Keeping it real

Konstruktionen af de reelle tal gennem decimaltalsrepræsentation og Dedekind-snit

Speciale

10. januar 2018

Pernille Andersen • Rikke Bod Lund

Matematisk Institut

Skjernvej 4A • 9220 Aalborg Ø • Tlf. 99409940

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Institut for Matematiske Fag

Matematik

Skjernvej 4A

Tlf. 99409940

http://math.aau.dk

Titel:

Keeping it real

Undertitel

Konstruktionen af de reelle tal gennem decimaltalsrepræsentation og Dedekind-snit

Projektperiode:

Speciale, efterårssemesteret 2017

Deltagere:

Pernille Andersen

Rikke Bod Lund

Vejleder:

Horia Cornean

Oplagstal: 3
Sidetal: 66 (69 inklusiv appendiks)
Afsluttet den: 10. januar 2018

Synopsis:

Formålet med dette speciale er at konstruere mængden af de reelle tal. Dette gøres på to forskellige måder: den ene ved hjælp af decimaltal og den anden ved Dedekind-snit. Den første konstruktion tager udgangspunkt i heltallene og egenskaberne for regneoperationerne af disse. Disse regneoperationer samt deres egenskaber udvides til at gælde for endelige decimaltal, hvorefter dette kan udvides til alle reelle tal ved at benytte konvergente følger af endelige decimaltal.
Den anden konstruktion tager udgangspunkt i de rationelle tal og regneoperationerne herfor. Det bevises, at mængden af de reelle tal er et ordnet legeme med supremumsegenskaben, som indeholder mængden af de rationelle tal som et dellegeme.
Til sidst sammenlignes begge konstruktioner og vurderes til at være ækvivalente, idet den første konstruktion også giver mængden af de reelle tal som et ordnet legeme med supremumsegenskaben, og der kan konstrueres en isomorfi mellem mængderne.

Abstract

This master's thesis provides two constructions of the real numbers. The first construction takes its starting point in the integers for which the operations and the properties of these are assumed to be known. The real numbers are defined using decimals, and we expand the properties of the operations to terminating decimals, which in turn enables us to expand the properties to the real numbers using convergent sequences of terminating decimals.

The second construction is based on Dedekind cuts. Here, the starting point is the set of rational numbers. We assume that the properties of operations hold for rational numbers, which entails that the set of rationel numbers is a field, and we wish to show that the set of real numbers is an ordered field with the least-upper-bound property, in which the set of rational numbers is contained as a subfield.

After having presented the two constructions, we compare the achieved sets, and they are found to be equivalent, as the sets are both ordered fields with the least-upper-bound property, and we can construct an isomorphism between them. Finally, the cardinality of the sets of real numbers, rational numbers, and irrational numbers are investigated and compared. While all the sets are infinite, the rationel numbers are countable infinite whereas the real and irrational numbers have the same cardinality, as they are uncountable infinite sets.

Forord

Dette speciale er udarbejdet i efterårssemestret 2017 på Matematisk Institut på Aalborg Universitet af Pernille Andersen og Rikke Bod Lund i perioden 1. september 2017 til 10. januar 2018.

Vi vil gerne takke vores familier for uundværlig støtte igennem vores studietid, herunder særligt Anders Bod Lund og Connie Andersen for levering af mad og snacks i eksamensperioder. Yderligere vil vi takke René Bødker Christensen og Jaron Skovsted Gundersen for trofast at have stået ved vores side. En særlig tak skal desuden lyde til vores vejleder Horia Cornean, foruden hvem dette speciale aldrig var blevet til.

Dette speciale er dedikeret til ham.

Læsevejledning

Formålet er at konstruere mængden af de reelle tal, hvorfor talmængder er en essentiel del af teorien. Særligt bygger første del af rapporten på kendskab til heltallene og deres egenskaber, disse er dog stadig opstillet i Appendiks A for at øge læserens overblik. Appendiks A indeholder desuden også definitioner angående funktioner og legemer, som benyttes undervejs i rapporten, men som antages for at være fundamentale.

Idet der ikke er konsensus, omkring hvorvidt 0 indgår i mængden af de naturlige tal, angives to mængder: $\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}_0$. Her består $\mathbb{N}$ kun af de positive heltal, og $\mathbb{N}_0$ består af de ikke-negative heltal. I forbindelse med konstruktionen defineres decimaltal, hvor det for forståelsens skyld er nødvendigt sprogligt at skelne mellem decimaler og cifre. Her angiver decimaler alle tal til højre for kommaet, hvorimod cifre kan angive tal på begge sider af kommaet.

Igennem rapporten følger definitioner, sætninger, eksempler og lignende samme nummerering, hvor det første tal indikerer kapitlet og det næste indikerer afsnittet. Ligninger nummereres separat, sådan at første tal indikerer kapitlet. Figurer nummereres med et enkelt tal. Definitioner, sætninger, propositioner og lignende skrives med kursiv for at tydeliggøre enden på disse. På samme måde afsluttes beviser med symbolet $\blacksquare$, og eksempler med symbolet $\blacktriangleleft$.

Indholdsfortegnelse

Introduktion

Dette speciale omhandler konstruktionen af de reelle tal, hvor der benyttes to forskellige konstruktioner. For at konstruere mængden af de reelle tal tager dette speciale udgangspunkt i hovedkilderne *Notes for Analysis 1 and 2* (Cornean 2015) og *Principles of Mathematical Analysis* (Rudin 1976). Der findes dog en del andre kilder inden for dette emne, som hovedkilderne arbejder ud fra, herunder *Real numbers as infinite decimals and the irrationality of* $\sqrt{2}$ af Martin Klazar (Klazar 2009) og *Stetigkeit und irrationale Zahlen* af Richard Dedekind (Dedekind 1912). Der findes også andre måder at konstruere de reelle tal på, hvilket *The real numbers as a wreath product* (Faltin m.fl. 1975) og *Constructions of the real numbers* (Krapp 2014) er eksempler på. Til den grundlæggende teori kan *Mathematical Analysis* af Tom M. Apostol (Apostol 1974) benyttes som supplement til de andre kilder.

Den første af de to konstruktioner tager udgangspunkt i heltallene, hvor det antages, at regneoperationerne og deres egenskaber er kendte. Vi starter med at definere decimaltal og to delmængder af disse, hvoraf den første delmængde indeholder de endelige decimaltal, som på et tidspunkt har uendeligt mange nuller, og den anden delmængde indeholder de decimaltal, som på et tidspunkt har uendeligt mange 9-taller. Tilsammen udgør et par af decimaltal fra hver af disse delmængder et spring, hvilket gør os i stand til at definere mængden af de reelle tal. Formålet er så at indføre regneoperationerne herpå og vise, at de sædvanlige egenskaber også er gældende for de reelle tal. For at gøre dette starter vi med at indføre addition og multiplikation af endelige decimaltal samt bevise, at egenskaberne er gældende for disse.

For at udvide regneoperationerne til de reelle tal benytter vi os af følger af endelige decimaltal, som konvergerer til reelle tal, hvorfor vi redegør for begreberne supremum og infimum. Ud fra dette er vi i stand til at definere addition og multiplikation af reelle tal som grænsen af endelige decimaltal. Derfor kan vi benytte resultaterne fra endelige decimaltal til at udvide de fleste af egenskaberne til de reelle tal. Det er kun eksistensen af den multiplikative inverse til ethvert reelt tal forskelligt fra 0, som kræver en anden fremgangsmåde. Derfor starter vi med at finde den multiplikative inverse til ethvert naturligt tal forskelligt fra 0, hvilket leder os videre til definitionen af de rationelle tal, som yderligere gør os i stand til at finde den multiplikative inverse til reelle tal. Dette fuldender konstruktionen af de reelle tal som decimaltal.

Den anden konstruktion er baseret på Dedekind-snit. Her tager vi udgangspunkt i mængden af de rationelle tal, som vi derfor starter med at definere. Vi antager, at egenskaberne for regneoperationerne gælder for de rationelle tal, hvilket betyder, at mængden udgør et legeme. Vi ønsker så at vise, at mængden af de reelle tal er et ordnet legeme med supremumsegenskaben, hvori mængden af de rationelle tal er indeholdt som et dellegeme. Altså skal vi, ligesom i den første konstruktion, indføre regneoperationerne for reelle tal og udvide egenskaberne for disse. Efter at have redegjort for begge konstruktioner, ønsker vi at sammenligne de to opnåede mængder samt at undersøge kardinaliteten af mængderne af de reelle tal, rationelle tal og irrationelle tal.

Konstruktion

KAPITEL 1

Dette kapitel har til formål at konstruere mængden af de reelle tal ud fra viden om heltallene. I Afsnit 1.1 starter vi med at definere decimaltal, hvorefter vi definerer to typer af decimaltal: endelige og "knap-så-endelige" decimaltal. Disse bruges til at definere de reelle tal. Herefter introducerer vi en ordning på de reelle tal, samt beviser tætheden af de endelige decimaltal i mængden af de reelle tal. I Afsnit 1.2 definerer vi regneoperationer for endelige decimaltal, hvorefter vi viser, at egenskaberne for heltallene kan udvides til at gælde for disse også. I Afsnit 1.3 definerer vi begreberne supremum og infimum, da disse er grundlæggende for Kapitel 2, som omhandler konvergente følger. Derudover beviser vi fuldstændigheden af de reelle tal, som i dette projekt er en sætning frem for et aksiom på grund af konstruktionen.

Dette kapitel bygger på Kapitel 1 i *Notes for Analyse 1 and Analyse 2* (Cornean 2015) med supplerende materiale fra *Analysis with an Introduction to Proof* (Lay 2014).

1.1 Mængden af de reelle tal

Dette afsnit har til formål at konstruere mængden af de reelle tal som decimaltal. Derfor skal vi først gøre rede for, hvad der kendetegner decimaltal, samt hvilke egenskaber disse tal har. Vi konstruerer to delmængder af decimaltallene, som bruges til at definere et *spring*, hvilket muliggør definitionen af de reelle tal.

1.1.1 Definition (Decimaltal):
Lad $\mathbb{D}$ angive mængden af talfølger på formen

$$x = \pm x_N x_{N-1} \ldots x_0, x_{-1} x_{-2} \ldots,$$

hvor $N \geq 0$ er endelig, enhver $x_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, og $x_N > 0$, hvis $N > 0$. Konventionelt sætter vi $x_j = 0$, hvis $j > N$.

Ud fra ovenstående definition følger det, at nulelementet i $\mathbb{D}$ angives ved 0 og er givet ved at vælge alle x_j til at være 0. Udover nulelementet kaldes decimaltallene med "$+$" foran for positive decimaltal, mens decimaltallene med "$-$" foran kaldes negative. Fremover vil "$+$" dog blive udeladt foran de positive decimaltal, dog beholdes "$-$" for at skelne mellem dem. Konventionelt gælder det, at hvis x er negativ, så er $-x$ positiv.

Vi vil skelne mellem forskellige typer af decimaltal, specifikt vil vi konstruere to delmængder af $\mathbb{D}$ for, som sagt, at kunne konstruere mængden af de reelle tal.

1.1.2 Definition (Endelige decimaltal):
Lad $\mathbb{T} \subset \mathbb{D}$ være mængden af alle decimaltal, hvorom det gælder, at der eksisterer et heltal $J \in \mathbb{Z}$, sådan at $x_j = 0$ for alle $j \leq J$. Så kaldes $x \in \mathbb{T}$ for et endeligt decimaltal.

1.1.3 Definition ("Knap-så-endelige" decimaltal):
Lad $\widetilde{\mathbb{T}} \subset \mathbb{D}$ være mængden af alle decimaltal, hvorom det gælder, at der eksisterer et heltal $J \in \mathbb{Z}$, sådan at $x_j = 9$ for alle $j \leq J$.

For endelige decimaltal $x \in \mathbb{T}$ gælder det, at kun et endeligt antal decimaler x_j er forskellige fra 0. For at lette notationen udelades ofte de uendeligt mange nuller. Eksempelvis skrives $x = 1{,}54000...$ oftest som $1{,}54$ i stedet. I dette tilfælde er $J = -3$, eftersom $x_j = 0$ for alle $j \leq -3$. På samme måde lettes notationen for de "knap-så-endelige" decimaltal ved ofte at angive de gentagende 9-taller med en streg over det første 9-tal. Eksempelvis angives $x = 1{,}999... \in \widetilde{\mathbb{T}}$ som $1{,}\bar{9}$ i stedet. I dette tilfælde er $J = -1$, eftersom $x_j = 9$ for alle $j \leq -1$.

Da vi nu har redegjort for mængden af decimaltal $\mathbb{D}$ samt to delmængder heraf, ønsker vi at indføre en ordning derpå for at kunne sammenligne elementer. Ordningen $\prec$ kaldes *mindre end* og fungerer således, at hvis $x \in \mathbb{D}$ er positiv, så er $0 \prec x$, og omvendt hvis $x \in \mathbb{D}$ er negativ, så er $x \prec 0$. Da en ordning skal være transitiv, gælder det, at ethvert negativt decimaltal er mindre end ethvert positivt decimaltal. Derudover gælder det for to positive decimaltal x og y, at $x \prec y$, hvis der findes et $J \in \mathbb{Z}$, sådan at $x_J < y_J$, og $x_j = y_j$ for $j > J$. Hvis x og y derimod er negative, gælder det, at $x \prec y$, hvis $-y \prec -x$. Notationsmæssigt har vi desuden, at $x \prec y$ svarer til, at $y \succ x$. For at tydeliggøre ordningen ses nedenstående taleksempler, hvor forskellige decimaltal sammenlignes.

1.1.4 Eksempel:

(a) Hvis $x = 3{,}17824$ og $y = 3{,}178\bar{1}$, så er $y \prec x$, hvor $J = -4$, og $y_{-4} = 1 < 2 = x_{-4}$.

(b) Hvis $x = 113{,}2715$ og $y = 84{,}37\bar{9}$, så er $y \prec x$, hvor $J = 2$, og $y_2 = 0 < 1 = x_2$.

(c) Hvis $x = -27{,}\bar{5}$ og $y = -23{,}01$, så er $x \prec y$, da $-y = 23{,}01 \prec 27{,}\bar{5} = -x$, hvor $J = 0$, og $y_0 = 3 < 7 = x_0$.

(d) Hvis $x = 0{,}\bar{9}$ og $y = 1$, så er $x \prec y$, hvor $J = 0$, og $x_0 = 0 < 1 = y_0$. ◀

Her er Eksempel 1.1.4 (d) særligt interessant, fordi det ikke er muligt at finde et decimaltal $z \in \mathbb{D}$, sådan at

$$x = 0{,}\bar{9} \prec z \prec 1 = y,$$

fordi der ikke eksisterer et $J \in \mathbb{Z}$, sådan at $x_J < z_J$ og $z_J < y_J$, idet $x_j = 9$ og $y_j = 0$ for alle $j < J = 0$. Dermed kan z ikke gøres større end x og samtidig være mindre end y. Dette leder os til definitionen på et spring.

1.1.5 Definition (Spring):
For ethvert endeligt decimaltal $t \in \mathbb{T}$, hvor den sidste decimal, forskellig fra 0, angives $t_J \in \{1, \ldots, 9\}$, findes der et decimaltal $\widetilde{t} \in \widetilde{\mathbb{T}}$, sådan at $t_j = \widetilde{t}_j$ for $j > J$, $\widetilde{t}_J = t_J - 1$, og $\widetilde{t}_j = 9$ for alle $j < J$. Parret af decimaltal kaldes tilsammen et spring, og de betragtes som ét element.

Dermed har vi, at x og y i Eksempel 1.1.4 (d) faktisk udgør et spring tilsammen. I nedenstående eksempel gives endnu et eksempel på et spring.

1.1.6 Eksempel:
Hvis $t = 1{,}2345$, så kan vi finde $\widetilde{t} = 1{,}2344\bar{9}$. Så er t og $\widetilde{t}$ et spring, hvor $J = -4$, og $\widetilde{t}_{-4} = t_{-4} - 1 = 5 - 1 = 4$. ◀

Et decimaltal x er ikke en del af et spring, hvis og kun hvis decimaltallet indeholder uendeligt mange decimaler $x_j \in \{1, \ldots, 8\}$. Eksempelvis kan $x = 1{,}\bar{3}$ ikke være en del af et spring. Med definitionen for spring er vi nu i stand til at definere mængden af de reelle tal.

1.1.7 Definition (Mængden af de reelle tal):
Foreningen af nulelementet 0 og alle elementer i $\mathbb{D}$, fratrukket elementerne i $\mathbb{T}$ og $\widetilde{\mathbb{T}}$, samt alle spring udgør mængden af de reelle tal $\mathbb{R}$.

Skrevet symbolsk, kan definitionen formuleres således:

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup \mathbb{D} \setminus (\mathbb{T} \cup \widetilde{\mathbb{T}}) \cup \{x \in \mathbb{D} \mid x \text{ er en del af et spring}\}.$$

Ethvert element i $\mathbb{T} \cup \widetilde{\mathbb{T}} \setminus \{0\}$ indgår i præcist ét spring, hvilket er grunden til, at vi kan fratrække mængderne $\mathbb{T}$ og $\widetilde{\mathbb{T}}$ i definitionen på de reelle tal, da elementerne bliver tilføjet ved foreningen med alle spring.

Vi skelner mellem reelle tal og decimaltal ved at indføre notationen $[x]$, som svarer til decimaltallet x, hvis x ikke er en del af et spring. Eksempelvis har vi, at $x = 0{,}\bar{5} = [x]$, hvorimod hvis $x = 0{,}0\bar{9}$, så er $[x] = [0{,}0\bar{9}] = [0{,}1]$. Ved reelle tal angives ordningen $\prec$ blot som $<$. Det vil sige, at $[x] < [y]$ betyder, at $x \prec y$, og x og y ikke er en del af det samme spring. Ydermere ved to forskellige reelle tal $[x] \neq [y]$ gælder det, at $[x] < [y]$ eller $[y] < [x]$. Når vi arbejder med endelige decimaltal, kan vi blot benytte ordningen $<$, da $\prec$ kun er nødvendig, når vi skal sammenligne elementerne i det samme spring. Ligesom med decimaltal har vi desuden, at $[x] < [y]$ svarer til, at $[y] > [x]$. Vi er nu i stand i stand til at bevise tætheden af de endelige decimaltal i de reelle tal.

1.1.8 Proposition:
Givet to reelle tal $[x] < [y]$ gælder det, at der findes et endeligt decimaltal $t \in \mathbb{T}$, sådan at $[x] < [t] < [y]$.

Bevis:
Vi har tre mulige kombinationer af fortegn, som vi undersøger separat.

- Lad $[x]$ være negativ og $[y]$ positiv, så kan vi vælge $[t] = 0$.

- Antag, at $0 < [x] < [y]$. Vi har nu to muligheder:

  1. $[x]$ er en del af et spring, og vi kan vælge x til at være et endeligt decimaltal, det vil sige, at $x \in \mathbb{T}$. Da vi antog, at $[x] < [y]$, har vi, at $x \prec y$, og x og y er ikke i det samme spring. Altså eksisterer der et $J \in \mathbb{Z}$, sådan at $x_j = y_j$ for $j > J$, og $x_J < y_J$. Eftersom $x \in \mathbb{T}$, har vi fra Definition 1.1.2, at der eksisterer et $N \leq J$, sådan at $x_j = 0$, hvis $j \leq N$. Nu kan vi vælge $t \in \mathbb{T}$ således, at $x_j = t_j$ for alle $j \geq N$, hvorefter vi sætter $t_{N-1} = 1$ og $t_j = 0$ for $j < N - 1$. Dermed har vi, at $t \in \mathbb{T}$, $t \prec y$, og $[x] < [t] < [y]$.
  2. $[x]$ er ikke en del af et spring, altså indeholder x uendeligt mange decimaler $x_j \in \{1, \ldots, 8\}$ for $j < J$. Da vi antog, at $[x] < [y]$, har vi igen, at $x \prec y$. Altså eksisterer der et $J \in \mathbb{Z}$, sådan at $x_j = y_j$ for $j > J$, og $x_J < y_J$. Vi vælger $t \in \mathbb{T}$ således, at $x_j = t_j$ for $j \geq J$. For $j < J$ sættes den første $t_j \in \{1, \ldots, 8\}$ til at være 9, og de efterfølgende decimaler t_j sættes til 0. Dermed har vi, at $t \in \mathbb{T}$, $t \prec y$, og $[x] < [t] < [y]$.

- Antag, at $[x] < [y] < 0$, så har vi, at $0 < [-y] < [-x]$. Så har vi netop ovenfor vist, at der eksisterer et $[t] > 0$, hvor $t \in \mathbb{T}$, sådan at $[-y] < [t] < [-x]$. Dermed har vi, at $[x] < [-t] < [y]$. ■

Vi har nu defineret mængden af de reelle tal samt bevist tætheden af de endelige decimaltal i $\mathbb{R}$. Vores mål er at introducere de forskellige regneoperationer på de reelle tal, men for at gøre dette, skal vi først gøre rede for addition, subtraktion og multiplikation af de endelige decimaltal, hvorefter begreberne udvides til at dække de reelle tal.

1.2 Regneoperationer og egenskaber for endelige decimaltal

Når vi skal addere og multiplicere, tager vi udgangspunkt i heltallene, hvor addition og multiplikation er defineret. Dette bruger vi til at udvide regneoperationerne til at gælde endelige decimaltal, hvorefter vi kan bruge dette til at udvide til reelle tal i Kapitel 3.

Ethvert endeligt decimaltal på formen $x = \pm x_N x_{N-1} \ldots x_0{,}000\ldots$ kan entydigt identificeres med heltallet

$$\pm\left(10^N x_N + 10^{N-1} x_{N-1} + \cdots + 10 x_1 + x_0\right) \in \mathbb{Z}.$$

Nedenfor ses et kort eksempel på, hvordan et decimaltal kan identificeres med heltal.

1.2.1 Eksempel:
Ud fra ovenstående beskrivelse har vi, at decimaltallet 37821,000... kan skrives entydigt som heltallet $10^4 \cdot 3 + 10^3 \cdot 7 + 10^2 \cdot 8 + 10 \cdot 2 + 1$. ◀

Dermed kan vi definere summen og produktet af to endelige decimaltal af ovenstående type ved at benytte os af heltallene.

1.2.2 Definition:
At multiplicere med 10^k, hvor $k \in \mathbb{N}_0$ svarer til at flytte kommaet i decimaltallet k pladser til højre, og derved opnås et større tal end før. På samme måde har vi, at multiplikation med 10^{-k}, hvor $k \in \mathbb{N}$, svarer til at flytte kommaet k pladser til venstre, hvorved der opnås et mindre tal.

Ud fra Definition 1.2.2 angiver vi desuden det endelige decimaltal $0{,}1000...$ som 10^{-1}, decimaltallet $0{,}01000...$ som 10^{-2} og så videre. Nedenfor underbygges forståelsen med et eksempel.

1.2.3 Eksempel:
Her ses et eksempel på at gange et decimaltal med 10^3 og 10^{-2}:

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot 37821{,}000... &= 37821000{,}000... \\ 10^{-2} \cdot 37821{,}000... &= 378{,}21000..., \end{aligned}$$

hvor det ses, at kommaet rykkes henholdsvis tre pladser til højre og to pladser til venstre.◀

Ud fra ovenstående kan vi definere addition og multiplikation ved at benytte os af egenskaberne for heltal.

1.2.4 Definition (Addition og multiplikation af endelige decimaltal):
Lad x og y være to endelige decimaltal givet ved $x = x_N x_{N-1}...x_0{,}x_{-1}...x_{-P}000...$ og $y = y_M y_{M-1}...y_0{,}y_{-1}...y_{-Q}000...$, hvor $Q \geq P$. Så gælder følgende omskrivning:

$$\begin{aligned} x &= 10^{-Q} \cdot x_N x_{N-1}...x_0 x_{-1}...x_{-P}0...00{,}000... \\ y &= 10^{-Q} \cdot y_M y_{M-1}...y_0 y_{-1}...y_{-Q}{,}000... \end{aligned}$$

Dermed er addition af de to decimaltal givet ved:

$$x + y = 10^{-Q} \cdot \left(x_N x_{N-1}...x_0 x_{-1}...x_{-P}0...00 + y_M y_{M-1}...y_0 y_{-1}...y_{-Q} \right),$$

og multiplikation er givet ved:

$$x \cdot y = 10^{-2Q} \cdot \left(x_N x_{N-1}...x_0 x_{-1}...x_{-P}0...00 \cdot y_M y_{M-1}...y_0 y_{-1}...y_{-Q} \right).$$

Definitionerne giver mening, da addition og multiplikation er veldefinerede, eftersom multiplikation med 10^k er defineret til blot at flytte kommaet til højre eller venstre afhængigt af fortegnet på k. Derudover gælder det, at hvis vi multiplicerer to negative, endelige decimaltal, får vi et positivt tal, samt hvis vi multiplicerer et negativt endeligt decimaltal med et positivt, får vi et negativt tal på grund af egenskaberne for heltal. Vi vil nu illustrere regneoperationerne med et eksempel.

1.2.5 Eksempel:
Her vil vi være addere, subtrahere og multiplicere de endelige decimaltal $x = 23{,}17$ og $y = 5{,}252525$. Da Q angiver det største antal decimaler, har vi, at $Q = 6$.

(a) Addition:

$$\begin{aligned} x + y &= 23{,}17 + 5{,}252525 = 10^{-6} \cdot (23170000 + 5252525) \\ &= 10^{-6} \cdot 28422525 = 28{,}422525. \end{aligned}$$

(b) Subtraktion:

$$\begin{aligned} x - y &= x + (-y) = 23{,}17 + (-5{,}252525) = 10^{-6} \cdot \big(23170000 + (-5252525)\big) \\ &= 10^{-6} \cdot 17917475 = 17{,}917475. \end{aligned}$$

(c) Multiplikation:

$$\begin{aligned} x \cdot (-y) &= 23{,}17 \cdot (-5{,}252525) = 10^{-2\cdot 6} \cdot \big(23170000 \cdot (-5252525)\big) \\ &= 10^{-12} \cdot (-121701004250000) = -121{,}70100425. \end{aligned}$$ ◄

Ud fra Definition 1.2.4 har vi, at den kommutative lov må gælde for endelige decimaltal, idet vi ved, den er gældende for heltallene.

1.2.6 Proposition (Kommutativitet for endelige decimaltal):
For endelige decimaltal x og y, som i Definition 1.2.4, gælder det, at

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x \cdot y &= y \cdot x. \end{aligned}$$

Bevis:
Vi udfører kun beviset for addition, da et tilsvarende bevis kan laves for multiplikation. Vi bruger definitionen på addition for endelige decimaltal og benytter, at leddene i parentesen er heltal, hvor den kommutative lov er gældende:

$$\begin{aligned} x + y &= 10^{-Q} \cdot (x_N x_{N-1} ... x_0 x_{-1} ... x_{-P} 0...00 + y_M y_{M-1} ... y_0 y_{-1} ... y_{-Q}) \\ &= 10^{-Q} \cdot (y_M y_{M-1} ... y_0 y_{-1} ... y_{-Q} + x_N x_{N-1} ... x_0 x_{-1} ... x_{-P} 0...00) \\ &= y + x. \end{aligned}$$ ■

Generelt kan vi udvide egenskaberne for regneoperationerne til også at gælde for endelige decimaltal ved at benytte os af aksiomerne for heltallene i Appendiks A.1.

1.2.7 Proposition (Associativitet for endelige decimaltal):
For $x, y, z \in \mathbb{T}$ gælder det, at

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z) \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot x). \end{aligned}$$

Bevis:
Igen beviser vi kun for addition, da multiplikation er tilsvarende. Som tidligere, kan vi skrive x, y, z som i Definition 1.2.4, hvor vi vælger at indføre heltallene $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$ på følgende

måde for at lette notationen:

$$
\begin{aligned}
x &= 10^{-Q} \cdot x_N x_{N-1} ... x_0 x_{-1} ... x_{-P} 0...00{,}000... = 10^{-Q} \cdot \widehat{x} \\
y &= 10^{-Q} \cdot y_M y_{M-1} ... y_0 y_{-1} ... y_{-Q}{,}000... = 10^{-Q} \cdot \widehat{y} \\
z &= 10^{-Q} \cdot z_L z_{L-1} ... z_0 z_{-1} ... z_{-R} 0...00{,}000... = 10^{-Q} \cdot \widehat{z},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

hvor $P, R \leq Q$. Vi benytter Definition 1.2.4 og får, at

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= 10^{-Q} \cdot (\widehat{x}+\widehat{y}) + 10^{-Q} \cdot \widehat{z} \\
&= 10^{-Q} \cdot (\widehat{x}+\widehat{y}+\widehat{z}) \\
&= 10^{-Q} \cdot \widehat{x} + 10^{-Q} \cdot (\widehat{y}+\widehat{z}) \\
&= x + (y+z).
\end{aligned}
$$

■

1.2.8 Proposition (Distributivitet for endelige decimaltal):
For alle $x, y, z \in \mathbb{T}$ gælder det, at

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Bevis:
Vi benytter igen Definition 1.2.4, samt at den distributive lov er gældende for heltallene:

$$
\begin{aligned}
(x+y) \cdot z &= \big(10^{-Q} \cdot (\widehat{x}+\widehat{y})\big) \cdot 10^{-Q} \cdot \widehat{z} \\
&= 10^{-2Q} \cdot (\widehat{x}+\widehat{y}) \cdot \widehat{z} \\
&= 10^{-2Q} \cdot (\widehat{x} \cdot \widehat{z} + \widehat{y} \cdot \widehat{z}) \\
&= 10^{-2Q} \cdot (\widehat{x} \cdot \widehat{z}) + 10^{-2Q} \cdot (\widehat{y} \cdot \widehat{z}) \\
&= x \cdot z + y \cdot z.
\end{aligned}
$$

■

Vi har nu bevist, at den kommutative lov, den associative lov og den distributive lov også er gældende for endelige decimaltal. Og vi vil nu vise, at der findes neutralelementer både med hensyn til addition og multiplikation af endelige decimaltal.

1.2.9 Proposition:
For alle $x \in \mathbb{T}$ gælder det, at

(a) 0 *er neutralelementet med hensyn til addition, det vil sige, at*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

(b) 1 *er neutralelementet med hensyn til multiplikation, det vil sige, at*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Bevis:

(a) Vi benytter Definition 1.2.4, samt at vi ved, at 0 er neutralelementet med hensyn til addition af heltal:

$$0 + x = 10^{-Q} \cdot (0 + \widehat{x}) = 10^{-Q} \cdot \widehat{x} = x.$$

(b) Igen benytter vi Definition 1.2.4 samt Definition 1.2.2:

$$1 \cdot x = 10^{-2Q} \cdot (10^Q \cdot \widehat{x}) = 10^{-Q} \cdot \widehat{x} = x. \qquad \blacksquare$$

Da vi nu kender neutralelementet med hensyn til addition, kan vi finde den additive inverse til ethvert endeligt decimaltal, hvilket betyder, at vi kan redegøre for subtraktion af endelige decimaltal.

1.2.10 Proposition:
For alle $x \in \mathbb{T}$ eksisterer der en entydig additiv invers $-x$, sådan at

$$x + (-x) = -x + x = 0.$$

Bevis:
Vi beviser først entydigheden. Antag, at y og y' begge er additive inverse til x, det vil sige, at $x + y = 0$ og $x + y' = 0$. Vi benytter, at den associative lov er gældende, og at 0 er neutralelementet for addition:

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'.$$

Altså er den additive inverse entydig, såfremt den eksisterer, og vi kan betegne den $-x$. Vi beviser dernæst eksistensen, hvor vi benytter Definition 1.2.4, samt at vi kender den additive inverse til heltal:

$$x + (-x) = 10^{-Q} \cdot \big(\widehat{x} + (-\widehat{x})\big) = 10^{-Q} \cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Dermed har vi, at subtraktion af to endelige decimaltal x og y kan beskrives ved addition af x og den additive inverse til y. Vi vil nu undersøge, hvilke egenskaber ordningen $<$ har, når det kommer til endelige decimaltal. Det viser sig, at ordningen $<$ er kompatibel med regneoperationerne for endelige decimaltal, hvilket vi kan bruge til at vise, at det også gælder for alle reelle tal. Igen tager vi udgangspunkt i aksiomerne for heltallene.

1.2.11 Proposition:
For alle $x, y, z \in \mathbb{T}$, hvor $x < y$, gælder det, at

$$x + z < y + z.$$

Bevis:
Vi har, at da $x < y$, gælder det også for heltallene $\widehat{x} < \widehat{y}$. Og da $<$ er kompatibel med addition af heltal, så kan vi lægge $\widehat{z}$ til på begge sider, hvor uligheden stadig er gældende:

$$\widehat{x} + \widehat{z} < \widehat{y} + \widehat{z}.$$

Ud fra Definition 1.2.2 ved vi, at multiplikation med 10^{-Q} blot svarer til at rykke kommaet Q gange til venstre. Derfor er uligheden stadig gældende, og vi får, at

$$x + z = 10^{-Q} \cdot (\widehat{x} + \widehat{z}) < 10^{-Q} \cdot (\widehat{y} + \widehat{z}) = y + z. \qquad \blacksquare$$

Et tilsvarende bevis kan laves for kompatibiliteten af $<$ med multiplikation af endelige decimaltal, men da vi ofte får brug for at vende en ulighed ved at gange med et negativt tal, vælger vi kun at vise nedenstående.

1.2.12 Proposition:
For alle $x, y, z \in \mathbb{T}$, hvor $x < y$ og $z < 0$, har vi, at

$$x \cdot z > y \cdot z.$$

Bevis:
Igen har vi, at da $x < y$, så er $\widehat{x} < \widehat{y}$. Og da $z < 0$, så er $\widehat{z} < 0$. Vi bruger, at $<$ er kompatibel med multiplikation af heltal, derfor gælder det, at

$$\widehat{x} \cdot \widehat{z} > \widehat{y} \cdot \widehat{z}.$$

Vi kan nu multiplicere med 10^{-2Q} på begge sider, da det ikke ændrer fortegnet:

$$x \cdot z = 10^{-2Q} \cdot (\widehat{x} \cdot \widehat{z}) > 10^{-2Q} \cdot (\widehat{y} \cdot \widehat{z}) = y \cdot z.$$ ■

Nu har vi dermed defineret addition, subtraktion og multiplikation af to vilkårlige endelige decimaltal; det vil sige to reelle tal, som er en del af to forskellige spring. I Kapitel 2 vil vi udvide disse begreber til at gælde alle reelle tal, men for at kunne gøre dette, skal vi først introducere begreberne supremum og infimum, idet disse er nødvendige, når vi skal undersøge konvergente følger.

1.3 Supremum og infimum

Inden vi definerer supremum og infimum, introducerer vi en ny ordning $\leq$ på de reelle tal, som fungerer således, at $[x] \leq [y]$, hvis enten $[x] = [y]$ eller $[x] < [y]$. Denne ordning er en total ordning, idet det for alle $[x], [y] \in \mathbb{R}$ gælder, at enten er $[x] \leq [y]$ eller også er $[y] \leq [x]$. Igen har vi, at $[x] \leq [y]$ svarer til, at $[y] \geq [x]$.

Supremum og infimum er henholdvis mindste øvre grænse og største nedre grænse for en mængde, men for at dette har mening, skal grænser for mængder først defineres.

1.3.1 Definition (Opadtil og nedadtil begrænset):
En mængde $S \subset \mathbb{R}$ er opadtil begrænset, hvis der eksisterer et $[M] \in \mathbb{R}$, sådan at $[x] \leq [M]$ for alle $[x] \in S$, og $[M]$ siges så at være en øvre grænse for S.

Tilsvarende er en mængde $S \subset \mathbb{R}$ nedadtil begrænset, hvis der eksisterer et $[m] \in \mathbb{R}$, sådan at $[x] \geq [m]$ for alle $[x] \in S$, og $[m]$ siges så at være en nedre grænse for S.

En mængde $S \subset \mathbb{R}$ siges at være begrænset, hvis der både eksisterer en øvre og en nedre grænse, og omvendt er mængden ubegrænset, hvis der ingen øvre og nedre grænser er. Hvis en mængde er begrænset, er det muligt at snakke om maksimum og minimum for mængden.

1.3.2 Definition (Maksimum og minimum):
Lad $S \subset \mathbb{R}$. Hvis $[M] \in S$, og $[M]$ er en øvre grænse for S, så kaldes $[M]$ for maksimum for S, betegnet $[M] = \max(S)$. Ligeledes, hvis $[m] \in S$, og hvis $[m]$ er en nedre grænse for S, så kaldes $[m]$ for minimum for S og betegnes $[m] = \min(S)$.

Det er ikke altid, at en mængde har maksimum eller minimum, men vi vil senere bevise, at såfremt en mængde er begrænset, eksisterer supremum og infimum. Vi fremsætter nu en formel definition af både supremum og infimum.

1.3.3 Definition (Supremum):
Vi har, at $[a] \in \mathbb{R}$ er supremum for en mængde $S \subset \mathbb{R}$, hvis følgende to egenskaber er opfyldt:

(1) $[a]$ er en øvre grænse for S, altså $[x] \leq [a]$ for alle $[x] \in S$.
(2) $[a]$ er den mindste øvre grænse, altså $[y] < [a]$ kan ikke være en øvre grænse. Det vil sige, at givet $[y] < [a]$, findes der et element $[x] \in S$, sådan at $[y] < [x] \leq [a]$.

Supremum for en mængde S betegnes med $\sup(S)$.

1.3.4 Definition (Infimum):
Vi har, at $[a] \in \mathbb{R}$ er infimum for en mængde $S \subset \mathbb{R}$, hvis følgende to egenskaber er opfyldt:

(1) $[a]$ er en nedre grænse for S, altså $[a] \leq [x]$ for alle $[x] \in S$.
(2) $[a]$ er den største nedre grænse, altså $[a] < [y]$ kan ikke være en nedre grænse. Det vil sige, at givet $[y] > [a]$, findes der et element $[x] \in S$, sådan at $[a] \leq [x] < [y]$.

Infimum for en mængde S betegnes med $\inf(S)$.

Dermed ses det, at hvis $\sup(S) \in S$, så er $\sup(S) = \max(S)$, og på samme måde, har vi, at hvis $\inf(S) \in S$, så er $\inf(S) = \min(S)$. For at understøtte forståelsen yderligere gives her et kort eksempel på brugen af maksimum, minimum, supremum og infimum.

1.3.5 Eksempel:
Lad $S = [1; 5)$. Så har vi, at $\min(S) = \inf(S) = [1]$. Vi kan se, at $\sup(S) = [5]$, men da intervallet er åbent, er der intet maksimum. ◀

Eksistensen af supremum og infimum følger i Sætning 1.3.8, men først bevises entydigheden.

1.3.6 Proposition:
Lad $S \subset \mathbb{R}$. Såfremt de eksisterer, så er $\sup(S)$ og $\inf(S)$ entydige.

Bevis:
Vi beviser kun, at $\sup(S)$ er entydig, da beviset for $\inf(S)$ er tilsvarende. Antag, at der eksisterer to reelle tal $[a]$ og $[b]$, som begge opfylder Definition 1.3.3. Antag, at $[a] < [b]$. Så giver egenskab (2), at der eksisterer et element $[x] \in S$, sådan at $[a] < [x] \leq [b]$, men det er i modstrid med, at $[a]$ er en øvre grænse for S. På samme måde kan det vises, at der vil opnås modstrid, hvis det antages, at $[b] < [a]$, derfor må det gælde, at $[a] = [b]$. ■

Der er en sammenhæng mellem infimum og supremum, men for at kunne tydeliggøre denne sammenhæng, skal vi først introducere endnu en mængde. Hvis $S \subset \mathbb{R}$, så er mængden $-S = \{[x] \in \mathbb{R} \mid [-x] \in S\}$.

1.3.7 Lemma:
Lad $S \subset \mathbb{R}$. Hvis S har et supremum, så har mængden $-S$ et infimum, og $\inf(-S) = -\sup(S)$. Ydermere, hvis S har et infimum, så har mængden $-S$ et supremum, og $\sup(-S) = -\inf(S)$.

Bevis:
Antag, at S har et supremum, og definer $[a] = -\sup(S)$. Eftersom $[x] \leq \sup(S)$ for alle $[x] \in S$, har vi, at $-\sup(S) = [a] \leq [-x]$ for alle $[x]$. Dermed er $[a]$ en nedre grænse for $-S$. Nu skal vi vise, at $[a]$ er den største nedre grænse. Antag, at $[y] > [a]$, så har vi, at $[-y] < [-a] = \sup(S)$. Dermed kan vi finde et $[x] \in S$, sådan at $[-y] < [x] \leq [-a]$. Men det betyder, at $[a] \leq [-x] < [y]$, hvor $[-x] \in S$. Dermed kan $[y]$ ikke være en nedre grænse for $-S$, og $[a]$ er derfor den største nedre grænse. ■

På Figur 1 findes en illustration af sammenhængen mellem supremum og infimum og mængderne S og $-S$. Det ses, at $-S$ blot er en spejling af S gennem 0 i dette tilfælde, hvis vi betragter mængden af de reelle tal som en talakse, der er fuldstændigt udfyldt.

Figur 1. Sammenhængen mellem supremum og infimum.

Nu hvor vi har vist, at supremum og infimum er entydige samt sammenhængen mellem dem, er vi klar til at vise, at supremum og infimum eksisterer for begrænsede mængder. Dette kaldes også for fuldstændighedsaksiomet, men grundet konstruktionen af de reelle tal, er det ikke et aksiom, men derimod en sætning, som skal bevises. Såfremt supremum eksisterer for en mængde, siger vi, at mængden har *supremumsegenskaben*.

1.3.8 Sætning ("Fuldstændighedsaksiomet"):
Lad $S \subset \mathbb{R}$ være en ikke-tom mængde, som er opadtil (nedadtil) begrænset. Så eksisterer supremum (infimum) for S.

Bevis:
Først bevises det for S kun indeholdende positive tal, derefter udvides det til også at gælde for S kun indeholdende negative tal, og til sidst bevises det for S indeholdende både positive og negative tal.

- Da S er opadtil begrænset, eksisterer der et decimaltal M, sådan at $x \prec M$ for ethvert decimaltal x, hvor $[x] \in S$. Vi kan vælge $M = M_N 0...00{,}\bar{0}$, hvor N er endelig.

Derfor må det nødvendigvis gælde, at for ethvert x, hvor $[x] \in S$, har vi, at $x_j = 0$, hvis $j > N$, altså ethvert decimaltal x, hvor $[x] \in S$, har højst N cifre til venstre for kommaet forskellige fra 0. Det vil sige, at alle decimaltal x, hvor $[x] \in S$, har følgende form:

$$x = x_N x_{N-1} ... x_0 , x_{-1} x_{-2} ...,$$

hvor det er tilladt, at $x_N = 0$. Vi ønsker at finde supremum, som er den mindste øvre grænse. Derfor konstruerer vi et reelt tal $[a]$, som har størst mulige cifre, sådan at $[a] = \sup(S)$. Først konstrueres $[a]$, og derefter vises det, at det er en øvre grænse, og når vi har vist, at det er den mindste øvre grænse, er vi færdige med tilfældet, hvor S kun indeholder positive tal. Vi starter med at definere a_N til at være den størst mulige x_N, når $[x]$ antager alle mulige værdier i S. Det er muligt, at $a_N = 0$.

Vi definerer mængden $S_1 = \{[x] \in S \mid x_N = a_N\} \subset S$. Dernæst defineres a_{N-1} til at være den størst mulige x_{N-1}, når $[x] \in S_1$. Generelt har vi for $k \geq 2$ mængderne:

$$S_k = \{[x] \in S \mid x_N = a_N, x_{N-1} = a_{N-1}, \ldots, x_{N-k+1} = a_{N-k+1}\} \subset S_{k-1} \subset \cdots \subset S,$$

og vi definerer a_{N-k} til at være den største mulige x_{N-k}, når $[x]$ antager alle mulige værdier i S_k. På den måde får vi decimaltallet $a = a_N a_{N-1} ... a_0 , a_{-1} ....$

Nu viser vi, at $[a]$ er en øvre grænse for S. Givet et arbitrært $[x] \in S$, har vi, at hvis $x_N < a_N$, så er $x \prec a$ og $[x] \leq [a]$. Hvis $x_N = a_N$, så gælder det, at $[x] \in S_1$, hvilket betyder, at $x_{N-1} \leq a_{N-1}$ på grund af konstruktionen af a. Hvis $x_{N-1} < a_{N-1}$, så er $[a]$ en øvre grænse. Hvis ikke, skal vi fortsætte på samme måde med de øvrige cifre. Således har vi, at $x_j \leq a_j$ for alle $j \leq N$, hvilket betyder, at $[x] \leq [a]$, og $[a]$ er dermed en øvre grænse for S.

Nu mangler vi blot at vise, at $[a]$ er den mindste øvre grænse. Givet et arbitrært $[b] \in \mathbb{R}$, hvor $[b] < [a]$, har vi fra Proposition 1.1.8, at der eksisterer et endeligt decimaltal $t = t_N t_{N-1} ... t_0 , t_{-1} ... t_{-J} \in \mathbb{T}$, sådan at $[b] < [t] < [a]$, hvor J er endelig. Hvis vi vælger k til at være stor nok i forhold til J, så har vi, at ethvert decimaltal x, hvor $[x] \in S_k$, har de første k cifre identiske med a. Da $[t] < [a]$, og vi har valgt k til at være stor nok, må det gælde, at $[t] < [x]$, og dermed er $[b] < [x]$, og derfor kan $[b]$ ikke være en øvre grænse for S. Dermed er $[a]$ den mindste øvre grænse.

På en tilsvarende måde kan vi konstruere $[a]$ til at være infimum for S, når S kun består af positive tal.

- Vi ser nu på tilfældet, hvor S kun indeholder negative tal. Dermed må mængden $-S$ kun bestå af positive tal. Hvis S er nedadtil begrænset, må $-S$ derfor være opadtil begrænset, og vi har netop vist ovenfor, at $\sup(-S)$ dermed eksisterer. Så giver Lemma 1.3.7, at $\inf(S) = -\sup(-S)$. Da S kun består af negative tal, er S opadtil begrænset af 0. Dermed har vi, at $\sup(S) = -\inf(-S)$.

- Hvis S indeholder både positive og negative tal, så kan vi skrive $S = S_+ \cup S_-$, hvor S_+ indeholder de positive tal, samt eventuelt 0, og S_- indeholder de negative tal. Så har vi, at $\sup(S) = \sup(S_+)$ og $\inf(S) = \inf(S_-)$.

Dermed er det bevist for alle tre tilfælde. ■

Det ses i Eksempel 1.3.5, at denne konstruktion af $\sup(S)$ giver os, at $a = 4{,}\bar{9}$, og dermed passer det med, at $\sup(S) = [a] = [5]$.

Vi har nu konstrueret mængden af de reelle tal. Og vi har desuden vist, at en række af de aksiomer, der gælder for heltal, også gælder for endelige decimaltal. Disse vil vi yderligere udvide til reelle tal i Kapitel 3, men inden vi når dertil, er vi nødt til at introducere følger af endelige decimaltal og konvergens deraf, som netop bygger på disse definitioner af supremum og infimum.

Konvergens

KAPITEL 2

Dette kapitel omhandler forskellige former for konvergens af følger af endelige decimaltal, som benyttes til at definere addition og multiplikation for reelle tal i Afsnit 3.1. I Afsnit 2.1 vil vi dog først introducere nogle nødvendige begreber, herunder absolutværdi og afskæring. Derudover vil vi bevise trekantsuligheden for endelige decimaltal, da den ligger til grund for mange af beviserne i de efterfølgende afsnit. I Afsnit 2.2 og Afsnit 2.3 gennemgår vi henholdsvis stærk og formel konvergens og kommer frem til nogle resultater, som i sidste ende gør det muligt for os at udvide regneoperationerne. I Afsnit 2.4 beskrives, hvad det vil sige, at en følge har Cauchy-egenskaben, samt hvordan det relaterer sig til stærk konvergens. Dette kapitel er baseret på Kapitel 1 i *Notes for Analyse 1 and Analyse 2* (Cornean 2015).

2.1 Grundlæggende resultater

For at definere konvergensbegreberne benytter vi os tit af absolutværdien, derfor skal dette først defineres for decimaltal.

2.1.1 Definition (Absolutværdi af decimaltal):
Absolutværdien af ethvert decimaltal er givet ved:

$$0 \leq |\pm x_N x_{N-1} \ldots x_0{,}x_{-1}x_{-2}\ldots| = [x_N x_{N-1}\ldots x_0{,}x_{-1}x_{-2}\ldots] \in \mathbb{R}.$$

Det vil sige, at fortegnet blot ses bort fra, når man tager absolutværdien af et decimaltal.

Vi ønsker at vise, at trekantsuligheden er gældende for endelige decimaltal, men for at bevise dette, skal vi først vise, at absolutværdien af et produkt af endelige decimaltal svarer til at tage produktet af absolutværdierne. Vi beviser dette ved at benytte egenskaberne for heltallene, som vi allerede ved, er gældende.

2.1.2 Proposition:
For endelige decimaltal x og y, gælder det, at

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \,.$$

Bevis:
Vi benytter definitionen for multiplikation af endelige decimaltal og notationen fra Ligning (1.1):

$$\begin{aligned}|x \cdot y| &= \left|10^{-2Q} \cdot (x_N x_{N-1} \ldots x_0 x_{-1} \ldots x_{-P} 0 \ldots 00 \cdot y_M y_{M-1} \ldots y_0 y_{-1} \ldots y_{-Q})\right| \\ &= \left|10^{-2Q} \cdot (\widehat{x} \cdot \widehat{y})\right| .\end{aligned}$$

Eftersom 10^{-2Q} er et positivt tal, er $\left|10^{-2Q}\right| = 10^{-2Q}$, da absolutværdien netop fjerner fortegnet. Dermed har vi, at

$$|x \cdot y| = 10^{-2Q} \cdot |\widehat{x} \cdot \widehat{y}| .$$

Da $\widehat{x}$ og $\widehat{y}$ begge ligger i $\mathbb{Z}$, ved vi, at absolutværdien af produktet svarer til at tage produktet af absolutværdierne. Dermed gælder det, at

$$|x \cdot y| = 10^{-2Q} \cdot |\widehat{x}| \cdot |\widehat{y}| = 10^{-Q} \cdot |\widehat{x}| \cdot 10^{-Q} \cdot |\widehat{y}| .$$

Igen kan vi benytte os af, at 10^{-Q} er positivt, og vi får, at

$$|x \cdot y| = \left|10^{-Q} \cdot \widehat{x}\right| \cdot \left|10^{-Q} \cdot \widehat{y}\right| = |x| \cdot |y| .$$ ■

Nu er vi i stand til at bevise trekantsuligheden, som vil blive benyttet adskillige gange i løbet af dette kapitel. Igen benytter vi os af egenskaberne for heltallene.

2.1.3 Proposition (Trekantsuligheden):
For endelige decimaltal x og y gælder trekantsuligheden:

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Bevis:
Lad $x = 10^{-Q} \cdot \widehat{x}$ og $y = 10^{-Q} \cdot \widehat{y}$ være endelige decimaltal. Ifølge Definition 1.2.4 kan vi skrive:

$$|x + y| = \left|10^{-Q} \cdot (\widehat{x} + \widehat{y})\right| .$$

Ligesom tidligere ved vi, at 10^{-Q} er positivt, og derfor kan vi skrive:

$$|x + y| = 10^{-Q} \cdot |\widehat{x} + \widehat{y}| .$$

Eftersom $\widehat{x}$ og $\widehat{y}$ begge ligger i $\mathbb{Z}$, ved vi, at trekantsuligheden er gældende, og vi får, at

$$|x + y| = 10^{-Q} \cdot |\widehat{x} + \widehat{y}| \leq 10^{-Q} \cdot (|\widehat{x}| + |\widehat{y}|) .$$

Igen kan vi bruge, at 10^{-Q} er positivt, og derfor ikke påvirker fortegnet, hvilket giver os resultatet:

$$|x + y| \leq 10^{-Q} \cdot (|\widehat{x}| + |\widehat{y}|) = \left|10^{-Q} \cdot \widehat{x}\right| + \left|10^{-Q} \cdot \widehat{y}\right| = |x| + |y| .$$ ■

Et andet centralt begreb er afskæring, hvor man tager et vilkårligt decimaltal og gør det endeligt ved at "afskære" tallet.

2.1.4 Definition (Afskæring):
For et vilkårligt decimaltal $\pm x_N x_{N-1} \ldots x_0{,}x_{-1}x_{-2}\ldots$*, er den* n*'te ordens afskæring givet ved:*

$$T_n(x) = \pm x_N x_{N-1} \ldots x_0{,}x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-n}\bar{0} \in \mathbb{T}, \quad n \geq 1.$$

Dermed fungerer en afskæring blot som en formindskelse af antallet af decimaler, hvilket nedenstående eksempel illustrerer.

2.1.5 Eksempel:
Vi tager forskellige afskæringer af decimaltallet $x = 12123{,}35432224624642247576\bar{7}$.
(a) $T_3(x) = 12123{,}354$.
(b) $T_{22}(x) = 12123{,}3543222462464224757677$. ◀

Ved hjælp af afskæring har vi en fordelagtig måde at afgøre, om to decimaltal er en del af samme spring.

2.1.6 Proposition:
To decimaltal x *og* y *er en del af det samme spring, hvis og kun hvis*

$$\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists N_k \geq 1 \ : \quad |T_n(x) - T_n(y)| \leq 10^{-k}, \quad \forall n \geq N_k. \tag{2.1}$$

Bevis:

⇒ Lad x og y være decimaltal, som er en del af samme spring. Så gælder det ifølge Definition 1.1.5, at der eksisterer et $J \in \mathbb{Z}$, hvor $x_j = y_j$ for $j > J$. Derfor har vi, at $|T_n(x) - T_n(y)| = 10^{-n}$ for $n \geq J$, og for alle n gælder det, at

$$|T_n(x) - T_n(y)| \leq 10^{-n}.$$

Desuden kan vi, givet ethvert k, sætte $N_k = k$, og så gælder det, at

$$10^{-n} \leq 10^{-k}, \quad \forall n \geq N_k.$$

⇐ Antag, at Ligning (2.1) er sand, men at x og y ikke er en del af samme spring. Vi viser ved modstrid, at dette ikke kan lade sig gøre. Antag, at $0 < [x] < [y]$, så siger Proposition 1.1.8, at der eksisterer et $t \in \mathbb{T}$, sådan at $[x] < [t] < [y]$. Der eksisterer et $N_k \geq 1$, hvor det gælder, at

$$T_n(x) \leq [x] < [t] \leq T_n(y) \leq [y], \quad \forall n \geq N_k.$$

Hvis vi benytter Proposition 1.1.8 igen, denne gang med $[x] < [t]$, fås uligheden

$$T_n(x) \leq [x] < [s] < [t] \leq T_n(y) \leq [y], \quad \forall n \geq N_k,$$

hvor s og t er endelige decimaltal, hvor addition og subtraktion er defineret. Dermed har vi, at når $n \geq N_k$, så gælder det, at

$$[t] - [s] \leq T_n(y) - T_n(x).$$

Derfor kan forskellen ikke gøres arbitrært lille, idet der er en nedre grænse, og dermed er der modstrid. ■

Ud fra logik vides det, at når vi har bevist $P \Leftrightarrow Q$, så har vi også bevist $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$. Derfor har vi altså, at x og y ikke er en del af samme spring, hvis og kun hvis

$$\exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \geq M \ : \quad |T_n(x) - T_n(y)| > 10^{-M}. \tag{2.2}$$

Dermed kan vi nu afgøre, om to decimaltal er en del af samme spring eller ej.

I de efterfølgende afsnit lader vi $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ betegne enhver følge bestående af endelige decimaltal, hvilket betyder, at $(x(n))_j = 0$, hvis j er stor nok. Følger kan både være voksende og aftagende, hvilket vi definerer på følgende måde:

2.1.7 Definition:
Følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ er voksende, hvis $x(n) \leq x(n+1)$ for alle $n \geq 1$. Følgen er aftagende, hvis $x(n+1) \leq x(n)$ for alle $n \leq 1$. En følge kaldes monoton, såfremt den enten er voksende eller aftagende.

Med disse grundlæggende definitioner og resultater er vi nu i stand til at indføre to forskellige former for konvergens af følger: stærk og formel konvergens. Disse benyttes til at udvide regneoperationerne til reelle tal.

2.2 Stærk konvergens

Vi starter med at forklare, hvad det vil sige, at en følge konvergerer stærkt. Herefter følger en række lemmaer, som først benyttes i Afsnit 3.1 til at udvide addition og multiplikation til de reelle tal, da vi gerne vil bevise, at egenskaberne for regneoperationer er gældende.

2.2.1 Definition (Stærk grænse):
En følge $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ har en stærk grænse $[x] \in \mathbb{R}$, hvis

$$\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists N_k \geq 1 \ : \quad |x(n) - T_n(x)| \leq 10^{-k}, \quad \forall n \geq N_k. \tag{2.3}$$

I dette tilfælde skrives:

$$\operatorname*{limS}_{n\to\infty} x(n) = [x].$$

Det er muligt, at $[x]$ er en del af et spring, hvilket betyder, at der er to muligheder for decimaltallet x. Dog er den stærke grænse entydig, såfremt den eksisterer, hvilket vi nu vil bevise.

2.2.2 Proposition:
Hvis den stærke grænse $[x]$ eksisterer, så er den entydig.

Bevis:
Antag, at Ligning (2.3) gælder for både $[x]$ og $[y]$. Dermed eksisterer der et $N_{k,1} \geq 1$ og et $N_{k,2} \geq 1$, for alle $k \in \mathbb{N}$, sådan at

$$|x(n) - T_n(x)| \leq 10^{-k-1}, \quad \forall n \geq N_{k,1},$$
$$|x(n) - T_n(y)| \leq 10^{-k-1}, \quad \forall n \geq N_{k,2}.$$

Vi benytter trekantsuligheden for afskæringerne af x og y og får, at

$$\begin{aligned}|T_n(x) - T_n(y)| &= |T_n(x) - x(n) + x(n) - T_n(y)| \\ &\leq |T_n(x) - x(n)| + |x(n) - T_n(y)| \\ &= 2 \cdot 10^{-k-1} \leq 10^{-k}, \qquad\qquad \forall n \geq \max\{N_{k,1}, N_{k,2}\}.\end{aligned}$$

Ifølge Proposition 2.1.6 er x og y en del af samme spring, og dermed giver de begge det samme reelle tal, og derfor er $[x] = [y]$. ■

Nedenfor ses et eksempel på en stærkt konvergerende følge af decimaltal.

2.2.3 Eksempel:
Følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1}$, hvor $x(1) = 0{,}9$, $x(2) = 0{,}99$, $x(3) = 0{,}999$, og så videre, konvergerer stærkt, og vi har, at $\underset{n\to\infty}{\mathrm{limS}}\, x(n) = [1]$. ◀

En anden egenskab for en følge er, at den kan være begrænset, hvilket viser sig i de følgende afsnit at være tæt forbundet med konvergens.

2.2.4 Definition:
En følge $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ er begrænset, hvis der eksisterer et $J \in \mathbb{N}$, sådan at $|x(n)| \leq 10^J$ for alle $n \geq 1$.

Blandt andet kan vi vise, at hvis en følge er stærkt konvergent, så er den også begrænset.

2.2.5 Lemma:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ være en følge, sådan at $\underset{n\to\infty}{\mathrm{limS}}\, x(n) = [x]$. Så er følgen begrænset.

Bevis:
Ifølge Definition 1.1.1 kan vi finde et J_1, sådan at $|x| \leq 10^{J_1}$, dermed gælder det også for afskæringen, at $|T_n(x)| \leq 10^{J_1}$ for ethvert n. Eftersom følgen har en stærk grænse $[x]$, kan vi vælge $k = 0$ i Ligning (2.3), hvilket medfører, at der eksisterer et N_0, sådan at $|x(n) - T_n(x)| \leq 1$, hvis $n \geq N_0$. Ud fra trekantsuligheden får vi så, at

$$|x(n)| - |T_n(x)| \leq |x(n) - T_n(x)| \leq 1.$$

Dermed gælder uligheden

$$|x(n)| \leq |T_n(x)| + 1 \leq 10^{J_1} + 1 \leq 10^{J_1+1}, \quad \forall n \geq N_0.$$

Men for at følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ er begrænset, skal det gælde for alle $n \geq 1$. Derfor skal vi inkludere de elementer i følgen, som har lavere indeks end N_0, da det er muligt, at disse er større end 10^{J_1+1}. Dermed kan vi begrænse følgen ved at lade den øvre grænse være maksimum af alle disse:

$$|x(n)| \leq \max\left\{ |x(1)|, \ldots, |x(N_0 - 1)|, 10^{J_1+1}\right\}, \quad \forall n \geq 1.$$
■

Når vi skal bruge stærk konvergens til at udvide addition og multiplikation til de reelle tal, har vi brug for nogle lemmaer, som fortæller, hvad den stærke grænse er for en følge, som er konstrueret ud fra henholdsvis sum, produkt og differens af to følger.

2.2.6 Lemma:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ *og* $\{y(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ *være følger, sådan at* $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} x(n) = 0$ *og* $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} y(n) = [y]$*. Så gælder det, at følgen* $\{z(n)\}_{n\geq 1}$ *med* $z(n) = x(n) + y(n)$ *er stærkt konvergent og* $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} z(n) = [y]$*.*

Bevis:
Ifølge Definition 2.2.1 skal vi vise, at $|z(n) - T_n(y)| \leq 10^{-k}$. Ud fra trekantsuligheden har vi, at

$$|z(n) - T_n(y)| = |x(n) + y(n) - T_n(y)| \leq |x(n)| + |y(n) - T_n(y)|\,, \quad \forall n \geq 1.$$

Vi vælger et fast $k \in \mathbb{N}$. Der eksisterer et $N_{k,1}$, sådan at $|x(n)| \leq 10^{-k-1}$ for alle $n \geq N_{k,1}$, da følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ er stærkt konvergent, og den stærke grænse er 0. Derudover eksisterer der et $N_{k,2}$, sådan at $|y(n) - T_n(y)| \leq 10^{-k-1}$ for alle $n \geq N_{k,2}$, da følgen $\{y(n)\}_{n\geq 1}$ også er stærkt konvergent. Hvis $n \geq \max\{N_{k,1}, N_{k,2}\}$, har vi, at

$$|z(n) - T_n(y)| \leq 2 \cdot 10^{-k-1} \leq 10^{-k}.$$

Altså er $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} z(n) = [y]$. ■

2.2.7 Lemma:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ *være en begrænset følge og* $\{y(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ *være en stærkt konvergent følge og* $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} y(n) = 0$*. Så er følgen* $\{z(n)\}_{n\geq 1}$ *med* $z(n) = x(n) \cdot y(n)$ *også stærkt konvergent og* $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} z(n) = 0$*.*

Bevis:
Da $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ er begrænset, ved vi ifølge Definition 2.2.4, at der eksisterer et $J \in \mathbb{N}$, sådan at $|x(n)| \leq 10^J$ for alle $n \geq 1$. Vi bruger Proposition 2.1.2 og får, at

$$|z(n)| = |x(n) \cdot y(n)| = |x(n)| \cdot |y(n)| \leq 10^J \cdot |y(n)|\,, \quad \forall n \geq 1.$$

Vi vælger et fast $k \in \mathbb{N}$. Da $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} y(n) = 0$, eksisterer der et N_k, sådan et $|y(n)| \leq 10^{-k-J}$ for alle $n \geq N_k$. Hvis $n \geq N_k$, så er

$$|z(n)| \leq 10^J \cdot 10^{-k-J} = 10^{-k},$$

og dermed er $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} z(n) = 0$. ■

2.2.8 Lemma:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ *være en følge, som konvergerer stærkt mod* $[c]$*. Følgen* $\{y(n)\}_{n\geq 1}$ *konvergerer også mod* $[c]$*, hvis og kun hvis følgen* $\{z(n)\}_{n\geq 1}$ *med* $z(n) = x(n) - y(n)$ *konvergerer stærkt mod* 0*.*

Bevis:

$\Rightarrow$ Lad $k \geq 1$. Da både $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ og $\{y(n)\}_{n\geq 1}$ konvergerer stærkt mod det samme reelle tal $[c]$, siger Definition 2.2.1, at der eksisterer et $N_{k+1} \geq 1$ og et $M_{k+1} \geq 1$, sådan at

$$\begin{aligned} |x(n) - T_n(c)| &\leq 10^{-k-1}, \quad \forall n \geq N_{k+1} \\ |y(n) - T_n(c)| &\leq 10^{-k-1}, \quad \forall n \geq M_{k+1}. \end{aligned}$$

Lad $P_k = \max\{N_{k+1}, M_{k+1}\}$. Vi har, at

$$\begin{aligned} |z(n) - 0| &= |x(n) - y(n)| \\ &= |x(n) - T_n(c) + T_n(c) - y(n)| \\ &\leq |x(n) - T_n(c)| + |T_n(c) - y(n)| \\ &\leq 2 \cdot 10^{-k-1} \leq 10^{-k}, \qquad \forall n \geq P_k. \end{aligned}$$

Derfor er $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} z(n) = 0$.

$\Leftarrow$ Lad $k \geq 1$. Igen har vi fra Definition 2.2.1, at der eksisterer et $N_{k+1} \geq 1$ og $M_{k+1} \geq 1$, sådan at

$$\begin{aligned} |x(n) - T_n(c)| &\leq 10^{-k-1}, \quad \forall n \geq N_{k+1} \\ |z(n)| &\leq 10^{-k-1}, \quad \forall n \geq M_{k+1}. \end{aligned}$$

Igen lader vi $P_k = \max\{N_{k+1}, M_{k+1}\}$. Så har vi, at

$$\begin{aligned} |y(n) - T_n(c)| &= |y(n) - x(n) + x(n) - T_n(c)| \\ &\leq |y(n) - x(n)| + |x(n) - T_n(c)| \\ &\leq 2 \cdot 10^{-k-1} \leq 10^{-k}, \qquad \forall n \geq P_k. \end{aligned}$$

Så konvergerer $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ og $\{y(n)\}_{n\geq 1}$ stærkt mod det samme reelle tal $[c]$. ∎

Vi ønsker at vise, at ordningen $<$ på $\mathbb{R}$ er kompatibel med addition og multiplikation, og til det får vi behov for følgende lemma.

2.2.9 Lemma:
Lad følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ konvergere stærkt mod $[x]$, og lad følgen $\{y(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ konvergere stærkt mod $[y]$. Hvis $y(n) \leq x(n)$ for alle n, så er $[y] \leq [x]$.

Bevis:
Vi beviser ved modstrid og starter med at antage, at konklusionen er falsk, altså at $[x] < [y]$. Ifølge Ligning (2.2) skal der dermed eksistere et M, sådan at

$$|T_n(x) - T_n(y)| > 10^{-M}, \quad \forall n \geq M.$$

Ved at gange igennem med -1 vendes uligheden, og vi får, at

$$T_n(x) - T_n(y) < -10^{-M}, \quad \forall n \geq M.$$

Da $y(n) \leq x(n)$ for alle n, må det gælde, at $0 \leq x(n) - y(n)$, men samtidig har vi, at

$$\begin{aligned} 0 \leq x(n) - y(n) &= x(n) - T_n(x) + T_n(x) - T_n(y) + T_n(y) - y(n) \\ &< x(n) - T_n(x) - 10^{-M} + T_n(y) - y(n), \qquad \forall n \geq M. \end{aligned}$$

Da $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} x(n) = [x]$ og $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} y(n) = [y]$, har vi ifølge Definition 2.2.1 at ved at vælge n til at være stor nok, fås det, at

$$\begin{aligned} x(n) - T_n(x) &\leq 10^{-M-1} \\ T_n(y) - y(n) &\leq 10^{-M-1}, \end{aligned}$$

og dermed er $x(n) - y(n) < 0$, hvilket er i modstrid med antagelsen om, at $y(n) \leq x(n)$. Derfor må det gælde, at $[y] \leq [x]$. ■

Vi er nu klar til at introducere den anden form for konvergens af en følge af endelige decimaltal.

2.3 Formel konvergens

Igen vil vi starte med at definere formel konvergens. Dernæst beviser vi entydighed af den formelle grænse, og derudover vil vi komme med to resultater, som skal benyttes i Afsnit 2.4 omkring følger med Cauchy-egenskaben.

2.3.1 Definition (Formel grænse):
En følge $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ har en formel grænse $x \in \mathbb{D}$, hvis

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \exists M_j \geq 1 \ : \quad T_j(x(n)) = T_j(x), \quad \forall n \geq M_j. \tag{2.4}$$

I dette tilfælde skrives:

$$\operatorname*{limF}_{n\to\infty} x(n) = x.$$

Formel konvergens betyder, at givet et j, og hvis n er større end en kritisk værdi M_j, så vil decimaltallet $x(n)$ have identiske cifre med x op til x_{-j} som minimum. Forskellen på stærk og formel konvergens illustreres bedst med et eksempel.

2.3.2 Eksempel:
Lad os fortsætte med følgen fra Eksempel 2.2.3, hvor $x(1) = 0{,}9$, $x(2) = 0{,}99$, $x(3) = 0{,}999$, og så videre, så har vi fra tidligere, at $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} x(n) = [1]$, men den formelle grænse vil derimod være $\operatorname*{limF}_{n\to\infty} x(n) = 0{,}\bar{9}$. ◄

Ligesom med stærk konvergens har vi, at den formelle grænse er entydig, såfremt den eksisterer.

2.3.3 Proposition:
Hvis den formelle grænse x eksisterer, så er den entydig.

Bevis:
Antag, at Ligning (2.4) gælder for både $x, y \in \mathbb{D}$. Lad $j \geq 1$. Så eksisterer der et $M_{j,1} \geq 1$ og et $M_{j,2} \geq 1$, sådan at

$$T_j\big(x(n)\big) = T_j(x), \quad \forall n \geq M_{j,1}$$
$$T_j\big(x(n)\big) = T_j(y), \quad \forall n \geq M_{j,2}.$$

For $n \geq \max\{M_{j,1}, M_{j,2}\}$ gælder det, at $T_j(x) = T_j(y)$ for alle j. Dermed er $x = y$. ■

Formel konvergens er en stærkere betingelse end stærk konvergens, og vi kan vise, at formel konvergens faktisk medfører stærk konvergens.

2.3.4 Lemma:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ være en formel konvergent følge med den formelle grænse $x \in \mathbb{D}$. Så er følgen også stærkt konvergent med den stærke grænse $[x] \in \mathbb{R}$.

Bevis:
Hvis $n, j \in \mathbb{N}$, så har vi, at

$$x(n) - T_n(x) = x(n) - T_j\big(x(n)\big) + T_j\big(x(n)\big) - T_j(x) + T_j(x) - T_n(x).$$

Vi indfører, at $n \geq j$, så ved vi, at begge decimaltal $x(n) - T_j\big(x(n)\big)$ og $T_j(x) - T_n(x)$ har 0 på de første j pladser efter kommaet som minimum. Derfor må vi have, at

$$\big|x(n) - T_j\big(x(n)\big)\big| \leq 10^{-j}$$
$$|T_j(x) - T_n(x)| \leq 10^{-j}.$$

Dermed er

$$|x(n) - T_n(x)| \leq 2 \cdot 10^{-j} + \big|T_j\big(x(n)\big) - T_j(x)\big|, \quad \forall n \geq j.$$

Hvis $n \geq M_j$, så har vi fra Definition 2.3.1, at

$$|x(n) - T_n(x)| \leq 2 \cdot 10^{-j}, \quad \forall n \geq M_j,$$

da $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ har en formel grænse x. Hvis vi vælger $j = k + 1$, opfyldes Ligning (2.3), og følgen er derfor stærkt konvergent med grænsen $[x] \in \mathbb{R}$. ■

Før vi går videre til følger med Cauchy-egenskaben, vil vi bevise, at en begrænset, monoton følge konvergerer formelt.

2.3.5 Lemma:
Lad følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ være opadtil (nedadtil) begrænset og voksende (aftagende). Så har følgen en formel grænse.

Bevis:
Antag, at følgen er voksende og opadtil begrænset af 10^J. Så er mængden

$$S = \{x(n) \mid n \geq 1\}$$

opadtil begrænset, og den har derfor et supremum $[a] \in \mathbb{R}$ ifølge Sætning 1.3.8. Her blev $a = a_J a_{J-1} ... a_0, a_{-1} ...$ konstrueret således, at a_J er det størst mulige J'te ciffer blandt alle decimaltallene $x(n)$. Desuden eksisterer der et n_J, sådan at $x(n_J)$ har a_J som det J'te ciffer.

Da følgen er voksende, har vi, at hvis $n \geq n_J$, så er $x(n) \geq x(n_J)$. Da $[a]$ er supremum, gælder det desuden, at det J'te ciffer af $x(n)$ stadig er a_J. Ud fra samme argumentation må der eksistere et $n_{J-1} \geq n_J$, sådan at det $J-1$'te ciffer af $x(n_{J-1})$ er a_{J-1}. Det vil sige, at alle decimaltal $x(n)$ med $n \geq n_{J-1}$ har a_J og a_{J-1} som henholdsvis det J'te og $J-1$'te ciffer.

Ved hjælp af induktion fås det, at givet $j \geq 1$, må der eksistere et M_j, sådan at $T_j\big(x(n)\big) = T_j(a)$ for alle $n \geq M_j$. Dermed er $a \in \mathbb{D}$ den formelle grænse for følgen. På samme måde kan det bevises for en aftagende følge, her vil grænsen blot være infimum for mængden S. ■

Vi har nu gennemgået, hvad der skal gælde for, at en følge er formelt konvergent og dermed også stærk konvergent. Dette viser sig nyttigt i følgende afsnit.

2.4 Cauchy-egenskaben

I dette afsnit vil vi starte med at definere Cauchy-egenskaben for følger og dernæst arbejde os op imod to hovedresultater, hvoraf det første er, at en følge har Cauchy-egenskaben, hvis og kun hvis den er stærkt konvergent. Det er forholdsvis simpelt at vise, at stærk konvergens medfører Cauchy-egenskaben, hvorimod den anden vej kræver et par lemmaer. Det næste hovedresultat er det sidste, vi har brug for, inden vi kan udvide addition og multiplikation, da det fortæller, at en følge konstrueret ud fra to følger med Cauchy-egenskaben også selv har Cauchy-egenskaben.

2.4.1 Definition:
En følge $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ har Cauchy-egenskaben, hvis

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists M_k \in \mathbb{N}\ :\quad |x(m) - x(n)| \leq 10^{-k}, \quad \forall m, n \geq M_k. \tag{2.5}$$

2.4.2 Proposition:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ være en følge, som konvergerer stærkt mod $[x] \in \mathbb{R}$. Så har følgen også Cauchy-egenskaben.

Bevis:
Fra Definition 2.2.1 har vi, at givet $j \geq 1$, kan vi finde N_j, sådan at $|x(n) - T_n(x)| \leq 10^{-j}$ for alle $n \geq N_j$. Hvis $m, n \geq j$, har vi, at

$$|T_m(x) - T_n(x)| \leq 10^{-j}, \tag{2.6}$$

da afskæringerne sker ved det j'te decimal eller længere til højre. Ved at bruge trekantsuligheden fås det, at

$$\begin{aligned}|x(m)-x(n)| &= |x(m)-T_m(x)+T_m(x)-T_n(x)+T_n(x)-x(n)|\\ &\leq |x(m)-T_m(x)|+|T_m(x)-T_n(x)|+|T_n(x)-x(n)|.\end{aligned}$$

Da følgen er stærkt konvergent, ved vi, at

$$\begin{aligned}|x(m)-T_m(x)| &\leq 10^{-j}, \quad \forall m \geq N_j\\ |T_n(x)-x(n)| &\leq 10^{-j}, \quad \forall n \geq N_j\end{aligned}$$

og sammensat med Ligning (2.6), får vi, at

$$|x(m)-x(n)| \leq 3\cdot 10^{-j}, \quad \forall m,n \geq \max\{j, N_j\}.$$

Hvis vi vælger $j = k+1$ og $M_k = \max\{k+1, N_{k+1}\}$, har vi, at

$$|x(m)-x(n)| \leq 3\cdot 10^{-k-1} \leq 10^{-k}, \quad \forall m,n \geq M_k.$$

Dermed har følgen Cauchy-egenskaben. ■

Da vi nu har bevist, at en stærkt konvergent følge også har Cauchy-egenskaben, kan vi give et eksempel på en sådan følge.

2.4.3 Eksempel:
Vi kan igen benytte følgen fra Eksempel 2.2.3, hvor $x(1) = 0{,}9, x(2) = 0{,}99, x(3) = 0{,}999$ og så videre, da denne følge konvergerer stærkt mod 1. Dermed har følgen også Cauchy-egenskaben. ◀

Vi vil gerne bevise, at det modsatte også gælder; altså at enhver følge med Cauchy-egenskaben konvergerer stærkt, men dette kræver som sagt lidt forberedende resultater, som tager udgangspunkt i begrænsede følger.

2.4.4 Lemma:
Lad følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ have Cauchy-egenskaben. Så er følgen begrænset.

Bevis:
Vi skal vise, at der eksisterer et $J \in \mathbb{N}$, sådan at $|x(n)| \leq 10^J$ for alle $n \geq 1$. Vi sætter $k = 1$ i Ligning (2.5), så er $|x(n)-x(M_1)| \leq 10^{-1}$ for alle $n \geq M_1$. Ved at bruge trekantsuligheden fås det, at

$$|x(n)| - |x(M_1)| \leq |x(n)-x(M_1)| \leq 10^{-1},$$

og derfor er

$$|x(n)| \leq |x(M_1)| + 10^{-1}, \quad \forall n \geq M_1.$$

Følgen skal dog være begrænset for alle $n \geq 1$, derfor inkluderer vi de elementer i følgen med lavere indeks også. Derfor er den øvre grænse maksimum af alle disse:

$$|x(n)| \leq \max\Big\{|x(1)|, |x(2)|, \ldots, |x(M_1)| + 10^{-1}\Big\}, \quad \forall n \geq 1.$$ ■

2.4.5 Lemma:
Lad $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ *være en begrænset følge. Så eksisterer der en monoton delfølge* $\{x(n_j)\}_{j\geq 1} \subset \{x(n)\}_{n\geq 1}$.

Bevis:
Da følgen er begrænset, er mængden $S = \{x(n) \mid n \geq 1\}$ opadtil begrænset, og den har dermed et supremum $[a]$ ifølge Sætning 1.3.8. Der er nu to muligheder: enten ligger a i S, eller også ligger a ikke i S.

(1) Antag, at $a \notin S$. Så sætter vi $n_1 = 1$, og vi har, at $x(n_1) < [a]$. Ifølge Definition 1.3.3 (2) eksisterer der et $n_2 > 1$, sådan at $x(1) < x(n_2) < [a]$. Nu lader vi $\widetilde{n}_2 \in \{1, \dots, n_2\}$ være sådan, at $x(\widetilde{n}_2)$ ligger tættest på $[a]$, altså at $x(n) \leq x(\widetilde{n}_2) < [a]$ for alle $1 \leq n \leq n_2$. Igen kan vi finde et $n_3 > n_2$, sådan at $x(\widetilde{n}_2) < x(n_3) < [a]$ ifølge definitionen på supremum. Ved induktion kan vi finde $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$, sådan at

$$x(n_1) < x(n_2) \leq x(\widetilde{n}_2) < x(n_3) \leq x(\widetilde{n}_3) < x(n_4) \leq x(\widetilde{n}_4) < \cdots < [a],$$

og dette udgør vores voksende delfølge.

(2) Antag, at $a \in S$. Så kan vi finde $m_1 \geq 1$, sådan at $x(n) \leq x(m_1) = [a]$ for alle $n \geq 1$. Nu ser vi bort fra de første m_1 elementer i følgen, og ser på følgen $\{x(n)\}_{n\geq m_1+1} \subset \mathbb{T}$. Denne nye følge har også et supremum $[b] \leq [a] = x(m_1)$. Hvis b ikke ligger i mængden $\{x(n) \mid n \geq m_1 + 1\}$, så kan vi benytte argumentationen fra (1) og konstruere en voksende delfølge, hvor $n_1 = m_1 + 1$. Hvis b derimod ligger i mængden, må vi kunne finde et $m_2 > m_1$, således at $x(m_2) = b$, desuden er $x(m_2) \leq x(m_1)$. Ved at gøre dette k gange, må vi enten have en mængde $\{x(n) \mid n \geq m_k + 1\}$, som ikke indeholder sit supremum, og dermed kan vi gøre som ovenfor, eller også kan vi gå videre til næste skridt $k + 1$. Hvis vi kan fortsætte uendeligt mange gange for alle k, så har vi konstrueret en aftagende delfølge $\{x(m_k)\}_{k\geq 1}$, hvor $m_{k+1} > m_k$. ■

Vi er nu i stand til at bevise, at en følge med Cauchy-egenskaben også konvergerer stærkt.

2.4.6 Proposition:
Lad følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ *have Cauchy-egenskaben. Så er følgen stærkt konvergent.*

Bevis:
Idet følgen har Cauchy-egenskaben, ved vi fra Lemma 2.4.4, at den også er begrænset. Og fra Lemma 2.4.5 ved vi, at der eksisterer en monoton delfølge $\{x(n_j)\}_{j\geq 1}$, som også er begrænset. Denne monotone delfølge har ifølge Lemma 2.3.5 en formel grænse $x \in \mathbb{D}$, som ifølge Lemma 2.3.4 også er en stærk grænse $[x] \in \mathbb{R}$. Fra Definition 2.2.1 følger det for vores delfølge, at givet $k \geq 1$, eksisterer der et $J_{k+1} \geq 1$, sådan at

$$|x(n_j) - T_j(x)| \leq 10^{-k-1}, \quad \forall j \geq J_{k+1}.$$

Da den originale følge har Cauchy-egenskaben, kan vi, givet $k \geq 1$, finde M_{k+1}, sådan at

$$|x(n) - x(m)| \leq 10^{-k-1}, \quad \forall n, m \geq M_{k+1}.$$

Nu sætter vi $j = N_k = \max\{k+1, J_{k+1}, M_{k+1}\}$ og vælger $n \geq N_k = j$. Da afskæringen $T_n(x)$ sker længere til højre end $T_j(x)$, har vi, at

$$|T_j(x) - T_n(x)| \leq 10^{-k-1}.$$

Vi har også, at da $\{x(n_j)\}_{n\geq 1}$ er en delfølge, så er $n_j \geq j \geq M_{k+1}$, dermed gælder det, at

$$\begin{aligned} |x(n) - T_n(x)| &= |x(n) - x(n_j) + x(n_j) - T_j(x) + T_j(x) - T_n(x)| \\ &\leq |x(n) - x(n_j)| + |x(n_j) - T_j(x)| + |T_j(x) - T_n(x)| \\ &\leq 3 \cdot 10^{-k-1} < 10^{-k}. \end{aligned}$$

Dermed er den originale følge stærkt konvergent og $\operatorname*{limS}_{n\to\infty} x(n) = [x]$. ■

Med det følgende resultat bliver vi i stand til at definere addition og multiplikation for vilkårlige reelle tal.

2.4.7 Proposition:
Lad følgerne $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ og $\{y(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ have Cauchy-egenskaben. Så har følgerne
(1) $u(n) = x(n) + y(n)$
(2) $w(n) = x(n) \cdot y(n)$
også Cauchy-egenskaben.

Bevis:
(1) Vi kan skrive:

$$\begin{aligned} u(n) - u(m) &= x(n) + y(n) - \big(x(m) + y(m)\big) \\ &= x(n) - x(m) + y(n) - y(m), \end{aligned}$$

hvorefter vi kan benytte trekantsuligheden, hvor vi får, at

$$|u(n) - u(m)| \leq |x(n) - x(m)| + |y(n) - y(m)|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Da følgerne $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ og $\{y(n)\}_{n\geq 1}$ har Cauchy-egenskaben, eksisterer der et $M_{j,1}$ og $M_{j,2}$, sådan at

$$\begin{aligned} |x(n) - x(m)| &\leq 10^{-k-1}, \quad \forall n, m \geq M_{j,1} \\ |y(n) - y(m)| &\leq 10^{-k-1}, \quad \forall n, m \geq M_{j,2}. \end{aligned}$$

Ud fra dette, har vi, at

$$|u(n) - u(m)| \leq 2 \cdot 10^{-k-1} < 10^{-k}, \quad \forall n, m \geq \max\left\{M_{j,1}, M_{j,2}\right\}.$$

Dermed har vi vist, at $\{u(n)\}_{n\geq 1}$ også har Cauchy-egenskaben.

(2) Ifølge Lemma 2.4.4 er både $\{x(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ og $\{y(n)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ begrænsede, det vil sige, at der eksisterer $J \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\max\left\{\, |x(n)|, |y(n)| \,\right\} \leq 10^J, \quad \forall n \geq 1.$$

Vi kan benytte trekantsuligheden på følgende udtryk:

$$\begin{aligned}
w(n) - w(m) &= x(n) \cdot y(n) - x(m) \cdot y(m) \\
&= x(n) \cdot y(n) - x(n) \cdot y(m) + x(n) \cdot y(m) - x(m) \cdot y(m) \\
&= x(n) \cdot \big(y(n) - y(m)\big) + \big(x(n) - x(m)\big) \cdot y(m)
\end{aligned}$$

og få, at

$$\begin{aligned}
|w(n) - w(m)| &\leq \big|x(n) \cdot \big(y(n) - y(m)\big)\big| + \big|\big(x(n) - x(m)\big) \cdot y(m)\big| \\
&= |x(n)| \cdot |y(n) - y(m)| + |x(n) - x(m)| \cdot |y(m)| \\
&\leq 10^J \cdot \big(|y(n) - y(m)| + |x(n) - x(m)| \big), \qquad\qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Da følgerne $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ og $\{y(n)\}_{n\geq 1}$ har Cauchy-egenskaben, eksisterer der et $M_{j,1}$ og $M_{j,2}$, sådan at

$$\begin{aligned}
|x(n) - x(m)| &\leq 10^{-J-k-1}, \quad \forall n, m \geq M_{j,1} \\
|y(n) - y(m)| &\leq 10^{-J-k-1}, \quad \forall n, m \geq M_{j,2}.
\end{aligned}$$

Og dermed er

$$|w(n) - w(m)| \leq 10^{-k}, \quad \forall n, m \geq \max\big\{M_{j,1}, M_{j,2}\big\},$$

hvilket betyder, at $\{w(n)\}_{n\geq 1}$ har Cauchy-egenskaben. ■

Vi har nu gennemgået de to konvergensbegreber samt Cauchy-egenskaben for følger, hvilket muliggør en udvidelse af addition og multiplikation til de reelle tal. Dette vil vi gennemgå i næste kapitel.

Kapitel 3
Regneoperationer for de reelle tal

Formålet med dette kapitel er at introducere regneoperationerne for de reelle tal. Først vil vi indføre addition og multiplikation, hvor vi benytter resultaterne fra Kapitel 1 og Kapitel 2 om endelige decimaltal til at udvide til de reelle tal. Yderligere vil vi vise, at egenskaberne for regneoperationerne fortsat er gældende, og at ordningen $<$ på $\mathbb{R}$ er kompatibel med disse.

Dernæst introducerer vi regneoperationen division, hvor vi starter med at konstruere den multiplikative inverse til ethvert naturligt tal, hvorefter vi er i stand til at definere mængden af de rationelle tal. Dette leder os hen til at konstruere den multiplikative inverse til ethvert reelt tal forskelligt fra 0, hvorefter division følger. Til sidst viser vi, at de rationelle tal ikke er fuldstændige, og vi introducerer de irrationelle tal, som sammen med de rationelle tal udgør mængden af de reelle tal. Dette kapitel bygger på Kapitel 1 i *Notes for Analyse 1 and Analyse 2* (Cornean 2015).

3.1 Addition og multiplikation af de reelle tal

Vi starter med at definere addition og multiplikation for to vilkårlige reelle tal.

3.1.1 Definition:
Lad $[x], [y] \in \mathbb{R}$, og lad følgerne være givet ved $x(n) = T_n(x)$ og $y(n) = T_n(y)$. Så er

$$[x] + [y] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x) + T_n(y)\big), \tag{3.1}$$

$$[x] \cdot [y] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x) \cdot T_n(y)\big). \tag{3.2}$$

Definitionen giver mening, da $x(n)$ konvergerer stærkt mod $[x]$, og $y(n)$ konvergerer stærkt mod $[y]$. Desuden har vi fra Proposition 2.4.2, at begge følger har Cauchy-egenskaben, og dermed har deres sum og produkt også Cauchy-egenskaben ifølge Proposition 2.4.7. Så siger Proposition 2.4.6, at deres sum og produkt har en stærk grænse. Ud fra definitionen følger det yderligere, at de reelle tal er lukkede under både addition og multiplikation, da den stærke grænse netop giver et reelt tal.

Det er værd at bemærke, at grænserne er veldefinerede, da værdien ikke ændrer sig, hvis x og/eller y indgår i et spring. Lad $t \in \mathbb{T}$ og $\widetilde{t} \in \widetilde{\mathbb{T}}$ være en del af samme spring. Da $T_n(t)$ og $T_n\big(\widetilde{t}\big)$ begge konvergerer stærkt mod $[t]$, så siger Lemma 2.2.8, at

$$\operatorname*{limS}_{n\to\infty} \Big(T_n(t) - T_n\big(\widetilde{t}\big)\Big) = 0.$$

Dermed kan vi omskrive følgende udtryk:

$$T_n(t) + T_n(y) = T_n(t) - T_n\big(\widetilde{t}\big) + T_n\big(\widetilde{t}\big) + T_n(y),$$

og benytte Lemma 2.2.6 og Definition 3.1.1, hvor vi får, at

$$[t] + [y] = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\big(T_n(t) + T_n(y)\big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\Big(T_n\big(\widetilde{t}\big) + T_n(y)\Big).$$

Vi kan desuden vise, at egenskaberne for addition og multiplikation af endelige decimaltal kan overføres til reelle tal. Herunder vil vi vise kommutativitet, associativitet og distributivitet.

3.1.2 Proposition (Kommutativitet for reelle tal):
For alle $[x], [y] \in \mathbb{R}$ *har vi, at*

$$[x] + [y] = [y] + [x]$$
$$[x] \cdot [y] = [y] \cdot [x].$$

Bevis:
Fra Proposition 1.2.6 har vi, at den kommutative lov er gældende for endelige decimaltal. Dermed er

$$T_n(x) + T_n(y) = T_n(y) + T_n(x)$$

og

$$T_n(x) \cdot T_n(y) = T_n(y) \cdot T_n(x).$$

Ved at tage den stærke grænse på begge sider i begge ligninger opnås resultatet for både addition og multiplikation:

$$[x] + [y] = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\big(T_n(x) + T_n(y)\big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\big(T_n(y) + T_n(x)\big) = [y] + [x]$$
$$[x] \cdot [y] = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\big(T_n(x) \cdot T_n(y)\big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\big(T_n(y) \cdot T_n(x)\big) = [y] \cdot [x]. \qquad \blacksquare$$

3.1.3 Proposition (Associativitet for reelle tal):
For alle $[x], [y], [z] \in \mathbb{R}$ *har vi, at*

$$\big([x] + [y]\big) + [z] = [x] + \big([y] + [z]\big).$$

Bevis:
Da den associative lov er gældende for endelige decimaltal, gælder det, at

$$\big(T_n(x) + T_n(y)\big) + T_n(z) = T_n(x) + \big(T_n(y) + T_n(z)\big). \tag{3.3}$$

Nu kan vi tage den stærke grænse på begge sider:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\Big(\big(T_n(x) + T_n(y)\big) + T_n(z)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{S}\,\Big(T_n(x) + \big(T_n(y) + T_n(z)\big)\Big)$$
$$\big([x] + [y]\big) + [z] = [x] + \big([y] + [z]\big). \qquad \blacksquare$$

Et tilsvarende bevis kunne laves for den associative lov med hensyn til multiplikation. Vi går derfor videre til den distributive lov.

3.1.4 Proposition (Distributivitet for reelle tal):
For alle $[x], [y], [z] \in \mathbb{R}$ *har vi, at*

$$([x]+[y]) \cdot [z] = [x] \cdot [z] + [y] \cdot [z].$$

Bevis:
Fra Definition 3.1.1 ved vi, at $[x]+[y] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x)+T_n(y)\big)$. Lad $w \in \mathbb{D}$ være et decimaltal, sådan at $[w] = [x]+[y]$. Så har vi, at følgen $T_n(w)$ konvergerer stærkt mod $[x]+[y]$, da

$$\operatorname*{limS}_{n\to\infty} T_n(w) = [w] = [x]+[y].$$

Da både $T_n(x)+T_n(y)$ og $T_n(w)$ konvergerer stærkt mod $[x]+[y]$, har vi fra Lemma 2.2.8, at

$$\operatorname*{limS}_{n\to\infty} \Big(T_n(w) - \big(T_n(x)+T_n(y)\big)\Big) = 0.$$

Ifølge Definition 3.1.1 er

$$\big([x]+[y]\big) \cdot [z] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(w) \cdot T_n(z)\big),$$

hvor vi kan skrive:

$$T_n(w) \cdot T_n(z) = \Big(T_n(w) - \big(T_n(x)+T_n(y)\big)\Big) \cdot T_n(z) + \big(T_n(x)+T_n(y)\big) \cdot T_n(z).$$

Vi har, at $T_n(w) - \big(T_n(x)+T_n(y)\big)$ konvergerer stærkt mod 0, og da $T_n(z)$ konvergerer mod $[z]$, er den begrænset ifølge Lemma 2.2.5. Dermed giver Lemma 2.2.7, at produktet af disse følger konvergerer stærkt mod 0. Så giver Lemma 2.2.6, at

$$\big([x]+[y]\big) \cdot [z] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(w) \cdot T_n(z)\big) = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \Big(\big(T_n(x)+T_n(y)\big) \cdot T_n(z)\Big).$$

Da den distributive lov er gældende for endelige decimaltal, kan vi skrive:

$$([x]+[y]) \cdot [z] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x) \cdot T_n(z) + T_n(y) \cdot T_n(z)\big),$$

hvor vi kan omskrive på følgende måde:

$$\begin{aligned} T_n(x) \cdot T_n(z) + T_n(y) \cdot T_n(z) = {} & T_n(x) \cdot T_n(z) - T_n\big([x]\cdot[z]\big) + T_n\big([x]\cdot[z]\big) \\ & + T_n(y) \cdot T_n(z) - T_n\big([y]\cdot[z]\big) + T_n\big([y]\cdot[z]\big). \end{aligned}$$

Her har vi, at $T_n(x) \cdot T_n(z)$ og $T_n\big([x]\cdot[z]\big)$ begge konvergerer stærkt mod $[x]\cdot[z]$, og derfor konvergerer $T_n(x) \cdot T_n(z) - T_n\big([x]\cdot[z]\big)$ stærkt mod 0 ifølge Lemma 2.2.8. Ud fra samme argument har vi, at $T_n(y) \cdot T_n(z) - T_n\big([y]\cdot[z]\big)$ konvergerer stærkt mod 0. Så giver Lemma 2.2.6 og Ligning (3.2), at

$$\begin{aligned} \big([x]+[y]\big) \cdot [z] &= \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x) \cdot T_n(z) + T_n(y) \cdot T_n(z)\big) \\ &= \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \Big(T_n\big([x]\cdot[z]\big) + T_n\big([y]\cdot[z]\big)\Big) = [x]\cdot[z] + [y]\cdot[z]. \end{aligned}$$ ■

Nu hvor vi har bevist egenskaberne for regneoperationerne for reelle tal, ønsker vi at vise, at der eksisterer neutralelementer for henholdsvis addition og multiplikation.

3.1.5 Proposition:
For alle $[x] \in \mathbb{R}$ *gælder det, at*

(a) 0 *er neutralelementet for addition, det vil sige, at* $[x] + 0 = 0 + [x] = [x]$.
(b) $[1]$ *er neutralelementet for multiplikation, det vil sige, at* $[x] \cdot [1] = [1] \cdot [x] = [x]$.

Bevis:

(a) Vi viser først, at 0 er neutralelementet for additon. Vi bruger Definition 3.1.1, og at vi ved, at 0 er neutralelement for addition af endelige decimaltal ifølge Proposition 1.2.9:

$$[x] + 0 = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x) + 0\big) = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x)\big) = [x].$$

(b) Vi viser så, at $[1]$ er neutralelementet for multiplikation. Vi benytter igen Definition 3.1.1, og at 1 er en konstant følge samt neutralelement for multiplikation af endelige decimaltal ifølge Proposition 1.2.9:

$$[x] \cdot [1] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x) \cdot 1\big) = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \big(T_n(x)\big) = [x].$$ ■

Vi har nu vist, de fleste egenskaber for addition gælder for de reelle tal. Vi mangler dog at vise, at der findes en additiv invers.

3.1.6 Proposition:
For alle $[x] \in \mathbb{R}$ *eksisterer der en entydig additiv invers, sådan at*

$$[x] + [-x] = [-x] + [x] = 0.$$

Bevis:
Først beviser vi entydigheden, hvor vi antager, at både $[y]$ og $[y']$ er additive inverse, altså er $[x] + [y] = 0$ og $[x] + [y'] = 0$. Vi har så følgende, da vi har bevist, at den associative lov er gældende, og at 0 er neutralelement for addition:

$$[y] = [y] + 0 = [y] + \big([x] + [y']\big) = \big([y] + [x]\big) + [y'] = 0 + [y'] = [y'].$$

Dermed er den additive inverse entydig, og vi kan betegne den som $[-x]$. For at bevise eksistensen, benytter vi Definition 3.1.1, og at der eksisterer en entydig additiv invers for endelige decimaltal ifølge Proposition 1.2.10. Vi har, at følgen $T_n(x)$ konvergerer stærkt mod $[x]$, og vi definerer $[-x]$ til at være den stærke grænse for følgen $-T_n(x)$. Vi får så:

$$[x] + [-x] = \operatorname*{limS}_{n\to\infty} \Big(T_n(x) + \big(-T_n(x)\big)\Big) = 0,$$

idet $T_n(x) + \big(-T_n(x)\big)$ er lig 0, vil den stærke grænse også være det. ■

Det er dog mere omstændigt at bevise, at der også eksisterer en multiplikativ invers, da vi først skal introducere de rationelle tal. Dog vælger vi først, som tidligere nævnt, at bevise regneoperationernes kompatibilitet med ordningen $<$. Først får vi dog brug for følgende lemma.

3.1.7 Lemma:
For ethvert reelt tal $[u]$ *og* $J \in \mathbb{N}_0$ *gælder det, at* $[u] < [u] + 10^{-J}$.

Bevis:
Vi har to muligheder. Enten er u en del af et spring eller også har vi, at $u \in \mathbb{D} \setminus \big(\mathbb{T} \cup \widetilde{\mathbb{T}}\big)$.

- Lad $u \in \mathbb{T}$ være en del af et spring. Givet $J \in \mathbb{Z}$, vælger vi et $Q \in \mathbb{N}_0$, sådan at $\widehat{u} = 10^{J+Q} \cdot u$ er et heltal. Så gælder følgende:

$$[u] = u = 10^{-J-Q} \cdot \widehat{u} < 10^{-J-Q} \cdot \big(\widehat{u} + 1\big) = [u] + 10^{-J-Q} \leq [u] + 10^{-J},$$

  da det er klart, at $10^{-J-Q} \leq 10^{-J}$.
- Lad $u \in \mathbb{D} \setminus \big(\mathbb{T} \cup \widetilde{\mathbb{T}}\big)$. Så gælder det, at der er uendeligt mange decimaler $u_j \in \{1, \ldots, 8\}$. Vi vælger et sådant decimal u_{-N}, hvor $N > J$. Vi ændrer dette decimal til 9, så vi får decimaltallet u', hvor vi har, at $[u] < [u']$. Vi tager afskæringen $T_N(u')$, hvor det også gælder, at $[u] < T_N(u')$, og vi har, at

$$T_N(u') \leq T_n(u) + 10^{-J}, \quad \forall n \geq N > J.$$

  Så kan vi bruge Lemma 2.2.9, da $T_N(u')$ er en konstant følge, og $T_n(u) + 10^{-J}$ konvergerer stærkt mod $[u] + 10^{-J}$. Dermed gælder det for grænserne, at

$$T_N(u') \leq [u] + 10^{-J}.$$

  Og dermed er

$$[u] < T_N(u') \leq [u] + 10^{-J}.$$

■

Vi er nu i stand til at bevise kompatibiliteten med $<$ og henholdsvis addition og multiplikation. Vi tager udgangspunkt i resultaterne fra Afsnit 1.2, hvor vi har vist det for endelige decimaltal. Vi benytter os dog undervejs af ordningen $\leq$, hvor et tilsvarende bevis for kompatibiliteten kunne opstilles.

3.1.8 Proposition:
For alle $[x], [y], [z] \in \mathbb{R}$*, hvor* $[x] < [y]$*, har vi, at*

$$[x] + [z] < [y] + [z].$$

Bevis:
Da $[x] < [y]$, er de ikke en del af samme spring, og dermed giver Ligning (2.2), at der eksisterer et $M \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\begin{aligned} T_n(y) - T_n(x) &> 10^{-M} \\ T_n(y) &> 10^{-M} + T_n(x), \qquad \forall n \geq M. \end{aligned}$$

Da de alle er endelige decimaltal, kan vi lægge $T_n(z)$ til på begge sider ifølge Proposition 1.2.11 og få, at

$$T_n(y) + T_n(z) > 10^{-M} + T_n(x) + T_n(z), \quad \forall n \geq M,$$

så siger Lemma 2.2.9, at

$$[y] + [z] \geq 10^{-M} + [x] + [z].$$

Fra Lemma 3.1.7 følger det så, at

$$[y] + [z] \geq 10^{-M} + [x] + [z] > [x] + [z].$$

■

3.1.9 Proposition:
For alle $[x], [y], [z] \in \mathbb{R}$*, hvor* $0 < [z]$ *og* $[x] < [y]$*, har vi, at*

$$[z] \cdot [x] < [z] \cdot [y].$$

Bevis:
Da $[x] < [y]$, er de ikke en del af samme spring, og dermed giver Ligning (2.2), at der eksisterer et $M_1 \in \mathbb{N}$, sådan at

$$T_n(y) - T_n(x) > 10^{-M_1}, \quad \forall n \geq M_1.$$

Det samme gælder for $0 < [z]$, derfor eksisterer der et M_2, sådan at

$$T_n(z) > 10^{-M_2}, \quad \forall n \geq M_2.$$

Ved at benytte de to ovenstående uligheder, opnår vi, at

$$T_n(z) \cdot \big(T_n(y) - T_n(x)\big) > 10^{-M_2} \cdot 10^{-M_1} = 10^{-M_1 - M_2}, \quad \forall n \geq \max\{M_1, M_2\}.$$

Da den distributive lov er gældende for endelige decimaltal, gælder det, at

$$T_n(z) \cdot \big(T_n(y) - T_n(x)\big) = T_n(z) \cdot T_n(y) - T_n(z) \cdot T_n(x), \quad \forall n \geq \max\{M_1, M_2\}.$$

Og dermed får vi, at

$$T_n(z) \cdot T_n(y) > 10^{-M_1 - M_2} + T_n(z) \cdot T_n(x), \quad \forall n \geq \max\{M_1, M_2\}.$$

Igen kan vi benytte Lemma 2.2.9 og Lemma 3.1.7, og vi får, at

$$[z] \cdot [y] \geq 10^{-M_1 - M_2} + [z] \cdot [x] > [z] \cdot [x].$$

■

Vi har nu introduceret addition og multiplikation for reelle tal, samt vist at egenskaberne for operationerne stadig er gældende, og at ordningen $<$ er kompatibel med disse operationer. Vi går nu videre til at indføre division af reelle tal, hvor vi benytter en anden fremgangsmåde end udvidelse fra endelige decimaltal.

3.2 Division af de reelle tal

For at indføre regneoperationen division starter vi med at finde en multiplikativ invers til det reelle tal $1 - 10^{-J}$ for $J \in \mathbb{N}$, hvorefter vi benytter dette resultat til at introducere mængden af de rationelle tal, som netop består af et naturligt tal p multipliceret med den multiplikative inverse til et andet naturligt tal q. Derfor skal vi konstruere den multiplikative inverse til ethvert $q \in \mathbb{N}$. Ved hjælp af de rationelle tal samt endelige decimaltal kan vi til sidst finde den multiplikative inverse til et vilkårligt reelt tal, hvorefter vi kan indføre division af reelle tal. Lad $J \in \mathbb{N}$. Da leddene ophæver hinanden, har vi, at

$$\left(1 - 10^{-J}\right) \cdot \left(1 + 10^{-J} + 10^{-2J} + \cdots + 10^{-nJ}\right) = 1 - 10^{-(n+1)J}, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.4}$$

Følgen $\{x(n)\}_{n\geq 1}$ givet ved $x(n) = 1 + 10^{-J} + 10^{-2J} + \cdots + 10^{-nJ}$ konvergerer formelt, og dermed også stærkt, til det reelle tal givet ved decimaltallet

$$1{,}000...01000..01... = 1{,}(\overline{000...01})_J.$$

Her angiver stregen igen en periode, hvor der præcis er $J - 1$ nuller mellem hvert 1-tal. Dermed er J længden på perioden, som indeholder $J - 1$ nuller og et 1-tal. Vi tager den stærke grænse på begge sider af Ligning (3.4) og får, at

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\mathrm{S} \Big(\left(1 - 10^{-J}\right) \cdot \left(1 + 10^{-J} + 10^{-2J} + \cdots + 10^{-nJ}\right)\Big) &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{S} \left(1 - 10^{-(n+1)J}\right) \\ \left(1 - 10^{-J}\right) \cdot 1{,}\overline{000...01})_J &= 1. \end{aligned}$$

Desuden har vi, at den kommutative lov er gældende for reelle tal, hvorfor det gælder, at

$$\left(1 - 10^{-J}\right) \cdot 1{,}(\overline{000...01})_J = 1{,}(\overline{000...01})_J \cdot \left(1 - 10^{-J}\right) = 1,$$

hvilket betyder, at vi har fundet den multiplikative inverse til $1 - 10^{-J}$, altså er

$$\left(1 - 10^{-J}\right)^{-1} = 1{,}(\overline{000...01})_J.$$

Desuden kan vi også finde den multiplikative inverse til $10^J - 1$, da vi kan benytte, at $10^J - 1 = 10^J \cdot \left(1 - 10^{-J}\right)$, og derfor har vi, at

$$\left(10^J - 1\right)^{-1} = \left(1 - 10^{-J}\right)^{-1} \cdot 10^{-J} = 1{,}(\overline{000...01})_J \cdot 10^{-J} = 0{,}(\overline{000...01})_J. \tag{3.5}$$

I det følgende afsnit ønsker vi at konstruere den multiplikative inverse til ethvert $q \in \mathbb{N}$. Hvis $q = 10^k$, hvor $k \in \mathbb{N}_0$, så ved vi fra Definition 1.2.2, at den multiplikative inverse fås ved at rykke kommaet k pladser til højre. Så lad os antage, at q ikke kan skrives som et 10^k. I så fald eksisterer der kun et $k \in \mathbb{N}_0$, sådan at $10^k < q < 10^{k+1}$. Så kan vi benytte kvotient-rest sætningen, som vi postulerer nedenfor, baseret på (Rotman 2002, s. 2).

3.2.1 Sætning (Kvotient-rest sætningen):
For ethvert par af tal $p, q \in \mathbb{Z}$, hvor $q \neq 0$, eksisterer der entydige tal $a, r \in \mathbb{Z}$, sådan at

$$p = a \cdot q + r,$$

hvor $0 \leq r < |q|$.

Med denne sætning kan vi skrive:

$$\begin{aligned}
10^{k+1} &= a_1 \cdot q + r_1 \\
10^{k+2} &= a_2 \cdot q + r_2 \\
&\vdots \\
10^{k+j} &= a_j \cdot q + r_j, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

hvor $0 \leq r_j < q$ for alle j. Eftersom r_j ligger mellem 0 og $q-1$, er der kun q forskellige værdier for mulige restled, hvilket betyder, at hvis $j > q$, så må mindst to restled have ens værdier. Derfor må der eksistere i og j, hvor $1 \leq i < j \leq q+1$, således at $r_j = r_i$. Lad $d = j - i > 0$, så har vi, at

$$\begin{aligned}
10^{k+i} &= a_i \cdot q + r_i \\
10^{k+j} &= a_j \cdot q + r_j,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

og hvis vi trækker ovenstående fra hinanden, får vi følgende:

$$\begin{aligned}
10^{k+j} - 10^{k+i} &= a_j \cdot q + r_j - (a_i \cdot q + r_i) \\
10^{k+i+j-i} - 10^{k+i} &= a_j \cdot q - a_i \cdot q \\
10^{k+i} \cdot \left(10^d - 1\right) &= \left(a_j - a_i\right) \cdot q.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Da $a_j - a_i$ og $10^d - 1$ begge ligger i $\mathbb{N}$, kan vi igen bruge Sætning 3.2.1 og få, at

$$a_j - a_i = m \cdot \left(10^d - 1\right) + r, \quad 0 \leq r < 10^d - 1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Dermed har vi, at

$$10^{k+i} \cdot \left(10^d - 1\right) = \left(a_j - a_i\right) \cdot q = \Big(m \cdot \left(10^d - 1\right) + r\Big) \cdot q.$$

Ud fra dette kan vi finde den multiplikative inverse til q, da vi kender den inverse til både 10^{k+i} og $10^d - 1$:

$$\begin{aligned}
10^{-k-i} \cdot \left(10^d - 1\right)^{-1} \cdot 10^{k+i} \cdot \left(10^d - 1\right) &= 10^{-k-i} \cdot \left(10^d - 1\right)^{-1} \cdot \Big(m \cdot \left(10^d - 1\right) + r\Big) \cdot q \\
1 &= 10^{-k-i} \cdot \Big(m + \left(10^d - 1\right)^{-1} \cdot r\Big) \cdot q.
\end{aligned}$$

Vi kan omskrive ovenstående, da vi som sagt kender vi den multiplikative inverse til $10^d - 1$, som er

$$\left(10^d - 1\right)^{-1} = 0{,}(\overline{000..01})_d.$$

Ydermere, eftersom r ligger mellem 0 og $10^d - 1$, kan r højst have d cifre forskellige fra 0, derfor må r være på formen:

$$r = r_d r_{d-1} ... r_1 r_0,$$

hvor det er tilladt, at $r_j = 0$ for $j \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Dermed kan vi omskrive:

$$\begin{aligned}
1 &= 10^{-k-i} \cdot \Big(m + \left(10^d - 1\right)^{-1} \cdot r\Big) \cdot q \\
&= 10^{-k-i} \cdot \left(m{,}(\bar{r})_d\right) \cdot q,
\end{aligned}$$

hvilket medfører, at

$$q^{-1} = 10^{-k-i} \cdot \big(m,(\bar{r})_d\big). \tag{3.9}$$

Derfor er vi nu i stand til at finde den multiplikative inverse til ethvert naturligt tal, hvilket vi illustrerer med et eksempel.

3.2.2 Eksempel:
Vi ønsker at finde de multiplikative inverse til henholdsvis 3 og 13. Vi bruger metoden beskrevet ovenfor.

(a) Vi har, at $10^0 < 3 < 10^1$, dermed er $k = 0$ i dette tilfælde, og vi kan benytte Ligning (3.6) til at opstille to ligninger med ens restled:

$$\begin{aligned} 10^1 &= 3 \cdot 3 + 1 \\ 10^2 &= 33 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

hvor $i = 1$ og $j = 2$, og $a_1 = 3, a_2 = 33, r_1 = r_2 = 1$, desuden er $d = 2 - 1 = 1$. Vi kan benytte Ligning (3.8) til at opstille ligningen:

$$33 - 3 = m \cdot (10^1 - 1) + r,$$

hvor vi har, at $m = 3$ og $r = 3$, da

$$30 = 3 \cdot (10^1 - 1) + 3.$$

Dermed har vi, at

$$3^{-1} = 10^{0-1} \cdot 3{,}\bar{3} = 0{,}\bar{3},$$

hvor vi benytter, at længden på perioden er $d = 1$.

(b) Vi har, at $10^1 < 13 < 10^2$, og dermed er $k = 1$. Igen benytter vi Ligning (3.6) og opstiller ligningerne, hvor restleddene er ens:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 7 \cdot 13 + 9 \\ 10^8 &= 7692307 \cdot 13 + 9, \end{aligned}$$

hvor $i = 1, j = 7$, og $a_1 = 7, a_2 = 7692307, r_1 = r_2 = 9$. Dermed er $d = 7 - 1 = 6$, og vi benytter Ligning (3.8) til at opstille ligningen:

$$7692307 - 7 = m \cdot (10^6 - 1) + r,$$

hvor $m = 7$ og $r = 692307$, da

$$7692300 = 7 \cdot (10^6 - 1) + 692307.$$

Dermed er den inverse

$$13^{-1} = 10^{-1-1} \cdot 7{,}(\overline{692307}) = 0{,}07(\overline{692307}),$$

hvor vi har benyttet, at periodens længde er $d = 6$. ◀

Da vi nu kan finde den inverse til ethvert naturligt tal, er vi i stand til at definere mængden af de rationelle tal.

3.2.3 Definition (Mængden af de rationelle tal):
Mængden af de rationelle tal består af alle de reelle tal, som kan skrives som produktet af et naturligt tal p *og den multiplikative inverse* q^{-1} *til et naturligt tal* q*, forskelligt fra* 0*, hvor* p *og* q *er indbyrdes primiske.*

Symbolsk kan mængden skrives som:

$$\mathbb{Q} = \{[x] \in \mathbb{R} \mid x = \pm p \cdot q^{-1}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad q \in \mathbb{N}\}.$$

Det ses herfra, at $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, da vi altid kan vælge $q = 1$. Desuden er $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, hvor vi ud fra nedenstående sætning er i stand til præcist at afgøre, hvornår et reelt tal er rationelt.

3.2.4 Sætning:
Et reelt tal $[x] \neq 0$ *er rationelt, hvis og kun hvis* $x = \pm 10^K \cdot x_N ... x_0,(\bar{P})$*, hvor* $K \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0$*, og* P *angiver en periodisk talfølge af endelig længde.*

Bevis:
Vi beviser kun sætningen for de positive tal, da de negative tal følger direkte ved at ændre fortegnet.

$\Leftarrow$ Antag, at $x = 10^K \cdot x_N ... x_0,(\bar{P})$. Vi viser nu, at $[x]$ er rationel.

Hvis P kun består af nuller, så har vi to muligheder. Såfremt $K \geq 0$, så er x et naturligt tal, hvilket er rationelt, som ønsket. Hvis $K < 0$, så kan vi tage $p = x_N ... x_0$ og $q = 10^{-K}$, da

$$x = 10^K \cdot x_N ... x_0,(\bar{P}) = x_N ... x_0 \cdot 10^K = p \cdot q^{-1}.$$

Derfor kan vi antage, at P er en ikke-triviel talfølge af længde $l \geq 1$. Desuden kan vi også antage, at P ikke starter med 0, da vi i så fald kan ændre K til $K - Q$, hvor Q er antallet af nuller i starten af perioden.

Derfor lader vi $x = 10^K \cdot x_N ... x_0,(\bar{P})$, hvor $P = t_{l-1} ... t_0$ og $t_{l-1} \neq 0$. Vi kan bruge Ligning (3.5) med $J = l$ og få, at

$$0,(\bar{P}) = P \cdot \left(\overline{0{,}000...01}\right)_l = P \cdot \left(10^l - 1\right)^{-1}.$$

Så kan vi omskrive x således:

$$\begin{aligned}
x &= 10^K \cdot x_N ... x_0,(\bar{P}) \\
&= 10^K \cdot \Big(x_N ... x_0 + P \cdot \left(10^l - 1\right)^{-1}\Big) \\
&= 10^K \cdot \Big(x_N ... x_0 \cdot \left(10^l - 1\right) + P\Big) \cdot \left(10^l - 1\right)^{-1} \\
&= p \cdot q^{-1},
\end{aligned}$$

hvor $p = 10^K \cdot \Big(x_N ... x_0 \cdot \left(10^l - 1\right) + P\Big)$ og $q = 10^l - 1$. Dermed er $[x] \in \mathbb{Q}$.

⇒ Her viser vi, at ethvert rationalt tal kan skrives på formen $x = 10^K \cdot x_N...x_0,(\bar{P})$, det vil sige, at på et tidspunkt opstår der en periode i decimalerne. Hvis $p = 1$, kan vi benytte Ligning (3.9), da

$$p \cdot q^{-1} = 1 \cdot 10^{-k-i} \cdot \big(m,(\bar{r})_d\big),$$

som er på den ønskede form. Lad os nu vise det for $p > 1$.

Vi har fra Definition 3.2.3, at p og q er indbyrdes primiske. Desuden antager vi, at $q \neq 10^J$ for et $J \in \mathbb{N}_0$, da vi ellers vil have, at $x = p \cdot q^{-1}$ er et endeligt decimaltal, som kan skrives på den ønskede form.

Derudover kan vi lade $p < q$, hvilket kræver en kort forklaring. Hvis $p > q$, så kan vi skrive $p = a \cdot q + p'$, hvor $p' < q$, og $a \in \mathbb{N}$ ifølge Sætning 3.2.1. Dermed er $p \cdot q^{-1} = a + p' \cdot q^{-1}$. Derfor er det nok at antage, at $p < q$, da additionen med a fortsat bevarer strukturen efter kommaet.

Hvis $p < q$, eksisterer der et entydigt $k \in \mathbb{N}_0$, sådan at $10^k \cdot p < q < 10^{k+1} \cdot p$. Nu bruger vi samme strategi, som da vi skulle konstruere den inverse til et naturligt tal, derfor benytter vi Sætning 3.2.1 og får, at

$$\begin{aligned}
10^{k+1} \cdot p &= a_1 \cdot q + r_1 \\
10^{k+2} \cdot p &= a_2 \cdot q + r_2 \\
&\vdots \\
10^{k+j} \cdot p &= a_j \cdot q + r_j, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

hvor vi her har, at $0 \leq r_j < q$ og $10^{j-1} < a_j < 10^j$ for alle j. Da q er endelig, må der for $j > q$ være mindst to restled med ens værdier. Vi antager, at $r_j = r_i$ for $1 \leq i < j \leq q + 1$. Vi lader igen $d = j - i > 0$, og ligesom i Ligning (3.7) har vi, at

$$10^{k+i} \cdot \big(10^d - 1\big) \cdot p = (a_j - a_i) \cdot q,$$

hvor vi igen kan skrive:

$$a_j - a_i = m \cdot \big(10^d - 1\big) + r, \quad 0 \leq r < 10^d - 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Hvilket medfører, at

$$\begin{aligned}
p \cdot q^{-1} &= 10^{-k-i} \cdot \big(10^d - 1\big)^{-1} \cdot (a_j - a_i) \\
&= 10^{-k-i} \cdot \big(10^d - 1\big)^{-1} \cdot \Big(m \cdot \big(10^d - 1\big) + r\Big) \\
&= 10^{-k-i} \cdot \Big(m + r \cdot \big(10^d - 1\big)^{-1}\Big) \\
&= 10^{-k-i} \cdot \big(m,(\bar{r})_d\big),
\end{aligned}$$

som netop er den ønskede form. ■

Det næste skridt er at bevise, at ethvert reelt tal forskelligt fra 0 har en multiplikativ invers, hvilket efterfølgende benyttes til at indføre division af reelle tal.

3.2.5 Sætning:
Ethvert reelt tal $[x] \neq 0$ har en entydig multiplikativ invers $[x]^{-1}$.

Bevis:
Vi beviser først entydigheden. Antag, at $[y]$ og $[y']$ begge er multiplikative inverse til $[x] \neq 0$. Det vil sige, at der gælder, at $[x] \cdot [y] = [1]$ og $[x] \cdot [y'] = [1]$. Da vi ved, at $[1]$ er neutralelement med hensyn til addition, og den associative lov er gældende, har vi, at

$$[y] = [y] \cdot [1] = [y] \cdot \big([x] \cdot [y']\big) = \big([y] \cdot [x]\big) \cdot [y'] = [1] \cdot [y'] = [y'].$$

Derfor er den multiplikative inverse entydig, såfremt den eksisterer, og vi kan betegne den med $[x]^{-1}$. Vi beviser nu eksistensen. Lad $[x] > 0$. Følgen $\{T_n(x)\}_{n \geq 1}$ konvergerer formelt til $x \in \mathbb{D}$ og dermed også stærkt til $[x] \in \mathbb{R}$ ifølge Lemma 2.3.4. Da $0 < [x]$, har vi ifølge Proposition 1.1.8, at der eksisterer et $J > 0$, sådan at $10^{-J} < [x]$, dermed kan vi finde et N, som er stort nok, sådan at

$$0 < 10^{-J} \leq T_n(x), \quad \forall n \geq N. \tag{3.10}$$

Vi har, at $\mathbb{T} \subset \mathbb{Q}$ på grund af Sætning 3.2.4, dermed er $T_n(x)$ rationel. Der eksisterer altså naturlige tal p og q, således at $T_n(x) = p \cdot q^{-1}$. Derfor er $\big(T_n(x)\big)^{-1} = q \cdot p^{-1}$. Ved at gange igennem med begge inverse i Ligning (3.10), får vi, at

$$0 < \big(T_n(x)\big)^{-1} \leq 10^{J}, \quad \forall n \geq N.$$

Vi konstruerer følgen $\{y(n)\}_{n \geq N}$, hvor $y(n) = \big(T_n(x)\big)^{-1}$. Og vi vil nu vise, at følgen har Cauchy-egenskaben:

$$\begin{aligned} y(m) - y(n) &= \big(T_m(x)\big)^{-1} - \big(T_n(x)\big)^{-1} \\ &= \big(T_m(x)\big)^{-1} \cdot T_n(x) \cdot \big(T_n(x)\big)^{-1} - \big(T_n(x)\big)^{-1} \cdot T_m(x) \cdot \big(T_m(x)\big)^{-1} \\ &= \big(T_m(x)\big)^{-1} \cdot \Big(T_n(x) - T_m(x)\Big) \cdot \big(T_n(x)\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Så har vi, at

$$\begin{aligned} |y(m) - y(n)| &= \Big|\big(T_m(x)\big)^{-1} \cdot \Big(T_n(x) - T_m(x)\Big) \cdot \big(T_n(x)\big)^{-1}\Big| \\ &= \Big|\big(T_m(x)\big)^{-1}\Big| \cdot |T_n(x) - T_m(x)| \cdot \Big|\big(T_n(x)\big)^{-1}\Big| \\ &\leq 10^{2J} \cdot |T_n(x) - T_m(x)|, \qquad \forall m, n \geq N \end{aligned}$$

Da $\{T_n(x)\}_{n \geq 1}$ konvergerer stærkt, så har den også Cauchy-egenskaben ifølge Proposition 2.4.2, dermed har vi, at der eksisterer et $M_{2J+k} \in \mathbb{N}$, for alle $k \in \mathbb{N}$, sådan at

$$|T_n(x) - T_m(x)| \leq 10^{-2J-k}, \quad \forall m, n \geq M_{2J+k}.$$

Så har vi, at

$$|y(m) - y(n)| \leq 10^{2J} \cdot 10^{-2J-k} \leq 10^{-k}, \quad \forall m, n \geq \max\{N, M_{2J+k}\},$$

hvilket betyder, at følgen $\{y(n)\}_{n\geq N}$ også har Cauchy-egenskaben, og dermed konvergerer den stærkt imod et $[y] \in \mathbb{R}$ ifølge Proposition 2.4.6. Derfor kan vi tage den stærke grænse på begge sider af nedenstående udtryk:

$$T_n(x) \cdot \big(T_n(x)\big)^{-1} = 1$$

og få, at

$$[x] \cdot [y] = 1,$$

dermed er $[y] = [x]^{-1}$. Vi kunne også have, at $[x] < 0$, men så er $[x]^{-1} = -\big(-[x]\big)^{-1}$. ■

Da vi nu har fundet den multiplikative inverse til ethvert reelt tal, er vi i stand til at indføre division af reelle tal. Tidligere definerede vi subtraktion til at være addition af et reelt tal og den additive inverse til et andet reelt tal, og på tilsvarede måde kan division nu beskrives som multiplikation af et reelt tal $[x]$ og en multiplikativ invers $[y]^{-1}$ til et reelt tal $[y]$ forskelligt fra 0. Den multiplikative inverse q^{-1} skrives også som $\frac{1}{q}$, hvilket kaldes en brøk. Det vil sige, at et reelt tal $[x]$ er rationelt, hvis vi kan skrive $x = p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$.

Grundet konstruktionen af de reelle tal havde vi, at fuldstændighedsaksiomet for de reelle tal blev bevist som en sætning. Vi ønsker nu at vise, at det modsatte er gældende for de rationelle tal, altså at $\mathbb{Q}$ ikke har supremumsegenskaben, til det skal vi bruge nedenstående sætning.

3.2.6 Sætning:
Ligningen $[x]^2 = [2]$ har ikke nogen rationelle løsninger.

Bevis:
Hvis der eksisterede en sådan løsning $[x]$, så ville x kunne skrives på formen

$$x = \frac{p}{q}, \tag{3.11}$$

hvor p, q er indbyrdes primiske. Vi beviser ved modstrid, hvor vi antager, at x kan skrives som i Ligning (3.11). Dette medfører, at

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = [2] \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = [2] \cdot q^2.$$

Dermed er p^2 lige, hvilket medfører, at p er lige, da et ulige p ville medføre et ulige p^2. Derfor kan vi dividere p^2 med $[4]$, da p er lige og derfor kan deles med $[2]$. Men så kan højresiden også divideres med $[4]$, hvilket betyder, at q^2 er lige, og dermed er q det også. Dette er dog i modstrid med antagelsen om, at p og q er indbyrdes primiske, da vi kunne dividere med $[2]$, og dermed er x ikke rationel. ■

Da vi nu har, at der ikke eksisterer en rationel løsning til ligningen $[x]^2 = [2]$, kan vi beskrive en mængde af tal i $\mathbb{R}$ på følgende måde:

$$\mathbb{I} = \{[x] \in \mathbb{R} \mid x \neq p \cdot q^{-1}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad q \in \mathbb{N}\}.$$

Denne mængde består af de irrationelle tal, og dermed har vi, at løsningen $[x] = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ er irrationel. Derfor har vi, at $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, hvor $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. Vi kan nu bevise, at $\mathbb{Q}$ ikke har supremumsegenskaben.

3.2.7 Sætning:
Mængden af de rationelle tal er ikke fuldstændig.

Det vil sige, at der eksisterer en ikke-tom mængde $S \subset \mathbb{Q}$, som er begrænset opadtil (eller nedadtil), hvor supremum (eller infimum) ikke eksisterer i $\mathbb{Q}$.

Bevis:
Lad $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$, og lad $B = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 > 2\}$. Vi viser nu, at A ikke indeholder noget største element, og at B ikke indeholder noget mindste element. Det vil sige, at for ethvert $x \in A$, kan vi finde et rationelt tal $y \in A$, sådan at $x < y$. Og for ethvert $x \in B$, kan vi finde et rationelt tal $y \in B$, sådan at $y < x$. For ethvert rationelt $x > 0$, konstruerer vi tallet

$$y = x - \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \frac{x \cdot (x+2)}{x+2} - \frac{x^2 - 2}{x+2} = \frac{2x + 2}{x + 2}. \tag{3.12}$$

Så har vi, at

$$\begin{aligned} y^2 - 2 &= \left(\frac{2x+2}{x+2}\right)^2 - 2 = \frac{4x^2 + 4 + 8x}{(x+2)^2} - \frac{2 \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 4 + 8x - (2x^2 + 8 + 8x)}{(x+2)^2} = \frac{2 \cdot (x^2 - 2)}{(x+2)^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vi har, at hvis $x \in A$, så er $x^2 - 2 < 0$, dermed er $x < y$ ifølge Ligning (3.12). Og Ligning (3.13) giver, at $y^2 - 2 < 0$, dermed er $y \in A$. Modsat, hvis $x \in B$, så er $x^2 - 2 > 0$, og $0 < y < x$ ifølge Ligning (3.12), og ifølge Ligning (3.13) er $q^2 - 2 > 0$, derfor er $q \in B$.

Vi viser nu, at $\sup(A) = \sqrt{2}$. Lad $[a] = \sup(A)$, og antag, at $[a]^2 < [2]$. Vi konstruerer nu tallet $[z]$ på samme måde som y i Ligning (3.12), hvor x dog er $[a] = \sup(A)$:

$$[z] = [a] - \frac{[a]^2 - [2]}{[a] + [2]}, \tag{3.14}$$

så har vi ligesom før, at

$$[z]^2 - [2] = \frac{[2] \cdot ([a]^2 - [2])}{([a] + [2])^2}.$$

Da $[a]^2 < [2]$, så har vi, at $[a] < [z]$ og $[z]^2 < [2]$. Ifølge Proposition 1.1.8 eksisterer der et endeligt decimaltal t, som derved også er rationelt, sådan at $[a] < [t] < [z]$. Men $[t] < [y]$ medfører, at

$$[t]^2 < [z] \cdot [t] < [z]^2 < [2],$$

og derfor har vi, at $t \in A$, hvilket betyder, at $[a]$ ikke er en øvre grænse for A, derfor må $[a]^2 \geq [2]$.

Vi antager nu, at $[a]^2 > [2]$, så har vi, at $[z] < [a]$ ifølge Ligning (3.14), og $[z]^2 > [2]$. Igen eksisterer der et rationelt tal t', sådan at $[z] < [t'] < [a]$, hvilket medfører, at

$$[2] < [z]^2 < [t'] \cdot [z] < [t']^2.$$

Dermed er $[t']$ også en øvre grænse for A, og da $[t'] < [a]$, kan $[a]$ ikke være den mindste øvre grænse. Altså må det gælde, at $[a]^2 = [2]$, og derfor er $\sup(A) = \sqrt{2}$, som er et irrationelt tal, hvilket vi viste i Sætning 3.2.6. Et tilsvarende bevis kunne laves for $\inf(B)$, hvor vi får, at $\inf(B) = \sqrt{2}$. Dermed har A ikke et supremum i $\mathbb{Q}$, og B har ikke et infimum i $\mathbb{Q}$. ■

Vi har nu indført alle regneoperationerne og vist, at egenskaberne for disse er gældende. Dette medfører, at mængden af de reelle tal er et ordnet legeme med supremumsegenskaben, idet Definition A.2.2 og Definition A.2.3 er overholdt, hvilket vi kort vil opsummere. Sætning 1.3.8 giver direkte fuldstændigheden af $\mathbb{R}$, hvilket netop er supremumsegenskaben. Udover at have indført regneoperationerne, har vi også vist, at der eksisterer både en additiv og multiplikativ invers, samt at 0 og $[1]$ er neutralelementer. Proposition 3.1.8 viste direkte, at punkt (a) af Definition A.2.3 er overholdt. For at vise, at punkt (b) er overholdt, benytter vi Proposition 3.1.9. Vi skal altså vise, at for alle $[z], [y] \in \mathbb{R}$ gælder det, at $[z] \cdot [y] > 0$, hvis $[z], [y] > 0$. Vi antager altså, at $[y], [z] > 0$. Hvis vi vælger $[x] = 0$ i Proposition 3.1.9, så er $[x] < [y]$ som krævet, og vi ved, at

$$[x] \cdot [z] < [y] \cdot [z].$$

Dermed er $[y] \cdot [z] > 0$. Derfor er $\mathbb{R}$ et ordnet legeme.

I næste kapitel vil vi benytte en anden konstruktion, hvor vi igen viser, at mængden af de reelle tal er et ordnet legeme med supremumsegenskaben. Yderligere kan det vises, at de to konstruktioner er ækvivalente, hvilket vi argumenterer for i slutningen af Kapitel 4.

Dedekind-snit

KAPITEL 4

En anden måde at konstruere mængden af de reelle tal er ved hjælp af Dedekind-snit, som blev introduceret af Richard Dedekind (Dedekind 1912). Formålet med dette kapitel er at redegøre for Dedekind-snit og vise, hvorledes de kan bruges til at konstruere de reelle tal. Konstruktionen bygger på de rationelle tal, som vi derfor definerer som mængden af indbyrdes primiske talpar p og q, sådan at

$$\mathbb{Q}' = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Desuden kan vi indføre addition og multiplikation herpå, sådan at for alle rationelle tal gælder det, at

$$\begin{aligned}(p_1, q_1) + (p_2, q_2) &= (p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1, q_1 \cdot q_2),\\ (p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) &= (p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2).\end{aligned}$$

Neutralelementet for addition er givet ved $(0, 1)$, og neutralelementet for multiplikation er givet ved $(1, 1)$. Den multiplikative inverse til ethvert rationelt tal (p, q), hvor $p \neq 0$, er givet ved (q, p), da $(p, q) \cdot (q, p) = (p \cdot q, q \cdot p) = (1, 1)$. Vi antager, at egenskaberne for regneoperationerne er gældende for de rationelle tal, altså at $\mathbb{Q}'$ er et legeme, og vi ønsker at udvide disse til de reelle tal.

Altså vil vi med dette kapitel vise, at der eksister et ordnet legeme $\mathbb{R}^*$ med supremumsegenskaben, som desuden indeholder $\mathbb{Q}'$ som et dellegeme. Teorien bygger på Kapitel 1 i *Principles of Mathematical Analysis* (Rudin 1976).

4.1 Konstruktionen af de reelle tal og fuldstændighed

Vi er nu klar til at definere elementerne i $\mathbb{R}^*$, som består af delmængder af de rationelle tal, som vi kalder snit. Et snit er en inddeling af en mængde i to ikke-tomme delmængder α_1 og α_2, sådan at $x < y$ for alle $x \in \alpha_1$ og $y \in \alpha_2$. Altså er et snit givet ved (α_1, α_2), men for notationens skyld angiver vi ofte et snit som α_1 blot, da α_1 entydigt bestemmer α_2. Eksempelvis har vi, at mængderne $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$ og $B = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 > 2\}$ fra beviset for Sætning 3.2.7 tilsammen udgør et snit af de positive rationelle tal, men det er nok at se på mængden A, da B entydigt er givet ved $\mathbb{Q}_+ \setminus A$. Vi giver nu en detaljeret definition af et snit, som giver elementerne i $\mathbb{R}^*$.

4.1.1 Definition (Dedekind-snit):
Et snit er en mængde $\alpha \subset \mathbb{Q}'$, hvor følgende egenskaber er gældende:
(1) α er ikke-tom, og $\alpha \neq \mathbb{Q}'$.
(2) Hvis $x \in \alpha$, $y \in \mathbb{Q}'$ og $y < x$, så $y \in \alpha$.
(3) Hvis $x \in \alpha$, så er $x < z$ for et $z \in \alpha$.

Ud fra definitionen ses det, at α ikke har noget største element, det vil sige, at supremum ikke ligger i α. Desuden giver punkt (2) følgende bemærkning, som vil blive benyttet løbende gennem dette kapitel.

4.1.2 Bemærkning:
(a) Hvis $x \in \alpha$ og $y \notin \alpha$, så er $x < y$.
(b) Hvis $z \notin \alpha$ og $z < w$, så er $w \notin \alpha$.

Vi har altså, at α udgør elementerne i $\mathbb{R}^*$, og et sådant snit svarer derfor til et reelt tal. Selvom et snit ikke har noget supremum, kan vi stadig finde det størst mulige heltal, som, multipliceret med et rationelt tal, stadig ligger i α.

4.1.3 Lemma:
Lad $\alpha \in \mathbb{R}^*$, og lad $x \in \mathbb{Q}'$, hvor $x > 0$. Så eksisterer der et heltal n, sådan at $n \cdot x \in \alpha$, men $(n+1) \cdot x \notin \alpha$.

Bevis:
Vi beviser ved modstrid. Vi vælger $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{Q}'$, hvor $x > 0$, og $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}'$, sådan at $r_1 \in \alpha$ og $r_2 \notin \alpha$. Vi konstruerer mængden

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid r_1 < n \cdot x \quad \text{og} \quad n \cdot x \in \alpha\}.$$

Vi antager, at A er ubegrænset, hvilket er ensbetydende med, at for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $n \cdot x \in \alpha$, men det medfører, at $n \cdot x < r_2$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi lader x og r_2 være givet ved $x = (p, q)$ og $r_2 = (p', q')$. Så har vi, at

$$n \cdot (p, q) < (p', q') \Leftrightarrow (n \cdot p \cdot q', 1) < (p' \cdot q, 1),$$

hvilket er ækvivalent med, at $n \cdot p \cdot q' < p' \cdot q$, men da $p \cdot q', p' \cdot q \in \mathbb{N}$, betyder det, at de naturlige tal er en begrænset mængde, hvilket er en modstrid. Derfor må A være begrænset, og man kan derfor vælge det største n, hvor $n \cdot x \in \alpha$, hvilket medfører, at $(n+1) \cdot x \notin \alpha$.■

Nu hvor vi har defineret snit, ønsker vi at introducere en ordning derpå, sådan at vi i sidste ende kan vise, at $\mathbb{R}^*$ er et ordnet legeme. Vi introducerer ordningen $<$, sådan at $\alpha < \beta$ betyder, at α er en ægte delmængde af β. Vi skal derfor tjekke, at $<$ overholder Definition A.2.1 i Appendiks A. Det er klart, at hvis $\alpha < \beta$ og $\beta < \gamma$, så er $\alpha < \gamma$, da en ægte delmængde af en ægte delmængde er en ægte delmængde. Desuden skal det gælde, at kun en af følgende udsagn er sande:

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta < \alpha.$$

Las os vise dette. Vi antager, at $\alpha \nless \beta$ og $\alpha \neq \beta$, og vi skal så vise, at så må det gælde, at $\beta < \alpha$. Vi ved altså, at α ikke er en delmængde af β. Dermed må der eksistere et $x \in \alpha$, hvor $x \notin \beta$. Hvis $y \in \beta$, så følger det, fra Bemærkning 4.1.2 (a), at $y < x$, da $x \notin \beta$. Og dermed må $y \in \alpha$, ifølge Definition 4.1.1 (2). Altså er $\beta \subset \alpha$, og da $\alpha \neq \beta$, må β være en ægte delmængde, altså er $\beta < \alpha$. Da vi nu har, at $<$ er en ordning på $\mathbb{R}^*$, er mængden $\mathbb{R}^*$ en ordnet mængde. For notationens skyld skriver vi indimellem $\alpha > \beta$ i stedet for $\beta < \alpha$.

For at vise, at $\mathbb{R}^*$ er et ordnet legeme, og ikke blot en ordnet mængde, skal vi indføre regneoperationerne derpå, men inden vi gør dette, viser vi, at $\mathbb{R}^*$ har supremumsegenskaben. Altså skal vi vise, at for en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}^*$, som er opadtil begrænset, eksisterer supremum i $\mathbb{R}^*$.

4.1.4 Sætning:
Mængden af de reelle tal $\mathbb{R}^*$ er fuldstændig.

Bevis:
Vi lader A være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}^*$ og antager, at $\beta \in \mathbb{R}^*$ er en øvre grænse for A. Vi lader γ være foreningen af alle $\alpha \in A$, det vil sige, at $x \in \gamma$, hvis og kun hvis $x \in \alpha$ for et $\alpha \in A$. Vi beviser, at $\gamma \in \mathbb{R}^*$, og at $\gamma = \sup(A)$.

Eftersom A er en ikke-tom mængde, må der eksistere et $\alpha_0 \in A$, hvor α_0 er ikke-tom, da det er et snit, og da $\alpha_0 \subset \gamma$, er γ også ikke-tom. Desuden er $\gamma \subset \beta$, da $\alpha \subset \beta$ for alle $\alpha \in A$, og dermed er $\gamma \neq \mathbb{Q}'$. Dermed opfylder γ punkt (1) i Definition 4.1.1. For at bevise punkt (2) og (3) vælger vi et $x \in \gamma$. Så ved vi, at $x \in \alpha_1$ for et $\alpha_1 \in A$. Hvis $y < x$, så har vi, at $y \in \alpha_1$, og dermed $y \in \gamma$, hvorfor punkt (2) er opfyldt. Hvis $z \in \alpha_1$ er valgt, sådan at $x < z$, så har vi, at $z \in \gamma$, da $\alpha_1 \subset \gamma$, hvilket opfylder punkt (3), og dermed er γ et snit, så $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Vi viser nu, at γ er supremum for A. Vi har, at γ må være en øvre grænse for A, da den er foreningsmængden af alle $\alpha \in A$. For at vise, at det er den mindste øvre grænse, antager vi, at $\delta < \gamma$. Så har vi et $w \in \gamma$, hvor $w \notin \delta$, men da $w \in \gamma$, så ved vi, at $w \in \alpha$ for et $\alpha \in A$, og dermed er $\delta < \alpha$. Altså er δ ikke en øvre grænse for A, hvilket betyder, at γ er den mindste øvre grænse, og dermed er $\gamma = \sup(A)$. Derfor eksisterer supremum i $\mathbb{R}^*$, hvorfor $\mathbb{R}^*$ er fuldstændig. ■

Vi har nu vist, at mængden af de reelle tal er en ordnet mængde med supremumsegenskaben, men vi mangler dog at vise, at det er et legeme. Derfor skal vi udvide regneoperationerne, som vi kender fra rationelle tal, sådan at vi kan addere og multiplicere snit.

4.2 Regneoperationer for snit

Dette afsnit har altså til formål at vise, at $\mathbb{R}^*$ er et legeme, som derved skal overholde Definition A.2.2 i Appendiks A. Vi starter med at definere addition af snit og viser, at de sædvanlige egenskaber for addition af rationelle tal også er gældende for addition af snit.

4.2.1 Definition (Addition af snit):
Lad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Så er summen af disse givet ved mængden

$$\alpha + \beta = \{z + w \mid z \in \alpha, w \in \beta\}.$$

Inden vi går i gang med at vise egenskaberne for addition, vil vi definere 0^* og 1^*, som vi senere beviser er neutralelementer for henholdsvis addition og multiplikation i $\mathbb{R}^*$.

4.2.2 Definition:
Snittet 0^* er givet ved mængden af alle negative rationelle tal.
Snittet 1^* er givet ved mængden af alle rationelle tal x, hvor $x < 1$.

Vi siger, at et reelt tal $\alpha > 0^*$ kaldes positivt, og mængden af alle positive, reelle tal betegnes $\mathbb{R}^*_+$. På samme måde har vi, at et reelt tal $\alpha < 0^*$ kaldes negativt, og mængden af alle negative, reelle tal betegnes $\mathbb{R}^*_-$. Det følger desuden fra definitionen på 0^*, at $\alpha > 0^*$ hvis og kun hvis $-\alpha < 0^*$. Vi er nu klar til at vise egenskaberne for addition, og vi starter med at vise, at $\mathbb{R}^*$ er lukket under addition.

4.2.3 Proposition:
For alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, gælder det, at $\alpha + \beta \in \mathbb{R}^*$.

Bevis:
Vi skal vise, at $\alpha + \beta$ er et snit, altså skal punkterne i Definition 4.1.1 være overholdt. Som det første har vi, at $\alpha + \beta$ er en ikke-tom delmængde af $\mathbb{Q}'$, da α og β er ikke-tomme. For at vise, at $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}'$, tager vi et $z' \notin \alpha$ og et $w' \notin \beta$. Så har vi, at $z < z'$ og $w < w'$ for alle $z \in \alpha$ og $w \in \beta$ ifølge Bemærkning 4.1.2 (a). Dermed er $z + w < z' + w'$ for alle z, w, hvilket betyder, at $z' + w' \notin \alpha + \beta$, hvorfor $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}'$, og dermed er (1) i Definition 4.1.1 opfyldt.

For at vise, at punkt (2) gælder, vælger vi et $x \in \alpha + \beta$, så kan vi skrive $x = z + w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$. Hvis $y < x$, så er $y - w < z$, hvilket betyder, at $y - w \in \alpha$, da α er et snit. Derfor har vi, at $y = (y - w) + w \in \alpha + \beta$. Til punkt (3) vælger vi et $x \in \alpha + \beta$, så har vi, at $x = z + w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$. Vi vælger $v \in \alpha$, sådan at $z < v$, så er $x = z + w < v + w$, og $v + w \in \alpha + \beta$, da $v \in \alpha$ og $w \in \beta$. ∎

Næste skridt er nu at vise, at den kommutative lov også er gældende for addition af snit.

4.2.4 Proposition:
For alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Bevis:
Da $\alpha + \beta$ er defineret som mængden af alle summerne $z + w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$, så er $\beta + \alpha$ mængden af alle summerne $w + z$. Vi viser, at $\alpha + \beta \subset \beta + \alpha$. Vi vælger et $x \in \alpha + \beta$, så har vi, at $x = z + w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$. Da den kommutative lov er gældende for de

rationelle tal, ved vi, at $z + w = w + z$ for alle $z, w \in \mathbb{Q}'$. Derfor har vi, at $x \in \beta + \alpha$. Den modsatte inklusion er tilsvarende. Dermed er $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. ■

Ved at benytte samme argumentation som ovenfor kan det bevises, at den associative lov også er gældende for reelle tal, da den er gældende for rationelle tal. Vi beviser først den distributive lov, når vi har introduceret multiplikation af snit. Derfor vil vi nu, som tidligere nævnt, bevise, at 0^* fungerer som neutralelementet for addition af snit.

4.2.5 Proposition:
For alle $\alpha \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at

$$\alpha + 0^* = 0^* + \alpha = \alpha.$$

Bevis:
Vi viser begge inklusioner. Hvis $z \in \alpha$ og $w \in 0^*$, så er $z + w < z$, da 0^* er mængden af alle negative, rationelle tal. Og dermed har vi, at $z + w \in \alpha$, ifølge Definition 4.1.1 (2). Derfor er $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

For at vise den modsatte inklusion vælger vi et $x, z \in \alpha$, sådan at $x < z$. Så har vi, at $x - z < 0$, og derfor $x - z \in 0^*$, og $x = z + (x - z) \in \alpha + 0^*$. Dermed er $\alpha \subset \alpha + 0^*$. ■

For at vise, at $\mathbb{R}^*$ er et legeme, skal vi desuden vise, at der eksisterer en additiv invers til ethvert snit.

4.2.6 Proposition:
For alle $\alpha \in \mathbb{R}^*$ eksisterer der en entydig additiv invers $-\alpha$, sådan at

$$\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0^*.$$

Bevis:
Vælg $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Vi konstruerer mængden

$$\beta = \{x \in \mathbb{Q}' \mid \exists r > 0, \text{ sådan at } -x - r \notin \alpha\},$$

og vi ønsker at bevise, at β er et snit, og at $\alpha + \beta = 0^*$. Hvis $w \notin \alpha$, så har vi, at $-x = w + 1 \notin \alpha$ ifølge Bemærkning 4.1.2 (b). Desuden er $-x - 1 = w + 1 - 1 = w \notin \alpha$, hvilket betyder, at $x \in \beta$, hvor vi har, at $r = 1$. Dermed er β en ikke-tom delmængde af $\mathbb{Q}'$. Vi viser, at $\beta \neq \mathbb{Q}'$ ved modstrid, hvor vi ønsker at vise, at hvis $y \in \alpha$, så er $-y \notin \beta$. Vi antager, at $y \in \alpha$ og $-y \in \beta$, men det betyder, at der eksisterer et $r > 0$, sådan at $-(-y) - r \notin \alpha$. Dette er i modstrid med at $y \in \alpha$, da $-(-y) - r = y - r < y$, og derfor må $-(-y) - r \in \alpha$ ifølge Definition 4.1.1 (2). Dermed overholder β punkt (1) af definitionen.

For at vise punkt (2) vælger vi et $x \in \beta$ og et $r > 0$, sådan at $-x - r \notin \alpha$. Hvis $y < x$, så er $-x - r < -y - r$, hvilket medfører, at $-y - r \notin \alpha$, og så er $y \in \beta$. Punkt (3) vises ved at vælge et $x \in \beta$ og et $r > 0$, sådan at $-x - r \notin \alpha$. Vi sætter $y = x + \frac{r}{2}$. Så har vi, at $x < y$, og at $-y - \frac{r}{2} = -x - r \notin \alpha$, dermed er $y \in \beta$. Dermed er β et snit, og nu skal vi blot vise, at det rent faktisk er den additive inverse til α.

Vi starter med at vise, at $\alpha + \beta \subset 0^*$. Tag $z \in \alpha$ og $w \in \beta$, så er $-w \notin \alpha$, da vi ellers vil få en modstrid, eftersom $w \in \beta$ betyder, at der eksisterer et $r > 0$, sådan at $-w - r \notin \alpha$, men dette er mindre end $-w$. Da $-w \notin \alpha$, er $z < -w$, og dermed er $z + w < 0$, hvilket betyder at $\alpha + \beta \subset 0^*$.

For at vise den modsatte inklusion vælger vi et $u \in 0^*$, og vi sætter $t = -\frac{u}{2} > 0$. Ifølge Lemma 4.1.3 eksisterer der et heltal n, sådan at $n \cdot t \in \alpha$, men $(n+1) \cdot t \notin \alpha$. Vi sætter $x = -(n+2) \cdot t$. Så har vi, at $x \in \beta$, da $-x - t = (n+2) \cdot t - t = (n+1) \cdot t \notin \alpha$. Så kan vi skrive u på formen

$$u = n \cdot t + x \in \alpha + \beta,$$

da $x = -(n+2) \cdot t$ og $t = -\frac{u}{2}$, og vi har, at $n \cdot t - (n+2) \cdot t = -2t = u$. Derfor er $0^* \subset \alpha + \beta$, og vi har, at $\alpha + \beta = 0^*$.

Vi viser nu entydighed af den additive inverse. Antag, at β og β' begge er additive inverse, så gælder det, at $\alpha + \beta = 0^*$ og $\alpha + \beta' = 0^*$. Da den associative lov er gældende, har vi, at

$$\beta = \beta + 0^* = \beta + (\alpha + \beta') = (\beta + \alpha) + \beta' = 0^* + \beta' = \beta'.$$

Denne β er derfor entydig og noteres $-\alpha$. ■

Vi har nu vist egenskaberne for addition af snit, og vi går videre til multiplikation. For at definere multiplikation af snit, starter vi med at definere multiplikation af positive, reelle tal og derefter udvide til alle de reelle tal.

4.2.7 Definition:
Lad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$. Så er produktet af disse givet ved mængden

$$\alpha \cdot \beta = \{x \in \mathbb{Q}' \mid \exists z, w > 0, \textit{ hvor } z \in \alpha, w \in \beta, \textit{ sådan at } x \leq z \cdot w\}.$$

Vi ønsker at vise, at egenskaberne for multiplikation i $\mathbb{R}^*_+$ er gældende, og vi starter med at vise, at $\mathbb{R}^*_+$ er lukket under multiplikation.

4.2.8 Proposition:
For alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$, gælder det, at $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^*_+$.

Bevis:
Vi skal vise, at $\alpha \cdot \beta$ er et snit, som derved skal overholde punkterne i Definition 4.1.1. Vi har, at $\alpha \cdot \beta$ er ikke-tom delmængde af $\mathbb{Q}'$, da α og β er ikke-tomme. For at vise, at $\alpha \cdot \beta \neq \mathbb{Q}'$, tager vi et $z' \notin \alpha$ og et $w' \notin \beta$. Ifølge Bemærkning 4.1.2 har vi, at $z < z'$ og $w < w'$ for alle $z \in \alpha$ og $w \in \beta$, og dermed er $x \leq z \cdot w < z' \cdot w' = y$ for alle z, w, da z' og w' nødvendigvis må være positive. Da $y > z \cdot w$, er $y \notin \alpha \cdot \beta$, hvilket betyder, at $\alpha \cdot \beta \neq \mathbb{Q}'$, og derved er punkt (1) opfyldt.

For at vise punkt (2) vælger vi et $x \in \alpha \cdot \beta$, som derved er på formen $x \leq z \cdot w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$. Hvis $y < x$, så har vi, at $y < z \cdot w$, og derved er $y \in \alpha \cdot \beta$. Punkt (3) vises ved at vælge et $x \in \alpha \cdot \beta$. Så har vi, at $x \leq z \cdot w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$. Vi vælger $v \in \alpha$, sådan at $z < v$. Så har vi, at $x \leq z \cdot w < v \cdot w$, hvor $v \cdot w \in \alpha \cdot \beta$, da $v \in \alpha$ og $w \in \beta$. ■

På samme måde som for addition viser vi, at kommutative lov også er gældende for multiplikation i $\mathbb{R}_+^*$.

4.2.9 Proposition:
For alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ gælder det, at
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

Bevis:
Vi vælger et $x \in \alpha \cdot \beta$. Så er $x \leq z \cdot w$ for et $z \in \alpha$ og $w \in \beta$, og da den kommutative lov er gældende for rationelle tal, har vi, at $z \cdot w = w \cdot z$. Derfor er $x \leq w \cdot z$, og $x \in \beta \cdot \alpha$. Den anden inklusion er tilsvarende. ■

Det er muligt at lave et tilsvarende bevis for den associative lov, da vi har, at den associative lov er gældende for de rationelle tal. Ligesom vi viste, at 0^* er neutralelementet for addition, vil vi nu vise, at snittet 1^* er neutralelementet for multiplikation i $\mathbb{R}_+^*$.

4.2.10 Proposition:
For alle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ har vi, at
$$\alpha \cdot 1^* = 1^* \cdot \alpha = \alpha.$$

Bevis:
Vi viser begge inklusioner. Først vises det, at $\alpha \cdot 1^* \subset \alpha$. Vi tager et $x \in \alpha \cdot 1^*$, hvilket medfører, at $x \leq z \cdot w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in 1^*$. Men da 1^* er mængden af alle rationelle tal mindre end 1, har vi, at $x \leq z \cdot w < z$, altså er $x \in \alpha$.

For at vise, at $\alpha \subset \alpha \cdot 1^*$, vælger vi et $x, z \in \alpha$, sådan at $x < z$. Så har vi, at $\frac{x}{z} < 1$, og derfor er $\frac{x}{z} \in 1^*$. Så har vi, at $x = z \cdot \frac{x}{z} \in \alpha \cdot 1^*$, da $z \in \alpha$ og $\frac{x}{z} \in 1^*$. ■

4.2.11 Proposition:
For alle $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ eksisterer der en entydig multiplikativ invers α^{-1}, sådan at
$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1^*.$$

Bevis:
Vi vælger $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ og konstruerer mængden
$$\beta = \{x \in \mathbb{Q}'_+ \mid \exists r > 1, \text{ sådan at } (x \cdot r)^{-1} \notin \alpha\}.$$

Vi ønsker at bevise, at β er et snit, og at $\alpha \cdot \beta = 1^*$. Vi starter med at vise, at β er en ikke-tom delmængde af $\mathbb{Q}'$. Hvis $w \notin \alpha$, så har vi, at $w > 0$, da $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, og desuden har vi, at $x^{-1} = w \cdot r \notin \alpha$, da $w < w \cdot r$, da $r > 1$. Og dermed er $x^{-1} > 0$, hvilket medfører, at $x > 0$. Vi har nu, at
$$(x \cdot r)^{-1} = x^{-1} \cdot r^{-1} = w \cdot r \cdot r^{-1} = w \notin \alpha,$$
altså er $x \in \beta$, og β er ikke-tom. Vi viser, at $\beta \neq \mathbb{Q}'$ ved at konstruere et element, som ikke ligger i β. Vi antager, at der findes et y, sådan at $y \in \alpha$ og $y^{-1} \in \beta$. Men hvis

$y^{-1} \in \beta$, så eksisterer der et $r > 1$, sådan at $y \cdot r^{-1} \notin \alpha$, men $r^{-1} < 1$, hvilket medfører, at $y \cdot r^{-1} < y \in \alpha$. Derfor er $y \cdot r^{-1} \in \alpha$, hvilket er en modstrid. Derfor må det gælde, at hvis $y \in \alpha$, så er $y^{-1} \notin \beta$.

Til punkt (2) vælger vi et $x \in \beta$, hvilket betyder, at der eksisterer et $r > 1$, sådan at $(x \cdot r)^{-1} \notin \alpha$. Hvis $y < x$, så har vi, at $(y \cdot r)^{-1} > (x \cdot r)^{-1}$, derfor er $(y \cdot r)^{-1} \notin \alpha$, hvilket betyder, at $y \in \beta$. Punkt (3) vises ved igen at vælge et $x \in \beta$ og et $r > 1$, sådan at $(x \cdot r)^{-1} \notin \alpha$. Vi sætter $y = x \cdot \frac{1+r}{2}$, så er $x < y$. Og vi har, at

$$\left(y \cdot \frac{2r}{r+1}\right)^{-1} = y^{-1} \cdot \frac{1+r}{2r} = x^{-1} \cdot \frac{2}{1+r} \cdot \frac{1+r}{2r} = x^{-1} \cdot r^{-1} \notin \alpha.$$

Derfor er $y \in \beta$, og vi har, at β er et snit, og vi viser nu, at det er en multiplikativ invers til α.

Vi viser begge inklusioner. Vi starter med at vise, at $\alpha \cdot \beta \subset 1^*$. Vi vælger et $x \in \alpha \cdot \beta$, så har vi, at $x \leq z \cdot w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$. Det betyder, at $w^{-1} \notin \alpha$, eftersom $w \in \beta$ medfører, at der eksisterer et $r > 1$, sådan at $(w \cdot r)^{-1} \notin \alpha$, men $(w \cdot r)^{-1} < w^{-1}$, og derfor må det gælde, at $w^{-1} \notin \alpha$. Derfor har vi, at $z < w^{-1}$, hvilket betyder, at $x \leq z \cdot w < 1$, og så må vi have, at $x \in 1^*$.

For at vise, at $1^* \subset \alpha \cdot \beta$, vælger vi et $u \in 1^*$. Vi har, at hvis $u \leq 0$, så gælder det, at $u \in \alpha \cdot \beta$, da $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$, og ifølge Proposition 4.2.8 er $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^*_+$. Derfor kan vi antage, at $0 < u < 1$. Vi viser nu, at der eksisterer et $n \in \mathbb{N}$, sådan at

$$u < 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}, \quad \forall m \geq n. \tag{4.1}$$

Lad $u < 1$ være givet ved $u = \frac{p}{q}$, hvor $0 < p < q$. Vi har, at $u = \frac{p}{q} < \frac{n}{n+1}$, hvis og kun hvis $p \cdot (n+1) < n \cdot q$, hvilket er ensbetydende med, at $p < n \cdot (q - p)$. Da det sidste er sandt, eftersom de naturlige tal er en ubegrænset mængde, må der eksistere et n, sådan at uligheden er gældende. Vi viser nu, at uligheden er gældende for alle $m \geq n$. Det vil sige, vi skal vise, at for alle $m \geq n$, så gælder det, at

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{m}{m+1}.$$

Ovenstående er sandt, hvis og kun hvis $n \cdot (m+1) \leq m \cdot (n+1)$, hvilket er ækvivalent med, at $n \leq m$. Derfor har vi, at uligheden er gældende for alle $m \geq n$.

Vi vælger nu $s \in \alpha$, hvor $s > 0$, og et $t \in \mathbb{Q}'$, sådan at $0 < t < \frac{s}{n}$. Så kan vi bruge Lemma 4.1.3, som siger, at der eksisterer et heltal m, sådan at $m \cdot t \in \alpha$, men $(m+1) \cdot t \notin \alpha$. Det må nødvendigvis gælde, at $m \geq n$, eftersom $m < n$ medfører, at $m \leq n - 1$, så vi har, at $m + 1 \leq n$, men så får vi, at $(m+1) \cdot t \leq n \cdot t < s$, hvilket betyder, at $(m+1) \cdot t \in \alpha$, hvilket er en modstrid. Derfor har vi, at $m \geq n$, og så kan vi benytte Ligning (4.1), sådan at

$$\frac{u}{m \cdot t} < \frac{m}{(m+1) \cdot m \cdot t} = \frac{1}{(m+1) \cdot t}. \tag{4.2}$$

Vi viser, at $\frac{u}{m \cdot t} \in \beta$. Vi vælger

$$r = \frac{\frac{1}{(m+1) \cdot t}}{\frac{u}{m \cdot t}} = \frac{m}{(m+1) \cdot u},$$

hvor vi har, at $r > 1$, på grund af uligheden i Ligning (4.2). Så har vi, at

$$\left(\frac{u}{m \cdot t} \cdot \frac{m}{(m+1) \cdot u}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{(m+1) \cdot t}\right)^{-1} = (m+1) \cdot t \notin \alpha.$$

Derfor må $\frac{u}{m \cdot t} \in \beta$, og så har vi, at $u = m \cdot t \cdot \frac{u}{m \cdot t} \in \alpha \cdot \beta$, og dermed er $1^* \subset \alpha \cdot \beta$. Altså har vi vist, at $\alpha \cdot \beta = 1^*$, og β er en multiplikativ invers til α.

Vi viser nu entydigheden. Antag, at både β og β' er multiplikative inverse til α. Det vil sige, at $\alpha \cdot \beta = 1^*$ og $\alpha \cdot \beta' = 1^*$. Men da den associative lov er gældende for multiplikation i $\mathbb{R}^*_+$, har vi, at

$$\beta = \beta \cdot 1^* = \beta \cdot (\alpha \cdot \beta') = (\beta \cdot \alpha) \cdot \beta' = 1^* \cdot \beta' = \beta'.$$

Derfor er β den multiplikative inverse til α, som noteres α^{-1}. ■

Inden vi udvider til alle reelle tal, beviser vi, at den distributive lov er gældende for $\mathbb{R}^*_+$.

4.2.12 Proposition:

For alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*_+$ gælder det, at

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Bevis:

Da $\mathbb{R}^*_+$ er lukket under både addition og multiplikation, har vi, at når $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*_+$, så er $\beta + \gamma, \alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \gamma \in \mathbb{R}^*_+$. Vi viser begge inklusioner. Først vises $\alpha \cdot (\beta + \gamma) \subset \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Vi vælger et $x \in \alpha \cdot (\beta + \gamma)$, så har vi, at $x \leq z \cdot u$, hvor $z \in \alpha$, $u \in \beta + \gamma$ og $u = w + v$, hvor $w \in \beta$ og $v \in \gamma$. Altså er $x \leq z \cdot (w + v)$, og da den distributive lov er gældende for rationelle tal, har vi, at $x \leq z \cdot w + z \cdot v$. Altså kan vi skrive $x \leq a + b$, hvor $a \in \alpha \cdot \beta$ og $b \in \alpha \cdot \gamma$, og dermed er $x \in \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

For at vise, at $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \subset \alpha \cdot (\beta + \gamma)$, vælger vi et $x \in \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Så har vi, at $x = a + b$, hvor $a \in \alpha \cdot \beta$ og $b \in \alpha \cdot \gamma$. Det vil sige, at $a \leq z \cdot w$, hvor $z \in \alpha$ og $w \in \beta$, og $b \leq z \cdot v$, hvor $z \in \alpha$ og $v \in \gamma$. Så er $x \leq z \cdot w + z \cdot v$, og igen har vi, at den distributive lov er gældende for rationelle tal, så derfor er $x \leq z \cdot (w + v)$, altså er $x \in \alpha \cdot (\beta + \gamma)$, da $w + v \in \beta + \gamma$. ■

Da vi hidtil har restringeret os til multiplikation i $\mathbb{R}^*_+$, mangler vi at inddrage de negative reelle tal for at fuldende multiplikation i $\mathbb{R}^*$. Vi udvider ved at benytte Definition 4.2.7 samt den additive inverse, såfremt snittet er negativt.

4.2.13 Definition:

Lad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Så har vi, at $\alpha \cdot 0^* = 0^* \cdot \alpha = 0^*$. Og yderligere fås det, at

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta) & \textit{hvis } \alpha < 0^* \textit{ og } \beta < 0^* \\ -\big((-\alpha) \cdot \beta\big) & \textit{hvis } \alpha < 0^* \textit{ og } \beta > 0^* \\ -\big(\alpha \cdot (-\beta)\big) & \textit{hvis } \alpha > 0^* \textit{ og } \beta < 0^*. \end{cases}$$

Definitionen giver mening, da vi har defineret produkterne på højresiden i Definition 4.2.7. Og da vi netop har vist, at egenskaberne for multiplikation er gældende i $\mathbb{R}^*_+$, kan vi udvide til $\mathbb{R}^*$ ved at bruge, at for alle $\gamma \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at $\gamma = -(-\gamma)$, da den additive inverse til den additive inverse netop er γ på grund af entydigheden. Vi starter med at vise, at $\mathbb{R}^*$ er lukket under multiplikation.

4.2.14 Proposition:
For alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^*$.

Bevis:
Vi har gennemgået beviset for $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^*_+$. Vi ved, at $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$ er et snit på grund af Definition 4.2.13, og at den additive inverse er et snit. ■

Vi kan nu udvide den kommutative lov til at gælde hele $\mathbb{R}^*$.

4.2.15 Proposition:
For alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

Bevis:
Igen har vi bevist, at dette gælder i $\mathbb{R}^*_+$. Vi kigger derfor på de tre andre tilfælde.

- Lad $\alpha < 0^*$ og $\beta < 0^*$. Vi bruger Definition 4.2.13, og at $-\alpha > 0^*$ hvis og kun hvis $\alpha < 0^*$, og vi får, at

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta) = (-\beta) \cdot (-\alpha) = \beta \cdot \alpha.$$

- Lad $\alpha < 0^*$ og $\beta > 0^*$. Vi bruger samme argumentation som i ovenstående og får, at

$$\alpha \cdot \beta = -\big((-\alpha) \cdot \beta\big) = -\big(\beta \cdot (-\alpha)\big) = \beta \cdot \alpha.$$

- Lad $\alpha > 0^*$ og $\beta < 0^*$. Vi bruger samme argumentation som i ovenstående og får, at

$$\alpha \cdot \beta = -\big(\alpha \cdot (-\beta)\big) = -\big((-\beta) \cdot \alpha\big) = \beta \cdot \alpha.$$ ■

Beviset for associativitet er tilsvarende, derfor går vi videre til at vise, at 1^* også er neutralelement for multiplikation i $\mathbb{R}^*$.

4.2.16 Proposition:
For alle $\alpha \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at

$$\alpha \cdot 1^* = 1^* \cdot \alpha = \alpha.$$

Bevis:
Som tidligere ved vi, at ovenstående gælder for positive snit, derfor viser vi kun for $\alpha < 0^*$. Det er klart, at $1^* > 0^*$, og vi benytter Definition 4.2.13:

$$\alpha \cdot 1^* = -\big((-\alpha) \cdot 1^*\big) = -(-\alpha) = \alpha.$$ ■

Vi viser nu, at vi kan finde en multiplikativ invers til alle negative snit.

4.2.17 Proposition:
For alle $\alpha \in \mathbb{R}^*$, hvor $\alpha \neq 0^*$, eksisterer der en multiplikativ invers α^{-1}, sådan at

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1^*.$$

Bevis:
Vi har fundet den multiplikative inverse for alle positive snit. Derfor antager vi, at $\alpha < 0^*$, hvilket betyder, at $-\alpha > 0^*$. Så ved vi, at den multiplikative inverse til $-\alpha$ er $(-\alpha)^{-1}$, det vil sige, at

$$(-\alpha) \cdot (-\alpha)^{-1} = 1^*.$$

Ved at bruge Definition 4.2.13 får vi, at

$$\alpha \cdot (-\alpha)^{-1} = -\big((-\alpha) \cdot (-\alpha)^{-1}\big) = -1^*.$$

Vi kan nu gange igennem med -1^*, hvor vi har, at $(-1^*) \cdot (-1^*) = 1^*$. Så får vi, at

$$(-1^*) \cdot \alpha \cdot (-\alpha)^{-1} = 1^*$$

Ved at benytte den associative lov samt definitionen på multiplikation får vi, at

$$\alpha \cdot \big((-1^*) \cdot (-\alpha)^{-1}\big) = 1^*$$
$$\alpha \cdot \Big(- \big(1^* \cdot (-\alpha)^{-1}\big)\Big) = 1^*$$

Eftersom 1^* er neutralelementet for multiplikation, opnås følgende:

$$\alpha \cdot \big(- (-\alpha)^{-1}\big) = 1^*,$$

hvor det gælder, at $-(-\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}$ på grund af entydigheden af den inverse. Altså er α^{-1} den multiplikative inverse for alle $\alpha \in \mathbb{R}^*$. ∎

Vi har nu gennemgået egenskaberne for addition og multiplikation af snit, og vi mangler blot at vise, at den distributive lov er gældende i $\mathbb{R}^*$.

4.2.18 Proposition:
For alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ gælder det, at

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Bevis:
Beviset skal deles op i forskellige tilfælde, men da vi allerede har bevist det for positive snit, vælger vi kun at vise ét af tilfældene.

Antag, $\alpha > 0^*$, $\beta < 0^*$ og $\beta + \gamma > 0^*$. Så har vi, at $\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$, og at $\gamma > 0^*$. Eftersom den distributive lov er gældende for $\mathbb{R}^*_+$, har vi, at

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \big((\beta + \gamma) + (-\beta)\big) = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta). \tag{4.3}$$

Fra Definition 4.2.13 har vi, at $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)$, derfor kan vi lægge $\alpha \cdot \beta$ til på begge sider af Ligning (4.3) og få

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma). \qquad \blacksquare$$

Da vi nu har udvidet alle regneoperationerne til $\mathbb{R}^*$, har vi, at $\mathbb{R}^*$ er et legeme, og desuden også en ordnet mængde med supremumsegenskaben. For at vise, at $\mathbb{R}^*$ er et ordnet legeme, skal vi vise, at Definition A.2.3 i Appendiks A er overholdt. Vi skal altså vise, at ordningen $<$ er kompatibel med addition, men for at gøre dette får vi brug for følgende lemma.

4.2.19 Lemma:
For alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, gælder det, at hvis $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, så er $\beta = \gamma$.

Bevis:
Vi antager, at $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, og så kan vi benytte, at vi har bevist, at 0^* er neutralelementet for addition, at den associative lov er gældende, og at der eksisterer en additiv invers til ethvert snit:

$$\begin{aligned} \beta &= 0^* + \beta = (-\alpha + \alpha) + \beta = -\alpha + (\alpha + \beta) \\ &= -\alpha + (\alpha + \gamma) = (-\alpha + \alpha) + \gamma = 0^* + \gamma = \gamma. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Vi er nu i stand til at vise, at $\mathbb{R}^*$ overholder punkt (a) af Definition A.2.3.

4.2.20 Proposition:
Hvis $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ og $\beta < \gamma$, så er $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Bevis:
Det følger af Definition 4.2.1, at $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$. Desuden giver Lemma 4.2.19, at hvis $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, så måtte $\beta = \gamma$. Derfor må det gælde, at $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. $\blacksquare$

Vi har også, at punkt (2) af Definition A.2.3 er overholdt, da vi har vist, at $\mathbb{R}^*_+$ er lukket under multiplikation, altså at hvis $\alpha, \beta > 0^*$, så er $\alpha \cdot \beta > 0^*$. Altså er $\mathbb{R}^*$ et ordnet legeme. Nu mangler vi blot at vise, at $\mathbb{Q}'$ er et dellegeme af $\mathbb{R}^*$, hvilket vi gør ved at introducere rationelle snit.

4.3 Rationelle snit

Til ethvert rationelt tal $r \in \mathbb{Q}'$ associerer vi nu mængden r^*, som består af alle de $x \in \mathbb{Q}'$, hvor $x < r$. Vi har, at r^* er et snit, da den overholder Definition 4.1.1, og vi kalder r^* et rationelt snit. Vi vil nu vise, at disse rationelle snit er ækvivalente med rationelle tal, derfor skal vi vise, at sum, produkt og orden er bevaret.

4.3.1 Proposition:
For alle rationelle snit r^* og s^* gælder det, at
(a) $r^* + s^* = (r + s)^*$,

(b) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$,

(c) $r^* < s^*$ *hvis og kun hvis* $r < s$.

Bevis:

(a) Vi viser først, at $r^* + s^* \subset (r+s)^*$. Vælg $x \in r^* + s^*$, så kan vi skrive $x = u + v$, hvor $u < r$ og $v < s$. Dermed er $x < r + s$, hvilket betyder, at $x \in (r+s)^*$. Nu viser vi, at $(r+s)^* \subset r^* + s^*$. Antag $x \in (r+s)^*$, så er $x < r + s$. Vi vælger t, sådan at

$$2t = r + s - x, \tag{4.4}$$

og vi sætter

$$r' = r - t, \quad s' = s - t.$$

Så har vi, at $r' \in r^*$ og $s' \in s^*$, og kan vi erstatte r og s i Ligning (4.4), således:

$$2t = r' + t + s' + t - x,$$

hvilket betyder, at $x = r' + s'$, og dermed har vi, at $x \in r^* + s^*$.

(b) Vi deler beviset op i tre tilfælde.

- Antag, at $r^* > 0^*$ og $s^* > 0^*$. Først viser vi, at $r^* \cdot s^* \subset (r \cdot s)^*$. Vi vælger et $x \in r^* \cdot s^*$, så har vi, at $x \leq u \cdot v$, hvor $u \in r^*$ og $v \in s^*$. Så er $u < r$ og $v < s$, og $x \leq u \cdot v < r \cdot s$, og altså er $x \in (r \cdot s)^*$.

  Så viser vi, at $(r \cdot s)^* \subset r^* \cdot s^*$. Vælg $x \in (r \cdot s)^*$. Vi kan antage, at $x > 0$, da $r^* \cdot s^* > 0^*$, og derfor er det klart, at $x \in r^* \cdot s^*$, såfremt $x \leq 0$. Vi har altså, at $0 < x < r \cdot s$, og vi vælger t, sådan at $t^2 = \frac{r \cdot s}{x} > 1$, så er $t > 1$. Vi sætter

  $$r' = \frac{r}{t}, \quad s' = \frac{s}{t},$$

  så har vi, at $r' < r$ og $s' < s$, og vi kan erstatte r og s, således at

  $$t^2 = \frac{r' \cdot t \cdot s' \cdot t}{x},$$

  så er $x = r' \cdot s'$, og derved er $x \in r^* \cdot s^*$.
- Antag, at $r < 0^*$ og $s < 0^*$. Vi benytter Definition 4.2.13, og at vi netop har vist det for positive r og s. Vi får, at

  $$r^* \cdot s^* = (-r^*) \cdot (-s^*) = \big((-r) \cdot (-s)\big)^* = (r \cdot s)^*.$$

- Antag, at $r < 0^*$ og $s > 0^*$. Igen benytter vi definition for multiplikation:

  $$r^* \cdot s^* = -\big((-r^*) \cdot s^*\big) = -\big((-r \cdot s)^*\big) = (r \cdot s)^*,$$

  hvor $-\big((-r \cdot s)^*\big)$ er den additive inverse til den additive inverse.

(c) Hvis $r < s$, så har vi, at $r \in s^*$, men $r \notin r^*$. Derfor må vi have, at $r^* < s^*$, hvis $r < s$. Hvis $r^* < s^*$, eksisterer der et $x \in s^*$, sådan at $x \notin r^*$. Derfor må det gælde, at $r \leq x < s$. ■

Vi konstruerer nu mængden $\mathbb{Q}^*$, som svarer til mængden af de rationelle snit. Da vi netop har vist, at sum, produkt og orden er bevaret, når vi erstatter rationelle tal med rationelle snit, har vi, at det ordnede legeme $\mathbb{Q}'$ er isomorf til det ordnede legeme $\mathbb{Q}^*$. På den måde kan vi identificere $\mathbb{Q}'$ med $\mathbb{Q}^*$, hvilket betyder, at vi kan anse $\mathbb{Q}'$ som et dellegeme af $\mathbb{R}^*$. Dermed er konstruktionen af de reelle tal ved hjælp af Dedekind-snit fuldendt, og vi ønsker nu, som tidligere nævnt, at sammenligne de to konstruktioner.

4.4 Sammenligning af konstruktionerne

I dette afsnit vil vi sammenligne de to konstruktioner af mængden af de reelle tal og argumentere for, at de er ækvivalente, og at de to mængder $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^*$ dermed er isomorfe. Vi har tidligere vist, at begge mængder er ordnede legemer med supremumsegenskaben, derfor skal vi blot finde en isomorfi imellem dem.

Vi starter med at argumentere for, at alle rationelle snit kan skrives som periodiske decimaltal og omvendt, da vi så har en isomorfi mellem $\mathbb{Q}$ fra Kapitel 3 og $\mathbb{Q}^*$. Først og fremmest har vi netop vist, at rationelle snit er isomorfe med $\mathbb{Q}'$, som er defineret som mængden af indbyrdes primiske talpar (p, q). Så har vi, at Sætning 3.2.4 direkte giver, at et periodisk decimaltal er et rationelt snit og omvendt.

Vi skal så vise, at irrationelle decimaltal er ækvivalente med irrationelle snit. Vi tager et $[x] \in \mathbb{I}$, så eksisterer der et rationelt tal r_x, hvor $[x] < r_x$. Vi konstruerer mængden

$$M_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq [x]\},$$

som er opadtil begrænset af r_x. Desuden har vi mængden

$$M_x^* = \{r^* \mid r \in M_x\},$$

som er et en begrænset mængde, som derved har et supremum. Vi vil vise, at afbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, som er givet ved

$$f([x]) = \begin{cases} x^*, & \text{for } [x] \in \mathbb{Q} \\ \sup(M_x^*), & \text{for } [x] \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

er en bijektiv afbildning. Vi har allerede vist, at afbildningen er bijektiv for alle $[x] \in \mathbb{Q}$. Derfor skal vi kun vise det for $[x] \in \mathbb{I}$. Vi viser først, at f er injektiv. Vi tager $[x_1], [x_2] \in \mathbb{I}$ og antager, at $[x_1] \neq [x_2]$, sådan at $[x_1] < [x_2]$. Så har vi, at der eksisterer endelige decimaltal t_1 og t_2, som derved også er rationelle, sådan at $[x_1] < [t_1] < [t_2] < [x_2]$, og $t_1, t_2 \in M_{x_2}$. Det medfører, at $t_1^* < t_2^*$ ifølge Proposition 4.3.1, og vi har, at $t_1^*, t_2^* \in M_{x_2}^*$. Derfor er $t_1^* < \sup(M_{x_2}^*)$, og desuden er t_1^* en øvre grænse for $M_{x_1}^*$. Så har vi at $\sup(M_{x_1}^*) \leq t_1^* < \sup(M_{x_2}^*)$, og dermed er $f([x_1]) \neq f([x_2])$.

For at vise, at f er surjektiv, tager vi et $\alpha \in \mathbb{I}^*$, hvor $\mathbb{I}$ er mængden af alle irrationelle snit. Så eksisterer der rationelle snit r_n^*, hvor $r_n^* < \alpha$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Desuden er $\alpha = \sup\{r_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$. Det medfører, at mængden $\{r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N}\}$ er opadtil begrænset og derved har et supremum. Vi sætter $[y] = \sup\{r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Og vi skal vise, at $f([y]) = \sup(M_y^*) = \alpha$.

Først viser vi, at α er en øvre grænse for M_y^*, og bagefter viser vi, at det er den mindste øvre grænse. Vi tager $r^* \in M_y^*$. Det medfører, at der eksisterer et $n \in \mathbb{N}$, sådan at $r < r_n$, fordi $r_n \nearrow [y]$. Det betyder, at $r^* < r_n^*$ ifølge Proposition 4.3.1, og dermed er α en øvre grænse. For alle $\beta < \alpha$ eksisterer der et $n \in \mathbb{N}$, sådan at $\beta < r_n^* \leq \alpha$ fordi $\alpha = \sup\{r_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dermed er α den mindste øvre grænse for M_y^*. Hermed er funktionen surjektiv, og vi har derfor en bijektiv afbildning, som derved er en isomorfi mellem mængderne.

Kardinalitet

KAPITEL 5

Da vi i de foregående kapitler har konstrueret mængderne af de reelle tal, de rationelle tal og de irrationelle tal, er vi nu interesserede i at undersøge deres kardinalitet og sammenligne disse. Eftersom vi netop har vist i Kapitel 4, at $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^*$ er ækvivalente mængder, tager vi udgangspunkt i $\mathbb{R}$, når vi skal undersøge kardinaliteten. Dette kapitel er baseret på Kapitel 2 i *Analysis With an Introduction to Proof* (Lay 2014).

5.1 Tællelig eller overtællelig

I dette afsnit er vi interesserede i at vurdere, om mængderne $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ og $\mathbb{I}$ er tællelige eller overtællelige. For at sammenligne kardinaliteter af mængder har vi nedenstående definition.

5.1.1 Definition:
Mængderne A og B har samme kardinalitet, hvis der eksisterer en bijektiv afbildning $h\colon A \to B$. Dette kan skrives som $|A| = |B|$ eller $A \sim B$.

For at vurdere om en mængde er tællelig eller overtællelig, kan vi sammenligne mængden med mængden af de naturlige tal.

5.1.2 Definition:
En mængde A er tællelig, hvis $A \sim \mathbb{N}$. En mængde er overtællelig, såfremt den ikke har samme kardinalitet som de naturlige tal.

Hvis A er tællelig, så kan mængden arrangeres på listeform, sådan at $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, hvilket vi benytter i dette afsnit. Derfor kan vi benytte Definition 5.1.1 til at vurdere om en mængde er tællelig eller overtællelig. Dog er definitionen ikke altid praktisk, derfor vil vi bevise Cantor-Schröder-Bernstein-sætningen, da den netop sikrer, at det er tilstrækkeligt at finde to injektive afbildninger mellem to mængder frem for en bijektiv afbildning. Beviset er baseret på forelæsningsnoter fra Cornell University (George m.fl. 2015).

5.1.3 Sætning (Cantor-Schröder-Bernstein-sætningen):
For to mængder A og B har vi, at hvis der eksisterer en injektiv afbildning $f\colon A \to B$ og en injektiv afbildning $g\colon B \to A$, medfører det, at der eksisterer en bijektiv afbildning $h\colon A \to B$.

Bevis:
Vi antager, at der eksisterer en injektiv afbildning $f\colon A \to B$ og en injektiv afbildning $g\colon B \to A$. Vi vil nu konstruere en bijektiv afbildning $h\colon A \to B$ ud fra disse. For at konstruere h, skal vi benytte os af kæder af elementer som fås ved at bruge f og g gentagne gange.

Kæden for et element $x \in A$ indeholder $x, f(x), g(f(x)), f(g(f(x)))$ og så videre. Desuden indeholder kæden også ethvert element, der kan opnås ved at gå baglæns igennem kæden. Det vil sige, at hvis der eksisterer et y, sådan at $g(y) = x$, så er y også en del af kæden. Eftersom g ikke er surjektiv, kan vi ikke være sikre på eksistensen af et sådant y. Dog har vi, at hvis der eksisterer et sådan y, må det være entydigt, eftersom g er injektiv. Hvis y eksisterer, kalder vi det for $y = g^{-1}(x)$. Afbildningen $g^{-1}\colon A \to B$ er en partiel afbildning, da g ikke er surjektiv, og dermed afbilder g^{-1} ikke alle elementer i definitionsmængden. Derfor har vi, at kæden for x også indeholder elementerne $f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$ og så videre.

Der findes forskellige typer af kæder, og vi vil skelne mellem disse ved at lave en opdeling i fire typer, hvor vi undersøger, hvad der sker, når man går baglæns gennem kæden. Det vil sige, vi ser på $x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$ og så videre. Vi opdeler i nedenstående typer:

1. Kæder, der danner løkker.
2. Kæder, der går baglæns i uendelighed uden gentagelser.
3. Kæder, der stopper i A. Det vil sige, at de stopper med et x, hvor $g^{-1}(x)$ ikke er defineret.
4. Kæder, der stopper i B. Det vil sige, at de stopper med et $y = g^{-1}(x)$, hvor $f^{-1}(y)$ ikke er defineret.

Bemærk, at ethvert element i A og B tilhører præcist én af disse kæder. Nu er vi klar til at konstruere afbildningen h:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } x \text{ tilhører en kæde af type } 1, 2 \text{ eller } 3 \\ g^{-1}(x) & \text{hvis } x \text{ tilhører en kæde af type } 4. \end{cases}$$

Her har vi, at $g^{-1}(x)$ er defineret, da vi ellers har, at x ville tilhøre en kæde af type 3. Vi skal nu vise, at h er bijektiv.

Vi viser først, at h er injektiv. Altså skal vi vise, at $h(x_1) = h(x_2)$ medfører, at $x_1 = x_2$, så lad os antage, at $h(x_1) = h(x_2)$. Vi har, at $h(x)$ altid er i samme kæde som x grundet konstruktionen. Derfor har vi, at når $h(x_1) = h(x_2)$, så må x_1 og x_2 også være i samme kæde. Vi har nu to muligheder. Hvis x_1 og x_2 tilhører en kæde af type $1, 2$ eller 3, så er $h(x_1) = f(x_1)$ og $h(x_2) = f(x_2)$, og desuden er

$$f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2).$$

Da f er en injektiv afbildning, følger det, at $x_1 = x_2$. Hvis x_1 og x_2 tilhører en kæde af type 4, så er $h(x_1) = y_1$, hvor $g(y_1) = x_1$, og $h(x_2) = y_2$, hvor $g(y_2) = x_2$. Eftersom

$$y_1 = h(x_1) = h(x_2) = y_2,$$

må det gælde, at

$$x_1 = g(y_1) = g(y_2) = x_2.$$

Derfor har vi nu vist i begge tilfælde, at når $h(x_1) = h(x_2)$, så er $x_1 = x_2$, og dermed er h injektiv.

Nu viser vi, at h er surjektiv, det vil sige, at givet et arbitrært $y \in B$, skal vi finde et $x \in A$, hvor $h(x) = y$. Vi ser på kæden, der indeholder y. Igen har vi to muligheder. Hvis kæden er af type $1, 2$ eller 3, så ved vi, at der eksisterer et x, sådan at $f(x) = y$. Eftersom x og y er i den samme kæde, så må kæden for x også være af type $1, 2$ eller 3, og dermed er $h(x) = f(x) = y$. Hvis kæden er af type 4, så ved vi, at $g(y)$ også tilhører denne kæde. Så har vi, at $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$. Derfor eksisterer der et x, som bliver afbildet over i y, og det er præcis $g(y)$.

Vi har nu i begge tilfælde fundet et element i A, som bliver afbildet over i y, og derfor er h surjektiv. Da vi nu har vist, at h både er injektiv og surjektiv, har vi konstrueret en bijektiv afbildning. ■

Med ovenstående sætning har vi vist, at det er nok at finde to injektive afbildninger for at bevise, at to mængder har samme kardinalitet. Vi viser med et eksempel, hvordan man kan konstruere den bijektive afbildning ud fra to injektive afbildninger i nedenstående eksempel.

5.1.4 Eksempel:
Vi vil vise, at mængderne, der består af henholdsvis de ulige og lige positive heltal, har samme kardinalitet. Vi har altså mængderne

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

Vi har to injektive afbildninger: $f\colon A \to B$, hvor $f(x) = 4x$, og $g\colon B \to A$, hvor $g(y) = y+3$, og vi vil benytte Sætning 5.1.3 til at konstruere en bijektiv afbildning $h\colon A \to B$. For at gøre dette skal vi finde funktionsværdien til ethvert element i definitionsmængden. Vi vil undersøge, hvilken af de fire typer kæder, der er tale om. Altså starter vi med $x = 1$, og bruger afbildningen g^{-1} for at se, om der findes en y, sådan at $g(y) = x$. Hvis der ikke findes en sådan y, så slutter kæden i A, og vi har en type 3 kæde. Dermed tager vi $g^{-1}(1)$, men dette er ikke defineret, derfor lader vi $h(1) = f(1) = 4$.

Dernæst kigger vi på $x = 3$. Igen er $g^{-1}(3)$ ikke defineret, derfor er $h(3) = f(3) = 12$. Så kigger vi på $x = 5$, hvor vi har, at $g^{-1}(5) = 2 \in B$, hvilket er defineret. Derfor tager vi $f^{-1}(2)$, men dette er ikke defineret. Derfor er dette en kæde af type 4, så vi har, at $h(5) = g^{-1}(5) = 2$. Vi fortsætter med $x = 7$, og tager $g^{-1}(7) = 4$, da dette er defineret, fortsætter vi og tager $f^{-1}(4) = 1$, og vi ved fra tidligere, at $g^{-1}(1)$ ikke er defineret, derfor har vi, at $x = 1$ og $x = 7$ er i den samme kæde, og at $h(7) = f(7) = 28$.

Hvis vi fortsatte med alle elementerne i A, ville vi til sidst få en bijektiv afbildning h. I dette tilfælde er det dog forholdsvist simpelt at se, at vi kunne benytte den bijektive afbildning $l(x) = x + 1$. ◀

Vi er nu i stand til at vurdere tælleligheden af de rationelle tal ved at benytte Definition 5.1.1 og Sætning 5.1.3.

5.1.5 Sætning:
Mængden af de rationelle tal $\mathbb{Q}$ er tællelig.

Bevis:
Vi benytter Sætning 5.1.3, hvor det er nok at finde en injektiv afbildning $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ og en injektiv afbildning $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, da der der så eksisterer en bijektiv afbildning $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Vi lader $f\left(\frac{p}{q}\right) = 2^{|p|} \cdot 3^q \cdot 5^{\operatorname{sign}(p)+1}$, hvor $\operatorname{sign}(p) = \pm 1$ alt efter fortegnet på p, og $g(n) = n$. Det er klart, at g er injektiv, og for at vise, at f er injektiv, benytter vi os af, at ethvert heltal har en entydig primtalsfaktorisering. Dermed har vi, at det gælder, at

$$f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) \Leftrightarrow 2^{|p_1|} \cdot 3^{q_1} \cdot 5^{\operatorname{sign}(p_1)+1} = 2^{|p_2|} \cdot 3^{q_2} \cdot 5^{\operatorname{sign}(p_2)+1}$$

hvilket medfører, at $p_1 = p_2$ og $q_1 = q_2$. Dette ses, da vi som det første må have, at $|p_1| = |p_2|$, for hvis $|p_1| > |p_2|$, kan vi dividere med $2^{|p_2|}$ på begge sider, og så vil ende med et lige tal på venstresiden og et ulige tal på højresiden, hvilket er en modstrid. Derudover må p_1 og p_2 have samme fortegn, for hvis $p_1 > 0$ og $p_2 < 0$, må vi have, at $5^{\operatorname{sign}(p_1)+1} = 5^2 \neq 5^0 = 5^{\operatorname{sign}(p_2)+1}$. Til sidst må vi så få, at $q_1 = q_2$, da $3^{q_1} = 3^{q_2}$.

Da vi nu har to injektive afbildninger, ved vi, at der eksisterer en bijektiv afbildning $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, og dermed er $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. ■

Det viser sig, at selvom mængden af de rationelle tal er tællelig, så er $\mathbb{R}$ overtællelig.

5.1.6 Sætning:
Mængden af de reelle tal $\mathbb{R}$ er overtællelig.

Bevis:
Vi antager det modsatte, altså at $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$, og dermed kan vi arrangere elementerne i $\mathbb{R}$ på listeform således:

$$\mathbb{R} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Vi vil nu vise, at der eksisterer et element $r^* \in \mathbb{R}$, hvor $r^* \neq r_j$, for $j \geq 1$. Vi har, at r_j kan skrives som et decimaltal på følgende måde

$$r_j = r_{j,N} r_{j,N-1} \dots r_{j,1} r_{j,0}, r_{j,-1} \dots,$$

og vi kan nu konstruere r^*, hvor vi får decimalerne r^*_{-j} ud fra r_j for alle j, sådan at

$$r^*_{-j} = (r_{j,-j} + 2) \mod 10.$$

Da forskellen mellem to elementer i det samme spring maksimalt kan være 1, sikrer vi os, at selv hvis r_j er en del af et spring, så vil r^* ikke være en del af samme spring, da vi lægger 2 til. Dermed har vi elementet

$$r^* = 0, r^*_{-1} r^*_{-2} r^*_{-3} \dots,$$

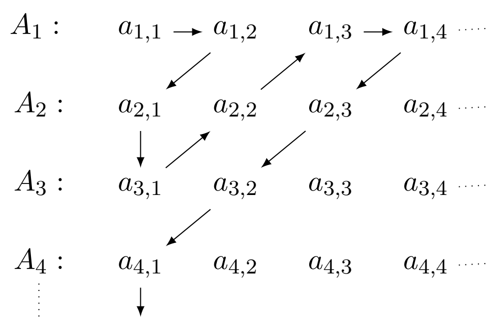
som er et reelt tal, men som har mindst et decimal forskelligt fra hver eneste $r_j \in \mathbb{R}$, hvilket er en modstrid med, at $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$. ■

Vi ønsker nu at vise, at de irrationelle tal er overtællelige. Til det benytter vi følgende to resultater.

5.1.7 Proposition:
Den uendelige foreningsmængde af tællelige mængder er tællelig. Det vil sige, at hvis $A_n \sim \mathbb{N}$, for $n \geq 1$, så er

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \mathbb{N}.$$

Bevis:
Vi opstiller elementerne i hver A_n i et gitter, som set på Figur 2.



Figur 2. Gitter

Ved at følge pilene, kan vi arrangere elementerne i foreningsmængden på listeform således:

$$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{3,1}, a_{2,2}, a_{1,3}, \ldots,$$

og dermed er $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \mathbb{N}$. ■

Inden vi kan gå videre til næste resultat, skal vi først introducere mængderne

$$\mathbb{I}_m = \mathbb{Q} + m \cdot \sqrt{2} \subset \mathbb{I}, \quad \forall m \geq 1,$$

da disse benyttes til at vise, at $\mathbb{I}$ er overtællelig.

5.1.8 Lemma:
De irrationelle mængder $\mathbb{I}_m$ og $\mathbb{I}_n$ er disjunkte for $m \neq n$, det vil sige, at

$$\mathbb{I}_m \cap \mathbb{I}_n = \emptyset.$$

Bevis:
Vi antager, at der eksisterer et $x \in \mathbb{I}_m \cap \mathbb{I}_n$. Det medfører, at der eksisterer $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$, sådan at

$$x = y_1 + m \cdot \sqrt{2} = y_2 + n \cdot \sqrt{2},$$

men så kan vi skrive

$$\sqrt{2} = \frac{y_1 - y_2}{n - m},$$

hvilket betyder, at $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, men dette er i modstrid med Sætning 3.2.6. Dermed kan der ikke eksistere et sådant x. ■

Vi viser nu, at mængden af de irrationelle har samme kardinalitet som mængden af de reelle tal, selvom de er en delmængde.

5.1.9 Sætning:
Mængden af de irrationelle tal $\mathbb{I}$ er overtællelig, altså er $\mathbb{R} \sim \mathbb{I}$.

Bevis:
Ifølge Definition 5.1.1 skal vi finde en bijektion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, da $\mathbb{R}$ og $\mathbb{I}$ så har samme kardinalitet. Vi definerer afbildningen

$$h(x) = \begin{cases} x, & \forall x \in \mathbb{I} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n \right) \\ x + \sqrt{2}, & \forall x \in \mathbb{Q} \\ x + \sqrt{2}, & \forall x \in \mathbb{I}_1 \\ x + \sqrt{2}, & \forall x \in \mathbb{I}_2. \\ \vdots \end{cases}$$

Dermed sender h et element fra $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{I}_1$, og et element fra $\mathbb{I}_1$ ind i $\mathbb{I}_2$, og et element fra $\mathbb{I}_2$ ind i $\mathbb{I}_3$ og så videre. Hvis x ikke ligger i disse mængder, forbliver den blot den samme. Derfor er afbildningen surjektiv, da vi rammer hele dispositionsmængden.

For at vise, at afbildningen er injektiv, tager vi et element fra hver mængde og bruger afbildningen herpå og viser, at hvis elementerne er forskellige, så er funktionsværdierne det også. Som det første, har vi, at hvis x_1 og x_2 ligger i den samme mængde, så er funktionsværdierne ens, når $x_1 = x_2$. Dernæst har vi, at hvis $x_1 \in \mathbb{I} \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n)$ og $x_2 \in \mathbb{Q} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n)$, så er

$$h(x_1) = x_1 \neq x_2 + \sqrt{2} = h(x_2),$$

da vi ellers vil have, at $x_1 = x_2 + \sqrt{2} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n$, hvilket er i modstrid med antagelsen. Som det næste, har vi, at hvis $x_1 \in \mathbb{Q}$ og $x_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n$, så er

$$h(x_1) = x_1 + \sqrt{2} \neq x_2 + \sqrt{2} = h(x_2),$$

da det ellers vil medføre, at $x_1 = x_2$, men så er x_1 og x_2 både rationelle og irrationelle, hvilket er en modstrid. Til sidst har vi, at hvis $x_1 \in \mathbb{I}_m$ og $x_2 \in \mathbb{I}_n$, så er

$$h(x_1) = x_1 + \sqrt{2} \neq x_2 + \sqrt{2} = h(x_2),$$

men igen har vi, at det vil medføre, at $x_1 = x_2$, hvilket er en modstrid, da $\mathbb{I}_m \cap \mathbb{I}_n = \emptyset$ ifølge Lemma 5.1.8. Da h både er surjektiv og injektiv, er det en bijektiv afbildning, og dermed er $\mathbb{R} \sim \mathbb{I}$. ■

Vi har nu undersøgt kardinaliteten af mængderne $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{I}$ og fundet ud af, at $\mathbb{Q}$ er tællelig, mens $\mathbb{R}$ og $\mathbb{I}$ har samme kardinalitet, da de er overtællelige.

Konklusion

Gennem dette speciale har vi benyttet to forskellige måder til at konstruere mængden af de reelle tal. I den første konstruktion benyttede vi os af en decimaltalsrepræsentation af de reelle tal. Her antog vi kendskab til heltallene og introducerede så endelige decimaltal samt indførte regneoperationerne derpå, hvorefter vi beviste, at egenskaberne for disse er gældende. Dette kunne vi således udvide til de reelle tal, hvor vi definerede regneoperationerne ud fra konvergente følger af endelige decimaltal.

Den anden konstruktion byggede på Dedekind-snit, som er en opdeling af de rationelle tal, sådan at en delmængde af de rationelle tal repræsenterer det reelle tal. Her gjorde vi altså brug af viden om de rationelle tal og udvidede regneoperationer og deres egenskaber til også at gælde for reelle tal. På denne måde viste vi, at mængden af de reelle tal er et ordnet legeme med supremumsegenskaben, og at de rationelle tal er et dellegeme heraf.

Efter at have redegjort for begge konstruktioner, ønskede vi at vise, at de to konstruerede mængder er ækvivalente. Vi argumenterede først for, at begge konstruktioner giver et ordnet legeme med supremumsegenskaben, hvor de rationelle tal er et dellegeme heraf. Dernæst konstruerede vi en isomorfi mellem de to mængder som en bijektiv afbildning fra decimaltallene til snittene.

Til sidst ønskede vi at undersøge kardinaliteterne af mængderne af de reelle tal, rationelle tal og irrationelle tal. Eftersom de konstruerede mængder af reelle tal er ækvivalente, tog vi udgangspunkt i decimaltalsrepræsentationen for at undersøge kardinaliteten. Vi fandt, at de rationelle tal er tællelige, hvorimod de reelle og de irrationelle tal begge er overtællellige.

Bibliografi

Apostol, Tom M. (1974). *Mathematical Analysis*. 2. udg. Addison-Wesley Publishing Company.

Cornean, Horia (2015). *Notes for Analyse 1 and Analyse 2*. URL: `people.math.aau.dk/~cornean/analyse2_F15/noter-analyse1og2-9-04-2015.pdf`. Forelæsningsnoter til Analyse 1 og Analyse 2. Matematisk Institut, Aalborg Universitet.

Dedekind, Richard (1912). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. 4. udg. Braunschweig.

Faltin, F. m.fl. (1975). „The real numbers as a wreath product". I: *Advances in Mathematics* 16.3, s. 278 –304. ISSN: 0001-8708.

George, Michael og John Hopcroft (2015). *A careful proof of the Cantor-Schroder-Bernstein Theorem*. URL: `http://www.cs.cornell.edu/courses/cs2800/2015fa/lectures/lec04-cantor.html`. Forelæsningsnoter til CS 2800: Discrete Structures. Cornell University.

Klazar, Martin (2009). „Real numbers as infinite decimals and irrationality of $\sqrt{2}$". I: *ArXiv e-prints*. arXiv: `0910.5870`.

Krapp, Lothar Sebastian (2014). *Constructions of the real numbers. A set theoretical approach*. URL: `http://www.math.uni-konstanz.de/~krapp/Constructions_of_the_real_numbers.pdf`. Mansfield College, University of Oxford.

Lay, Steven R. (2014). *Analysis with an Introduction to Proof*. 5. udg. Pearson. ISBN: 978-0-321-90441-6.

Rotman, Joseph J. (2002). *Advanced Modern Algebra*. 1. udg. Prentice Hall. ISBN: 0130878685.

Rudin, Walter (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. 3. udg. McGraw-Hill, Inc. ISBN: 0-07-054235-X.

APPENDIKS A
Aksiomer og definitioner

Eftersom konstruktionen af de reelle tal som decimaltal tager udgangspunkt i heltallene, har vi brug for at kende aksiomerne, der er gældende for disse. Derfor lister vi dem herunder sammen med definitioner for legemer, som også benyttes til konstruktionen af de reelle tal.

A.1 Aksiomer for heltallene

A.1.1 Aksiom (Aksiomer for addition og multiplikation):

For alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gælder følgende aksiomer

Aksiomer for addition

(A1)	*Lukket under addition:*	$x + y \in \mathbb{Z}$
(A2)	*Den kommutative lov:*	$x + y = y + x$
(A3)	*Den associative lov:*	$(x + y) + z = x + (y + z)$
(A4)	*0 er neutralelementet:*	$x + 0 = 0 + x = x$
(A5)	*$-x$ er additiv invers til x:*	$x + (-x) = -x + x = 0$

Aksiomer for multiplikation

(A6)	*Lukket under multiplikation:*	$x \cdot y \in \mathbb{Z}$
(A7)	*Den kommutative lov:*	$x \cdot y = y \cdot x$
(A8)	*Den associative lov:*	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(A9)	*1 er neutralelementet:*	$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Den distributive lov for heltallene

(A10)	*Den distributive lov:*	$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

A.1.2 Aksiom (Aksiomer for ordningen $\leq$):

For alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gælder følgende aksiomer for ordningen $\leq$.

(A11)	*Ordningen er refleksiv:*	$x \leq x$
(A12)	*Ordningen er transitiv:*	$x \leq y$ *og* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
(A13)	*Ordningen er antisymmetrisk:*	$x \leq y$ *og* $y \leq x \Rightarrow x = y$
(A14)	*Ordningen er kompatibel med addition:*	$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
(A15)	*Ordningen er kompatibel med multiplikation:*	$x \leq y$ *og* $z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
		$x \leq y$ *og* $z < 0 \Rightarrow y \cdot z \leq x \cdot z$

A.1.3 Aksiom (Aksiomer for ordningen $<$):

For alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gælder følgende aksiomer for ordningen $<$.

(A16) *Ordningen er transitiv:* $x < y$ og $y < z \Rightarrow x < z$

(A17) *Ordningen er kompatibel med addition:* $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

(A18) *Ordningen er kompatibel med multiplikation:* $x < y$ og $z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
$x < y$ og $z < 0 \Rightarrow y \cdot z < x \cdot z$

(A19) *Produkt af positive heltal er positivt:* $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

(A20) *Produkt af negative heltal er positivt:* $x, y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

(A21) *Produkt af positive og negative heltal er negativt:* $x > 0$ og $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

(A22) *Der kan altid findes et større element:* $x < x + 1$

A.2 Definitioner

A.2.1 Definition (Ordning):

Lad S være en mængde. En ordning på S er en relation, betegnet med $<$, som har følgende egenskaber:

(a) *Hvis $x, y \in S$, så gælder kun én af følgende udtryk:*

$$x < y \quad x = y \quad y < x.$$

(b) *Hvis $x, y, z \in S$, $x < y$ og $y < z$, så gælder det, at $x < z$.*

A.2.2 Definition (Legeme):

Et legeme er en mængde F med to operationer defineret derpå, kaldet addition og multiplikation. Et legeme er lukket under både addition og multiplikation, og den kommutative, associative og distributive lov er gældende for alle elementer i F. Derudover eksisterer der et neutralelement for både addition og multiplikation samt en additiv og multiplikativ invers.

A.2.3 Definition (Ordnet legeme):

Et ordnet legeme er et legeme F, som også er en ordnet mængde, sådan at

(a) $x + y < x + z$ *hvis* $x, y, z \in F$ *og* $y < z$,

(b) $x \cdot y > 0$, *hvis* $x, y \in F$ *og* $x, y > 0$.

I Kapitel 5 bruger vi afbildninger til at sammenligne kardinalitet af forskellige mængder, derfor definerer vi nogle begreber.

A.2.4 Definition:

Lad f være en afbildning fra en mængde A til en mængde B, skrevet som $f\colon A \to B$. Så har vi, at A kaldes definitionsmængden, og B er dispositionsmængden. Delmængden $f(A) = \{y \in B \mid y = f(x),\ \forall x \in A\} \subset B$ kaldes billedmængden.

Vi har brug for at skelne mellem injektive, surjektive og bijektive afbildninger, derfor gives her en definition af disse begreber.

A.2.5 Definition (Injektiv, surjektiv og bijektiv):

(1) En afbildning $f\colon A \to B$ er injektiv, hvis forskellige x-værdier giver forskellige funktionsværdier, det vil sige, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Eller ækvivalent:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(2) En afbildning $f\colon A \to B$ er surjektiv, hvis billedmængden udgør hele dispositionsmængden, det vil sige, hvis

$$\forall y \in B, \exists x \in A: \quad y = f(x).$$

(3) En afbildning er bijektiv, hvis den både er injektiv og surjektiv.