Kapitel 1

Topologiske vektorrum

Forud for topologiske vektorrum, har vi beskæftiget os med vektorrum, normerede rum og topologiske rum. Gennem dette projekt vil ordet *vektorrum* henvise til et vektorrum over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Ydermere vil grundlæggende kendskab til ovennævnte rum fordudsættes. Vi kan nu definere et topologisk vektorrum.

Definition 1.0.1 (Topologisk vektorrum)
Lad τ være en topologi på at vektorrum X så

i hvert punkt $\{x\}$ i X er en lukket mængde, og

ii afbildningerne

$$\begin{array}{lll} x, y \mapsto x + y & \text{af } X \times X & \text{ind i } X \\ \lambda, x \mapsto \lambda x & \text{af } \mathbb{F} \times X & \text{ind i } X \end{array}$$

er kontinuerte.

Så siges τ at være vektortopologien på X, og X kaldes et topologisk vektorrum*. Herefter forkortet t.v.r.*

Specielt er X et Hausdorff rum, idet der til to punkter $x \neq y$ findes omegne U_1 af x og U_2 af y, så $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Lad nemlig $E = x$ og $G = y$, begge lukkede mængder, og sæt $U_1 = E^\circ$ og $U_2 = G^\circ$, det indre af af henholdsvis E og G. Da er $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. (er det rigtigt?)

En delmængde E af et t.v.r siges at være begrænset, hvis der til enhver omegn V af 0 i X hører et tal $s > 0$, så $E \subset tV \ \forall t > s$.

Definition 1.0.2
Mængden $Y \subset X$ kaldes

1. konveks*, hvis*

$$tx + (1-t)y \subset Y \quad \text{for } 0 < t < 1 \text{ når } x, y \in Y.$$

2. balanceret*, hvis*

$$\alpha Y \subset Y \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \text{hvor } \|\alpha\| \leq 1.$$

3. begrænset *(mht. τ), hvis der for hver omegn U af 0 findes $t > 0$, så $Y \subset tU$.*

Til et t.v.r X hører to operatorer; *Translationsoperatoren*, T_a, og *Multiplikationsoperatoren*, M_λ, hvor

$$T_a(x) = a + x, \;\; M_\lambda(x) = \lambda x$$

for hver $x, a \in X$ og $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Sætning 1.0.3
Lad X være et t.v.r.

1. *T_a og M_λ er homeomorfier fra X ind i X.*
2. *Enhver omegn U af 0 indeholder en balanceret omegn V af 0.*
3. *Enhver konveks omegn U af 0 indeholder en balanceret konveks omegn V af 0.*

Bevis:

1. Af definitionen på t.v.r får vi, at afbildningerne T_a og M_λ er kontinuerte. Deres inverse T_{-a} og $M_{1/\lambda}$ er også kontinuerte, idet $-a \in X$ og $\frac{1}{\lambda} \in X$, da X er et vektorrum. Alt i alt er de fire afbildninger altså kontinuerte, hvilket viser påstanden.

2. Lad U være en omegn af 0 i X. Da skalarmultiplikation er kontinuert, findes et $\delta > 0$ og en omegn W om 0 i X, så $\alpha W \in U$, når $\|\alpha\| < \delta$. Sæt $V = \bigcup \alpha W$. Så er V en omegn af 0, den er balanceret og $V \subset U$.

3. Antag at U er en konveks omegn af 0 i X. Lad $A = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha\|=1} \alpha U$. Lad V være som i 1. Da V er balanceret, er $\alpha^{-1} V = V$ for alle $\|\alpha\| = 1$, og dermed er $V \subset \alpha U$. Altså er V en omegn af 0. Da det er fællesmængden af konvekse mængder, er V også konveks. Vi mangler bare at vise, at V er balanceret. For $\lambda = 0$ er $\lambda V \subset V$. For $0 < \|\lambda\| \leq 1$ er

$$\lambda V = \|\lambda\| \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha\|=1} \alpha U = \|\lambda\| \bigcap_{\beta \in \mathbb{F}, \|\beta\|=1} \beta U \subset V,$$

hvor $\beta = \alpha\lambda / \|\lambda\|$. Den sidste inklusion følger af, at αU er en konveks mængde, der indeholder 0.

$\blacksquare$

En konsekvens af denne sætning er, at enhver vektortopologi er translationsinvariant (eller bare invariant). Dvs. at en mængde $E \subset X$ er åben hvis og kun hvis $a + E$ er åben for alle $a \in X$. Altså er τ fuldstændig bestemt udfra en lokal basis om 0; et system $\mathcal{B}$ af omegne af 0, så at enhver omegn af 0 indeholder en mængde $U \in \mathcal{B}$.

En metrik d på et vektorrum X kaldes invariant, hvis

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \;\; \forall x, y, a \in X.$$

Vi kan nu definere forskellige typer af topologiske vektorrum.

Definition 1.0.4
Lad X betegne et t.v.r med topologien τ.

1. *X kaldes lokalkonvekst, hvis der eksisterer en lokal basis $\mathcal{B}$, der indeholder konvekse mængder.*
2. *X kaldes lokalbegrænset, hvis der eksisterer en begrænset omegn om 0.*
3. *X kaldes lokalkompakt, hvis der eksisterer en omegn om 0, der har en kompakt aflukning.*
4. *X kaldes metriserbart, hvis der eksistere en metrik på X, så topologien på X er identisk med topologien defineret ved denne metrik.*
5. *X kaldes et Fréchet rum, hvis X er metriserbart med en translationsinvariant metrik, fuldstændigt og lokalkonvekst.*

For mængderne X, Y betyder udtrykket $f : X \to Y$, at f afbilder X ind i Y. Hvis nu $A \subset X$ og $B \subset Y$, så er billedet af afbildningen defineret som $f(A) = \{f(x) \| x \in A\}$ og det inverse billede som $f^{-1}(B) = \{x \| f(x) \in B\}$. Lad nu X, Y være vektorrum over det samme skalarlegeme. En afbildning $\Lambda : X \to Y$ siges at være lineær, når $\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda x + \beta\Lambda y \;\; \forall x, y \in X,$ og α, β. Lineære afbildninger fra X ind i sit skalarlegeme kaldes *lineære funktionaler*.

Vi kender begrebet Cauchy følge i et metrisk rum (X, d): En følge $\{x_n\}$ i X er en cauchy følge, hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et N, så $d(x_m, x_n) < \epsilon$, når $m, n > N$. Hvis alle Cauchy følger i X konvergerer til et punkt i X, siges X at være fuldstændigt. Lad nu (X, τ) være et t.v.r og lad $\mathcal{B}$ være en lokal basis for topologien τ. Så siges en følge $\{x_n\}$ at være en Cauchy følge, hvis der til ethvert $V \in \mathcal{B}$ findes et N, så $x_n - x_m \in V$ for $n, m > N$. Hvis nu topologien τ er givet ved en invariant metrik d, er de to Cauchy følge begreber ens, idet $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$ og kuglerne omkring 0 danner en lokal basis for τ.

Definition 1.0.5 (Seminorm)
En seminorm p på et vektorrum X er en funktion $p : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, der opfylder følgende

i $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *for* $x, y \in X$.

ii $p(\alpha x) = \|\alpha\| p(x)$ *for* $\alpha \in \mathbb{F}$ *og* $x \in X$.

En familie $\mathcal{P}$ af seminormer på X kaldes separerende, når der for hvert $x_0 \in X \setminus \{0\}$ findes et $p \in \mathcal{P}$ med $p(x_0) > 0$.

Sætning 1.0.6
Lad $\mathcal{P}$ være en familie af separerende seminormer på vektorrummet X. Definer de konvekse balancerede mængder

$$V(p, \epsilon) = \{x \| p(x) < \epsilon\}, \;\; p \in \mathcal{P} \text{ og } \epsilon > 0.$$

Lad $\mathcal{B}$ være en basis for omegnssystemet ved 0 bestående af disse mængder samt deres endelige fællesmængder

$$W(p_1, \ldots, p_N; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) = V(p_1, \epsilon_1) \cap \ldots \cap V(p_N, \epsilon_N).$$

En basis for omegnssystemet ved hvert $x \in X$ består af de translaterede mængder $x + W(p_1, \ldots, p_N; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N)$. Så er $\mathcal{B}$ en konveks balanceret lokal basis for en topologi τ på X, som gør X til et lokalkonvekst rum, så

1. *hvert $p \in \mathcal{P}$ er kontinuerte afbildninger af X ind i $\mathbb{R}$ og*
2. *en mængde $E \subset X$ er begrænset hvis og kun hvis $p(E)$ er begrænset i $\mathbb{R}$ for alle $p \in \mathcal{P}$.*

Bevis:

■

Sætning 1.0.7
Lad $\mathcal{P} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ være en numerabel separerende familie af seminormer, der definerer topologien på et t.v.r X. Da er X metriserbart med topologien på X defineret ved den invariante metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}. \tag{1.1}$$

Kuglerne $B(0, r)$ i denne metrik er balancerede.

Bevis:
Rækken (1.1) ■

Ł