Ortogonale Polynomier & Rodriguesformlen

MAT 10. SEMESTER SPECIALE
MATEMATIK & STATISTIK
AALBORG UNIVERSITET
8. JUNI 2017

Institut for Matematiske Fag
Fredrik Bajers Vej 7G
9220 Aalborg Ø
Telefon 99 40 99 40
Fax 98 15 81 29
http://www.math.aau.dk

Titel: Ortogonale Polynomier & Rodriguesformlen

Projektperiode: 10. semester matematik, 2017

Vejleder:
Morten Nielsen

Oplagstal: 2

Sidetal:
39

Bilagsantal: 0

Afsluttet d.
8. juni 2017

Abstract:

This masters thesis in mathematics is about orthogonal polynomials and their Rodrigues formulas. Some elementary theory on orthogonal polynomial sequences are presented for instance results regarding the recurrence formula which is a formula for deriving orthogonal polynomials recursively. There exist different kinds of orthogonal polynomials with their own interval and weight function for which the polynomials are orthogonal. Three of these families of orthogonal polynomials are also presented in this paper. For these polynomials it is shown that they along with their respecive Rodriguesformula are solutions to the associated second order differential equation. Because of this fact theorems on solutions for these differential equations are addressed on the basis of the generalized Rodrigues formula.

Jakobsen, Kristian Nørgaard

Forord

Denne rapport er udarbejdet på 10. semester, i foråret 2017, af en specialestuderende på Matematik & Statistik uddannelsen ved Aalborg Universitet.

Læsevejledning

Der vil igennem rapporten fremtræde kildehenvisninger, hvilke vil være samlet i en litteraturliste, der forefindes bagerst i rapporten. Der er i rapporten anvendt kildehenvisninger efter Harvard-metoden, så kilder noteres med [Efternavn, År]. I litteraturlisten er kilderne angivet med forfatter, år, titel, forlag og ISBN-nummer og derudover URL for internetsider. Figurer og tabeller er nummereret i henhold til kapitel, det vil sige, at den første figur i kapitel 4 har nummer 4.1, den anden, nummer 4.2 og så videre. Derudover vil matematiske beviser blive afsluttet med $\square$. Yderligere foretages alle implementeringer i Maple.

Indholdsfortegnelse

Indledning

Dette kandidatspeciale omhandler ortogonale polynomier og de tilhørende Rodriguesformler. Ortogonale polynomier kaldes sådan, da det indre produkt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, af to polynoimer af forskellig grad er nul med hensyn til et givet interval, hvori polynomierne er defineret, og en såkaldt vægtfunktion. Helt generelt så er det indre produkt af to polynomier defineret ved et bestemt integrale

$$\langle P_m(x), P_n(x) \rangle = \int_a^b P_m(x) P_n(x) w(x) dx.$$

Med en Rodriguesformel er det muligt at beskrive en følge af ortogonale polynomier ved hjælp afledede til den tilhørende vægtfunktion.

Ortogonale polynomier kan ikke kun dannes ud fra en Rodriguesformel. Der findes også rekursionsformler, som tager udgangspunkt i to kendte polynomier for at kunne give det næste i en følge af polynomier. I den generelle teori om ortogonale polynomier findes der et resultat, der siger, at hvis der haves en rekursionsformel, så er de polynomier der er dannet ud fra denne ortogonale polynomier. Dette vigtige resultat hedder Favards sætning og bevises i kapitel 1.

Der findes mange forskellige typer af ortogonale polynomier, som er defineret indenfor hvert deres interval og er tilknyttet en vægtfunktion, som er integrabel på det givne interval. De nok mest kendte af de såkaldte klassiske ortogonale polynomier er Legendrepolynomier. De har en meget simpel vægtfunktion, $w(x) = 1$, og ligger indenfor intervallet $[-1, 1]$. Det er også ud fra Legendrepolynomierne, at Rodriguesformlen har sin oprindelse, hvilket betyder, at Rodriguesformler for andre klasser af ortogonale polynomier kaldes for generaliserede Rodriguesformler. Enkelte af de klassiske ortogonale polynomier inklusiv Legendrepolynomier beskrives i kapitel 2.

En af de egenskaber ortogonale polynomier har, er at de er løsninger til anden-ordensdifferentialligninger, som oftest deler navn med klassen af ortogonale polynomier. Eftersom Rodriguesformler danner ortogonale polynomier, må de i sig selv være løsninger til anden-ordensdifferentialligninger. Dette faktum kigges der nærmere på i kapitel 3

Ortogonale Polynomier 1

Dette kapitels formål er at præsentere generelle resultater vedrørende ortogonale polynomier. Heriblandt eksistens af ortogonale polynomier, den fundamentale rekurrensformel og rødder for de ortogonale polynomier. Det indledende på dette kapitel bygger på [Chihara, 1978, kap. 1.1-1.2].

En følge af reelle polynomier $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, hvor $P_n(x)$ er af grad n, kaldes en følge af ortogonale polynomier på intervallet (a, b), hvis

$$\langle P_m, P_n \rangle_w = \int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0,$$

for $m \neq n$, i henhold til en vægtfunktion w. Denne vægtfunktion er ikke-negativ og integrabel på intervallet (a, b), samt at $w(x) > 0$ på en delmængde af intervallet, således at $\int_a^b w(x)dx > 0$. Hvis intervallet (a, b) er ubegrænset skal momenterne $\mu_n = \int_a^b x^n w(x)dx$, for $n \in \mathbb{N}$, være endelige.

For enhver integrabel funktion f er $\mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)w(x)dx$ for et lineært funktionale $\mathcal{L}$. Dermed er $\mathcal{L}[x^n] = \int_a^b x^n w(x)dx = \mu_n$, for $n \in \mathbb{N}$, og $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0$, for $m \neq n$ og $m, n \in \mathbb{N}$.

Følgende er en mere formel definition på et lineært funktionale $\mathcal{L}$, som benyttes fremover i stedet for det indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 1.1
Lad $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge af komplekse tal, $\mathcal{L}$ være en funktion defineret på vektorrummet af alle polynomier, således at

$$\mathcal{L}[x^n] = \mu_n,$$

for $n \in \mathbb{N}$, og

$$\mathcal{L}[a_1\pi_1(x) + a_2\pi_2(x)] = a_1\mathcal{L}[\pi_1(x)] + a_2\mathcal{L}[\pi_2(x)],$$

for $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ og polynomier π_1 og π_2. Da er $\mathcal{L}$ et lineært momentfunktionale og bestemt af følgen af momenter $\{\mu_n\}$.

Hvis polynomiet $\pi(x)$ er defineret ved $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, følger det fra ovenstående definition at $\mathcal{L}[\pi(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k$.

Det følgende definerer ortogonale polynomier i forhold til det lineære momentfunktionale $\mathcal{L}$.

DEFINITION 1.2
En følge $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ kaldes en følge af ortogonale polynomier i henhold til et momentfunktionale $\mathcal{L}$ således for alle $m, n \in \mathbb{N}$,

1. $P_n(x)$ er et polynomium af grad n,
2. $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$ for $m \neq n$,
3. $\mathcal{L}[P_n(x)^2] \neq 0$.

Punkt 2 og 3 i definition 1.2 kan erstattes med

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = K_n\delta_{mn} \tag{1.1}$$

hvor konstanten $K_n \neq 0$, og δ_{mn} er Kroneckers delta, hvorom det gælder, at $\delta_{mn} = 0$ hvis $m \neq n$, og $\delta_{mn} = 1$ hvis $m = n$.

Hvis $\mathcal{L}[P_n(x)^2] = 1$ for en følge af ortogonale polynomier, er $\{P_n(x)\}$ en følge af ortonormale polynomier. Dermed bliver ligning (1.1) til

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \delta_{mn}$$

I følgende sætning haves ækvivalenser til definition 1.2.

SÆTNING 1.3
Lad $\mathcal{L}$ være et momentfunktionale og $\{P_n(x)\}$ en følge af polynomier. De følgende punkter er ækvivalente.

1. $\{P_n(x)\}$ er en følge af ortogonale polynomier med hensyn til $\mathcal{L}$.
2. For ethvert polynomium $\pi(x)$ af grad $m < n$ gælder $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ og for $\pi(x)$ af grad $m = n$ gælder $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$.
3. $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}$, $K_n \neq 0$ og $m = 0, 1, ..., n$.

BEVIS
Lad $\{P_n(x)\}$ være en følge af ortogonale polynomier med hensyn til $\mathcal{L}$. Da ethvert $P_k(x)$ er et polynomium af grad k, må $\{P_0(x), P_1(x), ..., P_m(x)\}$ være en basis for underrummet af polynomier af højst grad m. Hvis $\pi(x)$ er et polynomium af grad m, findes der konstanter c_k, således at

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x),$$

hvor $c_m \neq 0$.

Eftersom $\mathcal{L}$ er lineær, så for $m < n$

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^{m} c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] = 0$$

og for $m = n$

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = c_n\mathcal{L}[P_n(x)^2] \neq 0$$

Det vil sige, at punkt 1 medfører punkt 2.

Punkt 2 medfører 3, da for $m < n$, $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = 0$ og $\mathcal{L}[x^n P_n(x)] \neq 0$ for $m = n$. Dette kan med benyttelse af Kroneckers delta, δ_{mn}, erstattes med $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}$, hvor værdien $K_n \neq 0$.

Punkt 3 medfører punkt 1, da for polynomier $P_m(x), P_n(x) \in \{P_n(x)\}$, så er $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$, hvis $m \neq n$ og $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] \neq 0$, hvis $m = n$. Dermed må $P_m(x)$ og $P_n(x)$ være ortogonale for alle m og n, og $\{P_n(x)\}$ må være en følge af ortogonale polynomier. □

Resultatet af den følgende sætning giver mulighed for at repræsentere et polynomium ved en følge af ortogonale polynomier. Metoden hvorpå konstanterne findes ligner den, der kendes fra lineær algebra i forbindelse med at representere en vektor ved en ortogonal basis.

SÆTNING 1.4
Lad $\{P_n(x)\}$ være en følge af ortogonale polynomier med hensyn til momentfunktionalet $\mathcal{L}$. Så kan ethvert n'te-gradspolynomium $\pi(x)$ skrives som

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

hvor konstanten kan beskrives ved

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]}$$

for $k = 0, 1, ..., n$.

BEVIS
Hvis $\pi(x)$ er et polynomium af grad n, så eksisterer der konstanter c_k således at

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x).$$

Ved multiplikation af $P_m(x)$ og derefter anvendelse af $\mathcal{L}$ på begge sider i ligningen fås

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] = c_m \mathcal{L}[P_m(x)^2]$$

da for alle $k \neq m$ haves at $\mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] = 0$.

Det følger dermed, at konstanterne c_k kan beskrives ved

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]}$$

eftersom $\mathcal{L}[P_m(x)^2] \neq 0$. □

Det næste korte resultat viser, at ethvert polynomium i en følge af ortogonale polynomier er entydigt bestemt.

KOROLLAR 1.5
Hvis $\{P_n(x)\}$ og $\{Q_n(x)\}$ er to følger af ortogonale polynomier for $\mathcal{L}$, så findes der konstanter $c_n \neq 0$ således at $Q_n(x) = c_n P_n(x)$ for $n \in \mathbb{N}$.

BEVIS
Hvis $\{Q_n(x)\}$ er en følge af ortogonale polynomier for $\mathcal{L}$, så for $k < n$, $\mathcal{L}[P_k(x)Q_n(x)] = 0$, jævnfør sætning 1.3.

Lad $Q_n(x) = \pi(x)$ fra sætning 1.4 således at $Q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$.

Igen jævnfør sætning 1.3 haves der i forhold til følgen $\{P_n(x)\}$ for $k < n$ at $\mathcal{L}[Q_k(x)P_n(x)] = 0$. Derudover gælder der i forhold til følgen $\{Q_k(x)\}$ for $k > n$ at $\mathcal{L}[P_n(x)Q_k(x)] = 0$.

Dermed følger det, at $Q_n(x) = c_n P_n(x)$. $\square$

Bemærk at hvis $\{P_n(x)\}$ er en følge af ortogonale polynomier for $\mathcal{L}$, så er $\{c_n P_n(x)\}$ også en følge af ortogonale polynomier for enhver følge af konstanter $c_n \neq 0$.

1.1 Eksistens af ortogonale polynomier

I dette afsnit belyses eksistensen af ortogonale polynomier. Afsnittet er inspireret af [Chihara, 1978, kap. 1.3].

For at kunne bevise eksistensen af følger af ortogonale polynomier introduceres determinanten

$$\Delta_n = \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

En vigtig betingelse for determinanten Δ_n er, at den ikke må være lig nul. Grunden til dette ses for de kommende resultater i dette afsnit.

SÆTNING 1.6
Lad $\mathcal{L}$ være et momentfunktionale og $\{\mu_n\}$ være den tilhørende momentfølge. En nødvendig betingelse for eksistens af følger af ortogonale polynomier er, at determinanten $\Delta_n \neq 0$ for $n \in \mathbb{N}$.

BEVIS
Lad n'te-gradspolynomiet $P_n(x)$ være beskrevet ved

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k. \tag{1.3}$$

Jævnfør sætning 1.3 punkt 3 haves det for $m \leq n$, at

$$\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mathcal{L}[x^m x^k] = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mu_{m+k} = K_n \delta_{mn}. \tag{1.4}$$

Ligningen $\sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mu_{m+k} = K_n \delta_{mn}$ er ækvivalent med følgende

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Hvis en følge af ortogonale polynomier for $\mathcal{L}$ eksisterer, er den entydigt bestemt af konstanterne $K_n \neq 0$ fra ligning (1.4). Det vil sige for to følger af ortogonale polynomier $\{P_n(x)\}$ og $\{Q_n(x)\}$, hvor det gælder, at

$$\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \mathcal{L}[x^n Q_n(x)] = K_n$$

jævnfør sætning 1.3. Fra korollar 1.5 haves det, at $Q_n(x) = c_n P_n(x)$. Dermed haves det, at

$$K_n = \mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \mathcal{L}[x^n Q_n(x)] = \mathcal{L}[x^n c_n P_n(x)] = c_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)] = c_n K_n,$$

hvilket betyder, at $c_n = 1$. Dermed har ligning (1.4) en entydig løsning således, at determinanten $\Delta_n \neq 0$.

Omvendt hvis determinanten $\Delta_n \neq 0$, så har ligning (1.5) en entydig løsning for konstanter $K_n \neq 0$ således, at $P_n(x)$ eksisterer. Derudover haves det ved Cramers regel

$$c_{nn} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \tag{1.6}$$

for $n \geq 1$. Det følger hermed, at $P_n(x)$ er et polynomium af grad n, og at $\{P_n(x)\}$ er en følge af ortogonale polynomier for $\mathcal{L}$, jævnfør sætning 1.3. □

Ligning (1.6) gælder også for $n = 0$, hvis det antages, at $\Delta_{-1} = 1$. Samme antagelse benyttes i den følgende sætning.

SÆTNING 1.7
Lad $\{P_n(x)\}$ være en følge af ortogonale polynomier for $\mathcal{L}$, hvor k_n er ledende koefficient i $P_n(x)$, og lad $\pi_n(x)$ være et n'te-gradspolynonium med ledende koefficient a_n. For ethvert polynomium $\pi_n(x)$

$$\mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \frac{a_n k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}} \tag{1.7}$$

BEVIS
Polynomiet $\pi_n(x)$ kan skrives ud som summen af højeste-ordensleddet og et polynomium af grad $n-1$, det vil sige $\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$. Dermed haves det, at

$$\mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = \mathcal{L}[a_n x^n P_n(x)] + \mathcal{L}[\pi_{n-1}P_n(x)] = a_n\mathcal{L}[x^n P_n(x)].$$

Fra sætning 1.3 haves det at $a_n\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = a_n K_n$. Ved hjælp af ligning (1.6), med $c_{nn} = k_n$, kan K_n udtrykkes ved

$$k_n = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \Leftrightarrow k_n \Delta_n = K_n \Delta_{n-1} \Leftrightarrow K_n = \frac{k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Dermed haves det, at

$$\mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \frac{a_n k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

□

I forbindelse med de følgende sætninger i dette afsnit introduceres positiv-definit funktionale.

DEFINITION 1.8
For ethvert polynomium $\pi(x)$ der ikke er identisk nul og er ikke-negativ for alle $x \in \mathbb{R}$ kaldes et momentfunktionale $\mathcal{L}$ positiv-definit hvis $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$.

I beviset for den følgende sætning anvendes ortonormale polynomier, som konstrueres ud fra Gram-Schmidt-metoden, der eksempelvis er beskrevet i [Kreyszig, 1989].

SÆTNING 1.9
Lad $\mathcal{L}$ være et positiv-definit momentfunktionale. Så har $\mathcal{L}$ momenter $\mu_n \in \mathbb{R}$, og en tilhørende følge af reelle ortogonale polynomier eksisterer.

BEVIS
Hvis $\mathcal{L}$ er et positiv-definit funktionale haves det, at $\mathcal{L}[x^{2k}] = \mu_{2k} > 0$, som medfører, at $\mu_{2k} \in \mathbb{R}$ for $k = 0, 1, \dots, n$.

Desuden haves det, at $0 < \mathcal{L}[(x+1)^{2n}] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_{2n-k}$. Ved induktion kan det dermed vises, at $\mu_{2k+1} \in \mathbb{R}$ for $k = 0, 1, \dots, n$. Eksempelvis for $n = 1$ haves det, at

$$\mathcal{L}[(x+1)^2] = \mathcal{L}[x^2 + 1 + 2x] = \mu_2 + \mu_0 + 2\mu_1 > 0,$$

Som allerede vist er $\mu_0, \mu_2 \in \mathbb{R}$, hvilket må betyde, at $\mu_1 \in \mathbb{R}$, da $\mu_1 > 0$. Og for $n = 2$ haves det, at

$$\mathcal{L}[(x+1)^4] = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \mu_{4-k} = \mu_4 + 4\mu_3 + 6\mu_2 + 4\mu_1 + \mu_0,$$

hvor $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_4 \in \mathbb{R}$ medfører at $\mu_3 \in \mathbb{R}$, da $\mu_3 > 0$. Dermed $\mu_{2k+1} \in \mathbb{R}$ for $k = 0, 1, \dots, n$.

For $\mathcal{L}$ værende positiv-definit så kan en følge af ortonormale polynomier $\{p_n(x)\}$ konstrueres ved hjælp af Gram-Schmidt-metoden, som giver reelle ortonormale polynomier.

For $n = 0$ defineres $p_0(x) = \mu_0^{-1/2}$, som medfører at

$$\mathcal{L}[p_0(x)^2] = \mathcal{L}[(\mu_0^{(-1/2)})^2] = \mu_0^{-1}\mathcal{L}[1] = \mu_0^{-1}\mu_0 = 1.$$

Lad $P_1(x) = x - ap_0(x)$. Så er

$$\mathcal{L}[p_0(x)P_1(x)] = \mathcal{L}[xp_0(x)] - a\mathcal{L}[p_0(x)^2] = 0$$

ved at vælge $a = \mathcal{L}[xp_0(x)]$. Dermed er $p_1(x) = \left(\mathcal{L}[P_1(x)^2]\right)^{-1/2} P_1(x)$ således, at $\mathcal{L}[p_0(x)p_1(x)] = 0$ og $\mathcal{L}[p_1(x)^2] = 1$. De konstruerede polynomier $p_0(x)$ og $p_1(x)$ er begge reelle polynomier.

Antag at $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ er konstrueret således, at ethvert polynomium $p_i(x)$ er et reelt ortonormalt i'te-gradspolynomium, der opfylder, at $\mathcal{L}[p_i(x)p_j(x)] = \delta_{ij}$, for $i, j = 0, 1, ..., n$.

Det ortogonale polynomium $P_{n+1}(x)$ defineres ved

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x),$$

hvor $a_k = \mathcal{L}[x^{n+1}p_k(x)]$. Dermed er $P_{n+1}(x)$ et reelt polynomium af grad $n+1$ og

$$\mathcal{L}[p_j(x)P_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[x^{n+1}p_j(x)] - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}[p_j(x)p_k(x)] = a_j - a_j = 0.$$

Dermed haves det ortonormale polynomium $p_{n+1}(x) = \left(\mathcal{L}[P_{n+1}(x)^2]\right)^{-1/2} P_{n+1}(x)$, der dermed er et reelt polynomium, og det følger, at $\mathcal{L}[p_j(x)p_{n+1}(x)] = \delta_{j,n+1}$, for $j = 0, 1, \dots, n+1$.

Det følger dermed ved induktion, at der eksisterer en følge af reelle ortonormale polynomier for $\mathcal{L}$. $\square$

Resultatet af det følgende lemma, der karakteriserer ikke-negative polynomier, er nødvendigt for at relatere positiv-definite funktionaler til determinanterne i ligning (1.2).

LEMMA 1.10
Lad $\pi(x)$ være et polynomium, der er ikke-negativ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da findes der reelle polynomier $p(x)$ og $q(x)$ således, at

$$\pi(x) = p(x)^2 + q(x)^2$$

BEVIS
Hvis polynomiet $\pi(x) \geq 0$ for $x \in \mathbb{R}$, så er $\pi(x)$ et reelt polynomium således, at dets reelle rødder har lige multiplicitet, og dets ikke-reelle rødder opstår som konjugerede par. Dermed kan $\pi(x)$ udtrykkes ved

$$\pi(x) = r(x)^2 \prod_{k=1}^{m} (x - a_k - b_k i)(x - a_k + b_k i),$$

hvor $r(x)$ er et reelt polynomium bestående af de reelle rødder fra $pi(x)$, samt at $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Ved at lade $\prod_{k=1}^{m} (x - a_k - b_k i)(x - a_k + b_k i) = (A(x) + iB(x))(\overline{A(x) + iB(x)})$, hvor $A(x)$ og $B(x)$ er reelle polynomier, så er

$$\pi(x) = r(x)^2(A(x)^2 + B(x)^2) = p(x)^2 + q(x)^2,$$

for $p(x)^2 = r(x)^2 A(x)^2$ og $q(x)^2 = r(x)^2 B(x)^2$. □

SÆTNING 1.11
$\mathcal{L}$ er et positiv-definit funktionale hvis og kun hvis alle dets tilhørende momenter $\mu_n \in \mathbb{R}$ og determinanterne $\Delta_n > 0$ for $n \in \mathbb{N}$.

BEVIS
Lad $\mu_n \in \mathbb{R}$ og $\Delta_n > 0$, så findes der, jævnfør sætning 1.6, en følge af ortogonale polynomier $\{P_n(x)\}$ for $\mathcal{L}$. Ved at antage at $P_n(x)$ er et monisk polynomium, så haves det, at

$$\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0,$$

jævnfør sætning 1.7. Ud fra ligning (1.5) i beviset for sætning 1.6 er $P_n(x)$ et reelt polynomium. Dermed hvis $Q(x)$ er et reelt m'te-gradspolynomium, så kan det udtrykkes ved

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x),$$

hvor $a_k \in \mathbb{R}$ og $a_m \neq 0$. Dermed er

$$\mathcal{L}[Q(x)^2] = \sum_{j,k=0}^{m} a_j a_k \mathcal{L}[P_j(x) P_k(x)] = \sum_{k=0}^{m} a_k^2 \mathcal{L}[P_k(x)^2] > 0$$

Det følger deraf, at $\mathcal{L}$ er positiv-definit.

Antag nu omvendt at $\mathcal{L}$ er positiv-definit. Jævnfør sætning 1.9 så har $\mathcal{L}$ tilhørende momenter $\mu_n \in \mathbb{R}$, og der eksisterer en følge af reelle ortogonale polynomier $\{P_n(x)\}$. Ved som før at antage, at $P_n(x)$ er et monisk polynomium, haves det for $n \in \mathbb{N}$, at

$$0 < \mathcal{L}[P_n(x)^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

og som tidligere defineret, er $\Delta_{-1} = 1$, hvilket betyder, at $\Delta_n > 0$. □

1.2 Den fundamentale rekursionsformel

Dette afsnit omhandler den fundamentale rekursionsformel og resultater herom og bygger på [Chihara, 1978, kap. 1.4]. Ved en rekursionsformel er det muligt at danne et polynomium ud fra de to foregående polynomier i en følge af ortogonale polynomier. Rekursionsformlen bliver i det følgende udledet. Men først gives der en definition på et såkaldt kvasi-definit funktionale.

DEFINITION 1.12
Lad $\mathcal{L}$ være et lineært momentfunktionale, så er $\mathcal{L}$ kvasi-definit hvis og kun hvis determinanterne $\Delta_n \neq 0$ for $n \in \mathbb{N}$.

I det følgende tages der udgangspunkt i, at hvis der haves en følge af ortogonale polynomier, så haves der en rekursionsformel, som danner ortogonale polynomier.

SÆTNING 1.13
Lad $\mathcal{L}$ være kvasi-definit og lad $\{P_n(x)\}$ være en tilhørende følge af moniske ortogonale polynomier. Da findes der konstanter c_n og $\lambda_n \neq 0$ således, at for $n \geq 1$

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \tag{1.8}$$

hvor $P_{-1}(x) = 0$.

Bemærk at hvis $\mathcal{L}$ er positiv-definit, så er $c_n \in \mathbb{R}$ og $\lambda_{n+1} > 0$ for $n \geq 1$.
BEVIS
Tag polynomiet $xP_n(x)$ af grad $n+1$. Jævnfør sætning 1.4 kan polynomiet udtrykkes ved

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk}P_k(x),$$

og konstanten a_{nk} kan bestemmes ved

$$a_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]}$$

Men da $xP_k(x)$ er et polynomium af grad $k+1$ for $\mathcal{L}[P_n(x)xP_k(x)]$, betyder det, at $a_{nk} = 0$ for $0 \leq k < n-1$. Derudover er $a_{n,n+1} = 1$, da $xP_n(x)$ er et monisk polynomium. Det betyder, at

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x),$$

for $n \geq 1$. Erstattes n med $n-1$ fås

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + c_nP_{n-1}(x) + \lambda_nP_{n-2}(x),$$

som er ækvivalent til ligning (1.8) for $n \geq 2$. Men ligning (1.8) gælder også for $n = 1$, hvis det defineres, at $P_{-1}(x) = 0$ og $c_1 = -P_1(0)$.

Ved at gange med x^{n-2} og anvende $\mathcal{L}$ på ligning (1.8) haves det for $n \geq 2$, at

$$\mathcal{L}[x^{n-2}P_n(x)] = \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x) - c_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-1}(x)] - \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)],$$

og dermed

$$0 = \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x) - \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)].$$

Det haves dermed fra sætning 1.7 for $n \geq 1$, at

$$\lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[x^nP_n(x)]}{\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)]} = \frac{\Delta_n/\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}/\Delta_{n-2}} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}.$$

Det følger heraf, at $\lambda_n \neq 0$ for $\mathcal{L}$ værende kvasi-definit og dermed $\Delta_n \neq 0$, jævnfør definition 1.12. □

Følgende sætnings resultater tager udgangspunkt i rekursionsformel (1.8).

SÆTNING 1.14
For $n \geq 1$ gælder følgende:

1. $\lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[P_n(x)^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}(x)^2]} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}$.
2. $\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}$ hvis $\lambda_1 = \mu_0 = \Delta_0$.
3. $c_n = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}(x)^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}(x)^2]}$.
4. Koeffiecienten for x^{n-1} i $P_n(x)$ er givet ved $-(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$.

BEVIS
Formlen i punkt 1 udledes på samme måde som i beviset for sætning 1.13.

Punkt 2 vises ved hjælp af punkt 1 eftersom $\mathcal{L}[P_n(x)^2]$ kan udtrykkes ved

$$\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \frac{\mathcal{L}[P_n(x)^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}(x)^2]} \frac{\mathcal{L}[P_{n-1}(x)^2]}{\mathcal{L}[P_{n-2}(x)^2]} \cdots \frac{\mathcal{L}[P_2(x)^2]}{\mathcal{L}[P_1(x)^2]} \frac{\mathcal{L}[P_1(x)^2]}{\mathcal{L}[P_0(x)^2]} \mathcal{L}[P_0(x)^2]$$

Fra punkt 1 haves det dermed, at $P_n(x) = \lambda_{n+1}\lambda_n \cdots \lambda_3\lambda_2\lambda_1$, hvor $\mathcal{L}[P_0(x)^2] = \Delta_0 = \lambda_1$.

For at bevise punkt 3 ganges ligning (1.8) igennem med $P_{n-1}(x)$

$$P_{n-1}(x)P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-1}(x)P_{n-2}(x).$$

Anvendes $\mathcal{L}$ på ovenstående fås

$$\mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_n(x)] = \mathcal{L}[xP_{n-1}(x)^2] - c_n\mathcal{L}[P_{n-1}(x)^2] - \lambda_n\mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)].$$

Da $\mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_n(x)] = 0$ og $\lambda_n\mathcal{L}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)] = 0$, fås det, at

$$c_n = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}(x)^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}(x)^2]}.$$

For punkt 4, hvis d_n er koefficienten for x^{n-1} i $P_n(x)$, så ved at sammenligne koefficienterne for x^{n-1} i ligning (1.8), haves det, at $d_n = d_{n-1} - c_n$. Men eftersom $d_{n-1} = d_{n-2} - c_{n-1}$, så $d_n = (d_{n-2} - c_{n-1}) - c_n$. Ved gentagelse følger det, at $d_n = -(c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1} + c_n)$. □

Hvis polynomierne i en følge af ortogonale polynomier $\{P_n(x)\}$ ikke er moniske, så vil rekursionsformlen være for $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x),$$

hvor $A_n \neq 0$ og $C_n \neq 0$. Konstanterne A_n, B_n og C_n er givet ved $A_n = k_n^{-1}k_{n+1}$, $B_n = -c_{n+1}k_n^{-1}k_{n+1}$ og $C_n = \lambda_{n+1}k_{n-1}^{-1}k_{n+1}$, hvis $P_n(x) = k_n\tilde{P}_n(x)$ for det moniske ortogonale polynomium $\tilde{P}_n(x)$.

Den følgende sætning er har det modsatte udgangspunkt til sætning 1.13 på modstående side, eftersom den siger, at enhver følge af polynomier, der tilfredstiller rekursionsformlen (1.8), er en følge af ortogonale polynomier. Denne sætning blev i 1935 introduceret af Jean Favard, og kaldes derfor Favards sætning.

SÆTNING 1.15
Lad $\{c_n\}$og $\{\lambda_n\}$ være følger af komplekse tal for $n \geq 1$ og lad $\{P_n(x)\}$ være defineret ud fra rekursionsformlen (1.8), hvor $P_{-1}(x) = 0$ og $P_0(x) = 1$.

Der findes dermed et entydigt momentfunktionale $\mathcal{L}$ således, at $\mathcal{L}[1] = \lambda_1$ og $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$ for $m \neq n$ og $m, n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{L}$ er kvasi-definit og $\{P_n(x)\}$ er en følge af moniske ortogonale polynomier hvis og kun hvis $\lambda_n \neq 0$, mens $\mathcal{L}$ er positiv-definit hvis og kun hvis $c_n \in \mathbb{R}$ og $\lambda_n > 0$.

BEVIS
Momentfunktionalet $\mathcal{L}$ defineres først induktivt ved $\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[x^0] = \mu_0 = \lambda_1$, og for $n \geq 1$ så $\mathcal{L}[P_n(x)] = \mathcal{L}[P_0(x)P_n(x)] = 0$, eftersom $P_0(x) = 1$.

Det betyder, at momenterne μ_n, for $n \geq 1$, kan defineres ud fra

$$\mathcal{L}[P_1(x)] = \mathcal{L}[xP_0(x) - c_1P_0(x)] = \mathcal{L}[x] - c_1\mathcal{L}[1] = \mu_1 - c_1\mu_0 = 0,$$

og

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[P_2(x)] &= \mathcal{L}[xP_1(x) - c_2P_1(x) - \lambda_2P_0(x)] = \mathcal{L}[x(x - c_1)] - c_2\mathcal{L}[x - c_1] - \lambda_2\mathcal{L}[1] \\ &= \mathcal{L}[x^2] - c_1\mathcal{L}[x] - c_2(\mathcal{L}[x] - c_1\mathcal{L}[1]) - \lambda_2\mathcal{L}[1] = \mu_2 - c_1\mu_1 - c_2\mu_1 + c_1c_2\mu_0 - \lambda_2\mu_0 \\ &= \mu_2 - (c_1 + c_2)\mu_1 - (\lambda_2 - c_1c_2)\mu_0 = 0,\end{aligned}$$

hvor $P_1(x)$ og $P_2(x)$ er udtrykt ved hjælp af rekursionsformlen (1.8). For $n \geq 3$ er fremgangsmåden uændret i forhold til ovenstående.

Ved at omskrive rekursionsformlen (1.8) til

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_{n+1}P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x) \tag{1.9}$$

for $n \geq 1$, haves det, at

$$\mathcal{L}[xP_n(x)] = \mathcal{L}[P_{n+1}(x)] + c_{n+1}\mathcal{L}[P_n(x)] + \lambda_{n+1}\mathcal{L}[P_{n-1}(x)] = 0$$

for $n \geq 2$, eftersom $\mathcal{L}[P_{n+1}(x)] = 0$, $\mathcal{L}[P_n(x)] = 0$ og $\mathcal{L}[P_{n-1}(x)] = 0$. Ganges der med x på begge sider af ligning (1.9) fås

$$x^2P_n(x) = xP_{n+1}(x) + c_{n+1}xP_n(x) + \lambda_{n+1}xP_{n-1}(x),$$

som medfører, at $\mathcal{L}[x^2P_n(x)] = 0$, for $n \geq 3$, på grund af, at $\mathcal{L}[xP_n(x)] = 0$. Ved fortsat, at gange op med x for hvert trin opnås $\mathcal{L}[x^kP_n(x)] = 0$ for $0 \leq k < n$. Hvis $k = n$ så for $n \geq 1$

$$\mathcal{L}[x^nP_n(x)] = \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n+1}(x) + c_{n+1}x^{n-1}P_n(x) + \lambda_{n+1}x^{n-1}P_{n-1}(x)] = \lambda_{n+1}\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)],$$

da $\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n+1}(x)] = 0$ og $\mathcal{L}[x^{n-1}P_n(x)] = 0$.

Det følger dermed, at hvis $m \neq n$, da er $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$, mens for $m = n$ så gælder det, at $\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \mathcal{L}[x^nP_n(x)] = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}$, jævnfør sætning 1.14. Hermed er $\mathcal{L}$ kvasi-definit og $\{P_n(x)\}$ er en følge af ortogonale polynomier hvis og kun hvis $\lambda_n \neq 0$.

Eftersom $\mu_1 - c_1\mu_0 = 0$ og $\mu_2 - (c_1 + c_2)\mu_1 - (\lambda_2 - c_1c_2)\mu_0 = 0$, må det nødvendigvis betyde, at $c_1\mu_0 > 0$ og $(c_1 + c_2)\mu_1 + (\lambda_2 - c_1c_2)\mu_0 > 0$ og $c_1, c_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ medfører, at $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Ud fra lignende argumentioner kan det dermed konkluderes, at $\mu_n \in \mathbb{R}$, hvis $c_n, \lambda_n \in \mathbb{R}$, så jævnfør sætning 1.11 på side 9 er $\mathcal{L}$ positiv-definit hvis og kun hvis $\lambda > 0$. □

I den kommende sætning udledes Christoffel-Darboux-identiteten.

SÆTNING 1.16
Lad $\{P_n(x)\}$ tilfredsstille rekursionsformlen (1.8) med $\lambda_n \neq 0$. Så haves det, at

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}} = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})^{-1}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \tag{1.10}$$

BEVIS
Fra rekursionsformlen $P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)$ haves det for $n \geq 0$, at

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_{n+1}P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x).$$

Ved at gange $P_n(y)$ på begge sider ovenstående fås

$$xP_n(x)P_n(y) = P_{n+1}(x)P_n(y) + c_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y).$$

Ved at bytte om på x og y i ovenstående fås

$$yP_n(y)P_n(x) = P_{n+1}(y)P_n(x) + c_{n+1}P_n(y)P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(y)P_n(x).$$

Trækkes de foregående udtryk fra hinanden fås

$$\begin{aligned}
(x-y)P_n(y)P_n(x) = \\
&P_{n+1}(x)P_n(y) + c_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y) \\
&-\big(P_{n+1}(y)P_n(x) + c_{n+1}P_n(y)P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(y)P_n(x)\big) \\
=&P_{n+1}(x)P_n(y) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) - \lambda_{n+1}P_{n-1}(y)P_n(x) \\
=&P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) - \lambda_{n+1}\big(P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)\big)
\end{aligned}$$

Dermed

$$P_n(x)P_n(y) = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)} - \frac{\lambda_{n+1}\big(P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)\big)}{(x-y)}.$$

Hvis $F_n(x,y) = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})^{-1}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$, der er højresiden af ligning (1.10), så kan forrige ligning omskrives ved division af $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})$ til

$$\frac{P_m(x)P_m(y)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}} = F_m(x,y) - F_{m-1}(x,y),$$

for $m \geq 0$. Summeres højresiden af dette fra 0 til n fås

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_k(x,y) - F_{k-1}(x,y) =&F_0(x,y) - F_{-1}(x,y) + F_1(x,y) - F_0(x,y) + \ldots + F_n(x,y) - F_{n-1}(x,y) \\
=&F_n(x,y),
\end{aligned}$$

hvor $F_{-1}(x,y) = 0$. Dermed fås ligning (1.10). $\square$

For den tilsvarende følge af ortonormale polynomier $\{p_n(x)\}$, hvor det ortonormale polynomuim af grad n kan skrives, som $p_n(x) = k_n P_n(x)$ med $k_n = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})^{-1/2}$, skrives Christoffel-Darboux-identiteten (1.10) som

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} \tag{1.11}$$

SÆTNING 1.17
Følgende form af ligning (1.10) er også gyldig.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)^2}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}}. \tag{1.12}$$

BEVIS
Tælleren på højre side af Christoffel-Darboux-identiteten (1.10) kan skrives om til

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = \big(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)\big)P_n(x) - \big(P_n(x) - P_n(y)\big)P_{n+1}(x).$$

Dermed bliver brøken på højre side af ligning (1.10) ved opsplitning

$$\frac{\big(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)\big)}{x-y}P_n(x) - \frac{\big(P_n(x) - P_n(y)\big)}{x-y}P_{n+1}(x).$$

Lad $y \to x$ så haves det, at

$$\lim_{y\to x} \frac{(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y))}{x-y} = P'_{n+1}(x)$$
$$\lim_{y\to x} \frac{(P_n(x) - P_n(y))}{x-y} = P'_n(x)$$

Dermed haves ligning (1.12) for $y \to x$ i Christoffel-Darboux-identiteten (1.10). □

Fra beviset haves nedenstående ulighed der gælder for alle $x \in \mathbb{R}$, og når $\mathcal{L}$ er positiv-definit:

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0. \tag{1.13}$$

Denne ulighed er vigtig i forhold til beviset for, hvor rødder for $P_{n+1}(x)$ ligger i forhold til rødder for $P_n(x)$.

1.3 Rødder for ortogonale polynomier

I dette afsnit behandles rødder for følger af ortogonale polynomier, og det bygger hovedsagligt på [Chihara, 1978, kap. 1.5]. I forhold til positiv-definite momentfunktionaler udviser rødderne for de tilhørende ortogonale polynomier en regelmæssighed i deres adfærd. Dermed introduceres først en tilførsel til begrebet positiv-definit.

DEFINITION 1.18
Lad $E \subset (-\infty, \infty)$. Et funktionale $\mathcal{L}$ er positiv-definit på E hvis og kun hvis $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ for ethvert reelt polynomium $\pi(x)$, som er ikke-negativ på E og $\pi(x) \not\equiv 0$ på E. Mængden E er dermed en støttemængde for $\mathcal{L}$.

Det følgende resultat viser, at hvis $\mathcal{L}$ er positiv-definit på enhver uendelig mængde, så er $\mathcal{L}$ positiv-definit på mængder, som indeholder den uendelige mængde.

SÆTNING 1.19
Lad $\mathcal{L}$ være et positiv-definit funktionale på en uendelig mængde E, så er $\mathcal{L}$ positiv-definit på enhver mængde $M \supset E$, og $\mathcal{L}$ er positiv-definit på enhver tæt delmængde af E.

BEVIS
Lad $\pi(x)$ være et reelt polynomium, som er ikke-negativ og $\pi(x) \not\equiv 0$ for alle x på en mængde M.

Hvis $M \supset E$, så medfører det, at $\pi(x) \geq 0$ på E.

På den anden side, hvis $M \subset E$, men da M er en tæt mængde i E, $\overline{M} = E$, så er $\pi(x) \geq 0$ på E. Da $\pi(x)$ ikke er lig nul alle steder på en uendelig mængde, eftersom for $\pi(x)$ værende et polynomium af grad n har det højst n rødder. Det følger dermed for begge tilfælde, at $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ og dermed $\mathcal{L}$ positiv-definit. □

I resten af dette afsnit er $\mathcal{L}$ et positiv-definit funktionale, og $\{P_n(x)\}$ er en følge af moniske ortogonale polynomier, der korresponderer til $\mathcal{L}$.

Beviset for den følgende sætning er suppleret med [Jensen, 2013]. Resultatet af sætningen siger, at rødderne for ortogonale polynomier ligger indenfor intervallet, hvor polynomierne er defineret.

SÆTNING 1.20
Lad I være et interval, der er en støttemængde for $\mathcal{L}$, således at $I = (a, b)$. Alle rødder for polynomiet $P_n(x)$ er reelle, har multiplicitet 1 og ligger i intervallet I's indre, $[a, b]$.

BEVIS
Da $\mathcal{L}[P_n(x)] = \mathcal{L}[P_0(x)P_n(x)]0$ for $P_0(x) = 1$, må $P_n(x)$ skifte fortegn mindst én gang på intervallet $[a, b]$ for $n \geq 1$. Dermed har $P_n(x)$ mindst én rod, som er af ulige multiplicitet, i $[a, b]$.

Lad $x_1, x_2, \ldots, x_k$ være rødder for $P_n(x)$, der har ulige multiplicitet og ligger i $[a, b]$, hvorom det gælder at $x_j \neq x_k$ for $j \neq k$.

Antag at $k < n$. Lad
$$r(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$$
således, at $r(x)$ er et k'te-gradspolynomium. Så er $r(x)P_n(x)$ et polynomium, der ikke har nogen rødder af ulige multiplicitet, som ligger i $[a, b]$. Dermed kan $r(x)P_n(x)$ ikke ændre fortegn i $[a, b]$. Det medfører derfor, at $r(x)P_n(x) \geq 0$ for $x \in I$. Det betyder, at $\mathcal{L}[r(x)P_n(x)] > 0$, men det modsiger sætning 1.3 på side 4, da $r(x)$ er af grad k. Dermed må $k = n$. Det medfører heraf, at $P_n(x)$ har n strengt forskellige rødder i $[a, b]$. □

Rødderne for det ortogonale n'te-gradspolynomium $P_n(x)$ skrives fremover som x_{ni} for $i = 1, \ldots, n$ og rangeres fra lavest til højest således, at $x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{nn}$ for $n \geq 1$.

Eftersom $P_n(x)$ er et monisk polynomium, så er dets ledende koefficient positiv. Det betyder, at for $x > x_{nn}$ så er $P_n(x) > 0$, og $\operatorname{sgn} P_n(x) = (-1)^n$ for $x < x_{n1}$. Det betyder for eksempel, at $P_1(x) < 0$ for $x < x_{11}$ samt at $P_2(x) > 0$ for $x < x_{21}$.

Hvis $P_n(x)$ differentieres, så gælder det, at i hvert interval $(x_{n,k-1}, x_{n,k})$ har $P_n'(x)$ præcis en rod. Dermed ændrer $P_n'(x_{nk})$ fortegn for hvert $k = 1, 2, \ldots, n$. Eftersom den ledende koefficient for $P_n'(x)$ er positiv, på grund af, at $P_n(x)$ er monisk, medfører det, at $\operatorname{sgn} P_n'(x_{nk}) = (-1)^{n-k}$ for $k = 1, 2, \ldots, n$.

Resultatet af følgende sætning fortæller, at mellem to rødder af $P_{n+1}(x)$ vil der ligge en rod for $P_n(x)$.

SÆTNING 1.21
Rødderne for $P_n(x)$ og $P_{n+1}(x)$ ligger således, at $x_{n+1,i} < x_{ni} < x_{n+1,i+1}$ for $i = 1, \ldots, n$.

BEVIS
Tag uligheden (1.13)

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0.$$

Indsættes den k'te rod for $P_{n+1}(x)$ i uligheden haves det, at

$$P'_{n+1}(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0,$$

da $P'_n(x_{n+1,k})P_{n+1}(x_{n+1,k}) = 0$.

Ud fra at sgn $P'_{n+1}(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$, så haves det, at sgn $P_n(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$, da både $P'_{n+1}(x_{n+1,k})$ og $P_n(x_{n+1,k})$ skal have samme fortegn for, at uligheden er sand. Dermed har $P_n(x)$ én rod i hver af intervallerne $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$ for $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Klassiske Ortogonale Polynomier 2

Indenfor studiet af ortogonale polynomier er der tre familier af ortogonale polynomier, som har fået størst opmærksomhed. Disse tre er Laguerre-, Hermite- og Jacobipolynomier og kaldes tilsammen for de klassiske ortogonale polynomier. Jacobipolynomierne har nogle kendte specialtilfælde som Legendrepolynomier og Chebyshevpolynomierne.

Navn	Notation	Interval	Vægtfunktion
Laguerre	$L_n^\alpha(x)$	$[0, \infty]$	$w(x) = x^\alpha e^{-x}$
Hermite	$H_n(x)$	$[-\infty, \infty]$	$w(x) = e^{-x^2}$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$[-1, 1]$	$w(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$
- Legendre	$P_n(x)$		$w(x) = 1$
- Chebyshev 1	$T_n(x)$		$w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
- Chebyshev 2	$U_n(x)$		$w(x) = (1-x^2)^{1/2}$
- Gegenbauer	$C_n^\lambda(x)$		$w(x) = (1-x^2)^\alpha$

Tabel 2.1. Tabel over de tre klassiske ortogonale polynomier samt to specialtilfælde af Jacobipolynomier. Inkluderet er notationer, definitionsintervaller og vægtfunktioner for hver af polynomierne. Fra [Stoer og Bulirsch, 1980, s. 148], [Chihara, 1978, s. 143] og [Folland, 1992].

Parametrerne α, β for Jacobipolynomierne defineres til $\alpha > -1$ og $\beta > -1$. For Legendrepolynomiet er $\alpha = \beta = 0$, og i henhold til 1. Chebyshevpolynomier er $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ og 2. Chebyshevpolynomier er $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Derudover haves Gegenbauerpolynomierne, hvor det gælder, at $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$ og $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$. Fra [Chihara, 1978, s. 143].

I de kommende afsnit fokuseres der på enkelte af de klassiske polynomier. Det første af disse afsnit omhandler Legendrepolynomier.

2.1 Legendrepolynomier

Dette afsnit omhandlende Legendrepolynomier er inspireret af [Folland, 1992, kap. 6.2].

Legendrepolynomier er en familie af ortogonale polynomier, der er defineret på intervallet $[-1, 1]$ i henhold til vægtfunktionen $w(x) = 1$, jævnfør tabel 2.1. En klassisk normalisering af Legendrepolynomier er, at $P_n(1) = 1$ for alle n, hvilket kan opnås med den rette rekursionsformel, [Burden og Faires, 2001, s. 505]. Men normaliseringen kan også opnås ved følgende.

Lad $P_n(x)$ være et Legendrepolynomium af grad n. Det er defineret ved

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \tag{2.1}$$

Det ses, at funktionen $(x^2 - 1)^n$ er et polynomium af grad $2n$, hvis højesteordensled er x^{2n}. Det medfører, at $P_n(x)$ er et n'te-gradspolynomium.

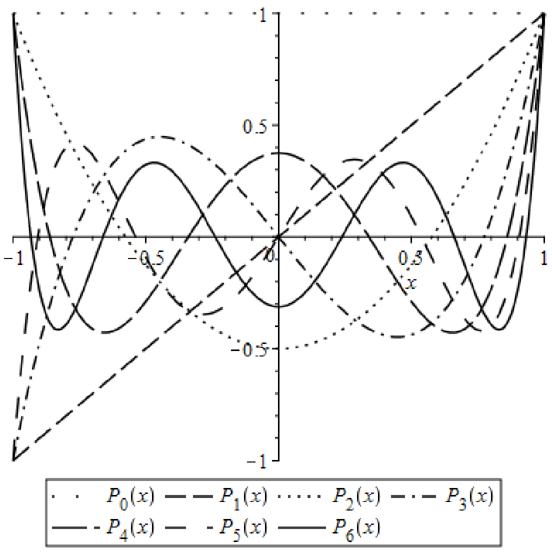
De første syv Legendrepolynomier dannet ud fra formel (2.1) er givet ved

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \qquad P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

Disse syv Legendrepolynomier kan ses i figur 2.1, hvor det også ses, at for hvert enkelt polynomium gælder normaliseringen $P_n(1) = 1$. Denne normalisering bevises senere i dette afsnit.



Figur 2.1. De første syv Legendrepolynomier. Lavet ved hjælp af Maple.

Den ledende koefficient for $P_n(x)$ ud fra formel (2.1) kan findes ved

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n} + \ldots) = \frac{1}{2^n n!}((2n)(2n-1)\cdots(n-1)x^n + \ldots) = \frac{2n!}{2^n (n!)^2} x^n + \ldots \tag{2.2}$$

I den følgende sætning bevises ortogonalitet for Legendrepolynomier defineret ved formel (2.1).

SÆTNING 2.1
Følgen af Legendrepolynomier $\{P_n(x)\}$ er ortogonal på intervallet $[-1, 1]$, og der gælder, at

$$\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \frac{2}{2n+1}.$$

Bevis
Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion på $[-1,1]$, så haves det, at

$$\mathcal{L}[f(x)P_n(x)] = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx.$$

Ved omskrivning af det foregående haves

$$2^n n!\mathcal{L}[f(x)P_n(x)] = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx.$$

Ved at benytte delvis integration på integralet n gange fås

$$2^n n!\mathcal{L}[f(x)P_n(x)] = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx, \tag{2.3}$$

eftersom funktionen $(x^2-1)^n = (x-1^n)(x+1)^n = 0$ for $x = \pm 1$, og det samme gør sig gældende for de første $n-1$ afledede af $(x^2-1)^n$.

Hvis $f(x)$ er et polynomium, der er af grad mindre end n, så er $f^{(n)}(x) = 0$, og dermed er $\mathcal{L}[f(x)P_n(x)] = 0$. Dermed for alle $m < n$ så er $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$. Byttes der om på m og n gælder det, at $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$ for alle $m > n$. Dermed er alle $P_n(x)$ indbyrdes ortogonale.

Hvis $f(x) = P_n(x)$ derimod, så haves det ved at differentiere ligning (2.2) n gange, at

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

sådan at fra ligning (2.3) haves det dermed, at

$$\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \int_{-1}^{1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}(1-x^2)^n dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

Ved at lade $x = \sqrt{y}$ i integralet $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ således, at $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ så

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_{0}^{1}(1-x).dx = 2\int_{0}^{1}(1-y)^n\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int_{0}^{1}(1-y)^n y^{-1/2}dy$$

Jævnfør [Adams og Essex, 2010, s. 818] haves det for betafunktionen og gammafunktionen, at

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}(1-y)^n y^{-1/2}dy = B\left(n+1,\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\\ &= \frac{2^{n+1}n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)},\end{aligned}$$

hvor det skal bemærkes, at ved $\Gamma(n+1+\frac{1}{2})$ i nævneren benyttes et resultat vedrørende Gammafunktionen, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, hvilket betyder, at $\Gamma(n+\frac{1}{2}+1) = (n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})$. Ved at gentage dette opnås nævneren med $(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

Dermed haves det, at

$$\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{2^{n+1}n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} \qquad \square$$

Formel (2.1) kaldes for Rodriguesformlen. Resultatet af sætning 2.1 betyder dermed, at for en følge af Legendrepolynomier $\{P_n(x)\}$ haves det, at

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Den næste sætning giver den frembringende funktion for Legendrepolynomier. Der benyttes vejintegraler til at udlede denne funktion samt andre resultater kendt fra kompleks analyse.

SÆTNING 2.2
For $x \in [-1,1]$ og $|z| < 1$ haves det, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \tag{2.4}$$

BEVIS
For et $x \in [-1,1]$ lad γ være en enhedcirkel med centrum i x i det komplekse plan med positiv orientering. Ved at anvende Cauchys formel for afledede (se eksempelvis [Agarwal et al., 2011]), $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{n+1}}d\xi$, på Rodriguesformlen (2.1) fås

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\xi^2-1)^n}{2^n(x-\xi)^{n+1}}d\xi$$

Hvis $|z|$ er lille nok således, at den geometriske række $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z(\xi^2-1)}{2(\xi-x)}\right)^n$ konvergerer uniformt for et $\xi \in \gamma$, haves det dermed, at

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum\left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-x)^{n+1}}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z(\xi^2-1)}{2(\xi-x)}\right)^n d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi-x}\left(1-\frac{z(\xi^2-1)}{2(\xi-x}\right)^{-1} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2}{z-2x+2\xi-z\xi^2}d\xi
\end{aligned}$$

Rødderne for andengradspolynomiet $z-2x+2\xi-z\xi^2$ med ξ som variabel er givet ved

$$\xi = \frac{1\pm\sqrt{1-2xz+z^2}}{z}$$

Lad $\xi_1 = \frac{1-\sqrt{1-2xz+z^2}}{z}$ og $\xi_2 = \frac{1+\sqrt{1-2xz+z^2}}{z}$. Når $|z|$ er lille så er $|z|^2$ meget lille. Det vil sige, at $\sqrt{1-2xz+z^2} \approx \sqrt{1-2xz} \approx 1-xz$ på grund af at Taylorformlen for $\sqrt{1-az} = 1-\frac{1}{2}az$. Det medfører, at ξ_1 ligger indenfor γ og tæt på x, mens ξ_2 ligger udenfor. Dermed haves det jævnfør residue-sætningen (se [Agarwal et al., 2011]), at

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \mathrm{Res}_{\xi=\xi_1}\frac{2}{z-2x+2\xi-z\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

Dermed er ligning (2.4) bevist så længe at $|z|$ er lille nok. Ligning (2.4) beskriver også en Taylor-række, da venstresiden er en Taylor-række for den analytiske funktion på højresiden. Taylor-rækkens konvergensradius er afstanden fra origo til singulariteterne af funktionen på højresiden, der ligger i $z = x \pm i\sqrt{1-x^2}$. Derfor er konvergensradius 1. Dermed haves det, at ligning (2.4) gælder for alle z således, at $|z| < 1$. $\square$

Som nævnt i starten af dette afsnit har Legendrepolynomier en klassisk normalisering således, at $P_n(1) = 1$. Det følgende korollar beviser netop at denne normalisering holder for polynomier dannet ud fra Rodriguesformlen (2.1).

KOROLLAR 2.3
For alle $n \in \mathbb{N}$ haves det, at $P_n(1) = 1$ og $P_n(-1) = (-1)^n$.

BEVIS
Ved at indsætte $x = 1$ ind i ligning (2.4) fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z-1)^2}} = \frac{1}{z-1}.$$

Indsættes $x = -1$ i (2.4) fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)z^n = \frac{1}{\sqrt{1+2z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z+1)^2}} = \frac{1}{z+1}.$$

Bemærk at Taylor-rækkerne for funktionerne $\frac{1}{z-1}$ og $\frac{1}{z+1}$ er definitionen på den geometriske række. Det haves dermed, at $\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ og $\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, hvilket medfører, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Det følger hermed, at $P_n(1) = 1$ og $P_n(-1) = (-1)^n$ for alle $n \geq 0$. □

Følgende formel relaterer sig til Legendrepolynomiers afledede.

SÆTNING 2.4
For alle $n \geq 1$ haves det, at

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

BEVIS
Tag funktionen $(x^2-1)^{n+1}$ fra Rodriguesformlen (2.1) for $P_{n+1}(x)$. Den anden ordensafledede af $(x^2-1)^{n+1}$ er

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(2(n+1)x(x^2-1)^n\right) &= 2(n+1)(x^2-1)^n + 2(n+1)x2nx(x^2-1)^{n-1} \\ &= 2(n+1)\left((x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Ved at lade $x^2 = (x^2-1)+1$ i den anden ordensafledede af $(x^2-1)^{n+1}$ fås

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^{n+1} &= 2(n+1)\left(((x^2-1)+1-1)^n + 2n((x^2-1)+1)((x^2-1)+1-1)^{n-1}\right) \\ &= 2(n+1)\left((x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}\right) \\ &= 2(n+1)\left((2n+1)(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}\right) \\ &= 2(n+1)(2n+1)(x^2-1)^n + 4(n+1)n(x^2-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ved Rodriguesformlen (2.1) for $P_{n+1}(x)$ haves dermed

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big(2(n+1)(2n+1)(x^2-1)^n + 4(n+1)n(x^2-1)^{n-1}\Big) \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n + \frac{4(n+1)n}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1} \\
&= \frac{(2n+1)}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1} \\
&= \frac{(2n+1)}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n + P_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Ved at differentiere én gang på begge sider af lighedstegnet fås

$$P'_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{2^n n!}\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n + P'_{n-1}(x)$$

Dermed haves identiteten $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$. □

En ækvivalent form til formlen i foregående sætning kan er

$$\int P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\big(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\big) + C.$$

Legendrepolynomier er løsninger til differentialligningen givet i den kommende sætning.

SÆTNING 2.5
For alle $n \geq 0$ haves

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P'_n(x)\Big) + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{2.5}$$

BEVIS
Lad $g(x) = \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P'_n(x)\Big)$. Da $P'_n(x)$ er et polynomium af grad $n-1$, så er $x^2P'_n(x)$ er et polynomium af grad $n+1$, og $g(x)$ er et n'te-gradspolynomium. Fra ligning (2.2) kan højeste-ordensleddet for $g(x)$ findes ved

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{d}{dx}\big((-x^2)(nx^{n-1})\big) &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\big(-2x(nx^{n-1}) + (-x^2)(n-1)nx^{n-2}\big) \\
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\big(-2nx^n - n(n-1)x^n\big) \\
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\big((-2n+n^2+n)x^n\big) \\
&= -n(n+1)\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n
\end{aligned}$$

Dermed er $g(x) + n(n+1)P_n(x)$ et polynomium af grad $n-1$, som er en linearkombination af polynomierne $P_0(x), \dots, P_{n-1}(x)$ således, at

$$g(x) + n(n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P'_n(x)\Big) + n(n+1)P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x)$$

Jævnfør sætning 1.4 på side 5 så kan koefficienterne c_k findes ved

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[\big(g(x)+n(n+1)P_n(x)\big)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]} = \frac{\mathcal{L}[g(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]} + n(n+1)\frac{\mathcal{L}[P_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]}.$$

Det sidste led i ovenstående forsvinder, eftersom $\mathcal{L}[P_n(x)P_k(x)] = 0$ for $k = 0, \dots, n-1$. Tælleren i det første led er

$$\mathcal{L}[g(x)P_k(x)] = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P_n'(x)\Big)P_k(x)dx.$$

Ved at anvende delvis integration to gange på det ovenstående integrale, hvor leddende $[(1-x^2)P_n'(x)P_k(x)]_{-1}^{1} = 0$, fås

$$\mathcal{L}[g(x)P_k(x)] = \int_{-1}^{1} P_n(x)\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P_k'(x)\Big)dx.$$

Polynomiet $\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P_k'(x)\Big)$ er af grad k og er en linearkombination af $P_0(x), \dots, P_k(x)$, og dermed er det ortogonal på $P_n(x)$. Dermed er $c_k = \frac{\mathcal{L}[g(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k(x)^2]} = 0$ for alle $k < n$.

Det betyder dermed, at $\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)P_n'(x)\Big) + n(n+1)P_n(x) = 0$. □

Fra sætning 2.5 kan det konkluderes, at Legendrepolynomier er såkaldte egenfunktioner for Legendreligningen

$$\Big((1-x^2)y'\Big)' + \lambda y = 0,$$

hvor egenværdien for $P_n(x)$ er $n(n+1)$. Legendreligningen ovenfor er på såkaldt Sturm-Liouville form. Legendreligningen kan også skrives på en mere regulær form ved

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

2.2 Hermitepolynomier

I dette afsnit tages der hul på Hermitepolynomierne, der bygger på [Folland, 1992, kap. 6.4].

Hermitepolynomier er en familie af ortogonale polynomier, som er ortogonale på intervallet $[-\infty, \infty]$ og i henhold til vægtfunktionen $w(x) = e^{-x^2}$ jævnfør tabel 2.1 på side 17.

Hermitepolynomiet $H_n(x)$ kan kan beskrives ved den generaliserede Rodriguesformel for Hermitepolynomier

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \tag{2.6}$$

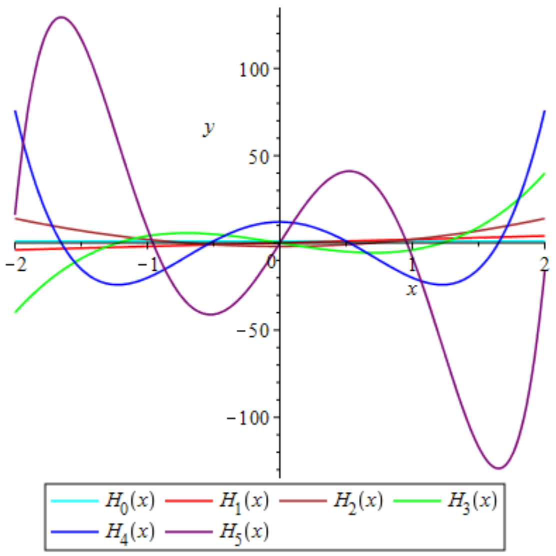
De første seks Hermitepolynomier dannet ud fra formel (2.6) ser således ud:

$H_0(x) = 1$	$H_1(x) = 2x$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

Disse seks Hermitepolynomier kan ses i figur 2.2.

Fra Rodriguesformlen for Hermitepolynomier haves det, at

$$\begin{aligned} e^{-x^2}H_n(x) &= (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = -\frac{d}{dx}(e^{-x^2}(-1)^{n-1}e^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}) \\ &= -\frac{d}{dx}(e^{-x^2}H_{n-1}(x)) = -(-2xe^{-x^2}H_{n-1}(x) + e^{-x^2}H_{n-1}'(x)) \\ &= e^{-x^2}(2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)). \end{aligned}$$



Figur 2.2. De første seks Hermitepolynomier. Lavet ved hjælp af Maple.

Dette kan dermed skrives som

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x), \tag{2.7}$$

hvilket giver en induktiv metode at finde $H_n(x)$ på. Derudover ses det, at højeste-ordensleddet for $H_n(x)$ er $2x$ gange højeste-ordensleddet for $H_{n-1}(x)$. Dermed haves det, at højeste-ordensleddet for Hermitepolynomiet af grad n er $(2x)^n$. Det haves desuden, at $H_n(x)$ er enten lige eller ulige afhængigt af, om n er lige eller ulige, eftersom e^{-x^2} er lige funktion.

SÆTNING 2.6
Følgen af Hermitepolynomier $\{H_n(x)\}$ er ortogonale på $[-\infty, \infty]$ med hensyn til vægtfunktionen $w(x) = e^{-x^2}$, og der gælder, at

$$\mathcal{L}[H_n(x)^2] = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

BEVIS
Hvis $f(x)$ er et vilkårligt polynomium haves det, at

$$\mathcal{L}[f(x)H_n(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d^n}{x^n}e^{-x^2}dx.$$

Ved at anvende delvis integration n gange fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)e^{-x^2}dx,$$

eftersom der i leddene $\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}$ gælder, at $e^{-x^2}f(x) \to 0$ for $x \to \pm\infty$. Dermed haves det, at

$$\mathcal{L}[f(x)H_n(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)e^{-x^2}dx.$$

Hvis $f(x)$ er polynomium, hvis grad er mindre end n, og det haves, at $f(x) = H_m(x)$ for $m < n$, så gælder det, at $f^{(n)}(x) = 0$ og dermed $\mathcal{L}[f(x)H_n(x)] = 0$. Ortogonaliteten for følgen af Hermitepolynomier $\{H_n(x)\}$ er dermed blevet vist.

Derimod, hvis $f(x) = H_n(x)$ så er $f(x) = (2x)^n + \ldots$, hvilket medfører, at $f^{(n)}(x) = 2^n n!$. Dermed ved substitutionen $x = \sqrt{y}$ så

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[H_n(x)^2] &= \mathcal{L}[f(x)H_n(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)e^{-x^2}dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \\ &= (2^n n!)2\int_0^{\infty} e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}y^{-1/2}dy.\end{aligned}$$

Fra [Adams og Essex, 2010] haves gammafunktionen $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$. Dermed kan ovenstående skrives som

$$\mathcal{L}[H_n(x)^2] = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}y^{-1/2}dy = 2^n n!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

□

Resultatet af ovenstående sætning er, at for Hermitepolynomier udviklet ved formel (2.6) gælder der, at

$$\mathcal{L}[H_m(x)H_n(x)] = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$$

I det følgende udledes den frembringende funktion for Hermitepolynomier.

SÆTNING 2.7
For ethvert $x \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$ haves det, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2}. \tag{2.8}$$

BEVIS
Lad $u = x - z$, hvor x er konstant, så haves det, at $\frac{d}{du} = -\frac{d}{dz}$. Dermed er

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}e^{-(x-z)^2}\bigg|_{z=0} &= (-1)^n \frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}\bigg|_{u=x} = e^{-u^2}(-1)^n e^{u^2}\frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}\bigg|_{u=x} \\ &= e^{-u^2}H_n(u)\bigg|_{u=x} = e^{-x^2}H_n(x).\end{aligned}$$

Fra Taylors formel for e^z haves det dermed, at

$$e^{-(x-z)} = e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!},$$

hvilket giver, ved multiplikation af e^{x^2} på begge sider af ligheden foroven, ligning (2.8). □

En anden metode at danne Hermitepolynomierne er ved en rekursionsformel. Rekursionsformlen for Hermitepolynomier kan udledes ved den induktive formel (2.7). I denne formel findes leddet $H'_{n-1}(x)$, som skal erstattes. Ved at differentiere ligning (2.8) i forhold til x opnås

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{z^n}{n!} = 2ze^{2xz-z^2} = 2z\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^{n+1}}{n!}$$

Ved at substituere n med $n-1$ efter det sidste lighedstegn fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{z^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{z^n}{(n-1)!}$$

Sættes koefficienterne for z^n lig hinanden fås $\frac{H'_n(x)}{n!} = 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$, hvilket er ensbetydende med $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. Indsættes dette for $n = n-1$ i ligning (2.7) fås rekursionsformlen for Hermitepolynomier

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x). \tag{2.9}$$

Et andet udfald af det foregående er differentialligningen

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Denne differentialligning kan skrives på Sturm-Liouville form ved at gange igennem med e^{-x^2} således, at

$$\left(e^{-x^2} H_n'(x)\right)' + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0.$$

Hermitepolynomierne er dermed egenfunktioner for

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' + \lambda e^{-x^2} y = 0$$

for $-\infty < x < \infty$.

2.3 Laguerrepolynomier

I det sidste afsnit om de klassiske ortogonale polynomier arbejdes der med Laguerrepolynomier. Dette afsnit bygger på [Folland, 1992, kap.6.5].

I tabel 2.1 på side 17 er det angivet, at en følge af Laguerrepolynomier $\{L_n^\alpha(x)\}$ er ortogonale på intervallet $[0, \infty]$ i henhold til vægtfunktionen $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, hvor parameteren $\alpha > -1$. Den generaliserede Rodriguesformel for Laguerrepolynomier er givet ved

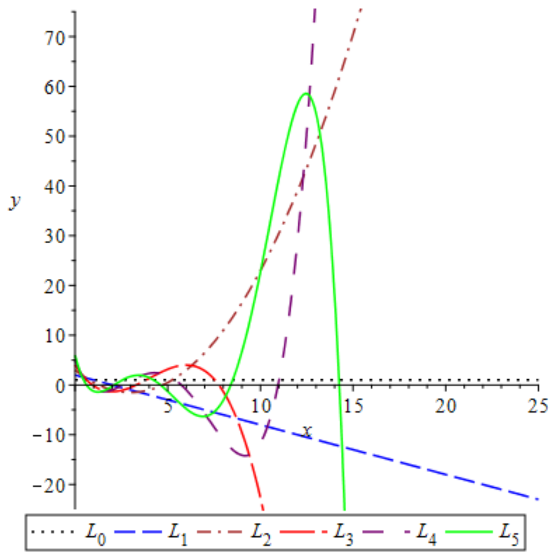
$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right). \tag{2.10}$$

For $\alpha = 1$ så er de første seks Laguerrepolynomier dannet ud fra formel (2.10) givet ved

$$L_0^1(x) = 1 \qquad L_1^1(x) = -x + 2$$

$$L_2^1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 \qquad L_3^1(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 6x + 4$$

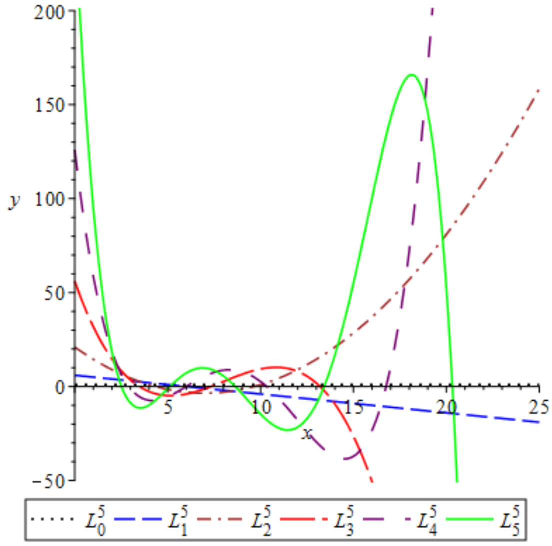
$$L_4^1(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - 10x + 5 \qquad L_5^1(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 10x^2 - 15x + 6$$



Figur 2.3. De første seks Laguerrepolynomier for $\alpha = 1$. Lavet ved hjælp af Maple.

Hvis $\alpha = 5$, så er de første seks Laguerrepolynomier dannet ud fra formel (2.10) givet ved

$$L_0^5(x) = 1 \qquad L_1^5(x) = -x + 6$$
$$L_2^5(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 21 \qquad L_3^5(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 4x^2 - 28x + 56$$
$$L_4^5(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 18x^2 - 84x + 126 \qquad L_5^5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + 60x^2 - 210x + 252$$



Figur 2.4. De første seks Laguerrepolynomier for $\alpha = 5$. Lavet ved hjælp af Maple.

På figur 2.3 og figur 2.4 ses det, hvilken effekt værdierne for α har for Laguerrepolynomiernes ekstrema. Hvis der for eksempel ses på $L_5^1(x)$ og $L_5^5(x)$ ses det, at det sidste maksimum, inden polynomierne går mod $-\infty$, ligger i spændet $50 < y < 60$ i figur 2.3 og $150 < y < 170$ i figur 2.4. Derudover forskydes polynomierne også længere mod højre, når α bliver større.

Fra Rodriguesformlen for Laguerrepolynomier haves det for produktreglen med n afledede, at

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= x^{-\alpha}e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^{\alpha+n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+\alpha)(n-1+\alpha)\cdots(k+1-\alpha)}{k!(n-k)!} (-x)^k \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ud fra dette ses det, at $L_n^\alpha(x)$ er et n'te-gradspolynomium med højeste-ordensled $\frac{(-1)^n x^n}{n!}$.

Følgende sætning beviser, at Laguerre polynomier er ortogonale på $[0, \infty]$ i forhold til $w(x) = x^\alpha e^{-x}$.

SÆTNING 2.8
Følgen af Laguerrepolynomier $\{L_n^\alpha(x)\}$ er ortogonal på intervallet $[0, \infty]$ med hensyn til vægtfunktionen $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, og der gælder, at

$$\mathcal{L}[L_n^\alpha(x)^2] = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

BEVIS
Hvis $f(x)$ er et vilkårligt polynomium, så ved anvendelse af $\mathcal{L}$ fås

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x)L_n^\alpha(x)] &= \int_0^\infty f(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = \int_0^\infty f(x)\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})x^\alpha e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})dx\end{aligned}$$

Anvendes delvis integration n gange på det sidste integrale i ovenstående, bemærkes det, at leddene $\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{\alpha+n}e^{-x})f(x)\right]_0^\infty = 0$, eftersom $x^{\alpha+n}e^{-x} \to 0$ når $x \to \infty$, og dermed opnås

$$\mathcal{L}[f(x)L_n^\alpha(x)] = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty f^{(n)}(x)x^{\alpha+n}e^{-x}dx$$

Hvis polynomiet $f(x)$ er af grad mindre end n og $f(x) = L_m^\alpha(x)$ for $m < n$, så er $f^{(n)}(x) = 0$, hvilket medfører, at $\mathcal{L}[f(x)L_n^\alpha(x)] = 0$. Derimod, hvis $f(x) = L_n^\alpha(x)$, så er $f^{(n)}(x) = (-1)^n$, da højeste-ordensleddet for $L_n^\alpha(x)$ er $\frac{(-1)^n x^n}{n!}$. Dermed haves det ved Gammafunktionen (se [Adams og Essex, 2010, s. 818]), at

$$\mathcal{L}[L_n^\alpha(x)^2] = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{\alpha+n}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \qquad \square$$

Resultatet af sætningen betyder, at for Laguerrepolynomier udviklet ved formel (2.10), der gælder det, at

$$\mathcal{L}[L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)] = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\delta_{mn}$$

Årsagen til at parameteren $\alpha > -1$ er, at det ikke er muligt at integrere vægtfunktionen $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ i origo for $\alpha \le -1$.

Den frembringende funktion for Laguerrepolynomier bevises i det følgende.

SÆTNING 2.9
For $x > 0$ og $|z| < 1$ haves det, at

$$\sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)z^n = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{\alpha+1}} \tag{2.12}$$

BEVIS
For $x > 0$, lad γ være en cirkel med centrum i x og positiv orientering. Ved at udvide venstresiden af ligning (2.12) med formel (2.10) fås

$$\sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)z^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})$$

Anvendes Cauchys formel for afledede på ovenstående haves det for et $\xi \in \gamma$, at

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty z^n\int_\gamma \frac{\xi^{\alpha+n}e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}}d\xi \\ &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^\infty z^n\frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\xi-x}\frac{\xi^n}{(\xi-x)^n}d\xi \\ &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\xi-x}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z\xi}{(\xi-x)}\right)^n d\xi.\end{aligned}$$

Hvis $|z|$ er lille nok, for eksempel $|z| < 1$, så konvergerer den geometriske række $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z\xi}{(\xi-x)}\right)^n$ uniformt for et $\xi \in \gamma$ således, at $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z\xi}{(\xi-x)}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z\xi}{\xi-x}}$. Dermed kan ovenstående skrives, som

$$\begin{aligned}\frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\xi-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z\xi}{(\xi-x)}\right)^n d\xi &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\xi-x}\left(1-\frac{z\xi}{\xi-x}\right)^{-1} d\xi \\ &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\xi(1-z)-x}d\xi.\end{aligned}$$

Ved lave substitutionen $\sigma = (1-z)\xi$ i ovenstående således, at $\xi = \frac{\sigma}{1-z}$ og $d\xi = \frac{1}{1-z}d\sigma$, så haves for en ny cirkel γ'

$$\frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i}\int_{\gamma'}\left(\frac{\sigma}{1-z}\right)^\alpha \frac{e^{-\sigma/(1-z)}}{\sigma-x}\frac{1}{1-z}d\sigma = \frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i(1-z)^{\alpha+1}}\int_{\gamma'}\frac{\sigma^\alpha e^{-\sigma/(1-z)}}{\sigma-x}d\sigma$$

Dermed haves det ved Cauchys integralformel, at

$$\frac{x^{-\alpha}e^x}{2\pi i(1-z)^{\alpha+1}}\int_{\gamma'}\frac{\sigma^\alpha e^{-\sigma/(1-z)}}{\sigma-x}d\sigma = \frac{x^{-\alpha}e^x}{(1-z)^{\alpha+1}}x^\alpha e^{-x/(1-z)} = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{\alpha+1}},$$

hvilket beviser ligning (2.12). □

Laguerrepolynomier er løsninger til den såkaldte Laguerreligning, som er differentialligningen udledt i den følgende sætning.

SÆTNING 2.10
Laguerrepolynomiet $L_n^\alpha(x)$ tilfredsstiller Laguerreligningen givet ved

$$(x^{\alpha+1}e^{-x}y')' + nx^\alpha e^{-x}y = 0 \tag{2.13}$$

BEVIS
Lad $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$. Dermed haves det, at

$$\begin{aligned}(x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x))' &= x^{\alpha+1}e^{-x}y_n''(x) + (\alpha+1)x^\alpha e^{-x}y_n'(x) - x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x) \\ &= x^\alpha e^{-x}\big(y_n''(x) + (\alpha+1)y_n'(x) - xy_n'(x)\big)\end{aligned}$$

Udtrykket foroven i parantesen er et n'tegradspolynomium med højeste-ordensleddet $-xy_n'(x)$, der er det samme som højeste-ordensleddet for $-ny_n(x)$ i ligning (2.11), som er $\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}$. Det vil sige, at

$$(x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x))' = x^\alpha e^{-x}\big(-ny_n(x) + P(x)\big), \tag{2.14}$$

hvor $P(x)$ er et polynomium bestående af de resterende lavere-ordensled. Polynomiet $P(x)$ må dermed være en linearkombination af Laguerrepolynomierne $y_k(x) = L_k^\alpha(x)$ for $k < n$. Ud fra ligning (2.14) så er $P(x) = ny_n(x) + \frac{(x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x))'}{x^\alpha e^{-x}}$. Dermed haves det, at

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[P(x)y_k(x)] &= n\mathcal{L}[y_n(x)y_k(x)] + \mathcal{L}\left[\left(\frac{(x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x))'}{x^\alpha e^{-x}}\right)y_k(x)\right] \\ &= 0 + \int_0^\infty (x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x))'y_k(x)dx,\end{aligned}$$

på grund af ortogonalitet mellem $y_n(x)$ og $y_k(x)$. Ved at bruge delvis integration to gange på integralet i ovenstående fås

$$\int_0^\infty (x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x))'y_k(x)dx = \int_0^\infty y_n(x)(x^{\alpha+1}e^{-x}y_k'(x))'dx,$$

hvor det noteres, at $\left[x^{\alpha+1}e^{-x}y_n'(x)y_k(x)\right]_0^\infty = 0$.

Eftersom udtrykket $(x^{\alpha+1}e^{-x}y_k'(x))'$ er et k'te-gradspolynomium med højeste-ordensled $-xy_k'(x)$, så er integralet, med $Q(x)$ som betegner k'te-gradspolynomiet,

$$\int_0^\infty y_n(x)Q(x)dx = 0.$$

Dermed er $\mathcal{L}[P(x)y_k(x)] = 0$ for alle $k < n$, hvilket betyder, at $P(x) = 0$, og ligning (2.13) opnås ud fra ligning (2.14). $\square$

Den foregående sætning medfører, at Laguerrepolynomierne $\{L_n^\alpha(x)\}$ er egenfunktioner for problemer på intervallet $[0,\infty]$ vedrørende differentialligningen på Sturm-Liouville form

$$\left(x^{\alpha+1}e^{-x}y'\right)' + \lambda x^\alpha e^{-x}y = 0.$$

I de tre afsnit i dette kapitel konkluderes det, at de forskellige klassiske ortogonale polynomier er løsninger til hver sin respektive anden-ordensdifferentialligning. Eftersom disse ortogonale polynomier er dannet ud fra de respektive Rodriguesformler, betyder det, at disse Rodriguesformler også må være løsninger til differentialligningerne. Dette belyses i det næste kapitel.

Rodriguesformlen 3

Dette kapitel bygger på [Horner, 1964].

I kapitel 2 blev det nævnt at de klassiske ortogonale polynomier, Legendre, Hermite og Laguerre, er løsninger til de tilhørende differentialligninger. Disse ortogonale polynomier dannes ud fra respektive Rodriguesformler, hvilket vil sige, at disse Rodriguesformler er løsninger til differentialligningerne. Dette kapitel belyser netop dette faktum.

For eksempel for Legendreligningen

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0,$$

findes der to løsninger, som er lineært uafhængige af hinanden, $n \in \mathbb{Z}_+$, hvor den ene er givet ved Rodriguesformlen for Legendrepolynomier,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

eftersom denne danner Legendrepolynomier, og

$$Q_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \int_x^\infty (v^2-1)^{-n-1}dv.$$

Hvis værdierne for n er arbitrære, så er en løsning til Legendreligningen givet ved et såkaldt Schläfli kurveintegrale

$$y(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}dt \tag{3.1}$$

om enhver kurve γ således, at der gælder for funktionen $(t^2-1)^{n+1}(t-z)^{-n-2}$ at $\int_\gamma (t^2-1)^{n+1}(t-z)^{-n-2}dz = 0$. Schläfli kurveintegralet (3.1) er blot Cauchys formel for afledede anvendt på Rodriguesformlen (2.1) fra afsnit 2.1 på side 17.

For at generalisere resultaterne til Rodriguesformler for andre følger af ortogonale polynomier introduceres den generelle anden-ordensdifferentialligning, som benyttes gennemgående i dette kapitel,

$$(Ax^2+Bx+C)y'' + (Dx+E)y' + Fy = R(x), \tag{3.2}$$

hvor A, B, C, D, E, F som konstanter hvorom der gælder at $|A|+|B|+|C| \neq 0$ og $|A|+|D| \neq 0$, for $x \in \mathbb{R}$. Derudover haves konstanten

$$W(x, x_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{G_1(t)}{G_2(t)}dt\right),$$

hvor $G_1(x) = Dx + E$ og $G_2(x) = Ax^2 + Bx + C$.

For at kunne opnå de kommende resultater vedrørende den generelle differentialligning (3.2) introduceres den karakteristiske ligning, hvis rødder i det følgende er vigtige i forbindelse med de generelle og partikulære løsninger til (3.2).

DEFINITION 3.1
Den karakteristiske ligning til differentialligningen (3.2) er andengradsligningen

$$At^2 + (A - D)t + F = 0 \tag{3.3}$$

Resultatet af følgende sætning siger, at enhver homogen anden-ordensdifferentialligning har to generelle løsninger, der er uafhængige af hinanden.

SÆTNING 3.2
Hvis $R(x) \equiv 0$ og ligning (3.3) har en rod $t \in \mathbb{Z}_+$ således, at $t = n$, så er de to løsninger for differentialligningen (3.2) givet ved

$$y_1 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[G_2(x)^n W(x, x_0)\Big]$$

og

$$y_2 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[G_2(x)^n W(x, x_0) \int_{x_1}^{x} \frac{H_{n-1}(t)}{G_2(t)^{n+1} W(t, x_0)} dt\Big],$$

hvor $H_{n-1}(t)$ er et vilkårligt $(n-1)$'te-gradspolynomium, og x_1 er et punkt således, at integralet eksisterer.

BEVIS
Betragt første-ordensdifferentialligningen givet ved

$$G_2(x)v' + \big(G_1(x) - nG_2'(x)\big)v = k_1 H_{n-1}(x),$$

hvor k_1 er en konstant og $H_{n-1}(x)$ et arbitrært polynomium.

Den generelle løsning for en lineær første-ordensdifferentialligning på formen $y' + P(x)y = Q(x)$ findes ved hjælp af panserformlen $y = \frac{1}{\mu}\int \mu Q(x)dx$, med integrationsfaktoren $\mu = e^{\int P(x)dx}$, jævnfør [Adams og Essex, 2010, s. 449]. Ved division af $G_2(x)$ i første-ordensdifferentialligningen haves den ønskede form

$$v' + \left(\frac{G_1(x) - nG_2'(x)}{G_2(x)}\right)v = \frac{k_1 H_{n-1}(x)}{G_2(x)},$$

hvilket giver, at $\frac{G_1(x)-nG_2'(x)}{G_2(x)} = P(x)$ og $\frac{k_1 H_{n-1}(x)}{G_2(x)} = Q(x)$. Dermed kan integrationsfaktoren indlende skrives som

$$\mu = \exp\left(\int \frac{G_1(x) - nG_2'(x)}{G_2(x)} dx\right) = \exp\left(\int \frac{G_1(x)}{G_2(x)} dx\right) \exp\left(-n \int \frac{G_2'(x)}{G_2(x)} dx\right).$$

Det første led er den inverse af konstanten $W(x, x_0)$, og funktionen i integralet i det andet led er $\big(\ln G_2(x)\big)'$. Hermed er integrationsfaktoren givet ved

$$\begin{aligned}\mu &= \exp\left(\int \frac{G_1(x)}{G_2(x)} dx\right) \exp\left(-n \int \frac{G_2'(x)}{G_2(x)} dx\right) = W(x, x_0)^{-1} \exp(-n \ln G_2(x)) \\ &= W(x, x_0)^{-1} G_2(x)^{-n}.\end{aligned}$$

Det betyder, at den generelle løsning for den givne første-ordensdifferentialligning er

$$\nu = G_2(x)^n W(x, x_0)\big(k_2 + \int_{x_1}^{x} \frac{k_1 H_{n-1}(t)}{G_2(t)^{n+1} W(t, x_0)} dt\big),$$

hvor k_2 også er en konstant.

Første-ordensdifferentialligningen differentieres nu n gange ved brug af Leibniz's generelle produktregel, som lyder $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Ved at differentiere de tre led hver for sig fås

$$\begin{aligned}
\big(G_2(x)\nu'\big)^{(n)} &= G_2(x)\nu^{(n+1)} + nG_2'(x)\nu^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} G_2''(x)\nu^{(n-1)},\\
\big(G_1(x)\nu\big)^{(n)} &= G_1(x)\nu^{(n)} + nG_1'(x)\nu^{(n-1)},\\
\big(nG_2'(x)\nu\big)^{(n)} &= nG_2'(x)\nu^{(n)} + n^2 G_2''(x)\nu^{(n-1)},
\end{aligned}$$

eftersom $G_2(x)$ forsvinder ved tre gange afledet, og $G_1(x)$ og $G_2'(x)$ forsvinder efter ved to gange afledet. Ved at sammensætte disse tre led i

$$\big(G_2(x)\nu'\big)^{(n)} + \big(G_1(x)\nu\big)^{(n)} - \big(nG_2'(x)\nu\big)^{(n)} = \big(k_1 H_{n-1}(x)\big)^{(n)},$$

og reducere på udtrykket opnås

$$G_2(x)\nu^{(n+1)} + G_1(x)\nu^{(n)} + \left(\frac{n(n-1)}{2} G_2''(x) + nG_1'(x) + n^2 G_2''(x)\right)\nu^{(n-1)} = 0.$$

Ved at udnytte den tidligere definition af $G_1(x)$ og $G_2(x)$ bliver parantesen i ovenstående til

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} G_2''(x) + nG_1'(x) + n^2 G_2''(x) &= An^2 - An + Dn - 2An^2\\
&= -An^2 - (A-D)n\\
&= -(An^2 + (A-D)n).
\end{aligned}$$

Indsættes dette i det foregående fås dermed

$$G_2(x)\nu^{(n+1)} + G_1(x)\nu^{(n)} - (An^2 + (A-D)n)\nu^{(n-1)} = 0.$$

Eftersom antagelsen er, at $R(x) \equiv 0$ og n er en rod for (3.3), så er ovenstående det samme som ligning (3.2) for $y = \nu^{(n-1)}$. Dermed er $\nu^{(n-1)}$ en løsning for ligning (3.2). For at opnå y_1 og y_2, lad $k_1 = 0$ og $k_2 = 1$ henholdsvis $k_1 = 1$ og $k_2 = 0$. □

I den følgende sætning vises den partikulære løsning til (3.2).

SÆTNING 3.3
Hvis den karakteristiske ligning (3.3) har en rod $t \in \mathbb{Z}_+$ således, at $t = n$, så, for $I_n(x) = \int_{a_n}^{x} \int_{a_{n-1}}^{\nu} \cdots \int_{a_1}^{\nu} R(\nu)(d\nu)^n$, hvor $a_1, \ldots, a_n$ er konstanter og $I_n^{(n)}(x) = R(x)$, er en partikulær løsning til ligning (3.2) givet ved

$$y_p = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G_2(x)^n W(x, x_0) \int_{x_1}^{x} \frac{I_n(t)}{G_2(t)^{n+1} W(t, x_0)} dt.$$

BEVIS
Beviset for den partikulære løsning til differentialligningen (3.2) er identisk med beviset for sætning 3.2 efter blot at erstatte $k_1 H_{n-1}(x)$ med $I_n(x)$ i den angivne første-ordensdifferentialligning.

Det vil sige, at første-ordensdifferentialligningen er nu givet ved

$$G_2(x)\nu' + \big(G_1(x) - nG_2'(x)\big)\nu = I_n(x),$$

og den generelle løsning er ud fra "panserformlen" givet ved

$$\nu = G_2(x)^n W(x,x_0)\int_{x_1}^{x} \frac{I_n(t)}{G_2(t)^{n+1}W(t,x_0)}dt.$$

Differentieres første-ordensdifferentialligningen n gange haves det ved Leibniz generelle produktregel, at

$$G_2(x)\nu^{(n+1)} + G_1(x)\nu^{(n)} - (An^2 + (A-D)n)\nu^{(n-1)} = R(x),$$

som med $y = \nu^{(n-1)}$ er præcis ligning (3.2).

Hvis grænserne $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, så er $I_n(x)$ givet ved

$$I_n(x) = \int_a^x \frac{(x-\nu)^{n-1}}{(n-1)!}R(\nu)d\nu$$

□

I modsætning til de to foregående sætninger, hvor rødderne i den karakteristiske ligning (3.3) er ikke-negative, arbejdes der i den kommende sætning med ikke-positive rødder for (3.3), og hvad det betyder for løsninger til (3.2).

SÆTNING 3.4
Hvis $n \in \mathbb{Z}_+$ således, at $t = -n$ er en rod for ligning (3.3), og hvis $R(x)$ fra (3.2) er af $C^{(n)}$, så kan enhver løsning til differentialligning (3.2) findes ud fra

$$y(x) = \int\int\cdots\int \frac{W(x,x_0)}{G_2(x)^n}\left(k + \int_{x_1}^{x}\frac{R^{(n)}(t)}{G_2(t)^{1-n}W(t,x_0)}dt\right)(dx)^{n+1}$$

for passende værdier af k, x_1 og de $n+1$ integrationskonstanter.

BEVIS
Lad y være enhver løsning til differentilligningen (3.2). Ved anvendelse af Leibniz generelle produktregel differentieres ligning (3.2) nu n gange således, at for hvert led

$$\begin{aligned}
\big(G_2(x)y''\big)^{(n)} &= G_2(x)y^{(n+2)} + nG_2'(x)y^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2}G_2''(x)y^{(n)},\\
\big(G_1(x)y'\big)^{(n)} &= G_1(x)y^{(n+1)} + nG_1'(x)y^{(n)},\\
\big(Fy\big)^{(n)} &= Fy^{(n)}.
\end{aligned}$$

Dermed haves ved definitionerne på $G_1(x)$ og $G_2(x)$, at

$$G_2(x)y^{(n+2)} + \big(G_1(x) + nG_2'(x)\big)y^{(n+1)} + \big(n(n-1)A + nD + F\big)y^{(n)} = R^{(n)}(x).$$

Eftersom $-n$ er en rod for den karakteristiske ligning (3.3), så er koefficienten til $y^{(n)}$ i ovenstående nul. Lad $y^{(n+1)} = \nu$, så haves differentialligningen

$$G_2(x)\nu' + \big(G_1(x) + nG_2'(x)\big)\nu = R^{(n)}(x),$$

hvis generelle løsning for $t = -n$ er givet ved jævnfør sætning 3.2

$$y^{(n+1)} = \nu = \frac{W(x,x_0)}{G_2(x)^n}\left(k + \int_{x_1}^{x}\frac{R^{(n)}(t)}{G_2(t)^{1-n}W(t,x_0)}dt\right)$$

for konstanter k, x_1 og x_0. Integreres der $n+1$ gange, opnås det ønskede resultat. □

I forbindelse med de foregående resultater blev der arbejdet med funktioner af reelle variabler, men de kan udvides med nødvendige restriktioner på integralerne til at inkludere funktioner af komplekse variabler. For eksempel er det nødvendigt, at integralet i $W(x, x_0)$ eksisterer, og at punktet x_0 ligger indenfor integrationsområdet.

I forhold til det følgende resultat antages det, at $W(x, x_0)$ er defineret med komplekse variabler. Schläflis integralløsning for Legendreligningen og den første løsning, y_1, i sætning 3.2 repræsenteret ved et kurveintegrale giver følgende resultat.

SÆTNING 3.5
Hvis $R(x) \equiv 0$, og r er en rod for den karakteristiske ligning (3.3), så for enhver kurve γ i det komplekse plan gælder det for funktionen $g(x,t) = G_2(t)^{r+1}(t-x)^{-r-1}W(t, x_0)$, at $\int_\gamma g(x,t)dx = 0$. Dermed er en løsning til differentialligningen (3.2) givet ved

$$y(x) = \int_\gamma \frac{G_2(t)^r}{(t-x)^r} W(t, x_0)dt$$

BEVIS
Ved at substituere $y(x) = \int_\gamma \frac{G_2(t)^r}{(t-x)^r} W(t, x_0)dt$ ind i differentialligningen (3.2) med $R(x) \equiv 0$ fås

$$G_2(x)y'' + G_1(x)y' + Fy = \int_\gamma G_2(t)^r (t-x)^{-r-2} W(t, x_0) V(x,t)dt,$$

hvor $V(x,t) = r(r+1)G_2(x) + rG_1(x)(t-x) + F(t-x)^2$. Ved at bruge definitioner på $G_1(x)$ og $G_2(x)$ og derefter omarrangere i $V(x,t)$ fås

$$\begin{aligned}
V(x,t) =& r(r+1)(Ax^2 + Bx + C) + r(Dx+E)(t-x) + F(t-x)^2 \\
=& r^2Ax^2 + rAx^2 + r^2Bx + rBx + r^2C + rC \\
&+ rDxt + rEt - rDx^2 - rEx + Ft^2 + Fx^2 - 2Ftx \\
=& x^2(Ar^2 + (A-D)r + F) + F(t^2 - 2xt) + r(r+1)(Bx+C) + rDtx + rE(t-x).
\end{aligned}$$

Koefficienten til x^2 er nul, eftersom r er en rod for den karakteristiske ligning (3.3). Fra ligning (3.3) haves det med , at $F = -Ar^2 - (A-D)r$, hvilket indsættes i $V(x,t)$;

$$\begin{aligned}
V(x,t) &= (-Ar^2 - (A-D)r)(t^2 - 2xt) + r(r+1)(Bx+C) + rDtx + rE(t-x) \\
&= -r\big((A(r+1) - D)(t^2 - 2xt) - (r+1)(Bx+C) - Dtx - E(t-x)\big)
\end{aligned}$$

Lægges $0 = (r+1)At^2 - (r+1)At^2 + (r+1)Bt - (r+1)Bt$ til udtrykket i parantesen foroven fås

$$\begin{aligned}
V(x,t) =& -r\big((A(r+1) - D)(t^2 - 2xt) - (r+1)(Bx+C) - Dtx - E(t-x) \\
&+ (r+1)At^2 - (r+1)At^2 + (r+1)Bt - (r+1)Bt\big) \\
=& -r\big(-(r+1)At^2 - (r+1)Bt - (r+1)C - Dt^2 + 2Dxt - Dxt - Et + Ex \\
&+ (r+1)At^2 - (r+1)2Axt - (r+1)Bx + (r+1)At^2 + (r+1)Bt\big) \\
=& -r\big(-(r+1)(At^2 + Bt + C) - (Dt+E)(t-x) + (r+1)(2At+B)(t-x)\big) \\
=& -r\big(-(r+1)G_2(x) - G_1(t)(t-x) + (r+1)G_2'(t)(t-x)\big).
\end{aligned}$$

Indsættes dette udtryk for $V(x,t)$ i kurveintegralet haves det, at

$$\begin{aligned}
&G_2(x)y'' + G_1(x)y' + Fy \\
&\quad = -r\int_\gamma G_2(t)^r(t-x)^{-r-2}W(t,x_0)\big(-(r+1)G_2(x) - G_1(t)(t-x) + (r+1)G_2'(t)(t-x)\big)dt \\
&\quad = -r\int_\gamma \Big[-(r+1)G_2(t)^{r+1}(t-x)^{-r-2}W(t,x_0) - G_1(t)G_2(t)^r(t-x)^{-r-1}W(t,x_0) \\
&\qquad + (r+1)G_2(t)^rG_2'(t)(t-x)^{-r-1}W(t,x_0)\Big]dt \\
&\quad = -r\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\big(G_2(t)^{r+1}(t-x)^{-r-1}W(t,x_0)\big)dt.
\end{aligned}$$

Da $\int_\gamma g(x,t)dt = 0$, så følger det hermed, at en løsning til differentialligning (3.2) er givet ved

$$y(x) = \int_\gamma \frac{G_2(t)^r}{(t-x)^r}W(t,x_0)dt.$$

□

Der er dermed givet forskellige løsninger for en generel anden-ordensdifferentialligning for forskellige scenarier for rødder til den den karakteristiske ligning.

Opsummering

Dette projekt har beskæftiget sig med ortogonale polynomier og deres Rodriguesformler. Formålet med projektet har været at belyse generel teori for ortogonale polynomier, samt resultater vedrørende klassiske ortogonale polynomier som Legendrepolynomier, Hermitepolynomier og Laguerrepolynomier.

I den generelle teori er de ortogonale polynomiers eksistens blevet bevist, og vigtige resultater for ortogonale polynomier og deres rekursionsformler der giver, at der findes en rekursionsformel for en følge af ortogonale polynomier, og at en rekursionsformel giver ortogonale polynomier. Derudover vises der, hvor rødderne for ortogonale polynomier eksisterer, og hvorledes rødder for polynomier af forskellig grad ligger i forhold til hinanden.

Resultaterne for de klassiske ortogonale polynomier inkluderer, hvilke værdier $\mathcal{L}[P_n(x)^2]$ antager for de enkelte polynomier, samt deres frembringende funktion, der beskriver de ortogonale polynomier på en lukket form. Derudover vises det, at de klassiske ortogonale polynomier er løsninger for tilhørende differentialligninger. Dette betyder samtidig, at Rodriguesformlerne, som beskriver ortogonale polynomier, også er løsninger til differentialligninger.

Litteratur

Adams, R. A. og Essex, C. (2010). *Calculus - A Complete Course*. Number ISBN: 978-0-321-54928-0 in Handbook. Pearson.

Agarwal, R. P., Perera, K., og Pinelas, S. (2011). *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media.

Burden, R. L. og Faires, J. D. (2001). *Numerical analysis*, volume 7. Brooks/Cole.

Chihara, T. S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach.

Folland, G. B. (1992). *Fourier Analysis and its Applications*, volume 4. American Mathematical Soc.

Horner, J. M. (1964). Generalizations of the formulas of rodrigues and schlafli. *The American Mathematical Monthly*, 71(8):870–876.

Jensen, A. (2013). Notes on quadrature. Online. URL: `http://people.math.aau.dk/~matarne/13-FS/quadrature.pdf`.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*, volume 1. John Wiley & Sons.

Stoer, J. og Bulirsch, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*. Number ISBN: 0-387-90420-4. Springer-Verlag New York Inc.