
Quasi-likelihoodfunktioner på kuglen

Rumlig Statistik

Speciale - Forår 2017

Emil Færk

Aalborg Universitet
Institut for Matematiske Fag



Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
<http://www.math.aau.dk>

AALBORG UNIVERSITET

STUDENTERRAPPORT

Titel:

Quasi-likelihoodfunktioner på kuglen

Tema:

Rumlige Statistisk

Projektperiode:

Forårs semester 2017

Projektgruppe:

G2-103

Deltagere:

Emil Færk

Vejleder:

Rasmus Plenge Waagepetersen

Oplagstal: 2**Sidetæl:** 48**Afleveringsdato:**

9. juni 2017

Resumé:

Dette speciales formål er at introducere punktprocesteorien på kuglen med særligt fokus på estimation af intensiteten/intensitetsfunktionen. Denne approksimation implementeres i R som en quasi-likelihoodfunktion og testes i det tilfælde, hvor intensitetsfunktionen er konstant. For at kunne behandle teorien for punktprocesser, Palm fordelingen og punktproces karakteristika på kuglen introduceres overflademålet. Desuden præsenteres nogle klynget punktprocesser, hvor den log Gaussiske Cox proces anvendes i testen af quasi-likelihoodfunktionen. For at udlede quasi-likelihoodfunktionen præsenteres teorien om estimationsfunktioner. Her anvendes Nyström approksimationen på den optimale første ordens estimationsfunktion med henblik på at løse den numerisk. Derudover anvendes Mercers repræsentation til at løse den optimale første ordens estimationsfunktion numerisk. I tilfældet, hvor denne metode kan anvendes, er løsningen til estimationsfunktionen konstant, hvorfor estimatet for intensiteten er det intuitive estimat, men også det optimale estimat. Testen af implementeringen af quasi-likelihoodfunktionen til estimation af intensitetsfunktionen stemmer i tilfældet med konstant intensitet og observationvindue $W = \mathbb{S}^2$ overens med det intuitive estimat, som er vist at være optimalt i dette tilfælde.

Rapportens indhold er frit tilgængeligt, men offentliggørelse (med kildeangivelse) må kun ske efter aftale med forfatteren.

Indhold

Forord	v
Abstract	vii
1 Indledning	1
2 Punktprocesser på kuglen	3
2.1 Overflademålet	4
2.2 Palm fordelingen	6
2.3 Punktproces karakteristika	9
2.3.1 Ikke-parametriske estimater	11
2.4 Cox Processer	14
3 Parameter estimation	19
3.1 Estimationsfunktioner	19
3.2 Første ordens estimationsfunktion	21
3.3 Spektral teori	23
3.4 Numerisk Approksimation	25
3.4.1 Anvendelse af Mercers repræsentation	25
3.4.2 Nyström metoden	27
3.5 Implementation af Quasi-likelihood estimation	29
3.5.1 Implementation: Nyström	29
4 Dataeksempel	33
5 Diskussion	35
5.1 Diskussion af tilfældet med konstant intensitet	35
5.2 Diskussion af teori	35
6 Konklusion og videre arbejde	37
A Standardbeviset	39
B Relevante resultater	41
C R kode	43
C.1 s2quadcount	43
C.2 Quasi-likelihood	43
C.2.1 Kartesiske til sfæriske koordinater	46
Litteratur	47

Forord

Aalborg Universitet, 9. juni 2017

Dette speciale er udarbejdet i forbindelse med 4. semester på matematik kandidatuddannelsen på Institut for Matematiske fag på Aalborg Universitet.

Referencer præsenteres som (efternavn, udgivelsesår) eller efternavn (udgivelsesår). Referencelisten findes efter appendikserne. Figurer og ligninger er nummereret efter, hvilket kapitel, de er angivet i, samt hvilket nummer, figurerne eller ligningerne er angivet med i kapitlet. Beviser og eksempler afsluttes med henholdsvis tombstones ■ og firkanter □.

Funktioner, som anvendes til estimation, implementeres i R, og koden til disse funktioner kan findes i appendiks. De R pakker, som er nødvendige for at anvende funktionerne, er angivet i dette appendiks. Henvisninger til R kommandoer er skrevet med fonten `teletype font`.

Jeg vil gerne takke min vejleder Rasmus Plenge Waagepetersen, Aalborg Universitet, for altid at ville svare på mine spørgsmål og lytte til evt. problemstillinger mm.

Emil Færk

<efark12@student.aau.dk>

Abstract

This thesis treats the theory of point processes on the sphere with a focus on quasi-likelihood estimation. The purpose is to introduce theory for point processes on the sphere and investigate a new numeric approximation method for estimating functions and compare it to the Nyström approximation method and implement both in R.

To treat the general theory of point processes we define the surface measure, which is used on the sphere instead of the Lebesgue measure. We introduce some general properties and formulas, which are the foundation of the thesis. Furthermore summary statistics for point processes on the sphere and their non-parametric estimates are presented. These are deduced by applying the theory of the Palm distribution, hence the Palm distribution, and its properties are introduced for point processes on the sphere. In addition to that some clustered point processes are presented, where the log Gaussian Cox process is used to test the implementation of the quasi-likelihood function.

The quasi-likelihood function is an estimation function, hence we present the theory of estimation functions, where the Godambe information criteria is used to obtain a sufficient condition for an optimal estimation function. This condition is used to obtain a Fredholm integral equation of the second kind, where the solution is a function φ depending on the points of the point process and a parameter vector. The solution φ is the function solving the estimation function optimally. The exact solution of φ is generally not explicit. Therefore two numeric approximation methods are introduced. The first method is based on the theory of Mercer's representation for complex covariance functions. This method does only apply, when the intensity function is constant, i.e. the point process is assumed isotropic, and the observation window is the sphere. When applying Mercer's representation to numerically solve φ , we discover that the numeric solution of φ is a constant, hence the optimal first order estimating function is constant. This implies that the optimal estimate for the intensity is the intuitive estimate. The second approximation method, we introduce, is the Nyström approximation method. This method applies in a more general context and can be written as a quasi-likelihood function, i.e. an optimal estimating function. The quasi-likelihood function obtained by using Nyström approximation is implemented in R as a function `s2quasi` which is available in Appendix C.2.

In hindsight it is discussed, whether a constant function is an exact solution to φ , when the point process is assumed isotropic, and the observation window is the sphere. Therefore the optimal estimate of the intensity is the intuitive estimate.

The implemented R function `s2quasi` is used to fit a log Gaussian Cox process to the dataset "galaxies", when assuming constant intensity and isotropic covariance function with observation window $W = \mathbb{S}^2$. The estimate of the intensity function using `s2quasi` corresponds in this setting to the intuitive estimate of the intensity.

Many of the properties and formulas for point process theory on \mathbb{R}^d can be adapted to point processes on the sphere with clear differences in the non-parametric estimate of the pair correlation function and the relation between the pair correlation function and the K -function. Estimation of the intensity function when assumed an isotropic point process with the sphere as observation window gives that the optimal estimate of the intensity function is the intuitive estimate. Further work would involve simulation studies of the quasi-likelihood function compared to a composite likelihood function, examples with quasi-likelihood estimation for inhomogeneous intensity function and estimation of the pair correlation function in practice using either the K -function or the non-parametric

estimate of the pair correlation function.

1. Indledning

Rumlig statistik er statistik, hvor datasættet er punkter, som angiver positionen af nogle objekter på et to- eller tredimensionelt område. Disse punkter siges at danne et punktmønster. Hvert punktmønster er afbildningen af en stokastisk rumlig punktproces, som er en stokastisk tællelig delmængde af \mathbb{R}^d , hvor punktmønstrene er afbilledet på et område $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Rumlige punktprocesser anvendes til at modellere data. I praksis observeres et punktmønster indenfor et område $W \subseteq S$. Dette kaldes et observationsvindue (Møller og Waagepetersen, 2004).

Et punktmønster karakteriseres efter, hvordan punkterne interagerer. Hvis interaktionen er tiltrækkende, så punkterne samles i klumper, siges punktprocessen at være klynget. Er interaktionen mellem punkterne derimod frastødende, siges punktprocessen at være regulær. Hvis der ingen interaktion er mellem punkterne, så er punkterne fordelt uafhængigt af hinanden, og Poisson punktprocessen anvendes til at modellere punktmønstret. Derfor anvendes Poisson punktprocessen som reference, når et punktmønster skal karakteriseres som klynget eller regulært. Poisson punktprocessen er specificeret ved en intensitetsfunktion $\rho : \mathbb{S}^2 \mapsto [0; \infty[$, som beskriver det forventede antal punkter i et givet område (Møller og Waagepetersen, 2004).

Når punktprocesser modelleres, estimerer man ofte deres intensitetsfunktion, da intensitetsfunktionen ofte er beskrivende for punktprocessen. En intensitetsfunktion kan estimeres ved at anvende maksimum likelihood estimation (Møller og Waagepetersen, 2004), sammensatte likelihood estimationsfunktioner (Møller og Waagepetersen, 2007) eller quasi-likelihood estimationsfunktioner (Guan et al., 2015). Både sammensatte likelihood estimationsfunktioner og quasi-likelihood estimationsfunktioner bygger på teorien om estimationsfunktioner (Song, 2007).

Det forrige gælder generelt for punktprocesser i \mathbb{R}^d . I dette projekt behandles punktprocesser på kuglen \mathbb{S}^2 , som er en delmængde af \mathbb{R}^d . I dette projekt undersøges punktprocesteori på kuglen i forhold til den generelle punktprocesteori. I projektet fokuseres der særligt på estimation af intensiteten/intensitetsfunktionen ved at anvende estimationsfunktioner. Til at estimere intensiteten/intensitetsfunktionen anvendes i dette projekt quasi-likelihood estimationsfunktioner. Her betragtes en estimationsfunktion, som behandles med to forskellige numeriske approksimationer. Den ene numeriske approksimation anvender Nyström approksimation (Hackbusch, 1995). Den anden numeriske approksimation anvender Mercers repræsentation (Møller et al., 2017). Disse to approksimationer implementeres i R og afprøves på datasættet "galaxies", hvor punkterne i punktmønstret svarer til positionen af galakser på himlen.

2. Punktprocesser på kuglen

I dette speciale fokuseres på punktprocesser på kuglen, specielt den todimensionelle enhedskugle $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{2+1}$. Dog vil grundlæggende begreber og funktioner blive defineret på den d -dimensionelle enhedskugle $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

For at kunne behandle punktprocesser på kuglen introduceres følgende notation og antagelser. Betragt en simpel endelig punktproces \mathbf{X} som en stokastisk endelig delmængde af \mathbb{S}^d . En punktkonfiguration for \mathbf{X} betegnes med \mathbf{x} . Det korresponderende tællemaal for \mathbf{X} noteres $N(\mathbf{X}_A)$ for $A \subseteq \mathbb{S}^d$ og beskriver antallet af punkter fra \mathbf{X} , som rammer A (Møller og Rubak, 2016a). Udfaldsrummet F for \mathbf{X} er mængden af alle endelige delmængder af \mathbb{S}^d med σ -algebraen \mathcal{F} frembragt af hændelserne $\{N(\mathbf{X}_A) = n\}$ for alle Borel mængder $A \subset \mathbb{S}^d$ og $n \in \mathbb{N}_0$ (Møller og Rubak, 2016b). Borel mængder noteres efterfølgende \mathcal{B} med indeks 0 for begrænset, ellers betegner indekset dimensionen.

Definition 2.0.1 Lad (Ω, \mathcal{E}, P) være et sandsynlighedsrum. Den målelig afbildning

$$\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{E}, P) \rightarrow (F, \mathcal{F})$$

er en **punktproces på \mathbb{S}^d** , hvor $F = \{B \subset \mathbb{S}^d \mid N(\mathbf{X}_B) < \infty\}$ med tilhørende σ -algebra $\mathcal{F} = \sigma\left(\left\{C_{n,D} \mid n \in \mathbb{N}_0, D \in \mathcal{B}_d(\mathbb{S}^d)\right\}\right)$, hvor $C_{n,D} = \{\mathbf{x} \in F \mid N(\mathbf{x}_D) = n\}$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ og $D \in \mathcal{B}_d(\mathbb{S}^d)$.

Følgende definitioner har relevans for senere resultater.

Definition 2.0.2 Lad $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum og lad ν være et mål. For $A \in \mathcal{E}$ er ν absolut kontinuert med hensyn til μ hvis og kun hvis, $\mu(A) = 0$ medfører, at $\nu(A) = 0$.

Definition 2.0.3 Lad \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 være to punktprocesser på \mathbb{S}^d . Fordelingen af \mathbf{X}_1 er absolut kontinuert med hensyn til fordelingen af \mathbf{X}_2 hvis og kun hvis, $P(\mathbf{X}_2 \in D) = 0$ medfører, at $P(\mathbf{X}_1 \in D) = 0$ for $D \subseteq F$.

Bemærk, at Radon-Nikodyms sætning medfører, at der findes en funktion $f : F \mapsto [0, \infty]$ sådan at

$$P(\mathbf{X}_1 \in D) = E[\mathbf{1}[\mathbf{X}_2 \in D] f(\mathbf{X}_2)],$$

for $D \subseteq F$. Så siges f at være tætheden for \mathbf{X}_1 med hensyn til \mathbf{X}_2 (Møller og Waagepetersen, 2004).

Fremover vil vi i stedet for at sige, at fordelingen af \mathbf{X}_1 er absolut kontinuert med hensyn til fordelingen af \mathbf{X}_2 blot sige, at \mathbf{X}_1 er absolut kontinuert med hensyn til \mathbf{X}_2 .

2.1 Overflademålet

For at kunne præsentere første og anden ordens intensitetsmål mm. for punktprocesser på kuglen, defineres *overflademålet*, som er et specialtilfælde af Lebesgue målet.

Definition 2.1.1 For $d \in \mathbb{N}$ lad ν_d være **det d -dimensionelle overflademål på $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$** . Dette defineres rekursivt:

For $d = 1$ og $x = (x_1, x_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$, hvor $0 \leq \theta < 2\pi$, så er $d\nu_1(x) = d\theta$ Lebesgue målet på $[0, 2\pi)$.

For $d \geq 2$ og $x = (\mathbf{y} \sin \vartheta, \cos \vartheta)$, hvor $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$ og $\vartheta \in [0, \pi]$,

$$d\nu_d(x) = \sin^{d-1} \vartheta d\nu_{d-1}(\mathbf{y}) d\vartheta.$$

Bemærk, at for $d = 2$ og $x = (x_1, x_2, x_3) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, hvor $\vartheta \in [0, \pi]$ og $\varphi \in [0, 2\pi)$ er $d\nu_2(x) = \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$. Vinklerne ϑ og φ er hhv. breddegrader og længdegrader. Ydermere har \mathbb{S}^d overflademålet $\varsigma_d = \nu_d(\mathbb{S}^d) = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}$, hvor $\varsigma_1 = 2\pi$ og $\varsigma_2 = 4\pi$ (Møller og Rubak, 2016a).

Med overflademålet kan teorien om momentmål, produkttæthed mm. fra planen tilpasses kuglen (Lawrence et al., 2016). Lad \mathbf{X} være en punktproces på \mathbb{S}^d . Intensitetsmålet μ på \mathbb{S}^d er givet ved $\mu(B) = \mathbb{E}[N(\mathbf{X}_B)]$, hvor $B \in \mathcal{B}_d(\mathbb{S}^d)$. Hvis det kan skrives som $\mu(B) = \int_B \rho(x) d\nu_d(x)$, hvor $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{S}^d)$ og $\rho(x)$ er en ikke-negativ borel funktion, så siges $\rho(x)$ at være intensitetsfunktionen. Det n 'te ordens faktorielle momentmål $\alpha^{(n)}$ på \mathbb{S}^n for $n \in \mathbb{N}$ er givet ved

$$\alpha^{(n)}(C) = \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbf{X}}^{\neq} \mathbf{1}[(x_1, \dots, x_n) \in C] \right],$$

hvor $C \in \mathcal{B}_d(\left(\mathbb{S}^d\right)^n)$ og \neq over summen betyder, at x_1, \dots, x_n er parvis forskellige. Hvis $\alpha^{(n)}$ kan skrives som

$$\alpha^{(n)}(C) = \int_C \rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n) d\nu_d^{(n)}(u_1, \dots, u_n),$$

hvor $C \in \mathcal{B}_d(\left(\mathbb{S}^d\right)^n)$, $\nu^{(n)} = \nu \times \dots \times \nu$ og $\rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n) : \left(\mathbb{S}^d\right)^n \rightarrow [0; \infty)$, så kaldes $\rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n)$ for den n 'te ordens produkttæthed.

Ved hjælp af det n 'te ordens faktorielle momentmål og standard beviset udledes Campbells formel.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n}^{\neq} \mathbf{1}[x_1, \dots, x_n \in C] \right] &= \int_C \rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n) d\nu_d^{(n)}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \int \mathbf{1}[u_1, \dots, u_n \in C] \rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n) d\nu_d^{(n)}(u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Det følger af standardbeviset i Appendiks A, at der for en vilkårlig Borel funktion $h : (\mathbb{S}^2)^n \mapsto [0; \infty)$ gælder,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbf{X}}^{\neq} h(x_1, \dots, x_n) \right] = \int h(x_1, \dots, x_n) \rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n) d\nu_d^{(n)}(u_1, \dots, u_n). \quad (2.1)$$

Ligning (2.1) kaldes *Campbells formel*. Den n 'te ordens produkttæthed for parvis forskellige punkter er sandsynligheden for at observere n punkter, som fremkommer i hver deres infinitesimale små områder på \mathbb{S}^d med centrum x_1, \dots, x_n og overflademål $d\nu_d(x_1), \dots, d\nu_d(x_n)$.

For at definere Poisson punktprocessen, defineres først Binomial punktprocessen.

Definition 2.1.2 *Lad \mathbf{X} være en punktproces bestående af n i.i.d punkter med tæthedsfunktion f på en mængde $B \in \mathcal{B}_d(\mathbb{S}^d)$. Så siges \mathbf{X} at være en **binomial punktproces** med n punkter i B med tæthed f . Binomial punktprocessen \mathbf{X} noteres $\mathbf{X} \sim \text{Binom}(\mathbb{S}^d, n, f)$.*

Definition 2.1.3 *En punktproces \mathbf{X} på \mathbb{S}^2 er en **Poisson punktproces med intensitetsfunktion** $\rho(x)$, hvis $N(\mathbf{X}_{\mathbb{S}^d}) \sim \text{poi}(\mu(\mathbb{S}^d))$ og givet $N(\mathbf{X}_{\mathbb{S}^d}) = n$, $\mathbf{X} \sim \text{Binom}(\mathbb{S}^d, n, f)$, hvor f er en tæthedsfunktion proportional med $\rho(x)$. Poisson punktprocessen \mathbf{X} noteres $\mathbf{X} \sim \text{Poisson}(\mathbb{S}^d, n, f)$.*

For Poisson punktprocessen er der ikke interaktion mellem punkter. Hermed menes, at den hverken er klynget eller regulær. Hvis man betragter en punktproces \mathbf{X} på \mathbb{S}^d med intensitetsfunktion $\rho(x)$ og anden ordens produkttæthed $\rho^{(2)}(x_1, x_2)$, så defineres *par-korrelationsfunktionen* som

$$g(x_1, x_2) = \frac{\rho^{(2)}(x_1, x_2)}{\rho(x_1)\rho(x_2)}.$$

Hvis $\rho(x_1)\rho(x_2) = 0$, så defineres $g(x_1, x_2) = 0$. Bemærk, at hvis \mathbf{X} er en Poisson punktproces, så er $g(x_1, x_2) = 1$ ν_d -næsten overalt, da man af definitionen på det anden ordens faktorielle momentmål og Slivnyak-Mecke B.0.2 kan vise, at $\rho^{(2)}(x_1, x_2) = \rho(x_1)\rho(x_2)$ ν_d -næsten overalt.

Definition 2.1.4 *Lad \mathbf{X} være en punktproces på \mathbb{S}^d , $\mathcal{SO}(d+1)$ være gruppen af specielle ortogonale matricer, og lad $R\mathbf{X} = \{R\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$. Da siges \mathbf{X} at være isotropisk, hvis $R\mathbf{X}$ er fordelt som \mathbf{X} for alle $R \in \mathcal{SO}(d+1)$.*

Givet $A, B \in \mathbb{S}^d$, hvor $B = RA$ for $R \in \mathcal{SO}(d+1)$. Hvis \mathbf{X} er isotropisk, gælder der, at $\mathbf{X}_{RA} \sim R\mathbf{X}_{RA} \sim \mathbf{X}_A$. Dvs. $N(\mathbf{X}_B) \sim N(\mathbf{X}_A)$, hvorfor $\mu(RA) = \mu(A)$, hvilket medfører, at intensitetsfunktionen er konstant. Denne konstant kaldes intensiteten og noteres ρ

Efter at have defineret nogle grundlæggende begreber og funktioner for punktprocesser på den d -dimensionelle kugle, er det næste skridt at definere punktproces karakteristika. Derfor introduceres først Palm fordelingen for en punktproces på kuglen. Her vil vi i stedet for at betragte den d -dimensionelle kugle betragte den todimensionelle kugle. I det følgende vil vi notere $d\nu_d$ som $d\nu$, hvor dimensionen fremgår af konteksten. Ydermere vil vi fremover notere $N(\mathbf{X}_B)$ som $N(B)$.

2.2 Palm fordelingen

I dette afsnit introduceres teori med det formål at definere Palm fordelingen, hvorefter egenskaber for denne i næste afsnit bruges til at definere punktproces karakteristika.

Definition 2.2.1 *Lad \mathbf{X} være en punktproces på kuglen. For $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^2) \times \mathcal{F}$ defineres det reducerede Campbell mål $C^!$ på $\mathbb{S}^2 \times F$ som*

$$C^!(A) = \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{1} \left[(x, \mathbf{X} \setminus \{x\}) \in A \right] \right]. \quad (2.2)$$

Bemærk, at det reducerede Campbell mål kan beskrive μ , da

$$\mu(\cdot) = \int \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{1} [x \in \cdot] d\mu(\cdot) = \int \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{1} \left[(x, \mathbf{X} \setminus \{x\}) \in \cdot \times F \right] dC^!(\cdot \times F) = C^!(\cdot \times F).$$

Ydermere ses det, at for vilkårlige $D \in \mathcal{F}$ er $C^!(\cdot \times D) \leq \mu(\cdot)$, hvorfor $C^!(\cdot \times D)$ er absolut kontinuert med hensyn til μ . Da $C^!(\cdot \times D)$ er absolut kontinuert med hensyn til μ gælder der jf. Radon-Nikodyms sætning, at der eksisterer μ -næsten sikkert en entydig tæthedsfunktion $x \mapsto P_x^!(D)$ sådan, at

$$C^!(B \times D) = \int_B P_x^!(D) d\mu(x), \quad (2.3)$$

hvor $B \in \mathbb{S}^2$ og $P_x^!$ er et sandsynlighedsmål for ethvert $x \in \mathbb{S}^2$ (Møller og Waagepetersen, 2004).

Definition 2.2.2 *Sandsynlighedsmålet $P_x^!$ på \mathcal{F} kaldes den reducerede Palm fordeling i punktet x .*

Notér den geodætiske afstand som $s(x, y) = \arccos(x \cdot y)$, hvor \cdot er det almindelige indre produkt. Betragt $B = \{e \in \mathbb{S}^2 \mid s(x, e) < \varepsilon\}$ for vilkårligt små $\varepsilon > 0$ sådan, at $P(N(B) > 1) \approx 0$. Så er $\mu(B) \approx P(N(B) > 0)$ og $C^!(B \times D) \approx P(\mathbf{X} \setminus \{x\} \in D, N(B) > 0)$, hvilket giver

$$P_x^!(D) \approx P(\mathbf{X} \setminus \{x\} \in D \mid N(s(x, e)) > 0),$$

hvor e er et vilkårligt fast punkt på \mathbb{S}^2 og $D \in \mathcal{F}$. Den reducerede Palm fordeling kan derfor forstås som den betingede sandsynlighed af $\mathbf{X} \setminus \{x\}$ givet $x \in \mathbf{X}$.

Betragt det reducerede Campbell mål og den reducerede Palm fordeling. Så har vi, at

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{1} \left[(x, \mathbf{X} \setminus \{x\}) \in B \times D \right] \right] = \int_B P_x^! (D) d\mu(x) = \int \int \mathbf{1} [x \in B] \mathbf{1} [\mathbf{x} \in D] dP_x^! d\mu(x)$$

Ifølge standardbeviset i Appendiks A gælder der for en vilkårlig Borel funktion $h : (\mathbb{S}^2)^n \mapsto [0; \infty)$, at

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X}} h(x, \mathbf{X} \setminus \{x\}) \right] = \iint h(x, \mathbf{x}) dP_x^! (\mathbf{x}) d\mu(x) \quad (2.4)$$

Denne ligning kaldes Campbell-Meckes formel.

Proposition 2.2.3 *Antag, at \mathbf{X} er en punktproces på \mathbb{S}^2 med en integrabel intensitetsfunktion $\rho(x)$. For vilkårlige $x \in \mathbb{S}^2$ eksisterer der en endelig punktproces $\mathbf{X}_x^!$ sådan, at*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X}} h(x, \mathbf{X} \setminus \{x\}) \right] = \int \mathbb{E} \left[h(x, \mathbf{X}_x^!) \right] \rho(x) d\nu(x) \quad (2.5)$$

for vilkårlige ikke-negative Borel funktioner h .

Beviset følger af standardbeviset i Appendiks A og definitionen af den reducerede Palm fordeling og intensitetsmålet. Bemærk, at (2.5) og Campbell-Mecke formelen (2.4) er ækvivalente.

Proposition 2.2.4 *Lad $\mathcal{SO}(3)$ være gruppen af specielle ortogonale matricer. Antag, at \mathbf{X} er isotropisk med intensitet $\rho > 0$, og at fordelingen af \mathbf{X} er givet ved en tæthed f med hensyn til standard Poisson punktprocessen på \mathbb{S}^2 . For vilkårligt $x \in \mathbb{S}^2$ og $R \in \mathcal{SO}(3)$ gælder der, at $\mathbf{X}_{Rx}^!$ er fordelt som $R\mathbf{X}_x^!$.*

Bevis

Lad $\mathbf{Y} \sim \text{Poisson}(\mathbb{S}^2, 1)$ og betragt $\mathbf{X} \sim f$ med hensyn til \mathbf{Y} . Af $\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[g(\mathbf{Y})f(\mathbf{Y})]$ har vi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X}} h(x, \mathbf{X} \setminus \{x\}) \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{Y}} h(x, \mathbf{Y} \setminus \{x\}) f(\mathbf{Y}) \right] \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \mathbb{E} [h(x, \mathbf{Y}) f(\mathbf{Y} \cup x)] d\nu(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \mathbb{E} \left[h(x, \mathbf{Y}) \frac{f(\mathbf{Y} \cup x)}{\rho(x)} \right] \rho(x) d\nu(x), \end{aligned}$$

hvor der i anden lighed anvendes Slivnyak-Mecke B.0.2, da \mathbf{Y} er Poisson. Af (2.5) har vi da, at tætheden for $\mathbf{X}_x^!$ er

$$f_x^! (\{x_1, \dots, x_n\}) = \frac{f(\{x, x_1, \dots, x_n\})}{\rho}.$$

Det følger så, at tætheden for $\mathbf{X}_{Rx}^!$ er givet ved

$$\begin{aligned} f_{Rx}^! (\{x_1, \dots, x_n\}) &= \frac{f(\{x_1, \dots, x_n, Rx\})}{\rho} \\ &= \frac{f(\{R^T x_1, \dots, R^T x_n, R^T Rx\})}{\rho} \\ &= f_x^! (R^T \{x_1, \dots, x_n\}), \end{aligned}$$

hvor vi i anden lighed bruger, at \mathbf{X} er isotropisk, hvorfor f er invariant under rotationer. Dette medfører, at

$$\begin{aligned} P(R\mathbf{X}_x^! \in B) &= P(\mathbf{X}_x^! \in R^T B) = \mathbb{E} \left[\mathbf{1} [\mathbf{Y} \in R^T B] f_x^! (\mathbf{Y}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1} [R\mathbf{Y} \in B] f_x^! (\mathbf{Y}) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbf{1} [R\mathbf{Y} \in B] f_x^! (R^T R\mathbf{Y}) \right], \end{aligned}$$

hvilket viser, at $\mathbf{Y} \sim R\mathbf{Y}$, hvorfor fordelingen af $\mathbf{X}_{Rx}^!$ er lig fordelingen af $R\mathbf{X}_x^!$. ■

I det foregående blev fordelingen af $\mathbf{X}_x^!$ betragtet i et punkt $x \in \mathbf{X}$. Lad os betragte et vilkårligt fast punkt e på kuglen og undersøge fordelingen af $\mathbf{X}_x^!$ i forhold til \mathbf{X}_e . For $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{e\}$ findes der en entydig rotation R_x sådan, at $R_x e = x$ er rotationen omkring akse, som er ortogonal på storcirklen indeholdende x og e , som er givet ved $u(x) = \frac{e \times x}{\|e \times x\|}$, hvor \times er krydsproduktet i \mathbb{R}^3 . Lad $\theta(x) \in (0, 2\pi)$ være vinklen for rotationen R_x omkring $u(x)$. Dvs. $\theta(x) = s(e, x)$, hvis $0 < \theta(x) \leq \pi$, ellers $\theta(x) = 2\pi - s(e, x)$. Definér $R_e = I$.

Korollar 2.2.5 *Antag, at \mathbf{X} er isotropisk med intensitet $\rho > 0$ og absolut kontinuert fordelt med hensyn til standard Poisson punktprocessen på \mathbb{S}^2 . Så gælder der for ν - næsten alle $x \in \mathbb{S}^2$, at $\mathbf{X}_x^!$ er fordelt som $R_x \mathbf{X}_e^!$. Altså hvis k er en ikke-negativ målelig funktion, så gælder der for ν - næsten alle $x \in \mathbb{S}^2$, at*

$$\mathbb{E} \left[k(R_x^T \mathbf{X}_x^!) \right] = \mathbb{E} \left[k(\mathbf{X}_e^!) \right].$$

Bevis

Lad $R_z e = z$ og betragt $\mathbf{X}_{R_z e}$ af Proposition 2.2.4 har vi, at $\mathbf{X}_{R_z e}^! \sim R_z \mathbf{X}_e^!$ hvorfor $\mathbf{X}_z^! \sim R_z \mathbf{X}_e^!$. At

$$\mathbb{E} \left[k(R_x^T \mathbf{X}_x^!) \right] = \mathbb{E} \left[k(\mathbf{X}_e^!) \right]$$

ses ved at anvende standardbeviset og at $R_x^T x = e$. ■

Lad \mathbf{X} være en isotropisk punktproces, hvis $R_x^T \mathbf{X}_x^!$ og $\mathbf{X}_e^!$ er identisk fordelte, har vi for $D \in \mathcal{F}$ og $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^2)$ med $\nu(A) > 0$, at fordelingen af $\mathbf{X}_e^!$ er givet ved

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X}_e^! \in D) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1} [\mathbf{X}_e^! \in D] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1} [R_x^T \mathbf{X}_x^! \in D] \right] \\ &= \frac{1}{\nu(A)\rho} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X} \cap A} \mathbf{1} [R_x^T (\mathbf{X} \setminus \{x\}) \in D] \right], \end{aligned} \tag{2.6}$$

hvor vi anvender antagelse i anden lighed, (2.5), og at \mathbf{X} er isotropisk i tredje lighed. Det ses, at fordelingen af $\mathbf{X}_e^!$ er en middelværdi, hvorfor den egner sig til at udlede punktproces karakteristika. I næste afsnit anvendes den reducerede Palm fordeling til at definere punktproces karakteristika.

2.3 Punktproces karakteristika

I dette afsnit anvendes teorien fra Afsnit 2.2 til at definere punktproces karakteristika for en isotropisk punktproces \mathbf{X} på \mathbb{S}^2 med intensitet $\rho > 0$ og absolut kontinuert med hensyn til standard Poisson punktprocessen på \mathbb{S}^2 . Dette betragtes ikke som en alvorlig begrænsning for anvendelsen af teorien i nærværende projekt.

For den geodætiske afstand indfører vi, at $s(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} s(x, y)$ for $A, B \subset \mathbb{S}^2$ er den mindste afstand mellem to områder på \mathbb{S}^2 .

Definition 2.3.1 *Lad \mathbf{X} være en isotropisk punktproces på \mathbb{S}^2 med intensitet $\rho > 0$ og absolut kontinuert med hensyn til standard Poisson punktprocessen på \mathbb{S}^2 . Så defineres nærmeste nabofunktionen G som*

$$G(t) = P\left(s(\mathbf{X}_e^!, e) \leq t\right) = P\left(s(\mathbf{X}_x^!, x) \leq t\right), \quad (2.7)$$

hvor $0 \leq t \leq \pi$ og $e \in \mathbb{S}^2$.

For et vilkårligt punkt $p \in \mathbb{S}^2$ defineres tomrumsfunktionen F som

$$F(t) = P(s(\mathbf{X}, p) \leq t), \quad (2.8)$$

hvor $0 \leq t \leq \pi$.

Den sidste lighed i (2.7) følger af Korollar 2.2.5. Nærmeste nabofunktionen kan betragtes som fordelingsfunktionen for den geodætiske afstand fra et typisk punkt i \mathbf{X} til det nærmeste punkt i \mathbf{X} . Tomrumsfunktionen er sandsynligheden for at observere et punkt i \mathbf{X} indenfor afstand t af det vilkårlige punkt p . Da \mathbf{X} er isotropisk afhænger $F(t)$ ikke af valget af p .

Definition 2.3.2 *Vi definerer J -funktionen ved*

$$J(t) = \frac{1 - G(t)}{1 - F(t)}, \quad \text{for } F(t) < 1.$$

Definition 2.3.3 *Lad \mathbf{X} være en isotropisk punktproces på \mathbb{S}^2 med intensitet $\rho > 0$ og absolut kontinuert med hensyn til standard Poisson punktprocessen på \mathbb{S}^2 . Så defineres K -funktionen som*

$$K(t) = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X}_e^!} \mathbf{1}[s(e, x) \leq t] \right] = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} \left[\sum_{y \in \mathbf{X}_x^!} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t] \right] \quad (2.9)$$

med $0 \leq t \leq \pi$ og $x \in \mathbb{S}^2$.

Den sidste lighed i (2.9) skyldes Korollar 2.2.5. Ved at isolere middelværdien ses det, at $\rho K(t)$ er det forventede antal af punkter indenfor geodætisk afstand t fra et punkt i \mathbf{X} . I følgende proposition udeledes relationen mellem K -funktionen og parkorrelationsfunktionen.

Proposition 2.3.4 *Lad \mathbf{X} være en isotropisk punktproces på \mathbb{S}^2 med intensitet $\rho > 0$ og absolut kontinuert med hensyn til standard Poisson punktprocessen på \mathbb{S}^2 . Antag, at parkorrelationsfunktionen er isotropisk $g(x, y) = g(s(x, y))$. Så gælder der, at*

$$K(t) = 2\pi \int_0^t g(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta.$$

Bevis

Betragt K -funktionen og anvend (2.5). Så har vi, at

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\rho^2 \nu(A)} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X} \cap A} \sum_{y \in \mathbf{X} \setminus \{x\}} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t] \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2 \nu(A)} \int_A \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t] \rho^{(2)}(x, y) d\nu(x, y) \\ &= \frac{1}{\nu(A)} \int_A \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t] g(x, y) d\nu(x, y), \end{aligned}$$

hvor vi har anvendt Campbells formel (2.1) i anden lighed samt definitionen på parkorrelationsfunktionen i tredje lighed. Da parkorrelationen af antagelse kun afhænger af $s(x, y)$, kan vi vælge et fast x , som vælges til at være nordpolen $(0, 0, 1)$, som noteres x_{nord} og hermed fortsætte udregningerne

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\nu(A)} \nu(A) \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{1}[s(x_{\text{nord}}, y) \leq t] g(s(x_{\text{nord}}, y)) d\nu(y) \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{1}[s(x_{\text{nord}}, (\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta)) \leq t] g(s(x_{\text{nord}}, (\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta))) \sin \vartheta d\nu(\mathbf{e}) d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{1}[\vartheta \leq t] g(\vartheta) \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^t g(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta, \end{aligned}$$

hvor vi substituerer $d\nu(y)$ med $d\nu(\mathbf{e}) d\vartheta$ og y med $(\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta)$, hvor $\mathbf{e} = (\sin \varphi, \cos \varphi)$ ved at anvende Definition 2.1.1 for $d = 2$ i anden lighed og anvender at $s(x, y) = \arccos(x \cdot y)$ i tredje lighed. ■

Bemærk, at K -funktionen er en funktion af $g(\vartheta) \sin(\vartheta)$ og ikke blot $g(r)$ som i planen. Denne relationen gør det muligt at bestemme parkorrelationsfunktion ud fra K -funktionen på følgende måde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K(t) &= 2\pi g(t) \sin(t) \Leftrightarrow \\ g(t) &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} K(t)}{\sin(t)}. \end{aligned}$$

I næste afsnit anvendes (2.5) til at udlede ikke-parametriske estimater for nærmste nabofunktionen og K -funktionen.

2.3.1 Ikke-parametriske estimater

I dette afsnit udledes ikke-parametriske estimater for nærmeste nabofunktionen, tomrumsfunktionen, K -funktionen og parkorrelationsfunktionen. Ydermere anvendes estimatet for K -funktion i et eksempel til at karakterisere et punktmønster.

For at udlede et estimat for nærmeste nabofunktionen anvendes (2.5), hvilket giver

$$\rho\nu(A)G(t) = \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X} \cap A} \mathbf{1} [s(\mathbf{X} \setminus \{x\}, x) \leq t] \right], \quad (2.10)$$

hvor $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^2)$ er observationsvinduet. Dette er en middelværdi, hvorfor det egner sig til at være et estimat.

Estimatet for $G(t)$ med observationsvinduet $A = \mathbb{S}^2$ er givet ved

$$\hat{G}(t) = \frac{1}{N(\mathbb{S}^2)} \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{1} [s(\mathbf{X} \setminus \{x\}, x) \leq t], \quad (2.11)$$

hvor $N(\mathbb{S}^2) > 0$. Estimatet (2.11) er ikke et middelværdiret estimat, hvilket følger af

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{G}(t)] &= \mathbb{E} \left[\frac{\rho\nu(\mathbb{S}^2)}{N(\mathbb{S}^2)} \sum_{x \in \mathbf{X}} \frac{\mathbf{1} [s(\mathbf{X} \setminus \{x\}, x) \leq t]}{\rho\nu(\mathbb{S}^2)} \right] \\ &= \rho\nu(\mathbb{S}^2) \int \mathbb{E} \left[\frac{1}{N(\mathbb{S}^2)} \frac{\mathbf{1} [s(\mathbf{X}_x^!, x) \leq t]}{\rho\nu(\mathbb{S}^2)} \rho \right] d\nu(x), \end{aligned}$$

hvor vi har anvendt (2.5) i anden lighed. Da $N(\mathbb{S}^2)$ og $s(\mathbf{X}_x^!, x)$ ikke er uafhængige, er (2.11) ikke et middelværdiret estimat. Estimatet (2.11) består af forholdet mellem to middelværdirette estimater, hvorfor (2.11) siges at være *ratio-middelværdiret*.

I estimatet for $F(t)$ betragtes et endeligt gitter $\mathcal{G} \subset \mathbb{S}^2$ med $m > 0$ punkter. Estimatet er givet ved

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{m} \sum_{p \in \mathcal{G}} \mathbf{1} [s(\mathbf{X}, p) \leq t]. \quad (2.12)$$

Estimatet for $F(t)$ er middelværdiret, hvilket følger af

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{F}(t)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{m} \sum_{p \in \mathcal{G}} \mathbf{1} [s(\mathbf{X}, p) \leq t] \right] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{p \in \mathcal{G}} \mathbb{E} [\mathbf{1} [s(\mathbf{X}, p) \leq t]] \\ &= P(s(\mathbf{X}, p) \leq t). \end{aligned}$$

Hvis observationsvinduet $A \subset \mathbb{S}^2$, anvendes en kantkorrektionsteknik kaldet *minus sampling*. Dvs. lad $A_{\ominus t} = \left\{ x \in A : s(\mathbb{S}^2 \setminus \{A\}, x) > t \right\}$ være mængden af punkter i A , som mindst har den geodætisk afstand t til alle punkter udenfor A . Estimatet for $G(t)$ er da givet ved

$$\hat{G}(t) = \frac{1}{N(A_{\ominus t})} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\ominus t}} \mathbf{1} [s(\mathbf{X}, x) \leq t],$$

hvor $N(A_{\Theta t}) > 0$. For $F(t)$ vælger vi gitret sådan, at $\mathcal{G} \subset A_{\Theta t}$.

Når vi anvender minus sampling, er $\widehat{G}(t)$ ikke et middelværdiret estimat, hvilket følger af

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widehat{G}(t)] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N(A_{\Theta t})} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\Theta t}} \mathbf{1}[s(\mathbf{X}, x) \leq t]\right] \\ &= \frac{1}{N(\mathbb{S}^2)} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\Theta t}} \mathbb{E}[\mathbf{1}[s(\mathbf{X}, x) \leq t]] \\ &= \frac{1}{N(\mathbb{S}^2)} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\Theta t}} P(s(\mathbf{X}, x) \leq t). \end{aligned}$$

For at opnå et ikke-parametrisk estimat for K -funktionen anvender vi (2.5) og får, at

$$\rho^2 \nu(A) K(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathbf{X} \cap A} \sum_{y \in \mathbf{X} \setminus \{x\}} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t]\right]. \quad (2.13)$$

Denne ligning kan bruges til at udlede et ikke-parametrisk estimat for K -funktionen på samme måde, som (2.10) kunne for $G(t)$. Hvis $A = \mathbb{S}^2$ og $N(\mathbb{S}^2) > 1$, så er

$$\widehat{K}(t) = \frac{4\pi}{N(\mathbb{S}^2)(N(\mathbb{S}^2) - 1)} \sum_{x, y \in \mathbf{X}}^{\neq} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t]$$

estimatet for K -funktionen. Hvis $A \subset \mathbb{S}^2$, så får vi ved hjælp af minus sampling estimatet

$$\widehat{K}(t) = \frac{\nu(A)}{N(A)(N(A) - 1)} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\Theta}, y \in \mathbf{X} \cap A}^{\neq} \mathbf{1}[s(x, y) \leq t],$$

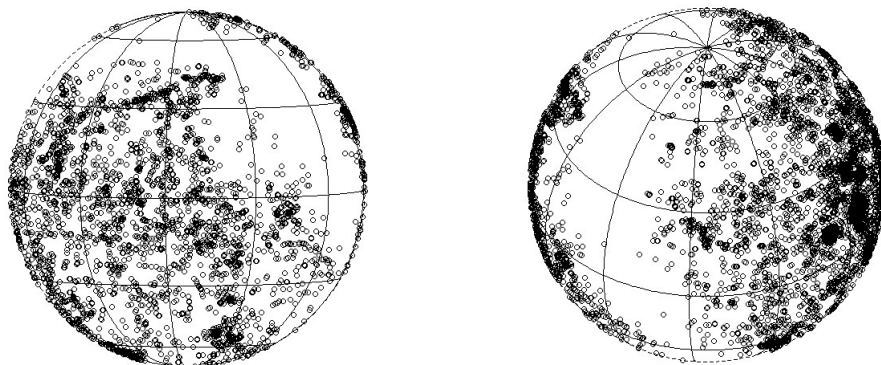
hvor $N(A) > 1$. For Poisson processen er $N(A)(N(A) - 1)/\nu(A)^2$ en middelværdiret estimat for ρ^2 , men dette gælder ikke nødvendigvis for andre processer, hvilket ændrer skaleringen af estimatet for K -funktionen.

Ifølge Proposition 2.3.4 er K -funktionen en kumulativ funktion af $g(\vartheta) \sin(\vartheta)$, hvilket man skal være opmærksom på, hvis man anvender estimatet af K -funktionen som en del af forarbejdet i analysen af et punktmønster. Undersøges en punktproces \mathbf{Y} med estimatet af K -funktionen, gøres det i forhold til estimatet af K -funktionen for standard Poisson punktprocessen. Hvis estimatet K -funktion for \mathbf{Y} er større end for standard Poisson punktprocessen, tyder det på, at \mathbf{Y} er en klynget punktproces. Hvis estimatet af K -funktionen derimod er lavere for \mathbf{Y} end for standard Poisson punktprocessen tyder det på, at \mathbf{Y} er en regulær punktproces.

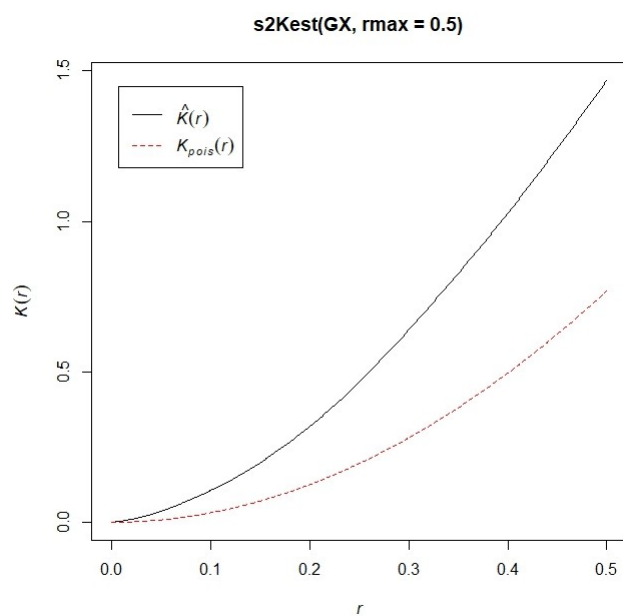
Eksempel 2.3.5

I dette eksempel betragtes datasættet "galaxies", som findes i R pakken *spherstat*, der er tilgængelig på <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/sta4.108/full> under menuén "Supporting Information". Datasættet indeholder positionerne for 10610 galakser på himlen skaleret ned på enhedskuglen.

På figur 2.1 ses plots af "galaxies" med centrum på kuglen i henholdsvis Kilimanjaro til venstre og Pyongyang til højre. Punkterne ser ud til at klumpe sig sammen, hvilket tyder på en klynget punktproces. For at kunne karakterisere punktprocessen som klynget



Figur 2.1: Datasættet "galaxies" med centrum på kuglen i henholdsvis Kilimanjaro (venstre) og Pyongyang (højre).



Figur 2.2: Estimatet af K -funktionen for "galaxies".

anvendes estimatet for K -funktion på "galaxies" se figur 2.2. Dette gøres ved at anvende R kommandoerne `as.s2pp` og `s2Kest` fra pakken `spatstat.sphere`.

På figur 2.2 ses det, at estimatet for K -funktionen er større for "galaxies" end for standard Poisson punktprocessen. Dette tyder på, at "galaxies" er et klynget punktmønster, hvilket understøtter observationen, vi lavede af punktmønsteret på baggrund af figur 2.1. Bemærk, at afstanden mellem punkterne inkluderet i estimatet maksimum er 0.5. Dette er et valgfrit argument til funktionen, men grundet begrænset computerkræft blev denne anvendt. \square

I praksis får vi brug for et estimat af parkorrelationsfunktionen, hvorfor dette præsenteres:

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\nu(A_{\Theta t})} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\Theta t}, y \in \mathbf{X}}^{\neq} \frac{k_b[s(t, s(x, y))]}{2\pi \rho(x) \rho(y) \sin(s(x, y))}, \quad (2.14)$$

hvor $k_b[\cdot]$ er en kerne med båndbredde $b > 0$. I de følgende udregninger antages, at $g(x, y) = g(s(x, y))$, og at $\rho(x) \rho(y) > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{g}(t)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\nu(A_{\Theta t})} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\Theta t}, y \in \mathbf{X}}^{\neq} \frac{k_b[s(t, s(x, y))]}{2\pi \rho(x) \rho(y) \sin(s(x, y))} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi \nu(A_{\Theta t})} \int_{A_{\Theta t}} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{k_b[s(t, s(x, y))]}{\rho(x) \rho(y) \sin(s(x, y))} \rho^{(2)}(x, y) d\nu(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi \nu(A)} \int_{A_{\Theta t}} k_b[s(t, s(x, y))] \frac{1}{\sin(s(x, y))} g(x, y) d\nu(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi \nu(A_{\Theta t})} \nu(A_{\Theta t}) \int_{A_{\Theta t}} \int_{\mathbb{S}^2} k_b[s(t, s(x_{nord}, y))] \frac{1}{\sin(s(x_{nord}, y))} g(s(x_{nord}, y)) d\nu(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k_b[s(t, s(x_{nord}, (\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta)))] \frac{1}{\sin(s(x_{nord}, (\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta)))} \\ &\quad \cdot g(s(x_{nord}, (\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta))) \sin \vartheta d\nu(\mathbf{e}) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k_b[s(t, \vartheta)] \frac{1}{\sin(\vartheta)} g(\vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= \int_0^\pi k_b[s(t, \vartheta)] g(\vartheta) d\vartheta, \end{aligned}$$

hvor vi anvender Campbells formel (2.1) i anden lighed. I fjerde lighed anvender vi, at vi kan betragte x som et fast punkt, da $g(x, y) = g(s(x, y))$. I femte lighed substituerer $d\nu(y)$ med $d\nu(\mathbf{e}) d\vartheta$ og y med $(\mathbf{e} \sin \vartheta, \cos \vartheta)$, hvor $\mathbf{e} = (\sin \varphi, \cos \varphi)$ ved at anvende Definition 2.1.1 for $d = 2$. I sjette lighed anvender vi, at $s(x, y) = \arccos(x \cdot y)$. Dette er ikke et middelværdiret estimat, men for tilstrækkeligt små værdier af b forventes $\hat{g}(t)$ at være tæt på $g(t)$.

2.4 Cox Processer

I dette afsnit betragtes punktprocesser, som er et specialtilfælde af en Cox proces. En Cox proces er en udvidelse af en Poisson punktproces, da den betingede fordeling af Cox processen givet en ikke-negativ stokastisk punktproces er en Poisson punktproces. Poisson punktprocessen er uden interaktion mellem punkterne, mens Cox processen er en klynget

punktproces. De specialtilfælde, som præsenteres her, er log Gaussiske Cox processer og Neyman-Scott Cox processer.

Definition 2.4.1 Lad $\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}(x) \mid x \in \mathbb{S}^2\}$ være en ikke-negativ stokastisk punktproces, hvor $x \mapsto \mathbf{Z}(x)$ er en funktion, som er lokalt integrabel med sandsynlighed 1. Punktprocessen \mathbf{X} er en **Cox proces drevet af \mathbf{Z}** , hvis den betingede fordeling af \mathbf{X} givet $\mathbf{Z} = z$ er en Poisson punktproces med intensitetsfunktion z .

Intensitetsfunktionen for en Cox proces er givet ved $\rho(x) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(x)]$, hvilket følger af at betragte intensitetsmålet og anvende, at $\mathbf{X} \mid \mathbf{Z} \sim \text{Poisson}(S, \mathbf{Z})$. Produkttætheden er givet ved $\rho^{(2)}(x_1, x_2) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(x_1)\mathbf{Z}(x_2)]$, hvilket følger af at betragte det anden ordens faktorielle momentmål, anvende at $\mathbf{X} \mid \mathbf{Z} \sim \text{Poisson}(S, \mathbf{Z})$ og Slivnyak-Mecke B.0.2. Det medfører, at parkorrelationsfunktionen er givet ved

$$g(x_1, x_2) = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Z}(x_1)\mathbf{Z}(x_2)]}{\mathbb{E}[\mathbf{Z}(x_1)]\mathbb{E}[\mathbf{Z}(x_2)]}. \quad (2.15)$$

Det første specialtilfælde, vi betragter, er log Gaussiske Cox processer, som er Cox processer drevet af Gaussiske processer. En Gaussisk proces er en stokastisk variabel $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}(x) \mid x \in \mathbb{S}^2\}$, hvor enhver endelig samling af $\mathbf{Y}(x)$ er multivariat normalfordelt. Hver $\mathbf{Y}(x)$ er normalfordelt med middel $\mathbb{E}[\mathbf{Y}(x)] = m(x)$ og kovarians $\text{Cov}[\mathbf{Y}(x_1), \mathbf{Y}(x_2)] = c(x_1, x_2)$.

Definition 2.4.2 Lad \mathbf{Y} være en Gaussisk proces og \mathbf{X} være en Cox proces på \mathbb{S}^2 drevet af $\mathbf{Z}(x) = \exp(\mathbf{Y}(x))$, hvor $u \in \mathbb{S}^2$. Så siges \mathbf{X} at være en **log Gaussisk Cox proces (LGCP)**.

Ud fra intensitetsfunktionen og produkttætheden for en Cox proces giver den momentfrembringende funktion for normalfordelingen, at intensitetsfunktionen og produkttætheden for en LGCP er givet ved

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \exp\left(m(x) + \frac{c(x, x)}{2}\right) \\ \rho^{(2)}(x_1, x_2) &= \exp\left(m(x_1) + m(x_2) + \frac{1}{2}c(x_1, x_1) + \frac{1}{2}c(x_2, x_2) + c(x_1, x_2)\right). \end{aligned}$$

Dette giver parkorrelationsfunktionen

$$g(x_1, x_2) = \exp(c(x_1, x_2)).$$

Det andet specialtilfælde, som præsenteres, er Neyman-Scott processer som Cox processer. En Neyman-Scott proces er en klynget punktproces baseret på en bagvedliggende Poisson punktproces, hvis punkter hver især er udgangspunktet for en Poisson punktproces.

Definition 2.4.3 Lad \mathbf{C} være en punktproces på \mathbb{S}^2 . Hvert $c \in \mathbf{C}$ er erstattet med en klynge \mathbf{X}_c . Hvis \mathbf{X}_c er punktprocesser på \mathbb{S}^2 med endeligt mange punkter hver, så er foreningen af \mathbf{X}_c en **klynget punktproces** \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X} = \cup_{c \in \mathbf{C}} \mathbf{X}_c.$$

Man kalder punkterne fra \mathbf{C} for *forældre* og punkterne fra \mathbf{X}_c for *døtre*. Et specialtilfælde af en klusteret punktproces er Neyman-Scott processen.

Definition 2.4.4 Lad \mathbf{C} være en isotropisk Poisson punktproces på \mathbb{S}^2 med intensitet $\kappa > 0$ og givet \mathbf{C} er \mathbf{X}_c , $c \in C$, uafhængige Poisson punktprocesser på \mathbb{S}^2 med intensitetsfunktion $\rho_c(x) = \alpha k(x, c)$. Da er $\mathbf{X} = \cup_{c \in C} \mathbf{X}_c$ en **Neyman-Scott proces**.

I Definition 2.4.4 er $\alpha > 0$ en parameter, og k er en kerne. Dvs. for alle $c \in \mathbb{S}^2$ er $k(\cdot, c)$ en tæthedsfunktion. Proposition B.0.1 i Appendiks B giver, at Neyman-Scott processen defineret i Definition 2.4.4 også er en Cox proces på \mathbb{S}^2 drevet af

$$\mathbf{Z}(x) = \sum_{c \in C} \alpha k(x, c).$$

Vi kalder denne Cox proces for en *Neyman-Scott Cox proces* (NSCP). Det ses, at \mathbf{Z} er lokalt integrabel. Intensitetsfunktionen for en NSCP er givet ved

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \mathbb{E}[\mathbf{Z}(x)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{c \in C} \alpha k(x, c)\right] \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \alpha k(x, c) \kappa d\nu(c), \end{aligned}$$

hvor vi har brugt Campbells formel (2.1). Anden ordens produkttæthed er givet ved

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}(x_1, x_2) &= \mathbb{E}[\mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{c_1 \in C} \alpha k(x_1, c_1) \sum_{c_2 \in C} \alpha k(x_2, c_2)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{c \in C} \alpha^2 k(x_1, c) k(x_2, c)\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{c_1, c_2 \in C \\ c_1 \neq c_2}} \alpha^2 k(x_1, c_1) k(x_2, c_2)\right] \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \alpha^2 k(x_1, c) k(x_2, c) \kappa d\nu(c) + \int_{\mathbb{S}^2} \alpha^2 k(x_1, c_1) k(x_2, c_2) \kappa^2 d\nu(c_1, c_2), \end{aligned}$$

hvor vi har anvendt Campbells formel (2.1) i fjerde lighed, og at C er Poisson(\mathbb{S}^2, κ).

Hvis $k(x, c) = k(s(x, c))$ er isotropisk, så er \mathbf{Z} isotropisk, hvorfor \mathbf{X} er isotropisk. Intensitetsfunktionen for en isotropisk NSCP er givet ved

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_{\mathbb{S}^2} \alpha k(s(x, c)) \kappa d\nu(c) \\ &= \alpha \kappa, \end{aligned}$$

hvor vi anvender, at $k(s(x, c))$ er en tæthedsfunktion, og produkttætheden for en isotropisk NSCP er givet ved

$$\rho^{(2)}(x_1, x_2) = \alpha^2 \kappa \int_{\mathbb{S}^2} k(s(x_1, c)) k(s(x_2, c)) d\nu(c) + \alpha^2 \kappa^2$$

Dette giver parkorrelationsfunktionen

$$g(x_1, x_2) = 1 + \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{S}^2} k(s(x_1, c)) k(s(x_2, c)) d\nu(c).$$

I det næste kapitel introduceres estimationsfunktioner mm. til parameter estimation, da målet er at implementere en optimal estimationsfunktion og teste den ved at tilpasse en LGCP datasættet "galaxies".

3. Parameter estimation

I dette kapitel introduceres estimationsfunktioner til at estimere parametrene i punktprocesser. For at kunne anvende estimationsfunktionen i praksis tilpasses en LGCP. I det følgende antages, at man kan bytte om på summer og differentiation og integration.

3.1 Estimationsfunktioner

I det følgende betragtes en statistisk model $\{p(\cdot; \boldsymbol{\theta})\}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}$, hvor \cdot er en pladsholder for en realisation \mathbf{x} af en punktproces \mathbf{X} på \mathbb{S}^2 , og $\boldsymbol{\theta}$ er en parametervektor i parameterrommet $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Til at estimere parameteren $\boldsymbol{\theta}$ i $p(\cdot; \boldsymbol{\theta})$ anvendes en funktion $\mathbf{e}(\cdot; \boldsymbol{\theta}) = (e_1(\cdot; \boldsymbol{\theta}), \dots, e_k(\cdot; \boldsymbol{\theta}))^T$, hvor \cdot er en pladsholder for $\mathbf{x} \in F$ og $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Denne kaldes en estimationsfunktion og estimerer $\boldsymbol{\theta}$ ved at løse ligningen

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

med hensyn til $\boldsymbol{\theta}$, hvor \mathbf{x} er en realisation af \mathbf{X} .

En estimationsfunktion siges at være middelværdiret, hvis den forventede værdi er $\mathbf{0}$. Ydermere, hvis for $i = 1, \dots, k$ $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathbf{e}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ eksisterer for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ og $E\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mathbf{e}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})\right]$ og $E\left[\mathbf{e}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})^T\right]$ eksisterer, så defineres *sensitivitetsmatricen* som

$$S_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mathbf{e}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})\right],$$

og *variabilitetsmatricen* defineres som

$$V_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[\mathbf{e}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})^T\right].$$

En estimationsfunktion, som er middelværdiret og har invertibel sensitivitets- og invertibel variabilitetsmatrix, kaldes regulær (Song, 2007).

For en regulær estimationsfunktion defineres Godambes informationskriterie som

$$G_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}) = S_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta})^T V_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta})^{-1} S_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}),$$

for $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ (Song, 2007). Godambes informationskriterie anvendes til at finde en overlegen estimationsfunktion. Lad $\mathbf{e}_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ og $\mathbf{e}_2(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ være to regulære estimationsfunktioner. Så siges $\mathbf{e}_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ at være $\mathbf{e}_2(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ overlegen, hvis

$$G_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) - G_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})$$

er positiv definit. Hvis $\mathbf{e}_1(x; \boldsymbol{\theta})$ er alle $\mathbf{e}_2(x; \boldsymbol{\theta})$ overlegne, så siges $\mathbf{e}_1(x; \boldsymbol{\theta})$ at have det største Godambe informationskriterie og at være en optimal estimationsfunktion. Så

$$S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^T V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^{-1} S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) - S_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^T V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} S_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.2}$$

skal være ikke-negativ definit for alle \mathbf{e}_2 for, at \mathbf{e}_1 er en optimal estimationsfunktion.

Lad $\boldsymbol{\theta}_0$ være den sande parameter for $\boldsymbol{\theta}$ og betragt en regulær estimationsfunktion $\mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0)$ og et estimat $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, som løser (3.1). Ved at bruge første ordens Taylor udviklingen uden rest på $\mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0)$ omkring $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ får vi, at

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0) &\approx \mathbf{e}(x; \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mathbf{e}(x; \hat{\boldsymbol{\theta}}) (\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &\approx \mathbf{e}(x; \hat{\boldsymbol{\theta}}) + S_e(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= -S_e(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0). \end{aligned}$$

Ved at antage, at $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ er tilstrækkeligt tæt på $\boldsymbol{\theta}_0$ og isolere $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ har vi, at

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx \boldsymbol{\theta}_0 + (-S_e(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}) \mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0),$$

idet $\mathbf{e}(\cdot; \boldsymbol{\theta})$ er regulær, er $E[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \approx \boldsymbol{\theta}_0$. Derudover ses det, at

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] &\approx \text{Var}\left[(-S_e(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}) \mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0)\right] \\ &= -S_e(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \text{Var}[\mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0)] (-S_e(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1})^T \\ &= G_e(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}, \end{aligned}$$

hvor vi anvender, at $\text{Var}[AX] = A \text{Var}[X] A^T$, og at $\mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0)$ er en regulær estimationsfunktion, hvorfor $\text{Var}[\mathbf{e}(x; \boldsymbol{\theta}_0)] = V_e(\boldsymbol{\theta}_0)$. Det inverse Godambe informationskriterie er altså approksimativt variansen af estimatet $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Hvis $\mathbf{e}_1(x; \boldsymbol{\theta})$ er $\mathbf{e}_2(x; \boldsymbol{\theta})$ overlegen, forventes $\mathbf{e}_1(x; \boldsymbol{\theta})$ at have en mindre varians, hvorfor estimationsfunktionen, som har det største Godambe informationskriterie, også vil have den forventede mindste varians.

Proposition 3.1.1 *Lad $\mathbf{e}_1(x; \boldsymbol{\theta})$ og $\mathbf{e}_2(x; \boldsymbol{\theta})$ være regulære estimationsfunktioner. For en optimal estimationsfunktion er det tilstrækkeligt at betragte*

$$V_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}) = S_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}), \quad \text{for alle } \boldsymbol{\theta}, \quad (3.3)$$

Bevis

Lad $\hat{\mathbf{e}}_1(x, \boldsymbol{\theta}) = V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_2(x, \boldsymbol{\theta})$ være den optimale lineære prediktor for $\mathbf{e}_1(x, \boldsymbol{\theta})$ givet $\mathbf{e}_2(x, \boldsymbol{\theta})$. Så er

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{e}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})] &= E\left[(\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{e}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}))^2\right] \\ &= E[\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) - \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{e}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})] \\ &= V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) + V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) - V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\quad - V_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ &= V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) - V_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

hvilken er ikke-negativ definit hvorfor

$$\begin{aligned} &S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^{-1} S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\quad - S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^{-1} S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

også er ikke-negativ definit. Derfor er (3.2) ikke-negativ definit, hvis

$$S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}) = S_{\mathbf{e}_2}(\boldsymbol{\theta}),$$

hvilket følger af (3.3). Ved at anvende (3.3) for $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$ har vi, at $V_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta}) = S_{\mathbf{e}_1}(\boldsymbol{\theta})$. Hermed er det vist, at det er tilstrækkeligt at betragte (3.3), når vi vil finde en optimal estimationsfunktion. ■

Betragt en m -dimensionel data vektor \mathbf{Y} med middelværdivektor $\boldsymbol{\mu}$ og kovariansmatrix $V(\boldsymbol{\mu})$. Lad $\boldsymbol{\mu}$ afhænge af en k -dimensionel parameter vektor $\boldsymbol{\beta}$ og være differentiable med hensyn til $\boldsymbol{\beta}$. Lad $D = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})$ være en $m \times k$ matrix af partielle afledede. Så er *quasi-likelihood* score funktionen givet ved

$$(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) D^T V^{-1},$$

hvilken er optimal blandt alle estimationsfunktioner på formen $(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) A$ for en vilkårlig $m \times k$ matrix A (Heyde, 1997; Guan et al., 2015).

I næste afsnit skal vi se på en specifik estimationsfunktion og bruge Proposition 3.1.1 til at finde en optimal estimationsfunktion.

3.2 Første ordens estimationsfunktion

Betragt en punktproces \mathbf{X} med realisation \mathbf{x} på \mathbb{S}^2 med en givet parametrisk model for intensitetsfunktionen $\rho(u; \boldsymbol{\theta})$, hvor $u \in \mathbb{S}^2$. Følgende sammensatte log-likelihood funktion til estimation af $\boldsymbol{\theta}$ udledes på tilsvarende måde som i Møller og Waagepetersen (2007)

$$\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \log \rho(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u), \quad (3.4)$$

hvor $W \subset \mathbb{S}^2$ er et observations vindue. Dette giver den første ordens estimationsfunktion

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \log \rho(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u),$$

som kan omskrives til

$$\mathbf{e}_f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} f(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W f(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u), \quad (3.5)$$

hvor $f = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(x; \boldsymbol{\theta})}{\rho(x; \boldsymbol{\theta})}$. Betragt nu (3.5) for en generel funktion $f: F \times \Theta \mapsto \mathbb{R}_k$

Ved at anvende Proposition 3.1.1 kan vi finde en optimal første ordens estimationsfunktion. Derfor betragtes $S_{\mathbf{e}_f}(\boldsymbol{\theta})$ og $V_{\mathbf{e}_f, \mathbf{e}_f}(\boldsymbol{\theta})$

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{e}_f}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbb{E} \left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mathbf{e}_f(x, \boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \left(\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} f(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W f(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u, \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[-\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} f(x; \boldsymbol{\theta}) + \int_W \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} f(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) + f(u; \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \right] \\ &= \int_W f(u; \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u, \boldsymbol{\theta}) d\nu(u), \end{aligned}$$

hvor vi har anvendt Campbells formel i tredje lighed.

$$\begin{aligned}
V_{\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_f}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})^T \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \varphi(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} f(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W f(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \right)^T \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \varphi(x; \boldsymbol{\theta}) f(x; \boldsymbol{\theta})^T - \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \varphi(x; \boldsymbol{\theta}) \int_W f(u; \boldsymbol{\theta})^T \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} f(x; \boldsymbol{\theta})^T \int_W \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \right. \\
&\quad \left. + \int_{W^2} \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) f(v; \boldsymbol{\theta})^T \rho(v; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) d\nu(v) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \varphi(x; \boldsymbol{\theta}) f(x; \boldsymbol{\theta})^T \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, x_2 \in \mathbf{X} \cap W}^{\neq} \varphi(x_1; \boldsymbol{\theta}) f(x_2; \boldsymbol{\theta})^T \right] \\
&\quad - \int_{W^2} \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) f(v; \boldsymbol{\theta})^T \rho(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(v; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) d\nu(v) \\
&= \int_W f(u; \boldsymbol{\theta})^T \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u) \\
&\quad + \int_{W^2} \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) f(u; \boldsymbol{\theta})^T \rho(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(v; \boldsymbol{\theta}) [g(s(u, v)) - 1] d\nu(u) d\nu(v),
\end{aligned}$$

hvor vi har anvendt Campbells formel i tredje og fjerde lighed. Ifølge Proposition 3.1.1 har vi, at

$$\begin{aligned}
\int_W f(u; \boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u; \boldsymbol{\theta}) - \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) \right. \\
\left. - \rho(u; \boldsymbol{\theta}) \int_W \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) \rho(v; \boldsymbol{\theta}) [g(s(u, v)) - 1] d\nu(v) \right] d\nu(u) = 0,
\end{aligned}$$

for alle $f : F \times \Theta \mapsto \mathbb{R}^k$. Dette svarer til at løse

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(x; \boldsymbol{\theta}) - \varphi(x; \boldsymbol{\theta}) \rho(x; \boldsymbol{\theta}) - \rho(x; \boldsymbol{\theta}) \int_W \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) \rho(v; \boldsymbol{\theta}) [g(s(x, v)) - 1] d\nu(v) = 0,$$

for alle $x \in W$. Dette kan omskrives til følgende integral ligning forudsat, at $\rho(x; \boldsymbol{\theta}) > 0$

$$\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(x; \boldsymbol{\theta})}{\rho(x; \boldsymbol{\theta})} - \int_W \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) \rho(v; \boldsymbol{\theta}) [g(s(x, v)) - 1] d\nu(v). \quad (3.6)$$

Det ses, at (3.6) er en Fredholm integral ligning af den anden type (Hackbusch, 1995). I dette tilfælde svarer $\rho(v) [g(s(x, v)) - 1]$ til kernen, hvorfor vi definerer den lineære afbildning T kaldet en integral operator:

$$T : \varphi \mapsto \int_W \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) \rho(v; \boldsymbol{\theta}) [g(s(x, v)) - 1] d\nu(v). \quad (3.7)$$

Dette giver os integral ligningen

$$\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(x; \boldsymbol{\theta})}{\rho(x; \boldsymbol{\theta})} - T\varphi(x; \boldsymbol{\theta}). \quad (3.8)$$

Af Hackbusch (1995, Sætning 3.2.1) får vi, at løsningen til (3.8) er

$$\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) = (I + T)^{-1} \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(x; \boldsymbol{\theta})}{\rho(x; \boldsymbol{\theta})}, \quad (3.9)$$

hvor I er identitets operatoren og $(I + T)^{-1}$ er den begrænsede lineære inverse af $I + T$ (Guan et al., 2015). Den generelle funktion, som er tilstrækkelig for, at $\mathbf{e}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ opfylder Proposition 3.1.1, er givet ved (3.9).

Den optimale første ordens estimationsfunktion defineres til at være

$$e_\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \varphi(x; \boldsymbol{\theta}) - \int_W \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u), \quad (3.10)$$

hvor φ er givet som i (3.9). Definer $\Sigma = \text{Var}[e_\varphi(\boldsymbol{\theta})]$, $\mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} e_\varphi(\boldsymbol{\theta})$ og $\mathbf{S} = -\mathbf{E}[\mathbf{J}]$, så følger det af Proposition 3.1.1 for $f = \varphi$, at

$$\Sigma = \mathbf{S} = \int_W \varphi(u; \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u).$$

En eksakt løsning for φ eksisterer sjældent, hvorfor φ i praksis approksimeres numerisk. Det næste afsnit behandler teori, som kan anvendes til at approksimere φ i estimationsfunktioner.

3.3 Spektral teori

I dette afsnit vil vi introducere Mercers repræsentation for en kompleks kovariansfunktion. Dette anvendes sidenhen til numerisk at approksimere $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$ i estimationsfunktioner. Teorien i dette afsnit er af mere generel karakter, hvorfor vi igen betragter \mathbb{S}^d i stedet for \mathbb{S}^2 .

Betragt en kovariansfunktion $K : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \mapsto \mathbb{C}$, som tilhører klassen med endeligt spor og er kvadratisk integrable. Af Ben Hough et al. (2009, Lemma 4.2.2) og Mercers repræsentation (Riesz og Sz.-Nagy, 1965, Section 98) har K $\nu_d^{(2)}$ -næsten overalt spektral repræsentationen

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n(x) \overline{\gamma_n(y)}, \quad x, y \in \mathbb{S}^d, \quad (3.11)$$

hvor følgen er absolut konvergent. γ_i er egenfunktioner, som danner en orthonormal basis for $L^2(\mathbb{S}^d, \nu_d)$, og α_i er de tilhørende egenværdier (Møller et al., 2017). Altså

$$\int K(x, y) \gamma_i(y) d\nu(y) = \alpha_i \gamma_i(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

I det følgende betragtes funktioner ψ , som tilhører klassen af kontinuerte funktioner Ψ_d , så $\psi : [0; \pi] \mapsto \mathbb{R}$, hvor $\psi(0) = 1$ og $\psi(s(x, y))$ er positiv-semi definit. Ifølge Gneiting (2013) er en funktion $c : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$ isotropisk, hvis der eksisterer en funktion $\psi : [0; \pi] \mapsto \mathbb{R}$ sådan, at

$$c(x, y) = \psi(s(x, y)), \quad (3.12)$$

for alle $x, y \in \mathbb{S}^d$. Da c positiv-semi definit kan vi associere Ψ_d med korrelations funktioner for middel-kvadrat kontinuerte, stationære og isotropiske stokastiske punktprocesser på kuglen \mathbb{S}^d (Gneiting, 2013). Lad Ψ_d^+ være delklassen af funktioner $\psi \in \Psi_d$, som er positiv definite og sæt $\Psi_\infty^+ = \bigcap_{d=1}^\infty \Psi_d^+$, $\Psi_d^- = \Psi_d \setminus \Psi_d^+$ og $\Psi_\infty^- = \bigcap_{d=1}^\infty \Psi_d^-$. Ifølge Gneiting (2013, Korollar 1) er Ψ_d^+ og Ψ_d^- strengt aftagende og $\Psi_\infty := \Psi_\infty^+ \cup \Psi_\infty^-$, hvor foreningen er disjunkt (Møller et al., 2017).

Derudover introduceres Legendre polynomiet $P_\ell(x)$ af orden $\ell = 0, 1, \dots$. Ifølge Rodrigues' formel er det givet ved

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} \left\{ (x^2 - 1)^\ell \right\},$$

for $-1 < x < 1$ og $m = 0, \dots, \ell$. De tilhørende Legendre funktioner $P_\ell^{(m)}$ og $P_\ell^{(-m)}$ er givet ved

$$P_\ell^{(m)}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_\ell(x), \quad -1 < x < 1$$

og

$$P_\ell^{(-m)} = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^{(m)}.$$

Derudover introduceres Gegenbauer polynomiet $\mathcal{C}_\ell^\lambda : [-1; 1] \mapsto \mathbb{R}$ af orden $\ell = 0, 1, \dots$, der for $\lambda > 0$ er defineret ved

$$\mathcal{C}_\ell^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\frac{\ell}{2}} (-1)^k \frac{\Gamma(n - k + \lambda)}{\Gamma(\lambda) k! (\ell - 2k)!} (2x)^{\ell - 2k}$$

Sætning 3.3.1 *Denne sætning består af flere resultater fra Møller et al. (2017):*

a. $\psi \in \Psi_d$, hvis og kun hvis ψ kan skrives som

$$\psi(s(x, y)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell,d} \frac{\mathcal{C}_\ell^{\left(\frac{d-1}{2}\right)}(\cos(s(x, y)))}{\mathcal{C}_\ell^{\left(\frac{d-1}{2}\right)}(1)}, \quad 0 \leq s \leq \pi, \quad (3.13)$$

hvor følgen af d -Schoenberg koefficienter $\beta_{0,d}, \beta_{1,d}, \dots$ er en diskret sandsynlighedsfunktion. For $d \geq 2$ er $\psi \in \Psi_d^+$, hvis og kun hvis delmængderne bestående af d -Schoenberg koefficienter $\beta_{\ell,d} > 0$ med lige henholdsvis ulige indeks ℓ er uendelige.

b. Hvis korrelationsfunktionen c i (3.12), hvor $\psi \in \Psi_d$ er givet ved (3.13), så er Mercers repræsentation givet ved

$$c(x, y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell,d} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell,d}} Y_{\ell,k,d}(x) \overline{Y_{\ell,k,d}(y)}, \quad (3.14)$$

hvor Mercer koefficienten $\alpha_{\ell,d}$ er en egenværdi med multiplicitet $m_{\ell,d}$, $Y_{\ell,k,d}$ er sfærisk harmoniske funktioner, og $\mathcal{K}_{\ell,d}$ er en indeksemængde sådan, at $Y_{\ell,k,d}$, $\ell = 0, 1, \dots$, $k \in \mathcal{K}_{\ell,d}$ danner en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{S}^2, \nu_d)$. Multipliciteten $m_{\ell,d} = \#\mathcal{K}_{\ell,d}$ for $d = 2, 3, \dots$, $\ell = 0, 1, \dots$ er $m_{\ell,d}$ givet ved

$$m_{\ell,d} = \frac{2\ell + d - 1}{d - 1} \binom{\ell + d - 2}{\ell}$$

Dvs. $m_{\ell,2} = 2\ell + 1$ for $\ell = 0, 1, \dots$

c. $\psi \in \Psi_\infty$, hvis og kun hvis ψ kan skrives som

$$\psi(s(x, y)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell \cos^\ell(s(x, y)), \quad 0 \leq s \leq \pi,$$

hvor følgen af Schoenberg koefficienter β_0, β_1, \dots er en diskret sandsynlighedsfunktion. Det gælder, at $\psi \in \Psi_\infty^+$, hvis og kun hvis delmængderne bestående af Schoenberg koefficienter $\beta_\ell > 0$ for et lige henholdsvis ulige indeks ℓ er uendelige.

d. Antag $d = 2$ for $c(s(x, y))$ givet ved (3.14) og for $K_{\ell,2} = \{-\ell, \dots, \ell\}$, så er de sfærisk harmoniske funktioner givet ved

$$Y_{\ell,k,2}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(l-k)!}{(l+k)!}} P_\ell^{(k)}(\cos \vartheta) e^{ik\varphi}, \quad (3.15)$$

for $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, $\ell = 0, 1, \dots$ og $k \in \mathcal{K}_{\ell,2}$.

Beviset kan finde i Møller et al. (2017).

I kommende afsnit vil vi anvende resultaterne fra dette afsnit på estimationsfunktionen (3.10) med det formål at approksimere $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$. Derudover betragtes Nyström approksimationen som en approksimationsmetode.

3.4 Numerisk Approximation

I dette afsnit vil vi præsentere forskellige approksimationsmetoder til at approksimere $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$ i den optimale første ordens estimationsfunktion. Specielt vil vi anvende teorien fra Afsnit 3.3 som en ny approksimationsmetode. Betragt den optimale første ordens estimationsfunktion fra Afsnit 3.2

$$e_\varphi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \varphi(x) - \int_W \varphi(u) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u), \quad (3.16)$$

hvor φ er givet ved (3.9) og T ved (3.7). I Afsnit 3.2 gennemgik vi udledningen af (3.16), og vi behandler i det følgende approksimation af φ .

3.4.1 Anvendelse af Mercers repræsentation

For at kunne anvende teorien fra Afsnit 3.3 på første ordens estimationsfunktioner antager vi, at parkorrelationsfunktionen kan skrives som en funktion af en positiv semidefinit korrelationsfunktion i klassen Ψ_2 . Det vil sige, at vi bruger (3.14) og antager, at kernen $\rho(x; \boldsymbol{\theta}) [g(s(x, y)) - 1]$ kan skrives som en korrelationsfunktion. Ydermere antages, at \mathbf{X} er isotropisk, hvorfor intensiteten er konstant og holdes udenfor integralet i $(T\varphi)(x; \boldsymbol{\theta})$. Derudover betragtes en log-lineær model for intensiteten $\rho(\boldsymbol{\theta}) = \exp(\boldsymbol{\theta})$, hvilket giver

$$\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) = 1 - (T\varphi)(x; \boldsymbol{\theta}). \quad (3.17)$$

Ved at bruge Sætning 3.3.1.a. og Sætning 3.3.1.b. har vi, at

$$[g(s(x, y)) - 1] = c(s(x, y)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell,2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell,2}} Y_{\ell,k,2}(x) \overline{Y_{\ell,k,2}}(y).$$

Hvis vi anvender den spektrale dekomposition af $\varphi(y; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{k' \in \mathcal{K}_{\ell', k', 2}} \lambda_{\ell', k'} Y_{\ell', k', 2}(y)$ i $(T\varphi)(x; \boldsymbol{\theta})$ har vi, at

$$\begin{aligned}
(T\varphi)(x; \boldsymbol{\theta}) &= \exp(\boldsymbol{\theta}) \int_{\mathbb{S}^2} c(s(x, y)) \varphi(y; \boldsymbol{\theta}) d\nu(y) \\
&= \exp(\boldsymbol{\theta}) \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(y; \boldsymbol{\theta}) \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell, 2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, d}} Y_{\ell, k, 2}(x) \overline{Y_{\ell, k, 2}(y)} d\nu(y) \\
&= \exp(\boldsymbol{\theta}) \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{k' \in \mathcal{K}_{\ell', 2}} \lambda_{\ell', k'} Y_{\ell', k', 2}(y) \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell, 2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} Y_{\ell, k, 2}(x) \overline{Y_{\ell, k, 2}(y)} d\nu(y) \\
&= \exp(\boldsymbol{\theta}) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \lambda_{\ell, k} \alpha_{\ell, 2} Y_{\ell, k, 2}(x), \tag{3.18}
\end{aligned}$$

hvor vi i anden lighed har anvendt Mercers repræsentation for en korrelationsfunktion (3.14) og i fjerde lighed har vi anvendt, at $\int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell', k', 2}(y) \overline{Y_{\ell, k, 2}(y)} d\nu(x) = \mathbf{1}[\ell' = \ell, k' = k]$. Dette udtryk for integral operatoren indsættes i (3.17)

$$\begin{aligned}
\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) &= 1 - \exp(\boldsymbol{\theta}) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \lambda_{\ell, k} \alpha_{\ell, 2} Y_{\ell, k, 2}(x) \Leftrightarrow \\
\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \lambda_{\ell, k} Y_{\ell, k, 2}(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \beta_{\ell, k} Y_{\ell, k, 2}(x) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \lambda_{\ell, k} \alpha_{\ell, 2} Y_{\ell, k, 2}(x),
\end{aligned}$$

hvor $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \beta_{\ell, k} Y_{\ell, k, 2}(x)$ er spektral dekompositionen for 1, hvor $\beta_0 = 1$ for $\ell = 0$ og $\beta_{\ell} = 0$ for $\ell \geq 1$. For at kunne bestemme $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$ løses følgende for $\lambda_{\ell, k}$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \left(\lambda_{\ell, k} Y_{\ell, k, 2} + \exp(\boldsymbol{\theta}) \lambda_{\ell, k} \alpha_{\ell, 2} Y_{\ell, k, 2} \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\ell, 2}} \beta_{\ell, k} Y_{\ell, k, 2}.$$

En tilstrækkelig betingelse for $\widehat{\lambda}_{\ell, k}(\boldsymbol{\theta})$ er, at det er løsningen til

$$\lambda_{\ell, k} + \exp(\boldsymbol{\theta}) \lambda_{\ell, k} \alpha_{\ell, 2} = \beta_{\ell, k} \quad \ell = 0, 1, \dots \quad k \in \{-\ell, \dots, \ell\}. \tag{3.19}$$

Løsningen til (3.19) er $\lambda_{0,0}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\beta_{0,0}}{(1 + \exp(\boldsymbol{\theta}) \alpha_{0,2})}$ for $\ell = 0$ og $\lambda_{\ell, k} = 0$ for $\ell \geq 0$. Ved at indsætte $\widehat{\lambda}_{\ell, k}$ i (3.18) har vi, at

$$(T\varphi)(x) = \exp(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} Y_{0,0,2}(x),$$

hvilket giver, at

$$\widehat{\varphi}(x) = 1 - \exp(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} Y_{0,0,2}(x).$$

Den optimale estimationsfunktion er givet ved

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{e}}_{\varphi}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{x \in \mathbf{X}} 1 - \exp(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} Y_{0,0,2}(x) - \int_{\mathbb{S}^2} \exp(\boldsymbol{\theta}) \left(1 - \exp(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} Y_{0,0,2}(x) \right) d\nu(x) \\
&= N(\mathbf{X}) - \sum_{x \in \mathbf{X}} \exp(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} Y_{0,0,2}(x) \\
&\quad - \exp(\boldsymbol{\theta}) \left(\nu(\mathbb{S}^2) + \int_{\mathbb{S}^2} \exp(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} Y_{0,0,2}(x) d\nu(x) \right). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Ved at anvende Definition 2.1.1, Sætning 3.3.1.d. og omskrive til sfæriske koordinater får vi, at (3.20) kan skrives som

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_\varphi(\boldsymbol{\theta}) &= N(\mathbf{x}) - \sum_{x \in \mathbf{X}} \exp(\boldsymbol{\theta}) \hat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} P_0^{(0)}(\cos \vartheta) \\ &\quad - 4\pi \exp(\boldsymbol{\theta}) + \exp(2\boldsymbol{\theta}) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \hat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} P_0^{(0)}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= N(\mathbf{X}) - N(\mathbf{X}) \exp(\boldsymbol{\theta}) \hat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - 4\pi \exp(\boldsymbol{\theta}) + \exp(2\boldsymbol{\theta}) \hat{\lambda}_{0,0} \alpha_{0,2} \frac{4\pi}{2\sqrt{\pi}},\end{aligned}\quad (3.21)$$

hvor der i anden lighed anvendes, at $P_0^{(0)}(\cdot) = 1$. Løsningen til estimationsfunktionen (3.21) er det intuitive estimat for intensitetsfunktionen $\rho(\boldsymbol{\theta}) = \exp(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N(\mathbf{X})}{4\pi}$, hvilket ikke afhænger af $\boldsymbol{\theta}$.

Hvis antagelserne for anvendelsen af Mercers repræsentation er opfyldt, ser vi, at den funktion $\varphi(\boldsymbol{\theta})$, som giver den optimale løsning til estimationsfunktionen (3.16) er konstant. Dette medfører, at intensitetens optimale estimat er $\frac{N(\mathbf{X})}{4\pi}$. I følgende afsnit betragtes Nyström approksimationsmetoden til at approksimere $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$.

3.4.2 Nyström metoden

For at approksimere φ betragter vi Nyström approksimationen

$$(T\varphi)(x) = \int_W t(x, v) \varphi(v) d\nu(v) \approx \sum_{i=1}^m t(x, u_i) \varphi(u_i) w_i, \quad (3.22)$$

hvor u_i er kvadratur punkter med tilsvarende vægte w_i for $i = 1, \dots, m$ og $t(x, y) = \rho(x; \boldsymbol{\theta}) (g(x, y) - 1)$, er kernen for integral operatoren (3.7). Ved at indsætte (3.22) i (3.8) med $x = u_j$ og løse det lineære ligningssystem

$$\varphi(u_j) + \sum_{i=1}^m t(u_j, u_i) \varphi(u_i) w_i = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u_j; \boldsymbol{\theta})}{\rho(u_j; \boldsymbol{\theta})}, \quad j = 1, \dots, m.$$

får vi estimatet $\hat{\varphi}(u_j)$ af $\varphi(u_j)$.

Det giver, at $(T\varphi)(x) \approx \sum_{i=1}^m t(x, u_i) \hat{\varphi}(u_i) w_i$. Ved at indsætte denne approksimation i (3.8) får vi, at løsningen til (3.8) ved hjælp af Nyström approksimation er

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(x, \boldsymbol{\theta})}{\rho(x; \boldsymbol{\theta})} - \sum_{i=1}^m t(x, u_i) \hat{\varphi}(u_i) w_i.$$

Dette giver estimationsfunktionen

$$\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in X \cap W} \hat{\varphi}(x) - \int_W \hat{\varphi}(u) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u). \quad (3.23)$$

Ved at anvende kvadratur reglen på integralet i (3.23) får vi

$$\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in X \cap W} \hat{\varphi}(x) - \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}(u_i) \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i.$$

Dette er metoden, som bliver anvendt i Guan et al. (2015) til at finde en approksimation af φ i den optimale første ordens estimationsfunktion og derefter estimere $\boldsymbol{\theta}$. Et estimat

for $\boldsymbol{\theta}$ findes ved at løse $\widehat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = 0$ iterativt med Fishers scorering. Dette gøres ved at opdatere det nuværende estimat $\boldsymbol{\theta}_n$ med Fishers scorings opdatering

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + \widehat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_n) \widehat{S}_e^{-1}(\boldsymbol{\theta}_n), \quad (3.24)$$

hvor

$$\widehat{S}_e(\boldsymbol{\theta}_n) = \sum_{i=1}^m \widehat{\varphi}(u_i) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}_n) w_i$$

er den numeriske approksimation af sensitivitetsmatricen.

Efter at have bestemt $\boldsymbol{\theta}$ ved hjælp af Fishers scoring bestemmes det inverse Godambe informationskriterie for $\widehat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$

$$G_e(\boldsymbol{\theta})^{-1} = S_e(\boldsymbol{\theta})^{-1} V_e(\boldsymbol{\theta}) (S_e(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

hvor den numeriske approksimationen af variabilitetsmatricen er givet ved

$$\begin{aligned} \widehat{V}_e(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^m \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta})^T \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varphi(u_j; \boldsymbol{\theta}) \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta})^T \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_j; \boldsymbol{\theta}) \left[g(s(u_i, u_j)) - 1 \right] w_i w_j. \end{aligned}$$

I kommende eksempel vises, hvordan Sætning 3.3.1 og Nyström metoden kan anvendes.

Eksempel 3.4.1

Ved at anvende Sætning 3.3.1.c. og (3.12) har vi, at $c(s(x, y)) = \sum_{\ell}^{\infty} \beta_{\ell} \cos^{\ell}(s(x, y))$, hvor β_{ℓ} er Schoenberg koefficienter, som er givet. Lad $p \in (0, 1)$ og $\tau > 0$ være parametrene for den negative binomial fordeling (Møller et al., 2017), så er Schoenberg koefficienterne givet ved

$$\beta_{\ell} = \binom{\tau + \ell - 1}{\ell} p^{\ell} (1 - p)^{\tau}, \quad \ell = 0, 1, \dots, \quad (3.25)$$

hvilket ifølge Møller et al. (2017) giver, at

$$\psi(s) = \left(\frac{1 - p}{1 - p \cos(s(x, y))} \right)^{\tau}.$$

Ved at antage, at kernen i (3.7) kan skrives som en korrelationsfunktion og anvende Sætning 3.3.1.c. har vi, at

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x; \boldsymbol{\theta}) &= \int_W c(s(x, v)) \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) d\nu(v) \\ &= \int_W \sum_{\ell}^{\infty} \beta_{\ell} \cos^{\ell}(s(x, v)) \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) d\nu(v), \end{aligned}$$

hvor Schoenberg koefficienterne β_{ℓ} er givet ved (3.25). Dette medfører, at

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x; \boldsymbol{\theta}) &= \int_W \left(\frac{1 - p}{1 - p \cos(s(x, v))} \right)^{\tau} \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) d\nu(v) \\ &\approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{1 - p}{1 - p \cos(s(x, u_i))} \right)^{\tau} \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i. \end{aligned}$$

Dette medfører, at

$$\varphi(u) = 1 - \sum_{i=1}^m \left(\frac{1-p}{1-p \cos(s(x, u_i))} \right)^\tau \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i, \quad (3.26)$$

hvor $\hat{\varphi}(u_j)$ er løsningen til (3.26), hvilket giver estimationsfunktionen

$$\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{u \in \mathbf{X} \cap W} \hat{\varphi}(u) - \int_W \hat{\varphi}(u) \rho(u; \boldsymbol{\theta}) d\nu(u). \quad \square$$

I kommende afsnit præsenteres implementeringen af den Nyström approksimerede estimationsfunktion som en quasi-likelihoodfunktion. Eftersom estimationsfunktionen approksimeret med Mercers repræsentation og egenfunktioner giver et konstant estimat, vil denne ikke yderligere behandles.

3.5 Implementation af Quasi-likelihood estimation

I dette afsnit implementeres estimationsfunktioner til estimation af $\boldsymbol{\theta}$ som en quasi-likelihoodfunktion. Estimationsfunktionen, som implementeres, er approksimeret med Nyström metoden se Afsnit 3.4.2. Betrag t intensitetsfunktionen på log-lineær form $\rho(x; \boldsymbol{\theta}) = \exp(z(x) \cdot \boldsymbol{\theta}^T)$, hvor $z(x)$ er kovariater fra data. Quasi-likelihoodfunktionen implementeres i R som funktionen `s2quasi` se Appendiks C.2.

3.5.1 Implementation: Nyström

Fra Afsnit 3.4.2 har vi estimationsfunktionen

$$\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \hat{\varphi}(x; \boldsymbol{\theta}) - \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i,$$

hvor $\hat{\varphi}(x)$ er løsningen til det lineære ligningssystem

$$\varphi(u_j) + \sum_{i=1}^m t(u_j, u_i) \varphi(u_i) w_i = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \rho(u_j; \boldsymbol{\theta})}{\rho(u_j; \boldsymbol{\theta})}, \quad (3.27)$$

for $j = 1, \dots, m$. I (3.27) har vi anvendt kvadratur reglen for at kunne estimere $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$. Dvs. at vi på kuglen laver et gitter, hvor arealet af de enkelte celler C_i er vægten w_i , og u_i er centrum i hver celle. Dette kvadratur gitter laves med R funktionen `s2quadcount` se Appendiks C.1. Lad $N_i = N(\mathbf{X} \cap C_i)$ være antallet af punkter fra \mathbf{X} , som falder i C_i og $\mu_i = \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i$. Hvis cellerne er tilstrækkeligt små, således at N_i bliver binær, så er (3.16) approksimeret af

$$\sum_{i=1}^m \hat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}) (N_i - \mu_i). \quad (3.28)$$

Ydermere ses det, at $E[N_i] \approx \mu_i$ og

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[N_i, N_j] &= E[N_i N_j] - E[N_i] E[N_j] \\
&= E \left[\sum_{x_1, x_2 \in \mathbf{X}} \mathbf{1}[x_1 \in C_i, x_2 \in C_j] \right] - E[N_i] E[N_j] \\
&= E \left[\sum_{x_1, x_2 \in \mathbf{X}}^{\neq} \mathbf{1}[x_1 \in C_i, x_2 \in C_j] \right] + E \left[\sum_{x_1 \in \mathbf{X}} \mathbf{1}[x_1 \in C_i, x_1 \in C_j] \right] \\
&\quad - \int_{C_i} \rho(u_i) d\nu(u_i) \int_{C_j} \rho(u_j) d\nu(u_j) \\
&= \int_{C_i} \int_{C_j} \rho^{(2)}(u_i, u_j) - \rho(u_i) \rho(u_j) d\nu(u_i, u_j) + \mathbf{1}[i = j] \int_{C_i} \rho(u_i) d\nu(u_i) \\
&\approx \mu_i \mu_j (g(u_i, u_j) - 1) + \mu_i \mathbf{1}[i = j] \\
&= V_{ij}.
\end{aligned}$$

Definer $\mathbf{N} = (N_i)_i$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_i$ og $\mathbf{V} = [V_{ij}]_{ij}$, så er $E[\mathbf{N}] \approx \boldsymbol{\mu}$ og $\text{Cov}[\mathbf{N}] \approx \mathbf{V}$. Derudover ved at gange (3.27) med w_j og anvende at $t(u_j, u_i) = \rho(u_i) [g(u_i, u_j) - 1]$ får vi, at

$$\begin{aligned}
\varphi(u_j; \boldsymbol{\theta}) w_j + \sum_{i=1}^m \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i w_j [g(u_i, u_j) - 1] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \rho(u_j; \boldsymbol{\theta}) w_j \\
\varphi(u_j; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_j; \boldsymbol{\theta}) w_j + \sum_{i=1}^m \varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_j; \boldsymbol{\theta}) w_i w_j [g(u_i, u_j) - 1] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mu_j \\
\left[\mu_j + \left[\mu_i \mu_j (g(u_i, u_j) - 1) \right]_{ij} \right] (\varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}))_i &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mu_j \\
\mathbf{V} (\varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}))_i &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \boldsymbol{\mu},
\end{aligned}$$

hvilket medfører, at $(\widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}))_i = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D}$, hvor $\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \boldsymbol{\mu}$ er en $m \times p$ matrix. Vi kan nu omskrive (3.28) til

$$(\mathbf{N} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D}, \quad (3.29)$$

hvilket er en quasi-likelihood score funktion for rumlige data \mathbf{N} med middelværdivektor $\boldsymbol{\mu}$ og kovariansmatrix \mathbf{V} (Gotway og Stroup, 1997).

Når denne quasi-likelihoodfunktion implementeres, betragtes den log-lineære form af $\rho(x; \boldsymbol{\theta})$, hvilket medfører, at (3.27) omskrives til

$$\varphi(u_j; \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=0}^m \exp(z(u_i) \cdot \boldsymbol{\theta}^T) w_i (g(u_i, u_j) - 1) = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \exp(z(u_j) \cdot \boldsymbol{\theta}^T)}{\exp(z(u_j) \cdot \boldsymbol{\theta}^T)},$$

for $j = 1, \dots, m$, hvilket giver

$$[I + \boldsymbol{\mu} \cdot (g(u, v) - 1)] \varphi(u_j; \boldsymbol{\theta}) = z(u_j),$$

hvor I er identitetsmatrixen og $\boldsymbol{\mu} = \exp(z(u_i) \cdot \boldsymbol{\theta}^T) w_i$. Ved at løse dette system bestemmes $\widehat{\varphi}(x; \boldsymbol{\theta})$. Herefter anvendes Fishers scoring til at estimere $\boldsymbol{\theta}$ ved at løse $(\mathbf{N} - \boldsymbol{\mu}) \widehat{\varphi}(x; \boldsymbol{\theta}) =$

$\mathbf{0}$ iterativt. Det nuværende estimat for $\boldsymbol{\theta}_n$ opdateres med Fishers scorings opdatering (3.24). Her er den numeriske approksimation af sensitivitetsmatricen givet ved

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}_n) &= \sum_{i=1}^m \widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}_n)^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \exp(z(u_i) \cdot \boldsymbol{\theta}_n^T) w_i \\ &= (\widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}_n))_i^T \cdot (z(u) \mu).\end{aligned}$$

Ved hjælp af Fishers scoring kan vi nu bestemme estimatet $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ for $\boldsymbol{\theta}$. Ydermere kan vi udregne den forventede varians ved at bestemme det inverse Godambe informationskriterie for $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$.

$$\widehat{G}_{\mathbf{e}}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \widehat{S}_{\mathbf{e}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})^{-1} \widehat{V}_{\mathbf{e}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\widehat{S}_{\mathbf{e}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})^{-1} \right)^T,$$

hvor den numerisk approksimation af variabilitetsmatricen er givet ved

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{\mathbf{e}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= \sum_{i=1}^m \widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta})^T \widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) w_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \widehat{\varphi}(u_j; \boldsymbol{\theta}) \widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta})^T \rho(u_i; \boldsymbol{\theta}) \rho(u_j; \boldsymbol{\theta}) \left[g(s(u_i, u_j)) - 1 \right] w_i w_j \\ &= (\varphi(u_i; \boldsymbol{\theta}))_i^T (\widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}))_i \mu + (\widehat{\varphi}(u_j))_j (\widehat{\varphi}(u_i; \boldsymbol{\theta}))_i^T \mu \mu \left[g(u_i, u_j) - 1 \right]_{ij}.\end{aligned}$$

I kommende afsnit vil vi betragte et datasæt og estimere $\boldsymbol{\theta}$ ved hjælp af implementationen af Nyström metoden som en quasi-likelihood estimationsfunktion.

4. Dataeksempel

I dette afsnit anvendes implementationen fra Afsnit 3.5 på datasættet "galaxies". I Eksempel 2.3.5 så vi, at "galaxies" er klynget. Derfor anvendes en LGCP til at estimere intensitetsfunktionen. Datasættet "galaxies" danner et punktmønster bestående af 10610 punkter, hvor nogle punkter er multiple. Disse betragtes som et punkt, hvilket reducerer punktmønstret til 10604 punkter. Punktprocessen, som frembringer "galaxies" noteres \mathbf{X} . For en LGCP er intensitetsfunktionen og parkorrelationsfunktionen givet ved

$$\rho(\cdot; \boldsymbol{\theta}) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \text{og} \quad g(x_1, x_2) = \exp(c(x_1, x_2)),$$

hvor μ og σ^2 er henholdsvis middelværdien og variansen af den Gaussiske proces. Vi antager, at kovariansfunktionen $c(x_1, x_2)$ er isotropisk og er givet ved $\sigma^2 \exp\left(-\frac{s(x_1, x_2)}{\alpha}\right)$, hvor α er en skaleringsparameter (Huang et al., 2011). Parametrene μ og σ^2 i $\rho(\cdot; \boldsymbol{\theta})$ kan ikke identificeres, når de estimeres med en første ordens estimationsfunktion, hvorfor vi definerer $\beta = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$, som estimeres i stedet for μ og σ^2 . Ifølge Afsnit 3.4.2 estimeres β iterativt. Initial værdien for β kan bestemmes ved at tilpasse en model for \mathbf{X} ved hjælp af R kommandoen `sphppm` fra pakken `spherstat`. Værdierne for σ^2 og α kan bestemmes ved at estimere parkorrelationsfunktionen ved hjælp af enten (2.14) eller relationen mellem K -funktion og parkorrelationsfunktionen. Dette projekt fokuserer på at implementere estimationsfunktioner på kuglen, som approksimeres med Nyström approksimationen, som en quasi-likelihoodfunktion. Derfor vil vi i dette dataeksempel ikke estimere σ^2 og α , men i stedet vælge nogle værdier.

Som præsenteret i Afsnit 3.5 approksimeres estimationsfunktioner i dette projekt med Nyström approksimationen. Denne implementeres i R som en quasi-likelihood funktion `s2quasi`, se Appendiks C.2. Vi estimerer intensitetsfunktion "galaxies" som en LGCP og vælger værdierne for σ^2 og α til henholdsvis 4 og 0,5. Initial værdien for β vælges til 10. Antallet af celler i kvadratur gitteret vælges til 6144 pga. begrænset computerkraft.

Estimatet af β bliver efter 8 iterationer udregnet til at være 6,35, og det inverse Godambe informationskriterie udregnes til at være 1,14, hvilket betyder, at vi forventer, at variansen af β er 1,14. Dette betyder, at intensitetsfunktionen estimeres til at være 572,49. Estimatet for intensitetsfunktionen sammenlignes med det intuitive estimat for intensitetsfunktionen, som på log-lineær form er $\log(\hat{\rho}(\cdot; \boldsymbol{\theta})) = \log\left(\frac{N(\mathbf{X})}{\nu(s^2)}\right) = \beta_{intui}$. Dette giver i dette eksempel $\beta_{intui} = 6,74$, og `s2quasi` estimerer $\beta = 6,35$ med forventet varians på 1,14, hvorfor estimatet med `s2quasi` virker fornuftigt. For at opnå et mere præcist estimat kan man vælge et finere kvadratur gitter.

5. Diskussion

Følgende kapitel har til formål at diskutere forskellene mellem punktprocesteorier på kuglen og i \mathbb{R}^d og resultaterne fra kapitel 3.

5.1 Diskussion af tilfældet med konstant intensitet

I afsnit 3.4 anvendes Mercers repræsentation under antagelse af, at \mathbf{X} er isotropisk, og at observationsvinduet $A = \mathbb{S}^2$. Dette resulterer i, at den funktion $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$, som løser den optimale estimationsfunktion, er konstant. Derfor er intensitetens optimale estimat det intuitive estimat for intensiteten $\frac{N(A)}{\nu(A)}$. Ud fra den konklusion kan vi diskutere, om en konstant løser $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$ eksakt

$$\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) = 1 - \exp(\boldsymbol{\theta}) \int_W \varphi(v; \boldsymbol{\theta}) [g(s(x, v)) - 1] d\nu(v).$$

Lad $\varphi(x; \boldsymbol{\theta}) = k$ og antag, at \mathbf{X} er isotropisk, og at observationsvinduet er $A = \mathbb{S}^2$. Så har vi, at

$$k = 1 - \exp(\boldsymbol{\theta}) k \int_{\mathbb{S}^2} [g(s(x, v)) - 1] d\nu(v).$$

Idet \mathbf{X} er isotropisk afhænger integralet ikke af valget af x , hvorfor en konstant løser $\varphi(x; \boldsymbol{\theta})$ eksakt. Det vil sige, at det intuitive estimat for intensiteten faktisk er det optimale estimat, når man betragter en isotropisk punktproces på \mathbb{S}^2 .

5.2 Diskussion af teori

Meget punktprocesteorier og Palm-teori kan overføres fra \mathbb{R}^d til \mathbb{S}^2 , hvis man betragter overflademålet i stedet for Lebesgue målet og geodætiske afstande i stedet for Euklidiske afstande. Disse ændringer får mest betydning, når man betragter det ikke-parametriske estimat for parkorrelationsfunktionen og forholdet mellem K -funktionen og parkorrelationsfunktionen. Estimatet af parkorrelationsfunktionen i \mathbb{R}^d er givet ved

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sigma_d r^{d-1} |W|} \sum_{x, y \in \mathbf{X}}^{\neq} \frac{k_b [r - \|y - x\|]}{\rho(x) \rho(y) |W \cap W_{y-x}|},$$

hvor σ_d er overflademålet på den d -dimensionelle enhedskugle, $|W|$ er arealet af vinduet og $|W \cap W_{y-x}|$ er en kantkorrektionsfaktor (Møller og Waagepetersen, 2004). På kuglen er estimatet for parkorrelationsfunktionen givet ved

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\nu(A_{\ominus t})} \sum_{x \in \mathbf{X} \cap A_{\ominus t}, y \in \mathbf{X}} \frac{k_b [s(t, s(x, y))]}{2\pi \rho(x) \rho(y) \sin(s(x, y))},$$

hvor $A_{\ominus t}$ er en kantkorrektionssteknik kaldet minus sampling. Forskellen på de to estimater er en faktor $\frac{1}{2\pi \sin(s(x, y))}$ i summen. Relationen mellem K -funktionen og parkorrelationsfunktionen er i \mathbb{R}^d (Møller og Waagepetersen, 2004) givet ved

$$K(t) = \sigma_d \int_0^t r^{d-1} g(r) dr$$

og i \mathbb{S}^2 givet ved

$$K(t) = 2\pi \int_0^t g(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta.$$

Her er forskellen sinuskurven $\sin(\vartheta)$ i integralet, hvilket gør det mere besværligt at bestemme parkorrelationsfunktionen ud fra plots af K -funktionen på kuglen.

6. Konklusion og videre arbejde

Dette speciale har til formål at behandle punktprocesteori for punktprocesser på kuglen med særligt fokus på quasi-likelihood estimation af intensiteten/intensitetsfunktionen. Derudover implementeres en først ordens estimationsfunktion i \mathbb{R} som en quasi-likelihoodfunktion og afprøves på datasættet "galaxies".

I Kapitel 2 introduceres punktprocesteori for punktprocesser på kuglen. Meget punktprocesteori fra \mathbb{R}^d kan tilpasses kuglen, når man tager højde for, at man integrerer over kuglen i stedet for \mathbb{R}^d , og at afstandene er geodætiske i stedet for Euklidiske. Størst er forskellen i relationen mellem K -funktionen og parkorrelationsfunktionen, som afhænger af en sinuskurve på \mathbb{S}^2 i stedet for faktoren r^{d-1} som i \mathbb{R}^d .

I Kapitel 3 introduceres to metoder til approksimation af estimationsfunktioner. Den ene anvender Nyström approksimation, mens den anden anvender teorien om Mercers repræsentation. For at kunne anvende Mercers repræsentation som approksimationsmetode antages det, at punktprocessen er isotropisk, og at observationsvinduet er hele \mathbb{S}^2 . Disse antagelser resulterer i, at approksimationen af estimationsfunktioner bliver en konstant. Dette gælder ligeledes for den eksakte løsning for $\varphi(x; \theta)$ se Kapitel 5. Det vil sige, at det intuitive estimat for intensiteten bliver optimal i dette tilfælde.

Den approksimative estimationsfunktion

$$\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{x}; \theta) = \sum_{x \in \mathbf{X} \cap W} \hat{\varphi}(x; \theta) - \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}(u_i; \theta) \rho(u_i; \theta) w_i$$

implementeres i \mathbb{R} som en quasi-likelihoodfunktion som funktionen `s2quasi` fra Appendiks C.2. Denne funktion afprøves på datasættet "galaxies" ved at estimere intensitetsfunktionen for en LGCP, som er givet ved

$$\rho(\cdot; \theta) = \exp(\beta),$$

hvor $\beta = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ med σ^2 og μ som henholdsvis varians og middelværdi for det Gaussiske proces. Derudover antages det, at parkorrelationsfunktionen kan skrives som

$$g(s(x, y)) = \exp\left(\sigma^2 \exp\left(-\frac{s(x, y)}{\alpha}\right)\right),$$

hvor α er en skaleringsparameter.

Det videre arbejde kunne indebære estimation af parkorrelationsfunktionen, hvilket kan gøres ved at anvende K -funktionen eller ved at bruge estimatet for parkorrelationsfunktionen (2.14). Derudover ville estimation af en inhomogen intensitetsfunktion være interessant, så det intuitive estimat for intensitetsfunktionen ikke er det optimale estimat. Ydermere ville det være interessant med et simulations studie, hvor quasi-likelihoodfunktionen (3.29) og en sammensat likelihoodfunktion sammenlignes for at undersøge, om udfordringerne ved at lave quasi-likelihoodfunktionen er besværet værd.

A. Standardbeviset

Dette afsnit er baseret på (Athreya og Lahiri, 2006), (Berg og Madsen, 2001) og (Hoffman-Jørgensen, 1994). I dette projekt refereres der til en metode kaldet *standardbeviset*, som ofte anvendes til at bevise forskellige resultater. For at bevise standardbeviset introduceres følgende sætning.

Sætning A.0.1 *Lad (Ω, \mathcal{E}) være et målbart rum og $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E})$ være mængden af alle målelige ikke-negative funktioner på Ω . For en funktion $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E})$ eksisterer der et voksende følge af simple målelige funktioner $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty[$, sådan at $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.*

Beviset udelades i dette projekt, men kan findes i (Berg og Madsen, 2001)[s.45-46].

Sætning A.0.2 (Standard beviset) *Lad (Ω, \mathcal{E}) være et målbart rum og $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E})$ være mængden af alle målelige ikke-negative funktioner på Ω . Lad $L_1, L_2: \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E}) \rightarrow [0, \infty]$. For $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E})$ gælder der, at $L_1(f) = L_2(f)$, hvis følgende gælder:*

1. For $i = 1, 2$: $L_i(f+g) = L_i(f) + L_i(g)$ og $L_i(af) = aL_i(f)$ for alle $f, g \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E})$ og $a \geq 0$.
2. For $i = 1, 2$: $L_i(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_i(f_n)$, hvor $f_n \nearrow f$ og $f_n, f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{E})$.
3. $L_1(\mathbf{1}_E) = L_2(\mathbf{1}_E)$ for alle $E \in \mathcal{E}$.

Bevis

Lad $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, hvor f er en målelig ikke-negativ funktion, og (f_n) er et voksende følge af simple målelige ikke-negative funktioner f_n . Først viser vi, at $L_1(f_n) = L_2(f_n)$:

$$L_1(f_n) = L_1\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i L_1(\mathbf{1}_{E_i}) = \sum_{i=1}^n a_i L_2(\mathbf{1}_{E_i}) = L_2(f_n),$$

hvor vi har anvendt, at f_n er et følge af simple ikke-negative funktioner. Dernæst vises det, at ligheden gælder for f :

$$L_1(f) = L_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_1(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_2(f_n) = L_2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) = L_2(f). \quad \blacksquare$$

B. Relevante resultater

I dette appendiks præsenteres relevante resultater uden bevis. Resultaterne kan findes i (Møller og Waagepetersen, 2004).

Proposition B.0.1 Hvis $X_i \sim \text{Poisson}(S, \rho_i)$, $i = 1, 2, \dots$, er uafhængige, og $\rho = \sum \rho_i$ er lokalt integrabel med sandsynlighed 1, så er $\mathbf{X} = \cup_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i$ en disjunkt forening og $\mathbf{X} \sim \text{Poisson}(S, \rho)$.

Sætning B.0.2 (Slivnayk-Mecke) Lad $\mathbf{X} \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ og $h : S^n \times F \mapsto [0, \infty[$ være en funktion, hvor $n \in \mathbb{N}$. Så gælder

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbf{X}}^{\neq} h(x_1, \dots, x_n, \mathbf{X} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \right] \\ &= \int_{S^n} \mathbb{E} [h(u_1, \dots, u_n, \mathbf{X})] \prod_{i=1}^n \rho(u_i) du_1 \cdots du_n. \end{aligned}$$

C. R kode

Her præsenteres funktioner implementeret i R. Pakkerne, som skal bruges til at køre disse funktioner er spatstat, spatstat.sphere, sphereplot og s2.

C.1 s2quadcount

Dette er koden til funktionen, som laver quadratur gitteret på kuglen eller et vindue.

```
1 s2quadcount= function(X, region, lev){#X is at s2pp and
  region is a s2region
2 cord = s2coords(X) #Exports the coordinates to a matrix
3 cover = s2covering(region, max_cells = 10, max_level = lev,
  min_level=lev) #makes a grid on the region
4 cells = s2cell(cover) #Seperates the grid into cells
5 len = length(cells$vertices)
6
7 temp_count = vector(mode="double" ,len)
8 for (i in 1:len){
9   poly = s2polygon(cells$vertices[i]) #Pulls out one cell
  of the grid
10  temp = s2contains(cord,poly)
11  temp_count[i] = sum(temp) #Number of points in a cell
12 }
13 Npolys = temp_count #Number of points in X
14
15 centers = cells$centers
16 polys = lapply(cells$vertices,s2polygon)
17 areas = sapply(polys, area)
18 result = list(Npolys, areas, centers)
19 return(result)
20 }
```

C.2 Quasi-likelihood

Følgende kode er en funktion, som estimerer θ og det invers Godambe informationskriterie ved hjælp af metoden beskrevet i afsnit 3.4.2. Funktionen carsphcoords er selv kodet i R, og koden kan findes i Appendiks C.2.1

```
1 #Parkorrelationsfunktion
2 gfun=function(x,par){
3   #par[1] er variansen af det gaussiske omraade, par[2] er
  alpha parametren
4   exp(par [1]^(2)*exp(-(x/par [2])))
5 }
6 galaxies=galaxies
7
```

```

8 s=s2() #enhedskuglen (s2region)
9
10 #Datasaettet galaxies laves til et punktmoenster (s2pp)
11 X=as.s2pp(galaxies,region=s, check=FALSE)
12
13 #Finder og fjerner multiple punkter saa kun et af punkterne
    beholdes
14 drop=which(duplicated(galaxies)==TRUE)
15 gala=X[-c(2343,2690,4695,6734,10332,10333)]
16
17
18
19 s2quasi = function(X, region, lev, gfun, covariates = list(
    NULL),
20             par=NULL, beta0=NULL, trend=~1,
21             control = c(list(maxIter = 100, tolerance
    = 1e-06))){
22 #Tager som input et punktmoenster (s2pp), et omraade paa
    kuglen (s2region),
23 #et niveau for antallet af celler i kvadratur gitret (5 =
    6144 celler), en parkorrelationsfunktion,
24 #kovariater, parametrene i parkorrelationsfunktionen og en
    intial vaerdi for beta
25 #Returnere estimatet for beta, den sidste forskel i beta
    estimat, approkismativ invers sensitivitet,
26 #inverse Godambe informationskriterie og antallet af
    iterationer
27 lenX=length(X$data$x)
28 if(is.null(beta0)){
29   beta0=10
30 }
31
32 #Laver kvadratur gitter
33 qc=s2quadcount(X,region, lev)
34 qcenters=data.frame(qc[3]) #Kvadratur punkter
35 qareas=data.frame(qc[2]) #Vaegtene for cellerne
36 qnumbers=data.frame(qc[1]) #Antallet af punkter i hver
    celle
37 U=s2pp(qcenters, region) #Laver kvadratur punkterne til
    et punktmoenster
38 lenU=length(U$data$x)
39 wt=qareas
40 Y=qnumbers
41 U1=carsphcoords(U)
42 U1=data.frame(U1)
43 #kovariater i kvadratur punkter
44 covariates=covariates[attr(terms(trend), "term.labels")]
45 Z=mpl.get.covariates(covariates, U1)
46 Z = cbind(1, as.matrix(Z))

```

```

47
48 beta=beta0
49 #parkorrelationsfunktion minus 1 g(x,y)-1
50 gminus1= matrix(gfun(c(spatstat.sphere:::pairedist.s2pp(U)
51   ),par)-1, lenU, lenU)
52
53 noItr=1
54 repeat{
55   #mu = rho_i * w_i
56   mu=exp(c(Z %*% t(beta)))*wt
57
58   #phi, loeser ligningssystemet (I + mu * (g(x,y)-1))*phi
59   = Z
60   phi=solve((diag(lenU)+gminus1*mu[1:lenU,1]), Z)
61
62   #Estimationsfunktionen udregnes med det nuvaerende
63   estimat for beta
64   ql= t(Y[1:lenU,1]-mu[1:lenU,1])%*%(phi)
65   #Approximation af den inverse sensitivitetsmatrix
66   Sinv=solve(t(phi)%*(Z*mu[1:lenU,1]))
67
68   #Forskellen fra nuvaerende beta til naeste
69   deltabeta = as.numeric(ql %*% Sinv)
70   if(any(!is.finite(deltabeta))){
71     warning("NA or NaN appeared in deltabeta")
72     beta = beta0
73     break
74   }
75   #Opdatere estimatet af beta
76   beta=beta + deltabeta
77   if (max(abs(deltabeta/beta)) <= control$tolerance ||
78       max(abs(ql/beta)) <= control$tolerance)
79     break
80   if (noItr > control$maxIter){
81     print("Maximum number of iterations reached without
82     convergence.")
83     break
84   }
85   noItr = noItr +1
86 }
87 #Approximationen af variabilitetsmatricen
88 Vphi= t(phi) %*% (phi * mu[1:lenU,1]) + t(phi * mu[1:lenU
89   ,1]) %*% gminus1 %*% (phi * mu[1:lenU,1])
90 #Udregner det inverse Godambe informationskriterie
91 Ginv= Sinv %*% Vphi %*% Sinv
92
93 out = list(beta=beta, Sinv=Sinv, noItr = noItr, deltabeta=
94   deltabeta, Ginv=Ginv)
95 return(out)

```

```
89 }  
90  
91 s2quasi(gala,s,5,gfun=gfun,beta0=10, par=c(2,0.5) )
```

C.2.1 Kartesiske til sfæriske koordinater

Disse funktioner anvendes i s2quasi C.2.

```
1 carsphcoords = function(X){#Regner kartesiske koordinater om  
  til sfaeriske med laengdegrader [0, 2pi) og breddegrader  
  [0,pi]  
2   Xlonlat=car2sph(X$data$x,X$data$y,X$data$z, deg=FALSE)  
3   Xs2=isneg(Xlonlat)  
4   y=Xs2[,1]  
5   x=Xs2[,2]  
6   XXs2=matrix(c(x,y), nrow=length(x),ncol=2)  
7   return(XXs2)  
8 }  
9  
10 isneg = function(X){  
11   for(i in 1:length(X[,1])){  
12     if (X[i,2] < 0)  
13       X[i,2]= pi - X[i,2]  
14     if(X[i,1] < 0)  
15       X[i,1]=pi/2 - X[i,1]  
16     else  
17       pi/2+X[i,1]  
18   }  
19   return(X)  
20 }
```

Litteratur

- K. B. Athreya og S. N. Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Springer, 2006, 1. udgave.
- J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres og Balint Virag, *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes*, American Mathematical Society, 2009.
- C. Berg og T. G. Madsen, *Mål- og integralteori*, 2001.
- Tilmann Gneiting, *Strictly and non-strictly positive definit functions on spheres. Bernoulli*, 19, 1327–1349, 2013.
- C. A. Gotway og W. W. Stroup, *A Generalized Linear Model Approach to Spatial Data Analysis and Prediction. Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 2(2), 157–178, 1997.
- Y. Guan, A. Jalilian og R. P. Waagepetersen, *Quasi-likelihood for spatial point processes. Journal of Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 77, 677–697, 2015.
- Wolfgang Hackbusch, *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*, Birkhäuser Verlag, 1995.
- Christopher C. Heyde, *Quasi-likelihood and its application: a general approach to optimal parameter estimation*, Springer, 1997, 1. udgave.
- J. Hoffman-Jørgensen, *Probability with a view toward statistics*, bind 1., Chapman & Hall/CRC, 1994, 1. udgave.
- Chunfeng Huang, Haimeng Zhang og Scott M. Robeson, *On the Validity of Commonly Used Covariance and Variogram Functions on the Sphere. Mathematical Geosciences*, 43, 721–733, 2011.
- Thomas Lawrence, Adrian Baddeley, Robin K. Milne og Gopalan Nair, *Point pattern analysis on a region of a sphere. Stat*, 5(1), 144–157, 2016.
- J. Møller og R. P. Waagepetersen, *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004, 1. udgave.
- J. Møller og R. P. Waagepetersen, *Modern statistics for spatial pointprocesses. Scandinavian Journal of Statistics*, 34, 643–684, 2007.
- Jesper Møller, Morten Nielsen, Emilio Porcu og Ege Rubak, *Determinantal point process models on the sphere. Bernoulli*, 2017.
- Jesper Møller og Ege Rubak, *Determinantal point processes and functional summary statistics on the sphere. CSGB Research Report*, (2), 2016a.
- Jesper Møller og Ege Rubak, *Functional summary statistics for point processes on the sphere with an application to determinantal point processes. Spatial Statistics*, 18, Part A, 4–23, 2016b.

Frigyes Riesz og Béla Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Frederick Ungar Publishing Co., 1965, 4. udgave.

P. X.-K. Song, *Correlated Data Analysis: Modeling, Analytics, and Applications*, Springer, 2007, 1. udgave.