.1 udvides til en basis

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j\} \qquad \text{for } \mathbb{U}_1, \tag{B.13}$$

hvor $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{U}_1$ for $i = 1, \ldots, j$. Dvs $\dim\{\mathbb{U}_1\} = m+j$. Tilsvarende kan $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ udvides til en basis

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\} \qquad \text{for } \mathbb{U}_2, \tag{B.14}$$

hvor $\boldsymbol{w}_j \in \mathbb{U}_2$ for $j = 1, \ldots, k$. Dvs $\dim\{\mathbb{U}_2\} = m + k$.

Vi viser at $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ er en basis for $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$, dvs $\dim\{\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2\} = m + j + k$. Dette vil fuldende beviset idet

$$\begin{aligned}\dim\{\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2\} &= m + j + k \\ &= (m + j) + (m + k) - m \\ &= \dim\{\mathbb{U}_1\} + \dim\{\mathbb{U}_2\} - \dim\{\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2\}.\end{aligned}$$

Idet $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2 \subseteq \mathrm{Span}\{\mathcal{B}\}$ følger, at $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 \subseteq \mathrm{Span}\{\mathcal{B}\}$. Derfor er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$, hvis $\mathcal{B}$ er en lineært uafhængig mængde.

Antag at

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m + b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_j\boldsymbol{v}_j + c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k = 0, \tag{B.15}$$

hvor alle a'er, b'er og c'er er reelle tal. Omskriv denne ligning til

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k = -a_1\boldsymbol{u}_1 - \cdots - a_m\boldsymbol{u}_m - b_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - b_j\boldsymbol{v}_j,$$

hvormed det følger af (B.13), at $c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k \in \mathbb{U}_1$. Af (B.14) følger, at $\boldsymbol{w}_i \in \mathbb{U}_2$ for $i = 1, \ldots, k$ hvormed $c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k \in \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$. Idet $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ er en basis for $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$ gælder, at

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k = d_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + d_m\boldsymbol{u}_m, \tag{B.16}$$

for $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. Men af (B.14) følger, at $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ er en lineært uafhængig mængde, hvormed (B.16) er opfyldt hvis og kun hvis

$$c_1 = \cdots = c_k = d_1 = \cdots = d_m = 0. \tag{B.17}$$

Benyt dette i (B.15), så fås

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m + b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_j\boldsymbol{v}_j = 0. \tag{B.18}$$

Da $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j\}$ ifølge (B.13) er en lineært uafhængig mængde, er (B.18) opfyldt hvis og kun hvis

$$a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = bj = 0. \tag{B.19}$$

Af (B.17) og (B.19) fås, at den eneste løsning til (B.15) er nulløsningen. Dermed er $\mathcal{B}$ en lineært uafhængig mængde og således basis for $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$. ■

Ved sætning B.3.2 kan vi vise det ønskede resultat vedrørende den direkte sum. Først defineres denne.

Definition B.3.3 (Direkte sum)
Et vektorrum $\mathbb{V}$ *siges at være den direkte sum af underrummene* $\mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_m$ *hvis* $\mathbb{V} = \mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_m$ *og* $\mathbb{U}_j \cap (\mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_{j-1}) = \{\mathbf{0}\}$ *for hvert* $j = 2, \ldots, m$. *I dette tilfælde skriver vi, at* $\mathbb{V} = \mathbb{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{U}_m$.

Sætning B.3.4
Lad $\mathbb{V} = \mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{U}_m$, *hvor* $\mathbb{V}$ *er et endeligt-dimensionalt vektorrum og* $\mathbb{U}_i \subseteq \mathbb{V}$ *for* $i = 1, \ldots, m$. *Lad* $\mathcal{B}_i$ *være en basis for* $\mathbb{U}_i$. *Så gælder at*

1. $\dim\{\mathbb{V}\} = \dim\{\mathbb{U}_1\} + \dim\{\mathbb{U}_2\} + \cdots + \dim\{\mathbb{U}_m\}$;
2. *for enhver vektor* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ *er der én og kun én måde at skrive* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m$ *hvor* $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{U}_i$;
3. $\mathcal{B}_{\mathbb{V}} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ *med* $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ *for* $i \neq j$ *er en basis for* $\mathbb{V}$.

Bevis:

ad. 1 Af sætning B.3.2 og definition B.3.3 fås

$$\begin{aligned}
\dim\{\mathbb{V}\} &= \dim\{\mathbb{U}_1 + \ldots + \mathbb{U}_m\} = \dim\{\mathbb{U}_m + (\mathbb{U}_1 + \ldots + \mathbb{U}_{m-1})\} \\
&= \dim\{\mathbb{U}_m\} + \dim\{\mathbb{U}_1 + \ldots + \mathbb{U}_{m-1}\} \\
&\qquad - \dim\{\underbrace{\mathbb{U}_m \cap (\mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_{m-1})}_{=\mathbf{0}}\} \\
&= \dim\{\mathbb{U}_m\} + \dim\{\mathbb{U}_{m-1} + (\mathbb{U}_1 + \ldots + \mathbb{U}_{m-2})\} \\
&= \dim\{\mathbb{U}_m\} + \dim\{\mathbb{U}_{m-1}\} + \dim\{\mathbb{U}_1 + \ldots + \mathbb{U}_{m-2}\} \\
&\qquad - \dim\{\underbrace{\mathbb{U}_{m-1} \cap (\mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_{m-2})}_{=\mathbf{0}}\} \\
&\;\;\vdots \\
&= \dim\{\mathbb{U}_m\} + \cdots + \dim\{\mathbb{U}_1\}.
\end{aligned}$$

ad. 2 Antag der er to måder at repræsentere en vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ som en sum af vektorer i hhv. $\mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_m$; dvs

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m, \tag{B.20}$$

hvor $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i \in \mathbb{U}_i$ for $i = 1, \ldots, m$. Dermed får vi, at

$$\begin{aligned}
\underbrace{\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{u}_m}_{\in \mathbb{U}_m} &= (\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_{m-1}) - (\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m) \\
&= \underbrace{(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{x}_1) + \cdots + (\boldsymbol{u}_{m-1} - \boldsymbol{x}_{m-1})}_{\in \mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_{m-1}}.
\end{aligned}$$

Dvs $\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{u}_m \in \mathbb{U}_m \cap (\mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_{m-1})$ hvormed følger af definition B.3.3, at $\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{u}_m$. Dermed kan $\boldsymbol{x}_m$ og $\boldsymbol{u}_m$ elimineres i (B.20) og ved at gentage argumentet yderligere $(m-2)$ gange fås, at $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{u}_i$ for $i = 1, \ldots, m$.

ad. 3 Eftersom $\mathcal{B}_i$ er en basis for $\mathbb{U}_i$ gælder, at

$$\mathbb{U}_1 + \cdots + \mathbb{U}_m = \operatorname{Span}\{\, \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m \,\}.$$

Vi mangler at vise, at $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ er en lineært uafhængig mængde. Lad $\mathcal{B}_i = \{\boldsymbol{x}_{(i,1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{(i,j_i)}\}$ og antag, at

$$\underbrace{\sum_{k=(1,1)}^{(1,j_1)} \alpha_k \boldsymbol{x}_k}_{\in \mathbb{U}_1} + \cdots + \underbrace{\sum_{k=(m,1)}^{(m,j_m)} \alpha_k \boldsymbol{x}_k}_{\in \mathbb{U}_m} = \mathbf{0}.$$

Af punkt 2 følger at ovenstående er opfyldt hvis og kun hvis, at

$$\sum_{k=(1,1)}^{(1,j_1)} \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}, \ldots, \sum_{k=(m,1)}^{(m,j_m)} \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

Idet $\mathcal{B}_i$ er en lineært uafhængige mængde fås af ovenstående, at $\alpha_{(1,1_1)} = \cdots = \alpha_{(1,j_1)} = 0, \ldots, \alpha_{(m,1)} = \cdots = \alpha_{(m,j_m)} = 0$. Dermed er $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ en lineært uafhængig mængde hvormed, $\mathcal{B}_{\mathbb{V}} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ er en basis for $\mathbb{V}$.

■

I nogle lærerbøger (f.eks [Lay, 1997, p. 15]) defineres den direkte sum af underrummene $\mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_m$ til at være et vektorrum $\mathbb{V}$, for hvilket punkt 2 i sætning B.3.4 er opfyldt. Bemærk at punkt 3 i sætning B.3.4 ligeledes giver et bevis for punkt 1, idet antal elementer i basen $\mathcal{B}_i$ er $\dim\{\, \mathbb{U}_i \,\}$.

Bilag C

Hjælperesultater

Dette bilag indeholder et resultat, som beskriver egenværdien k til både en ikke-retningsbestemt og en retningsbestemt stærkt regulær graf. Yderligere findes nogle elementære resultater af algebraisk karakter til brug i kapitel 4 samt et lemma i forbindelse med Kroneckerproduktet i kapitel 5.

C.1 Algebraisk grafteori

Nabomatricen $\mathbf{A}$ for en ikke-retningsbestemt $(n, k; \lambda, \mu)$-stærkt regulær graf Γ og nabomatricen $\mathbf{B}$ for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG $\varGamma$ har begge række- og søjlesum k ifølge hhv. bemærkning 1.1.5 og definition 4.0.14. Nabomatricen for en regulær graf af valens k har ligeledes række- og søjlesum k. Dermed gælder følgende resultat både for ikke-retningsbestemte og retningsbestemte stærkt regulære grafer.

Proposition C.1.1 *Lad Γ være en k-regulær graf med n punkter. Så gælder at*

1. *k er egenværdi til Γ;*

2. *hvis Γ er sammenhængende, så er den geometriske multipliciteten af k én;*

3. *for enhver egenværdi λ til Γ gælder, at $|\lambda| \leq k$.*

Bevis:

ad. 1 Lad $\boldsymbol{j} = [1_1, 1_2, \ldots, 1_n]^T$ og lad $\mathbf{A}$ være nabomatrix til Γ. Idet Γ er k-regulær, er der præcis k indgange lig én i $\mathbf{A}$'s rækker (og søjler). Dermed får vi, at

$$\mathbf{A}\boldsymbol{j} = k\boldsymbol{j}.$$

Dvs k er en egenværdi til Γ.

ad. 2 Lad $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ være en ikke-triviel egenvektor til Γ med tilhørende egenværdi k; dvs $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$. Lad x_i være en indgang i $\boldsymbol{x}$ der opfylder, at $|x_i| \geq |x_j|$ for $j = 1, \ldots, n$. Idet $(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i = kx_i$ fås, at

$$kx_i = (\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{ij} x_j = \sum_{\substack{j \\ \{v_i, v_j\} \in E\Gamma}} x_j. \tag{C.1}$$

Da $|x_i| \geq |x_j|$ for alle i og vi summer over k x_j'er følger af (C.1), at $x_j = x_i$ for de k x_j'er i i'te række hvor $\{v_i, v_j\} \in E\Gamma$.

Hvis Γ er sammenhængende fås ved at gentage ovenstående argument, at $x_j = x_i$ for alle j. Dvs enhver egenvektor $\boldsymbol{x}$ til Γ med tilhørende egenværdi k er et multiplum af $\boldsymbol{j}$. Dermed er dimensionen af egenrummet $\mathbb{V}_k$ til k lig én.

ad. 3 Lad $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$ være en ikke-triviel egenvektor til Γ med tilhørende egenværdi λ; dvs $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$. Lad y_i betegne en indgang i $\boldsymbol{y}$ der opfylder, at $|y_i| \geq |y_j|$ for $j = 1, \ldots, n$. Ved samme argument som i beviset for punkt 2 fås

$$\sum_{\substack{j \\ \{v_i, v_j\} \in E\Gamma}} y_j = \lambda y_i.$$

Heraf følger at

$$|\lambda|\,|y_i| = |\lambda y_i| = \Big| \sum_{\substack{j \\ \{v_i, v_j\} \in E\Gamma}} y_j \Big| \leq \sum_{\substack{j \\ \{v_i, v_j\} \in E\Gamma}} |y_j| \leq k|y_i| \tag{C.2}$$

$$\Downarrow$$

$$|\lambda| \leq k.$$

Bemærk at sidste ulighedstegn i (C.2) følger af at Γ er k-regulær.

■

C.2 Elementær algebra

I dette afsnit betegner $a \,|\, b$, at a går op i b. Yderligere betegner $\gcd(a, b)$ den største fælles divisor af a og b [Allenby, 1991, Definition 1.4.1].

Lemma C.2.1 *Lad $a \,|\, c$ og $b \,|\, c$ for $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvis $gcd(a, b) = 1$ gælder, at $ab \,|\, c$.*

Bevis:
Idet $a \,|\, c$ har vi, at

$$\frac{c}{a} = m \iff c = am \qquad \text{for} \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{C.3}$$

Idet $\gcd(a, b) = 1$ fås af ovenstående, at

$$b \mid c \Longrightarrow b \mid am \Longrightarrow b \mid m \Longrightarrow \frac{m}{b} = n \iff m = bn \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{C.4}$$

Af (C.3) og (C.4) fås

$$\frac{c}{ab} = \frac{am}{ab} = \frac{abn}{ab} = n \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z};$$

dvs $ab \mid c$. ■

Lemma C.2.2 *Hvis $(a^2 + b^2)$ er et lige heltal gælder, at $(a - b)$ og $(a + b)$ er lige heltal.*

Bevis:
Lad $(a^2 + b^2)$ være et lige heltal så gælder

$$2 \mid (a^2 + b^2) \Longrightarrow 2 \mid (a - b)(a + b).$$

Idet to er et primtal følger [Allenby, 1991, Definition 1.3.5 (iii)], at $2 \mid (a - b)$ eller $2 \mid (a + b)$. Antag W.L.O.G at $2 \mid (a - b)$; dvs

$$\frac{a - b}{2} = m \iff a - b = 2m \qquad \text{for} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Heraf følger

$$\frac{a + b}{2} = \frac{a - b + 2b}{2} = \frac{2m + 2b}{2} = \frac{2(m + b)}{2} = (m + b) \in \mathbb{Z};$$

dvs $2 \mid (a + b)$. ■

C.3 Kroneckerprodukt

I almindelighed er Kroneckerproduktet ikke kommutativt ligesom almindelig matrixmultiplikation ikke er kommutativt for matricer forskellig fra identitets-matricen.

Lemma C.3.1 *Lad $\mathbf{B}$ være nabomatrix for en $(n, k; \lambda, \mu, t)$-RSRG. Så gælder*

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) = (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m).$$

Bevis:
Ved brug af lemma 5.1.2 og lemma 5.1.3 fås

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m)) &= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m) \\
&= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m) - (\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m) \\
&= \mathbf{B}\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m^2 - \mathbf{B}\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m\mathbf{I}_m \\
&= \mathbf{I}_n\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m^2 - \mathbf{I}_n\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_m\mathbf{J}_m \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) - (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}_m - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m) \\
&= (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_m - \mathbf{I}_m))(\mathbf{B} \otimes \mathbf{J}_m).
\end{aligned}
$$

■

Symbolliste

Symbol	Betydning	Side
$\mathbb{N}$	mængden af naturlige tal	
$\mathbb{Z}$	mængden af hele tal	
$\mathbb{Q}$	mængden af rationale tal	
$\mathbb{R}$	mængden af reelle tal	
$\mathbb{C}$	mængden af komplekse tal	
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionale Euklidiske rum	
$\cap$	fællesmængde	
$\cup$	foreningsmængde	
$\subseteq$	er en delmængde af	
$\subset$	er en ægte delmængde af	
$\dim\{\,\mathbf{C}\,\}$	dimensionen af $\mathbf{C}$	
Γ	endelig graf	5
$\overline{\Gamma}$	den komplementære graf til en given graf Γ	5
$V\Gamma$	punktmængden for en graf Γ	5
$E\Gamma$	kantmængden for en graf Γ	5
$\{u,v\}$	en kant mellem to punkter u og v i en givet graf	5
K_n	en komplet graf med n punkter	7
$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	komplet mangedelt graf med k punktklasser og n_i, $i=1,\ldots,k$ punkter i hver klasse	7
$\mathbf{A}$	nabomatrix for en graf Γ	8
$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$	trace af en matrix $\mathbf{A}$	8
$\mathbf{I}$	identitetsmatricen	9
$\mathbf{J}$	matricen med én i alle indgange	9
$\boldsymbol{j}$	$\mathbf{1}$-vektoren	10
$\overline{\mathbf{A}}$	nabomatrix for den komplementære graf $\overline{\Gamma}$	11
$\ker\{\,\mathbf{A}\,\}$	kernen af en lineær transformation $\mathbf{A}$	12
$\mathrm{null}\{\,\mathbf{A}\,\}$	nulrummet af en matrix $\mathbf{A}$	16
$\mathbb{V}_i$	egenrummet hørende til egenværdien $i\in\{k,\theta,\rho\}$	16
$\mathbf{E}_i$	projektionsmatrix på egenrummet $\mathbb{V}_i$ for $i\in\{k,\theta,\rho\}$	16
$\mathrm{Span}\{\,\mathbb{V}_k,\mathbb{V}_\theta,\mathbb{V}_\rho\,\}$	vektorrummet udspændt af $\mathbb{V}_k,\mathbb{V}_\theta$ og $\mathbb{V}_\rho$	16
$\mathrm{Range}\{\,\mathbf{A}\,\}$	billedrummet af en lineær transformation $\mathbf{A}$	17
$\mathrm{rank}\{\,\mathbf{A}\,\}$	dimensionen af billedrummet af en lineær transformation $\mathbf{A}$	17
$\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$	Schur-Hadamard produktet mellem $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$	17

Symbol	Betydning	Side
GF(q)	endeligt legeme med q elementer	29
Q	mængden af kvadrater	29
N	mængden af ikke-kvadrater	32
LK_n	latinsk kvadrat af orden n	33
$L_r(n)$	latinsk kvadrat graf	33
$f_a(x,y)$	repræsentation af et LK_n ved et polynomium	35
$\mathcal{F}$	retningsbestemt graf	39
$u \to v$	retningsbestemt kant fra u til v	39
$\mathbf{B}$	nabomatrix for en retningsbestemt graf	39
RSRG	retningsbestemt stærkt regulær graf	40
k	indgraden og udgraden	5,40
λ	antal stier af længde to givet at $u \to v$	5,40
μ	antal stier af længde to givet at $u \nrightarrow v$	5,40
t	antal ikke-retningsbestemte kanter incident med u	40
W.L.O.G	uden tab af generalitet	48
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Kroneckerproduktet mellem to matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$	52
$\mathbf{I}_k$	$k \times k$ identitetsmatrix for ethvert k	53
$\mathbf{J}_k$	$k \times k$ matrix med én i alle indgange for ethvert k	53
$\mathbf{H}$	skæv Hadamard matrix	62
id(v)	antal punkter der dominerer v	65
id(v, w)	antal punkter der dominerer både v og w	65
$\boldsymbol{j}_k$	vektoren bestående af k ét-taller	71
$\{0,1\}$-matrix	matrix med indgange lig én eller nul	71
$\|\boldsymbol{y}\|$	normen eller længden af en vektor	72
d(v, w)	afstanden mellem v og w	83
T_n	turnering af orden n	85
od(v)	antal punkter domineret af v	85
od(v, w)	antal punkter domineret af v og w	85
DRT_n	dobbelt regulær turnering af orden n	85
$\tau(e)$	antal kredse af længde tre indeholdene kanten e	87
HT_n	homogen turnering af orden n	87
$\mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$	direkte sum mellem to vektorrum	100
$a \mid b$	a går op i b	104
gcd (a, b)	den største fælles divisor af a og b	104

Litteraturliste

R.B.J.T. Allenby. *Rings, Fields and Groups. An Introduction to Abstract Algebra.* Edward Arnold, second edition, 1991.

Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right.* Springer, second edition, 1997.

V. Belevitch. Theory of 2n-terminal networks with application to conference telephony. *Elect. Commun.*, 27:231–244, 1950.

Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory.* Cambridge University Press, second edition, 1993.

D. Blatt and G. Szekeres. A skew hadamard matrix of order 52. to appear.

R.C. Bose. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. *Pacific Journal of Mathematics*, 13:389–419, 1963.

R.C. Bose and D.M. Mesner. On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. *Ann. Math. Statist.*, 30: 21–38, 1959.

P. J. Cameron and J. H. van Lint. *Designs, Graphs, Codes and their Links.* Number 22 in London Math. Society Student Texts. Cambridge University Press, 1991.

Gary Chartrand and Linda Lesniak. *Graphs and Digraphs.* Chapman and Hall, third edition, 1996.

Art M. Duval. A directed graph version of strongly regular graphs. In Marshall Hall Jr., Basil Gordon, and Bruce Rothschild, editors, *Journal of Combinatorial Theory*, volume 47 of *A*, pages 71–100. Academic Press, Inc., 1988.

John B. Fraleigh and Raymond A. Beauregard. *Linear Algebra.* World Student series edition. Addison-Wesley, third edition, 1995.

C. D. Godsil. *Algebraic Combinatorics.* Chapman and Hall, New York-London, 1993.

Chris Godsil and Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory.* Number 207 in Graduate Texts in Math. Springer, New York, 2001.

J. M. Goethals and J.J. Seidel. A skew hadamard matrix of order 36. *J. Australian Math. Soc.* to appear.

J.M Goethals and J.J. Seidel. Strongly regular graphs derived from combinatorial designs. *Canad. J. Math.*, 22:597–614, 1970.

J.L. Gramkow and M.D. Hansen. Konstruktion og entydighed af stærkt regulære grafer. Master's thesis, Aalborg University, 1997.

D. H. Griffel. *Linear Algebra and its Applications*, volume 2: More Advanced of *Mathematics and its Applications*. Ellis Horwood Limited, 1989.

M. Hall. *Combinatorial Theory*. Discrete Mathematics. Wiley-Interscience, John Wiley and sons, Inc., second edition, 1986.

J.M. Hammersley. The friendship theorem and the love problem. In E. Keith Lloyd, editor, *Surveys in Combinatorics, Invited papers for the ninth British Combinatorial Conference 1983*, number 82 in London Mathematical Society Lecture Note Series, pages 31–54. Cambridge University Press, 1983.

D.G. Higman. A survey of some questions and results about rank 3 permutation groups. *Actes Congrès Intern. Math. Nice 1970*, I:361–365, 1971. Gauthier-Villars.

Sylvia A. Hobart. *Parameters of directed strongly regular graphs*. http://www.cwi.nl/ aeb/math/dsrg/dsrg.html, 2001.

A.J. Hoffman. Eigenvalues of graphs. In D.R. Fulkerson, editor, *Studies in Graph Theory, Part II*, pages 225–245. Math. Assoc. Amer., 1975.

Leif K. Jørgensen. Linedigraphs as dsrg's. Aalborg University, Department of Mathematical Sciences, July 1999.

Leif K. Jørgensen. Non-existence of directed strongly regular graphs, 2000. Dept. of Math. Sci., Aalborg University.

T.H. Koornwinder. A note on the absolute bound for systems of lines. *Proc. KNAW A 79 (=Indag. Math. 38)*, 38:152–153, 1976.

Søren Kveiborg and Mette Louise Laursen. Stærkt regulære grafer - grafteoretiske egenskaber. Master's thesis, Aalborg University, Dept. of Math. Sci., 1997.

David C. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. Addison Wesley, second edition, 1997.

Charles F. Laywine and Gary L. Mullen. *Discrete Mathematics Using Latin Squares*. Discrete Mathematics and Optimization. Wiley Interscience, John Wiley and Sons, Inc., 1998.

Carl D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Siam, Philadelphia, 2000.

A. Neumaier. Strongly regular graphs with smallest eigenvalue -m. *Archiv der Mathematik*, 33:392–400, 1979.

A. Neumaier. New inequalities for the parameters of an association scheme. In S. B. Rao, A. Dold, and B. Eckmann, editors, *Combinatorics and Graph Theory (Proceedings, Calcutta 1980)*, number 885 in Lecture Notes in Math., pages 365–367. Springer, Berlin-New York, 1981.

Vera Pless. *Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes.* Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, Inc., third edition, 1998.

K.B. Reid and Ezra Brown. Doubly regular tournaments are equivalent to skew hadamard matrices. In *Journal of Combinatorial Theory*, number 12 in A, pages 332–338. Academic Press, Inc., 1972.

Herbert John Ryser. *Combinatorial Mathematics.* Number Fourteen in The Carus Mathematical Monographs. The Mathematical Association of America, 1963.

L.L. Scott. A condition on higman's parameters. *Notices American Mathematical Society*, pages A–97, 1973.

Jennifer Seberry and Mieko Yamada. Hadamard matrices, sequences, and block designs. In Jeffrey H. Dinitz and Douglas R. Stinson, editors, *Contemporary Design Theory, A collection of Surveys*, pages 431–560. Wiley-Interscience, John Wiley and sons, Inc., 1992.

E. Sernesi. *Linear Algebra, A geometric approach.* Chapman and Hall, 1993.

G. Szekeres. Tournaments and hadamard matrices. *Enseignement Math.*, T. XV:269–278, 1969.

Stikordsregister