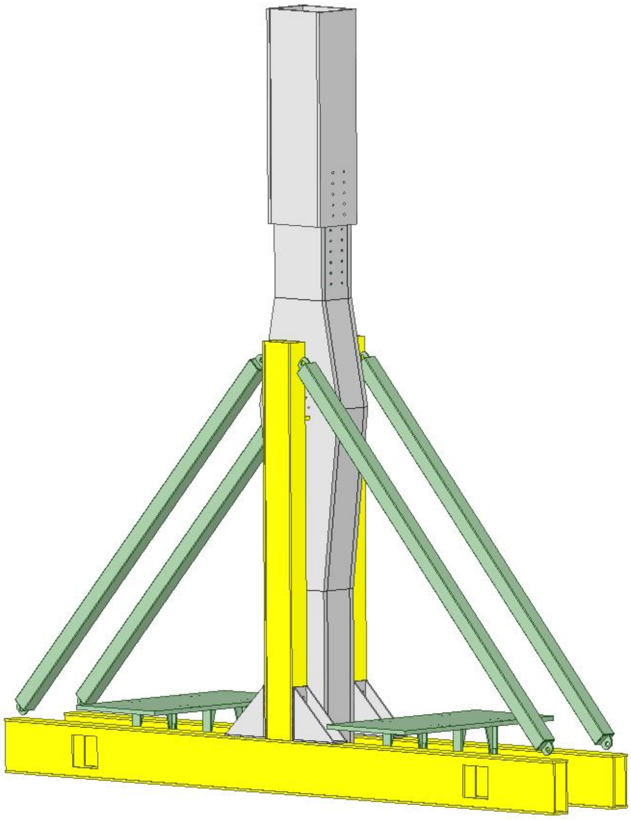
Tillæg til Diplom - Bachelorprojekt

Institut for Materialer & Produktion - 7. semester



Skrevet af: Lars Undén Jensen

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet
Institut for Materialer & Produktion

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Fibigerstræde 16, 9220 Aalborg Øst
Tlf. 9940 3005

Titel: Tillæg til Diplom - Bachelorprojekt
Projektperiode: 20. februar 2018 - 2. marts 2018

Skrevet af:

Lars Undén Jensen

Vejleder:

Mikael Larsen

Bivejleder:

Lars Rosgaard Jensen

Synopsis

Dette tillæg laves som et supplement til Diplom - Bachelorprojekt, hvorfra det forventes læserne har kendskab til det foregående projekt. Derfor vil opstillingen ikke gennemgås detaljeret, men kun i et omfang der giver forståelse af funktionen.
Dette tillæg omhandler en ny kinematisk analyse af konstruktionen med efterfølgende bestemmelse af den dynamiske belastning af bjælken. Endvidere laves der en faststofmekanisk analyse af et enkelt snit i bjælken med tilhørende styrkeberegning og evaluering af snittet.

Sideantal: 37
Afsluttet: 02-03-2018

Indholdsfortegnelse

Kapitel 1 Introduktion til analyse 1

Kapitel 2 Kinematisk og dynamisk analyse 3
- 2.1 Antal frihedsgrader . . . 3
- 2.2 Kinematisk beskrivelse . . . 3
  - 2.2.1 Bestemmelse af position . . . 8
  - 2.2.2 Bestemmelse af hastighed . . . 10
  - 2.2.3 Bestemmelse af acceleration . . . 11
- 2.3 Resultat . . . 12
  - 2.3.1 Position . . . 12
  - 2.3.2 Hastighed . . . 13
  - 2.3.3 Acceleration . . . 14

Kapitel 3 Dynamiske Laster 15
- 3.1 Resultat . . . 17

Kapitel 4 Faststofmekanisk analyse 19
- 4.1 Definering af egenlasten . . . 20
- 4.2 Snitkræfter i bjælken . . . 22
  - 4.2.1 Snitkræfter xy - plan . . . 22
  - 4.2.2 Resultat af snitkræfter . . . 27
- 4.3 Beregning af snit ved rotationspunktet . . . 28
- 4.4 2. Ordens areal inertimoment . . . 31
- 4.5 Beregning af punkt A . . . 32
- 4.6 Beregning af punkt B . . . 33
- 4.7 Spændingskoncentration . . . 33
- 4.8 Sikkerhedsmargin . . . 34
  - 4.8.1 Sikkerhed imod flydning . . . 34
  - 4.8.2 Sikkerhed imod brud . . . 34
- 4.9 Resultat . . . 35

Kapitel 5 Konklusion 37

Litteratur 39

Appendiks A Appendiks A41

Appendiks B Anbefaling A43

Appendiks C Kinematisk udregning A45

Appendiks D Fastofmekanisk analyse A58

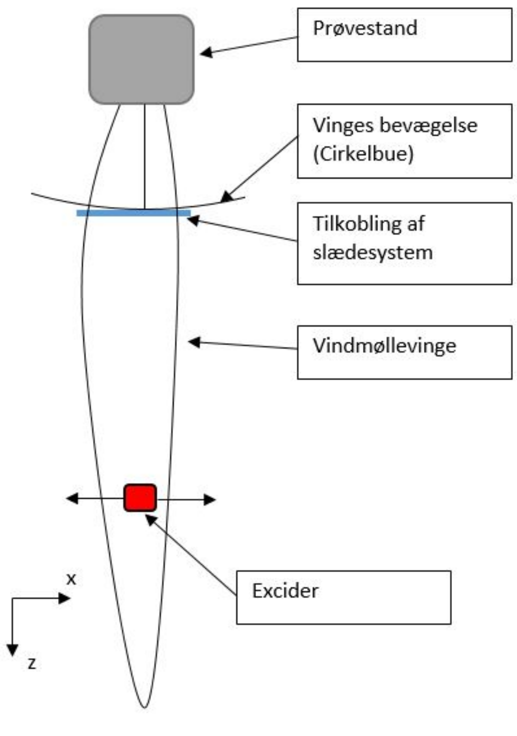
Appendiks E Kinematisk resultat **A59**

Appendiks F Samletegning **A61**

Introduktion til analyse 1

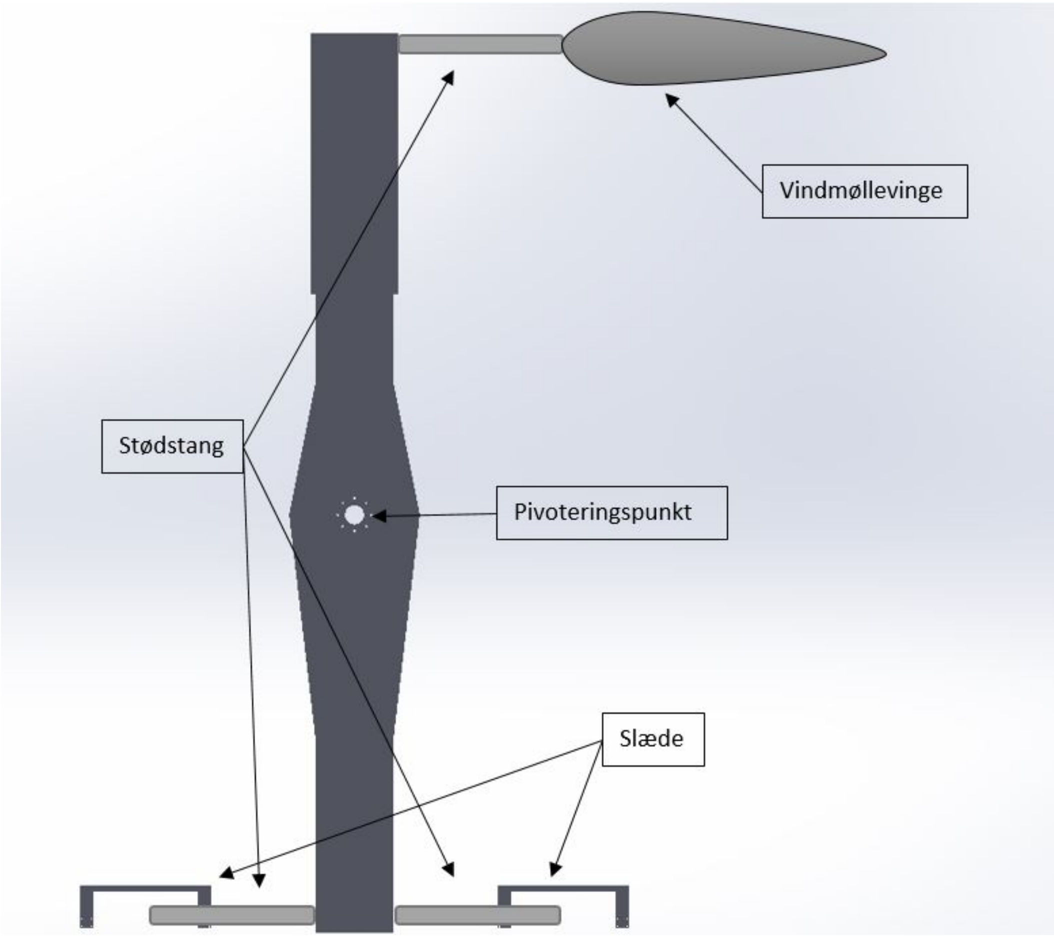
For at kunne beregne de dynamiske kræfter på bjælken laves en kinematisk analyse. Gennem analysen bestemmes position, hastighed og acceleration for massemidtpunktet i hvert af systemets legemer. Ved efterfølgende anvendelse af Newtons II og III love på disse variabler, kan de dynamiske kræfter bestemmes.

Excideren påvirker vingen, så den får en kantvis (vandret) bevægelse, se figur 1.1. Opstillingen medfører, at når vingen bevæges langs x-aksen, bevæger den sig i en cirkelbue rundt om y-aksen, altså xz planet, som også er angivet på figuren. Endvidere har designet af en vindmøllevinge det formål at generere et løft. Det medfører at vingens bevægelse langs x-aksen også medfører et løft i y-aksens retning. Disse to bevægelser er små for det område, hvor slædesystemet er tilkoblet. Derfor vælges det at se bort fra disse to bevægelser, og derved kun se bevægelsen i x-aksens retning.



Figur 1.1: Oversigt over testopstillingen af vindmøllevinge i kantvis udmattelsestest. Slædesystemet er tilkoblet kanten af vingen ved hjælp af et åg, som er fastspændt på tværs af vingen. Excideren er fastgjort til vingen ved hjælp af et hemmeligt design, som derfor ikke kan beskrives. Kraften fra excideren beskrives som påtrykt kanten af vingen med skiftende retning, som det er angivet på tegningen.

Som beskrevet i rapporten *Diplom - Bachelorprojekt* er der to slæder på systemet, se figur 1.2. Der regnes på slæderne som en samlet enhed. Dette kan gøres, idet slædernes montering på bjælken er symmetrisk. Ved at samle slæderne til en ækvivalent slæde på samme side af bjælken som vingen, fås en sammenlignelighed mellem systemet over og under pivoteringspunktet, se figur 1.2. Der er dog en mindre forskel på bjælkens længde over og under pivoteringspunktet.
En samletegning kan desuden ses i appendiks F.



Figur 1.2: Oversigt af de dele som indgår i den kinematiske analyse. Når der regnes med en ækvivalent slæde på højre side af bjælken, opnåes en næsten symmetrisk opstilling omkring pivoteringspunktet.

Kinematisk og dynamisk analyse 2

2.1 Antal frihedsgrader

Før den kinematiske analyse laves, kontrolles designet for antallet af frihedsgrader. Dette gøres for at sikre at designet kan realiseres. Da bjælken betragtes som værende tilnærmelsesvis symmetrisk, beregnes der kun for den øverste del.
Til dette anvendes *Grublers formel*, til definering af antallet af frihedsgrader.

$$m = 3\,(n-1) - 2f - h = 3\,(4-1) - 2 \cdot 4 - 0 = 1 \tag{2.1}$$

n	Antallet af links
f	Antallet af punkter med lav kontaktflade
h	Antallet af punkter med høj kontaktflade

Et punkt med lav kontaktflade er en ideel samling, som binder to legemer sammen, eksempelvis et charnierled. En højkontaktflade er et bevægeligt legeme, som skal holde kontakt med en overflade på et stationært objekt, eks. en cam follower. Som det ses fra resultatet i ligning (2.1) er det kun nødvendigt med én drivende kraft, hvilket i dette tilfælde vil være vingens påvirkning af systemet. På samme måde kan systemet under pivoteringspunktet defineres. Her vil den drivende kraft komme fra systemet over pivoteringspunktet. På baggrund af formel (2.1) er det muligt at formulere de kinematiske ligninger.

2.2 Kinematisk beskrivelse

Slædesystemet består af flere legemer, som er forbundet med hinanden som vist på figur 2.1. Hvert legeme har sit individuelle, lokale koordinatsystem, som er indtegnet på figuren. For at beskrive systemets bevægelse i det globale koordinatsystem, betragtes en koordinat transformation af de lokale koordinater til globale koordinater. Til dette anvendes Newton - Euler ligningen, se formel (2.2).
Det vælges at lægge origo for det globale koordinatsystem i pivoteringspunktet på bjælken, se figur 2.1. Pivoteringspunktet er det eneste punkt, som ikke udsættes for en translatorisk bevægelse. Endvidere vil en matematisk formulering af dette punkt som origo sikre, at punktet vil blive fastholdt.

$$\vec{r_i^p} = \vec{r_i} + A \cdot S_i'^p \tag{2.2}$$

$\vec{r_i^p}$	Globale koordinater af et punkt.
$\vec{r_i}$	Globale koordinater for lokale origo i
$S_i'^p$	Lokale koordinater, se ligning (2.4)
A	Rotationsmatrix, se ligning (2.5)

De globale koordinater for lokale origo i, som lægges i tyngdepunktet for legeme i.

$$r = \vec{\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}} \tag{2.3}$$

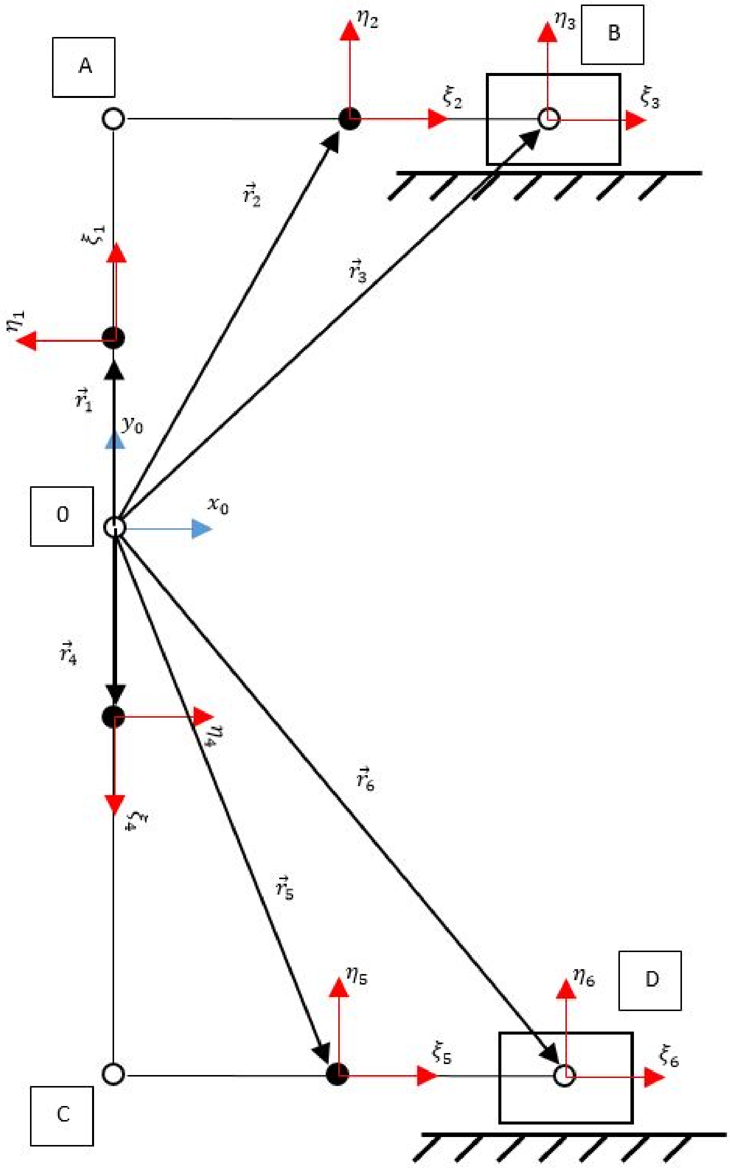
Lokalvektor som legeme i fra lokale origo til endepunkt i det lokale koordinatsystem. Det vil sige imellem tyngdepunktet til den ene ende af legemet i dette projekt.

$$S' = \begin{pmatrix} S_\xi \\ S_\eta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Rotationsmatrix roterer legemernes lokale vektorer til globale vektorer.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

De lokale koordinatsystemer indsættes i hvert legemes tyngdepunkt. Det vælges at placere origo i pivoteringspunktet for bjælken, da dette punkt ikke har en translatorisk bevægelse, se figur 2.1. Samtlige Φ_i måles fra x - aksen og modurs retning.



Figur 2.1: Oversigt over de lokale koordinatere samt led. Samtlige Φ_i måles fra x - aksen og modurs retning

Da bjælken ikke er prismatisk, er det nødvendigt at beregne tyngdepunktet. Det vælges at adskille bjælken ved pivoteringspunktet. Derved findes tyngdepunktet for både den del af bjælken som er over og den del, som er under pivoteringspunktet.

De lokale koordinatsystemer defineres som følger:

$$S_1'^{\,0} = \begin{pmatrix} L_{k,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1'^{\,A} = \begin{pmatrix} L_{k,2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2'^A = \begin{pmatrix} \frac{-L_{k,3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2'^B = \begin{pmatrix} \frac{L_{k,3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3'^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tyngdepunkt

For at bestemme bjælkens øverste tyngdepunkt, anvendes følgende formel:

$$R = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot r_i \tag{2.6}$$

Q	Samlede egenlast
q_i	Sektionsvis egenlast
r_i	Sektionsvis tyngdepunkts afstand

Hertil opdeles den øverste del af bjælken i fire sektioner:
sektion 6+5, sektion 4+5 og sektion 3. Sektion 3 opdeles yderligere i to dele.
Bestemmelse af egenlasterne kan ses i afsnit 4.1, og sektionerne på oversigtsfigur 4.1.

Sektion 6 + 5

Da denne sektion er prismatisk, kan det antages at det lokale tyngdepunkt ligger i center af røret. Herved kan afstanden fra pivoteringspunktet til sektion 6 + 5 findes:

$$r_{6+5} = \frac{L_6}{2} + L_3 + L_4 = 2,25m$$

$$q_{6+5} = A_b \cdot \rho \cdot g \cdot (L_6 + L_5) = 8601N$$

Sektion 4 + 5

Denne sektion er også prismatisk, derved kan antagelserne fra før genanvendes.

$$r_{4+5} = \frac{L_4 + L_5}{2} + L_3 = 1,50m$$

$$q_{4+5} = A_1 \cdot \rho \cdot g \cdot (L_4 + L_5) = 6890N$$

Sektion 3 del 1

Sektion 3 er ikke prismatisk, derfor vælges det at opdele denne sektion i to dele. En prismatisk og en ikke-prismatisk sektion. Del 1 beskriver den prismatiske del. Herved anvendes antagelserne fra før:

$$r_{3,1} = \frac{L_3}{2} = 0,50m$$

$$q_{3,1} = A_1 \cdot \rho \cdot g \cdot L_3 = 6890N$$

Sektion 3 del 2

Denne del beskriver den ikke-prismatiske del. Formen for q er som en retvinklet trekant. Det vil sige at tyngdepunktet ligger en tredjedel fra endepunktet.

$$r_{3,2} = \frac{L_3}{3} = 0,33m$$

På samme vis anvendes trekantsberegning til beregning af egenvægten.

$$q_{3,2} = \frac{1}{2}\left(A_2 - A_1\right) \cdot \rho \cdot g \cdot L_3 = 1531N$$

Herved kan det ækvivalente tyngdepunkt findes:

$$L_{k,1} = \frac{1}{q_{6+5} + q_{4+5} + q_{3,1} + q_{3,2}}\left(q_{6+5} \cdot r_{6+5} + q_{4+5} \cdot r_{4+5} + q_{3,1} \cdot r_{3,1} + q_{3,2} \cdot r_{3,2}\right) = 1,41m$$

Den resterende længde fra tyngdepunktet til toppen af bjælken, findes ved at regne differencen mellem bjælkens højde over pivoteringspuktet (3 meter).

$$L_{k,2} = 3 - L_{k,1} = 1,59m$$

Det antages at stødstangen er prismatisk og derfor vil tyngdepunktet være placeret i center af stangen. Længden blev defineret i Diplom - Bachelorprojektet til 0,50 meter. Derved fåes $L_{k,3} = 0,25m$.

Den samme metode er anvendt til at beregne systemet under pivoteringspunktet. Dette vil ikke blive gennemgået igen, her vil resultaterne kun blive listet og indsat i de lokale koordinatsystemer.

$$S_4'^{\,0} = \begin{pmatrix} -1,31 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_4'^{\,C} = \begin{pmatrix} 1,89 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_5'^{C} = \begin{pmatrix} -0,34 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_5'^{D} = \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_6'^{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.1 Bestemmelse af position

Med de lokale koordinater samt længder af legemerne defineret, kan de kinematiske ligninger formuleres. Det vælges at opstille dem for den øverste del af bjælken, altså over pivoteringspunktet, se figur 2.1.

Da vindmøllevingen driver slædesystemet, skal denne defineres som en drivende ligning. Det antages at vingen kun har en bevægelse langs x - aksen. Det vides at vingen har en bevægelse i y - aksen også, denne bevægelse skyldes at vingens bevægelse genererer løft. Dette medføre at vingen vil have bevægelse i y - aksen. Da slædesystemet anvendes relativ tæt på vingens rod, vil bevægelsen i y - aksen være minimal. Det vælges derfor at se bort fra vingens bevægelse i y - aksen.Til at definere vingens bevægelse i x - aksen anvendes den harmoniske bølgeligning, se ligning (2.7). Da vingen har fået legeme nr. 3, se figur 2.1, og derved sættes den harmoniske bølgeligning til x_3.

$$x_3(t) = A \cdot \sin\omega \cdot t \tag{2.7}$$

Her er:

A	Vingens amplitude på x - aksen	0,25 m
ω	Vinkelhastighed	$2 \cdot \pi \cdot f$, f=0,7 Hz

Betingelse	Punkt	Formel
Rotations led	0	$\left(\vec{r_1} + A_1 \cdot S_1'^{0}\right) - \vec{r_0} = 0$
Rotations led	A	$\left(\vec{r_1} + A_1 \cdot S_1'^{A}\right) - \left(\vec{r_2} + A_2 \cdot S_2'^{A}\right) = 0$
Rotations led	B	$\left(\vec{r_2} + A_1 \cdot S_2'^{B}\right) - \left(\vec{r_3} + A_3 \cdot S_3'^{B}\right) = 0$
Translations led	B	$\phi_3 = 0$ $y_3 - 3 = 0$
Aktuering		$x_3(t) - 0.5 - A \cdot s\sin\omega \cdot t = 0$

Da udformningen af systemet har en tilnærmelsesvis symmetri omkring pivoteringspunktet, anvendes samme procedure som ved øverste del. Til den drivende ligning for systemet under pivoteringspunktet, anvendes rotationen fra ϕ_1. Herved kan følgende ligning formuleres:

$$\phi_4 = \phi_1 + \pi$$

Betingelse	Punkt	Formel
Rotations led	0	$\left(\vec{r_4} + A_4 \cdot S_4'^{0}\right) - \vec{r_0} = 0$
Rotations led	C	$\left(\vec{r_4} + A_4 \cdot S_4'^{C}\right) - \left(\vec{r_5} + A_5 \cdot S_5'^{C}\right) = 0$
Rotations led	D	$\left(\vec{r_5} + A_5 \cdot S_5'^{D}\right) - \left(\vec{r_6} + A_6 \cdot S_6'^{D}\right) = 0$
Translation led	D	$\phi_6 = 0$ $y_6 - 3,2 = 0$
Aktuering		$\phi_4 - (\phi_1 + \pi) = 0$

Der er nu defineret 18 ligninger med 18 variabler ($\vec{r_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \phi_i$).

Ligningerne samles i en vektor Φ og sættes til nul.

$$\Phi = 0 \tag{2.8}$$

Herfra kan systemet af ligninger løses ved brug af en "solver". Resultatet kan ses i sektion 2.3.1.

2.2.2 Bestemmelse af hastighed

Med positionen til tiden [t] defineret, findes hastigheden for systemet i de samme punkter. Dette gøres ved at differentiere de allerede eksisterende ligninger i forhold til tiden [t].
Hertil anvendes *Jacobian* [D]. Den drivende ligning differentieres og defineres $\dot{\alpha}$. I $\dot{\alpha}$ kunne der også indgå andre ydre påvirkninger som eksempelvis friktion, men i denne analyse indgår kun inputtet fra den drivende ligning

$$D = \Phi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \qquad \dot{\alpha} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{2.9}$$

Her vises den kompakte form af hastighedsligningen.

$$D\dot{q} = \dot{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \dot{q} = D^{-1}\dot{\alpha} \tag{2.10}$$

Resultatet for hastigheds ligningerne vises herunder.

Betingelse	Punkt	Formel
Rotations led	0	$\left(\dot{r_1} + B_1 \cdot S_1'^{0} \cdot \dot{\phi_1}\right) - \dot{r_0} = 0$
Rotations led	A	$\left(\dot{r_1} + B_1 \cdot S_1'^{A} \cdot \dot{\phi_1}\right) - \left(\dot{r_2} + B_2 \cdot S_2'^{A} \cdot \dot{\phi_2}\right) = 0$
Rotations led	B	$\left(\dot{r_2} + B_2 \cdot S_2'^{B} \cdot \dot{\phi_2}\right) - \left(\dot{r_3} + B_3 \cdot S_3'^{B} \cdot \dot{\phi_3}\right) = 0$
Translations led	B	$\dot{\phi_3} = 0$ $\dot{y_3} = 0$
Aktuering		- A$\cdot\omega \cos(\omega \cdot t) = 0$
Rotations led	C	$\left(\dot{r_4} + B_4 \cdot S_4'^{0} \cdot \dot{\phi_4}\right) - \dot{r_0} = 0$
Rotations led	D	$\left(\dot{r_4} + B_4 \cdot S_4'^{D} \cdot \dot{\phi_4}\right) - \left(\dot{r_5} + B_2 \cdot S_5'^{D} \cdot \dot{\phi_5}\right) = 0$
Rotations led	E	$\left(\dot{r_5} + B_5 \cdot S_5'^{E} \cdot \dot{\phi_5}\right) - \left(\dot{r_6} + B_6 \cdot S_6'^{E} \cdot \dot{\phi_6}\right) = 0$
Translation led	E	$\dot{\phi_6} = 0$ $\dot{y_6} = 0$
Binde led		$\dot{\phi_4} - \dot{\phi_1} = 0$

Som før ved bestemmelse af position i sektion 2.2.1 er der 18 ligninger med 18 variabler $(\dot{x_i}, \dot{y_1}, \dot{\phi_i})$. ϕ_i til den samme tid indgår i hastighedsligningerne, idet der anvendes en rotationsmatrix B, som er rotationsmatrixen A efter den er differentieret.

$$B_i = \frac{\partial A_i}{\partial \Phi_i} = \begin{bmatrix} -\sin\phi_i & -\cos\phi_i \\ \cos\phi_i & -\sin\phi_i \end{bmatrix}$$

2.2.3 Bestemmelse af acceleration

For at bestemme de dynamiske kræfter i systemet er det også nødvendigt at finde accelerationerne for systemet. Dette gøres med samme metode som ved beregning af hastigheden. Altså hastifheden differentieres med hensyn til tiden [t].
Herved fåes:

$$\dot{D} = \frac{d\Phi}{dt} \tag{2.11}$$

$$D\ddot{q} + \dot{D}\dot{q} = \ddot{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{q} = D^{-1}\left(\ddot{\alpha} - \dot{D}\dot{q}\right) \tag{2.12}$$

Resultatet af differentieringen kan ses herunder.

Betingelse	Punkt	Formel
R - led	0	$\left(\ddot{r}_1 + B_1 \cdot {S'_1}^0 \cdot \ddot{\phi}_1 - A_1 \cdot {S'_1}^0 \cdot \dot{\phi}_1^{\,2}\right) - \ddot{r}_0 = 0$
R - led	A	$\left(\ddot{r}_1 + B_1 \cdot {S'_1}^A \cdot \ddot{\phi}_1 - A_1 \cdot {S'_1}^A \cdot \dot{\phi}_1^{\,2}\right) - \left(\ddot{r}_2 + B_2 \cdot {S'_2}^A \cdot \ddot{\phi}_2 - A_2 \cdot {S'_2}^A \cdot \dot{\phi}_2^{\,2}\right) = 0$
R - led	B	$\left(\ddot{r}_2 + B_2 \cdot {S'_2}^B \cdot \ddot{\phi}_2 - A_1 \cdot {S'_2}^B \cdot \dot{\phi}_2^{\,2}\right) - \left(\ddot{r}_3 + B_3 \cdot {S'_3}^B \cdot \ddot{\phi}_3 - A_3 \cdot {S'_3}^B \cdot \dot{\phi}_3^{\,2}\right) = 0$
T - led	B	$\ddot{\phi}_3 = 0$ $\ddot{y}_3 = 0$
Aktuering		$\ddot{x}_3 + A \cdot \omega^2 \sin\omega \cdot t = 0$
R - led	C	$\left(\ddot{r}_4 + B_4 \cdot {S'_4}^0 \cdot \ddot{\phi}_4 - A_4 \cdot {S'_4}^0 \cdot \dot{\phi}_4^{\,2}\right) - \dot{r}_0 = 0$
R - led	D	$\left(\ddot{r}_4 + B_4 \cdot {S'_4}^D \cdot \ddot{\phi}_4 - A_4 \cdot {S'_4}^D \cdot \dot{\phi}_4^{\,2}\right) - \left(\ddot{r}_5 + B_2 \cdot {S'_5}^D \cdot \ddot{\phi}_5 - A_5 \cdot {S'_5}^D \cdot \dot{\phi}_5^{\,2}\right) = 0$
R - led	E	$\left(\ddot{r}_5 + B_5 \cdot {S'_5}^E \cdot \ddot{\phi}_5 - A_5 \cdot {S'_5}^E \cdot \dot{\phi}_5^{\,2}\right) - \left(\ddot{r}_6 + B_6 \cdot {S'_6}^E \cdot \ddot{\phi}_6 - A_6 \cdot {S'_6}^E \cdot \dot{\phi}_6^{\,2}\right) = 0$
T - led	E	$\ddot{\phi}_6 = 0$ $\ddot{y}_6 = 0$
Binde led		$\ddot{\phi}_4 - \ddot{\phi}_1 = 0$

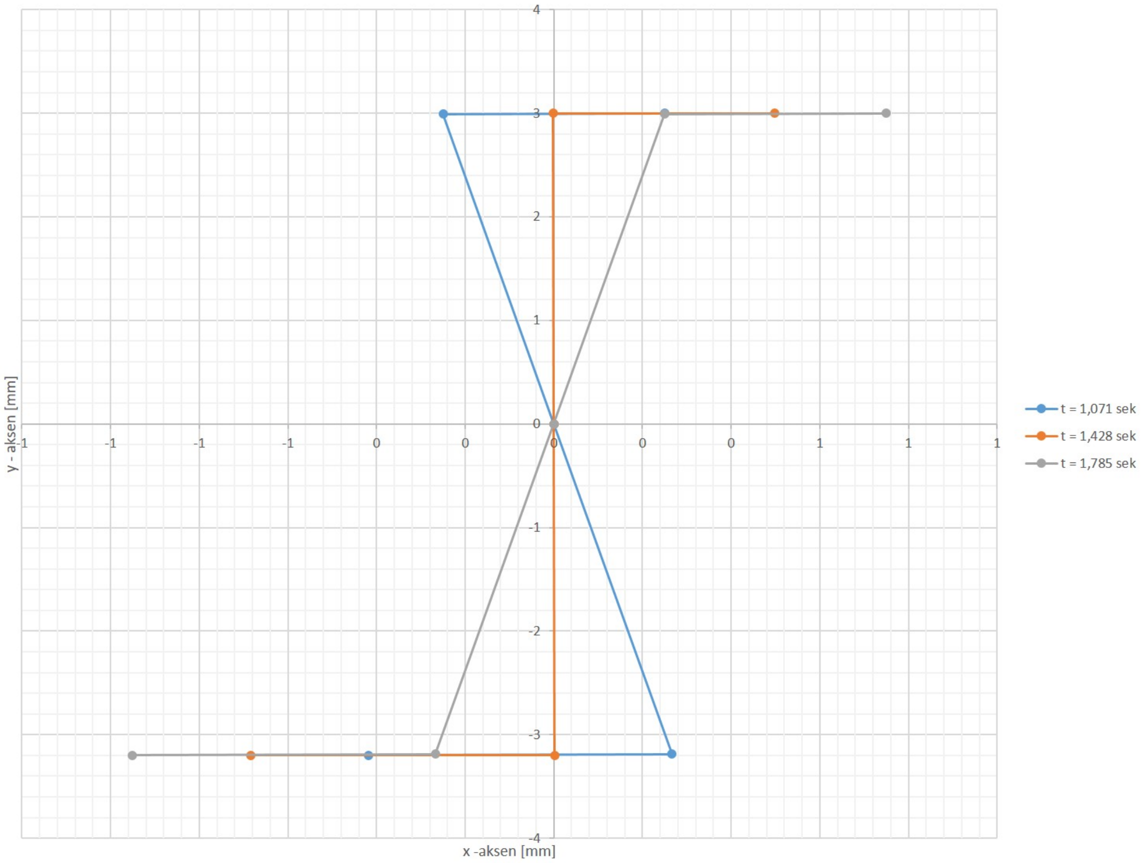
Som før ved beregning af position og hastighed for systemet er der 18 ligninger og 18 variabler $(\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{\phi}_i)$. Da både ϕ_i og $\dot{\phi}_i$ indgår, er det nødvendigt at beregne det samlede ligningssystem til samme tid.
Den fulde udregning kan ses i Appendiks C

2.3 Resultat

2.3.1 Position

Resultaterne kan ses i plot 2.2, og appendiks E.1. Da de kinematiske ligninger angiver positionen for tyngdepunktet for legemet, er der på plot 2.2 beregnet position for legemernes samlinger. Dette kan gøres, idet vinklen på legemerne samt deres længder kendes. Positionerne for samlingerne anvendes kun til illustration af 2.1.

På figur 2.2 er den nederste stødstang, legeme nr. 5, roteret 180° i forhold til figur 2.1. Årsagen til dette er, at resultatet kan give flere løsninger. Det antages ikke at have indflydelse på de efterfølgende kraftberegninger, idet slæden beregnes som et ækvivalent system.



Figur 2.2: Visning af resultat af den kinematiske analyse. Positionen angives for "hvile"position samt maksimal positiv- og negativ amplitude i x retning

2.3.2 Hastighed

Resultatet vises for den maksimale hastighed til tiden t = 1,428 sek. De resterende resultater kan ses i appendiks E.2.

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{y_1} \\ \dot{\phi_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{y_2} \\ \dot{\phi_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{y_3} \\ \dot{\phi_3} \\ \dot{x_4} \\ \dot{y_4} \\ \dot{\phi_4} \\ \ddot{x_5} \\ \dot{y_5} \\ \dot{\phi_5} \\ \dot{x_6} \\ \dot{y_6} \\ \dot{\phi_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,517 \\ -4,10 \cdot 10^{-04} \\ -0,366 \\ 1,100 \\ -4,38 \cdot 10^{-4} \\ 1,75 \cdot 10^{-3} \\ 1,100 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,481 \\ 1,14 \cdot 10^{-3} \\ -0,366 \\ -1,800 \\ 1,41 \cdot 10^{-3} \\ 4,10 cdot 10^{-2} \\ -1,180 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

2.3.3 Acceleration

Herunder vises resultat for q_i ved den maksimale acceleration til tiden 1,071 sek.
Årsagen til at $\dot{q}$ og $\ddot{q}$ angives i forskellig tider, skyldes at ved differentiering sker der en faseforskydning for hver differentiation.For de resterende resultater for acceleration, se appendiks E.3.

$$\ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{\phi}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{y}_5 \\ \ddot{\phi}_5 \\ \ddot{x}_6 \\ \ddot{y}_6 \\ \ddot{\phi}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,270 \\ 0,181 \\ -1,612 \\ 4,835 \\ 0,192 \\ -0,765 \\ 4,840 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -2,110 \\ -0,164 \\ -1,612 \\ -5,130 \\ -0,200 \\ -0,586 \\ -5,130 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Dynamiske Laster 3

På baggrund af den kinematiske analyse, kan de dynamiske kræfter findes.

Dette gøres ved at anvende Newtons anden lov. Hertil adderes det førliggende legemes kræfter g_j på det aktuelle legeme. Det vælges at se bort fra ydre påvirkninger som friktion, vindmodstand med mere.

$$M_i\ddot{q}_i + g_j = g_i \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{\Phi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x)_j \\ f(y)_j \\ n_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x)_i \\ f(y)_i \\ n_i \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Her er $J_i = m_i \cdot R_i^2$ det lokale, polære inertimoment. R_i er afstanden fra tyngdepunktet til det sted, hvor kraften påføres. Afstanden kan ses i sektion 2.2.1 da den er sammenfaldende med den lokale vektor S'.
Herved kan der opsættes et system af ligninger til at bestemme kræfterne på alle legemerne, som hverisær betragtes som et frit legeme, se figur 3.1.

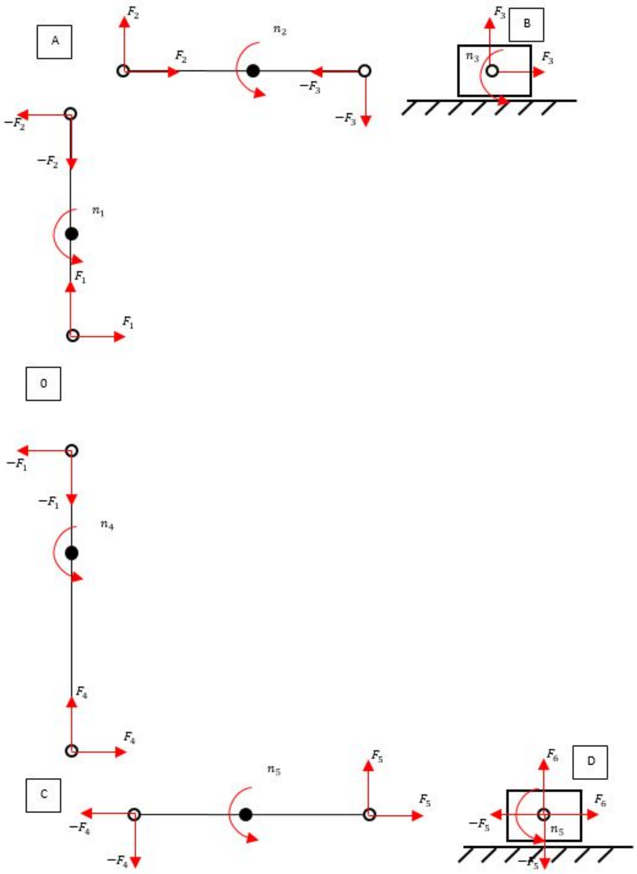
Ved at anvende Newtons tredje lov kan de dynamiske kræfter på hvert legeme fordeles imellem legemerne, og derved kan de interne kræfter defineres herunder.
Da det er vingen, som er den drivende kraft i slædesystemet, begyndes med den. Til massen af legeme nr. 3 anvendes den ønskede masse defineret i kravspecifikationerne fundet i Diplom bachelorprojektet. Massens størrelse er m=20.000 kg. Det vælges at se bort fra den polære inertimoment, idet det multipliceres med nul.

$$M_3\ddot{q}_3 = g_3 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 20,0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 20,0 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,840 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,8 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ved beregningen for legeme nr. to, hvilket er stødstangen mellem slædesystemet og vingen, tages der nogle antagelser. Da det ikke har været muligt at veje stødstang samt lejeår, vælges det at lave et estimat for massen. Der tages ikke forbehold for stødstangens styrke eller dens evne til at modstå belastningen påtrykt denne. Det vælges at stødstangen er hul og har en diameter på 25 cm med en tykkelse på 5 cm.

$$m_2 = A \cdot g \cdot \rho \cdot l = \left(\frac{0,25}{2} - \frac{0,20}{2}\right)^2 \pi \cdot 9,852 \cdot 7800 \cdot 0,50 = 68,9kg$$

Hertil skal der to lejeår som anslåes til 25 kg, så den endelige masse for $m_2 = 119kg$.



Figur 3.1: Her ses en skitse af de interne dynamiske kræfter på systemet.

Herved fåes

$$M_2\ddot{q}_2 - g_3 = g_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 119 & 0 & 0 \\ 0 & 119 & 0 \\ 0 & 0 & 7,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,835 \\ 0,192 \\ -0,765 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 96,8 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97,3 \cdot 10^3 \\ 22,8 \\ -5,68 \end{bmatrix}$$

For legeme nr. 1 beregnes den samlede egenvægt for q_1 som blev fundet til beregning af den kinematiske analyse i sektion 2.2

$$M_1\ddot{q}_1 - g_2 = g_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2427 & 0 & 0 \\ 0 & 2427 & 0 \\ 0 & 0 & 4825 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,270 \\ 0,181 \\ -1,612 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 97,3 \cdot 10^3 \\ 22,8 \\ -5,68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103 \cdot 10^3 \\ 461 \\ -7777 \end{bmatrix}$$

For legeme nr. 4 findes egenvægten, som ved beregning af legeme nr.1. Da bjælken er fast kan momentet overføres fra legeme nr. 1 til legeme nr. 4.

$$M_4\ddot{q}_4 - g_1 = g_4 \rightarrow \begin{bmatrix} 3097 & 0 & 0 \\ 0 & 3097 & 0 \\ 0 & 0 & 5346 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,110 \\ -0,164 \\ -1,612 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 103 \cdot 10^3 \\ 461 \\ -7777 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,4 \cdot 10^3 \\ -47,1 \\ -16,4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$M_5\ddot{q}_5 - g_4 = g_5 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 153 & 0 & 0 \\ 0 & 153 & 0 \\ 0 & 0 & 18,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5,130 \\ -0,200 \\ -0,586 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 96,4 \cdot 10^3 \\ -47,1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95,5 \cdot 10^3 \\ -77,8 \\ -10,6 \end{bmatrix}$$

Da den samlede masse på slæden ikke kendes, kan den findes på baggrund af de indbyrdes lokale belastninger, som påtrykkes legeme nr. 6.
Herved isoleres for M_6 matrixet.

$$M_6 = (g_6 + g_5) \cdot \ddot{q}_6^{\,-1} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 95,5 \cdot 10^3 \\ -77,8 \\ -10,6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 5,130 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,6 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1 Resultat

På bagrund af de dynamiske lastberegninger, beregninger er følgende laster på bjælken:

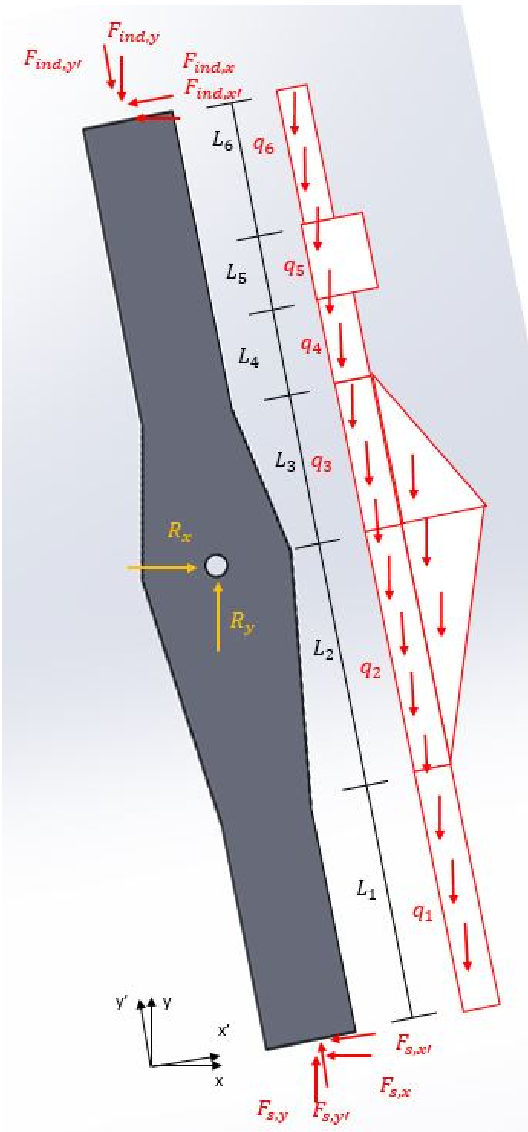
$$\begin{aligned} F_{2,x} &= F_{ind,x} = 102.885N \\ F_{2,y} &= F_{ind,y} = 460,1N \\ F_{4,x} &= F_{s,x} = 96.350N \\ F_{4,y} &= F_{s,y} = -47,1N \end{aligned} \tag{3.2}$$

Endvidere er den ækvivalente masse for begge slæder fundet. Dette indebære slædens egenvægt, samt hjulenes vægt mv. Som tidligere nævnt, er der ikke medregnet friktionskræfter. Hvis friktionskraften påføres vil dette medføre at massen m_6 vil blive reduceret.

$$m_6 = 18.627kg \tag{3.3}$$

Faststofmekanisk analyse 4

Med de dynamiske belastninger på bjælken defineret, laves der en faststofmekanisk analyse for at kontroller bjælkenssvne til at modstå den dynamiskebelastning.
Bjælken har en længde på 6,2 m, som roterer omkring et punkt 3,2 m fra bunden. På grund af bjælkens størrelse vælges det at medregne bjælkens egenvægt. Da bjælken ikke er prismatisk igennem hele dens længde, opdeles den i seks sektioner, hvor to af sektionerne har en varieret størrelse, se figur 4.1. En forstørret udgave kan ses i appendiks D.1.



Figur 4.1: Fritlegeme diagram af bjælken

4.1 Definering af egenlasten

For at finde egenlasten af bjælken er det nødvendigt at opdele bjælken i sektionsvise egenlaster. Hertil anvendes følgende variabler:
$\rho \approx 7800 \frac{kg}{m^3}$ massefylden for stål,
$g \approx 9,852 \frac{m}{s^2}$.

Arealerne samt længderne er taget fra det oprindelige projekt og gengives i tabel 4.1. Endvidere ses sektionerne på figur 4.1.

Tabel 4.1: Areal og længder for bjælken, fra diplom og bachelorprojektet.

A_1	$90,0 \cdot 10^{-3} m^2$	L_1	1,5m	L_4	0,5m
A_2	$130 \cdot 10^{-3} m^2$	L_2	1,7m	L_5	0,5m
A_{or}	$74,9 \cdot 10^{-3} m^2$	L_3	1,0m	L_2	1,0m

Herefter kan egenvægten beregnes for hver sektion.

A_i Det sektionsvise tværsnitsareal
y_i Den sektionsvise afstand langs bjælken
q_i Den sektionsvise egenlast

$$q_1 = A_1 \cdot \rho \cdot g \cdot y_i = 6,89 \cdot y_i \frac{kN}{m} \tag{4.1}$$

$$q_4 = A_1 \cdot \rho \cdot g \cdot y_i = 6,89 \cdot y_i \frac{kN}{m} \tag{4.2}$$

$$q_5 = (A_1 + A_{or}) \cdot \rho \cdot g \cdot y_i = 12,6 \cdot y_i \frac{kN}{m} \tag{4.3}$$

$$q_6 = A_{or} \cdot \rho \cdot g \cdot y_i = 5,73 \cdot y_i \frac{kN}{m} \tag{4.4}$$

Da bjælken ikke er prismatisk i sektion q_2 og q_3, er det nødvendig at finde en beskrivelse af q_i værdien til en bestemt afstand y_i. Der tages derfor udgangspunkt i linjesligning $[y_i = ax + b]$ som omskrives til $y_i = a \cdot q_i + b$.

Da værdierne for egenlasten ved start af sektion 2 $(q_1; y_1) = (6,89kN; 1,5)$ og slutningen af sektionen $(A_2 \cdot \rho \cdot g; y_1 + y_2) = (9,95kN; 3,2m)$ kan hældningskoefficient finde:

$$a = \frac{(y_1 + y_2) - y_1}{X_2 - x_1} = 0,56 \cdot 10^{-3}$$

Herefter findes b konstanten.

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = -3,83$$

Da det ønskes at finde værdien for q_i til en given afstand y_i omskrives ligningen. Endvidere vælges det at dele med y_i så udtrykket q_i kan multipliceres direkte ved udregning af snitkræfterne.

$$q_2 = \frac{y-b}{a} = 1801 \cdot y_i + 6890 = 1801 + \frac{6890}{y_i}$$

På samme måde findes egenlasten for sektion 3.

$$q_3 = -3062 \cdot y_i + 9953 = -3062 + \frac{9953}{y_i}$$

Frit-legeme-diagram for xy - planet

Da bjælken er simpel understøttet, er det nødvendigt at lave en antagelse. Pivoteringspunktet hvorom bjælken rotere, kan ikke optage et moment, se figur 4.1.
Da egenlasten skal bestemmes for hele bjælken, indsættes sektionsfulde længder $y_i = L_i$. Da den dynamiske last er fundet ved den maksimale acceleration, er det nødvendigt at foretage de statiske beregninger i samme vinkel, som de dynamiske laster er fundet ved.
Det vælges at lave snitkræfterne stykvis for hver sektion af bjælken, se figur 4.1. De dynamiske påvirkninger er fundet til tiden $t = 1,071$ sek., hvor bjælken er vippet er i sin fulde amplitude. Derfor vælges det at omregne de dynamiske påvirkninger til bjælkens orientering.

Først defineres en tilpasset vinkel, så bjælken orienteres i forhold til y - aksen i stedet for x - aksen, som udregnet ved de kinematiske beregninger.
De nye kræfter og vinkler er markeret med en ['] efter variablen.

$$\Phi_1' = \Phi_1 - \frac{\pi}{2} \tag{4.5}$$

$$\Phi_2' = \Phi_1 + \frac{\pi}{2} \tag{4.6}$$

$\nearrow^{+\,\prime} \sum F_x = 0 : R_x - F_{ind,x} - F_{s,x} - q_1 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_1 - q_2 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_2 - q_3 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_3 \ldots$
$-q_4 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_4 - q_5 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_5 - q_6 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_6 = 0$

$$\begin{aligned} R_x = F_{ind,x} + F_{s,x} + q_1 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_1 + q_2 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_2 + q_3 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_3 \ldots \\ +q_4 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_4 + q_5 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_5 + q_6 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_6 = 203kN \end{aligned} \tag{4.7}$$

$\nwarrow^{+\,\prime} \sum F_y = 0 : R_y - F_{ind,y} - F_{s,y} - q_1 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_1 - q_2 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_2 - q_3 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_3 \ldots$
$-q_4 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_4 - q_5 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_5 - q_6 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_6 = 0$

$$\begin{aligned} R_y = F_{ind,y} + F_{s,y} + q_1 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_1 + q_2 \cdot \cos\Phi_2' \cdot L_2 + q_3 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_3 \ldots \\ +q_4 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_4 + q_5 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_5 + q_6 \cdot \cos\Phi_1' \cdot L_6 = 46,9kN \end{aligned} \tag{4.8}$$

$\curvearrowright^{+\,\prime} \sum M_z = 0$

4.2 Snitkræfter i bjælken

Til at finde de indre belastninger i bjælken findes snitkræfterne langs bjælkens længde. For at simplificere beregningerne, vælges det at lave kraftkompensanterne om, så de passer med bjælkens lokale retning.

Herved roteres de dynamiske kræfter på bjælken for over pivoteringspunketet på bjælken.

$$F_{ind,x'} = F_{ind,x} \cdot \cos \Phi_1' + F_{ind,y} \cdot \sin \Phi_1' \tag{4.9}$$

$$F_{ind,y'} = F_{ind,y} \cdot \cos \Phi_1' + F_{ind,x} \cdot \sin \Phi_1' \tag{4.10}$$

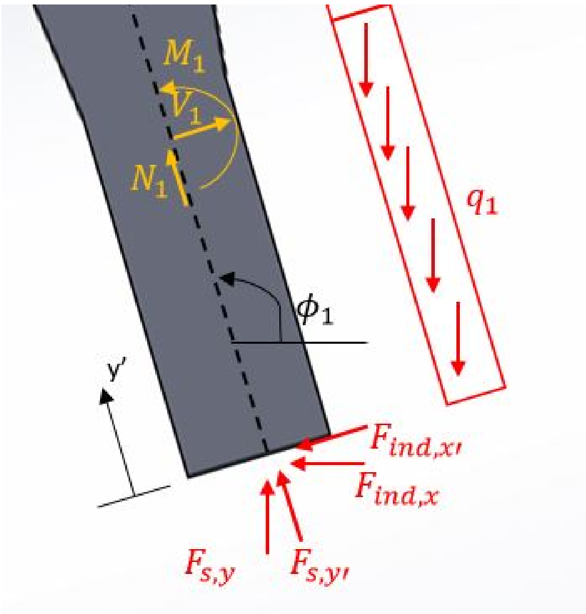
Og for under pivoterings punktet på bjælken.

$$F_{s,x'} = F_{s,x} \cdot \cos \Phi_2' + F_{s,y} \cdot \sin \Phi_2' \tag{4.11}$$

$$F_{s,y'} = F_{s,y} \cdot \cos \Phi_2' - F_{s,x} \cdot \sin \Phi_2' \tag{4.12}$$

4.2.1 Snitkræfter xy - plan

Snit 1: $0 \leqslant y < L_1$



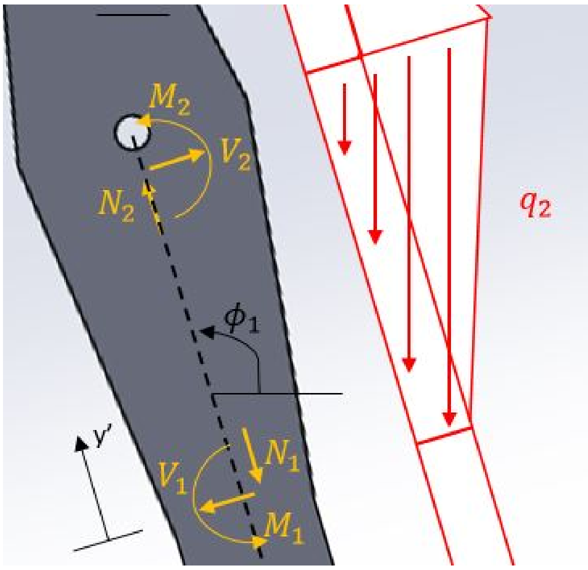
Figur 4.2: Snit 1

$$\begin{aligned}
&\nearrow^{+\,\prime} \sum F_x = 0 : V_1 - F_{s,x'} - q_1 \cdot \sin \Phi_2' \cdot y' = 0 \\
&\Downarrow \\
&V_1 = F_{s,x} + q_1 \cdot \sin \Phi_2' \cdot y'
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\nwarrow^{+\,\prime} \sum F_y = 0 : N_1 + F_{s,y'} - q_1 \cdot \cos\Phi_2' \cdot y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N_1 = q_1 \cdot \cos\Phi_2' \cdot y - F_{s,y'} \tag{4.14}$$

$$\curvearrowleft^{+\,\prime} \sum M = 0 : M_1 - F_{s,x'} \cdot y' - q_1 \cdot \sin\Phi_2' \frac{y'}{2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$M_1 = F_{s,x'} \cdot y' + q_1 \cdot \sin\Phi_2' \frac{y'}{2} \tag{4.15}$$

Snit 2: $L_1 \leqslant y < L_2$



Figur 4.3: Snit 2

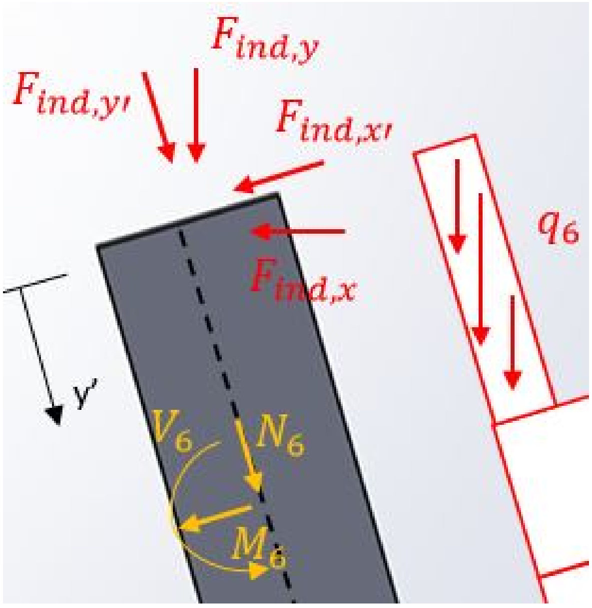
$$\nearrow^{+\,\prime} \sum F_x = 0 : V_2 - V_1 - q_2 \cdot \sin\Phi_2' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$V_2 = V_1 + q_2 \cdot \sin\Phi_2' \cdot y' \tag{4.16}$$

$$\nwarrow^{+\,\prime} \sum F_y = 0 : N_2 - N_1 - q_2 \cdot \cos\Phi_2' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N_2 = q_2 \cdot y + N_1 + q_2 \cdot \cos\Phi_2' \cdot y' \tag{4.17}$$

$$\curvearrowleft^{+\,\prime} \sum M = 0 : M_2 - M_1 - V_1 \cdot y' - q_2 \cdot \sin\Phi_2' \frac{y'}{2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$M_2 = M_1 V_1 \cdot y - q_2 \cdot \sin\Phi_2' \frac{y'}{2} \tag{4.18}$$

Det vælges at regne modsatte side af bjælken på samme måde som ved den nederste del af bjælken.

Snit 6: $L_6 \geqslant y > L_5$



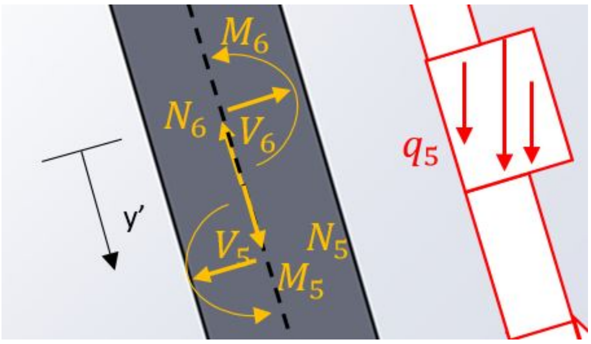
Figur 4.4: Snit 6

$$\nearrow^{+\,\prime} \sum F_x = 0 : -V_6 + F_{ind,x'} - q_6 \cdot \sin \Phi_1' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$V_6 = F_{ind,x'} - q_6 \cdot \sin \Phi_1' \cdot y' = 0 \tag{4.19}$$

$$\nwarrow^{+\,\prime} \sum F_y = 0 : -N_6 - F_{ind,y'} - q_6 \cdot \cos \Phi_1' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N_6 = -F_{ind,y'} - q_6 \cdot \cos \Phi_1' \cdot y' \tag{4.20}$$

$$\curvearrowright^{+\,\prime} \sum M = 0 : -M_6 + F_{ind,y'} \cdot y' - q_6 \cdot \sin \Phi_1' \frac{y'}{2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$M_6 = F_{ind,y'} \cdot y' - q_6 \cdot \sin \Phi_1' \frac{y'}{2} \tag{4.21}$$

Snit 5: $L_5 \geqslant y > L_4$



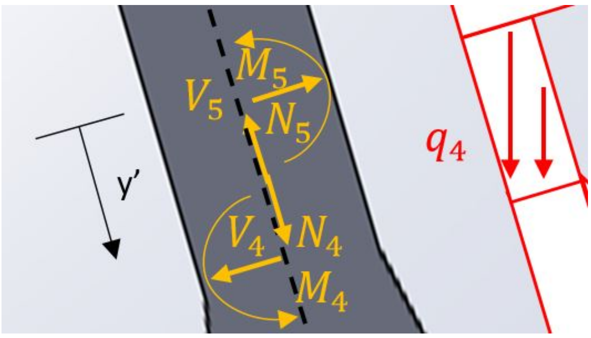
Figur 4.5: Snit 5

$$\begin{aligned}&\nearrow^{+\,\prime} \sum F_x = 0 : -V_5 + V_6 - q_5 \cdot \sin \Phi_1' \cdot y' = 0\\&\Downarrow\\&V_5 = V_6 - q_5 \cdot \sin \Phi_1' \cdot y'\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}&\nwarrow^{+\,\prime} \sum F_y = 0 : -N_5 + N_6 - q_5 \cdot \cos \Phi_1' \cdot y' = 0\\&\Downarrow\\&N_5 = N_6 - q_5 \cdot \cos \Phi_1' \cdot y' = 0\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}&\curvearrowright^{+\,\prime} \sum M = 0 : -M_5 + M_6 - q_5 \cdot \sin \Phi_1' \frac{y'}{2} = 0\\&\Downarrow\\&M_5 = M_6 - q_5 \cdot \sin \Phi_1' \frac{y'}{2}\end{aligned} \tag{4.24}$$

Snit 4: $L_4 \geqslant y > L_3$



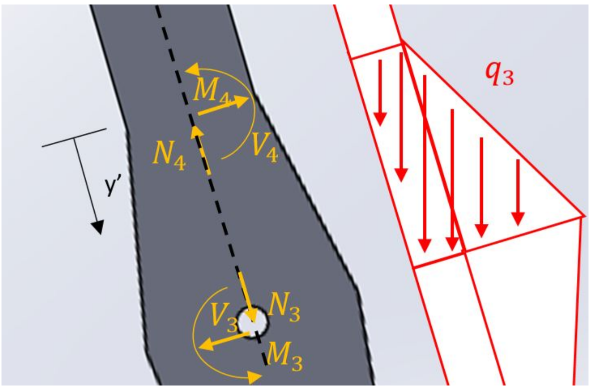
Figur 4.6: Snit 4

$$\begin{aligned}&\nearrow^{+\,\prime} \sum F_x = 0 : -V_4 + V_5 - q_4 \cdot \sin \Phi_1' \cdot y' = 0\\&\Downarrow\\&V_4 = V_5 - q_5 \cdot \sin \Phi_1' \cdot y'\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\nwarrow^{+}\,'\sum F_y = 0 : -N_4 + N_5 - q_4 \cdot \cos\Phi_1' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N_4 = N_5 - q_4 \cdot \cos\Phi_1' \cdot y' = 0 \tag{4.26}$$

$$\curvearrowright^{+}\,'\sum M = 0 : -M_4 + M_5 - q_4 \cdot \sin\Phi_1' \frac{y'}{2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$M_4 = M_5 - q_4 \cdot \sin\Phi_1' \frac{y'}{2} \tag{4.27}$$

Snit 3: $L_3 \geqslant y > L_2$



Figur 4.7: Snit 3

$$\nearrow^{+}\,'\sum F_x = 0 : -V_3 + V_4 - q_3 \cdot \sin\Phi_1' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$V_3 = V_4 - q_3 \cdot \sin\Phi_1' \cdot y' \tag{4.28}$$

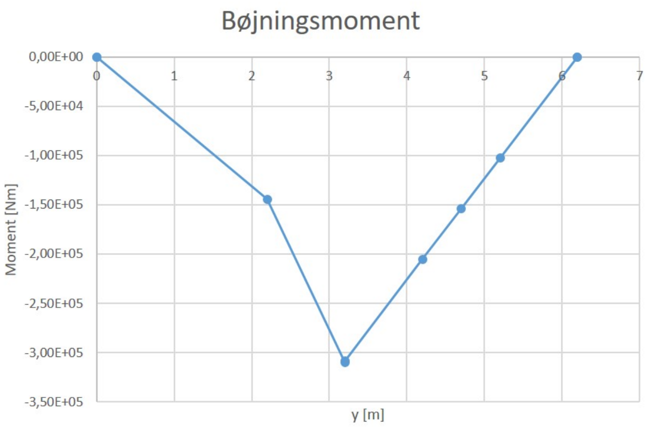
$$\nwarrow^{+}\,'\sum F_y = 0 : -N_3 + N_4 - q_3 \cdot \cos\Phi_1' \cdot y' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N_3 = N_4 - q_3 \cdot \cos\Phi_1' \cdot y' = 0 \tag{4.29}$$

$$\curvearrowright^{+}\,'\sum M = 0 : -M_3 + M_4 - q_3 \cdot \sin\Phi_1' \frac{y'}{2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$M_3 = M_4 - q_3 \cdot \sin\Phi_1' \frac{y'}{2} \tag{4.30}$$

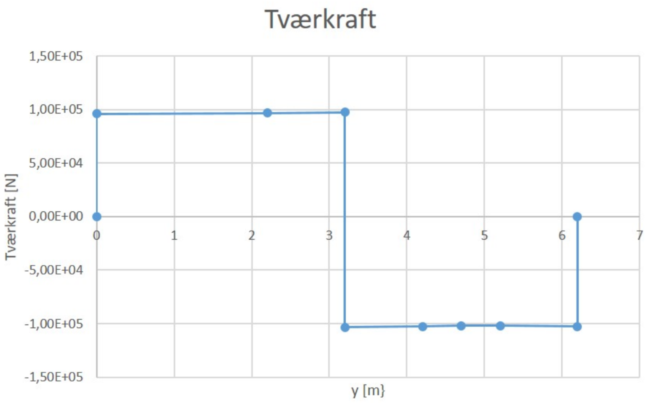
4.2.2 Resultat af snitkræfter

Resultatet af snitkræfterne ses herunder:

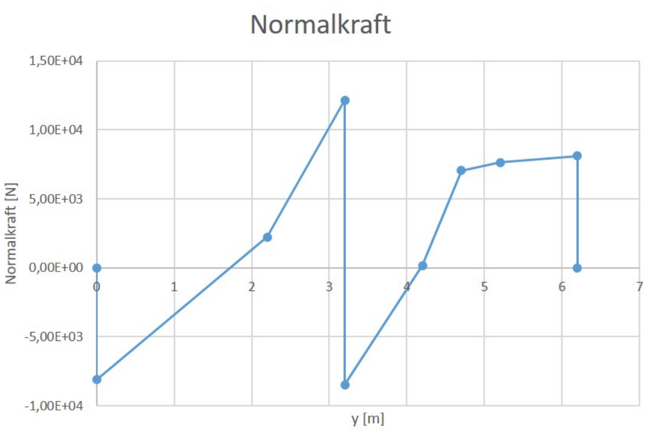
Figur 4.8: Snitkræfterne for bjælken.



Figur 4.9: Bøjningsmoment



Figur 4.10: Tværkraft



Figur 4.11: Normalkraft

4.3 Beregning af snit ved rotationspunktet

Det ønskes, at der laves en enkelt snitberegning iht. de givne anbefalinger, se appendiks B. Der vælges det at lave dette snit ved rotationspunktet, på baggrund af de fundne snitkræfter.

Til at beregne spænding fra bøjningsmomentet anvendes formel 4.31

$$\sigma = \frac{M \cdot x}{I} \tag{4.31}$$

Den samlede spænding fås ved at addere normalspændingen fra træk. Herved fås følgende formel:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot x}{I} \tag{4.32}$$

Endvidere kan forskydningsspændingen findes med følgende formel:

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b} \tag{4.33}$$

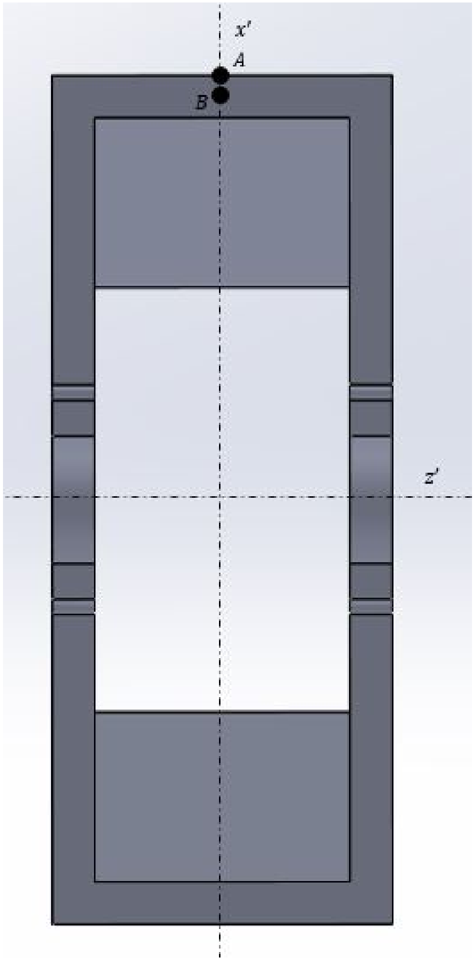
Normal- og forskydningsspændinger samles til en ækvivalent spænding ved hjælp af Von Mises:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right)} \tag{4.34}$$

Da der kun anvendes planspændinger kan Von Mises reduceres.

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{zx}^2} \tag{4.35}$$

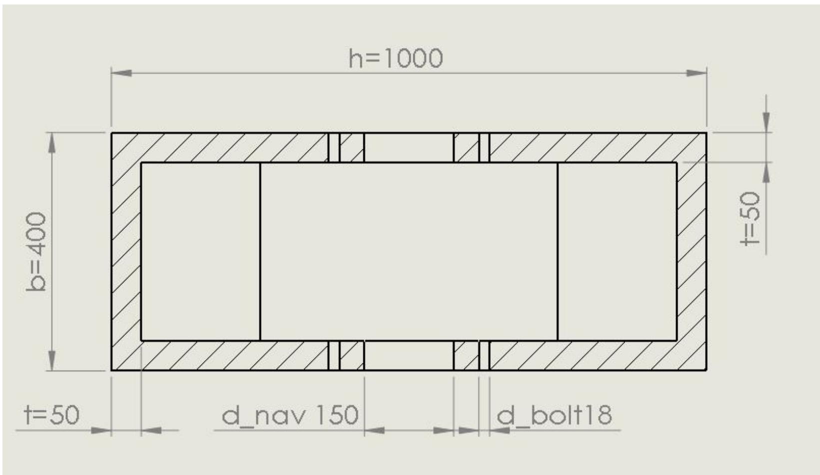
Først bestemmes de geometriafhængige variabler:
tværsnit [A],
1. ordens arealmoment [Q] og
2. ordens inertimoment [I].
Det vælges at beregne den ækvivalente spænding i to punkter i tværsnittet, se figur 4.12.



Figur 4.12: Skitse over de to punkter x= 475mm og x=500mm

Tværsnitsareal

Tværsnittet bestemmes på følgende måde, se figur 4.13.



Figur 4.13: Tværsnit af bjælken ved rotationspunktet

$$A = h \cdot b - (h - 2 \cdot t) \cdot (b - 2 \cdot t) = 130 \cdot 10^3 mm^2$$

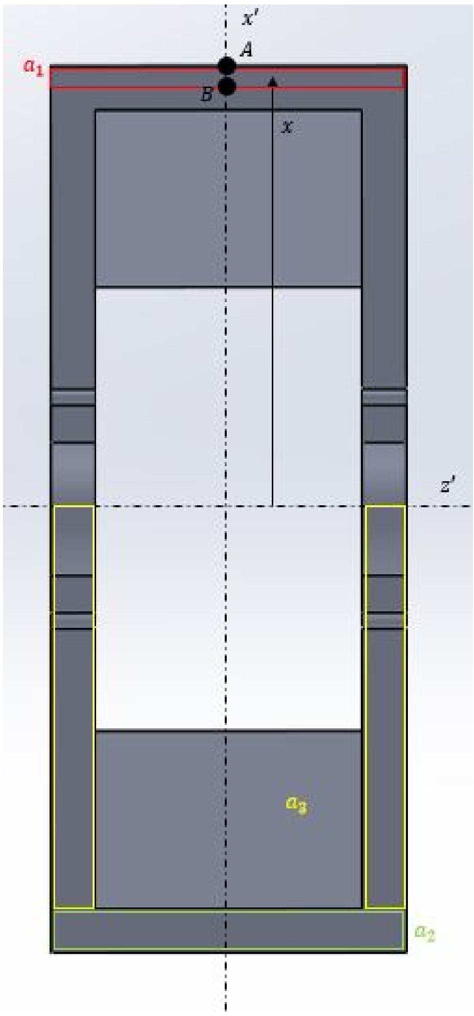
Det vælges at fratrække nav- og bolthullerne fra tværsnittet da tværsnitsarealet anvendes sammen med normalkraften, som har samme værdi over hele tværsnitsarealet.

$$A_{net} = 4 \cdot d_{bolt} \cdot t + 2 \cdot d_{nav} \cdot t = 18,1 \cdot 10^3 mm^2$$

$$A_{snit} = A - A_{net} = 112 \cdot 10^3 mm^2$$

1. Ordens areal inertimoment

Det vælges at beregne snittet på to forskellige punkter, $x = 475$mm og $x = 500$mm, se figur 4.14. Da bjælken er symmetrisk omkring z' - aksen, antages det at tyngdepunktet ligger i midten af højden h.



Figur 4.14: Tværsnit af bjælken ved rotationspunktet

Den generelle formel for 1. ordens areal inertimoment er:

$$Q = \sum x \cdot A \tag{4.36}$$

Her er:

x Afstanden fra tyngdepunktet til det ønskede målepunkt
A Tværsnittet over eller under det valgte punkt.

Punkt A, x=500mm

Da der ikke er et tværsnitareal over punkt A vil første ordens areal inertimoment give nul.

$$Q_A = 0,500 \cdot 0 = 0$$

Punkt B, x=475mm

$$Q_B = x_B \cdot a_1 = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{4}\right) \cdot \left(\frac{t}{2} \cdot b\right) = \left(\frac{1,000}{2} - \frac{0,050}{2}\right) \cdot \left(\frac{0,050}{2} \cdot 0,400\right) = 4,88 \cdot 10^{-3} m^3$$

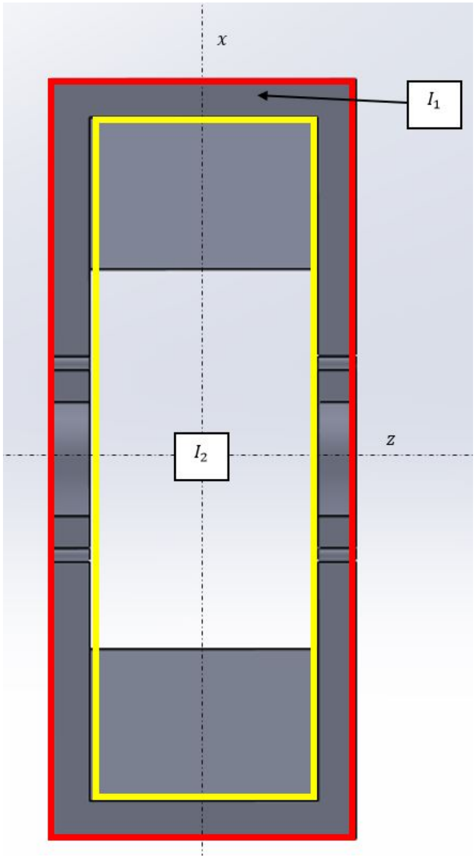
Da 1. ordens areal inertimoment er defineret, findes 2. ordens areal inertimoment.

4.4 2. Ordens areal inertimoment

Til at bestemme 2. ordens areal inertimoment, vælges det at lave samme antagelse som ved 1. ordens areal inertimoment. Da bjælken er symmetrisk omkring z - aksen, antages det, at bjælkens ligevægtspunkt er i center af bjælkesnittet $\frac{h}{2}$, se figur 4.15.
Den generelle formel for 2. ordens areal inertimoment.

$$I = I_0 + Ad^2 \tag{4.37}$$

Her anvendes for $I_0 = \frac{1}{12} b \cdot h^3$ for et rektangulært profil omkring z - aksen. Endvidere er A tværsnitareal og d afstanden fra ligevægtspunktet til centrum af arealet.



Figur 4.15: Skitse af 2. Ordens areal inertimoments andele.

De to 2. ordens inertimoment beregnes og trækkes fra hinanden.

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + b \cdot h \cdot 0^2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot (b - 2 \cdot t) \cdot (h - 2 \cdot t)^3 + (b - 1 \cdot t)\,(h - 1 \cdot t) \cdot 0^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 - \frac{1}{12} \cdot (b - 2 \cdot t) \cdot (h - 2 \cdot t)^3 = 15,1 \cdot 10^{-3} m^4$$

4.5 Beregning af punkt A

Da alle de geometrisk afhængige variabler nu er defineret, kan den ækvivalente spænding findes i snittet.

$$\sigma_A = \frac{N_2}{A} + \frac{M_2(0,500)}{I_{zz}} = 6,14 MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_2 \cdot Q_A}{I_{zz} \cdot b} = 0$$

$$\sigma_A^{'} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{zx}^2} = 6,14 MPa$$

4.6 Beregning af punkt B

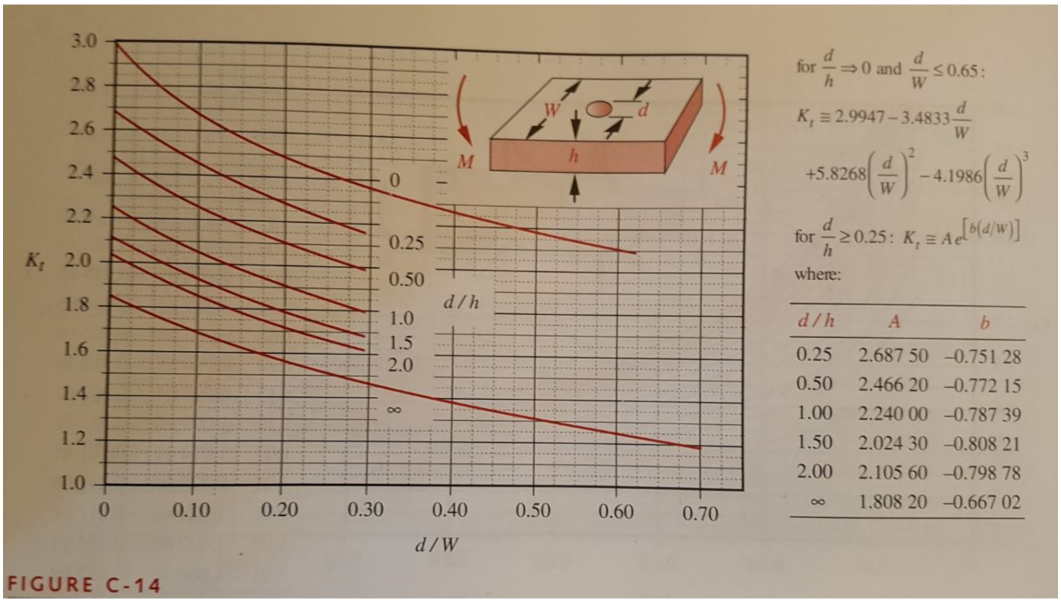
$$\sigma_B = \frac{N_2}{A} + \frac{M_2(0,475)}{I_{zz}} = 5,20MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_2 \cdot Q_B}{I_{zz} \cdot b} = -0,84MPa$$

$$\sigma_B^{'} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{zx}^2} = 5,62MPa$$

4.7 Spændingskoncentration

Idet der i det valgte snit både er nav- og bolthuller, vil dette give tillæg for spændingskoncentrationer benævnt $[Kt]$. Denne spændingskoncentration multipliceres til en ækvivalent spænding. I bogen *Machine Design* gives et estimat på geometriske stresskoncentrationer. [Norton, 2014]
Der tages udgangspunkt i boltnavet, hvilket har en diameter på $d = 145mm$. Højden i det valgte tværsnit er $h = 1000mm$.



d/h	A	b
0.25	2.687 50	−0.751 28
0.50	2.466 20	−0.772 15
1.00	2.240 00	−0.787 39
1.50	2.024 30	−0.808 21
2.00	2.105 60	−0.798 78
∞	1.808 20	−0.667 02

Figur 4.16: Spændingskoncentration [Kt] [Norton, 2014]

Da $\frac{d}{h} = 0,36$ er tættere på 0,145, vælges det at anvende koefficienterne for denne.
Herved fåes følgende udtryk.

$$K_t = A \cdot e^{\left[b\left({}^{d}/_{w}\right)\right]} = 2,68750 \cdot e^{\left[-0.75128\left({}^{145}/_{1000}\right)\right]} = 2,66$$

Herved kan spændingskoncentrationen ved punkt A og B, nu beregnes.

$$\sigma_{A,K_t}^{'} = K_t \cdot \sigma_A^{'} = 2,66 \cdot 6,14 = 16,3MPa$$

$$\sigma'_{B,K_t} = K_t \cdot \sigma'_B = 2,66 \cdot 5,62 = 14,6MPa$$

4.8 Sikkerhedsmargin

Da de ækvivalente spændinger er regnet for tværsnittet ved rotationspuktet, i tre positioner, kontrollers dette mod kravspecifikationen fra *Diplom Bachelor rapporten.* Heri blev det dikteret, at der ønskedes en sikkerhedsfaktor mod flydning $N_f \geqslant 2,00$ og en sikkerhedsfaktor imod udmattelse $N_{ud} \geqslant 2,00$. Her var ønsket, at der skulle opnås en levetid på $> 1 \cdot 10^8$ cycler.

4.8.1 Sikkerhed imod flydning

Der kontrolleres sikkerhed imod flydning ved statisk belastning < 1000 cycler. Derfor vælges punkt A, idet der her er fundet den største belastning. Tykkelsen på de valgte pladematerialer til bjælken medfører, at flydespændingen reduceres fra 355 MPa til 335 MPa. [Bent Bonnerup, 2015]

$$N_f \leqslant \frac{\sigma_f}{\sigma'_A} = \frac{335}{16,3} = 20,6$$

4.8.2 Sikkerhed imod brud

Sikkerhed imod brud kontrolleres ved en belastning på $1 \cdot 10^8$ cycler, da der her opleves den laveste brudgrænse.

Brudgrænsen under udmattelse bestemmes af den valgte svejsekategori. I *Diplom bachelorprojektet* blev der valgt en svejsekategori $\Delta\sigma_C = 100$. Da bjælken skal kontrolleres ved $> 1 \cdot 10^8$ cycler, hvilket er knæpunktet for denne kategori, skal $\Delta\sigma_C$ omregnes. Dette gøres ved brug af følgende formel.

$$\Delta\sigma_L = \left(\frac{5 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^8}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \Delta\sigma_C = 54,9MPa \tag{4.38}$$

Herfra kan sikkerheden imod brud findes. Da der for udmattelse anvendes spændingsvidder, er disse beregnet på samme metode. Her er beregningerne foretaget til tiden t = 1,785 sek.. Det har resulteret i en ny ækvivalente spænding.

$$\sigma'_{A,2} = 16,1MPa$$

Disse to ækvivalente spændings amplituder lægges sammen til en vidde.

$$N_{ud,A} \leqslant \frac{\Delta\sigma_L}{\sigma'_A + \sigma'_{A,2}} = \frac{54,9}{16,3 + 16,1} = 1,69$$

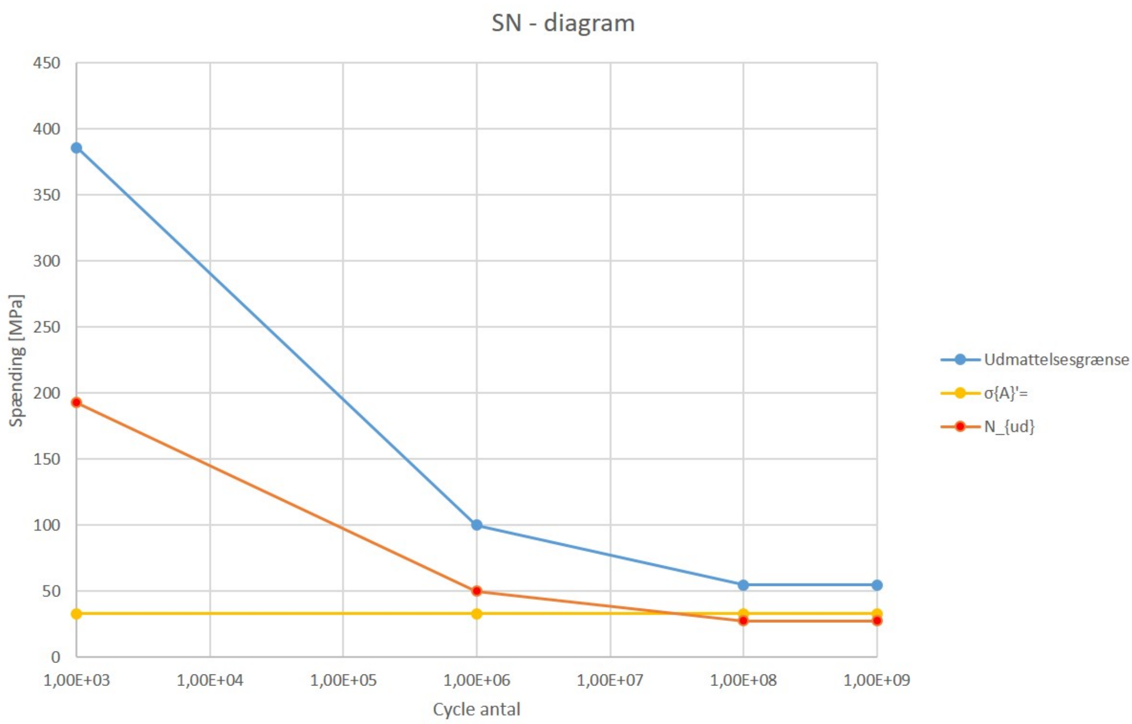
4.9 Resultat

På baggrund af den faststofmekaniske analyse er følgende resultater opnået:

Tabel 4.2: Resultat af fastofmekanisk analyse

σ'_{A,K_t}	16,1 MPa
$N_{f,A}$	20,6
$N_{ud,A}$	1,69

Her er den største fundne spændingsvidde fundet i punkt A, repræsenteret sammen med udmattelsesgrænsen og sikkerhedsmarginen N_{ud}.



Figur 4.17: Wöhler diagram.

Konklusion 5

I dette tillæg har der været lagt vægt på at følge vejlederens anbefalinger, se appendiks B. Dette her medført ændringer i blandt andet den anvendte metode til kinematisk og dynamisk analyse. Herved har den kinematiske analyse taget udgangspunkt i Newtons - Eulers ligning til beskrivelse af slædesystemets bevægelse. Dette har medført en beskrivelse af alle legemernes tyngdepunktposition samt orientering til tiden [t]. Dette er gjort over en hel periode, hvorved der er opnået en mere detaljeret beskrivelse af slædesystemets kinematik.
Det kan ses på figur 2.2 at den ækvivalente slæde vender 180° forskudt, i forhold til 2.1. Dette skyldes, at der ved løsning af de kinematiske ligninger, kan opstå flere løsninger til samme ligningssystem. Det vurderes ikke, at dette er et problem for den videre beregning af de kinematiske ligninger og de dynamiske belastninger, da det er en ækvivalent masse og da accelerationerne endvidere ikke ændres af heraf.
Endvidere kan det ses på resultaterne, at disse ikke starter til tiden $t = 0$ men til tiden $t = 0,375$. Det har ikke været muligt at opnå en løsning til tiden $t = 0$. Det blev derfor valgt at forskyde begyndelses tidspunktet for resultaterne.

De dynamiske laster blev defineret ud fra den kinematiske analyse og Newtons anden lov. Herved er der opnået en beskrivelse af de enkelte legemers dynamiske belastning. Endvidere er den ækvivalente masse for slæden blevet bestemt, til en væsentlig større masse end først antaget i Diplom - Bachelorprojektet. Den nye belastning vurderes til at være mere rigtig i forhold til den førhen fundne masse.

I den faststofmekaniske analyse kunne det konstateres, at bøjningsmomentet var den dominerende last i snitplottene. Herudfra blev det valgt at lægge et snit i bjælken, hvor der var den største bøjningsbelastning. Det ville være hensigtsmæssigt at beregne belastningen i snittet i to punkter; i center [$x = 0$ mm] af snittet hvor forskydningsspændingerne er størst og i toppen [$x = 500$ mm] af snittet hvor bøjningsspændingerne er størst. Da det ikke er muligt at beregne i center af profilet, idet der ikke er materiale, vælges det at fokusere i toppen af profilet, da det her at bjælken er mest belastet.
Det vurderes, at forskydningsspændingerne er tilstrækkelige små, i forhold til bøjningsmomentet, og giver ikke anledning til styrkemæssig tvivl.

Som det kan ses i tabel 4.2 overholder σ'_{A,K_t} ikke længere kravet om en sikkerhedsfaktor på $N_{ud} \geqslant 2$. Det skyldes en ændring i de påførte laster på bjælken, qua anvendelse af en anden metode til at regne spændingskoncentrationen. Hvilke har medført en større ækvivalentspænding.
Det kan diskuteres hvorvidt denne spændingskoncentration har en indflydelse på de to valgte punkter, idet afstanden til disse er større end $3 \cdot d_{nav}$. Derfor anses den valgte metode for at være meget konservativ.

Litteratur

Bent Bonnerup, Bjarne Chr. Jensen, **2015**. Carsten Munk Plum Bent Bonnerup, Bjarne Chr. Jensen. *Machine Design*. PRAXIS, Nyt Teknisk Forlag, 2. edition, 2015.

Norton, **2014**. Robert L. Norton. *Machine Design*. Worcester Polytechnic Institute, 5. edition, 2014.

Appendiks A

Anbefaling B

Studienævn for Industri og Global Forretningsudvikling

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Department of
Materials and Production
Fibigerstraede 16
9220 Aalborg East
Denmark

Contact person:
R. Mikael Larsen
Phone: +45 99409318
E-mail: rml@mp.aau.dk

Date: 19-01-2018
Case No.: Paste the file number

Anbefaling for re-eksamen for Lars Undén Jensen

Lars Undén Jensen bestod ikke i sit første forsøg den 18. januar 2018 i det afsluttende bachelorprojekt. Der manglede tilfredsstillende kommunikation af modellerne der blev analyseret samt de antagelser der blev anvendt i analyserne. Beregningen af de dynamiske laster i systemet var mangelfuld. Den faststofmekaniske analyse var desuden ikke tilfredsstillende. Det anbefales at Lars Undén Jensen afleverer en begrænset tillægsrapport. Rapporten skal indeholde følgende dele og analyser:

- Introduktion til den gennemførte analyse med relevante tegninger og illustrationer.
- En kinematisk og dynamisk analyse af hele systemet, hvorved de dynamiske laster for den store roterende bjælke bestemmes.
- En faststofmekanisk analyse og tilhørende styrkeevaluering af et enkelt snit i bjælken udsat for de maksimale dynamiske laster.
- En samletegning af hele slædesystemet.

Re-eksaminationen vil fokusere på den afleverede revision.

Med venlig hilsen

Mikael Larsen

R. Mikael Larsen

Kinematisk udregning C

THIS MAPLE CODE IS USED FOR THE POSITION, VELOCITY and ACCELERATION ANALYSIS

NOTE: WORKING UNDER TEXT MODE, RATHER THAN MATH MODE

```
> restart:
> ###     MECHANICS II SEC 4.4.1 CRANK SLIDER MECHANISM     ###
> with(linalg):with(LinearAlgebra):
> Digits:=5;
```

$$Digits := 5 \tag{1}$$

```
> Rot2D:=proc(x)
> Matrix([[cos(x),-sin(x)],[sin(x),cos(x)]]);
> end;
```

$$Rot2D := \mathbf{proc}(x)\ Matrix([[\cos(x), -\sin(x)], [\sin(x), \cos(x)]])\ \mathbf{end\ proc} \tag{2}$$

STEP1: Define variable for all moving bodies

```
> for i from 1 to 6 do
> r[i]:=<x[i],y[i]>; A[i]:=Rot2D(phi[i]);
> od;
```

$$r_1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 := \begin{bmatrix} \cos(\phi_1) & -\sin(\phi_1) \\ \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{bmatrix}$$

$$r_2 := \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} \cos(\phi_2) & -\sin(\phi_2) \\ \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) \end{bmatrix}$$

$$r_3 := \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 := \begin{bmatrix} \cos(\phi_3) & -\sin(\phi_3) \\ \sin(\phi_3) & \cos(\phi_3) \end{bmatrix}$$

$$r_4 := \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$A_4 := \begin{bmatrix} \cos(\phi_4) & -\sin(\phi_4) \\ \sin(\phi_4) & \cos(\phi_4) \end{bmatrix}$$

$$r_5 := \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

$$A_5 := \begin{bmatrix} \cos(\phi_5) & -\sin(\phi_5) \\ \sin(\phi_5) & \cos(\phi_5) \end{bmatrix}$$

$$r_6 := \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

$$A_6 := \begin{bmatrix} \cos(\phi_6) & -\sin(\phi_6) \\ \sin(\phi_6) & \cos(\phi_6) \end{bmatrix} \tag{3}$$

All local coordinates

```
> s1_pO:=<-1.410,0>; s1_pB:=<1.590,0>;
```

$$s1\_pO := \begin{bmatrix} -1.410 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s1\_pB := \begin{bmatrix} 1.590 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

```
> s2_pB:=<-0.250,0>;s2_pA:=<0.250,0>;
```

$$s2\_pB := \begin{bmatrix} -0.250 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s2\_pA := \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

```
> s3_pA:=<0,0>;
```

$$s3\_pA := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

```
> s4_pO:=<-1.314,0>; s4_pC:=<1.886,0>;
```

$$s4\_pO := \begin{bmatrix} -1.314 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s4\_pC := \begin{bmatrix} 1.886 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

```
> s5_pC:=<-0.3425,0>;s5_pE:=<0.3425,0>;
```

$$s5\_pC := \begin{bmatrix} -0.3425 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s5\_pE := \begin{bmatrix} 0.3425 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

```
> s6_pE:=<0,0>;
```

$$s6\_pE := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

All fixed points

```
> r_O:=<0,0>;
```

$$r\_O := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

STEP 2: formulate kinematic and driving constraints

Constraint between the base and link 1

```
> eq_cstr[1]:=r[1]+A[1] . s1_pO-r_O;
```

$$eq\_cstr_1 := \begin{bmatrix} x_1 - 1.410\cos(\phi_1) \\ y_1 - 1.410\sin(\phi_1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Constraint between link 1 and link 2

```
> eq_cstr[2]:=r[1]+A[1] . s1_pB-r[2]-A[2] . s2_pB;
```

$$eq\_cstr_2 := \begin{bmatrix} x_1 + 1.590\cos(\phi_1) - x_2 + 0.250\cos(\phi_2) \\ y_1 + 1.590\sin(\phi_1) - y_2 + 0.250\sin(\phi_2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Constraint between link 2 and link 3

```
> eq_cstr[3]:=r[2]+A[2] . s2_pA-r[3]-A[3] . s3_pA;
```

$$eq\_cstr_3 := \begin{bmatrix} x_2 + 0.250\cos(\phi_2) - x_3 \\ y_2 + 0.250\sin(\phi_2) - y_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

```
> eq_cstr[6]:=r[4]+A[4] . s4_pO-r_O;
```

$$eq\_cstr_6 := \begin{bmatrix} x_4 - 1.314\cos(\phi_4) \\ y_4 - 1.314\sin(\phi_4) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Constraint between link 1 and link 2

```
> eq_cstr[7]:=r[4]+A[4] . s4_pC-r[5]-A[5] . s5_pC;
```

$$eq\_cstr_7 := \begin{bmatrix} x_4 + 1.886\cos(\phi_4) - x_5 + 0.3425\cos(\phi_5) \\ y_4 + 1.886\sin(\phi_4) - y_5 + 0.3425\sin(\phi_5) \end{bmatrix} \tag{15}$$

Constraint between link 2 and link 3

```
> eq_cstr[8]:=r[5]+A[5] . s5_pE-r[6]-A[6] . s6_pE;
```

$$eq\_cstr_8 := \begin{bmatrix} x_5 + 0.3425\cos(\phi_5) - x_6 \\ y_5 + 0.3425\sin(\phi_5) - y_6 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Constraint between link 2 and link 3

```
> eq_cstr[4]:=phi[3];
```

$$eq\_cstr_4 := \phi_3 \tag{17}$$

```
> eq_cstr[5]:=y[3]-3.000;
```

$$eq\_cstr_5 := y_3 - 3.000 \tag{18}$$

```
> eq_cstr[9]:=phi[6];
```

$$eq\_cstr_9 := \phi_6 \tag{19}$$

```
> eq_cstr[10]:=y[6]+3.200;
```

$$eq\_cstr_{10} := y_6 + 3.200 \tag{20}$$

Driving constraint

```
> eq_cstr[11]:=x[3]-0.500-0.250*sin(2*3.14*0.7*t);
```

$$eq\_cstr_{11} := x_3 - 0.500 - 0.250\sin(4.396\,t) \tag{21}$$

```
> eq_cstr[12]:=phi[4]-phi[1]-3.14159265359;
```

$$eq\_cstr_{12} := \phi_4 - \phi_1 - 3.14159265359 \tag{22}$$

Assembly equations

```
> Phi:=Vector([eq_cstr[1],eq_cstr[2],eq_cstr[3],eq_cstr[4],eq_cstr
[5],eq_cstr[6],eq_cstr[7],eq_cstr[8],eq_cstr[9],eq_cstr[10],
eq_cstr[11],eq_cstr[12]]);
```

$$\Phi := \begin{bmatrix} \textit{1 .. 18 Vector}_{\textit{column}} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix} \tag{23}$$

```
> q:=Vector([r[1],phi[1],r[2],phi[2],r[3],phi[3],r[4],phi[4],r[5],
  phi[5],r[6],phi[6]]);
```

$$q := \left[\begin{array}{c} \mathit{1\ ..\ 18\ Vector}_{column} \\ \mathit{Data\ Type:\ anything} \\ \mathit{Storage:\ rectangular} \\ \mathit{Order:\ Fortran\_order} \end{array}\right] \tag{24}$$

STEP 3: Derive the velocity equations

```
> dot_q:=Vector(18,symbol=v):        #define velocities
> ddot_q:=Vector(18,symbol=a):       #define accelerations
```

```
> J:=jacobian(Phi,q);
```

$$\begin{aligned} J := [&[1, 0, 1.410 \sin(\phi_1), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 1, -1.410 \cos(\phi_1), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[1, 0, -1.590 \sin(\phi_1), -1, 0, -0.250 \sin(\phi_2), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 1, 1.590 \cos(\phi_1), 0, -1, 0.250 \cos(\phi_2), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 1, 0, -0.250 \sin(\phi_2), -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 1, 0.250 \cos(\phi_2), 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1.314 \sin(\phi_4), 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1.314 \cos(\phi_4), 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1.886 \sin(\phi_4), -1, 0, -0.3425 \sin(\phi_5), 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1.886 \cos(\phi_4), 0, -1, 0.3425 \cos(\phi_5), 0, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -0.3425 \sin(\phi_5), -1, 0, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0.3425 \cos(\phi_5), 0, -1, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], \\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ &[0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]] \end{aligned} \tag{25}$$

```
> dot_alpha:=-map(diff, Phi, t);
```

$$dot\_alpha := \left[\begin{array}{c} 1 \,..\, 18 \; Vector_{column} \\ Data\ Type:\ anything \\ Storage:\ rectangular \\ Order:\ Fortran\_order \end{array}\right] \tag{26}$$

STEP 4: Derive the acceleration equations

```
> ddot_alpha:=map(diff, dot_alpha, t);
```

$$ddot\_alpha := \left[\begin{array}{c} 1 \,..\, 18 \; Vector_{column} \\ Data\ Type:\ anything \\ Storage:\ rectangular \\ Order:\ Fortran\_order \end{array}\right] \tag{27}$$

```
> dot_J:=jacobian(J.dot_q,q);
```

$$\begin{aligned} dot\_J := \big[& [0, 0, 1.410 \cos(\phi_1)\, v_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 1.410 \sin(\phi_1)\, v_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, -1.590 \cos(\phi_1)\, v_3, 0, 0, -0.250 \cos(\phi_2)\, v_6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, -1.590 \sin(\phi_1)\, v_3, 0, 0, -0.250 \sin(\phi_2)\, v_6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, -0.250 \cos(\phi_2)\, v_6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, -0.250 \sin(\phi_2)\, v_6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.314 \cos(\phi_4)\, v_{12}, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.314 \sin(\phi_4)\, v_{12}, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1.886 \cos(\phi_4)\, v_{12}, 0, 0, -0.3425 \cos(\phi_5)\, v_{15}, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1.886 \sin(\phi_4)\, v_{12}, 0, 0, -0.3425 \sin(\phi_5)\, v_{15}, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.3425 \cos(\phi_5)\, v_{15}, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.3425 \sin(\phi_5)\, v_{15}, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]\big] \end{aligned} \tag{28}$$

```
> ddot_q:=inverse(J).(ddot_alpha-dot_J.dot_q):
> #===================== NUMERICAL ANALYSIS RESULTS ===============
==========#
```

```
> t:=2.142;
```

$$t := 2.142 \tag{29}$$

Initial values

```
> x0[1],y0[1],phi0[1]:=0, 1.45, 1.55;
> x0[2],y0[2],phi0[2]:=0.30, 3.1, 0;
> x0[3],y0[3],phi0[3]:=0.52, 3.3, 0;
> x0[4],y0[4],phi0[4]:=0, -1.49, 4.59;
> x0[5],y0[5],phi0[5]:=0.35, -3, 2;
> x0[6],y0[6],phi0[6]:=0.52, -3.3, 0;
```

$$x0_1, y0_1, \phi 0_1 := 0, 1.45, 1.55$$
$$x0_2, y0_2, \phi 0_2 := 0.30, 3.1, 0$$
$$x0_3, y0_3, \phi 0_3 := 0.52, 3.3, 0$$
$$x0_4, y0_4, \phi 0_4 := 0, -1.49, 4.59$$
$$x0_5, y0_5, \phi 0_5 := 0.35, -3, 2$$
$$x0_6, y0_6, \phi 0_6 := 0.52, -3.3, 0 \tag{30}$$

```
> init_q:={
> x[1]=x0[1],y[1]=y0[1],phi[1]=phi0[1],
> x[2]=x0[2],y[2]=y0[2],phi[2]=phi0[2],
> x[3]=x0[3],y[3]=y0[3],phi[3]=phi0[3],
  x[4]=x0[4],y[4]=y0[4],phi[4]=phi0[4],
  x[5]=x0[5],y[5]=y0[5],phi[5]=phi0[5],
  x[6]=x0[6],y[6]=y0[6],phi[6]=phi0[6]};
```

$$init\_q := \{\phi_1 = 1.55, \phi_2 = 0, \phi_3 = 0, \phi_4 = 4.59, \phi_5 = 2, \phi_6 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0.30, x_3 = 0.52, x_4 = 0, x_5 = 0.35, x_6 = 0.52, y_1 = 1.45, y_2 = 3.1, y_3 = 3.3, y_4 = -1.49, y_5 = -3, y_6 = -3.3\} \tag{31}$$

```
> Phi[9];
```

$$x_4 - 1.314 \cos(\phi_4) \tag{32}$$

Convert the Phi vector into a set

```
> equations:=convert(Phi, set);
```

$$equations := \{\phi_3, \phi_6, x_1 - 1.410 \cos(\phi_1), x_4 - 1.314 \cos(\phi_4), y_1 - 1.410 \sin(\phi_1), y_3 - 3.000, y_4 - 1.314 \sin(\phi_4), y_6 + 3.200, \phi_4 - \phi_1 - 3.14159265359, x_2 + 0.250 \cos(\phi_2) - x_3, x_3 \tag{33}$$

$-0.500-0.250\sin(4.396\,t), x_5+0.3425\cos(\phi_5)-x_6, y_2+0.250\sin(\phi_2)-y_3, y_5+0.3425\sin(\phi_5)-y_6, x_1+1.590\cos(\phi_1)-x_2+0.250\cos(\phi_2), x_4+1.886\cos(\phi_4)-x_5+0.3425\cos(\phi_5), y_1+1.590\sin(\phi_1)-y_2+0.250\sin(\phi_2), y_4+1.886\sin(\phi_4)-y_5+0.3425\sin(\phi_5)\}$

```
> sol_p:=fsolve(equations,init_q);
```

$$sol\_p := \{\phi_1=1.5701, \phi_2=1.5265\ 10^{-6}, \phi_3=0., \phi_4=4.7117, \phi_5=3.1416, \phi_6=0., x_1=0.0010058, x_2=0.25214, x_3=0.50214, x_4=-0.00092767, x_5=-0.34476, x_6=-0.68726, y_1=1.4100, y_2=3.0000, y_3=3.0000, y_4=-1.3140, y_5=-3.2000, y_6=-3.2000\} \quad \textbf{(34)}$$

Print solutions of position analysis

```
> for i from 1 to 6 do
> x[i] :=subs(sol_p,x[i]);    y[i]:=subs(sol_p,y[i]);    phi[i]:=
  subs(sol_p,phi[i]);
> od;
```

$$x_1 := 0.0010058$$
$$y_1 := 1.4100$$
$$\phi_1 := 1.5701$$
$$x_2 := 0.25214$$
$$y_2 := 3.0000$$
$$\phi_2 := 1.5265\ 10^{-6}$$
$$x_3 := 0.50214$$
$$y_3 := 3.0000$$
$$\phi_3 := 0.$$
$$x_4 := -0.00092767$$
$$y_4 := -1.3140$$
$$\phi_4 := 4.7117$$
$$x_5 := -0.34476$$
$$y_5 := -3.2000$$
$$\phi_5 := 3.1416$$
$$x_6 := -0.68726$$
$$y_6 := -3.2000$$
$$\phi_6 := 0. \quad \textbf{(35)}$$

Find velocities

```
> dot_q:=inverse(J).dot_alpha;
```

$$dot\_q := \left[\begin{array}{c} \mathit{1 .. 18\ Vector}_{column} \\ \mathit{Data\ Type: anything} \\ \mathit{Storage: rectangular} \\ \mathit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right] \quad (36)$$

```
> dot_q[1..9]
```

$$\left[\begin{array}{c} -0.51653 \\ 0.00035968 \\ 0.36633 \\ -1.0990 \\ 0.00038264 \\ -0.0015306 \\ -1.0990 \\ 0. \\ 0. \end{array}\right] \quad (37)$$

```
> dot_q[10..18]
```

$$\left[\begin{array}{c} 0.48136 \\ -0.00033165 \\ 0.36633 \\ 1.1723 \\ -0.00040383 \\ -0.0011791 \\ 1.1723 \\ 0. \\ 0. \end{array}\right] \quad (38)$$

```
> v:=dot_q:
```

Find acceleration

```
> ddot_q:=inverse(J).(ddot_alpha-dot_J.dot_q);
```

$$ddot\_q := \left[\begin{array}{c} \mathit{1 .. 18\ Vector}_{column} \\ \mathit{Data\ Type: float}_{8} \\ \mathit{Storage: rectangular} \\ \mathit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right] \quad (39)$$

```
> ddot_q[1..9]
```

$$\begin{bmatrix} -0.0194768987922045 \\ -0.189206529103287 \\ 0.0137198193885159 \\ -0.0414411070470591 \\ -0.201280669153727 \\ 0.805122675795276 \\ -0.0414420000000000 \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \tag{40}$$

> *ddot_q*[10..18]

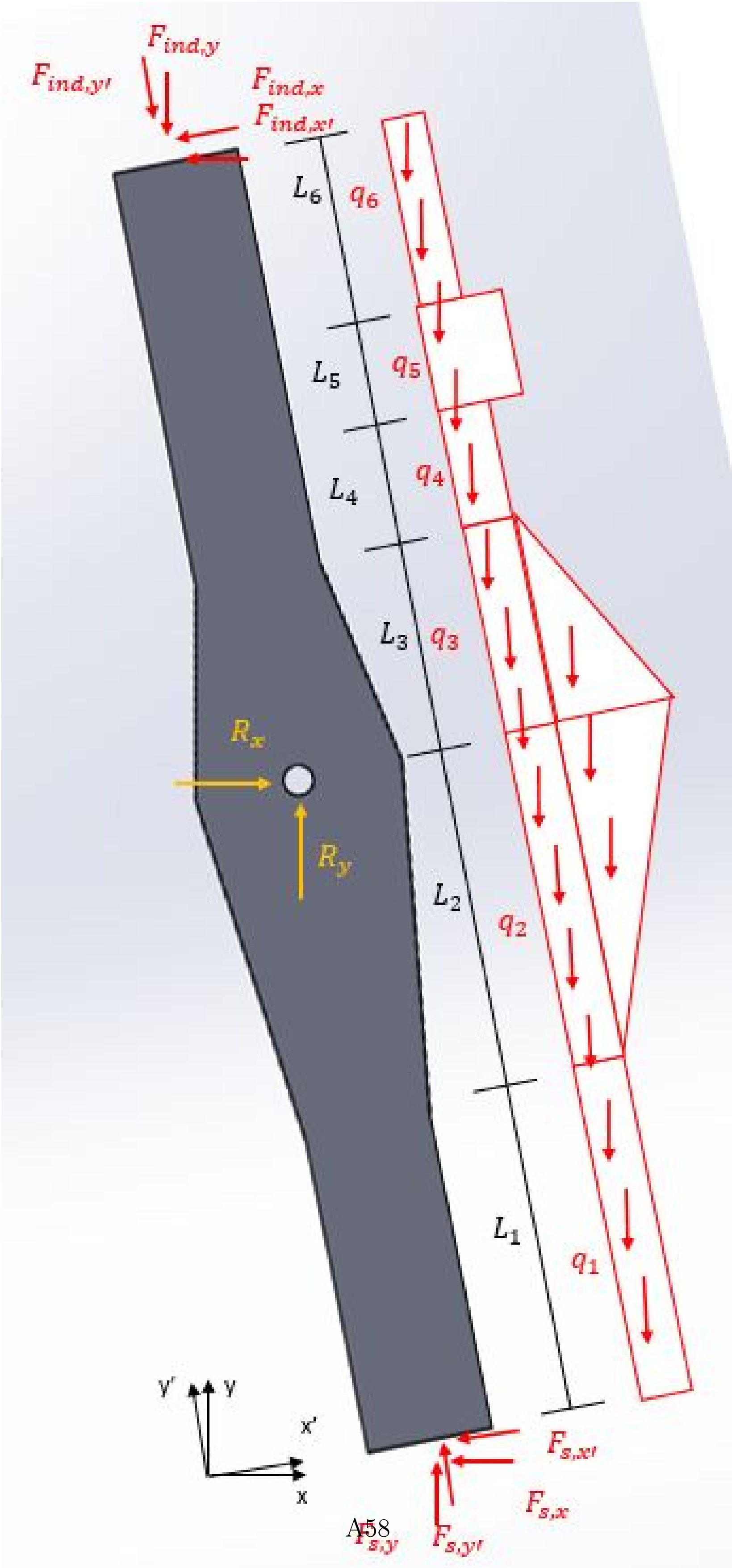
$$\begin{bmatrix} 0.0181495129604860 \\ 0.176327579186100 \\ 0.0137198193885159 \\ 0.0442031605031700 \\ 0.214704875804104 \\ 0.626895295580802 \\ 0.0442052140921780 \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \tag{41}$$

>

>

Fastofmekanisk analyse D

D.1 Fritlegeme diagram



Figur D.1: Fritlegeme diagram af bjælken

Kinematisk resultat E

E.1 Position

Tabel E.1: Resultat af kinematisk anlyse for position.

t	x_1	y_1	ϕ_1	x_2	y_2	ϕ_2	x_3	y_3	ϕ_3
0,35700	0,11755	1,40510	1,48730	0,50005	2,99480	0,02089	0,75000	3,00000	0,00000
0,71400	0,00034	1,41000	1,57060	0,25072	3,00000	0,00000	0,50072	3,00000	0,00000
1,07100	-0,11745	1,40510	1,65420	0,00005	2,99480	0,02085	0,25000	3,00000	0,00000
1,42800	-0,00067	1,41000	1,57130	0,24858	3,00000	0,00000	0,49858	3,00000	0,00000
1,78500	0,11755	1,40510	1,48730	0,50004	2,99480	0,02089	0,74999	3,00000	0,00000
2,14200	0,00101	1,41000	1,57010	0,25214	3,00000	0,00000	0,50214	3,00000	0,00000

t	x_4	y_4	ϕ_4	x_5	y_5	ϕ_5	x_6	y_6	ϕ_6
0,35700	-0,10954	-1,30940	4,62890	-0,60921	-3,19440	3,15790	-0,95167	-3,20000	0,00000
0,71400	-0,00031	-1,31400	4,71220	-0,34324	-3,20000	3,14160	-0,68574	-3,20000	0,00000
1,07100	0,10946	-1,30940	4,79580	-0,07588	-3,19440	3,15780	-0,41834	-3,20000	0,00000
1,42800	0,00063	-1,31400	4,71290	-0,34096	-3,20000	3,14160	-0,68346	-3,20000	0,00000
1,78500	-0,10953	-1,30940	4,62890	-0,60920	-3,19440	3,15790	-0,95166	-3,20000	0,00000
2,14200	-0,00093	-1,31400	4,71170	-0,34476	-3,20000	3,14160	-0,68726	-3,20000	0,00000

E.2 Hastighed

Tabel E.2: Resultatter for hastighed.

t	$\dot{x}_1$	$\dot{y}_1$	$\dot{\phi}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{y}_2$	$\dot{\phi}_w$	$\dot{x}_3$	$\dot{y}_3$	$\dot{\phi}_3$
0,35700	0,00041	-0,00003	-0,00029	0,00088	-0,00004	0,00014	0,00088	0,00000	0,00000
0,71400	-0,46300	0,15700	0,34600	-1,04000	0,16700	0,70500	-1,10000	0,00000	0,00000
1,07100	-0,00123	-0,00010	0,00088	-0,00263	-0,00010	0,00042	-0,00263	0,00000	0,00000
1,42800	0,51700	-0,00041	-0,36600	1,10000	-0,00044	0,00175	1,10000	0,00000	0,00000
1,78500	0,01240	-0,00101	-0,00882	0,02640	-0,00107	0,00428	0,02640	0,00000	0,00000
2,14200	-0,51653	0,00036	0,36633	-1,09900	0,00038	-0,00153	-1,09900	0,00000	0,00000

t	$\dot{x}_4$	$\dot{y}_4$	$\dot{\phi}_4$	$\dot{x}_5$	$\dot{y}_5$	$\dot{\phi}_5$	$\dot{x}_6$	$\dot{y}_6$	$\dot{\phi}_6$
0,35700	-0,00038	0,00003	-0,00029	-0,00093	0,00004	0,00011	-0,00093	0,00000	0,00000
0,71400	0,42900	-0,14600	0,34600	0,99400	-0,17800	-0,54700	0,94000	0,00000	0,00000
1,07100	0,00115	0,00009	0,00088	0,00279	0,00011	0,00032	0,00279	0,00000	0,00000
1,42800	-0,48100	0,00114	-0,36600	-1,80000	0,00141	0,04100	-1,18000	0,00000	0,00000
1,78500	-0,01150	0,00095	-0,00882	-0,02800	0,00116	0,00341	-0,02800	0,00000	0,00000
2,14200	0,48136	-0,00033	0,36633	-0,00040	-0,00118	-0,00040	1,17230	0,00000	0,00000

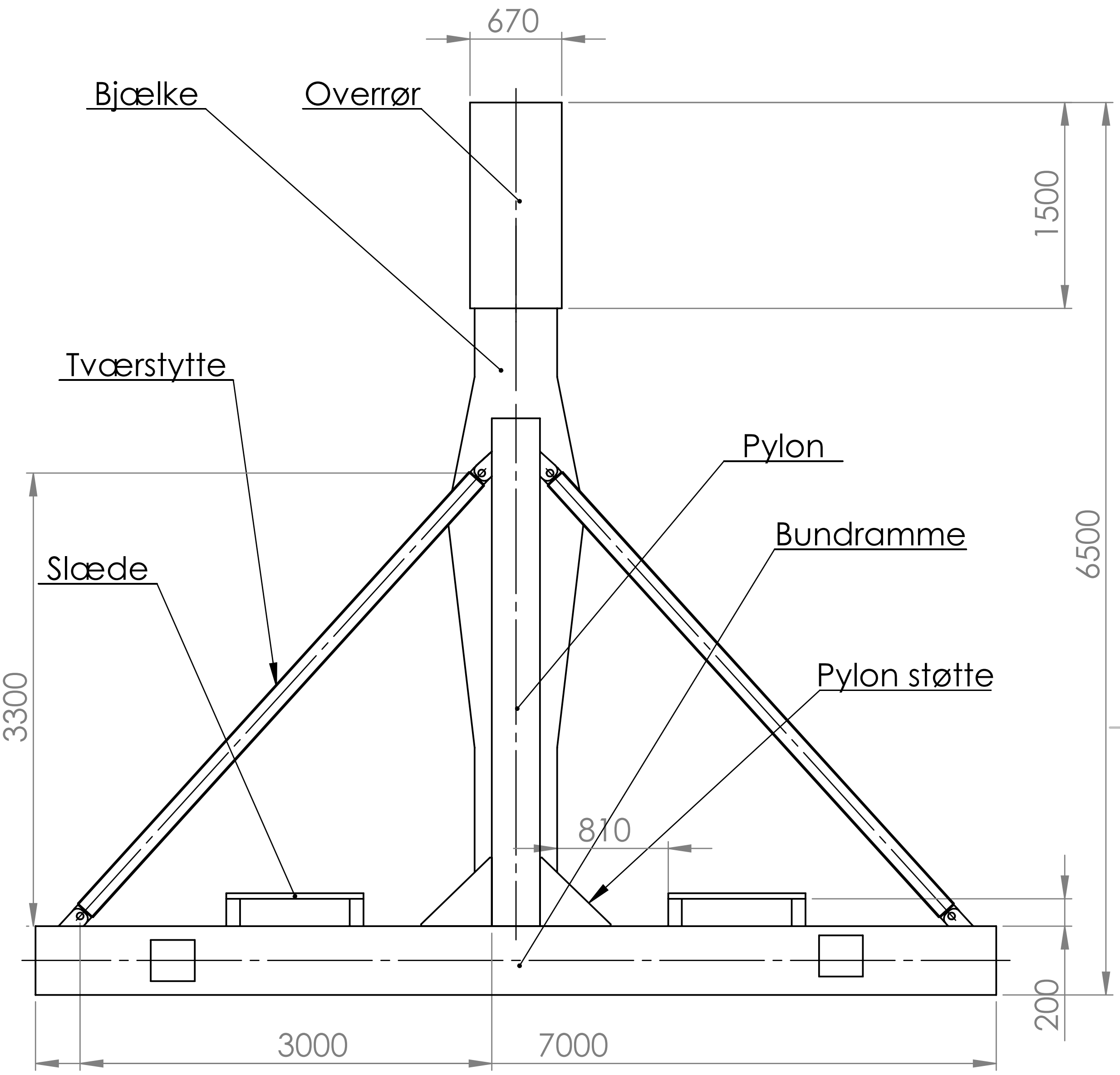
E.3 Acceleration

Tabel E.3: Resultat for acceleratin

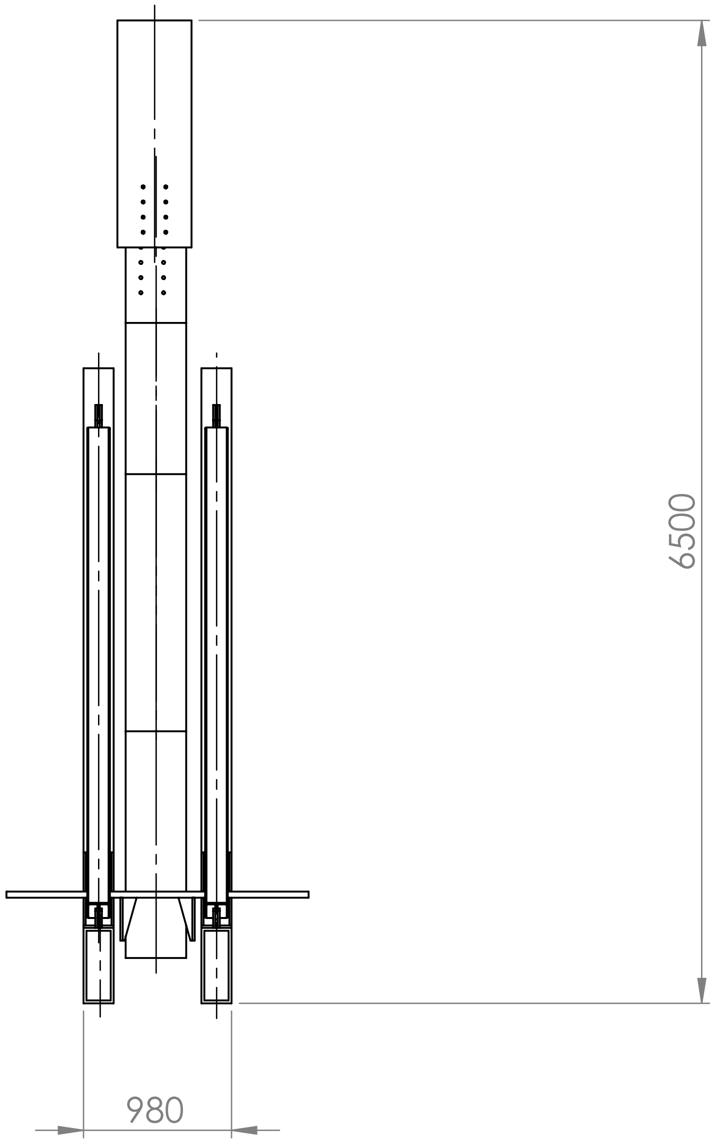
t	$\ddot{x}_1$	$\ddot{y}_1$	$\ddot{\phi}_1$	$\ddot{x}_2$	$\ddot{y}_2$	$\ddot{\phi}_2$	$\ddot{x}_3$	$\ddot{y}_3$	$\ddot{\phi}_3$
0,35700	-2,27964	0,18440	1,61656	-4,84000	0,19554	-0,78408	-4,84000	0,00000	0,00000
0,71400	-0,16879	-0,12112	0,08543	-0,18329	-0,12857	-0,71162	-0,00770	0,00000	0,00000
1,07100	2,26996	0,18053	-1,61172	4,83516	0,19166	-0,76472	4,84000	0,00000	0,00000
1,42800	-0,01551	-0,18899	0,01088	-0,03300	-0,20099	0,80395	-0,03300	0,00000	0,00000
1,78500	-2,27963	0,18429	1,61655	-4,83999	0,19542	-0,78361	-4,84000	0,00000	0,00000
2,14200	-0,01948	-0,18921	0,01372	-0,04144	-0,20128	0,80512	-0,04144	0,00000	0,00000

t	$\ddot{x}_4$	$\ddot{y}_4$	$\ddot{\phi}_4$	$\ddot{x}_5$	$\ddot{y}_5$	$\ddot{\phi}_5$	$\ddot{x}_6$	$\ddot{y}_6$	$\ddot{\phi}_6$
0,35700	2,11508	-0,17472	1,61656	5,13040	-0,21344	-0,62436	5,13040	0,00000	0,00000
0,71400	0,15669	0,11184	0,08543	0,53090	0,13716	0,51003	0,67891	0,00000	0,00000
1,07100	-2,11024	-0,16407	-1,61172	-5,13040	-0,19989	-0,58564	-5,13040	0,00000	0,00000
1,42800	0,01470	0,17497	0,01088	0,03566	0,21396	0,62476	0,03532	0,00000	0,00000
1,78500	2,11507	-0,17462	1,61655	5,13039	-0,21332	-0,62399	5,13040	0,00000	0,00000
2,14200	0,01815	0,17633	0,01372	0,04420	0,21470	0,62690	0,04421	0,00000	0,00000

Samletegning F



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED: DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS SURFACE FINISH: TOLERANCES: LINEAR: ANGULAR:	FINISH:		DEBURR AND BREAK SHARP EDGES	DO NOT SCALE DRAWING	REVISION
	NAME	SIGNATURE	DATE	TITLE:	Samletegning
DRAWN					
CHK'D					
APPV'D					
MFG					
Q.A			MATERIAL:	DWG NO.	A4
			WEIGHT:	SCALE:1:100	SHEET 1 OF 2



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
SURFACE FINISH:
TOLERANCES:
LINEAR:
ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND BREAK SHARP EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE
DRAWN			
CHK'D			
APPV'D			
MFG			
Q.A			

MATERIAL:

WEIGHT:

TITLE:

DWG NO.

Samlet tegning

A4

SCALE:1:100

SHEET 2 OF 2