Speciale i Matematik

Nødvendige og tilstrækkelige betingelser for en Gabor frame for et Hilbertrum

Konstruktion af en kontinuert frame som alternativ til diskontinuert basis for et endeligdimensionalt vektorrum

master thesis in mathematics

Necessary and sufficient conditions for a Gabor frame for a Hilbert space

Construction of a continuous frame as an alternative to discontinuous basis for a finite-dimensional vector space

10. Januar 2018

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT
Institut for Matematiske Fag • Skjernvej 4A • 9220 Aalborg Øst • Tfl.: 99 40 99 40

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Institut for Matematiske Fag
Matematik
Skjernvej 4A, 9220 Aalborg Øst
Tfl.: 99 40 99 40

Titel:

Del I: *Nødvendige og tilstrækkelige betingelser for en Gabor frame for et Hilbertrum*

Del II: *Konstruktion af en kontinuert frame som alternativ til diskontinuert basis for et endeligdimensionalt vektorrum*

Projekttype:
Speciale

Projektperiode:
1. september 2017 - 10. januar 2018

Gruppemedlemmer:
Kenneth Vanman Offersen

Vejleder:
Horia Decebal Cornean

Oplagstal: 3
Sidetal: 52
Afsluttet den: 10. januar 2018

Synopsis:

Specialet er skrevet som afslutning på kandidatuddannelsen med specialisering i matematisk analyse inden for det overordnede emne frames i Hilbertrum.

Specialet er todelt, hvor første del indeholder en redegørelse af nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$.

I anden del af specialet betragtes $\mathbb{C}^2$, hvor det vises, at der eksisterer et underrum V af $\mathbb{C}^2$, som varierer kontinuert som funktion af to variable, hvor enhver basis til underrummet V varierer diskontinuert. Herved bevises eksistensen af et endeligdimensionalt vektorrum, som kun har en diskontinuert basis. Som alternativ til denne diskontinuerte basis for V vises det, at der under visse betingelser eksisterer en frame for V, som varierer kontinuert.

Forord

Specialet er udarbejdet af Kenneth Vanman Offersen i perioden fra 1. september 2017 til 10. januar 2018 på Aalborg Universitet - Institut for Matematiske fag - Studieretning i matematisk analyse.

Læsevejledning

I specialet er hver endt definition markeret med ⧫, hvert endt bevis markeret med ■ og hvert endt eksempel markeret med ◄. Løbende i specialet er referencer til ligninger angivet i parenteser (). I specialet er der anvendt kildehenvisninger, sådan at kilderne refereres til med $[tal, tekst]$, hvor tal refererer til placeringen i kildelisten og $tekst$ henviser til eksempelvis kapitel, afsnit, sætning e.l. i den anvendte kilde. Den komplette kildeliste findes bagerst i specialet.

Jeg vil gerne takke professor Horia Decebal Cornean for vejledning gennem specialeperioden.

Kenneth Øffersen

Abstract

The thesis is written at the end of the master's program as documentation for a master's degree with specialization in mathematical analysis within the main subject *frames in Hilbert spaces*. The thesis is written in two parts, the first part of which contains a presentation of necessary and sufficient conditions for the existence of a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$. The second part of the thesis includes the author's contribution to the main subject. In the second part of the thesis, $\mathbb{C}^2$ is considered to show the existence of a subspace V of $\mathbb{C}^2$ which varies continuously as a function of two variables, where any basis to the subspace V varies discontinuously. This proves the existence of finite-dimensional vector spaces, which only has a discontinuous basis. As an alternative to this discontinuous basis, it appears that under certain conditions a frame for V exists, which varies continuously. Thus, the second part of the thesis is an attempt to motivate the use of a frame when there is no basis that varies continuously.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning

Specialet er skrevet med udgangspunkt i det overordnede emne *frames i Hilbertrum*. En frame for et Hilbertrum gør det muligt, at ethvert element i Hilbertrummet kan repræsenteres via en rækkeudvidelse på en tilsvarende måde som i forbindelse med en ortonormal basis. Dog er betingelserne, knyttet til frames, svagere end ved ortonormale baser, hvilket gør, at frames er mere fleksible. Dette er der redegjort for i semesterprojektet [7].

Ud fra det overordnede emne indeholder specialet en redegørelse for anvendelsen af frames i forbindelse med Gabor systemer. Yderligere indeholder specialet forfatterens bidrag inden for det overordnede emne, hvor der i et specialtilfælde redegøres for eksistensen af et endeligdimensionalt vektorrum, der varierer kontinuert som funktion af to variable, hvortil der kun eksisterer en basis, som varierer diskontinuert. Dermed motiveres anvendelsen af en frame, idet vi viser, at som alternativ til en sådan diskontinuert basis findes en frame, som varierer kontinuert under visse betingelser.

Indledningsvist præsenteres en kort gennemgang af grundlæggende resultater for frames i Hilbertrum. Idet resultaterne er behandlet i et tidligere semesterprojekt, se [7], så præsenteres mange af resultaterne uden bevisførelse.

Frames for et Hilbertrum

Dette kapitel er baseret på [1], [4] og [7]. Vi lader $\mathcal{H}$ angive et ikke-tomt separabelt Hilbertrum, udstyret med det indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ og normen angivet ved $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

1.1 Definition (Besselfølge): En følge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ af elementer i $\mathcal{H}$ er en *besselfølge* i $\mathcal{H}$, hvis der eksisterer en reel konstant $0 < B < \infty$, sådan at

$$\sum_{k\geq 1} |\langle f, f_k\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}.$$

Konstanten B kaldes en *besselgrænse*. ♦

1.2 Definition (Frame): En følge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ af elementer i $\mathcal{H}$ er en *frame* for $\mathcal{H}$, hvis der eksisterer to reelle konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{k\geq 1} |\langle f, f_k\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}.$$

Konstanterne A og B kaldes hhv. en *nedre og øvre framegrænse*. ♦

Vi bemærker, at framegrænserne ikke er entydige. Yderligere definerer vi den optimale øvre framegrænse som infimum over alle øvre framegrænser, og vi definerer den optimale nedre framegrænse som supremum over alle nedre framegrænser.

1.3 Definition (Tight & Parseval frame): En frame $\{f_k\}_{k\geq 1}$ for $\mathcal{H}$ er en *tight frame*, hvis framegrænserne kan vælges sådan, at $A = B$, dvs., hvis

$$\sum_{k\geq 1} |\langle f, f_k\rangle_{\mathcal{H}}|^2 = A\|f\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}.$$

En tight frame med $A = 1$ er en *Parseval frame*. ♦

Et vigtigt resultat i forbindelse med frames for et Hilbertrum $\mathcal{H}$ er, at hvis en følge af funktioner $\{f_k\}_{k\geq 1}$ er en frame for $\mathcal{H}$, så er

$$\overline{\operatorname{Span}\left(\{f_k\}_{k\geq 1}\right)} = \mathcal{H},$$

hvorfor

$$f = \sum_{k\geq 1} c_k\left(f\right) f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H},$$

hvor koefficienterne $c_k\left(f\right)$ ikke nødvendigvis er entydige. For at finde et udtryk for koefficienterne $c_k\left(f\right)$ defineres en såkaldt *frameoperator*, og der redegøres for en række resultater, som er listet i følgende lemma 1.4. Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$, så definerer vi frameoperatoren til $\{f_k\}_{k\geq 1}$ ved

$$Sf := \sum_{k\geq 1} \langle f, f_k\rangle_{\mathcal{H}} f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

I semesterprojektet [7] blev det vist, at frameoperatoren er veldefineret[1].

1.4 Lemma: Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S og framegrænser A, B. Så gælder, at

i) S er en begrænset, selvadjungeret, positiv og invertibel operator[2],
ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k\geq 1}$ er en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S^{-1} og framegrænser B^{-1}, A^{-1},
iii) hvis A og B er de optimale framegrænser for $\{f_k\}_{k\geq 1}$, så er B^{-1} og A^{-1} de optimale framegrænser for $\{S^{-1}f_k\}_{k\geq 1}$.

Ifølge lemma 1.4 er en frameoperator S invertibel, hvorfor S^{-1} er veldefineret. Yderligere kan vi formulere følgende korollar i forlængelse af lemma 1.4.

1.5 Korollar: Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S. Så er S^{-1} en begrænset, selvadjungeret, positiv og invertibel operator.

1.6 Sætning: Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S. Så er

$$f = \sum_{k\geq 1} \langle f, S^{-1}f_k\rangle_{\mathcal{H}} f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H} \tag{1.2}$$

og

$$f = \sum_{k\geq 1} \langle f, f_k\rangle_{\mathcal{H}} S^{-1} f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}. \tag{1.3}$$

Både summen i (1.2) og (1.3) konvergerer ubetinget for alle $f \in \mathcal{H}$.

[1]Veldefineret betyder i denne sammenhæng, at summen, som definerer S, er ubetinget konvergent.
[2]For definition af disse begreber, se appendiks A

1.7 Definition (Kanoniske dual frame): Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S. Så er den *kanoniske dual frame* til $\{f_k\}_{k\geq 1}$ defineret ved $\{S^{-1}f_k\}_{k\geq 1}$. ♦

For at kunne anvende sætning 1.6 til at repræsentere $f \in \mathcal{H}$, er vi nødt til at finde S^{-1} eller alle elementer i den kanoniske dual frame, dvs., $S^{-1}f_k$ for alle $k \geq 1$. Denne problemstilling kan dog undgås, hvis vi betagter en tight frame.

1.8 Korollar: Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en tight frame for $\mathcal{H}$ med framegrænse A. Så er

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k\geq 1}\langle f, f_k\rangle_{\mathcal{H}} f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}.$$

Bemærk den yderligere simplificering af resultatet i korollar 1.8, når $\{f_k\}_{k\geq 1}$ er en Parseval frame for $\mathcal{H}$, dvs., når $A = 1$.

1.9 Sætning: Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S. Så er $\{S^{-1/2}f_k\}_{k\geq 1}$ en Parseval frame og

$$f = \sum_{k\geq 1}\langle f, S^{-1/2}f_k\rangle_{\mathcal{H}} S^{-1/2}f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}.$$

Bevis: Ifølge lemma 1.4 eksisterer S^{-1}, og udfra korollar 1.5 er S^{-1} en positiv begrænset selvadjungeret operator. Ifølge sætning A.11 eksisterer $S^{-1/2}$ entydigt og er en selvadjungeret operator, som kommuterer med S^{-1}. Idet $S^{-1/2}$ kommuterer med S^{-1}, så kommuterer $S^{-1/2}$ også med S, hvorfor

$$\begin{aligned} f = SS^{-1/2}S^{-1/2}f = S^{-1/2}SS^{-1/2}f &= S^{-1/2}\sum_{k\geq 1}\langle S^{-1/2}f, f_k\rangle_{\mathcal{H}} f_k \\ &= \sum_{k\geq 1}\langle f, S^{-1/2}f_k\rangle_{\mathcal{H}} S^{-1/2}f_k, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Yderligere er

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{\mathcal{H}} = \langle f, f\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle f, \sum_{k\geq 1}\langle f, S^{-1/2}f_k\rangle_{\mathcal{H}} S^{-1/2}f_k \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{k\geq 1}\langle f, S^{-1/2}f_k\rangle_{\mathcal{H}}\overline{\langle f, S^{-1/2}f_k\rangle_{\mathcal{H}}} \\ &= \sum_{k\geq 1}\left|\langle f, S^{-1/2}f_k\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2, \quad \text{for alle } f \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

hvorfor $\{S^{-1/2}f_k\}_{k\geq 1}$ er en Parseval frame for $\mathcal{H}$. ■

Ud fra sætning 1.9 kan vi konkludere, at for enhver frame $\{f_k\}_{k\geq 1}$ for $\mathcal{H}$ med frameoperator S kan vi finde en tight frame med framegrænse lig 1, hvilket motiverer følgende definition.

1.10 Definition (Kanonisk tight frame): Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for $\mathcal{H}$ med frameoperator S. Så er den *kanoniske tight frame* til $\{f_k\}_{k\geq 1}$ defineret ved $\{S^{-1/2}f_k\}_{k\geq 1}$. ♦

Del I

Nødvendige og tilstrækkelige betingelser for en Gabor frame for et Hilbertrum

2 Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$

Dette kapitel er baseret på [1], [3], [4], [5] og [12]. For en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definerer vi støtten af f ved

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

Vi siger, at en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ har kompakt støtte, hvis supp(f) er kompakt. Yderligere lader vi $C_c(\mathbb{R})$ notere mængden af kontinuerte funktioner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{C}$ med kompakt støtte. For $1 \leq p < \infty$, lad

$$L^p(I) := \left\{ f\colon I \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad f \text{ er målelig og } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\}, \text{ for } I \subseteq \mathbb{R},$$

angive et ikke-tomt Lebesguerum.

2.1 Translations- og modulationsoperator

Det primære fokus i dette kapitel er på Hilbertrummet $L^2(\mathbb{R})$[1], hvor vi tager udgangspunkt i følgende to operatorer

$$\begin{aligned}
&\text{Translation: for } a \in \mathbb{R}, \quad T_a\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad T_a f(x) := f(x-a),\\
&\text{Modulation: for } b \in \mathbb{R}, \quad M_b\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad M_b f(x) := \exp(2\pi i b x)\, f(x),
\end{aligned}$$

hvor a kaldes en translationsparameter og b kaldes en modulationsparameter. Lad a, $b \in \mathbb{R}$ være givet, så er

$$\begin{aligned}
T_a M_b f(x) = T_a(\exp(2\pi i b x) f(x)) &= \exp(2\pi i b(x-a)) f(x-a)\\
&= \exp(-2\pi i a b) \exp(2\pi i b x) f(x-a)\\
&= \exp(-2\pi i a b) M_b T_a f(x),
\end{aligned}$$

for enhver funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvorfor

$$T_a M_b = \exp(-2\pi i a b) M_b T_a. \tag{2.1}$$

Ud fra identiteten (2.1) konkluderer vi, at translationsoperatoren T_a og modulationsoperatoren M_b kommuterer, hvis og kun hvis $ab \in \mathbb{Z}$.

2.1 Lemma: Både translations- og modulationsoperatoren er en unitær operator.

[1]At $L^2(\mathbb{R})$ er et separabelt Hilbertrum, er beskrevet i [12, kapitel 7].

Bevis: Lad $a \in \mathbb{R}$ være givet. Så er

$$\begin{aligned}\langle T_a f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} T_a f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x+a)}dx \\ &= \langle f, T_{-a} g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{for alle } f, g \in L^2(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

hvorfor den adjungerede operator af T_a er givet ved $T_a^* = T_{-a}$. Idet $T_a T_{-a} f = T_{-a} T_a f = f$ for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, så er $T_{-a} = T_a^{-1}$. Vi konkluderer derfor, at $T_a^* = T_a^{-1}$, hvorfor T_a er en unitær operator. Et lignende argument viser, at modulationsoperatoren er en unitær operator. ■

2.2 Indledende analyse af Gabor frames

Problemstillingen, som vi vil beskæftige os med i det følgende, kan formuleres som: Hvordan kan vi vælge en funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ og vælge passende reelle parametre a og b, sådan at en samling af funktioner er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Definition (Gabor system): Et *Gabor system* er en samling af funktioner på formen

$$\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{\exp(2\pi imbx)\, g(x-na) : \forall x \in \mathbb{R}\}_{m,n\in\mathbb{Z}},$$

hvor $g \in L^2(\mathbb{R})$ er forskellig fra nulafbildningen og a, $b > 0$. Funktionen g kaldes *generatoren.* ♦

2.3 Definition (Gabor frame): En *Gabor frame* for $L^2(\mathbb{R})$ er et Gabor system, som er en frame for $L^2(\mathbb{R})$. ♦

Idet $\{(na, mb)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ danner et gitter i $\mathbb{R}^2$, så kaldes en Gabor frame, defineret i 2.3, også en *regulær Gabor frame*. Hvis vi sammenholder definitionen af en frame, se definition 1.2, med definitionen på en Gabor frame, se definition 2.3, så er et Gabor system en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvis der eksisterer to reelle konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \leq B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{for alle } f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.2)$$

Sammenholdes identiteten (2.1) med (2.2), så opnås følgende umiddelbare konsekvens, at et Gabor system $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvis og kun hvis $\{T_{na}M_{mb}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Resultatet i næste lemma er af teoretisk karakter, men medtages, idet resultatet vil blive anvendt gentagne gange i den øvrige redegørelse.

2.4 Lemma: Lad f, $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Så gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$, at

i) Summen

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}, \quad \text{for } x \in \mathbb{R},$$

er absolut konvergent for næsten alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Afbildningen $x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}|$ tilhører $L^1([0,1/b])$.

iii) Funktionen $F_n \in L^1([0,1/b])$ defineret ved

$$F_n(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}, \quad \text{for } x \in \mathbb{R},$$

er en $1/b$-periodisk funktion med fourierkoefficienterne

$$c_m = b\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{for } m \in \mathbb{Z}.$$

Bevis: Lad $f,\ g \in L^2(\mathbb{R})$ og $a,\ b > 0$ være givet. Idet $f,\ T_{na}g \in L^2(\mathbb{R})$, så er $f\overline{T_{na}g} \in L^1(\mathbb{R})$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, jf. Hölders ulighed. Med variabelsubstitutionen $y = x - k/b$ er

$$\begin{aligned}\int_0^{1/b} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}\right| dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k/b}^{(1-k)/b} \left| f(y)\overline{g(y-na)}\right| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)\overline{g(y-na)}| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)\overline{T_{na}g(y)}| dy \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{2.3}$$

hvor ombytning af integration og summation er tilladt ifølge Tonelli's sætning, og sidste ulighed er opfyldt, idet $f\overline{T_{na}g} \in L^1(\mathbb{R})$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Ud fra (2.3) konkluderer vi, at afbildningen $x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}|$ tilhører $L^1([0,1/b])$, hvilket viser ii). Yderligere viser (2.3), at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}$ er absolut konvergent for næsten alle $x \in [0,1/b]$. Lad $i \in \mathbb{Z}$. Med en tilsvarende argumentation, som anvendt til at opnå (2.3), er

$$\begin{aligned}\int_{i/b}^{(i+1)/b} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}\right| dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{(i-k)/b}^{((i+1)-k)/b} \left| f(y)\overline{g(y-na)}\right| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)\overline{T_{na}g(y)}| dy \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Udfra (2.4) konkluderer vi, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}$ er absolut konvergent for næsten alle $x \in [i/b,(i+1)/b]$ for ethvert $i \in \mathbb{Z}$. Derfor er $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}$ absolut konvergent for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, hvilket viser i).

For $n \in \mathbb{Z}$, definer funktionen

$$F_n(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}.$$

Så ved vi fra punkt i), at F_n er absolut konvergent for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ (og derfor konvergent), hvorfor vi til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ kan finde et tilstrækkeligt stort $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sådan at

$$\left\| \sum_{k=-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)} - F_n(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5}$$

For at vise, at F_n er en periodisk funktion med periode $1/b$, lad da $N, N' \in \mathbb{N}$, så er

$$\begin{aligned}
&\left\| F_n(x+1/b) - F_n(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\| F_n(x+1/b) \pm \sum_{k=-N}^{N} f(x+1/b-k/b)\overline{g(x+1/b-na-k/b)} \right. \\
&\left. \pm \sum_{k=-N'}^{N'} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)} - F_n(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

hvor notationen $\pm$ betyder, at vi adderer og subtraherer summerne. Vælg $N_\varepsilon > \max\{N, N'\}$. Minkowski's ulighed, sammenholdt med (2.5), medfører da, at

$$\begin{aligned}
&\left\| F_n(x+1/b) - F_n(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{k=-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} f(x+1/b-k/b)\overline{g(x+1/b-na-k/b)} - \sum_{k=-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| f(x+1/b+N_\varepsilon/b)\overline{g(x+1/b-na+N_\varepsilon/b)} - f(x+N_\varepsilon/b)\overline{g(x-na+N_\varepsilon/b)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

hvorfor F_n er en periodisk funktion med periode $1/b$. Idet $F_n \in L^2([0, 1/b])$ er en periodisk funktion med periode $1/b$, så er fourierkoefficienterne til F_n givet ved

$$c_m = b \int_0^{1/b} F_n(x) \exp(-2\pi imbx)\, dx, \quad \text{for } m \in \mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

jf. (A.5). Idet $F_n \in L^1([0, 1/b])$, så kan vi anvende Fubini's sætning til at ombytte integration og summation, sådan at

$$\begin{aligned}
\langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{M_{mb}T_{na}g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-na)} \exp(-2\pi imbx)\, dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{1/b} f(y-k/b)\overline{g(y-na-k/b)} \exp(-2\pi imby)\, dy \\
&= \int_0^{1/b} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(y-k/b)\overline{g(y-na-k/b)} \exp(-2\pi imby)\, dy \\
&= \int_0^{1/b} F_n(y) \exp(-2\pi imby)\, dy, \quad \text{for } m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Sammenholdes (2.6) og (2.7), ser vi, at fourierkoefficienterne for F_n er givet ved $c_m = b\langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ for $m \in \mathbb{Z}$, hvilket viser iii). ■

2.3 Nødvendige betingelser for Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$

I dette afsnit redegøres der for et fundamentalt resultat i forbindelse med analysen af Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$, som viser, at produktet ab er afgørende for, om det overhovedet er muligt, at et Gabor system $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

2.5 Lemma: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og $a,\, b > 0$ være givet. Antag, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frameoperator S. Så gælder følgende:

i) $SM_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S$ for alle $m,n \in \mathbb{Z}$,
ii) $S^{-1}M_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S^{-1}$ for alle $m,n \in \mathbb{Z}$.

Bevis: Lad $f \in L^2(\mathbb{R})$. Antag, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frameoperator S. Ud fra definitionen af en frameoperator (1.1), identiteten (2.1), samt at både translations- og modulationsoperatoren er en unitær operator, jf. lemma 2.1, så er

$$\begin{aligned}
SM_{mb}T_{na}f &= \sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} \langle M_{mb}T_{na}f, M_{m'b}T_{n'a}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{m'b}T_{n'a}g \\
&= \sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} \langle f, T_{-na}M_{(m'-m)b}T_{n'a}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{m'b}T_{n'a}g \\
&= \sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \exp\left(2\pi ina\left(m'-m\right)b\right) M_{(m'-m)b}T_{-na}T_{n'a}g\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{m'b}T_{n'a}g \\
&= \sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} \exp\left(-2\pi ina\left(m'-m\right)b\right) \left\langle f, M_{(m'-m)b}T_{(n'-n)a}g\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{m'b}T_{n'a}g.
\end{aligned}$$

Definer nu $\tilde{n} := n' - n$ og $\tilde{m} := m' - m$, så er

$$\begin{aligned}
SM_{mb}T_{na}f &= \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \exp\left(-2\pi ina\tilde{m}b\right) \langle f, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{(\tilde{m}+m)b}T_{(\tilde{n}+n)a}g \\
&= \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \exp\left(-2\pi ina\tilde{m}b\right) \langle f, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{mb}M_{\tilde{m}b}T_{na}T_{\tilde{n}a}g \\
&= \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \langle f, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{mb}T_{na}M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}g \\
&= M_{mb}T_{na} \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \langle f, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}g \\
&= M_{mb}T_{na}Sf. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Idet (2.8) er opfyldt for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, så er $SM_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S$, hvilket viser i). Idet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frameoperator S, så er frameoperatoren invertibel, jf. lemma 1.4. Derfor følger ii) ud fra i) ved at anvende S^{-1} på begge sider af $SM_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S$. ■

2.6 Sætning: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og $a,\, b > 0$ være givet. Antag, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frameoperator S. Så gælder følgende:

i) Den kanoniske dual frame er et Gabor system, givet ved $\{M_{mb}T_{na}S^{-1}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$,
ii) Den kanoniske tight frame er et Gabor system, givet ved $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$.

Bevis: Ifølge definition 1.7 er den kanoniske dual frame defineret ved $\{S^{-1}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Ud fra lemma 2.5 er $S^{-1}M_{mb}T_{na} = M_{mb}T_{na}S^{-1}$, hvilket viser i). Ifølge definition 1.10 er den kanoniske tight frame defineret ved $\{S^{-1/2}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Idet S^{-1} kommuterer med $M_{mb}T_{na}$, så kommuterer $S^{-1/2}$ med $M_{mb}T_{na}$, jf. [1, lemma 2.4.5], hvilket viser ii). ■

2.7 Proposition: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Antag, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænser A og B. Så er

$$bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 \leq bB, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Bevis: Bevises ved modstrid. Lad $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ være en frame med framegrænser A og B. Definer $G(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Antag, at framegrænsen B eksisterer, således at

$$bB < G(x), \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}.$$

Så kan vi finde en målelig delmængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ med positivt mål, sådan at

$$bB < G(x), \quad \text{for alle } x \in \Omega.$$

Vælg Ω sådan, at Ω er indeholdt i et interval med intervallængde $1/b$ og definer mængderne

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \{x \in \Omega \colon G(x) \geq 1 + bB\}, \\ \Omega_k &:= \left\{x \in \Omega \colon \frac{1}{k+1} + bB \leq G(x) < \frac{1}{k} + bB\right\}, \quad \text{for } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Så er $\{\Omega_k\}_{k\geq 0}$ en opsplitning af Ω, som består af disjunkte målelige mængder. Idet Ω har et positivt mål, så har mindst en af mængderne i $\{\Omega_k\}_{k\geq 0}$ et positivt mål. Vælg $\tilde{k}$, for hvilket $\Omega_{\tilde{k}}$ har et positivt mål og definer $f := \chi_{\Omega_{\tilde{k}}}$, hvor $\chi_{\Omega_{\tilde{k}}}$ angiver den karakteristiske funktion på $\Omega_{\tilde{k}}$. Så er $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = |\Omega_{\tilde{k}}|$.

For $n \in \mathbb{Z}$ har funktionen $f\overline{T_{na}g}$ støtte på $\Omega_{\tilde{k}}$. Idet $\Omega_{\tilde{k}}$ er indeholdt i et interval med intervallængde $1/b$, og følgen af funktioner $\{\sqrt{b}M_{mb}\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{\sqrt{b}\exp(2\pi imbx)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2(I)$ for ethvert interval $I \subseteq \mathbb{R}$ med længde $1/b$, jf. appendiks A.5, så kan vi anvende Parseval's lighed[2], sådan at

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle f\overline{T_{na}g}, M_{mb}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 &= \frac{1}{b}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\langle f\overline{T_{na}g}, \sqrt{b}M_{mb}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \\ &= \frac{1}{b}\left\|f\overline{T_{na}g}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{b}\int_{\Omega_{\tilde{k}}} |g(x-na)|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ifølge Tonelli's sætning og (2.10), er

$$\begin{aligned} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 = \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_{\tilde{k}}} |g(x-na)|^2 dx &= \frac{1}{b}\int_{\Omega_{\tilde{k}}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{b}\int_{\Omega_{\tilde{k}}}\left(\frac{1}{\tilde{k}+1} + bB\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{b\left(\tilde{k}+1\right)} + B\right)|\Omega_{\tilde{k}}| \\ &= \left(\frac{1}{b\left(\tilde{k}+1\right)} + B\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

[2]Se sætning A.15

Sammenholdes (2.11) og (2.2), opnås modstrid. Et tilsvarende argument viser, at hvis den nedre grænse i (2.9) ikke er opfyldt, så kan A ikke være en nedre framegrænse, hvilket igen fører til modstrid. ■

Bemærk, at resultatet i proposition 2.7 medfører, at generatorfunktionen g for en Gabor frame $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$ nødvendigvis er begrænset. Bemærk også, at resultatet i proposition 2.7 giver en relation mellem framegrænserne for en Gabor frame $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$ og funktionen G, defineret ved $G(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Det næste resultat viser, at uanset hvilken generatorfunktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ vi vælger for et Gabor system, vil valget af parametrene a og b medføre visse restriktioner i forhold til egenskaberne af Gabor systemet.

2.8 Sætning: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Så gælder følgende:

i) Hvis $ab > 1$, så er Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ikke en frame for $L^2(\mathbb{R})$.
ii) Hvis Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er $ab = 1$, hvis og kun hvis $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en Riesz basis for $L^2(\mathbb{R})$.

Bevis: Antag, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med frameoperator S. Ifølge sætning 1.9 eksisterer der en kanonisk tight frame med framegrænse lig 1 for $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Ifølge sætning 2.6 er denne kanoniske tight frame givet ved

$$\{S^{-1/2}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

Idet $S^{-1/2}g \in L^2(\mathbb{R})$, så medfører resultatet i proposition 2.7, at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|S^{-1/2}g(x-na)\right|^2 = b, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R},$$

hvilket medfører, at

$$\begin{aligned} \|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|S^{-1/2}g(x)\right|^2 dx &= \int_0^a \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|S^{-1/2}g(y-na)\right|^2 dy \\ &= \int_0^a b dy \\ &= ab, \end{aligned} \tag{2.12}$$

hvorfor $\|S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{ab}$. Bemærk, at resultatet (2.12) er opfyldt udelukkende pga. antagelsen, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

For $S^{-1/2}g \in L^2(\mathbb{R})$ vil vi vise, at $\|S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$ for en vilkårlig Gabor frame $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$. For en vilkårlig Gabor frame $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$ er $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en Parseval frame, hvorfor

$$\frac{\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle S^{-1/2}g, M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2}{\|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} = 1. \tag{2.13}$$

Yderligere er

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle S^{-1/2}g, M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2}{\|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \\
&= \|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\sum_{m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\langle S^{-1/2}g, M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2}{\|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \\
&\geq \|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Sammenholdes (2.13) og (2.14), ser vi, at $\|S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$, hvilket sammenholdt med (2.12) medfører, at $ab \leq 1$ for en vilkårlig Gabor frame $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$. Hvilket viser i)

ii) " $\Leftarrow$ ". Antag, at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en Riesz basis $L^2(\mathbb{R})$, så er $\{S^{-1/2}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en Riesz basis for $L^2(\mathbb{R})$ pr. definition A.12. Ifølge sætning A.14 er $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$. Yderligere gælder det, ifølge sætning 1.9, at $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en Parseval frame for $L^2(\mathbb{R})$, dvs., $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ har framegrænsen lig 1. Ifølge sætning A.14 er Riesz grænsen derfor lig 1, og pr. definition A.13 er $\|S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, hvilket sammenholdt med (2.12) medfører, at $ab = 1$.

" $\Rightarrow$ ". Antag, at $ab = 1$, så er $\|S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{ab} = 1$, jf. (2.12). Ifølge [4, kapitel 13, kapitel 14 og sætning 1.50] er $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en basis for $L^2(\mathbb{R})$. Vi viser nu, at $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$. Idet

$$\begin{aligned}
\|M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left|M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g(x)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\exp(2\pi i x m b)\, S^{-1/2}g(x-na)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\exp(2\pi i x m b)\right|^2 \left|S^{-1/2}g(x-na)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|S^{-1/2}g(x)\right|^2 dx \\
&= \|S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

så er $\|M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|S^{-1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ for alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Idet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, så er $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en Parseval frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvorfor

$$\sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \left|\langle M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 = \|M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 1,$$

for enhver funktion i $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Idet

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \left|\langle M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \\
&= \|M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\|^4_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}:\ \tilde{m}\neq m, \tilde{n}\neq n} \left|\langle M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \\
&= 1 + \sum_{\tilde{m},\tilde{n}\in\mathbb{Z}:\ \tilde{m}\neq m, \tilde{n}\neq n} \left|\langle M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2,
\end{aligned}$$

så er $\langle M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g, M_{\tilde{m}b}T_{\tilde{n}a}S^{-1/2}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ for alle $\tilde{m} \neq m$ og $\tilde{n} \neq n$ i $\mathbb{Z}$. Ud fra ovenstående konkluderer vi, at $\{M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$, hvorfor

$$\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{S^{1/2}M_{mb}T_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

er en Riesz basis for $L^2(\mathbb{R})$, jf. definition A.12 og [1, lemma 2.4.5]. ■

2.4 Tilstrækkelige betingelser for Gabor frames for $L^2(\mathbb{R})$

I dette afsnit redegøres der for en helt generel betingelse, som sikrer, at et Gabor system $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

2.9 Lemma: Lad a, $b > 0$ være givet. Antag, at f er en begrænset målelig funktion med kompakt støtte, og antag, at g er en målelig funktion, for hvilken funktionen G, defineret ved

$$G(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

er begrænset. Så er

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 &= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} f(x-k/b) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-k/b)}dx.\end{aligned}$$

Bevis: Lad g være en målelig funktion for, hvilken funktionen G, defineret ved (2.15), er begrænset. Så er g en begrænset funktion, hvilket medfører, at $g \in L^2(\mathbb{R})$. Fasthold $n \in \mathbb{Z}$. Så er funktionen F_n, defineret ved

$$F_n(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

en periodisk funktion med periode $1/b$ og tilhører $L^1([0,1/b])$, jf. lemma 2.4. Idet f har kompakt støtte, så bidrager summen (2.16) kun med et endeligt antal sumled forskelligt fra nul, hvorfor F_n er begrænset. Idet F_n er begrænset, så er $F_n \in L^1([0,1/b]) \cap L^2([0,1/b])$. Derfor gælder det, ifølge lemma 2.4, at

$$\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{b}c_m = \int_0^{1/b} F_n(x)\exp(-2\pi i mbx)\,dx, \tag{2.17}$$

hvor c_m er fourierkoefficienterne for $m \in \mathbb{Z}$ til F_n. Parseval's sætning medfører da, se (A.6), at

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\int_0^{1/b} F_n(x)\exp(-2\pi i mbx)\,dx\right|^2 = \frac{1}{b^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2 = \frac{1}{b}\int_0^{1/b} |F_n(x)|^2 dx. \tag{2.18}$$

Sammenholdes (2.17) og (2.18), opnås, at

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\int_0^{1/b} F_n(x)\exp(-2\pi i mbx)\,dx\right|^2 \\ &= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{1/b} |F_n(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Vi ser nu, at

$$|F_n(x)|^2 = \overline{F_n(x)}F_n(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{f(x-i/b)}g(x-na-i/b)\,F_n(x),$$

hvilket medfører, at

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{1/b}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{f(x-i/b)}g(x-na-i/b)\,F_n(x)dx \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}g(x-na)\,F_n(x)dx \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}g(x-na)\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}dx \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}g(x-na)\left(f(x)\overline{g(x-na)}+\sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash 0}f(x-k/b)\overline{g(x-na-k/b)}\right)dx \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2\,dx \\
&+ \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}f(x-k/b)\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}dx,
\end{aligned}$$

hvor anden lighed er opfyldt, idet F_n er $1/b$-periodisk og f har kompakt støtte. ■

Bemærk, at beviset for lemma 2.9 er afhængig af summation over alle $m \in \mathbb{Z}$, og derfor er beviset stærkt afhængig af, at $\{\sqrt{b}M_{mb}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2([0,1/b])$. Dog er beviset ikke afhængig af summation over alle $n \in \mathbb{Z}$, hvorfor vi kan summe over en vilkårlig indeksmængde $I \subseteq \mathbb{Z}$, dvs., med forudsætningerne i lemma 2.9, så er

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in I}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 &= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\sum_{n\in I}|g(x-na)|^2dx \\
&+ \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}f(x-k/b)\sum_{n\in I}g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}dx
\end{aligned}$$

opfyldt for en vilkårlig indeksmængde $I \subseteq \mathbb{Z}$. Vi vil nu formulere en tilstrækkelig betingelse for, at et Gabor system $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ i $L^2(\mathbb{R})$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

2.10 Sætning: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Antag, at

$$B := \frac{1}{b}\sup_{x\in[0,a]}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}\right| < \infty.$$

Så er Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en Besselfølge i $L^2(\mathbb{R})$ med besselgrænse B. Hvis det yderligere er opfyldt, at

$$A := \frac{1}{b}\inf_{x\in[0,a]}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}\right|\right) > 0,$$

så er Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænserne A og B.

For at bevise udsagnet i sætning 2.10 skal vi gøre brug af, at mængden af kontinuerte funktioner med kompakt støtte ligger tæt i $L^2(\mathbb{R})$[3].

Bevis: Lad $f \in C_c(\mathbb{R})$, og lad $g \in L^2(\mathbb{R})$. Ifølge lemma 2.9 er

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 &= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2\,dx \\ &+ \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} f(x-k/b) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}dx. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

For at vise, at Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en besselfølge, skal vi estimere en øvre grænse til (2.19). For $k \in \mathbb{Z}$, definer funktionen H_k ved

$$H_k(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Ifølge lemma 2.4 er H_k en veldefineret funktion for næsten alle $x \in \mathbb{R}$. Vi ser nu, at

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |T_{-k/b}H_k(x)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x+k/b)| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x+k/b)\overline{T_{na+k/b}g(x+k/b)}\right| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na-k/b}g(x)\overline{T_{na}g(x)}\right|. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Idet vi summer over alle $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, så kan vi erstatte k med $-k$ i (2.20), sådan at

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |T_{-k/b}H_k(x)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na+k/b}g(x)\overline{T_{na}g(x)}\right| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{T_{na+k/b}g(x)}T_{na}g(x)\right| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)|. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Betragt (2.19). Ifølge trekantsuligheden er

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} f(x-k/b) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}dx\right| \\ =&\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} T_{b/k}f(x)\,H_k(x)\,dx\right| \\ \leq&\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||T_{b/k}f(x)||H_k(x)|dx \\ =&\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||H_k(x)|^{1/2}|T_{b/k}f(x)||H_k(x)|^{1/2}dx.\end{aligned}$$

[3]For bevis af, at $\overline{C_c(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$, se eksempelvis [12, sætning 7.28]

Anvendes Cauchy-Schwarz's ulighed først på integralet og herefter på summen over alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, så opnås, at

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||H_k(x)|^{1/2}|T_{b/k}f(x)||H_k(x)|^{1/2}dx \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2|H_k(x)|dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |T_{b/k}f(x)|^2|H_k(x)|dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2|H_k(x)|dx\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} |T_{b/k}f(x)|^2|H_k(x)|dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)|dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |T_{-k/b}H_k(x)|dx\right)^{1/2} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Sammenholdes resultatet i (2.21) og (2.22), så er

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}f(x-k/b)\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\,\overline{g(x-na-k/b)}dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)|dx. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Bemærk, at

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right|$$

definerer en periodisk funktion med periode a[4]. Antag, at

$$B := \frac{1}{b} \sup_{x\in[0,a]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\,\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right| < \infty. \qquad (2.24)$$

Ud fra (2.19), (2.23) og (2.24) er

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 dx + \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)|dx \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)|\right) dx \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |T_{na}g(x)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right|\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right| dx \\
&\leq B\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

[4]Beviset for, at $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |H_k(x)|$ er en periodisk funktion, er ækvivalent med beviset for, at funktionen F_n i lemma 2.4 er en periodisk funktion.

Idet (2.25) er opfyldt for enhver funktion i $C_c(\mathbb{R})$, og $C_c(\mathbb{R})$ ligger tæt i $L^2(\mathbb{R})$, så er (2.25) opfyldt for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$. Hvilket viser i). For punkt ii), lad $f \in C_c(\mathbb{R})$. Ifølge lemma 2.9 er

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} & \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \\ & \geq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \frac{1}{b}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |T_{na}g(x)|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right|\right) dx. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

Bemærk, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |T_{na}g(x)|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right|$ er veldefineret for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ og definerer en periodisk funktion med periode a. Antag, at

$$A := \frac{1}{b}\inf_{x\in[0,a]}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |T_{na}g(x)|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+k/b}g(x)}\right|\right) > 0. \qquad (2.27)$$

Ud fra (2.26) og (2.27) er

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \geq A\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \qquad (2.28)$$

Idet (2.28) er opfyldt for enhver funktion i $C_c(\mathbb{R})$, og $C_c(\mathbb{R})$ ligger tæt i $L^2(\mathbb{R})$, så er (2.28) opfyldt for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvilket, sammenholdt med punkt i), afslutter beviset. ■

2.11 Eksempel: Lad $a = b = 1$ og definer funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g(x) := \begin{cases} 1 + x, & \text{hvis } x \in]0,1], \\ \frac{1}{2}x, & \text{hvis } x \in]1,2], \\ 0, & \text{ellers.}\end{cases}$$

Det er klart, at $g \in L^2(\mathbb{R})$. Idet $ab = 1$, så kan vi ikke afvise, vha. sætning 2.8, at Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{M_mT_ng\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$. Vi vil nu vise, vha. sætning 2.10, at Gabor systemet $\{M_mT_ng\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Lad n, $k \in \mathbb{Z}$ og betragt funktionen $x \mapsto g(x-n)g(x-n-k)$ for $x \in [0,a] = [0,1]$. For $x \in [0,1]$ og ud fra definitionen af g, ser vi, at $g(x-n) = 0$, når $n \notin \{-1,0\}$, hvorfor $g(x-n)g(x-n-k) = 0$, når $n \notin \{-1,0\}$. For $n = -1$, ser vi, at $g(x-n-k) = g(x+1-k) = 0$, når $k \notin \{0,1\}$. For $n = 0$, ser vi, at $g(x-n-k) = g(x-k) = 0$, når $k \notin \{-1,0\}$. Lad χ_C angive den karakteristiske funktion på en mængde $C \subseteq \mathbb{R}$, så er

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) &= g(x+1)g(x+1-k)\chi_{(k\in\{0,1\})} + g(x)g(x-k)\chi_{(k\in\{-1,0\})} \\ &= \begin{cases} g(x)g(x+1), & \text{hvis } k=-1, \\ g(x)^2 + g(x+1)^2, & \text{hvis } k = 0, \\ g(x+1)g(x), & \text{hvis } k = 1, \\ 0, & \text{ellers.}\end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2, & \text{hvis } k=-1, \\ \frac{5}{4}(1+x)^2, & \text{hvis } k = 0, \\ \frac{1}{2}(1+x)^2, & \text{hvis } k = 1, \\ 0, & \text{ellers.}\end{cases}\end{aligned}$$

Ud fra ovenstående beregnes konstanterne:

$$
\begin{aligned}
B &:= \frac{1}{b} \sup_{x\in[0,a]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g\left(x-na\right) \overline{g\left(x-na-k/b\right)} \right| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g\left(x-n\right) g\left(x-n-k\right) \right| \\
&= \frac{9}{4} \sup_{x\in[0,1]} (1+x)^2 = 9,
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
A &:= \frac{1}{b} \inf_{x\in[0,a]} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\left(x-na\right)\right|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g\left(x-na\right) \overline{g\left(x-na-k/b\right)} \right| \right) \\
&= \inf_{x\in[0,1]} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|g\left(x-n\right)\right|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g\left(x-n\right) g\left(x-n-k\right) \right| \right) \\
&= \inf_{x\in[0,1]} \left(\frac{5}{4}(1+x)^2 - (1+x)^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \inf_{x\in[0,1]} (1+x)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Idet $B < \infty$, og $A > 0$, så er Gabor systemet $\{M_m T_n g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænserne A og B, jf. sætning 2.10. Yderligere er Gabor systemet $\{M_m T_n g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en Riesz basis for $L^2(\mathbb{R})$, jf. sætning 2.8. ◀

2.5 Painless nonorthogonal expansions

I dette afsnit redegøres der for nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en Gabor frame $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$, hvor støtten af generatorfunktionen g er indeholdt i et interval med intervallængde $1/b$. Idet de nødvendige betingelser, formuleret i afsnit 2.3, er opfyldt generelt for en generatorfunktion i $L^2(\mathbb{R})$, så er disse nødvendige betingelser også opfyldt i forbindelse med generatorfunktionerne, beskrevet i dette afsnit. I litteraturen refereres der typisk til de følgende sætninger som *Painless nonorthogonal expansions*, som første gang blev publiceret af Daubechies, Grossmann og Meyer i artiklen [5] fra 1986.

2.12 Sætning: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Hvis g har støtte på intervallet $[0, 1/b]$ og der eksisterer to konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$
bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 \leq bB, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}, \tag{2.29}
$$

så er $\{M_{mb} T_{na} g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænser A og B.

Bevis: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ med $\operatorname{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$. Idet g har støtte på intervallet $[0, 1/b]$, så har $T_{na}g$ støtte på intervallet $I_n := [na, na + 1/b]$, hvorfor $T_{na}g \in L^2(I_n)$ for $n \in \mathbb{Z}$. Lad $f \in C_c(\mathbb{R})$, så er f en begrænset funktion. Idet f er begrænset, så er $f\overline{T_{na}g} \in L^2(I_n)$. Vi ved fra tidligere, at $\{\sqrt{b} M_{mb}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2(I_n)$, hvorfor vi ud fra

Parseval's lighed, se sætning A.15, opnår at

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left| f(x)\overline{g(x-na)} \right|^2 dx &= \int_{na}^{na+1/b} \left| f(x)\overline{T_{na}g(x)} \right|^2 dx = \| f\overline{T_{na}g} \|^2_{L^2(I_n)} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \langle f\overline{T_{na}g}, \sqrt{b}M_{mb} \rangle_{L^2(I_n)} \right|^2 \\
&= b\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int_{na}^{na+1/b} f(x)\overline{T_{na}g(x)}\exp(-2\pi imbx)\, dx \right|^2 \\
&= b\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\exp(2\pi imbx)T_{na}g(x)} dx \right|^2 \\
&= b\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{M_{mb}T_{na}g(x)} dx \right|^2 \\
&= b\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2,
\end{aligned}$$

hvorfor

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2 = \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} \left| f(x)\overline{g(x-na)} \right|^2 dx.$$

Vi anvender nu Tonellis sætning til at ombytte integration og summation, sådan at

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2 &= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| f(x)\overline{g(x-na)} \right|^2 dx. \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \overline{g(x-na)} \right|^2 dx \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Antag, at (2.29) er opfyldt. Ud fra (2.30) er

$$A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2 \le B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{for alle } f \in C_c(\mathbb{R}). \qquad (2.31)$$

Idet $C_c(\mathbb{R})$ ligger tæt i $L^2(\mathbb{R})$, så er (2.31) opfyldt for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, hvilket afslutter beviset. ■

2.13 Sætning: Lad a, $b > 0$ være givet. Hvis $0 < ab < 1$, så eksisterer der en funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ med støtte på intervallet $[0, 1/b]$ og to konstanter $0 < A \le B < \infty$, sådan at

$$bA \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 \le bB, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bevis: Antag, at $0 < ab < 1$. Lad g være en vilkårlig kontinuert funktion, sådan at

$$g(x) = 0, \text{ når } x \notin [0, 1/b] \quad \text{og} \quad g(x) > 0, \text{ når } x \in (0, 1/b).$$

Idet g er en kontinuert funktion, så er $\tilde{G}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2$ en kontinuert funktion. Yderligere er $\tilde{G}$ en periodisk funktion med periode a, og idet $0 < a < 1/b$, så er $\tilde{G}(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Idet supp(g) er lig $[0, 1/b]$, så er supp(g) en kompakt mængde, hvorfor

$g \in C_c(\mathbb{R})$. Idet $g \in C_c(\mathbb{R})$, så er g en begrænset funktion, hvorfor $\tilde{G}$ er en begrænset funktion. I alt er

$$0 < \inf_{x \in \mathbb{R}} \tilde{G}(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \tilde{G}(x) < \infty.$$

Idet $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, afsluttes beviset. ■

Ud fra resultatet i sætning 2.13 og resultatet i sætning 2.12 konkluderer vi, at der altid eksisterer en generatorfunktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ til et Garbor system $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, sådan at $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$, når $0 < ab < 1$.

2.14 Sætning: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Hvis $ab = 1$, $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$ og der eksisterer to konstanter $0 < A \leq B < \infty$ sådan, at

$$bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 \leq bB, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}, \tag{2.32}$$

så er g diskontinuert.

Bevis: Bevises ved modstrid. Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ være en funktion med $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$, hvor (2.32) er opfyldt. Så er $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$, jf. sætning 2.12. Hvis $ab = 1$, så er $a = 1/b$, hvorfor $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, 1/b] = [0, a]$, og $\mathrm{supp}(T_{na}g) \subseteq [na, (n+1)a]$.

Antag, at g er kontinuert, så er $g(0) = g(a) = 0$. Idet intervallerne $[na, (n+1)a]$ højst overlapper hinanden i ét punkt, og $\tilde{G}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |T_{na}g(x)|^2$ er en kontinuert funktion, så er $\tilde{G}(na) = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Yderligere ved vi, at punkterne na for $n \in \mathbb{Z}$ tilhører støtten af $T_{na}g$, og derfor er punkterne ikke en del af nulmængden. Ud fra proposition 2.7 er $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ikke en frame for $L^2(\mathbb{R})$. Herved opnås modstrid. ■

2.15 Sætning: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og a, $b > 0$ være givet. Hvis $ab > 1$ og $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$, så eksisterer der ikke to konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 \leq bB, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

Yderligere er Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ikke fuldstændig i $L^2(\mathbb{R})$.

Bevis: Hvis $ab > 1$, så er $a > 1/b$, hvilket medfører, at $\tilde{G}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |T_{na}g(x)|^2 = 0$ for alle $x \in [1/b, a]$. Ifølge proposition 2.7 er $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ikke en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvorfor (2.33) ikke er opfyldt, jf. sætning 2.12. Idet $\chi_{[1/b,a]}$ er ortogonal til ethvert element i $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, så er Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ikke fuldstændig i $L^2(\mathbb{R})$. ■

Del II

Konstruktion af en kontinuert frame som alternativ til diskontinuert basis for et endeligdimensionalt vektorrum

3 Projektion og projektionsmatrix

Dette kapitel er baseret på [14]. I dette kapitel præsenteres grundlæggende resultater angående projektioner og projektionsmatricer.

3.1 Definition: Lad E^n være et endeligdimensionalt vektorrum, hvor $E^n = V \oplus W$[1]. Lad $x \in E^n$. Så kan x entydigt repræsenteres som

$$x = x_1 + x_2, \qquad \text{for } x_1 \in V \text{ og } x_2 \in W.$$

Transformationen ϕ, som afbilder $x \mapsto x_1$, kaldes *projektionen* af x på V langs W. ♦

Ud fra definition 3.1 ser vi, at ϕ er en lineær afbildning, da

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$$

for alle x, $y \in E^n$ og alle α, $\beta \in \mathbb{R}$. Idet ϕ er en lineær afbildning, så kan vi repræsentere afbildningen ϕ via en matrix P. Vi kalder matricen P for en projektionsmatrix, og vektoren $x_1 = Px$ kaldes projektionen af x på V langs W. Yderligere anvender vi sprogbruget, at P er projektionen på V langs W.

3.2 Lemma: Lad E^n være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad Q være en kvadratisk matrix af orden n. Antag, at $Q^2 = Q$, så er

$$E^n = \text{Span}(Q) \oplus \text{Ker}(Q),$$

og

$$\text{Ker}(Q) = \text{Span}(Id - Q),$$

hvor Id angiver identitetsmatricen.

Bevis: Antag, at $Q^2 = Q$. Lad $x \in \text{Span}(Q)$, så kan vi finde en vektor $w \in E^n$, sådan at $x = Qw$. Under antagelsen, at $Q^2 = Q$, så er $Qx = Q^2w = Qw = x$. Lad $y \in \text{Ker}(Q)$, så er $Qy = \mathbf{0}$, hvor $\mathbf{0}$ angiver nulvektoren. Lad $\tilde{y} \in \text{Span}(Q) \cap \text{Ker}(Q)$, så er $\tilde{y} = Q\tilde{y} = \mathbf{0}$, hvorfor $\text{Span}(Q) \cap \text{Ker}(Q) = \{\mathbf{0}\}$. Yderligere, idet

$$\dim(\text{Span}(Q)) + \dim(\text{Ker}(Q)) = \text{rank}(Q) + (n - \text{rank}(Q)) = n,$$

så er $E^n = \text{Span}(Q) \oplus \text{Ker}(Q)$. Lad $u \in \text{Ker}(Q)$, så er $Qu = \mathbf{0}$, hvilket medfører, at $(Id - Q)u = u$, hvorfor $u \in \text{Span}(Id - Q)$. Dermed er $\text{Ker}(Q) \subseteq \text{Span}(Id - Q)$. Lad $v \in \text{Span}(Id - Q)$, så kan vi finde en vektor $w \in E^n$, sådan at $v = (Id - Q)w$. Under antagelsen, at $Q^2 = Q$, da er $Qv = Q(Id - Q)w = \mathbf{0}$, hvorfor $v \in \text{Ker}(Q)$. Derfor er $\text{Span}(Id - Q) \subseteq \text{Ker}(Q)$. ■

[1] For definition af direkte sum, se A.1

3.3 Sætning: Lad E^n være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad P være en kvadratisk matrix af orden n. Så er P projektionen på Span(P) langs Ker(P), hvis og kun hvis $P^2 = P$.

Bevis: Lad $E^n = V \oplus W$ være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad P være projektionen på V langs W. For alle $x \in E^n$ er $y = Px \in V$. Idet $y = y + \mathbf{0}$, så er $Py = y$, hvorfor

$$P^2 x = P\,(Px) = Py = y = Px. \tag{3.1}$$

Idet (3.1) er opfyldt for alle $x \in E^n$, så er $P^2 = P$. Omvendt: antag, at $P^2 = P$. Ifølge lemma 3.2 er

$$E^n = \operatorname{Span}(P) \oplus \operatorname{Span}(Id - P)\,.$$

Dvs., enhver vektor $x \in E^n$ har en entydig repræsentation $x = Px + (Id - P)\,x = x_1 + x_2$, hvor $x_1 \in \operatorname{Span}(P)$ og $x_2 \in \operatorname{Span}(Id - P)$. Ud fra definition 3.1 er P en projektion på $\operatorname{Span}(P)$ langs $\operatorname{Span}(Id - P) = \operatorname{Ker}(P)$. ■

Lad E^n være udstyret med det indre produkt, angivet ved $\langle \cdot, \cdot \rangle$. For et underrum $V \subseteq E^n$ definerer vi det ortogonale komplement $V^\perp$ af V ved

$$V^\perp := \{x \in E^n : \langle x, y \rangle = 0 \text{ for alle } y \in V\},$$

hvilket tillader, at vi kan konstruere $E^n = V \oplus V^\perp$.

3.4 Sætning: Lad E^n være et endeligdimensionalt vektorrum, udstyret med det indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og lad P være en kvadratisk matrix af orden n. Så er P projektionen på Span(P) langs Span$(P)^\perp$, hvis og kun hvis $P^2 = P$ og $P^* = P$, hvor P^* angiver den adjungerede matrix af P.

Bevis: Lad $E^n = V \oplus V^\perp$. For alle x, $y \in E^n$, er $x = x_1 + x_2$ og $y = y_1 + y_2$, hvor x_1, $y_1 \in V$ og x_2, $y_2 \in V^\perp$. Lad P angive projektionen på V langs $V^\perp$, så er $Px = x_1$ og $Py = y_1$. Idet Px, $Py \in V$ og x_2, $y_2 \in V^\perp$, så er

$$\langle x_1, y_2 \rangle = \langle Px, y_2 \rangle = 0 = \langle x_2, Py \rangle = \langle x_2, y_1 \rangle,$$

hvorfor

$$\langle x, Py \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle = \langle Px, y \rangle. \tag{3.2}$$

Ud fra (3.2) konkluderer vi, at P er en selvadjungeret matrix. Yderligere følger det ud fra definition 3.1, at $P = P^2$. Omvendt: antag, at $P^2 = P$, så er P en projektion på Span(P) langs Ker(P), jf. sætning 3.3. Antag, at $P^* = P$, så vil vi vise, at Ker$(P) = $ Span$(P)^\perp$. Vi ser nu, at $y \in$ Span$(P)^\perp$, hvis og kun hvis $\langle Px, y \rangle = 0$ for alle $x \in E^n$, hvis og kun hvis

$$\langle Px, y \rangle = \langle x, P^* y \rangle = \langle x, Py \rangle = 0, \qquad \text{for alle } x \in E^n,$$

hvis og kun hvis $Py = 0$, hvis og kun hvis $y \in$ Ker(P), hvilket afslutter beviset. ■

Sætning 3.4 motiverer nu definitionen på en *ortogonal projektion.*

3.5 Definition (Ortogonal projektion): En matrix P, som opfylder, at $P^2 = P$ og $P^* = P$ kaldes en ortogonal projektionsmatrix. ♦

En ortogonal projektion P er projektionen på $\mathrm{Span}(P)$ langs $\mathrm{Span}(P)^\perp$, men typisk vil vi blot referere til denne projektion som den ortogonale projektion på $\mathrm{Span}(P)$, og vi vil anvende sprogbruget, at $\mathrm{Span}(P)$ har P som ortogonal projektor.

4 Konstruktion af en kontinuert frame som alternativ til en diskontinuert basis

Betragt Hilbertrummene $\mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^4$, udstyret med de indre produkter angivet ved hhv. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ og $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^4}$. Yderligere, lad $\| \cdot \|_{\mathbb{C}^2}$ og $\| \cdot \|_{\mathbb{C}^4}$ angive normen på hhv. $\mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^4$. Vi anvender konventionen $\mathcal{O}_{m\times n}$ til at angive nulmatricen med m rækker og n søjler.

4.1 Konstruktion af et underrum

Indledningsvist finder vi et underrum af $\mathbb{C}^2$, der varierer kontinuert som funktion af to variable. For $u \in [-1,1]$ og $\varphi \in [0,2\pi)$, definer matricen $P(u,\varphi)$ ved

$$P(u,\varphi) := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-u & \sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi) \\ \sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi) & 1+u \end{bmatrix}.$$

Idet alle indgangene i matricen $P(u,\varphi)$ er en sammensætning af kontinuerte funktioner, så varierer matricen $P(u,\varphi)$ kontinuert som funktion af de to variable u og φ.

Vi ser nu, at $P^2(u,\varphi) = P(u,\varphi)$ og $P(u,\varphi) = P^*(u,\varphi)$ for alle $u \in [-1,1]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$, hvorfor $P(u,\varphi)$ er en ortogonal projektionsmatrix, jf. definition 3.5. Yderligere er sporet[1] af enhver projektionsmatrix lig matricens rank, se lemma B.3, hvorfor $\operatorname{rank}(P(u,\varphi)) = 1$ for alle $u \in [-1,1]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$. Derfor er $\operatorname{Span}(P(u,\varphi))$ et underrum af $\mathbb{C}^2$ med dimension én, der varierer kontinuert for alle $u \in [-1,1]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$ og har $P(u,\varphi)$ som ortogonal projektor.

Problemformulering

Lad $u := \cos(\theta)$ for $\theta \in [0,\pi]$[2] og definer matricen

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\theta,\varphi) := P(\cos(\theta),\varphi) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\cos(\theta) & \sqrt{1-\cos^2(\theta)}\exp(-i\varphi) \\ \sqrt{1-\cos^2(\theta)}\exp(i\varphi) & 1+\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\cos(\theta) & |\sin(\theta)|\exp(-i\varphi) \\ |\sin(\theta)|\exp(i\varphi) & 1+\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\cos(\theta) & \sin(\theta)\exp(-i\varphi) \\ \sin(\theta)\exp(i\varphi) & 1+\cos(\theta) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

hvor sidste lighed er opfyldt, idet $\sin(\theta) \geq 0$ for alle $\theta \in [0,\pi]$. Så er $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$ et underrum af $\mathbb{C}^2$ med dimension én, der varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen, dvs.,

[1] For definition af spor, se B.1.

[2] Variabelsubstitutionen kan lade sig gøre, idet $\cos(\theta)$ er en bijektiv funktion fra $[0,\pi]$ til $[-1,1]$.

$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$, og har $\tilde{P}(\theta,\varphi)$ som ortogonal projektor for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0, 2\pi)$.

I det følgende vil vi vise, at der eksisterer en basis for underrummet $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$ for ethvert sfærisk vinkelpar (θ,φ), og vi vil vise, at selvom underrummet $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$ varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen, så varierer enhver basis for $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$ diskontinuert på sfæren af enhedskuglen. Yderligere vil vi vise, at der eksisterer en frame for underrummet $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$ for ethvert sfærisk vinkelpar (θ,φ), som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen under visse betingelser.

4.2 Konstruktion af basis for underrummet $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$

I dette afsnit vil vi bevise, at der eksisterer en basis til $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$, som varierer diskontinuert på sfæren af enhedskuglen. Vi definerer først en operator, givet ved

$$\tilde{h}(\theta,\varphi) := i\left[\partial_\theta \tilde{P}(\theta,\varphi), \tilde{P}(\theta,\varphi)\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i\exp(-i\varphi) \\ -i\exp(i\varphi) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

[3]for $\theta \in [0,\pi]$ og $\varphi \in [0,2\pi)$, hvor $[\cdot,\cdot]$ er kommutatoren, defineret ved B.7. Bemærk, at $\tilde{h}(\theta,\varphi)$ er selvadjungeret, uafhængig af θ og 2π periodisk i variablen φ.

4.1 Lemma: Lad φ være fast[4], og lad $\tilde{h}_\varphi(\theta)$[5] være givet ved (4.2). For ethvert $\theta \in [0,\pi]$, lad $U_\varphi(\theta)$ være en matrix, som opfylder

$$\partial_\theta U_\varphi(\theta) = -i\tilde{h}_\varphi(\theta)\, U_\varphi(\theta), \tag{4.3}$$

med begyndelsesværdi $U_\varphi(0) = \mathrm{Id}$. Så er $U_\varphi(\theta)$ en unitær matrix og

$$U_\varphi^*(\theta)\tilde{P}_\varphi(\theta)\, U_\varphi(\theta) = \tilde{P}_\varphi(0), \quad \text{for alle } \theta \in [0,\pi]. \tag{4.4}$$

Bevis: Vi viser først, at $U_\varphi(\theta)$ er en unitær matrix. Idet $\partial_\theta U_\varphi^*(\theta) = (\partial_\theta U_\varphi(\theta))^*$, så er

$$\partial_\theta U_\varphi^*(\theta) = \left(-i\tilde{h}_\varphi(\theta)\, U_\varphi(\theta)\right)^* = \overline{-i} U_\varphi^*(\theta)\,\tilde{h}_\varphi^*(\theta) = iU_\varphi^*(\theta)\,\tilde{h}_\varphi(\theta), \tag{4.5}$$

hvor første lighed er opfyldt pga. (4.3) og sidste lighed er opfyldt, idet $\tilde{h}_\varphi(\theta)$ er selvadjungeret. Ud fra (4.3) og (4.5) er

$$\begin{aligned}
\partial_\theta\left(U_\varphi^*(\theta)\, U_\varphi(\theta)\right) &= \left(\partial_\theta U_\varphi^*(\theta)\right) U_\varphi(\theta) + U_\varphi^*(\theta)\left(\partial_\theta U_\varphi(\theta)\right) \\
&= iU_\varphi^*(\theta)\,\tilde{h}_\varphi(\theta)\, U_\varphi(\theta) - iU_\varphi^*(\theta)\,\tilde{h}_\varphi(\theta)\, U_\varphi(\theta) \\
&= \mathcal{O}_{2\times 2}.
\end{aligned}$$

Idet $\partial_\theta\left(U_\varphi^*(\theta)\, U_\varphi(\theta)\right)$ er lig nulmatricen, så er $U_\varphi^*(\theta)\, U_\varphi(\theta)$ konstant som funktion af θ. Idet begyndelsesværdien for $U_\varphi(\theta)$ er givet ved $U_\varphi(0) = \mathrm{Id}$, så er $U_\varphi^*(0) = \mathrm{Id}$, hvilket

[3]For en matrix $A(\theta,\varphi)$, afhængig af de to variable θ og φ, lader vi $\partial_\theta A(\theta,\varphi)$ og $\partial_\varphi A(\theta,\varphi)$ angive matricerne, hvor hver indgang i $A(\theta,\varphi)$ er differentieret mht. til hhv. θ og φ. Det er således underforstået, at hver indgang i en sådan matrix er differentiabel.

[4]Sprogbruget fast skal forstås således, at φ betragtes som en parameter, når vi siger, at variablen φ er fast.

[5]For en vilkårlig afbildning, afhængig af φ noteres φ som fodtegn, når φ antages fast.

medfører, at $U_\varphi^*(0)\,U_\varphi(0) = \mathrm{Id}$. Vi konkluderer derfor, at $U_\varphi^*(\theta)\,U_\varphi(\theta) = \mathrm{Id}$ for alle $\theta \in [0,\pi]$, hvorfor $U_\varphi(\theta)$ er en unitær matrix. Vi viser nu, at (4.4) er opfyldt. Idet $\tilde{P}_\varphi(\theta) = \tilde{P}_\varphi^2(\theta)$, så er

$$\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta) = \partial_\theta \tilde{P}_\varphi^2(\theta) = \left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta) + \tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right). \tag{4.6}$$

Ud fra (4.6) følger det, at

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta) &= \tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta) + \tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta)\\ &= \tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta) + \tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta)\\ &= 2\tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta),\end{aligned} \tag{4.7}$$

hvorfor $\tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta) = \mathcal{O}_{2\times 2}$ for alle $\theta \in [0,\pi]$. Definer nu matricen $\mathcal{A}_\varphi(\theta)$ ved

$$\mathcal{A}_\varphi(\theta) := U_\varphi^*(\theta)\,\tilde{P}_\varphi(\theta)\,U_\varphi(\theta), \quad \text{for alle } \theta \in [0,\pi].$$

Så er $\mathcal{A}_\varphi(0) = U_\varphi^*(0)\,\tilde{P}_\varphi(0)\,U_\varphi(0) = Id\tilde{P}_\varphi(0)\,Id = \tilde{P}_\varphi(0)$. Kan vi nu vise, at matricen $\mathcal{A}_\varphi(\theta)$ er konstant som funktion af θ, så er (4.4) opfyldt. Ud fra (4.3) og (4.5) er

$$\begin{aligned}&\partial_\theta \mathcal{A}_\varphi(\theta)\\ &= \left(\partial_\theta U_\varphi^*(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta)\,U_\varphi(\theta) + U_\varphi^*(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)U_\varphi(\theta) + U_\varphi^*(\theta)\,\tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta U_\varphi(\theta)\right)\\ &= U_\varphi^*(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta) - \left[\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta), \tilde{P}_\varphi(\theta)\right]\tilde{P}_\varphi(\theta) + \tilde{P}_\varphi(\theta)\left[\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta), \tilde{P}_\varphi(\theta)\right]\right)U_\varphi(\theta)\\ &= U_\varphi^*(\theta)\Bigg(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta) - \left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta) + 2\tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\tilde{P}_\varphi(\theta)\\ &- \tilde{P}_\varphi(\theta)\left(\partial_\theta \tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\Bigg)U_\varphi(\theta)\\ &= \mathcal{O}_{2\times 2},\end{aligned}$$

hvor sidste lighed er opfyldt pga. (4.7) og (4.6). Idet $\partial_\theta \mathcal{A}_\varphi(\theta)$ er lig nulmatricen, så er $\mathcal{A}_\varphi(\theta)$ konstant som funktion af θ, hvilket sammenholdt med $\mathcal{A}_\varphi(0) = \tilde{P}_\varphi(0)$ medfører, at

$$\mathcal{A}_\varphi(\theta) = U_\varphi^*(\theta)\,\tilde{P}_\varphi(\theta)\,U_\varphi(\theta) = \tilde{P}_\varphi(0), \quad \text{for alle } \theta \in [0,\pi]. \qquad \blacksquare$$

Eksistensen og entydigheden af en matrix $U_\varphi(\theta)$, som opfylder (4.3) med begyndelsesværdi $U_\varphi(0) = Id$, er garanteret af eksistens og entydighedssætningen af en førsteordens ODE, se eksempelvis [2, kapitel 6].

Vi anvender nu lemma 4.1 til at finde en egenvektor til projektionsmatricen $\tilde{P}_\varphi(\theta)$. Definer $\Psi_0 := \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, så er

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\varphi(0)\,\Psi_0 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-\cos(0) & \sin(0)\exp(-i\varphi)\\ \sin(0)\exp(i\varphi) & 1+\cos(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\ &= \Psi_0,\end{aligned} \tag{4.8}$$

hvorfor Ψ_0 er en egenvektor til $\tilde{P}_\varphi(0)$. Ifølge lemma 4.1, er

$$\tilde{P}_\varphi(\theta)\,U_\varphi(\theta) = U_\varphi(\theta)\,\tilde{P}_\varphi(0), \quad \text{for alle } \theta \in [0,\pi],$$

hvilket sammenholdt med (4.8) medfører, at

$$\tilde{P}_\varphi(\theta)\, U_\varphi(\theta)\, \Psi_0 = U_\varphi(\theta)\, \tilde{P}_\varphi(0)\, \Psi_0 = U_\varphi(\theta)\, \Psi_0,$$

hvorfor $\Psi_\varphi(\theta) := U_\varphi(\theta)\, \Psi_0$ er en egenvektor til $\tilde{P}_\varphi(\theta)$ for alle $\theta \in [0,\pi]$. Idet $\Psi_\varphi(\theta)$ er en egenvektor til $\tilde{P}_\varphi(\theta)$ og $\dim\left(\mathrm{Span}\left(\tilde{P}_\varphi(\theta)\right)\right) = 1$, så udgør $\Psi_\varphi(\theta)$ en basis for underrummet $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}_\varphi(\theta)\right)$.

Vi vil nu vise, at $\Psi_\varphi(\theta)$ ikke varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Idet $\tilde{h}_\varphi(\theta)$ er konstant som funktion af θ, så er

$$U_\varphi(\theta) = \exp\left(-i\theta\tilde{h}_\varphi(\theta)\right), \quad \text{for alle } \theta \in [0,\pi], \tag{4.9}$$

for hvilket betingelserne i lemma 4.1 er opfyldt. Idet $\tilde{h}_\varphi(\theta)$ er en konstant matrix, så kan vi anvende Putzer's formel, se [8, sætning 2], til at beregne eksponentialet (4.9). Definer matricen $B_\varphi := \tilde{h}_\varphi(\theta)$. For $r \in \mathbb{C}$ er det karakteristiske polynomium af B_φ givet ved

$$\begin{aligned}
\det(B_\varphi - rId) &= \det\left(\begin{bmatrix} -r & \frac{1}{2}i\exp(-i\varphi) \\ -\frac{1}{2}i\exp(i\varphi) & -r \end{bmatrix}\right) \\
&= r^2 - \frac{1}{4} \\
&= \left(r + \frac{1}{2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

hvorfor (4.10) er opfyldt for egenværdierne $r = \lambda_1 = 1/2$ og $r = \lambda_2 = -1/2$ af B_φ. Idet B_φ har to reelle distinkte egenværdier, så gælder det ifølge Putzer's formel, at

$$\begin{aligned}
U_\varphi(\theta) &= \exp(-i\theta B_\varphi) \\
&= \exp(-i\theta\lambda_1)\, Id + \frac{\exp(-i\theta\lambda_1) - \exp(-i\theta\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}(B_\varphi - \lambda_1 Id) \\
&= \exp(-i\theta/2)\, Id + (\exp(-i\theta/2) - \exp(i\theta/2))(B_\varphi - 1/2Id) \\
&= \cos(\theta/2)\, Id - 2i\sin(\theta/2)\, B_\varphi \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)\exp(-i\varphi) \\ \sin(\theta/2)\exp(i\varphi) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

hvorfor

$$\Psi_\varphi(\theta) = U_\varphi(\theta)\, \Psi_0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2)\exp(-i\varphi) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}, \quad \text{for alle } \theta \in [0,\pi]. \tag{4.11}$$

Vi ser nu, at

$$\lim_{\theta\to\pi} \Psi_\varphi(\theta) = \Psi_\varphi(\pi) = \exp(-i\varphi)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Idet grænseværdien $\lim_{\theta\to\pi} \Psi_\varphi(\theta)$ er afhængig af parameteren φ, se (4.12), så varierer $\Psi_\varphi(\theta)$ ikke kontinuert på sfæren af enhedskuglen, hvorfor $\Psi_\varphi(\theta)$ udgør en diskontinuert (ortonormal) basis for $\mathrm{Span}\left(\tilde{P}_\varphi(\theta)\right)$.

4.3 Der eksisterer ikke en kontinuert basis for underrummet $\mathrm{Span}\Big(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\Big)$

I afsnit 4.2 fandt vi en basis $\Psi\left(\theta,\varphi\right)$ for $\mathrm{Span}\Big(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\Big)$, givet ved (4.11). Hertil beviste vi, at $\Psi\left(\theta,\varphi\right)$ varierer diskontinuert. I dette afsnit vil vi bevise, at der ikke eksisterer en basis for $\mathrm{Span}\Big(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\Big)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen.

4.2 Sætning: Lad $Q\left(\theta,\varphi\right)$ være en vilkårlig projektionsmatrix, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen, hvor $\mathrm{rank}(Q\left(\theta,\varphi\right))=1$ for alle $\theta\in[0,\pi]$ og alle $\varphi\in[0,2\pi)$. Hvis

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tr}\left(Q\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\right)\sin(\theta)d\theta d\varphi\neq 0, \tag{4.13}$$

så eksisterer der ikke en glat normeret vektor $\Phi(\theta,\varphi)$[6], sådan at $Q(\theta,\varphi)\Phi(\theta,\varphi)=\Phi(\theta,\varphi)$.

Bevis: Antag, at $\Phi(\theta,\varphi)$ er en normeret glat vektor, sådan at $Q(\theta,\varphi)\Phi(\theta,\varphi)=\Phi(\theta,\varphi)$ for alle $\theta\in[0,\pi]$ og alle $\varphi\in[0,2\pi)$. Idet den normerede vektor $\Phi(\theta,\varphi)$ er en egenvektor til $Q\left(\theta,\varphi\right)$ og $\mathrm{rank}(Q\left(\theta,\varphi\right))=1$, så udgør $\Phi(\theta,\varphi)$ en ortonormal basis for vektorrummet udspændt af matricen $Q\left(\theta,\varphi\right)$, hvorfor

$$Q(\theta,\varphi)=\langle\Phi(\theta,\varphi),\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}\Phi(\theta,\varphi). \tag{4.14}$$

Under antagelsen omkring $\Phi(\theta,\varphi)$ vil vi nu vise, at dobbeltintegralet (4.13) er lig nul. Vi ser, at

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(Q\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\right)\\
&=\langle\Phi(\theta,\varphi),Q\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\Phi\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&=\langle\Phi(\theta,\varphi),\langle\Phi(\theta,\varphi),\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\Phi\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}\Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&=\langle\Phi(\theta,\varphi),\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\Phi\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&=\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\left(\partial_\theta Q(\theta,\varphi)\right)\left(\partial_\varphi Q(\theta,\varphi)\right)\Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&-\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\left(\partial_\varphi Q(\theta,\varphi)\right)\left(\partial_\theta Q(\theta,\varphi)\right)\Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

hvor første lighed er opfyldt pga. definitionen på sporet af en matrix, se B.1, anden lighed er opfyldt pga. (4.14), og tredje lighed er opfyldt, idet $\Phi(\theta,\varphi)$ er en normeret vektor. Idet

$$\partial_\theta Q(\theta,\varphi)=\langle\partial_\theta\Phi(\theta,\varphi),\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}\Phi(\theta,\varphi)+\langle\Phi(\theta,\varphi),\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}\partial_\theta\Phi(\theta,\varphi)$$

og

$$\partial_\varphi Q(\theta,\varphi)=\langle\partial_\varphi\Phi(\theta,\varphi),\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}\Phi(\theta,\varphi)+\langle\Phi(\theta,\varphi),\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}\partial_\varphi\Phi(\theta,\varphi).$$

Så er

$$\left(\partial_\theta Q(\theta,\varphi)\right)\Phi(\theta,\varphi)=\langle\partial_\theta\Phi(\theta,\varphi),\Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\Phi(\theta,\varphi)+\partial_\theta\Phi(\theta,\varphi),$$

[6] Normeret betyder, at $\|\Phi(\theta,\varphi)\|_{\mathbb{C}^2}=1$ for alle $\theta\in[0,\pi]$ og $\varphi\in[0,2\pi)$, og glat betyder, at alle indgangene i $\Phi\left(\theta,\varphi\right)$ er mindst to gange kontinuert differentiabel som funktion af θ og φ.

og

$$\begin{aligned}
&(\partial_\varphi Q(\theta,\varphi))\,(\partial_\theta Q(\theta,\varphi))\,\Phi(\theta,\varphi)\\
&= \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \Phi(\theta,\varphi) + \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \Phi(\theta,\varphi), \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \Phi(\theta,\varphi) + \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\\
&= \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi). \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

En tilsvarende udregning viser, at

$$\begin{aligned}
&(\partial_\theta Q(\theta,\varphi))\,(\partial_\varphi Q(\theta,\varphi))\,\Phi(\theta,\varphi)\\
&= \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\\
&+ \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Sammenholdes (4.15) med (4.16) og (4.17), så opnår vi, at

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(Q\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right), \partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\right)\\
&= \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&+ \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&- \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Lad $\varphi \in (0,2\pi)$ være fast, og lad $\varepsilon > 0$ være et vilkårligt reelt tal, sådan at $\varphi + \varepsilon \in (0,2\pi)$. Så gælder det ifølge Taylor's formel, se eksempelvis [13, kapitel 5], at

$$\Phi(\theta,\varphi+\varepsilon) = \Phi(\theta,\varphi) + \varepsilon \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi) + \mathcal{R}\left(\varepsilon^2\right),$$

for et restled $\mathcal{R}\left(\varepsilon^2\right)$. Idet $\|\Phi(\theta,\varphi+\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^2} = 1$ for alle $\varepsilon > 0$ og alle $\theta \in [0,\pi]$, så er

$$\begin{aligned}
1 &= \|\Phi(\theta,\varphi+\varepsilon)\|^2_{\mathbb{C}^2} = \langle \Phi(\theta,\varphi+\varepsilon), \Phi(\theta,\varphi+\varepsilon)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&= \langle \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \varepsilon\left(\langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right) + \tilde{R}\left(\varepsilon^2\right)\\
&= \|\Phi(\theta,\varphi)\|^2_{\mathbb{C}^2} + \varepsilon\left(\langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right) + \tilde{R}\left(\varepsilon^2\right)\\
&= 1 + \varepsilon\left(\langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right) + \tilde{R}\left(\varepsilon^2\right) \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

for et restled $\tilde{R}\left(\varepsilon^2\right)$. Ud fra (4.19) ser vi, at

$$\varepsilon\left(\langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right) = 0$$

for et vilkårligt $\varepsilon > 0$, hvorfor $\langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} = 0$. Et tilsvarende argument viser, at $\langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} = 0$. Derfor er

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&= \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\left(\langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

hvorfor (4.18) reduceres til

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(Q\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right), \partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\right) &= \langle \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2}\\
&= \partial_\theta \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\varphi \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} - \partial_\varphi \langle \Phi(\theta,\varphi), \partial_\theta \Phi(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2},
\end{aligned}$$

hvor sidste lighed er opfyldt, idet $\partial_\theta\partial_\varphi\Phi(\theta,\varphi) = \partial_\varphi\partial_\theta\Phi(\theta,\varphi)$, hvilket er opfyldt pga. antagelsen, at $\Phi(\theta,\varphi)$ er glat. I alt opnås, at

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{tr}\left(Q\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta Q\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi Q\left(\theta,\varphi\right)\right]\right)\sin\left(\theta\right)d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\partial_\theta\left\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi\Phi\left(\theta,\varphi\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)\sin\left(\theta\right)d\theta d\varphi \\
&- \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\partial_\varphi\left\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\partial_\theta\Phi\left(\theta,\varphi\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)d\varphi\sin\left(\theta\right)d\theta.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Idet $\Phi\left(\theta,\varphi\right)$ er glat, så gælder det ifølge [10, sætning 7.17], at

$$\lim_{\theta\to 0}\partial_\varphi\Phi\left(\theta,\varphi\right) = \partial_\varphi\lim_{\theta\to 0}\Phi\left(\theta,\varphi\right) = \partial_\varphi\Phi\left(0,\varphi\right). \tag{4.21}$$

Yderligere gælder det ud fra kontinuiteten af $\Phi\left(\theta,\varphi\right)$, at $\lim_{\theta\to 0}\Phi\left(\theta,\varphi\right)$ er konstant som funktion af φ, hvorfor $\lim_{\theta\to 0}\partial_\varphi\Phi\left(\theta,\varphi\right) = \mathbf{0}$. Ud fra (4.21) er det således opfyldt, at $\lim_{\theta\to 0}\partial_\varphi\Phi\left(\theta,\varphi\right) = \partial_\varphi\Phi\left(0,\varphi\right) = \mathbf{0}$. Et tilsvarende argument viser, at $\partial_\varphi\Phi\left(\pi,\varphi\right) = \mathbf{0}$ for alle $\varepsilon \in [0,2\pi)$.

Med variabelsubstitutionen $u = \cos\left(\theta\right)$ for $\theta \in [0,\pi]$ beregner vi nu:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \left(\partial_\theta\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi\Phi\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)\sin\left(\theta\right)d\theta \\
&= \int_{-1}^{1} \partial_u\langle\Phi\left(\arccos\left(u\right),\varphi\right),\partial_\varphi\Phi\left(\arccos\left(u\right),\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}du \\
&= \left[\langle\Phi\left(\arccos\left(u\right),\varphi\right),\partial_\varphi\Phi\left(\arccos\left(u\right),\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right]_{u=-1}^{u=1} \\
&= \langle\Phi\left(0,\varphi\right),\partial_\varphi\Phi\left(0,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle\Phi\left(\pi,\varphi\right),\partial_\varphi\Phi\left(\pi,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2} \\
&= \langle\Phi\left(0,\varphi\right),\mathbf{0}\rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle\Phi\left(\pi,\varphi\right),\mathbf{0}\rangle_{\mathbb{C}^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Yderligere beregner vi:

$$\int_0^{2\pi}\partial_\varphi\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\partial_\theta\Phi\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}d\varphi = \left[\langle\Phi\left(\theta,\varphi\right),\partial_\theta\Phi\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0, \tag{4.23}$$

hvor sidste lighed er opfyldt, idet $\Phi\left(\theta,\varphi\right)$ er 2π periodisk i variablen φ (at $\Phi\left(\theta,\varphi\right)$ er 2π periodisk i variablen φ, følger fra antagelsen, at $\Phi\left(\theta,\varphi\right)$ er kontinuert på en sfære). Sammenholdes (4.22) og (4.23), ser vi, at dobbeltintegralet (4.20) er lig nul, hvilket afslutter beviset. ■

Idet $\operatorname{rank}\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right) = 1$ for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$, så kan vi anvende sætning 4.2 til at vise, at der ikke eksisterer en basis for $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Ud fra definitionen af $\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)$, se (4.1), beregner vi dobbeltintegralet

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{tr}\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\left[\partial_\theta\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right),\partial_\varphi\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right]\right)\sin(\theta)d\theta d\varphi = 2\pi i \neq 0. \tag{4.24}$$

Ud fra (4.24) eksisterer der ikke en glat normeret egenvektor til $\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)$, jf. sætning 4.2, hvorfor vi konkluderer, at der ikke eksisterer en basis for $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Alle udregninger til at verificere (4.24) er samlet i appendiks B.

4.4 Konstruktion af frame for underrummet Span$\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$

I dette afsnit beviser vi, at der eksisterer en frame for Span$\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. For at bevise eksistensen af denne frame anvendes følgende metode:

i) Vi finder først et underrum W af $\mathbb{C}^4$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen, og vi finder en basis for W, som varierer diskontinuert på sfæren af enhedskuglen.
ii) Herefter viser vi, at der under visse betingelser eksisterer en unitær matrix, som roterer den diskontinuerte basis for W over i en basis, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen.
iii) Ud fra den kontinuerte basis for W finder vi en frame for underrummet Span$\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$ af $\mathbb{C}^2$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen.

Konstruktion af basis til et underrum af $\mathbb{C}^4$

Betragt $\mathbb{C}^4$. For $\theta \in [0,\pi]$ og $\varphi \in [0,2\pi)$, definer matricen

$$\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right) := \begin{bmatrix} \tilde{P}\left(\theta,\varphi\right) & \mathcal{O}_{2\times 2} \\ \mathcal{O}_{2\times 2} & \tilde{P}\left(\theta,-\varphi\right) \end{bmatrix},$$

hvor $\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)$ er projektionsmatricen, defineret ved (4.1). Idet $\widehat{P}^2\left(\theta,\varphi\right) = \widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)$ og $\widehat{P}^*\left(\theta,\varphi\right) = \widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)$, så er $\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)$ en ortogonal projektionsmatrix, jf. definition 3.5. Yderligere er rank$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right) = 2$ for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$. Derfor er Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$ et underrum af $\mathbb{C}^4$ med dimension to, der varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen og har $\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)$ som projektor for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$.

For $\theta \in [0,\pi]$ og $\varphi \in [0,2\pi)$, definer vektorerne

$$\widehat{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right) := \begin{bmatrix} \Psi\left(\theta,\varphi\right) \\ \mathcal{O}_{2\times 1} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \widehat{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right) := \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{2\times 1} \\ \Psi\left(\theta,-\varphi\right) \end{bmatrix}.$$

Så er $\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\widehat{\Psi}_j\left(\theta,\varphi\right) = \widehat{\Psi}_j\left(\theta,\varphi\right)$ for $j \in \{1,2\}$, hvorfor $\widehat{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right)$ og $\widehat{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)$ er lineært uafhængige egenvektorer for $\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)$, og $\left\{\widehat{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right), \widehat{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)\right\}$ er derfor en ortonormal basis for Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$ for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$. Idet $\widehat{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right)$ og $\widehat{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)$ defineres ud fra hhv. $\Psi\left(\theta,\varphi\right)$ og $\Psi\left(\theta,-\varphi\right)$, så varierer $\left\{\widehat{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right), \widehat{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)\right\}$ diskontinuert på sfæren af enhedskuglen.

Konstruktion af kontinuert basis til underrummet Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$

I dette afsnit viser vi, at der under visse betingelser eksisterer en basis for Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Vi ser først, at

$$\widehat{\Psi}_1\left(\pi,\varphi\right) = \begin{bmatrix} \exp\left(-i\varphi\right)\Psi\left(\pi,0\right) \\ \mathcal{O}_{2\times 1} \end{bmatrix} = \exp\left(-i\varphi\right)\widehat{\Psi}_1\left(\pi,0\right)$$

og

$$\widehat{\Psi}_2(\pi,\varphi) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{2\times 1} \\ \exp(i\varphi)\,\Psi(\pi,0) \end{bmatrix} = \exp(i\varphi)\,\widehat{\Psi}_2(\pi,0)\,,$$

hvorfor vi kan definere en unitær matrix

$$\alpha(\varphi) := \begin{bmatrix} \exp(-i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

således at

$$\widehat{\Psi}_j(\pi,\varphi) = \sum_{k=1}^{2}[\alpha(\varphi)]_{kj}\widehat{\Psi}_k(\pi,0)\,, \quad \text{for } j\in\{1,2\} \tag{4.26}$$

for alle $\varphi \in [0, 2\pi)$, hvor notationen $[\cdot]_{kj}$ angiver indgangen i en matrix for række k og søjle j.

4.3 Sætning: Lad h_1 og h_2 være selvadjungerede, kontinuerte og 2π periodiske operatorer afhængig af $\varphi \in [0, 2\pi)$. Antag, at $\alpha(\varphi)$, defineret ved (4.25), kan skrives som produktet

$$\alpha(\varphi) = \exp(ih_1(\varphi))\exp(ih_2(\varphi))\,. \tag{4.27}$$

Så eksisterer der en unitær matrix $\beta(\theta,\varphi)$ for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0, 2\pi)$, sådan at $\{\tilde{\Psi}_n(\theta,\varphi)\}_{n\in\{1,2\}}$ er en basis for $\operatorname{Span}\left(\widehat{P}(\theta,\varphi)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen, hvor

$$\tilde{\Psi}_n(\theta,\varphi) := \sum_{j=1}^{2}[\beta(\theta,\varphi)]_{jn}\,\widehat{\Psi}_j(\theta,\varphi)\,, \quad \text{for } n\in\{1,2\}. \tag{4.28}$$

Bevis: Lad h_1 og h_2 være selvadjungerede, kontinuerte og 2π periodiske operatorer afhængig af φ. For $\theta \in [0,\pi]$ og $\varphi \in [0, 2\pi)$, definer matricen

$$\beta(\theta,\varphi) := \exp\left(\frac{-i\theta}{\pi}h_2(\varphi)\right)\exp\left(\frac{-i\theta}{\pi}h_1(\varphi)\right). \tag{4.29}$$

Ud fra (4.29) ser vi, at den inverse af $\beta(\theta,\varphi)$ er givet ved

$$\beta^{-1}(\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{i\theta}{\pi}h_1(\varphi)\right)\exp\left(\frac{i\theta}{\pi}h_2(\varphi)\right),$$

og idet h_1 og h_2 er selvadjungeret, så er $\beta^*(\theta,\varphi) = \beta^{-1}(\theta,\varphi)$, hvorfor $\beta(\theta,\varphi)$ er en unitær matrix for alle $\theta\in[0,\pi]$ og alle $\varphi\in[0,2\pi)$.

Idet h_1 og h_2 er kontinuerte og 2π periodiske i variablen φ, så følger det, at $\beta(\theta,\varphi)$ er 2π periodisk i variablen φ og varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen for alle $\theta\in[0,\pi)$ og alle $\varphi\in[0,2\pi)$, jf. lemma B.6.

Lad $\tilde{\Psi}_n(\theta,\varphi)$ være givet ved (4.28). Idet $\left\{\widehat{\Psi}_1(\theta,\varphi)\,,\widehat{\Psi}_2(\theta,\varphi)\right\}$ varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen for alle $\theta\in[0,\pi)$ og alle $\varphi\in[0,2\pi)$, så varierer $\left\{\tilde{\Psi}_1(\theta,\varphi)\,,\tilde{\Psi}_2(\theta,\varphi)\right\}$ kontinuert på sfæren af enhedskuglen for alle $\theta\in[0,\pi)$ og alle $\varphi\in[0,2\pi)$ som en sammensætning af kontinuerte afbildninger.

Vi beviser nu, at $\tilde{\Psi}_n\left(\theta,\varphi\right)$ er kontinuert på hele sfæren af enhedskuglen, dvs., vi skal vise, at $\lim_{\theta\to\pi}\tilde{\Psi}_n\left(\theta,\varphi\right)=\tilde{\Psi}_n\left(\pi,\varphi\right)$ er konstant som funktion af φ. Ud fra (4.28) er

$$\widehat{\Psi}_j\left(\theta,\varphi\right)=\sum_{n=1}^{2}\left[\beta^{-1}\left(\theta,\varphi\right)\right]_{nj}\tilde{\Psi}_n\left(\theta,\varphi\right),\quad \text{for } j\in\{1,2\}. \tag{4.30}$$

Ud fra (4.28) og (4.26) er

$$\tilde{\Psi}_n\left(\pi,\varphi\right)=\sum_{j=1}^{2}\left[\beta\left(\pi,\varphi\right)\right]_{jn}\widehat{\Psi}_j\left(\pi,\varphi\right)=\sum_{j=1}^{2}\left[\beta\left(\pi,\varphi\right)\right]_{jn}\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha\left(\varphi\right)\right]_{kj}\widehat{\Psi}_k\left(\pi,0\right),$$

hvilket sammenholdt med (4.30) medfører, at

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_n\left(\pi,\varphi\right)&=\sum_{j=1}^{2}\left[\beta\left(\pi,\varphi\right)\right]_{jn}\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha\left(\varphi\right)\right]_{kj}\sum_{i=1}^{2}\left[\beta^{-1}\left(\pi,0\right)\right]_{ik}\tilde{\Psi}_i\left(\pi,0\right)\\&=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\beta^{-1}\left(\pi,0\right)\right]_{ik}\left[\alpha\left(\varphi\right)\right]_{kj}\left[\beta\left(\pi,\varphi\right)\right]_{jn}\right)\tilde{\Psi}_i\left(\pi,0\right)\\&=\sum_{i=1}^{2}\left[\beta^{-1}\left(\pi,0\right)\alpha\left(\varphi\right)\beta\left(\pi,\varphi\right)\right]_{in}\tilde{\Psi}_i\left(\pi,0\right),\end{aligned}$$

hvor sidste lighed er opfyldt pga. generelle regneregler for multiplikation af tre matricer. Vi ser nu, at

$$\beta^{-1}\left(\pi,\varphi\right)=\exp\left(ih_1\left(\varphi\right)\right)\exp\left(ih_2\left(\varphi\right)\right)=\alpha\left(\varphi\right), \tag{4.31}$$

hvor sidste lighed er opfyldt pga. antagelsen (4.27). Det gælder derfor, at $\alpha\left(\varphi\right)\beta\left(\pi,\varphi\right)=Id$. Sammenholdes (4.25) og (4.31), ser vi, at $\beta^{-1}\left(\pi,0\right)=\alpha\left(0\right)=Id$, hvorfor $\beta^{-1}\left(\pi,0\right)\alpha\left(\varphi\right)\beta\left(\pi,\varphi\right)=Id$. I alt opnås, at

$$\lim_{\theta\to\pi}\tilde{\Psi}_n\left(\theta,\varphi\right)=\tilde{\Psi}_n\left(\pi,\varphi\right)=\sum_{i=1}^{2}\left[Id\right]_{in}\tilde{\Psi}_i\left(\pi,0\right)=\tilde{\Psi}_n\left(\pi,0\right),\quad \text{for } n\in\{1,2\}. \tag{4.32}$$

Idet grænseværdien (4.32) er konstant givet ved vektoren $\tilde{\Psi}_n\left(\pi,0\right)$, så varierer $\tilde{\Psi}_n\left(\theta,\varphi\right)$ kontinuert på hele sfæren af enhedskuglen for både $n=1$ og $n=2$. Vi konkluderer herved, at $\{\tilde{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right),\tilde{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)\}$ er en basis for underrummet Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)\subseteq\mathbb{C}^4$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. ■

Repræsentation af matricen $\alpha\left(\varphi\right)$

I dette afsnit viser vi, at matricen $\alpha\left(\varphi\right)$, defineret ved (4.25), opfylder forudsætningerne for at anvende sætning 4.3.

Del 1

For $\varphi\in[0,2\pi)$ og et vilkårligt reelt tal $\delta>0$, definer matricen

$$\alpha_\delta\left(\varphi\right):=\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\begin{bmatrix}\exp\left(-i\varphi\right) & i\delta\\ i\delta & \exp\left(i\varphi\right)\end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Idet determinanten af $\alpha_\delta(\varphi)$ er lig 1 for alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ (derfor forskellig fra nul), så er $\alpha_\delta(\varphi)$ invertibel med

$$\begin{aligned}\alpha_\delta(\varphi)^{-1} &= \frac{1}{\det(\alpha_\delta(\varphi))} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \begin{bmatrix} \exp(i\varphi) & -i\delta \\ -i\delta & \exp(-i\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \begin{bmatrix} \exp(i\varphi) & -i\delta \\ -i\delta & \exp(-i\varphi) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Ud fra (4.33) og (4.34) ser vi, at $\alpha_\delta^{-1}(\varphi) = \alpha_\delta^*(\varphi)$, hvorfor $\alpha_\delta(\varphi)$ er en unitær matrix. Idet $\alpha_\delta(\varphi)$ er en unitær matrix, så gælder det ifølge spektralsætningen, se eksempelvis [6, kapitel 12], at

$$\alpha_\delta(\varphi) = \mathcal{P}D\mathcal{P}^*, \tag{4.35}$$

hvor $\mathcal{P}$ er en matrix bestående af de ortonormale egenvektorer for $\alpha_\delta(\varphi)$, og D er en diagonalmatrix bestående af egenværdierne for $\alpha_\delta(\varphi)$. Vi finder nu egenværdierne og tilhørende egenvektorer for matricen $\alpha_\delta(\varphi)$, sådan at vi kan konstruere $\mathcal{P}$ og D.

For $t \in \mathbb{C}$ er

$$\alpha_\delta(\varphi) - tId = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \begin{bmatrix} \exp(-i\varphi) - t\sqrt{1+\delta^2} & i\delta \\ i\delta & \exp(i\varphi) - t\sqrt{1+\delta^2} \end{bmatrix},$$

hvorfor det karakteristiske polynomium er givet ved

$$\det(\alpha_\delta(\varphi) - tId) = t^2 - \frac{2\cos(\varphi)}{\sqrt{1+\delta^2}} t + 1 = 0. \tag{4.36}$$

Egenværdierne $\lambda_1(\varphi)$ og $\lambda_2(\varphi)$ til $\alpha_\delta(\varphi)$, dvs., rødderne til (4.36), beregnes til

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varphi) &= \frac{2\left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\cos(\varphi) + \sqrt{4\cos^2(\varphi)\left(1+\delta^2\right)^{-1} - 4}}{2} \\ &= \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\cos(\varphi) + \sqrt{\cos^2(\varphi)\left(1+\delta^2\right)^{-1} - 1} \\ &= \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\left(\cos(\varphi) + \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1 - \delta^2}\right) \\ &= \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\left(\cos(\varphi) + \sqrt{-\sin^2(\varphi) - \delta^2}\right) \\ &= \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\left(\cos(\varphi) + i\sqrt{\sin^2(\varphi) + \delta^2}\right), \end{aligned} \tag{4.37}$$

og

$$\begin{aligned}\lambda_2(\varphi) &= \frac{2\left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\cos(\varphi) - \sqrt{4\cos^2(\varphi)\left(1+\delta^2\right)^{-1} - 4}}{2} \\ &= \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}\left(\cos(\varphi) - i\sqrt{\sin^2(\varphi) + \delta^2}\right). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Egenvektorerne tilhørende egenværdierne $\lambda_1(\varphi)$ og $\lambda_2(\varphi)$ finder vi ved at løse ligningssystemerne $(\alpha_\delta(\varphi) - \lambda_j(\varphi) Id)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for $j \in \{1,2\}$. For $\lambda_1(\varphi)$ er

$$\begin{aligned}
&\alpha_\delta(\varphi) - \lambda_1(\varphi) Id \\
&= \left(1+\delta^2\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} -i\sin(\varphi) - i\sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2} & i\delta \\ i\delta & i\sin(\varphi) - i\sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2} \end{bmatrix} \\
&\backsim \begin{bmatrix} \left(-\sin(\varphi) - \sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2}\right)/\delta & 1 \\ 1 & \left(\sin(\varphi) - \sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2}\right)/\delta \end{bmatrix} \\
&\backsim \begin{bmatrix} 1 & \left(\sin(\varphi) - \sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2}\right)/\delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

hvor $\sim$ angiver, at matricerne er ækvivalente mht. de sædvanlige rækkeoperationer for matricer. Ud fra (4.39) bestemmer vi egenvektoren $\boldsymbol{\psi}_1(\varphi)$ til matricen $\alpha_\delta(\varphi)$ for egenværdien $\lambda_1(\varphi)$ til

$$\boldsymbol{\psi}_1(\varphi) = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} -\sin(\varphi) + \sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2} \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Ækvivalent med ovenstående finder vi egenvektoren $\boldsymbol{\psi}_2(\varphi)$ til matricen $\alpha_\delta(\varphi)$ for egenværdien $\lambda_2(\varphi)$ til

$$\boldsymbol{\psi}_2(\varphi) = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} -\sin(\varphi) - \sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2} \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Lad

$$\psi_1(\varphi) := \frac{1}{\|\boldsymbol{\psi}_1(\varphi)\|_{\mathbb{C}^2}}\boldsymbol{\psi}_1(\varphi) \qquad \text{og} \qquad \psi_2(\varphi) := \frac{1}{\|\boldsymbol{\psi}_2(\varphi)\|_{\mathbb{C}^2}}\boldsymbol{\psi}_2(\varphi),$$

så er $\psi_1(\varphi)$ og $\psi_2(\varphi)$ ortonormale egenvektorer til matricen $\alpha_\delta(\varphi)$ for hhv. egenværdierne $\lambda_1(\varphi)$ og $\lambda_2(\varphi)$.

Definer $\mathcal{P} := \begin{bmatrix}\psi_1(\varphi) & \psi_2(\varphi)\end{bmatrix}$ og $D := \begin{bmatrix}\lambda_1(\varphi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\varphi)\end{bmatrix}$, så er

$$\begin{aligned}
\alpha_\delta(\varphi) &= \begin{bmatrix}\psi_1(\varphi) & \psi_2(\varphi)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_1(\varphi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\varphi)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\psi_1(\varphi) & \psi_2(\varphi)\end{bmatrix}^* \\
&= \lambda_1(\varphi) P_1(\varphi) + \lambda_2(\varphi) P_2(\varphi),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

jf. (4.35), hvor $P_1(\varphi) := \psi_1(\varphi)\psi_1(\varphi)^*$ og $P_2(\varphi) := \psi_2(\varphi)\psi_2(\varphi)^*$. Herved konkluderer vi, at $P_1(\varphi)$ og $P_2(\varphi)$ er selvadjungerede, kontinuerte og 2π periodiske operatorer som funktion af φ.

Idet egenværdierne er komplekse tal, se hhv. (4.37) og (4.38), så er

$$\lambda_j(\varphi) = |\lambda_j(\varphi)| \exp(i\operatorname{Arg}(\lambda_j(\varphi))) = \exp(i\operatorname{Arg}(\lambda_j(\varphi))), \tag{4.41}$$

hvor sidste lighed er opfyldt, idet $|\lambda_j(\varphi)| = 1$ for alle $\varphi \in [0,2\pi)$ og $j \in \{1,2\}$. Sammenholdes (4.40) og (4.41), så opnås, at

$$\begin{aligned}
\alpha_\delta(\varphi) &= \exp(i\operatorname{Arg}(\lambda_1(\varphi))) P_1(\varphi) + \exp(i\operatorname{Arg}(\lambda_2(\varphi))) P_2(\varphi) \\
&= \exp(i(\operatorname{Arg}(\lambda_1(\varphi)) P_1(\varphi) + \operatorname{Arg}(\lambda_2(\varphi)) P_2(\varphi))).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Yderligere ser vi, ud fra (4.37) og (4.38), at

$$\frac{\sqrt{\sin^2(\varphi)+\delta^2}}{\sqrt{1+\delta^2}} > 0$$

for alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ og alle $\delta > 0$, hvorfor argumentet til de komplekse tal er veldefineret ved

$$\operatorname{Arg}(\lambda_1(\varphi)) = \arccos\left(\frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right) \quad \text{og} \quad \operatorname{Arg}(\lambda_2(\varphi)) = -\arccos\left(\frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1+\delta^2}}\right).$$

Lad $m_1(\varphi) := \operatorname{Arg}(\lambda_1(\varphi))$ og $m_2(\varphi) := \operatorname{Arg}(\lambda_2(\varphi))$. Så kan vi definere en selvadjungeret, kontinuert og 2π periodisk operator $h_1(\varphi) := m_1(\varphi) P_1(\varphi) + m_2(\varphi) P_2(\varphi)$, sådan at (4.42) reduceres til

$$\alpha_\delta(\varphi) = \exp(ih_1(\varphi)), \quad \text{for alle } \varphi \in [0, 2\pi). \tag{4.43}$$

Del 2

For $\varphi \in [0, 2\pi)$ og et vilkårligt reelt tal $\delta > 0$, definer matricen

$$\begin{aligned}\gamma_\delta(\varphi) := \alpha_\delta^{-1}(\varphi)\,\alpha(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\begin{bmatrix}\exp(i\varphi) & -i\delta \\ -i\delta & \exp(-i\varphi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\exp(-i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi)\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\begin{bmatrix}1 & -i\delta\exp(i\varphi) \\ -i\delta\exp(-i\varphi) & 1\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Ud fra (4.44) ser vi, at $\gamma_\delta(\varphi)^{-1} = \gamma_\delta(\varphi)^*$, hvorfor $\gamma_\delta(\varphi)$ er en unitær matrix. Idet $\gamma_\delta(\varphi)$ er en unitær matrix, kan vi anvende spektralsætningen til at finde en repræsentation af $\gamma_\delta(\varphi)$. For $t \in \mathbb{C}$ er det karakteristiske polynomium af matricen $\gamma_\delta(\varphi)$ givet ved

$$\det(\gamma_\delta(\varphi) - tId) = t^2 - \frac{2}{\sqrt{1+\delta^2}}t + 1 = 0. \tag{4.45}$$

Ud fra (4.45) beregner vi egenværdierne $\tilde{\lambda}_1$ og $\tilde{\lambda}_2$ for $\gamma_\delta(\varphi)$ til

$$\tilde{\lambda}_1 = \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}(1+i\delta) \quad \text{og} \quad \tilde{\lambda}_2 = \left(1+\delta^2\right)^{-1/2}(1-i\delta).$$

Bemærk, at $\tilde{\lambda}_1$ og $\tilde{\lambda}_2$ er uafhængige af φ. Vi finder nu egenvektorerne tilhørende $\tilde{\lambda}_1$ og $\tilde{\lambda}_2$ ved at løse ligningssystemerne $\left(\gamma_\delta(\varphi) - \tilde{\lambda}_j Id\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for $j \in \{1, 2\}$. For $\tilde{\lambda}_1$ er

$$\begin{aligned}\gamma_\delta(\varphi) - \tilde{\lambda}_1 Id &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\begin{bmatrix}-i\delta & -i\delta\exp(i\varphi) \\ -i\delta\exp(-i\varphi) & -i\delta\end{bmatrix} \\ &\backsim \begin{bmatrix}1 & \exp(i\varphi) \\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Ud fra (4.46) bestemmer vi egenvektoren $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1(\varphi)$ til matricen $\gamma_\delta(\varphi)$ for egenværdien $\tilde{\lambda}_1$ til

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1(\varphi) = \begin{bmatrix}-\exp(i\varphi) \\ 1\end{bmatrix}.$$

Ækvivalent med ovenstående finder vi egenvektorer $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2(\varphi)$ til matricen $\gamma_\delta(\varphi)$ for egenværdien $\tilde{\lambda}_2$ til

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2(\varphi) = \begin{bmatrix}\exp(i\varphi) \\ 1\end{bmatrix}.$$

Lad

$$\tilde{\psi}_1\left(\varphi\right) := \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\left(\varphi\right)\|_{\mathbb{C}^2}}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\left(\varphi\right) \quad \text{og} \quad \tilde{\psi}_2\left(\varphi\right) := \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\left(\varphi\right)\|_{\mathbb{C}^2}}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\left(\varphi\right),$$

så er $\tilde{\psi}_1\left(\varphi\right)$ og $\tilde{\psi}_2\left(\varphi\right)$ ortonormale egenvektorer til matricen $\gamma_\delta\left(\varphi\right)$ for hhv. egenværdierne $\tilde{\lambda}_1$ og $\tilde{\lambda}_2$.

Ifølge spektralsætningen kan vi finde to matricer $\tilde{P}_1\left(\varphi\right) := \tilde{\psi}_1\left(\varphi\right)\tilde{\psi}_1\left(\varphi\right)^*$ og $\tilde{P}_2\left(\varphi\right) := \tilde{\psi}_2\left(\varphi\right)\tilde{\psi}_2\left(\varphi\right)^*$, sådan at

$$\gamma_\delta\left(\varphi\right) = \tilde{\lambda}_1\tilde{P}_1\left(\varphi\right) + \tilde{\lambda}_2\tilde{P}_2\left(\varphi\right). \tag{4.47}$$

Definer $\tilde{m}_1 := \operatorname{Arg}(\tilde{\lambda}_1) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)$ og $\tilde{m}_2 := \operatorname{Arg}(\tilde{\lambda}_2) = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)$. Så er $h_2\left(\varphi\right) := \tilde{m}_1\tilde{P}_1\left(\varphi\right) + \tilde{m}_2\tilde{P}_2\left(\varphi\right)$ en selvadjungeret, kontinuert og 2π periodisk operator, sådan at (4.47) reduceres til

$$\gamma_\delta\left(\varphi\right) = \exp\left(ih_2\left(\varphi\right)\right), \quad \text{for alle } \varphi \in [0, 2\pi). \tag{4.48}$$

Opsummering og sammenfatning

Ud fra resultaterne (4.43) og (4.48) konkluderer vi, at der eksisterer to selvadjungerede, kontinuerte og 2π periodiske operatorer h_1 og h_2 afhængig af variablen φ, sådan at

$$\alpha\left(\varphi\right) = \alpha_\delta\left(\varphi\right)\gamma_\delta\left(\varphi\right) = \exp\left(ih_1\left(\varphi\right)\right)\exp\left(ih_2\left(\varphi\right)\right), \quad \text{for alle } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Derfor eksisterer der en unitær matrix $\beta\left(\theta,\varphi\right)$ for alle $\theta \in [0,\pi]$ og alle $\varphi \in [0,2\pi)$, jf. sætning 4.3. Yderligere, ifølge sætning 4.3, kan vi definere

$$\tilde{\Psi}_n\left(\theta,\varphi\right) := \sum_{j=1}^{2}\left[\beta\left(\theta,\varphi\right)\right]_{jn}\widehat{\Psi}_j\left(\theta,\varphi\right), \quad \text{for } n \in \{1,2\},$$

sådan at $\{\tilde{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right), \tilde{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)\}$ er en basis for underrummet Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right) \subseteq \mathbb{C}^4$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen.

Konstruktion af kontinuert frame for underrummet Span$\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$

I dette afsnit konstrueres en frame for underrummet Span$\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right) \subseteq \mathbb{C}^2$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Idet $\mathbb{C}^4$ er udstyret med det indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^4}$, og $\{\tilde{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right), \tilde{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)\}$ er en ortonormal basis for underrummet Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right) \subseteq \mathbb{C}^4$, så er

$$w = \langle w, \tilde{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^4}\tilde{\Psi}_1\left(\theta,\varphi\right) + \langle w, \tilde{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right)\rangle_{\mathbb{C}^4}\tilde{\Psi}_2\left(\theta,\varphi\right) \tag{4.49}$$

for alle $w \in$ Span$\left(\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$. Lad $\tilde{f}$ være et vilkårligt element i Span$\left(\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\right)$ og definer

$$f := \begin{bmatrix}\tilde{f}\\ \mathcal{O}_{2\times 1}\end{bmatrix}.$$

Så eksisterer der en vektor $\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, sådan at $\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \tilde{f}$. Idet

$$\widehat{P}\left(\theta,\varphi\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{P}\left(\theta,\varphi\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{f}\\ \mathcal{O}_{2\times 1}\end{bmatrix} = f,$$

så er $f \in \operatorname{Span}\Big(\widehat{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$. Derfor konkluderer vi, at $\tilde{f} \in \operatorname{Span}\Big(\tilde{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$ medfører, at $f \in \operatorname{Span}\Big(\widehat{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$. Definer projektionen

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}\colon \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\mapsto (z_1, z_2). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Ud fra (4.49) og definitionen af projektionen $\tilde{\pi}$, se (4.50), kan ethvert element $\tilde{f} \in \operatorname{Span}\Big(\tilde{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$ repræsenteres som

$$\begin{aligned} \tilde{f} = \tilde{\pi} f &= \tilde{\pi}\left(\langle f, \tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^4} \tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi) + \langle f, \tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^4} \tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\right) \\ &= \langle \tilde{f}, \tilde{\pi}\tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \tilde{\pi}\tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi) + \langle \tilde{f}, \tilde{\pi}\tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\rangle_{\mathbb{C}^2} \tilde{\pi}\tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Idet $\operatorname{Span}\Big(\tilde{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$ er et underrum af dimension én, og (4.51) er opfyldt for ethvert element i $\operatorname{Span}\Big(\tilde{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$, så er $\{\tilde{\pi}\tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi)\,, \tilde{\pi}\tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\}$ en Parseval frame for $\operatorname{Span}\Big(\tilde{P}\,(\theta,\varphi)\Big)$. Idet $\{\tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi)\,, \tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\}$ varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen, så varierer framen $\{\tilde{\pi}\tilde{\Psi}_1\,(\theta,\varphi)\,, \tilde{\pi}\tilde{\Psi}_2\,(\theta,\varphi)\}$ kontinuert på sfæren af enhedskuglen.

5 Konklusion

Konklusion Del I

Med udgangspunkt i et Gabor system analyserer vi på et system af funktioner på formen

$$\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{\exp(2\pi imbx)\, g(x-na) : \forall x \in \mathbb{R}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}\,, \tag{5.1}$$

hvor a, $b > 0$ er reelle, og $g \in L^2(\mathbb{R})$ er en såkaldt generatorfunktion. Hertil definerer vi en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$ ved et system (5.1), som opfylder

$$A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \leq B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{for alle } f \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

for to positive reelle konstanter A og B (framegrænser). I forbindelse med *painless nonorthogonal expansions* redegør vi for nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$, når støtten af en generatorfunktion er restringeret til at være indeholdt i et interval med intervallængde $1/b$. I denne redegørelse konkluderes følgende.

Lad a, $b > 0$ og $g \in L^2(\mathbb{R})$ være givet:

i) Hvis $0 < ab \leq 1$ og $\text{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$, så er Gabor systemet (5.1) en frame for $L^2(\mathbb{R})$, hvis og kun hvis der eksisterer to reelle konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 \leq bB, \quad \text{for næsten alle } x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Yderligere er A og B i dette tilfælde framegrænser.

ii) Hvis $0 < ab < 1$, så eksisterer der en funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ med $\text{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$, som opfylder (5.2).

iii) Hvis $ab = 1$, så er enhver funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ diskontinuert, hvis $\text{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$ og (5.2) er opfyldt.

iv) Hvis $ab > 1$ og $\text{supp}(g) \subseteq [0, 1/b]$, så er (5.2) ikke opfyldt og Gabor systemet (5.1) er ikke fuldstændig i $L^2(\mathbb{R})$.

Fraviger vi kravet om, at støtten af generatorfunktionen er indeholdt i et interval med intervallængde $1/b$, så er det kun den nødvendige betingelse for en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$, formuleret i punkt i), som har en udvidelse til at være opfyldt for alle generatorfunktioner i $L^2(\mathbb{R})$. I det generelle tilfælde formuleres i stedet følgende tilstrækkelige betingelse for en Gabor frame for $L^2(\mathbb{R})$.

Lad a, $b > 0$ og $g \in L^2(\mathbb{R})$ være givet: Hvis

$$B := \frac{1}{b} \sup_{x\in[0,a]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\, \overline{g(x-na-k/b)} \right| < \infty$$

og

$$A := \frac{1}{b} \inf_{x \in [0,a]} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - na) \overline{g(x - na - k/b)} \right| \right) > 0,$$

så er Gabor systemet (5.1) en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænser A og B.

Konklusion Del II

I anden del af specialet defineres projektionsmatricen

$$P(u, \varphi) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - u & \sqrt{1 - u^2} \exp(-i\varphi) \\ \sqrt{1 - u^2} \exp(i\varphi) & 1 + u \end{bmatrix}$$

for $u \in [-1, 1]$ og $\varphi \in [0, 2\pi)$. Med variabelsubstitutionen $u = \cos(\theta)$ for $\theta \in [0, \pi]$ finder vi et underrum $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}(\theta, \varphi)\right) \subseteq \mathbb{C}^2$ med dimension én, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. For underrummet $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}(\theta, \varphi)\right)$ bevises eksistensen af følgende basis

$$\Psi(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \exp(-i\varphi) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

for alle $\theta \in [0, \pi]$ og alle $\varphi \in [0, 2\pi)$. Hertil bliver det bevist, at $\Psi(\theta, \varphi)$ varierer diskontinuert på sfæren af enhedskuglen, og det bliver bevist, at der ikke eksisterer en basis for underrummet $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}(\theta, \varphi)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Derfor konkluderer vi, at der eksisterer endeligdimensionale vektorrum, som varierer kontinuert, for hvilke der ikke eksisterer en basis, som varierer kontinuert.

Herefter betragtes $\mathbb{C}^4$, hvor vi definerer projektionsmatricen

$$\widehat{P}(\theta, \varphi) := \begin{bmatrix} \tilde{P}(\theta, \varphi) & \mathcal{O}_{2\times 2} \\ \mathcal{O}_{2\times 2} & \tilde{P}(\theta, -\varphi) \end{bmatrix}$$

for $\theta \in [0, \pi]$ og $\varphi \in [0, 2\pi)$. Hertil finder vi underrummet $\operatorname{Span}\left(\widehat{P}(\theta, \varphi)\right) \subseteq \mathbb{C}^4$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen. Det vises, at underrummet $\operatorname{Span}\left(\widehat{P}(\theta, \varphi)\right)$ har en basis givet ved vektorerne

$$\widehat{\Psi}_1(\theta, \varphi) := \begin{bmatrix} \Psi(\theta, \varphi) \\ \mathcal{O}_{2\times 1} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \widehat{\Psi}_2(\theta, \varphi) := \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{2\times 1} \\ \Psi(\theta, -\varphi) \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

som varierer diskontinuert på sfæren af enhedskuglen. For $\varphi \in [0, 2\pi)$ defineres en unitær matrix

$$\alpha(\varphi) := \begin{bmatrix} \exp(-i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{bmatrix},$$

og det bevises, at der eksisterer to selvadjungerede, kontinuerte og 2π periodiske operatorer afhængig af φ, hhv. h_1 og h_2, sådan at

$$\alpha(\varphi) = \exp(ih_1(\varphi)) \exp(ih_2(\varphi)).$$

Ud fra dette resultat konkluderer vi, at der eksisterer en unitær matrix $\beta(\theta, \varphi)$ for alle $\theta \in [0, \pi]$ og alle $\varphi \in [0, 2\pi)$, som roterer den diskontinuerte basis for $\operatorname{Span}\left(\widehat{P}(\theta, \varphi)\right)$, udgjort af vektorerne (5.3), over i en basis for $\operatorname{Span}\left(\widehat{P}(\theta,\varphi)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen.

Ved at definere en projektion $\tilde{\pi}\colon \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ beviser vi, at der findes en frame for $\operatorname{Span}\left(\tilde{P}(\theta,\varphi)\right)$, som varierer kontinuert på sfæren af enhedskuglen.

Bibliografi

[1] Ole Christensen. *Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhauser Boston, 1. dec. 2013. ISBN: 978-0-8176-8224-8. URL: http://www.ebook.de/de/product/25447872/ole_christensen_introduction_to_frames_and_riesz_bases.html.

[2] Horia Cornean. *Notes for Analyse 1 and Analyse 2*. 2015. URL: http://people.math.aau.dk/~cornean/analyse2_F15/noter-analyse1og2-9-04-2015.pdf.

[3] Karlheinz Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, 15. dec. 2000. 380 s. ISBN: 0-8176-4022-3. URL: http://www.ebook.de/de/product/3757936/karlheinz_groechenig_foundations_of_time_frequency_analysis.html.

[4] Christopher Heil. *A Basis Theory Primer*. Springer Basel AG, 11. nov. 2010. ISBN: 9780817646868. URL: http://www.ebook.de/de/product/12546571/christopher_heil_a_basis_theory_primer.html.

[5] A. Grossmann og Y. Meyer Ingrid Daubechies. *Painless nonorthogonal expansions*. 1986, s. 1271–1283.

[6] Bruno Nachtergaele og Anne Schilling Isaiah Lankham. *Linear Algebra As an Introduction to Abstract Mathematics*. University af California, 2007.

[7] Kenneth Offersen. *Introduktion til frames i Hilbertrum*. 2017. URL: http://projekter.aau.dk/projekter/files/259995457/Rapport_P9.pdf.

[8] E. J. Putzer. *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients*. Bd. Vol. 73. No. 1. Jan. 1966, s. 2–7. URL: http://www.jstor.org/stable/2313914?seq=1.

[9] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991. ISBN: 9780070542365. URL: https://www.amazon.com/Functional-Analysis-Walter-Rudin/dp/0070542368?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0070542368.

[10] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill Education - Europe, 1. jan. 1976. 352 s. ISBN: 978-0070542358. URL: http://www.ebook.de/de/product/2731171/walter_rudin_principles_of_mathematical_analysis.html.

[11] Walter Rudin. *Real and Complex analysis*. McGraw-Hill Education - Europe, 1. jan. 1960. ISBN: 9780071002769. URL: http://www.ebook.de/de/product/3262874/walter_rudin_real_and_complex_analysis.html.

[12] Christian Berg og Tage Gutmann Madsen. *Mål- og integralteori*. 2001. ISBN: 87-91180-15-5. URL: http://www.math.ku.dk/noter/filer/3mi.pdf.

[13] William F. Trench. *Introduction to Real Analysis*. Prentice Hall, 2002. ISBN: 0-13-045786-8. URL: https://www.amazon.com/Introduction-Real-Analysis-William-Trench/dp/0130457868?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0130457868.

[14] Haruo Yanai, Kei Takeuchi og Yoshio Takane. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer-Verlag GmbH, 12. apr. 2011. ISBN: 978-1-4419-9886-6. URL: http://www.ebook.de/de/product/14685515/haruo_yanai_kei_takeuchi_yoshio_takane_projection_matrices_generalized_inverse_matrices_and_singular_value_decomposition.html.

A Appendiks A

A.1 Definition (Direkte sum): Et vektorrum X siges at være den *direkte sum* af to underrum $Y \subseteq X$ og $W \subseteq X$, hvis ethvert element $x \in X$ har en entydig repræsentation $x = y + w$ for $y \in Y$ og $w \in W$. Dette noteres $X = Y \oplus W$. ♦

A.1 Begrænset, selvadjungeret, positiv og invertibel operator

A.2 Definition (Begrænset operator): Lad $(X, \|\cdot\|_X)$ og $(Y, \|\cdot\|_Y)$ angive to normerede vektorrum. Så er operatoren (dvs., lineær afbildning) $U\colon X \to Y$ en *begrænset operator*, hvis der eksisterer en reel konstant $K > 0$, sådan at

$$\|Ux\|_Y \leq K\|x\|_X, \quad \text{for alle } x \in X.$$ ♦

A.3 Definition (Invertibel operator): Lad $(X, \|\cdot\|_X)$ og $(Y, \|\cdot\|_Y)$ angive to normerede vektorrum. En operator $U\colon X \to Y$ er invertibel, hvis der for ethvert $y \in Y$ eksisterer et entydigt $x \in X$, sådan at $Ux = y$. Hvis operatoren U er invertibel, så siger vi, at afbildningen $U^{-1}\colon Y \to X$ defineret ved $U^{-1}y = x$, hvor x er den entydige løsning til $Ux = y$, er den inverse af U. ♦

A.4 Definition (Positiv operator): Lad $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ angive et Hilbertrum. En begrænset operator $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er en *positiv operator*, hvis $\langle Ux, x\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ for alle $x \in \mathcal{H}$. ♦

A.5 Definition (Adjungeret operator): Lad $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ og $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ angive to Hilbertrum, og lad $U\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ være en begrænset operator. Så definerer vi en *adjungeret operator* U^* som en entydig operator $U^*\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, som opfylder

$$\langle x, Uy\rangle_{\mathcal{H}} = \langle U^*x, y\rangle_{\mathcal{K}}, \quad \text{for alle } x \in \mathcal{H} \text{ og alle } y \in \mathcal{K}.$$ ♦

A.6 Definition (Selvadjungerede og unitær operator): Lad $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ angive et Hilbertrum, og lad $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ være en begrænset operator med den adjungeret operator U^*. Så er U en *unitær* operator, hvis $UU^* = U^*U = Id$. Yderligere er U en *selvadjungerede operator*, hvis $U = U^*$. ♦

A.2 Fouriertransformation

A.7 Definition: For $f \in L^1(\mathbb{R})$ definerer vi fouriertransformationen $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$\hat{f}(\gamma) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-2\pi i x\gamma)\, dx, \quad \text{for } \gamma \in \mathbb{R}.$$ ♦

Vi betragter således fouriertransformationen af en funktion f som en operator $\mathcal{F}\colon f \to \hat{f}$.

A.8 Sætning (Plancherel's sætning): Vi kan til enhver funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ knytte funktionen $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ og

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{for alle } f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

For bevis af sætning A.8, se [11, sætning 9.13]. Ud fra sætning A.8 ser vi, at fouriertransformationen har en udvidelse fra $L^1(\mathbb{R})$ til unitære operatorer på $L^2(\mathbb{R})$.

A.9 Lemma: Lad $\{f_k\}_{k\geq 1}$ være en frame for et Hilbertrum $\mathcal{H}$ med framegrænser A og B. Hvis $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er en unitær operator, så er $\{Uf_k\}_{k\geq 1}$ en frame for $\mathcal{H}$ med framegrænserne A og B.

For bevis af lemma A.9, se [1, korollar 5.3.4].

A.10 Proposition: Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$ og $a, b > 0$ være givet. Hvis Gabor systemet $\{M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænser A og B, så er $\{M_{na}T_{mb}\mathcal{F}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænser A og B.

Bevis: Lad $c \in \mathbb{R}$ være givet. Så er

$$\begin{aligned}\mathcal{F}T_c f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-c)\exp(-2\pi i x\gamma)\,dx \\ &= \exp(-2\pi i c\gamma)\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp(-2\pi i x\gamma)\,dx \\ &= M_{-c}\mathcal{F}f(x), \quad \text{for alle } f \in L^2(\mathbb{R}),\end{aligned} \tag{A.1}$$

og

$$\begin{aligned}\mathcal{F}M_c f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi i x c)\, f(x)\exp(-2\pi i x\gamma)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp(-2\pi i x(\gamma - c))\,dx \\ &= T_c\mathcal{F}f(x), \quad \text{for alle } f \in L^2(\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{A.2}$$

Ifølge Plancherel's sætning A.8 er fouriertransformationen en unitær operator på $L^2(\mathbb{R})$. Lad $g \in L^2(\mathbb{R})$, så er $\{\mathcal{F}M_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ en frame for $L^2(\mathbb{R})$ med framegrænser A og B, jf. lemma A.9. Ud fra (A.1), (A.2) og (2.1) er

$$\mathcal{F}M_{mb}T_{na}g = T_{mb}M_{-na}\mathcal{F}g = \exp(2\pi i mbna)\, M_{-na}T_{mb}\mathcal{F}g.$$

Idet $\exp(2\pi i mbna)$ er et komplekst tal på den komplekse enhedscirkel, dvs., med modulus lig 1, afsluttes beviset. ∎

A.3 Kvadratrod af en positiv begrænset operator

A.11 Sætning: Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum. Enhver positiv begrænset operator $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ har en entydig positiv kvadratrod $U^{1/2}$, som ligeledes er en begrænset operator. Yderligere gælder:

i) Hvis U er selvadjungeret, så er $U^{1/2}$ selvadjungeret,
ii) Hvis U er invertibel, så er $U^{1/2}$ invertibel,
iii) U og $U^{1/2}$ kommuterer.

For bevis af sætning A.11, se [1, lemma 2.4.5] og [9, sætning 12.33].

A.4 Riesz basis og Riesz følge

A.12 Definition (Riesz Basis): En Riesz basis for et Hilbertrum $\mathcal{H}$ er en samling på formen $\{Ue_k\}_{k\geq 1}$, hvor $\{e_k\}_{k\geq 1}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{H}$, og $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er en begrænset bijektiv operator. ♦

A.13 Definition (Riesz følge): En følge $\{f_k\}_{k\geq 1}$ af elementer i et Hilbertrum $\mathcal{H}$ er en *Riesz følge* i $\mathcal{H}$, hvis der eksisterer to reelle konstanter $0 < A \leq B < \infty$, sådan at

$$A \sum_{k\geq 1} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k\geq 1} c_k f_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_{k\geq 1} |c_k|^2$$

for en endelig følge $\{c_k\}_{k=1}^n$ af koefficienter i $\mathbb{C}$. Konstanterne A og B kaldes hhv. *nedre og øvre Riesz grænse.* ♦

Det kan vises, at $\{f_k\}_{k\geq 1}$ er en Riesz basis, hvis og kun hvis $\{f_k\}_{k\geq 1}$ er en Riesz følge, som er fuldstændig i $\mathcal{H}$, se [1, sætning 3.6.6].

A.14 Sætning: En Riesz basis $\{f_k\}_{k\geq 1}$ for et Hilbertrum $\mathcal{H}$ er en frame for $\mathcal{H}$, og Riesz grænserne er lig framegrænserne.

For bevis af sætning A.14, se [1, sætning 5.4.1].

A.5 Ortonormal basis for $L^2([0, 1/b])$ og fourierkoefficienter

A.15 Sætning: Lad $\{e_k\}_{k\geq 1}$ være en ortonormal basis for et Hilbertrum $\mathcal{H}$, så er

i) $f = \sum_{k\geq 1} \langle f, e_k \rangle_{\mathcal{H}} e_k$, for alle $f \in \mathcal{H}$,
ii) $\sum_{k\geq 1} |\langle f, e_k \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}}^2$, for alle $f \in \mathcal{H}$.

Punkt ii) i sætning A.15 er også kendt som *Parseval's lighed.*

For $k \in \mathbb{Z}$, definer

$$\tilde{e}_k(x) := \sqrt{b} \exp(2\pi i k b x), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Ifølge [4, kapitel 13, kapitel 14 og sætning 1.50] er $\{\tilde{e}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en basis for $L^2([0,1/b])$. Vi ser nu, at

$$\begin{aligned}
\|\tilde{e}_k\|^2_{L^2([0,1/b])} = \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k\rangle_{L^2([0,1/b])} &= \int_0^{1/b} \tilde{e}_k(x)\overline{\tilde{e}_k(x)}dx \\
&= b\int_0^{1/b} \exp(2\pi ikbx)\exp(-2\pi ikbx)\,dx \\
&= b\int_0^{1/b} 1dx \\
&= 1, \quad \text{for alle } k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

For $j\neq k$ i $\mathbb{Z}$, er

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_j\rangle_{L^2([0,1/b])} &= b\int_0^{1/b} \exp(2\pi ikbx)\exp(-2\pi ijbx)\,dx \\
&= b\int_0^{1/b} \exp(2\pi i(k-j)bx)\,dx \\
&= b\left[\frac{\exp(2\pi i(k-j)bx)}{2\pi i(k-j)b}\right]_0^{1/b} \\
&= b\left(\frac{\exp(2\pi i(k-j))-1}{2\pi i(k-j)b}\right).
\end{aligned}$$

Idet $k-j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, så er $\exp(2\pi i(k-j))=1$, hvorfor $\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_j\rangle_{L^2([0,1/b])}=0$. Vi konkluderer derfor, at $\{\tilde{e}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2([0,1/b])$. Bemærk, at dette resultat let generaliseres, sådan at $\{\tilde{e}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L^2(I)$ for ethvert interval $I\subseteq\mathbb{R}$ med intervallængede $1/b$.

Ud fra sætning A.15 er

$$f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\tilde{e}_k\rangle_{L^2([0,1/b])}\tilde{e}_k, \quad \text{for alle } f\in L^2([0,1/b]). \tag{A.3}$$

Lad $\tilde{f}\in L^2([0,1/b])$ være en periodisk funktion med periode $1/b$. Så er *fourierrækken* af $\tilde{f}$ defineret ved

$$\tilde{f}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\exp(2\pi ikbx), \quad \text{for alle } x\in[0,1/b], \tag{A.4}$$

for en følge af koefficienter $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i $\mathbb{C}$, også kaldet *fourierkoefficienterne*, jf. [1, afsnit 3.8]. Sammenholdes (A.3) og (A.4) ser vi, at fourierkoefficienterne for $\tilde{f}$ er givet ved

$$c_k=\sqrt{b}\langle\tilde{f},\tilde{e}_k\rangle_{L^2([0,1/b])}=b\int_0^{1/b}\tilde{f}(x)\exp(-2\pi ikbx)\,dx. \tag{A.5}$$

Udfra Parseval's lighed, se sætning A.15, er

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2=b\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\langle\tilde{f},\tilde{e}_k\rangle_{L^2([0,1/b])}\right|^2=b\|\tilde{f}\|^2_{L^2([0,1/b])}=b\int_0^{1/b}\left|\tilde{f}(x)\right|^2dx. \tag{A.6}$$

B Appendiks B

B.1 Spor og Hilbert-Schmidt norm

B.1 Definition: Lad T være en begrænset, positiv og selvadjungerede operator på et Hilbertrum $\mathcal{H}$. Så defineres *sporet* af T ved

$$\operatorname{tr}(T) := \sum_{k\geq 1} \langle e_k, Te_k \rangle,$$

for enhver ortonormal basis $\{e_k\}_{k\geq 1}$ for $\mathcal{H}$. ♦

B.2 Lemma: Lad A være en $m \times n$ matrix. Antag, at $\operatorname{rank}(A) = r$, så eksisterer der en $m \times r$ matrix B og en $r \times n$ matrix C sådan, at $A = BC$ og $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$.

Bevis: Lad $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, og lad $\beta := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ være en basis for $\operatorname{Span}(A)$. Så kan vi definere $B := \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{bmatrix}$. Idet B er konstrueret ud fra en basis med r vektorer, så er $\operatorname{rank}(B) = r$. Lad $\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} c_{1j} & c_{2j} & \cdots & c_{rj} \end{bmatrix}^T$ være en vektor, som indeholder koefficienterne, sådan at

$$\mathbf{a}_j = c_{1j}\mathbf{b}_1 + c_{2j}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{rj}\mathbf{b}_r = B\mathbf{c}_j, \quad \text{for } 1 \leq j \leq n.$$

Så er

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\mathbf{c}_1 & B\mathbf{c}_2 & \cdots & B\mathbf{c}_n \end{bmatrix} = BC.$$

Slutteligt ser vi, at

$$r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(C) \leq r,$$

hvorfor $\operatorname{rank}(C) = r$. ■

B.3 Lemma: Lad A være en kvadratisk matrix af orden n. Antag, at $A^2 = A$, så er $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{rank}(A)$.

Bevis: Lad $r = \operatorname{rank}(A)$, B være en $n \times r$ matrix og C en $r \times n$ matrix med $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$ sådan, at $A = BC$, jf. lemma B.2. Antag, at $A^2 = A$, så er

$$BC = BCBC.$$

Idet B har fuld søjle rank, så eksisterer en venstreinvers til B, og idet C har fuld række rank, så eksisterer en højreinvers til C. Derfor er

$$Id_{r\times r} = CB$$

hvor $Id_{r\times r}$ er identitetsmatricen af orden r. Idet matricer kommuterer under sporet, så er

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB) = \operatorname{tr}(Id_{r\times r}) = r = \operatorname{rank}(A). \quad ■$$

B.4 Definition (Hilbert-Schmidt norm): Lad A være en kvadratisk matrix af orden n med indgange i $\mathbb{C}$. Så definerer vi Hilbert-Schmidt normen for A ved

$$\|A\|_{HS} := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |[A]_{ij}|^2},$$

hvor $[A]_{ij}$ er indgangen i matricen A for række i og søjle j. ♦

B.5 Lemma: Lad A være en kvadratisk matrix af orden n med indgange i $\mathbb{C}$, og lad $x \in \mathbb{C}^n$. Så er $\|A\|_{op} \leq \|A\|_{HS}$.

Bevis: Antag, at $\|x\|_{\mathbb{C}^n}^2 = 1$. Udfra Cauchy-Schwartz ulighed er

$$\begin{aligned}\|Ax\|_{\mathbb{C}^n}^2 = \langle Ax, Ax\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} x_j\right|^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |[A]_{ik}|^2 \sum_{\ell=1}^{n} |x_\ell|^2\right) \\ &= \|A\|_{HS}^2 \|x\|_{\mathbb{C}^n}^2 \\ &= \|A\|_{HS}^2,\end{aligned}$$

hvorfor $\|A\|_{op} := \sup_{\|x\|_{\mathbb{C}^n}=1}\{\|Ax\|_{\mathbb{C}^n}\} \leq \|A\|_{HS}$. ■

B.6 Lemma: Lad $f(\xi) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være en operator afhængig af en variabel $\xi \in W \subseteq \mathbb{R}^m$. Hvis $f(\xi)$ varierer kontinuert, så varierer $\exp(if(\xi))$ kontinuert.

Bevis: Lad ξ_0 være et vilkårligt element i W. Så er $f(\xi) = f(\xi_0) + f(\xi) - f(\xi_0) = f(\xi_0) + \Delta f(\xi)$, hvor $\Delta f(\xi) := f(\xi) - f(\xi_0)$. Definer

$$u(t;\xi) := \exp(ti\Delta f(\xi)), \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Så er

$$\partial_t u(t;\xi) = i\Delta f(\xi) \exp(ti\Delta f(\xi)),$$

hvorfor det ifølge analysens fundamentalsætning er opfyldt, at

$$u(1;\xi) - u(0;\xi) = \int_0^1 \partial_t u(t;\xi) dt = i\Delta f(\xi) \int_0^1 \exp(ti\Delta f(\xi)) dt. \tag{B.1}$$

Idet $u(0;\xi) = Id$, så ser vi ud fra (B.1), at

$$u(1;\xi) = \exp(i\Delta f(\xi)) = Id + i\Delta f(\xi) \int_0^1 \exp(ti\Delta f(\xi)) dt. \tag{B.2}$$

Ved at gange med $\exp(if(\xi_0))$ på begge sider af (B.2), opnås

$$\begin{aligned}\exp(if(\xi)) = \exp(i(f(\xi_0) + \Delta f(\xi))) &= \exp(i\Delta f(\xi)) \exp(if(\xi_0)) \\ &= \exp(if(\xi_0)) + i\exp(if(\xi_0)) \Delta f(\xi) \int_0^1 \exp(ti\Delta f(\xi)) dt \\ &= \exp(if(\xi_0)) + i \int_0^1 \Delta f(\xi) \exp(i(f(\xi_0) + t\Delta f(\xi))) dt. \qquad \text{(B.3)}\end{aligned}$$

Ud fra (B.3) og vha. trekantsuligheden er

$$\begin{aligned}\|\exp(if(\xi)) - \exp(if(\xi_0))\|_{op} &= \left\| \int_0^1 \Delta f(\xi) \exp(i(f(\xi_0) + t\Delta f(\xi)))\, dt \right\|_{op} \\ &\leq \int_0^1 \|\Delta f(\xi)\|_{op}\, dt \\ &= \|f(\xi) - f(\xi_0)\|_{op}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Under antagelsen, at $f(\xi)$ varierer kontinuert som funktion ξ, så medfører (B.4), at $\exp(if(\xi))$ varierer kontinuert som funktion af ξ. ■

B.2 Udregning af dobbeltintegrale

B.7 Definition (Kommutator): Lad A og B være to kvadratiske matricer af orden n. Så defineres *kommutatoren* $[A, B]$, af A og B, ved

$$[A, B] := AB - BA.$$ ♦

For $u \in [-1, 1]$ og $\varphi \in [0, 2\pi)$, definer matricen

$$P := P(u, \varphi) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-u & \sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi) \\ \sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi) & 1+u \end{bmatrix}.$$

Så er

$$\begin{aligned}\partial_u P := \frac{\partial}{\partial u} P(u, \varphi) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(1-u) & \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi)\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi)\right) & \frac{\partial}{\partial u}(1+u) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -u\left(1-u^2\right)^{-1/2}\exp(-i\varphi) \\ -u\left(1-u^2\right)^{-1/2}\exp(i\varphi) & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\partial_\varphi P := \frac{\partial}{\partial \varphi} P(u, \varphi) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi}(1-u) & \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi)\right) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(1+u) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi) \\ i\sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi) & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Yderligere er

$$\partial_u P \partial_\varphi P = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} -u & \sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi) \\ \sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi) & u \end{bmatrix}$$

$$\partial_\varphi P \partial_u P = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} u & -\sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi) \\ -\sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi) & -u \end{bmatrix} = -\partial_u P \partial_\varphi P,$$

hvorfor

$$[\partial_u P, \partial_\varphi P] = \partial_u P \partial_\varphi P - \partial_\varphi P \partial_u P = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -u & \sqrt{1-u^2}\exp(-i\varphi) \\ \sqrt{1-u^2}\exp(i\varphi) & u \end{bmatrix}.$$

Vi ser nu, at

$$P\left[\partial_u P, \partial_\varphi P\right] = \frac{i}{4}\begin{bmatrix} 1-u & \sqrt{1-u^2}\exp\left(-i\varphi\right) \\ \sqrt{1-u^2}\exp\left(i\varphi\right) & 1+u \end{bmatrix},$$

hvorfor

$$\operatorname{tr}\left(P\left[\partial_u P, \partial_\varphi P\right]\right) = \frac{i}{4}\left(1-u+1+u\right) = \frac{i}{2}.$$

I alt er

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{tr}\left(P\left[\partial_u P, \partial_\varphi P\right]\right)du d\varphi = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 1 du d\varphi = 2\pi i.$$