AALBORG UNIVERSITET

Sammenligning imellem 2D og 3D betragtninger af en banedæmning

Britta Seidenkrantz Søndergaard

Afleveret: 08-06-2015

The School of Engineering and Science

Dette værk er trykt med Times New Roman 11pt

Layout og typografi af forfatter ved hjælp af LaTeX

AALBORG UNIVERSITY
STUDENT REPORT

The School of Engineering and Science
Study Board of Civil Engineering
Fibigerstræde 10, 9220 Aalborg Ø
Phone 96 35 80 80
Fax 98 14 25 55
http://www.bsn.aau.dk

Titel:

Sammenligning imellem 2D og 3D betragtninger af en banedæmning

Projekt:

Langt afgangsprojekt ved Master of Science in Structural and Civil Engineering

Projektperiode:

September 2014 - juni 2015

Deltager:

Britta Seidenkrantz Søndergaard

Vejleder:

Lars Vabbersgaard Andersen

Oplagstal: 5

Antal sider i rapporten: 80

Antal sider i bilag: 32

Afsluttet 08-06-2015

Synopsis:

Dette projekt omhandler numeriske betragtninger af banedæmninger i 2D og 3D. Hovedforålet er at opstille tendenser, som gœr det muligt at simplificere tidskrævende 3D analyser til ækvivalente 2D analyser.

Der er udført et *state of the art* for at redegœre for eksisterende studier vedrœrende betydningen af simplificeringen af tre- til todimensionelle betragtninger af banedæmninger. Dette omhandler blandt andet studier vedhœrende de betydningen af de geometriske variationer i tredje dimension.

Desuden er et todimensionelt lineær-elastisk FE-program opbygget i MATLAB, som kan anvendes til bestemmelse af influenslængden. Dette Fe-program beskriver lastfordelingen i den tredje dimension vinkelret på dæmningstværsnittet og tager desuden hœjde for den trykspredning, som forekommer i dæmningen. Fe-programmet anvendes sammen med de kommercielle FE-programmer PLAXIS 2D og 3D til at opstille en tendens for influenslængden i anvendelsesgrænsetilstanden ved at sammenligne de maksimale flytninger i 2D og 3D.

I brudgrænsetilstanden viste det sig at være sværere at beskrive en tendens for influenslængden, da bestemmelsen af den præcise brudlast i PLAXIS var problematisk. Dette skyldes måden hvorpå brudlasten beregnes i PLAXIS, hvilket besværliggjorde en direkte sammenligning mellem brudlasterne i 2D og 3D.

Abstract

This master of science project considers 2D and 3D representations of railway embankments with a focus on constituting relationships that make it possible to simplify the computationally expensive 3D cases into equivalent 2D cases. As a result the problem formulation is stated as:

- *Which studies have so far been carried out concerning the simplification from 3D to 2D representations of railway embankments?*
- *How can 3D representations of a loaded railway embankment be simplified to equivalent 2D representations based on numerically determined lengths of influence in the service limit state and ultimate limit state?*

A state of the art survey has been carried out to investigate existing studies within the field. From the survey it was seen that the safety factor in 3D is generally larger than the safety factor of a corresponding 2D case. The influence of geometric variations in the third dimension have also been investigated for turns and corners and these effects generally amplify the difference between the safety factors. Other studies also consider the influence of the height and the width of the embankment.

In order to simplify the 3D states to equivalent 2D states a 2D linear elastic finite element program has been developed in MATLAB. A model was set up in the MATLAB program to determine the load distribution in the direction perpendicular to the cross-section plane of the embankment. Based on the MATLAB-model and models created in the commercial FE programs PLAXIS 2D and 3D it was possible to establish correlations between the length of influence for two load cases in the service limit state. In the first load case a single load of 250 kN was applied on each rail while 4 loads of the same size were applied on each rail in the second load case. Furthermore, it was verified that superposition principles were applicable to determine the corresponding deformations arising from other load cases than the two specific load cases considered.

In the same way it was sought to establish a correlation in the ultimate limit state. However, it was not possible to obtain satisfactory results of the ultimate load in PLAXIS 3D due to the way that these loads are determined in PLAXIS. Consequently, it is necessary to determine the ultimate load in a different manner to obtain reliable results of the ultimate loads but this lies within a future study.

Forord

Denne rapport er et kandidatspeciale udarbejdet i et samarbejde imellem COWI og Aalborg Universitet, Institut for Byggeri og Anlæg. Mere specifikt er det Carsten Steen Sørensen, som har introduceret projektets forfatter til den overordnede problemstilling, hvorefter den geotekniske del af afdelingen *Jernbaner, veje og lufthavne*, COWI A/S Aalborg, har vejledt projektets forfatter efter behov. Projektets hovedvejleder er Lars Vabbersgaard Andersen ved Aalborg Universitet, som igennem hele forløbet har ydet den primære vejledning samt assistance.

Titlen på projektet er *Sammenligning imellem 2D og 3D betragtninger af en banedæmning*. Projektets forløb har strukket sig over tidsperioden primo september til primo juni 2015.

På den vedlagte CD findes rapporten, den i projektet udarbejdede finite-element kode i MATLAB (Matrix Laboratory), de udarbejdede modeller i PLAXIS 2D AE samt PLAXIS 3D 2013 og endeligt de resultater fra PLAXIS, som ikke er angivet i selve rapporten eller tilhørende bilag.

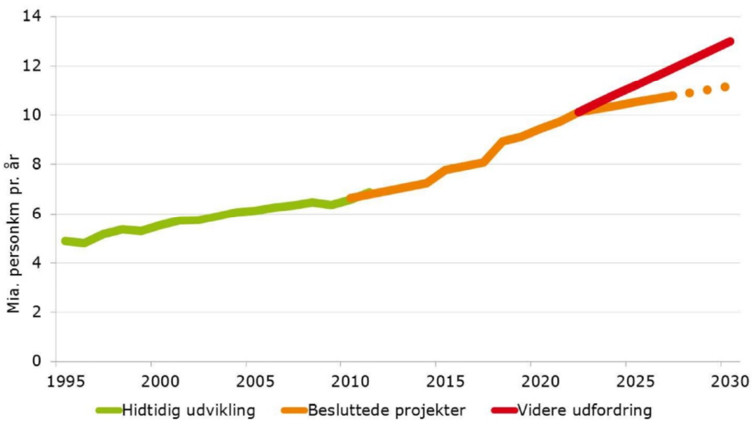
Britta Seidenkrantz Søndergaard

Indholdsfortegnelse

1 Introduktion

I Danmark er der 2636 km jernbane [Danmarks Statistik, 2014], hvoraf Banedanmark er ansvarlig for 2095 km, 21 km er metro, som forvaltes af Metroselskabet, og de resterende 520 km er forvaltet af de regionale trafikselskaber. Udbredelsen af jernbanen i Danmark tog for alvor fart omkring år 1850 [Den Store Danske, 2013], hvor den nuværende jernbane blev etableret i løbet af de næste 50 år [Østergaard Ingeniøren, 2010]. I 1920'erne toppede jernbanens succes set i forhold til jernbanekilometer, hvorefter mange banestrækninger efterhånden blev nedlagt i takt med motoriseringen af samfundet, faldende behov for især privatbaner samt nedslidning af banestrækninger uden ønske om modernisering [Danske Jernbaner, 2008]. Klimaks på nedlæggelsen af jernbaner forekom i årene 1960 – 1970, hvor adskillige små lokalbanestationer blev lukket [Hansen, 1996]. Hovedårsagen hertil var den stigende konkurrence fra personbiler, busser og lastbiler.

I dag udvides jernbanen igen som resultat af folketingets vedtagelse af aftalen "En grøn transportpolitik", som blev vedtaget i januar 2009 [En grøn transportpolitik, 2009]. Målsætningen i denne aftale er blandt andet, at den kollektive trafik skal være den primære bidrager til den fremtidige trafikvækst, hvilket vil være med til at sænke transportsektorens udledning af CO_2 [Trafikstyrelsen, 2013,s. 7]. Sidenhen er målsætningen blevet omsat til, at den danske befolkning skal køre dobbelt så meget i tog i år 2030 sammenlignet med år 2009, hvilket er skitseret på figur 1.1.

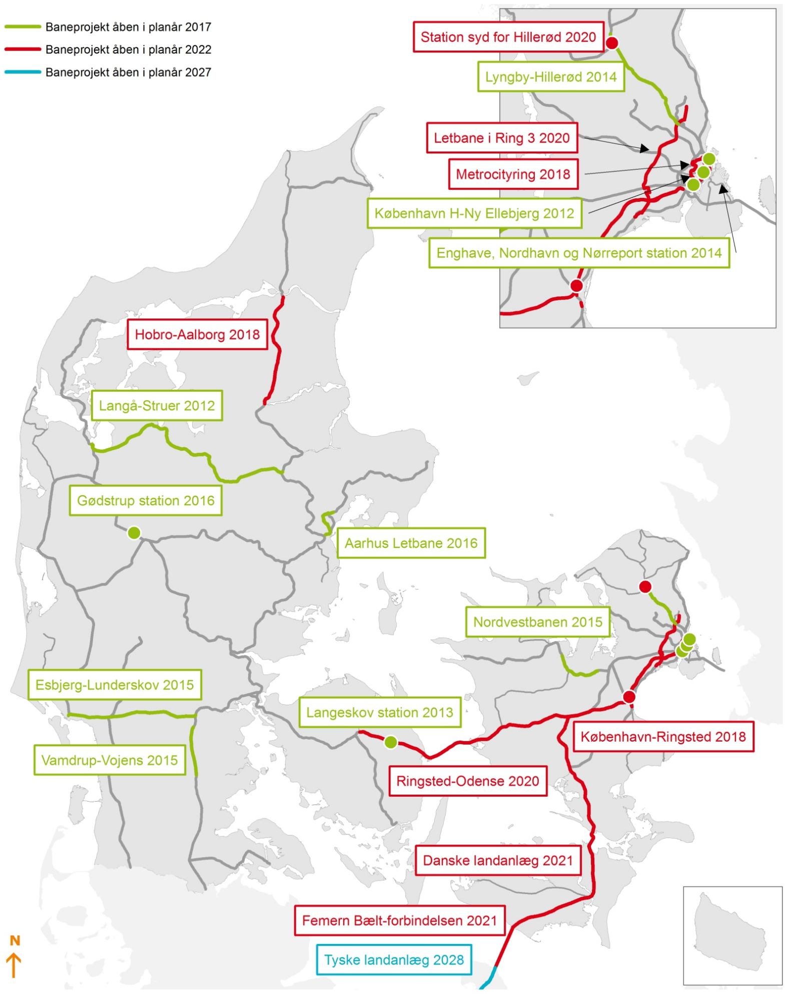


Figur 1.1: Den fremtidige målsætning for passagertrafikken på de danske jernbaner [Trafikstyrelsen, 2013,figur 1 s. 8].

I forbindelse med dette mål er den såkaldte "timemodel" blandt andet formuleret, som foreskriver, at transporttiden imellem de største danske byer skal reduceres til en time [Trafikstyrelsen, 2013]. For at opfylde dette krav opgraderes en række jernbanestrækninger således, at togenes hastighed kan forøges til 250 km/t på nogle strækninger [Trafikstyrelsen, 2013,s. 35], og desuden udvides jernbanenettet. En illustration af timemodellen fremgår på figur 1.2.

Udover projekterne i tilknytning til "timemodellen" er en række andre baneprojekter planlagt i målet om at fordoble personkilometerne på jernbanestrækningerne i år 2030. Nogle af disse projekter fremgår på figur 1.3.

Figur 1.2: Timemodellen som indebærer, at transporttiden mellem de største byer reduceres til en time. Dette drejer sig om stækningerne København-Odense, Odense-Aarhus og Aarhus-Aalborg. En videre udbredelse mod Esbjerg og Herning er tilmed fremtidige mål [Trafikstyrelsen, 2013,figur 2 s. 9].



Figur 1.3: Besluttede baneprojekter i forbindelse med målsætningen om en fordobling af personkilometerne på jernbanestrækningerne i år 2030 [Trafikstyrelsen, 2013,figur 16 side 32].

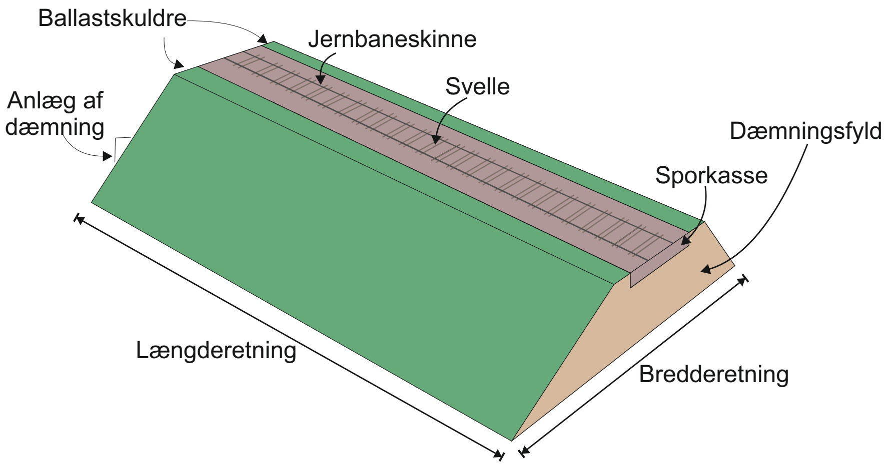
Ud fra ovenstående fremgår det tydeligt, at jernbanen igen har fået stor betydning i Danmark, og det vil have samfundsmæssige konsekvenser, hvis der er problemer med banekonstruktionerne således, at dele af togtrafikken er ude af drift. I den forbindelse spiller banedæmningers evne til at modstå den belastning, som påføres, en meget stor rolle, hvilket netop er den type banekonstruktion, som er i fokus i nærværende projekt. På figur 1.4 er en banedæmning afbilledet.

Figur 1.4: Et tog kører på banedæmningen på strækningen imellem Valby og Hvidovre [Banedanmark, 2011,side 5].

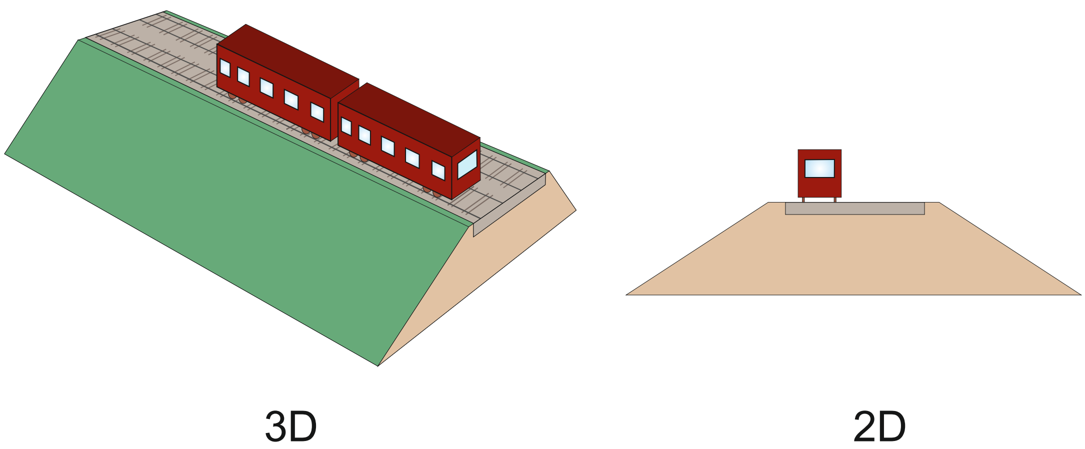
De geotekniske overvejelser i forbindelse med dimensionering af banedæmninger foretages oftest ud fra en forsimplet todimensionel situation frem for den mere komplekse og virkelige tredimensionelle situation. Her er det især det økonomiske perspektiv, som spiller en afgørende rolle, idet en todimensionel problemstilling er mindre tidskrævende samt beregningstung end den tilsvarende tredimensionelle situation. Dog har det også stor betydning, at den grundlæggende geotekniske lære generelt er beskrevet i to dimensioner [Ovesen et al., 2009], hvorfor det er lettere at trække paralleller mellem teori og praksis i den forsimplede tilstand. Da det tredimensionelle problem reduceres til et todimensionelt problem ved simplificerende antagelser, vil præcisionen af analyseresultaterne afhænge stærkt af sammenhængen mellem antagelser og virkelighed.

I tilfælde, hvor geometrien er kompleks, kan tredimensionelle analyser være nødvendig, fordi det er vanskeligt at udvælge et repræsentativt todimensionelt tværsnit at analysere. Et sådan tilfælde kan eksempelvis være, at anlægget på banedæmningen varierer betragteligt langs banen. Samme situation forekommer tilmed ved en betydelig variation i grundvandsspejlets niveau i længderetningen. For at undgå forvirring er længderetningen og bredderetningen defineret på figur 1.5, hvilket er betegnelser gældende for hele rapporten. Tredimensionelle analyser er også mere retvisende end den forsimplede analyse i situationer, hvor materialeegenskaberne for jorden er stærkt inhomogene eller anisotropiske. Generelt er det ingeniøren selv, der må afgøre, hvornår det er forsvarligt at foretage antagelser og lave forsimplede analyser, og det kan være svært af afgøre, hvilken betydning det har på resultatets pålidelighed.

Ved en todimensionel analyse af en banedæmning antages plan-tøjning at være gældende for situationen, hvormed dæmningen antages at have en uendelig længde med en ensartet fordeling af lasterne langs jernbanen. Endeligt skal materialeegenskaberne være homogene i længderetningen. Dermed kan det illustrativt siges, at den todimensionelle analyse betragter et "tværsnit", hvorfor afrundinger i geometrien og andre effekter ved "enderne"af banedæmningen negligeres. Disse ende-effekter er en betydelig forskel imellem den to- og tredimensionelle analyse. En illustration af simplificeringen af en tredimensionel situation til en todimensionel situation fremgår på figur 1.6.



Figur 1.5: Definition af længderetning og bredderetning på en banedæmning. De øvrige definitioner stammer fra [Banedanmark, 2014].



Figur 1.6: Simplificering af en tredimensionel situation til en todimensionel situation.

Lastpåvirkningen fra toget overføres til skinnerne gennem hjulene, hvorefter lasten fordeles ud på svellerne og derfra videre ned i dæmningen. Området som lasten fordeles over, afhænger både af stivheden og styrken af skinnerne, svellerne samt dæmningsfyldet. Områdets udstrækning omtales her som influenslængden. I forbindelse med simplificeringen af den tredimensionelle situation til en todimensionel situation opstår en problematik, hvad angår længden af denne lastpåvirkning, idet det kun er tværsnittet af banedæmningen, der forekommer i den simplificerede tilstand. I forbindelse med den fortstående revision af banenormen BN1-59-4 [Banedanmark, 2010b] er netop influenslængden omdiskuteret, idet der ikke er enighed om, hvorvidt den nuværende linjelast, som skal anvendes ved den todimensionelle dimensionering af banedæmninger er passende eller for konservativ. Banenorm BN1-59-4 foreskiver i nuværende udgave ikke direkte, hvilken influenslængde, som er anvendt ved fastsættelse af linjelasten, hvilket ønskes angivet i den kommende revision af denne banenorm.

2 Projektbeskrivelse

I dette kapitel specificeres projektets overordnede mål. Specifikationen indeholder en problemformulering samt en projektafgrænsning. Problemformuleringen er en præsentation af hovedproblemstillingen, som forsøges besvaret i projektet. Denne er uddybet og afgrænset i projektafgrænsningen for at sikre et fokus på de vigtigste områder i problemformuleringen, som kan undersøges indenfor projektets tidsramme.

2.1 Problemformulering

Med afsæt i introduktionen til problemstillingerne beskrevet i kapitel 1 vil dette projekt beskæftige sig med problematikkerne vedrørende simplificering af tredimensionelle analyser til todimensionelle analyser af banedæmninger. I den forbindelse opstilles følgende spørgsmål, som ønskes besvaret i projektet:

- *Hvilke studier er der hidtil udført vedrørende konsekvenserne af forsimplingen fra 3D til 2D betragtninger af banedæmninger?*
- *Hvordan forsimples 3D betragtninger af en lastpåvirket banedæmning til ækvivalente 2D betragtninger ud fra numerisk beregnede influenslængder i anvendelses- og brudgrænsetilstanden?*

2.2 Projektafgrænsning

For at klarlægge, hvilke studier, der hidtil er udført vedrørende betydningen af den simplificering, som finder sted, når en tredimensionel analyse af en banedæmning simplificeres til en todimensionel analyse, laves et *state of the art*. I dette behandles både analyser vedrørende betydningen af de geometriske variationer i tredje dimension som omtalt i introduktionen, studier omkring betydningen af lastpåvirkningen i tredje dimension samt studier omkring dannelsen af en sammenhæng imellem to- og tredimensionelle analyser. Det primære fokus lægges på studierne, der er foretaget i forbindelse med skråningsstabilitet, idet en skråning er halvdelen af en symmetrisk dæmning, og studierne for skråningerne er langt flere end dem for dæmninger.

For at besvare problemformuleringens anden del vil der blive foretaget numeriske analyser i både 2D og 3D. Analyserne vil blive baseret på modeller opstillet i MATLAB og PLAXIS 2D og 3D, hvor modellen i MATLAB skal baseres på 2D FE-kode skrevet af forfatteren.

I de numeriske analyser anvendes dæmningsgeometrien for nyanlæg angivet i [Banedanmark, 2014] for en dæmning med et spor, og modellerne baseres på fire forskellige jordtyper med forskellige materialeparametre.

3 State of the art

Problematikken vedrørende forskelle og ligheder mellem to- og tredimensionelle analyser for skråningsstabilitet har været studeret siden 1960'erne [Ducan, 1996, tabel 3] [Albataineh, 2006, s. 94], og omfanget af litteratur omkring dette emne er omfattende. I det nærværende kapitel belyses de fremtrædende hovedpunkter for en vis andel af litteraturen, med henblik på at klarlægge, hvilke for projektet relevante analyser som indtil dagsdato er udført. Resultaterne fra disse analyser anvendes til at beskrive forholdet mellem to- og tre dimensioner samt til fastlæggelse af, hvilke områder der bør undersøges yderligere.

Sikkerhedsfaktoren, som er defineret ved udtryk (3.1), er et generelt anvendt mål for sikkerhedsmarginen for skråningsstabilitet [Michalowski, 2010, s. 1] [Cornforth, 2005, s. 220], hvorfor det naturligt er anvendt som et sammenligningsgrundlag mellem 2D og 3D analyser.

$$\mathrm{F} = \frac{\text{Stabiliserende kræfter (eller momenter)}}{\text{Drivende kræfter (eller momenter)}} \tag{3.1}$$

Talrige kilder konkluderer, at sikkerhedsfaktoren opnået ved en 3D analyse er højere end den opnået ved en tilsvarende 2D analyse [Cornforth, 2005, s. 214] [Michalowski, 2010, s. 583] [Ducan, 1996, s. 582][1], hvor [Cavounidis, 1987] i tillæg hertil argumenterer, at tilfælde, hvor det modsatte resultat forekommer, enten skyldes simplificerende antagelser, som undlader vigtige karakterer af problemet, eller sammenligning af uhensigtsmæssige faktorer.

At sikkerhedsfaktoren opnået ved en 3D analyse er højere end den opnået ved en tilsvarende 2D analyse stemmer fint overens med, at kræfter og momenter opnået i [Qureshi et al., 2012] er mindre ved de i denne artikel udførte 3D analyser sammenlignet med 2D analyserne. På samme måde opnås mindre sætninger samt kræfter i 3D analysen sammenlignet med 2D analysen i [Ryltenius, 2011], og henholdsvis mindre kræfter og spændinger i 3D modellen sammenlignet med 2D modellen i [Ücer, 2006] og [Leung et al., 2006].

Imidlertid er ovenstående konklusion meget generel, og betydningen af forskellige faktorer på forholdet mellem 2D og 3D ønskes belyst. De fremtrædende problemstillinger med hensyn til dette forhold findes naturligt i geometrien af den tredje dimension. Dette indebærer først og fremmest længden af skåningen set i forhold til højden heraf, og en essentiel problemstilling er, hvordan størrelsen af dette forhold påvirker forskellen mellem resultaterne fra en 3D og en 2D analyse. Denne problemstilling behandles blandt andet i [Zhang et al., 2011] og [Michalowski, 2010]. Andre problemstillinger er indflydelsen af en krum skråningsoverflade, drejninger af skråningen, hjørner i skråningsgeometrien samt en kombination af disse 3 faktorer. Her er det interessant, om

[1] [Ducan, 1996, s. 582] baserer sin konklusion på mange forskellige analytiske analyser, hvor nogle af analyserne inkluderer en eller flere af følgende faktorer: (1) Last på et afgrænset areal i den tredje dimension, (2) Den potentielle brudmekanisme er begrænset grundet skråningens fysiske rammer, (3) Krumninger eller hjørner i 3. dimension. Dog angiver [Ducan, 1996] ikke omfanget af det belastede areal samt graden af krumning og hjørnets drejning. Desuden modbeviser [Ducan, 1996] analyser, der viser, at sikkerhedsfaktoren opnået ved en 3D analyse er mindre end den opnået ved en tilsvarende 2D analyse med argumenterne omkring analysemetodernes unøjagtighed angivet i [Ducan og Wright, 1980].

forskellen mellem 2D og 3D bliver større eller mindre ved inkludering af disse geometrier, samt i hvilket omfang graden af krumning og drejninger påvirker denne forskel. Disse problemstillinger belyses blandt andet i [Zhang et al., 2013], [Gens et al., 1988], [Leshchinsky et al., 1992], [Albataineh, 2006] og [Leshchinsky og Backer, 1986].

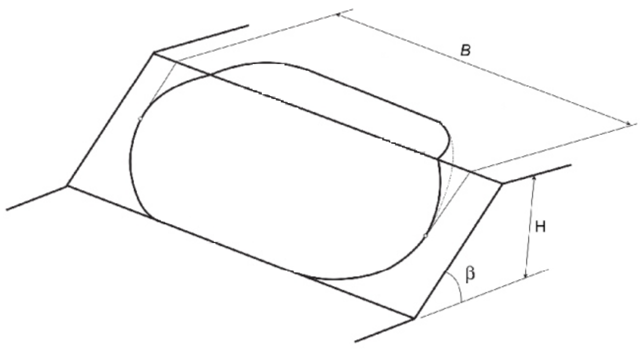
Når en last påføres på et afgrænset areal i skråningens længderetning, kan denne belastning angives som en punktlast i det plane tilfælde, hvilket fejlagtigt vil svare til en jævnt fordelt linjelast i 3D tilfældet. Hvordan denne afgrænsede belastning i tredje dimension bliver fordelt i de underliggende jordlag må have en betydning på forskellen mellem 2D og 3D analyserne, hvor en last, der bliver fordelt jævn i jorden herunder, må minde om en todimensionel situation. Derfor er betydningen af lastens samt det afgrænsede areals størrelse en væsentlig problemstilling i 2D-3D problematikken. Denne problematik belyses eksempelvis i [Mansikkamäki og Länsivaara, 2012], [Zhang et al., 2011] samt [Michalowski, 2010].

Idet en tredimensionel analyse oftest er mere ressourcekrævende end den tilsvarende 2D analyse, vil det være belejligt, hvis en ækvivalent 2D analyse kan etableres således, at resultaterne i denne analyse ligger tæt op ad dem opnået ved 3D analysen. På hvilken baggrund og hvordan denne ækvivalens skal etableres er en essentiel problemstilling og [Rujikiatkamjorn et al., 2008] samt [Papadimitriou et al., 2006] behandler dette.

De af ovennævnte artikler, som er bedst beskrivende og findes mest relevante for projektet, uddybes og kommenteres yderligere i de følgende afsnit. Som angivet ovenfor er sikkerhedsfaktoren et generelt mål for forskellen mellem 2D og 3D analyser, hvorfor det også er anvendt som sammenligningsgrundlag i de fleste af artiklerne nedenfor.

3.1 Bredde/højde-forholdets betydning på sikkerhedsfaktoren

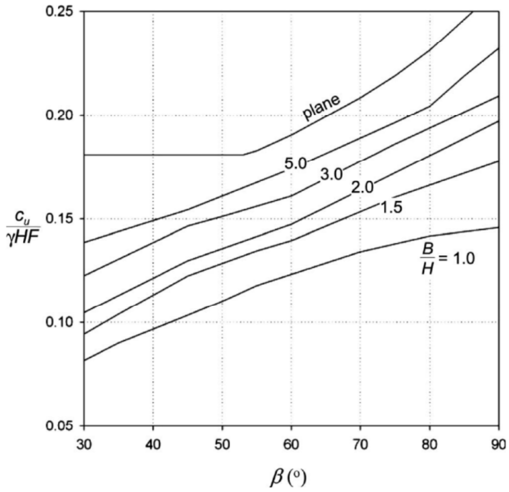
Forskellen mellem 2D og 3D er som bekendt den tredje dimension, hvilket for en dæmning er længderetningen og dermed bredden af brudmekanismen, som er illustreret på figur 3.1 samt figur 1.5. Hvordan bredde/højde-forholdet for skråningens brudmekanisme påvirker forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D belyses i [Zhang et al., 2011] og [Michalowski, 2010, s. 587]. Forfatterne heraf har etableret diagrammer, hvoraf sikkerhedsfaktoren kan estimeres ved hjælp af information omkring jordens rumvægt og styrkeegenskaber, skråningens hældning samt bredde/højde-forholdet for brudmekanismen.



Figur 3.1: Illustration af brudmekanismens bredde i dæmningens længderetning [Michalowski, 2010, figur 5].

Diagrammet for det udrænende tilfælde fremgår alene i [Michalowski, 2010] og er gengivet på figur 3.2. På figuren betragtes forskellige B/H-forhold, for hvilke $c_u/\gamma HF$ er plottet versus skråningens hældningsvinkel, β. Her er $c_u/\gamma H$ stabilitetsfaktoren, som er den inverse kritiske højde. Relationen mellem den dimensionsløse kritiske højde og sikkerhedsfaktoren findes i bilag A.1.1 på side 81.

På figur 3.2 aflæses $c_u/\gamma HF$ ud fra den kendte skråningsgeometri (B/H og β). Herefter kan F isoleres af den aflæste størrelse. Den øverste linje i diagrammet angiver brudmekanismen for plan-tøjning, hvilket vil sige $B/H \to \infty$, og den vandrette del af linjen hænger sammen med at mekanismen her er stigende til meget stor dybde [Michalowski, 2010].



Figur 3.2: 3D udrænet skråningsstabilitetsdiagram, hvor $c_u/\gamma HF$ er plottet versus skråningens hældningsvinkel, β, for forskellige B/H-forhold. Ud fra dette diagram kan sikkerhedsfaktoren, F, bestemmes [Michalowski, 2010, figur 8].

På figur A.1 på side 83, A.2 på side 84 og A.3 på side 84 findes tilsvarende diagrammer for det drænede tilfælde fra [Michalowski, 2010], hvor forskellige B/H-forhold betragtes. For disse forhold er $F/tan\phi$ plottet versus $c/\gamma Htan\phi$. Skråningsgradienterne 30°, 45°, 60°, 75° og 90° er her repræsenteret ved hvert sit diagram. Disse diagrammer stemmer overens med diagrammerne angivet i [Zhang et al., 2011].

Som det fremgår på figur 3.2, A.1, A.2 og A.3, nærmer 3D sikkerhedsfaktoren sig den for 2D, når forholdet B/H stiger. Den vertikale forskel mellem linjerne i diagrammerne er et mål for forskellen i sikkerhedsfaktoren. Når eksempelvis B/H er 1 kan forskellen være over 50%. Dette illustrerer B/H-forholdets betydning på forskellen mellem 2D og 3D, og det fremgår, at jo mindre B/H er, jo mere dominerende er 3D effekterne: En lang skråning med $B \to \infty$ er et plant tilfælde, og en kort skråning med $B \to 0$ er et 3D tilfælde. Ud fra diagrammerne kan det derfor vurderes, hvorvidt det vil være acceptabelt at anvende en 2D analyse frem for en 3D analyse på baggrund af brudmekanismen. Eksempelvis kan det være for konservativt, hvis forskellen er for stor.

3.2 Lastpåførelsens indvirkning på sikkerhedsfaktoren i 3D

Indvirkningen på sikkerhedsfaktoren ved en lastpåførelse i den tredje dimension er af højeste relevans for projektet, idet et hjulsæts lastpåvirkning på skinnerne netop er en kraftpåvirkning i tredje dimension. Dette fremgik blandt andet på figur 1.6 på side 4. En punktplast i den todimensionelle situation vil svare til en linjelast i tredje dimension, hvor en linjelast i den todimensionelle modellering vil svare til en fladelast i den tredimensionelle modellering. Dette skyldes netop, at den påsatte last i 2D vil blive gentaget for hver meter i den tredje dimension. Hvis eksempelvis en 3D punktlast, P [N], skal repræsenteres i 2D, kan dette gøres ved en punktlast i 2D. Imidlertid vil en punktlast i 2D blive gentaget for hver meter i 3D således, at den todimensionelle punktlast automatisk svarer til en linje last, P [N/m], i 3D. Dette vil formentlig resulterer i et stærk konservativt design. I [Zhang et al., 2011] belyses det, hvordan sikkerhedsfaktoren varierer med det belastede areals sidelængde, og i [Michalowski, 2010] findes en sammenligning af en 2D skråningsanalyse uden lastpåførelse og en 3D analyse med en last placeret på et afgrænset areal af toppen af skråningen. Lasten er fordelt på et kvadratisk areal, $a \times a$, med sidelængden $a = 0,5H$, hvor H er højden på skråningen. Idet [Michalowski, 2010] netop har fokus på 2D-3D problematikken behandles denne artikel i det følgende.

For almindelige skråningsstabilitetsanalyser er det ovenfor dokumenteret, at 2D analysen giver den mindste sikkerhedsfaktor, og er dermed det mest konservative tilfælde. Problemstillingen i henhold til lasten er derfor, hvor stor lasten skal være før, at sikkerhedsfaktoren for 3D analysen bliver mindre end den for 2D analysen, hvormed det bliver nødvendigt at foretage en 3D analyse, hvis det mest konservative tilfælde skal betragtes.

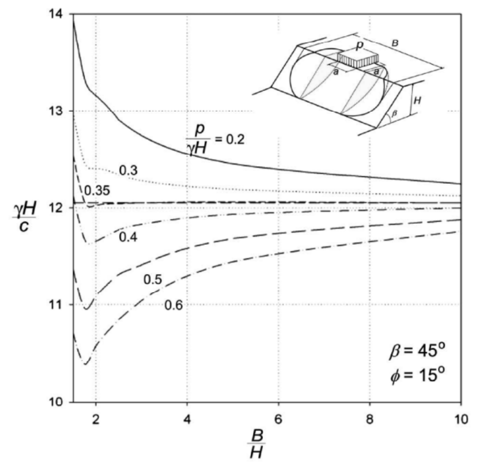
Resultaterne fra den i artiklen forekommende analyse med en friktionsvinkel $\phi = 15°$ og en skråningsgradient $\beta = 45°$ fremgår på figur 3.3, hvorpå den vandrette linje illustrer det plane tilfælde med den kritiske værdi $\gamma H/c = 12,052$. Førsteaksen på figur 3.3 angiver variationen i forholdet B/H, og andenaksen angiver sikkerhedsfaktoren, idet den dimensionsløse kritiske højde, $\gamma H/c$, også anvendes som et mål for sikkerheden. Dette er yderligere omtalt i bilag A.1.1 på side 81. På figur 3.3 findes lastens variation i forhold til de to størrelser angivet på akserne, hvormed sikkerhedsfaktorens variation i henhold til lasten og bredden af brudmekanismen på samme måde kan aflæses.

På figur 3.3 fremgår det, at en stigning i mekanismens bredde B vil medføre et fald i den kritiske højde, når lasten er forholdsvis lille, eksempelvis $p/\gamma H = 0,3$. Dette skyldes, at situationen går mod plan-tøjning, når bredden af mekanismen øges. Er lasten imidlertid høj, eksempelvis $p/\gamma H = 0,6$, falder den kritiske højde, når bredden falder. Derved fremgår lastens indvirkning på resultatet tydeligt, idet den kritiske højde burde stige i en situation uden lastpåvirkning.

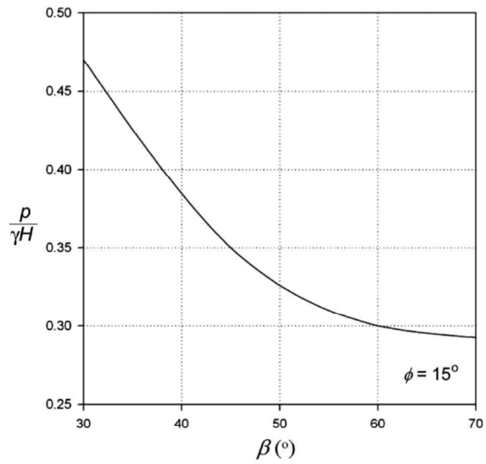
På figur 3.3 er det afbilledet, at når $p/\gamma H > 0,35$, er sikkerhedsfaktoren i 3D analysen mindre end sikkerhedsfaktoren i 2D analysen. Dette vil sige, at ved $p \geq 0,35\gamma H$ er en 3D analyse nødvendig for at opnå det mest konservative resultat. På figuren fremgår det desuden, at når $B/H = 1,75$ haves den lavest opnåelige kritiske højde.

På figur 3.4 findes variationen af den kritiske lasts størrelse versus skråningsgradientens størrelse. Denne figur afbilleder, at jo større lasten er, jo mindre kan skråningsvinklen være, hvilket er som forventet ift. en fysisk indgangsvinkel. Ved en skråningsgradient på mere end 45°, hvilket var skråningshældningen på diagrammet på figur 3.3, vil en 3D analyse derfor kræves før lasten opnår størrelsen $p = 0,35\gamma H$, hvis den mest kritiske situation fortsat skal belyses.

Diagrammerne på figur 3.2, A.1, A.2, A.3 samt 3.3 og 3.4 er dannet ud fra en 3D rotationsbrudmekanisme for skråningsstabilitet etableret af [Michalowski og Drescher, 2009]. Argumentet for anvendelsen af denne er baseret på konklusionen af [Chen, 1975], om at rotationsbrudmekanismer giver det mest kritiske tilfælde. Dette bemærkede [Chen, 1975] ved sine brudgrænseanalyser for 2D skråninger. Dog er der i dette litteraturstudie ikke fundet kilder, som beviser, at rotationsme-



Figur 3.3: 3D skråningsstabilitetsanalyse for en belastet skråning med $\beta = 45°$ og $\phi = 15°$, hvor lastens størrelse er angivet i henhold til B/H og $\gamma H/c_u$ [Michalowski, 2010, figur 13a].



Figur 3.4: 3D skråningsstabilitetsanalyse for jord med $\phi = 15°$. Lastens størrelse p fremgår i relation til skråningsgradienten β. [Michalowski, 2010, figur 13b].

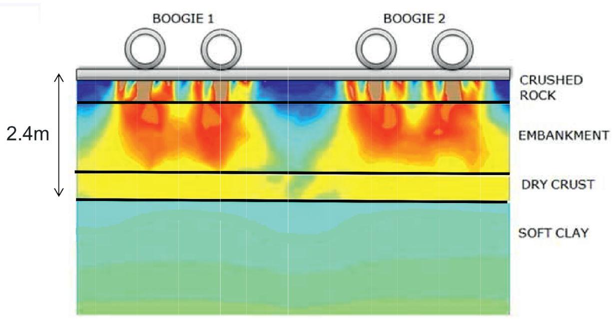
kanismen også giver den mest kritiske brudmekanisme i 3D analyser. Dette stiller spørgsmålet om, hvorvidt diagrammerne dannet af [Michalowski, 2010] giver sikkerhedsfaktoren for den mest kritiske brudmekanisme. Det vil derfor være interessant at belyse, hvorvidt disse resultater kan genskabes i tilfælde, hvor den kritiske brudmekanisme må findes blandt alle typer af mekanismer. Diagrammerne ovenfor giver imidlertid fortsat en god indikation af B/H-forholdets betydning på forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D, og tilmed en indikation af indvirkningen på samme fra en lastpåvirkning i tredje dimension.

3.3 Eksperiment på jernbanedæmning i fuld skala

Problematikken angående, hvordan en belastning virkende på et afgrænset areal fordeles i de underliggende jordlag og betydningen af dette på forskellen mellem 2D og 3D belyser [Mansikkamäki og Länsivaara, 2012]. Denne artikel omtaler et fuldskala jernbanedæmningseksperiment udført af det Tekniske Universitet i Tampere og det Finske Transport Agentur. Dæmningen blev bygget på blød marin ler og lasten blev øget gradvist, hvor brud blev opnået efter 2 dages stigende belastning.

I 2D analysen blev lasten fra toget antaget fordelt som en jævnt fordelt last over skinnen, hvor lasten i 3D analysen blev antaget fordelt ud på tre sveller. Herved blev aksellasten omregnet til tre jævnt fordelte laster, som hver har en udstrækning svarende til en svelle. Den vertikale spændingsfordeling opnået ved denne 3D analyse er afbilledet på figur 3.5, hvor det fremgår, at oven på den bløde aflejring er spændingerne næsten jævnt fordelt.

Dermed er forskellen mellem 2D og 3D situationen i denne analyse ikke stor, idet lasten bliver jævnt fordelt. Reduceres højden på dæmningen imidlertid, kan aksellasten medføre lokalt højere tryk på undergrunden. I dette tilfælde er forskellen melem 2D og 3D situationen større og hvis lastintensiteten på undergrunden ikke vurderes omhyggeligt i sådanne tilfælde, kan 2D analyser give upræcise resultater.



Figur 3.5: Den vertikale fordeling af de effektive spændinger under aksellasten i 3D modellen. Den grove jord over undergrunden er 2,4m tyk [Mansikkamäki og Länsivaara, 2012, figur 6].

Lasten, der medførte brud, blev beregnet til 88-100 kPa i 3D analysen og $80,5$ kPa i 2D analysen, hvorfor brudlasten er højst i 3D analysen. I forsøget blev brudlasten bestemt til 87 kPa, men dæmningen blev kun belastet i 2 dage, hvortil [Mansikkamäki og Länsivaara, 2012] angiver, at den korte belastningstid påvirker resultaterne, hvorfor en langtidsbrudlast vil være omkring 80 kPa eller mindre. Til sammenligning blev der ikke taget højde for den korte belastningstid i 3D analysen, hvorfor denne angiver en langtidsbrudlast. Dermed giver forsøget samt analyserne ikke et godt sammenligningsgrundlag, idet forsøget behandler korttidsbrudlasten og FEM-modellerne behandler langstidsbrudlasten.

Sikkerhedsfaktoren blev beregnet til 1,0 i 2D analysen og til en værdi mellem 1,05 og 1,13 i 3D analysen. Den opnåede sikkerhedsfaktor i 3D analysen er således større end den opnået i 2D analysen, hvilket er i god overensstemmelse med det i kapitlet ovenfor dokumenterede.

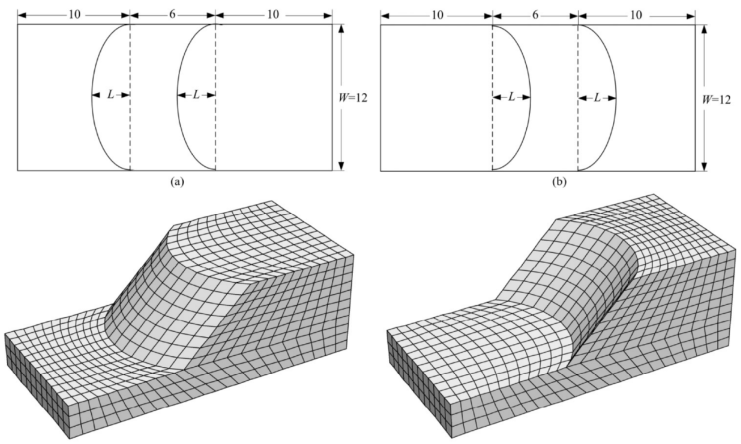
Længden på dæmningen, og dermed bredden på brudmekanismen, oplyses til 12 m, hvormed B/H-forholdet bliver $4,8$. Ud fra diagrammerne på figur 3.2, A.1 på side 83, A.2 på side 84 og A.3 på side 84 fremgår det, at dette næsten er et plant tilfælde og forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D ikke vil være betydeligt. Dermed stemmer konklusionen af [Mansikkamäki og Länsivaara, 2012] fint overens med den indikation diagrammerne af [Michalowski, 2010] angiver for forskellen mellem sikkerhedsfaktorerne i 2D og 3D.

Forskellen mellem 2D og 3D er ikke betydelig i den i artiklen omtalte analyse af en lastpåvirkning fra et hjulsæt på en banedæmning. Dog er dimensionerne for dæmningen, jordens egenskaber samt lasten fra hjulsættet fastholdt i analysen, hvorfor betydningen af en variation af disse parametre er interessant. Ovenfor blev det omtalt, at i tilfælde af en lavere dæmning, vil trykfordelingen ikke længere være jævnt fordelt og dermed minde om den for 2D. På samme måde må det ved en fysisk betragtning af situationen forventes, at trykfordelingen bliver mindre jævnt fordelt, hvis belastningen forøges. Imidlertid efterlader dette fortsat uvished omkring den betydning, som de forskellige jordegenskaber vil have på resultatet.

3.4 Den krumme skråningsoverflades betydning på sikkerhedsfaktoren

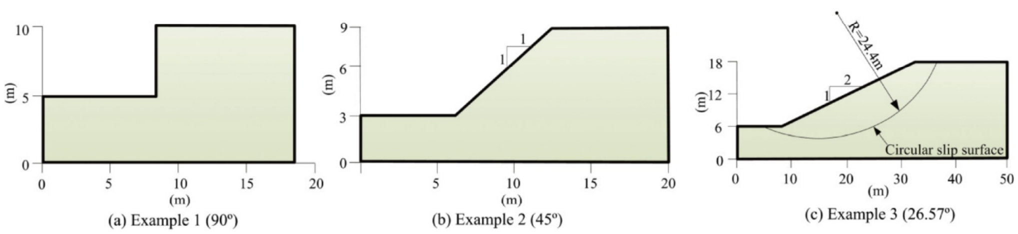
Som det understreges i [Michalowski, 2010], er anvendelsen af 2D analyser frem for en 3D analyser kun acceptabel, hvis B/H-forholdet af brudmekanismen er tilstrækkelig højt. Desuden må der ikke findes krumninger i geometrien af skråningen samt i formen af brudoverfladen således, at alle tværsnit vinkelret på det betragtede plan er ens. Tilmed må der ikke være hjørner på skråningens afslutninger. Idet størstedelen af de virkelige skråningstilfælde imidlertid har variation i geometrien i tredje dimension, er det nødvendigt at belyse, hvordan forholdet mellem 2D og 3D analyseresultaterne påvirkes af disse geometriske forhold. Artiklen [Zhang et al., 2013, s. 233] behandler problematikken vedrørende disse geometriske effekter ved at analysere flere typer geometrier under forskellige randbetingelser; glat-glat *SS*, ru-glat *RS* og ru-ru *RR*, og med forskellige hældningsgradienter; 90°, 45° og $26,57°$. En beskrivelse af sidefladernes randbetingelser findes i bilag A.2 på side 85. Det skal bemærkes, at der ikke er påført en last på skråningstilfældene betragtet i [Zhang et al., 2013].

[Zhang et al., 2013] belyser først og fremmest, hvilken effekt en krum skråningsoverflade har på sikkerhedsfaktoren, ved at betragte forskellige grader af konveks og konkav krumning af skråningsoverfladen. Dette fremgår på figur 3.6.



Figur 3.6: Konveks samt konkav kurvet skråningsoverfalder for eksempel 2 i henhold til figur 3.7 set ovenfra samt illustreret ved FEM-modeller [Zhang et al., 2013, Figur 4].

Graden af krumning måles ud fra forholdet mellem den maksimale konvekse eller konkave længde, L, til halvdelen af skråningens bredde, W, [Zhang et al., 2013]. Ved undersøgelsen af effekten af skråningsoverfladens krumning anvendes to typer randbetingelse; *glat-glat* og *ru-ru*, og tre forskellige eksempler på skråningens hældning betragtes. Disse tre eksempler på skråningsgradienten er angivet på figur 3.7. De opnåede sikkerhedsfaktorer er angivet i tabel 3.1. Forholdet mellem sikkerhedsfaktoren for skråningen med den krumme overflade og den for den oprindelige skråning med en overflade uden krumning er angivet ved DF i tabel 3.1.



Figur 3.7: De tre eksempler på hældningsgradient, som betragtes i artiklen [Zhang et al., 2013, Figur 2]. Det er skråningens tværsnit, som vises.

Tabel 3.1: $R_{cur} = L/(W/2)$, hvor W er bredden af 3D skråningen. Bredderne anvendt er 10m, 12m og 24m for henholdsvis eksempel 1, 2 og 3. $DF = (F - F_{ref})/F_{ref} \times 100\%$ hvor F_{ref} er sikkerhedsfakoren for den tilsvarende reference skråning uden krum overflade [Zhang et al., 2013, Tabel 4].

		Randbetingelsen *SS*						Randbetingelsen *RR*					
		Eksempel 1		Eksempel 2		Eksempel 3		Eksempel 1		Eksempel 2		Eksempel 3	
Krumning	R_{cur}	F	DF [%]	F	DF [%]	F	DF [%]	F	DF [%]	F	DF [%]	F	DF [%]
Konveks	4/6	1,61	2,55	1,91	2,14	2,18	1,40	1,64	-9,89	2,00	-6,54	2,41	-5,12
	3/6	1,61	2,55	1,91	2,14	2,17	0,93	1,67	-8,24	2,03	-5,14	2,46	-3,15
	2/6	1,61	2,55	1,89	1,07	2,16	0,47	1,70	-6,59	2,07	-3,27	2,49	-1,97
	1/6	1,60	1,91	1,88	0,53	2,15	0,00	1,74	-4,40	2,10	-1,87	2,53	-0,39
Reference	0	1,57	-	1,87	-	2,15	-	1,82	-	2,14	-	2,54	-
Konkav	1/6	1,57	0,00	1,87	0,00	2,15	0,00	1,91	4,95	2,17	1,40	2,60	2,36
	2/6	1,57	0,00	1,87	0,00	2,16	0,47	1,95	7,14	2,21	3,27	2,62	3,15
	3/6	1,57	0,00	1,88	0,53	2,17	0,93	2,00	9,89	2,23	4,21	2,65	4,33
	4/6	1,57	0,00	1,88	0,53	2,19	1,86	2,02	10,99	2,25	5,14	2,66	4,72

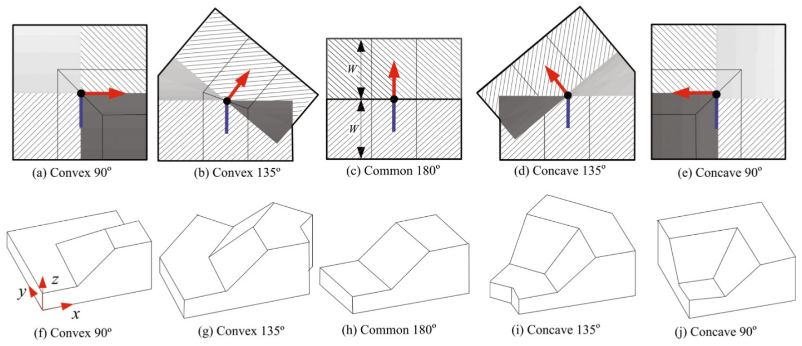
Ud fra tabel 3.1 fremgår det, at randbetingelsen har en betydning uanset krumning, hvilket afspejles i forskellen mellem resultaterne under *RR* og *SS*. Sikkerhedsfaktoren stiger med ændringen i krumningen under randbetingelsen *RR*, hvor stigningen går fra den største grad af konveksitet til den mest konkave skråningsoverflade. Forskellen er her mere end 10% i forhold til reference skråningen, hvor forskellen mellem referenceskråningsoverfalden og både den konvekse samt konkave skråningsoverflade under *SS* er mindre end 3%. Dog giver den konvekse skråningsoverflade en større sikkerhedsfaktor end referenceskråningen under *SS* randbetingelsen, hvor sikkerhedsfaktoren for den konvekse skråning under *RR* er mindre end den for referenceskråningen. På denne måde øges forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D under randbetingelsen *SS* samt for den konkave skråningsoverflade under randbetingelsen *RR*, hvor den falder under randbetingelsen *RR* for den konvekse skråningsoverflade.

Af tabel 3.1 fremgår tilmed, at effekten af krumningen påvirkes af skråningsgradienten, som er angivet ved de tre eksempler; jo stejlere skråningen er jo større er indflydelsen af krumningen. Dog er dette ikke tilfældet ved den konkave skråningsoverflade under *SS* randbetingelsen. Dermed øges forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D generelt med forøgelsen af skråningsgradienten.

3.5 Drejende skråningshjørners betydning på sikkerhedsfaktoren

I tilknytning til krumningen af skråningsoverfladen er effekten af skråningens ender og dermed skråningshjørners betydning tilmed essentiel. Endeeffekternes betydning i 3D behandles blandt andet i [Gens et al., 1988], [Leshchinsky et al., 1992], [Albataineh, 2006] og [Leshchinsky og Backer, 1986]. Problemstillingen belyses også i [Zhang et al., 2013], hvor indvirkningen på sikkerhedsfaktoren af hjørner med forskellige roterende retninger og vinkler belyses. [Zhang et al., 2013] behandles nedenfor, hvor både konveksitet og konkavitet betragtes, men i modsætning til studiet af krumme skråningsoverflader anvender [Zhang et al., 2013] alle tre typer randbetingelser (RR, RS og RR) til nærværende studie. Hvor vinklen er 180°, er der tale om en 3D referenceskråning uden hjørne.

De forskellige udformninger af hjørnerne og sikkerhedsfaktorerne samt *DF* fremgår på henholdsvis figur 3.8 og i tabel 3.2. Ud fra disse værdier fremgår det, at for den vertikale skråningsgradient, hvilket vil sige eksempel 1, falder sikkerhedsfaktoren, når den konvekse vinkel for hjørnet går fra 180° til 90°. Imidlertid er det præcis den modsatte situation for skråningsgradienterne 45° og $26,57°$, hvor sikkerhedsfaktoren stiger, når det konvekse hjørne falder fra 180° til 90°. Dette resultat er uanset randbetingelsen. Sikkerhedsfaktoren stiger når vinklen for hjørnet vokser



Figur 3.8: 3D skråninger med forskellige drejende hjørner. Øverst findes hjørnerne set ovenfra og nederst findes de dertil svarende 3D udformninger. De mørkegrå områder indikerer en skæring mellem to skråninger grundet rotation, hvor de lysegrå områder indikerer nygenererede områder [Zhang et al., 2013, figur 7].

fra 180° til 90° for de konkave hjørner. Dette er gældende for alle randbetingelser og samtlige skråningsgradienter. Sikkerhedsfaktoren stiger i gennemsnit dobbelt så meget ved de konkave hjørner sammenlignet med de konvekse hjørner.

Med hensyn til randbetingelsernes betydning fremgår det, at sikkerhedsfaktoren vokser fra *SS* til *RR* under hver enkelt drejende hjørnevinkel. Først i dette litteraturstudie blev det argumenteret for, at sikkerhedsfaktoren i 3D altid er større end den i 2D. Dog fremgår det, som nævnt ovenfor, at sikkerhedsfaktoren falder, når det konvekse hjørne drejer fra 180° til 90° i tilfælde af en 90° skråningsgradient, og at sikkerhedsfaktoren for de konveks-drejende skråningshjørner her er mindre end den for 3D referenceskråningen ved 180°. Idet tilfældet med en vinkel på 180° under *SS* randbetingelsen næsten kan betragtes som et 2D tilfælde, modsiger dette altså ovenstående konstatering vedrørende 3D/2D-forholdet.

Ud fra FEM-modeller finder [Zhang et al., 2013], at årsagen til, at sikkerhedsfaktoren er mindre ved de konvekse hjørner under 90° skråningsgradient end sikkerhedsfaktoren for referenceskråningen, er, at disse har en effekt, som bidrager til mulig svigt. Den modsatte stabiliserende effekt for mulig svigt findes i alle øvrige tilfælde; både konvekse og konkave. Dermed giver hjørnernes betydning på sikkerhedsfaktoren nye aspekter i 2D/3D problematikken, hvilket afspejler noget af ende-effekternes betydning.

Tabel 3.2: 3D skråningsstabilitet med forskellige drejende hjørner under de forskellige randbetingelser, hvor de tre eksempler på skråningsgradient betragtes [Zhang et al., 2013, Tabel 5].

	Drejende hjørne		Randbetingelse SS		Randbetingelse RS		Randbetingelse RR	
Eksempel	krumning	vinkel [°]	F	DF [%]	F	DF [%]	F	DF [%]
1	Konveks	90	1,53	-2,55	1,53	-3,77	1,55	-6,63
		135	1,56	-0,64	1,57	-1,26	1,61	-3,01
	Reference	180	1,57	-	1,59	-	1,66	-
	Konkav	135	1,65	5,10	1,66	4,40	1,78	7,23
		90	1,65	5,10	1,66	4,40	1,82	9,64
2	Konveks	90	1,89	3,85	1,93	3,21	2,08	6,12
		135	1,84	1,10	1,88	0,53	1,97	0,51
	Reference	180	1,82	-	1,87	-	1,96	-
	Konkav	135	1,94	6,60	1,96	4,81	2,13	8,67
		90	2,05	12,64	2,06	10,16	2,37	20,92
3	Konveks	90	2,20	4,76	2,22	3,74	2,37	7,24
		135	2,15	2,38	2,17	1,40	2,25	1,81
	Reference	180	2,10	-	2,14	-	2,21	-
	Konkav	135	2,19	4,29	2,22	3,74	2,33	5,43
		90	2,26	7,62	2,27	6,08	2,46	11,31

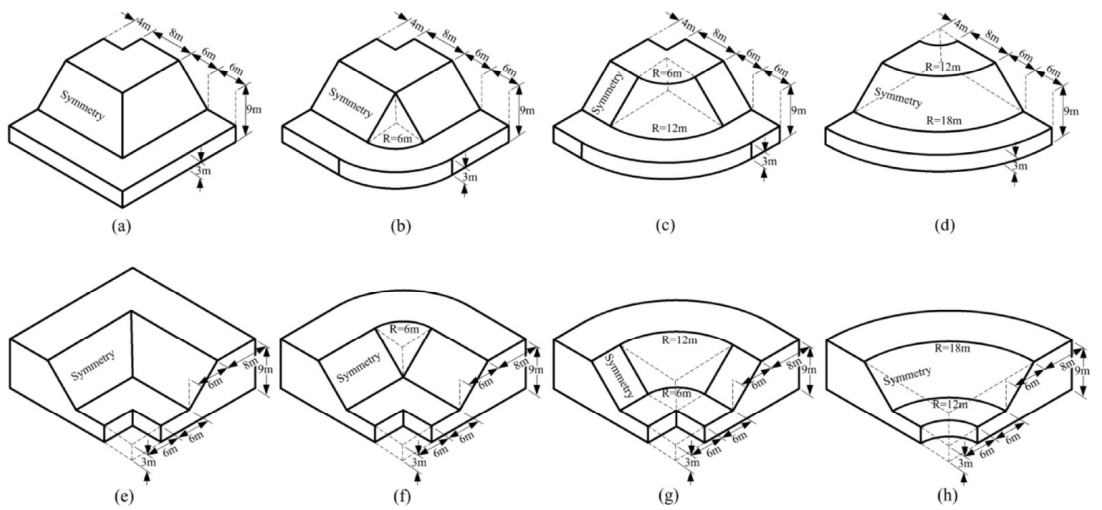
3.6 Indvirkning på sikkerhedsfaktoren af krumme og buede skråninger med hjørner

[Zhang et al., 2013] behandler yderligere problematikken vedrørende de geometriske effekters indvirkning på forskellen mellem 2D og 3D modellerne ved et studie omkring betydningen af en kombination af drejende hjørner med en krum, buet skråning. Studiet behandler tilfælde med en skråningsgradient på 45° og hjørner, der har en vinkel på 90°.

De forskellige drejningsformer samt resultaterne findes på figur 3.9 samt i tabel 3.3, hvoraf det fremgår, at de konkav-drejende skråninger er de eneste, som ændrer sikkerhedsfaktoren betydeligt (op til 13 %) sammenlignet med den for referenceskråningen. Her stiger sikkerhedsfaktoren i takt med at størrelsen af buen stiger. Dette stemmer godt overens med, at ved både buer samt hjørner var effekten på sikkerhedsfaktoren en del større ved den konkave drejning sammenlignet med den konvekse.

Ud fra FEM-modeller påviste [Zhang et al., 2013], at sikkerhedsfaktoren for de konkavt drejende skråninger stiger i takt med at buens længde øges, hvilket [Zhang et al., 2013] begrundede med, at den konkave drejning virker som en hindring til mulig brud, og effekten af denne hindring stiger i takt med forøgelsen af buens udstrækning.

Sikkerhedsfaktoren er større end den for referenceskråningen for både konkave og tilmed for konvekse drejende skråninger, når både ende-effekter i form af hjørner samt de øvrige 3D-effekter i form af krumninger og drejninger kombineres. Dog er dette resultat opnået for en skråningsgradient på 45° og med 90° drejende hjørner, hvorfor det ikke er undersøgt, hvorvidt en skråningsgradient på 90° vil give en lavere sikkerhedsfaktor for konvekse drejninger end den for referenceskråningen, hvilket netop var tilfældet både i tabel 3.1 og 3.2 på forrige side. Dermed bør resultatet, som angiver, at sikkerhedsfaktoren altid forøges i denne situation, behandles med omhu, idet den ikke er fuldt ud dokumenteret. En undersøgelse af situationer med konvekse drejninger, hvor skråningsgradienten er 90°, vil derfor være passende. Her kan det studeres, hvorvidt sikkerhedsfaktoren fortsat er større for denne situation sammenlignet med sikkerhedsfaktoren for referenceskråningen.



Figur 3.9: 3D 90° drejende skråninger med forskellige former for drejning [Zhang et al., 2013, figur 13].

Tabel 3.3: 3D skråningsstabilitet med forskellige drejende former for de tre eksempler og under forskellige randbetingelser [Zhang et al., 2013, Tabel 7].

Drejende form		Randbetingelse SS		Randbetingelse RS		Randbetingelse RR	
Krumning	Indeks	F	DF [%]	F	DF [%]	F	DF [%]
Konveks	a	1,84	1,10	1,86	1,64	1,90	1,60
	b	1,85	1,60	1,86	1,64	1,90	1,60
	c	1,84	1,10	1,86	1,64	1,90	1,60
	d	1,84	1,10	1,86	1,64	1,89	1,07
Reference	-	1,82	-	1,83	-	1,87	-
Konkav	e	1,89	3,85	1,91	4,37	1,99	6,42
	f	1,91	4,95	1,91	4,37	1,99	6,42
	g	1,96	7,69	1,96	7,10	2,05	9,63
	h	2,05	12,64	2,05	12,02	2,07	10,7

3.7 Ækvivalente 2D analyser ved justering af stivheden af forstærkende pæle

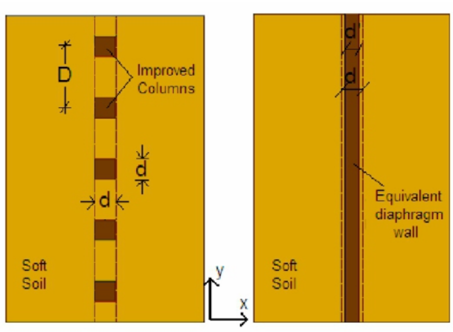
Som omtalt i introduktionen vil etableringen af en ækvivalent 2D situation være belejligt, idet det på denne måde ikke vil være nødvendigt at foretage den mere ressourcekrævende 3D analyse. En ækvivalent 2D analyse for en tredimensionel dræningssituation opstilles i [Rujikiatkamjorn et al., 2008]. Desuden giver [Papadimitriou et al., 2006] et bud på en metode til etableringen af ækvivalente 2D analyser, hvilket omtales nærmere i det følgende. I [Papadimitriou et al., 2006] dannes korrektioner af 2D situationen til opnåelse af ækvivalente resultater til dem for 3D situationen for numeriske modeller af den seismiske respons af forbedrede jordområder. Disse områder er forbedret ved hjælp af indlejring af membranvægge, og forstærkningen af den maksimale acceleration af jordoverfladen fra den seismiske påvirkning i forhold til responsen fra den uforbedrede bløde jord sammenlignes i 2D og 3D. Dermed sammenlignes den maksimale acceleration af jordoverfladen i 2D med den bestemt i 3D.

Den første situation, som [Papadimitriou et al., 2006] undersøger, for at opstille en ækvivalens mellem 2D og 3D, er en “væg ”af indlejrede pæle, som skal forstærke jorden og fremgår på figur 3.10. På denne figur har de forstærkende pæle en indbyrdes afstand på D og en diameter på d. Der er tale om et 3D tilfælde, når en væg i y-retningen betragtes med en påført seismisk jordbundsacceleration i x-retningen.

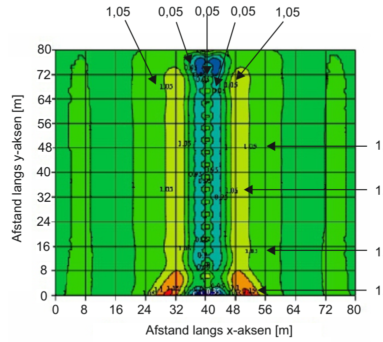
På figur 3.11 er konturerne af forstærkningen af a_{max} fra den tredimensionelle seismiske responsanalyse afbilledet. Heraf fremgår 3D karakteren af situationen ved, at a_{max} ikke er konstant og ensartet langs væggen. Dog opnås symmetri i den seismiske respons 4-5 meter vinkelret fra væggen, hvilket gør det acceptabelt at opstille den ækvivalente 2D situation. Denne består af en “membran væg” med ækvivalent tykkelse d', hvilket findes på figur 3.10.

I [Papadimitriou et al., 2006] etableres en generel regel til estimering af d' til anvendelse i de ækvivalente 2D analyser. I den forbindelse undersøges tværsnitsarealækvivalens A, inertimomentækvivalens I og modstandsmomentækvivalens W. Med ækvivalens menes en sidestilling mellem 3D størrelsen og den tilsvarende ækvivalente 2D størrelse, hvorfor tværsnitsarealækvivalensen er $d' = d^2/D$, idet $A_{2D} = d'D$ og $A_{3D} = d^2$. På figur 3.12 sammenholdes disse ækvivalenser med en lang række af numeriske eksperimenter for situationen på figur 3.10 udført for værdier af D, d og den deraf opnåede d'. Figur 3.12 afspejler, at modstandsmomentækvivalensen lægger sig bedst op ad de numeriske resultater og dermed giver det bedste estimat for d'.

På samme måde som den indlejrede væg undersøges et gitter dannet af forstærkende pæle. En



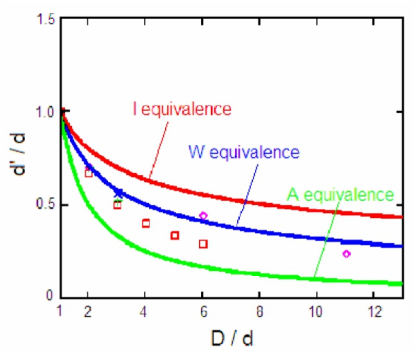
Figur 3.10: Til venstre fremgår den indlejrede "væg" af pæle i 3D set ovenfra. Til højre fremgår den ækvivalente 2D situation set ovenfra bestående af en "membran væg " [Papadimitriou et al., 2006, figur 2].



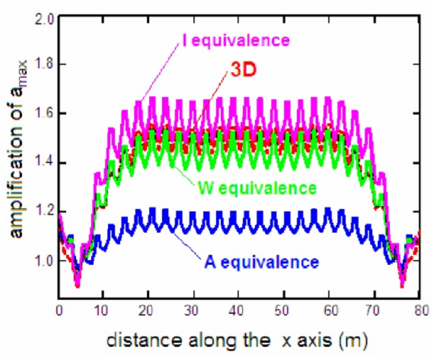
Figur 3.11: Konturerne af a_{max} fra en 3D seismisk responsanalyse af en indlejret pælevæg med d=1m og D=4m i 10 meter dyb jord [Papadimitriou et al., 2006, figur 3].

seismisk responsanalyse i 3D for dette gitter giver konturerne af den forstærkede maksimale acceleration angivet på figur A.5 på side 86, og resultaterne for den analytiske estimering af d' ud fra de tre typer af ækvivalens sammen med de numerisk opnåede værdier for d' findes på figur A.6 på side 86. Disse resultater viser, at modstandsmomentækvivalensen igen giver det bedste fit til de numeriske eksperimenter.

Det er altså tydeligt, at modstandsmomentækvivalensen giver det bedste estimat af d', men hvor stor betydning, anvendelsen af de tre typer ækvivalenser egentlig har på den maksimale acceleration af en seismisk responsanalyse, er afbilledet på figur 3.13. På denne figur vises "gennemsnitsværdien" af a_{max} for et gitter af 27x27 styk forstærkede pæle, og figuren afslører, at ved anvendelse af tværsnitsareal- eller inertimomentækvivalens kan fejlen i estimering af a_{max} blive mere end 25%. Ovenstående ækvivalenser er gældende for forbedret jordforhold i form af pælevægge og gitre af pæle uanset størrelserne på D og d, og uanset jordens forbedringsmetode eller ekscitationsmetode.



Figur 3.12: Sammenligning mellem de tre typer ækvivalens og de numeriske eksperimenter. De numeriske eksperimenter er angivet ved punkterne på figuren [Papadimitriou et al., 2006, figur 4].

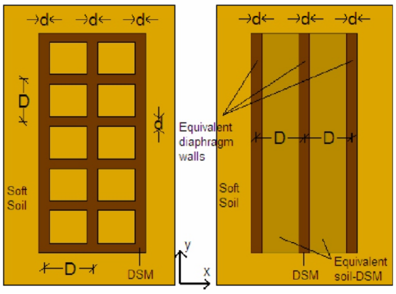


Figur 3.13: Responsen af den "gennemsnitlige" a_{max} af et gitter bestående af 27x27 styk forstærkende pæle påvirket af en seismisks responsanalyse. I analyserne er d=1 og D/d=3 [Papadimitriou et al., 2006, figur 7].

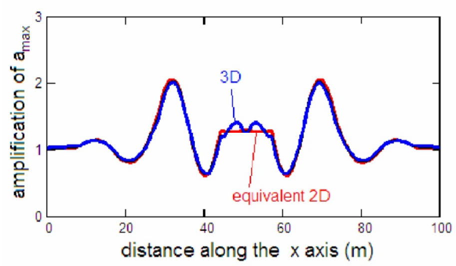
3.8 Ækvivalente 2D analyser ved justering af stivheden af jorden

Ovenfor blev det beskrevet, hvordan [Papadimitriou et al., 2006] etablerede en ækvivalent 2D situation ved at korrigere stivheden af de forstærkende pæle samt vægge. En anden løsningsmetode til problematikken vedrørende opstilling af af den ækvivalente 2D situation er en betragtning af stivheden (og dermed styrken) af jorden. Dette belyser [Papadimitriou et al., 2006] ved et eksempel med et gitter af indlejrede lukkede kvadratiske celler dannet af forstærkende *DSM*[2] membranvægge, som står vinkelret på hinanden. Denne situation er afbilledet på figur 3.14, hvor resultaterne af den forstærkede maksimale acceleration af jordoverfladeresponsen findes på figur 3.15. Her justeres jorden imellem de langsgående *DSM* vægge for at tage højde for tilstedeværelsen af de tværgående *DSM* vægge.

Ud fra figur 3.15 fremgår en utrolig god ækvivalens. Det skal imidlertid understreges, at analyserne præsenteret i [Papadimitriou et al., 2006] fortsat kræver en verifikation fra insitu observationer fra virkelige tilfælde, idet de alene er udført ved numeriske analyser.



Figur 3.14: 3D geometrien og den ækvivalente 2D geometri set ovenfra af et gitter af indlejrede lukkede kvadratiske celler dannet af DSM membranvægge. I analysen er d=1m, D=4m og dybden af jorden er 10m [Papadimitriou et al., 2006, figur 8].



Figur 3.15: Variationen langs x-aksen af den forstærkede maksimale grundacceleration fra en seismisk responsanalyse for situationen på figur 3.14. Det vandrette linjestykke spænder over gitterets mindste sidestykke [Papadimitriou et al., 2006, figur 9b].

Ovenstående behandling af ækvivalens-problematikken vil blive anvendt til inspiration i dette projekt, hvor lignende sammenligning mellem 2D og 3D vil forsøges for banedæmninger.

3.9 Opsummering af analyseresultater iht. overstående behandlede problematikker

Det er dokumenteret i talrige kilder, at sikkerhedsfaktoren i en 3D stabilitetsanalyse altid vil være større end den for den tilsvarende 2D analyse, hvis en referenceskråning uden last, krumninger, drejninger og hjørner betragtes. På denne måde vil 2D tilfældet give det mest konservative resultat. Størrelsen på forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og i 3D kan bestemmes ud fra diagrammerne af [Michalowski, 2010] på figur 3.2, A.1, A.2 og A.3.

Imidlertid har 3D-effekter i form af krumninger, drejninger og hjørner en stor betydning på sikkerhedsfaktoren. Generelt er sikkerhedsfaktoren opnået for tilfælde med disse effekter større end den for reference tilfældet. Dette betyder, at forskellen mellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D

[2] DSM står for Deep Soil Mixing

bliver endnu større. Derfor vil der sandsynligvis være en økonomisk gevinst at hente ved at lave en 3D model af designproblemet i tilfælde, hvor det er muligt at ændre designparametrene som eksempelvis bredden og højden af skråningen. Dog er undtagelserne hertil tilfældet med randbetingelsen *RR* for konveks krumning af skråningsoverfladen samt tilfælde med konveks-drejende hjørner med en skråningsgradient på 90° under alle typer randbetingelser. Dette indikerer i høj grad ende-effekters betydning, idet en 3D analyse er nødvendig i denne situation, da 2D overestimerer bæreevnen, hvis det mest kritiske tilfælde fortsat skal belyses. Imidlertid angiver alle øvrige ende-effekter, at der kan være et økonomisk perspektiv i en 3D analyse, idet sikkerhedsfaktoren forøges i disse tilfælde. Situationer, hvor alle de ovenfor omtalte 3D-effekter kombineres, er i artiklen [Zhang et al., 2013], alene undersøgt for situationer med en skråningsgradient på 45° kombineret med 90° drejende hjørner, og derfor er alle tilfælde ikke dokumenteret.

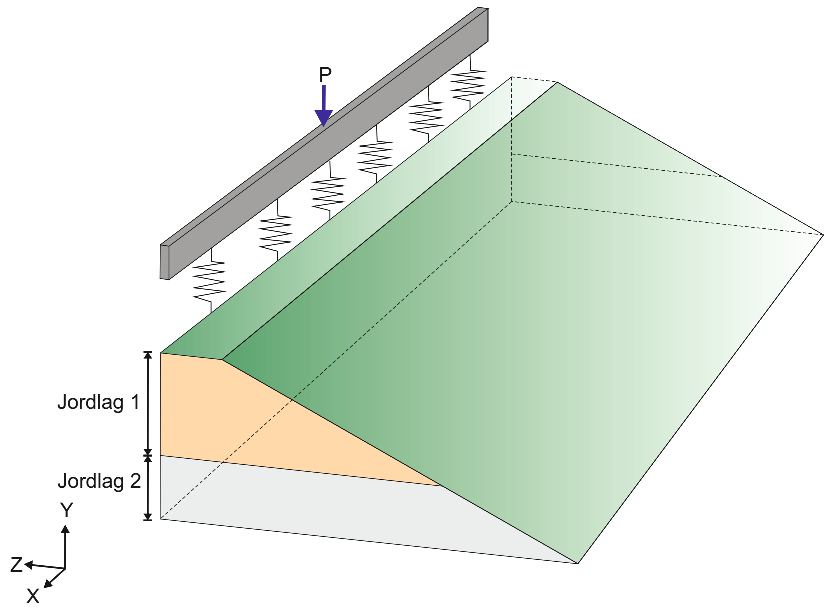
Hvis en jævnt fordelt last placeres på et afgrænset areal og er større end eller lig med $0,35\gamma H$ ved β=45° og ϕ=15° vil en 3D analyse være en nødvendighed, idet en 2D analyse uden last vil give en for høj sikkerhedsfaktor. Hvis skråningsgradienten øges vil en 3D analyse være nødvendig ved en lavere last, hvis det mest konservative tilfælde ønskes belyst. Det blev i [Mansikkamäki og Länsivaara, 2012] belyst, at dimensionerne for dæmningen, jordens egenskaber samt lasten fra hjulsættet har betydning på forskellen mellem 2D og 3D analyseresultaterne, hvor en reduktion af dæmningens højde og en forøgelse af lasten vil give en mindre jævnt fordelt last og dermed øge forskellen på 2D og 3D analyserne.

På den baggrund fremgår det, at skråningsgeometriens betydning på sikkerhedsfaktoren er undersøgt i vid udstrækning. I nærværende projekt er det derfor valgt, at undersøge indflydelsen af geometrien i anvendelsesgrænsetilstanden. Her begrænses undersøgelsen imidlertid til betydningen af dæmningens højde samt anlæg. Desuden er det ovenfor belyst, at lastens indflydelse alene er undersøgt i forhold til, hvad en fladelast i tredje dimension skal være for at sikkerhedsfaktoren bliver lavere end sikkerhedsfaktoren for den todimensionelle situation uden lastpåvirkning. På denne måde eksisterer der ingen relation imellem et todimensionelt lastpåvirket dæmningstværsnit og en tredimensionel lastpåvirket dæmning. Dette er essentielt at kende denne sammenhæng og i den forbindelse skal lasten fordeling i tredje dimension kendes. I nærværende projekt undersøges lastens fordeling i tredje dimension ved hjælp af en MATLAB-model. Ud fra den kendte lastfordeling etableres en relation imellem en lastpåvirket to- samt tredimensionel banedæmning.

Der tages inspiration i den ækvivalente opstilling som er omtalt ovenfor, idet det fremgår at betydningen af jordens styrke er essentiel. Styrken vil derfor blive varieret for dæmningsfyldet for at undersøge betydningen heraf og tilmed vil den anvendte trykspredning blive varieret.

4 2D MATLAB-model

Et af hovedelementerne i dette projekt er opbygningen af en finite-element 2D model, som skal anvendes til at danne en relation imellem en 2D og en 3D model af en banedæmning. En illustration af denne 2D model findes på figur 4.1, hvorpå en fjederunderstøttet bjælke er placeret oven på en dæmning. Bjælken har til hensigt at illustrere en jernbaneskinne, hvor fjedrene herunder skal gengive stivheden af sporkassen, som fører lasten fra skinnen ned til ballastlaget. Selvom der er tale om en 2D model, er det muligt at ændre på tykkelsen af elementerne, hvorved ballastlaget modelleres ved flere jordlag med gradvist større tykkelse. På denne måde kan trykspredningen, som finder sted ned igennem dæmningen modelleres. Begreberne sporkasse samt ballastlag er angivet i projektintroduktionen på figur 1.5 på side 4.

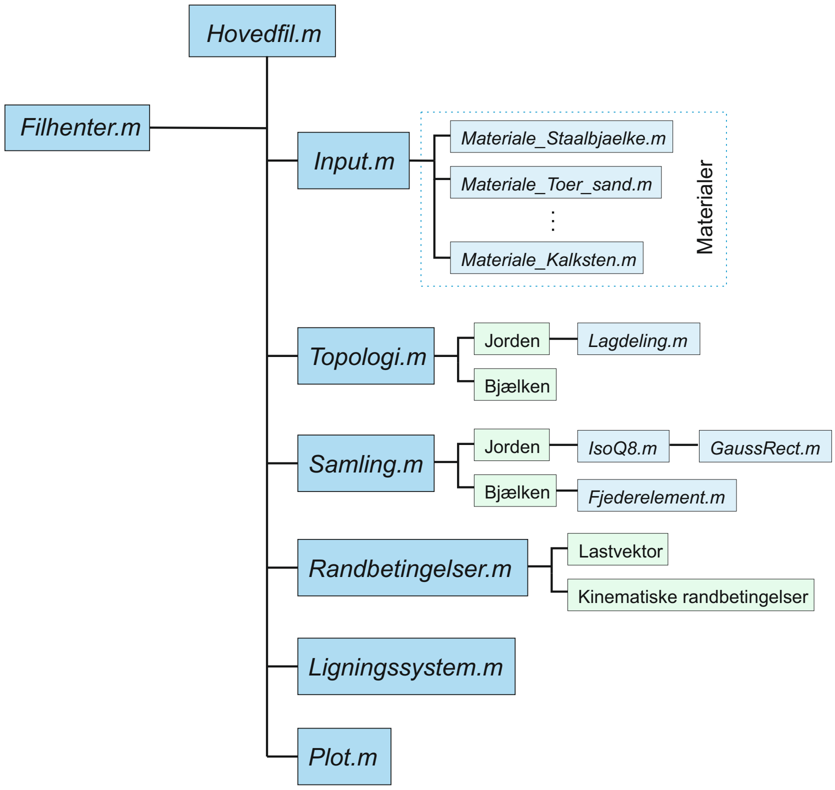


Figur 4.1: 2D MATLAB-model i xy-planet. En fjederunderstøttet bjælke er etableret ovenpå en halv dæmning.

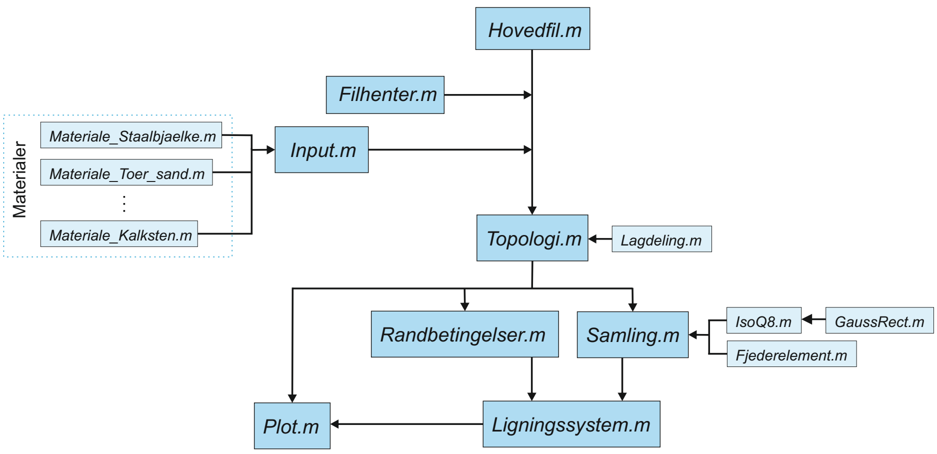
Den todimensionelle model er etableret i programmet MATLAB (Matrix Laboratory), hvilket er et numerisk beregningsprogram, som er velegnet til finite-element modellering. I det følgende afsnit beskrives opbygningen af det todimensionelle MATLAB-program, hvor selve de fysiske betragtninger samt den tekniske beskrivelse af programmet følger i det næste afsnit. Endeligt vil sidste afsnit af dette kapitel indeholde en verifikation af MATLAB-modellen ved hjælp af simple analytiske løsninger samt ved en 2D model modelleret i det kommercielle FE-programm PLAXIS. Det todimensionelle MATLAB-program samt den verificerende todimensionelle PLAXIS-model er tilgængelig på den vedlagte CD.

4.1 Opbygning af MATLAB-programmet

Opbygningen af MATLAB-programmet er skitseret på figur 4.2, hvor flowdiagrammet herfor findes på figur 4.3.



Figur 4.2: Opbygning af MATLAB-programmet. Kursive betegnelser, som ender med .m og befinder sig i blå-tonede bokse, er navnet på filer i programmet. De grønne bokse illustrerer afsnit i filen, som de er linket til.



Figur 4.3: Flowdiagram over MATLAB-programmet. Alle betegnelser er navne på filer, som indgår i programmet.

MATLAB-programmet åbnes ved filen *Hovedfil.m*, og alle beregninger igangsættes ved at køre denne fil. Først vil filen *Filhenter.m* indhente alle filer i undermapperne til hovedfilen. Følgende undermapper findes: Input, Topologi, Samling, Randbetingelser, Ligningssystem og Plot.

I funktionen *Input.m* defineres de nødvendige input, og desuden kan de ønskede materialer tilskrives jordlagene samt bjælken. De inputs, som skal angives, og de outputs, som opnås, er listet i tabel 4.1. I denne tabel er værdierne, som anvendes i forbindelse med verifikation i afsnit 4.3 af MATLAB-modellen, også angivet.

Tabel 4.1: Input samt output fra funktionen *Input.m*. Værdier, som anvendes ved verifikationen af det todimensionelle MATLAB-program, fremgår tilmed i tabellen.

Input	**Værdi ved verifikation**	**Enhed**
Geometri:		
Længde af bjælken og jordvolumenet	10,0	[m]
Højden af jordvolumenet	10,0	[m]
Højden af fjedrene	1,0	[m]
Ønsket diskretisering af højden af jordvolumenet	Varierende	[-]
Bjælke-fjederelementet:		
Fjederelement (hvorvidt bjælken er aktiveret til eller ej)	ON	[ON/OFF]
Materiale for bjælke samt fjedre	Stålbjælke	[-]
Jordvolumen		
Soil.interface (hvorvidt jorden er aktiveret til eller ej)	ON	[ON/OFF]
Dybden af jordlag 1 målt fra jordoverfladen	Varierende	[m]
Dybden af jordlag 2 målt fra jordlag 1	Varierende	[m]
Dybden af jordlag 3 målt fra jordlag 2	0	[m]
Dybden af jordlag 4 målt fra jordlag 3	0	[m]
Dybden af jordlag 5 målt fra jordlag 4	0	[m]
Dybden af jordlag 6 målt fra jordlag 5	0	[m]
Interval for tykkelsen af jordlag 1	1-1	[m]
Interval for tykkelsen af jordlag 2	1-1	[m]
Interval for tykkelsen af jordlag 3	0-0	[m]
Interval for tykkelsen af jordlag 4	0-0	[m]
Interval for tykkelsen af jordlag 5	0-0	[m]
Interval for tykkelsen af jordlag 6	0-0	[m]
Materiale for jordlag 1	Tør sand	[-]
Materiale for jordlag 2	Kalksten	[-]
Materiale for jordlag 3		[-]
Materiale for jordlag 4		[-]
Materiale for jordlag 5		[-]
Materiale for jordlag 6		[-]
Øvrigt:		
Last	-1000,0	[N]
Loadtype	Varierende	[Punkt/Fordelt]
Skala til plot	500	[-]

Output	**Værdi ved verifikation**	**Enhed**
info.		[-]

Programmet kan behandle situationer, hvor jorden og bjælken inklusiv fjedre betragtes hver for sig, hvorfor disse skal aktiveres i *Input.m* efter behov. På samme måde kan programmet håndtere en jævnt fordelt last over hele længden eller en punktlast påført i yderste venstre knude på enten jord eller bjælke. Randbetingelserne tilpasses automatisk efter den valgte lasttype. Diskretiseringen, angivet i tabel 4.1, bestemmer antallet af elementer, som højden af jordvolumenet inddeles i, og den heraf beregnede elementlængde anvendes i både jordens samt bjælkens længderetning. De definerede inputs er angivet i en global "structure array", som findes på formen *info.* således, at eksempelvis *info.geometry.soil.h* definerer jordens totale dybde. Dermed kan alle inputs indhentes ved blot at give kommandoen *info.* i hovedfilen. De i tabel 4.1 angivne jordlag er afbilledet på figur 4.1.

Med de nødvendige input defineret vil funktionen *Topologi.m* kunne definere først jordens og herefter bjælkens elementtopologi, hvilket indebærer de i tabel 4.2 listede egenskaber. I topologien tages der højde for, hvorvidt jordelementer og bjælkeelementer er aktiveret eller ej, når koordinater, knudenumre mm. bestemmes. Dermed diskretriseres de angivne geometrier i denne funktion og materialeegenskaberne tilskrives elementerne. Nødvendige input til samt output fra *Topologi.m* er listet i tabel 4.2.

Tabel 4.2: Input samt output af funktionen *Topologi.m*.

Input	**Egenskab**
info.	Information defineret i *Input.m*

Output	**Egenskab**
NodeCoor.	Knudepunktskoordinater
ElemNode.	Nummerering af elementknuder
EdgeNodes.	Knudenumre for knuder på randene
ElemDof.	Elementfrihedsgrader
NodeDof.	Knudefrihedsgrader
numdof.	Antal frihedsgrader
ElemMat.	Materialeegenskaber til hvert element
ElemX.	x-koordinater
ElemY.	y-koordinater
Info.	Information defineret i forbindelse med angivelse af topologien

I funktionen *Samling.m* samles den globale stivhedsmatrice for systemet. De lokale stivhedsmatricer for elementerne bestemmes, og ud fra elementfrihedsgraderne indskrives elementstivhederne på de korrekte pladser i den globale stivhedsmatrice. Ud fra det enkelte jordelements y-koordinater tilskrives elementet automatisk en tykkelse. Ud fra det i *Input.m* angivne interval for hvert jordlag bestemmes tykkelsen af elementet ved en lineær interpolation. Input og output i henhold til funktionen *Samling.m* er angivet i tabel 4.3.

Randbetingelser.m er en funktion, hvori de kinematiske randbetingelser defineres, hvilket vil sige, at de tvungne flytninger tilskrives frihedsgraderne på randene. Desuden tilskrives lasten de frihedsgrader, hvori denne skal virke. I funktionen tages der automatisk højde for, hvilken lasttype som er angivet i *Input.m*, samt hvorvidt jordvolumenet og bjælken er aktiveret. Output fra og input til *Randbetingelser.m* findes i tabel 4.4.

Tabel 4.3: Output fra og input til funktionen *Samling.m*.

Input	Egenskab
NodeCoor.	Knudepunktskoordinater
ElemNode.	Nummerering af elementknuder
ElemDof.	Elementfrihedsgrader
numdof.	Antal frihedsgrader
ElemMat.	Materialeegenskaber til hvert element
ElemX.	x-koordinater
ElemY.	y-koordinater
info.	Information defineret i $Input.m$

Output	Egenskab
SysK	Den globale stivhedsmatice
tJord	Vektor med angivelse af elementtykkelsen

Tabel 4.4: Input og output i henhold til funktionen *Randbetingelser.m*.

Input	Egenskab
EdgeNodes.	Knudenumre for knuder på randene
NodeDof.	Knudefrihedsgrader
numdof.	Antal frihedsgrader
info.	Information defineret i $Input.m$

Output	Egenskab
SysF	Lastvektor
SysBound	Vektor med de kinematiske randbetingelser

Den globale stivhedsmatrice, last samt de forskrevne flytninger fra henholdsvis *Samling.m* og *Randbetingelser.m* anvendes i *Ligningssystem.m*, hvori det statiske ligningssystem, $[K]\{U\} = \{F\}$, løses. I tabel 4.5 er output og input til *Ligningssystem.m* listet.

Tabel 4.5: Input nødvendige til funktionen *ligningssystem.m* samt output herfra.

Input	Egenskab
SysK	Den globale stivhedsmatice
SysF	Lastvektor
SysBound	Vektor med de kinematiske randbetingelser

Output	Egenskab
SysU	Flytningsvektor med flytningerne listet i henhold til frihedsgraderne
SysR	Reaktionsvektor med reaktionerne listet i henhold til frihedsgraderne

Endeligt dannes plots af den udeformerede samt deformerede geometri i filen *Plot.m*, hvor jord samt bjælkeelement plottes både sammen og adskilt. De inputs, som er nødvendige for at danne plot af den deformerede samt udeformerede geometri, er listet i tabel 4.6.

Tabel 4.6: Input anvendt i *Plot.m*.

Input	Egenskab
Info.	Information defineret i *Input.m*
ElemX.	x-koordinater
ElemY.	y-koordinater
NodeCoor.	Knudepunktskoordinater
SysU	Flytningsvektor med flytningerne listet i henhold til frihedsgraderne
ElemDof.	Elementfrihedsgrader
numdof.	Antal frihedsgrader

4.2 Teknisk beskrivelse af MATLAB-modellen

I dette afsnit beskrives den tekniske baggrund for den todimensionelle MATLAB-model, hvor antagelser samt overvejelser med hensyn til fysiske og modelleringsmæssige perspektiver behandles. Afsnittet følger opstillingen på figur 4.2 således, at baggrunden for modellens input først er angivet, efterfulgt af den tekniske dokumentation af topologien, herefter overvejelserne i forbindelse med samlingen af den globale stivhedsmatrice og så fremdeles.

Den todimensionelle MATLAB-model er grundlagt på baggrund af følgende antagelser:

- Jorden antages at være homogen og isotropisk
- Fjedrene antages at virke lineært og udelukkende vertikalt
- Aksial stivhed negligeres i bjælken
- Systemet betragtes som værende lineært elastisk
- Plan tøjning antages for systemet
- Dæmningens laggrænser er horisontale
- Porevandet negligeres

4.2.1 Inputparametre

I nærværende projekt anvendes skinnetypen for nyanlæg af sporkonstruktioner, hvorfor profil- og materialeegenskaberne for skinnetypen 60E2 skal anvendes for bjælken[1] [Banedanmark, 2010a]. Denne skinnetype har de i tabel 4.7 angivne egenskaber [ArcelorMittal] [MAI] [Jernbaneverket - Teknisk reglverk, 2014].

Under valideringen af programmet anvendes initielt en fjederstivhed på 8000 kN/m, hvilket er en generelt anvendt stivhed for sporkasse samt ballastlag. Denne fjederstivhed anvendes også i programmet PLAXIS i afsnit 4.3.

Foruden jernbaneskinnens egenskaber skal materialeegenskaberne for jordvolumenet tilmed angives. Under valideringen af MATLAB-modellen anvendes to jordtyper; tør sand samt kalksten. Materialeparametre, som anvendes for jordtyperne i MATLAB-modellen, er angivet i tabel 4.8.

[1] UIC60 skinner betegnes i CEN-norm EN13764 både som 60E1 og 60E2. Banedanmark anvender 60E2 skinner [Banedanmark, 2010a].

Tabel 4.7: Profil- samt materialeegenskaber for skinnetype 60E2

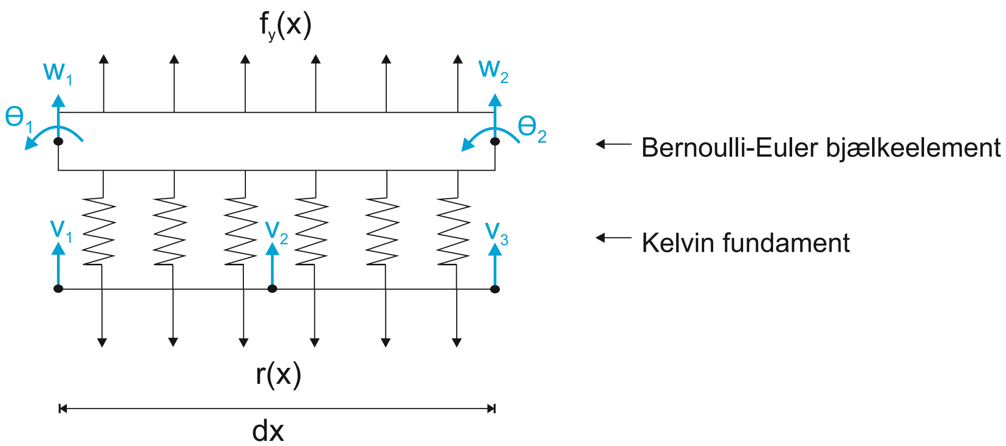
Profilegenskaber	**Symbol**	**Værdi**	**Enhed**
Tværsnitsareal	A	$7,648 \cdot 10^{-3}$	[m^2]
Højde	h	0,172	[m]
Inertimoment	I	$3,0215 \cdot 10^{-5}$	[m^4]
Materialeegenskaber	**Symbol**	**Værdi**	**Enhed**
Elasticitetsmodul	E	210	[GPa]
Poissons forhold	ν	0,3	[−]

Tabel 4.8: Materialeegenskaber for de to jordtyper som anvendes i MATLAB-modellen under valideringen i afsnit 4.3.

Materialeegenskab/Jordtype	**Symbol**	**Tør sand**	**Kalksten**	**Enhed**
Poissons forhold	ν	0,3	0,25	[−]
Elasticitetsmodul	E	$22,29$	$15 \cdot 10^3$	[GPa]

4.2.2 Topologi for bjælke-fjederelementet

Det vælges, at jernbaneskinnen, og dermed bjælken, skal modelleres som en Bernoulli-Euler bjælke således, at jernbaneskinnens bøjningsstivhed inddrages og forskydningstøjningen negligeres. Fjederunderstøtningen af bjælken modelleres som et Kelvin fundament således, at fjedrene antages udelukkende at virke lodret. Bjælkeelement og fjedre modelleres som ét element og er illustreret på figur 4.4. Heraf fremgår det, at fjedrene spænder imellem bjælken og en linje med tre knuder. Denne bundlinje med dertilhørende knuder muliggør at elementet kan anbringes oven på et jordelement. Det er valgt at anvende tre knuder på bundlinjen idet, dette gør elementet kompatibelt med anden ordens jordelementer. Hvis elementets bundlinje i stedet havde to knuder, ville det være nødvendigt at anvende to bjælke-fjeder-elementer for hvert jordelement, hvis anden ordens jordelementer anvendes. Alene en vertikal frihedsgrad er medtaget i knuderne på bundlinjen, da fjedrene alene virker vertikalt. Elementet på figur 4.4 navngives i dette projekt bjælke-fjederelementet, og denne betegnelse anvendes fremefter.



Figur 4.4: Bjælke-fjederelementetet. Bernoulli-Euler bjælkeelement understøttet af et Kelvin fundament. Den vertikale frihedsgrad v_2 ligger midt imellem frihedsgraderne v_1 og v_3.

Når bjælke-fjederelementet skal implementeres i MATLAB-modellen, angives topologien i henhold til figur 4.4, og knudenummereringen starter med nederste venstre hjørne og går mod højre. Da et element af denne type ikke er set konstrueret hidtil, er det nødvendigt at opstille stivhedsmatricen herfor. Dette gøres ved først at udlede de styrende ligninger for elementet, som også betegnes den stærke form. Herpå anvendes virtuelt arbejdes princip til at opnå finite-element notationen og herved et udtryk for stivhedsmatricen. I bilag B afsnit B4.3 er de styrende ligninger for elementet udledt, og disse er gengivet ved udtryk (4.1) nedenfor.

$$\begin{gathered}\frac{d^4w(x)}{dx^4}EI + \kappa(w(x) - v(x)) = f_y(x) \\ \kappa \cdot v(x) - \kappa \cdot w(x) = r(x)\end{gathered} \tag{4.1}$$

Som introduceret ovenfor erhverves finite-element notationen ved anvendelse af virtuelt arbejdes princip. Denne metode har overordnet fire trin:

1. Multiplicer den stærke form med et virtuelt flytningsfelt.
2. Integrer dette udtryk over elementets længde således, at den såkaldte svage form af udtrykket forekommer.
3. Diskretiser flytningsfelterne og indsæt disse i den svage form således, at finite-element notationen forekommer.
4. Evaluer integralet.

Første samt andet trin fremgår af udtryk (4.2a) og (4.2b), hvor den stærke form (4.1) er multipliceret med et virtuelt flytningsfelt og integreret over elementlængen.

$$EI\int_0^L \frac{d^4w(x)}{dx^4}\delta w(x)dx + \kappa\int_0^L (w(x) - v(x))\delta w(x)dx = \int_0^L f_y(x)\delta w(x)dx \tag{4.2a}$$

$$\kappa\int_0^L v(x)\delta v(x)dx - \kappa\int_0^L w(x)\delta v(x)dx = \int_0^L r(x)\delta v(x)dx \tag{4.2b}$$

Første led i udtryk (4.2a) omskrives yderligere ved anvendelse af partiel integration således, at udtryk (4.2a) omskrives til (4.3).

$$\begin{gathered}EI\left[\frac{d^3w(x)}{dx^3}\delta w(x)\right]_0^L - EI\left[\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d\delta w(x)}{dx}\right]_0^L + EI\int_0^L \frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2\delta w(x)}{dx^2}dx \\ +\kappa\int_0^L (w(x) - v(x))\delta w(x)dx = \int_0^L f_y(x)\delta w(x)dx\end{gathered} \tag{4.3}$$

I bilag 4.3 er det angivet, at udtrykkene i (4.4) er gældende for en Bernoulli-Euler bjælke, hvorved ligning (4.3) kan omskrives til (4.5).

$$Q_b = EI\frac{d^3w(x)}{dx^3} \qquad M_b = EI\frac{d^2w(x)}{dx^2} \tag{4.4}$$

$$
\begin{aligned}
&EI\int_0^L \frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2\delta w(x)}{dx^2}dx+\kappa\int_0^L (w(x)-v(x))\delta w(x)dx \\
&=\int_0^L f_y(x)\delta w(x)dx-[Q_b\delta w(x)]_0^L+\left[M_b\frac{d\delta w(x)}{dx}\right]_0^L
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Herved er den stærke form i udtryk (4.1) omskrevet til den svage form i udtrykkene (4.5) og (4.2b). Jævnfør trin tre diskretiseres flytningsfelterne ved hjælp af formfunktionerne og indsættes i den svage form. De to flytningsfelter diskretiseres hver for sig og er angivet ved (4.6) og (4.7).

$$
\begin{aligned}
w(x)&=\{N_{b1}(x)\;\;N_{b2}(x)\;\;N_{b3}(x)\;\;N_{b4}(x)\}\{w_1\;\;\theta_1\;\;w_2\;\;\theta_2\}^T=\{N_b(x)\}\{a_b\}\\
\delta w(x)&=\{N_{b1}(x)\;\;N_{b2}(x)\;\;N_{b3}(x)\;\;N_{b4}(x)\}\{\delta w_1\;\;\delta\theta_1\;\;\delta w_2\;\;\delta\theta_2\}^T=\{N_b(x)\}\{\delta a_b\}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x)&=\{N_{s1}(x)\;\;N_{s2}(x)\;\;N_{s3}(x)\}\{v_1\;\;v_2\;\;v_3\}^T=\{N_s(x)\}\{a_s\}\\
\delta v(x)&=\{N_{s1}(x)\;\;N_{s2}(x)\;\;N_{s3}(x)\}\{\delta v_1\;\;\delta v_2\;\;\delta v_3\}^T=\{N_s(x)\}\{\delta a_s\}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

De diskretiserede flytningsfelter indsættes i (4.5) og (4.2b), hvorved udtryk (4.8) og (4.9) fremkommer. I disse udtryk er δa elimineret idet denne er arbitrær.

$$
\begin{aligned}
&EI\int_0^L \frac{d^2\{N_b(x)\}^T}{dx^2}\frac{d^2\{N_b(x)\}}{dx^2}dx\{a_b\}+\kappa\int_0^L\{N_b(x)\}^T\{N_b(x)\}dx\{a_b\}\\
&-\kappa\int_0^L\{N_b(x)\}^T\{N_s(x)\}dx\{a_s\}=\int_0^L f_y(x)\{N_b(x)\}^T dx-\left[Q_b\{N_b(x)\}^T\right]_0^L\\
&+\left[M_b\frac{d\delta\{N_b(x)\}^T}{dx}\right]_0^L
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\kappa\int_0^L\{N_s(x)\}^T\{N_s(x)\}dx\{a_s\}-\kappa\int_0^L\{N_s(x)\}^T\{N_b(x)\}dx\{a_b\}\\
&=\int_0^L\{N_s(x)\}^T r(x)dx
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Udtryk (4.8) kan forkortes til (4.10), hvor forkortelserne er givet ved (4.11a), (4.11b), (4.11c) samt (4.11d). f_c i udtryk (4.11c) og f_b i udtryk (4.11d) er henholdsvis knudebelastningsvektoren og lastvektoren på Bernoulli-Euler bjælken.

$$
[K_{bb}]\{a_b\}+[K_{bs}]\{a_s\}=\{f_c\}+\{f_b\}
\tag{4.10}
$$

$$
[K_{bb}]=EI\int_0^L \frac{d^2\{N_b(x)\}^T}{dx^2}\frac{d^2\{N_b(x)\}}{dx^2}dx+\kappa\int_0^L\{N_b(x)\}^T\{N_b(x)\}dx
\tag{4.11a}
$$

$$
[K_{bs}]=-\kappa\int_0^L\{N_b(x)\}^T\{N_s(x)\}dx
\tag{4.11b}
$$

$$
\{f_c\}=\int_0^L f_y(x)\{N_b(x)\}^T dx
\tag{4.11c}
$$

$$
\{f_b\}=\left[Q_b\{N_b(x)\}^T\right]_0^L-\left[M_b\frac{d\delta\{N_b(x)\}^T}{dx}\right]_0^L
\tag{4.11d}
$$

På samme måde er udtryk (4.9) forkortet til (4.12) med tilhørende (4.13a), (4.13b) og (4.13c).

$$[K_{ss}]\{a_s\}+[K_{sb}]\{a_b\}=\{R(x)\} \tag{4.12}$$

$$[K_{ss}]=\kappa\int_0^L\{N_s(x)\}^T\{N_s(x)\}dx \tag{4.13a}$$

$$[K_{sb}]=-\kappa\int_0^L\{N_s(x)\}^T\{N_b(x)\}dx \tag{4.13b}$$

$$\{R(x)\}=\int_0^L\{N_s(x)\}^T r(x)dx \tag{4.13c}$$

Ligningerne (4.10) og (4.12) sammenskrives til et samlet ligningssystem givet ved (4.14). Finite-element notation heraf er givet ved (4.15), hvor $[K]$ er stivhedsmatricen for bjælke-fjederelementet, $\{u\}$ er elementets frihedsgrader, og $\{P\}$ er lastvektoren. Disse er givet ved (4.16), hvoraf det fremgår, at stivhedsmatricen består af tøjningsinterpolationsmatricen $[B]$ og den konstitutive matrix $[D]$. Disse er givet ved (4.17) og (4.18).

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\{a_s\}\\ \{a_b\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{R(x)\}\\ \{f_c\}+\{f_b\}\end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

$$[K]\cdot\{u\}=\{P\} \tag{4.15}$$

$$[K]=\int_0^L B^TDBdx \qquad \{u\}=\begin{Bmatrix}\{a_s\}\\ \{a_b\}\end{Bmatrix} \qquad \{P\}=\begin{Bmatrix}\{R(x)\}\\ \{f_c\}+\{f_b\}\end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} N_{s1}(x) & N_{s2}(x) & N_{s3}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d^2N_{b1}(x)}{dx^2} & \frac{d^2N_{b2}(x)}{dx^2} & \frac{d^2N_{b3}(x)}{dx^2} & \frac{d^2N_{b4}(x)}{dx^2} \\ 0 & 0 & 0 & N_{b1}(x) & N_{b2}(x) & N_{b3}(x) & N_{b4}(x) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} \kappa & 0 & -\kappa \\ 0 & EI & 0 \\ -\kappa & 0 & \kappa \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Formfunktionerne, som indgår i $[B]$, defineres i det følgende. For den del af bjælke-fjederelementet, som består af en Bernoulli-Euler bjælke, er formfunktionerne givet ved (4.19) [Cook et al., 2002,s. 25].

$$\begin{aligned} N_{b1}(x)&=1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3} \qquad & N_{b2}(x)&=x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} \\ N_{b3}(x)&=\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3} \qquad & N_{b4}(x)&=-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

For en linje med tre vilkårligt placerede knuder er formfunktionerne givet ved udtryk (4.20) [Cook et al., 2002,s. 85].

$$N_a(x) = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \qquad N_b(x) = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} \qquad N_c(x) = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \tag{4.20}$$

Idet knuderne er placeret på linjen med samme afstand således, at $x_1 = 0$, $x_2 = L/2$ og $x_3 = L$, vil formfunktionerne for de tre knuder på bundlinjen af bjælke-fjederelementet være givet ved (4.21).

$$N_{s1}(x) = 1 + \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} \qquad N_{s2}(x) = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \qquad N_{s3}(x) = \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \tag{4.21}$$

Stivhedsmaticen, $[K]$, for det enkelte bjælke-fjederelement er således givet ved udtryk (4.22).

$$\begin{bmatrix}
\frac{56\kappa L}{420} & \frac{28\kappa L}{420} & -\frac{14\kappa L}{420} & -\frac{77\kappa L}{420} & -\frac{7\kappa L^2}{420} & \frac{7\kappa L}{420} & 0 \\
\frac{28\kappa L}{420} & \frac{224\kappa L}{420} & \frac{28\kappa L}{420} & -\frac{140\kappa L}{420} & -\frac{28\kappa L^2}{420} & -\frac{140\kappa L}{420} & \frac{28\kappa L^2}{420} \\
-\frac{14\kappa L}{420} & \frac{28\kappa L}{420} & \frac{56\kappa L}{420} & \frac{7\kappa L}{420} & 0 & -\frac{77\kappa L}{420} & \frac{7\kappa L^2}{420} \\
-\frac{77\kappa L}{420} & -\frac{140\kappa L}{420} & \frac{7\kappa L}{140} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{156\kappa L}{420} & \frac{6EI}{L^2} + \frac{22\kappa L^2}{420} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{54\kappa L}{420} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{13\kappa L^2}{420} \\
-\frac{7\kappa L^2}{420} & -\frac{28\kappa L^2}{420} & 0 & \frac{6EI}{L^2} + \frac{22\kappa L^2}{420} & \frac{4EI}{L} + \frac{4\kappa L^3}{420} & -\frac{6EI}{L^2} + \frac{13\kappa L^2}{420} & \frac{2EI}{L} - \frac{3\kappa L^3}{420} \\
\frac{7\kappa L}{420} & -\frac{140\kappa L}{420} & -\frac{77\kappa L}{420} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{54\kappa L}{420} & -\frac{6EI}{L^2} + \frac{13\kappa L^2}{420} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{156\kappa L}{420} & -\frac{6EI}{L^2} - \frac{22\kappa L^2}{420} \\
0 & \frac{28\kappa L^2}{420} & \frac{7\kappa L^2}{420} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{13\kappa L^2}{420} & \frac{2EI}{L} - \frac{3\kappa L^3}{420} & -\frac{6EI}{L^2} - \frac{22\kappa L^2}{420} & \frac{4EI}{L} + \frac{4\kappa L^3}{420}
\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Den grønne del af stivhedsmatricen sammenlignes med den generelle stivhedsmatrice for et Bernoulli-Euler bjælke element, der er angivet ved udtryk (4.23) [Cook et al., 2002,s. 26].

$$[K]_{Bernoulli-Euler} = \begin{bmatrix}
\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Desuden er formfunktionerne for Bernoulli-Euler bjælkeelementet multipliceret med de transponerede formfunktioner ifølge [Andersen, 2006,s.85] og [Cook et al., 2002,s. 379] angivet ved (4.24). Dette er netop bidraget fra fjedrene til bjælke-fjederelementet blot uden multiplikation af fjederstivheden κ. Bidraget fra 4.23 adderet med 4.24 er farvet i udtryk 4.22.

$$\int_0^L \{N_b(x)\}^T \{N_b(x)\} dx = \frac{L}{420} \begin{bmatrix}
156 & 22L & 54 & -13L \\
22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\
54 & 13L & 156 & -22L \\
-13L & -3L^2 & -22L & 4L^2
\end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Da udtrykkene (4.23) og (4.24) anses for korrekte, bekræfter disse, at $[B]$ er angivet korrekt for den del af bjælke-fjederelementet, som består af en Bernoulli-Euler bjælke. Idet linjen med de tre knuder er angivet i samme $[B]$-matrice, forventes det tilmed, at denne også er korrekt for linjen.

Stivhedsmatricen for bjælke-fjederelementet eftervises for et simpelt tilfælde nedenfor. I dette tilfælde fastholdes flytningerne i de tre knuder på bundlinjen, og der påføres en nedadrettet last i begge knuder på Bernoulli-Euler bjælken med en størrelse på $1N$. Hvis stivhedsmatricen er korrekt, vil der være ligevægt for systemet, hvormed summen af reaktionerne skal være af samme størrelse som summen af de påførte kræfter. I tilfældet er $E = I = \kappa = L = 1$ anvendt. Ligningsystemet givet ved (4.15) løses med de angivne samt ukendte flytninger i (4.25) og påførte laster samt ukendte reaktioner i (4.26). De i systemet ukendte størrelser bestemmes og er angivet ved (4.27).

$$\begin{aligned}[u] &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & w_2 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}[P] &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & Q_{b1} & M_{b1} & Q_{b2} & M_{b2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & -1 & M_{b1} & -1 & M_{b2} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & r_1 & r_2 & r_3 & M_{b1} & M_{b2} \end{bmatrix}^T \\ = &\begin{bmatrix} -2 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ved addition af de i (4.27) fundne reaktioner findes en samlet reaktion på 2, hvormed der er ligevægt i systemet, idet den samlede reaktion modsvarer de påførte laster. Af resultatet fremgår det tilmed, at momenterne har de korrekte fortegn i forhold til den påførte last, samt at flytningerne på bjælkens yderste knuder har samme størrelse, hvilket de bør have.

Den påviste ligevægt for det simple tilfælde er atter et udtryk for, at stivhedsmatricen for systemet er korrekt. En yderligere verifikation findes i afsnit 4.3, hvor beregnede flytninger fra MATLAB-modellen sammenholdes med analytiske løsninger samt flytninger fra en tilsvarende model modelleret i programmet PLAXIS.

4.2.3 Jordelementerne

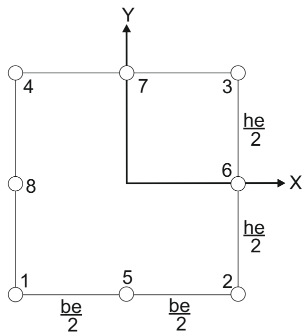
Jorden under bjælke-fjederelementet er modelleret som et kvadratisk rektangel med otte knuder og benævnes et Q8-element. Det er valgt at anvende den isoparametriske udgave af Q8-elementet, idet dette tillader kurvede sider, samt at elementet ikke er fastlåst til den rektangulære form således, at elementets sider ikke behøver at være parallelle til koordinatakserne [Cook et al., 2002,s. 202] [Ottosen og Petersson, 1992,s. 131].

Det bilineære element og det lineære trekantelement, som forkortes som henholdsvis et Q4-element og et CST-element, er fravalgt, da disse to elementtyper ikke kan udvise ren bøjning. Disse elementer udviser “shear locking” således, at de under bøjning foruden den forventede bøjningstøjning også giver en forskydningstøjning. I denne sammenhæng betegnes denne forskydning ofte som parasitisk forskydning, idet denne optager noget af tøjningsenergien, hvormed den samlede tøjningsenergi bliver mindre [Cook et al., 2002,afsnit 3.6]. Q8-elementet udviser ikke “shear locking” [Cook et al., 2002,afsnit 3.7]. Begrundelsen for anvendelsen af Q8-elementet frem for Q9-elementet[2], beror på bemærkningen af [Ottosen og Petersson, 1992,s.135, afsnit 7.3.3],

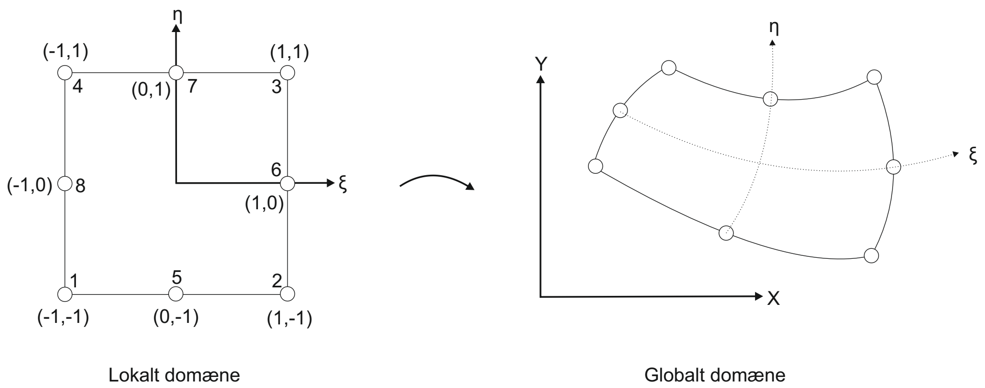
[2] 9-knudet Lagrange element [Cook et al., 2002,afsnit 7.3.3]

som foreskriver, at for det samme antal knuder fordelt på et areal vil Q8-elementet være en smule mere effektiv end Q9-elementet. Idet to kvadratiske trekanter[3] med hver seks knuder tilsammen danner et Q9-element, forventes det, at et Q8-element tilmed er mere effektivt end to kvadratiske trekanter på baggrund af ovenstående.

Topologien for Q8-elementet angives som illustreret på figur 4.5, når elementet skal modelleres til anvendelse i MATLAB-modellen. Idet jorden modelleres med isoparametriske elementer, skal de lokale (ξ, η)-elementkoordinater transformeres til globale (x, y)-elementkoordinater ved hjælp af en Jacobian matrice [Cook et al., 2002,s. 207]. Desuden anvendes numerisk integration i form af Gauss integration, når stivhedsmatricen for det enkelte element skal bestemmes. Transformationen fra lokale til globale koordinater er illustreret på figur 4.6. Formfunktionerne for det isoparametriske Q8-element og beregning af stivhedsmatricen herfor er beskrevet i bilag B.



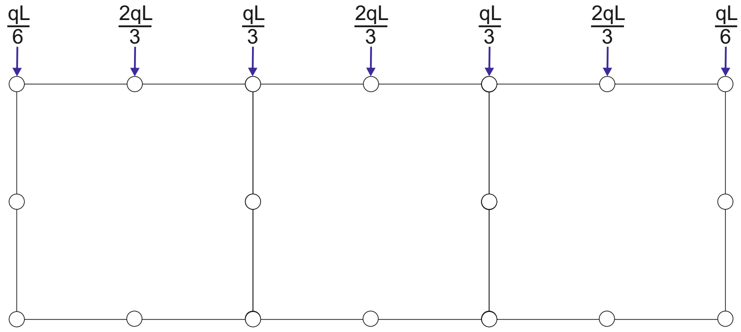
Figur 4.5: Kvadratisk rektangel med otte knuder. Knudenummereringen som anvendes i MATLAB-modellen er angivet. Elementbredden er forkortet *be* og elementhøjden er forkortet *he*.



Figur 4.6: Illustration af transformationen fra lokale (ξ, η)-koordinater til globale (x, y)-koordinater for et isoparametrisk Q8-element.

I en situation, hvor alene jordvolumenet er aktivt, og en jævnt fordelt last ønskes påført, er det nødvendigt, at fordele lasten i henhold til figur 4.7. Linjelasten deles derfor med antallet af elementer ved jordoverfladen, hvorefter lasten, som skal tilskrives hvert element, fordeles i henhold til figur 4.7.

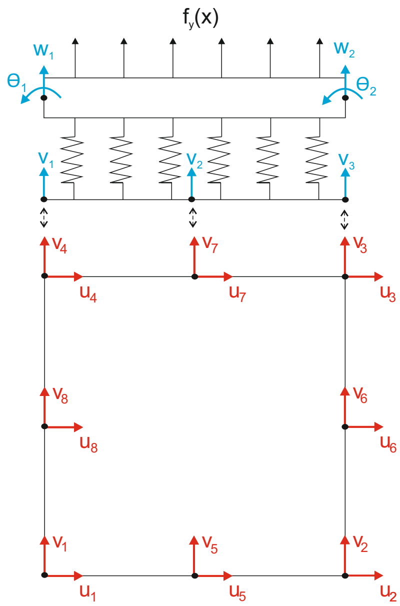
[3] Ofte kaldet et LST-element



Figur 4.7: Lastfordelingen på Q8-elementernes knuder, når en jævnt fordelt last ønskes påført jordvolumenet. *q* er den last, som tilskrives hvert element. q er i denne forbindelse den jævnt fordelte last og L er elementlængden

4.2.4 Konstruktion af den globale stivhedsmatrice

Når den globale stivhedsmatrice skal konstrueres, indsættes det enkelte elements stivhedsmatrice i henhold til elementets frihedsgrader således, at elementets stivheder indskrives på de korrekte pladser. Imidlertid skal det bemærkes, at jordens Q8-elementer både har en horisontal og en vertikal frihedsgrad i hver knude, hvor bjælke-fjederelementet alene har en vertikal frihedsgrad i knuderne på bundlinjen. I de knuder, hvor bundlinjen sammenkobles med jordoverfladen, får komponenten i den globale stivhedsmatrice tilhørende den vertikale frihedsgrad derfor et bidrag fra både bjælke-fjederelementet og Q8-elementet, hvorimod komponenten tilhørende den horisontale frihedsgrad alene får et bidrag fra jordelementet. Koblingen af knuderne imellem bjælke-fjederelementet og Q8-elementet samt forholdet imellem elementernes frihedsgrader er illustreret på figur 4.8.



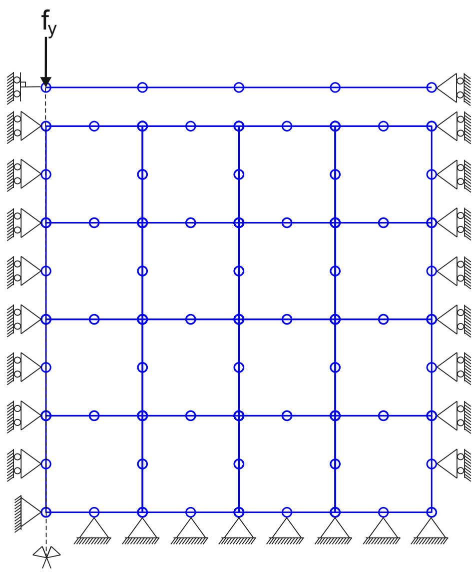
Figur 4.8: Bjælke-fjederelementet kobles i fælles knuder med Q8-elementet, hvor der skal tages højde for forskellen imellem de to elementers frihedsgrader.

4.2.5 Randbetingelser og last

Lasten påføres knuderne i henhold til frihedsgraderne, hvormed lastvektoren har højden $2 \cdot$ *antal knuder*, idet hver knude har to frihedsgrader i det globale billede. Under valideringen af MATLAB-modellen undersøges to situationer: En punktlast placeret midt på bjælken samt en jævnt fordelt last påført i hele bjælkens udstrækning. For at optimere modellen, betragtes alene halvdelen af den reelle jernbaneskinne samt dæmning, idet symmetri anvendes. Ved en symmetribetragtning påføres punktlasten derfor i øverste venstre knude, hvilket vil sige yderste venstre knude i Bernoulli-Euler bjælken.

For at danne ligevægt i det statiske system må jordvolumenets bundlinje fastholdes både horisontalt samt vertikalt. Desuden skal knuderne på jordvolumenets sider samt bjælke-fjederelementets endeknuder tilmed fastholdes i den horisontale frihedsgrad. I tilfælde, hvor jordvolumenet ikke er aktiveret, er det naturligvis frihedsgraderne på bjælke-fjederelementets bundlinje, som skal foreskrives en flytning på nul.

For lastsituationen med en punktlast skal rotationen af bjælken herudover fastholdes i symmetrilinjen. De fastholdte rande samt den påførte last er afbilledet på figur 4.9 for punktlast-situationen.



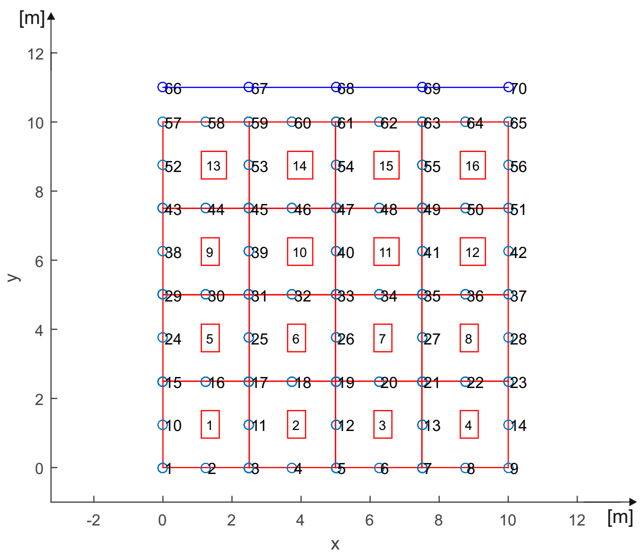
Figur 4.9: Den todimensionelle MATLAB-model med fastholdte rande for en situation med påført punktlast i symmetrilinjen. “Ønsket diskretisering” er angivet til fire.

4.2.6 Ligningssystemet og plot

For de frihedsgrader, som ikke har en foreskrevet flytning, løses den grundlæggende elementmetodeligning for det globale system givet ved udtryk (4.28). I dette udtryk er $[K]$ den globale stivhedsmatrice, hvilket vil sige den samlede stivhedsmatrice for både bjælke-fjederelementerne og jordelementerne. $\{U\}$ er de globale frihedsgraders flytninger og $\{F\}$ de globale frihedsgraders laster.

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \tag{4.28}$$

I dette tilfælde er det flytningerne, $\{U\}$, som ønskes bestemt. Efter flytningerne er bestemt, kan knudernes reaktioner, $\{R\}$, bestemmes ved udtryk (4.29). I dette udtryk er lastvektoren $\{F\}$ fra-

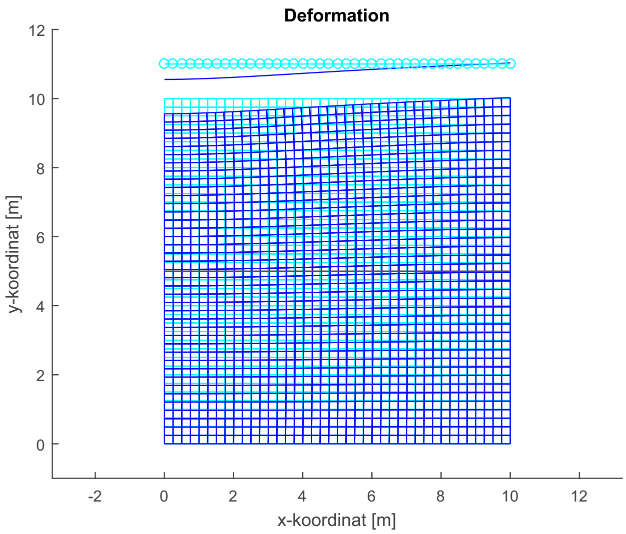


Figur 4.10: Mesh for den todimensionelle MATLAB-model. Knudenummereringen på denne figur følger angivelsen af koordinaterne og er ikke den nummerering, som stivhedsmatricen er beregnet ud fra. I dette plot er "ønsket diskretisering" jævnfør tabel 4.1 angivet til fire.

trukket, idet reaktionsvektoren $\{R\}$ ikke bør indeholde de foreskrevne laster.

$$\{R\} = [K] \cdot \{U\} - \{F\} \tag{4.29}$$

Plot af udeformeret samt deformeret mesh med laggrænse fremgår på henholdsvis figur 4.10 og 4.11. Lastsituationen, hvor en punktlast er placeret i symmetrilinjen, er den på figur 4.11 afbilledet.



Figur 4.11: Udeformeret samt deformeret mesh af den todimensionelle MATLAB-model samt angivelse af laggrænse. I dette plot er en skalering af flytningerne på 1:500 anvendt, og en punktlast på 1kN er påført i symmetrilinjen. Jævnfør tabel 4.1 er "ønsket diskretisering " angivet til 40.

4.3 Verifikation af MATLAB-modellen

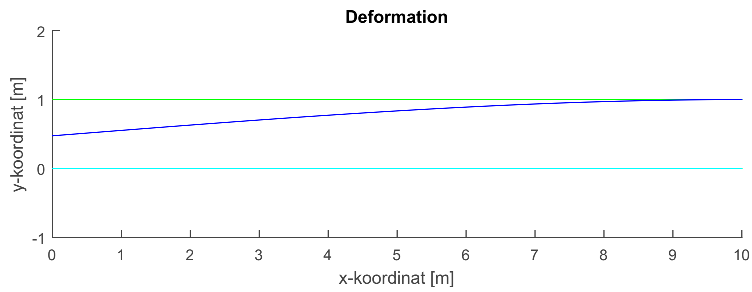
Ud over den simple ligevægtsverifikation, som blev påvist ved resultat (4.27), verificeres MATLAB-modellen desuden ved kendte analytiske løsninger samt ved en tilsvarende model i programmet PLAXIS. I nærværende afsnit beskrives først verifikationen af MATLAB-modellen ud fra de analytiske løsninger. Herefter skitseres kort opbygningen af modellen i PLAXIS og resultaterne fra de to programmer sammenholdes og diskuteres.

4.3.1 Verifikation ved kendte analytiske løsninger

For at verificere MATLAB-modellen sammenholdes de heraf beregnede flytninger med kendte analytiske løsninger. Under alle verificerende betragtninger anvendes dimensioner og last, som angivet i tabel 4.1, hvilket vil sige, at bjælkens længde er 10m, og lasten størrelse er 1kN. Parametrene anvendt til bjælken er beskrevet i tabel 4.7 for skinnerne.

I det følgende betragtes de opnåede maksimale flytninger i en situation, hvor alene bjælke-fjederelementet er aktivt. Disse resultater sammenholdes med kendte løsninger fra [Jensen et al., 2009]. For at denne verifikationsmetode kan anvendes, må fjedre og bundlinje ikke indgå, hvilket håndteres ved at fastholde flytningerne på bundlinjen og angive en fjederstivhed på $\kappa = 0\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$. I første situation indspændes bjælken i højre ende ved at låse både flytninger og rotationer, og der påføres en punktlast helt til venstre på bjælken. Hertil angiver [Jensen et al., 2009] udtryk (4.30) for beregning af flytningerne langs bjælken. Samme situationen giver i MATLAB-modellen en flytning på $u\,(0\mathrm{m}) = -0,0525\mathrm{m}$, og et plot af bjælkens nedbøjning fremgår på figur 4.12. Idet de to flytninger er ens, verificere dette bjælken for situationen.

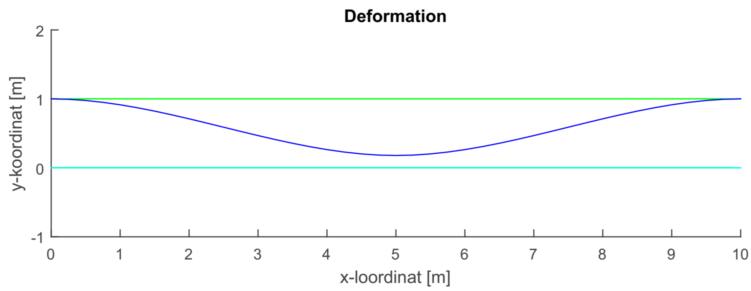
$$\begin{aligned} u\,(x) &= \frac{1}{2}\frac{QL^3}{EI}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{L} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \\ u\,(0\mathrm{m}) &= -0,0525\mathrm{m} \end{aligned} \tag{4.30}$$



Figur 4.12: Punktlast på 1kN påført i bjækens ydreste venstre knude. Bjælken er fastholdt i højre endeknude i begge frihedsgrader. Skaleringen anvendt i plottet er 1:10 og den numerisk største flytning er $-0,0525$m.

På samme måde påføres lasten midt på bjælken, hvor begge bjælkeender er indspændt. Den maksimale flytning for denne situation blev i MATLAB-modellen bestemt til $-8,2084\cdot10^{-4}$ m, hvor samme maksimale flytning blev opnået ved anvendelse af formel (4.31) [Jensen et al., 2009]. Et plot af flytningen beregnet i MATLAB-modellen fremgår på figur 4.13.

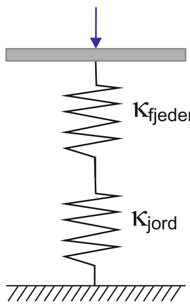
$$\begin{aligned} u_{max} &= \frac{1}{192}\frac{QL^3}{EI} \\ u_{max} &= -8,2084\cdot10^{-4}\mathrm{m} \end{aligned} \tag{4.31}$$



Figur 4.13: Punktlast på 1kN påført midt på bjælken. Bjælken er indspændt i begge ender. Skaleringen anvendt i dette plot er 1:1000 og den numerisk største flytning er $-8,2084 \cdot 10^{-4}$m.

Ved fortsat fastholdelse i begge bjælkeender påføres bjælken en linjelast i hele bjælkens udstrækning. Den maksimale flytning bør i dette tilfælde være $-4,10 \cdot 10^{-3}$m i følge [Jensen et al., 2009,s. 104]. Denne flytning blev tilmed opnået i MATLAB-modellen. De tre ovenstående betragtninger verificerer Bernoulli-Euler bjælkedelen af bjælke-fjederelementet i MATLAB-modellen.

For at verificere modelleringen af fjedre samt jordvolumen i MATLAB-modellen foretages en simpel betragtning, hvor jord og fjedrene i bjælke-fjederelementet er illustreret som fjedre i en serieforbindelse. Dette er illustreret på figur 4.14.



Figur 4.14: To fjedre i en serieforbindelse.

Fjederstivheden for jorden alene beregnes ved udtryk (4.32), og flytningen bestemmes ved udtryk (4.33), idet hele jordvolumenet betragtes som én fjeder. For at opnå samme resultat i MATLAB-modellen er det nødvendigt, at sætte Poissons forhold for jorden til $\nu = 0$, da volumenudvidelse på tværs af fjederens retning derved forhindres og den ønskede fjedereffekt forekommer. Tilmed er det nødvendigt at anvende den på figur 4.7 angivne lastfordeling for at sikre, at jorden deformerer ensartet. Efter, at der er taget højde for disse to forhold, erhverves nøjagtigt samme flytning af jordvolumenet i MATLAB-modellen.

$$\kappa_{jord} = \frac{EA}{L} = \frac{22,29 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 1\text{m} \cdot 10\text{m}}{10\text{m}} = 22,29 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \tag{4.32}$$

$$u_{jord} = \frac{F}{\kappa_{jord}} = \frac{1\text{kN/m} \cdot 10\text{m}}{\kappa_{jord}} = 4,486 \cdot 10^{-4}\text{m} \quad (4.33)$$

Den analytiske flytning for fjedrene, som indgår i bjælke-fjederelementet, er givet ved (4.34), og igen har flytningen bestemt i MATLAB-modellen præcis samme størrelse.

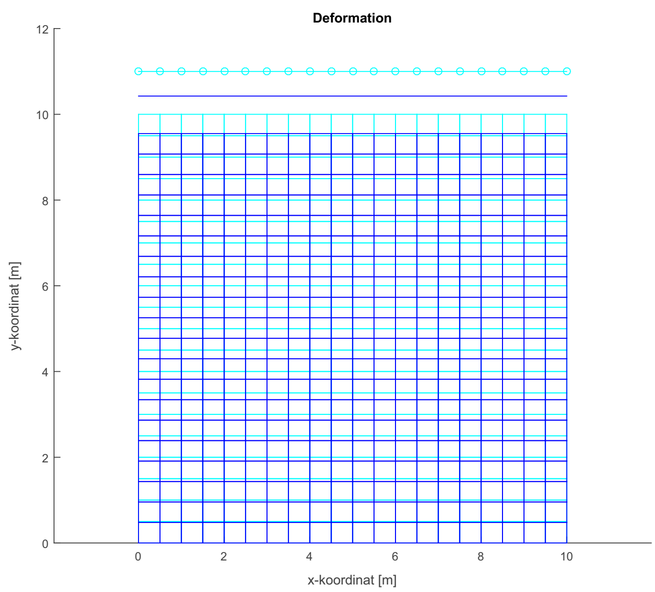
$$u_{fjedre} = \frac{F}{\kappa_{fjedre}} = \frac{1\text{kN/m} \cdot 10\text{m}}{80 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 1\text{m}} = 1,25 \cdot 10^{-4}\text{m} \quad (4.34)$$

Den samlede fjederstivhed for systemet bestående af en fjeder, som illustrerer jorden, i serieforbindelse med en fjeder, som illustrer fjedrene i bjælke-fjederelementet, er givet ved (4.35) [Symon, 1971]. Den samledede flytning for dette system er givet ved (4.36).

$$\kappa_{system} = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_{jord}} + \frac{1}{\kappa_{fjeder}}} = 1,743 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (4.35)$$

$$u_{system} = \frac{F}{\kappa_{system}} = 5,736 \cdot 10^{-4}\text{m} \quad (4.36)$$

MATLAB-modellen giver samme flytning for det samlede system, idet der er er anvendt et Poisson forhold for jorden på $\nu = 0$. Et plot af resultatet fremgår på figur 4.15.



Figur 4.15: Jævnt fordelt last påført bjælken. Den underliggende jord har et Poisson forhold på $\nu = 0$, idet alene den vertikale stivhed medtages og udvidelser i andre retninger derfor ikke medtages. Skaleringen anvendt er 1:1000, og den anvendte diskretisering er 20.

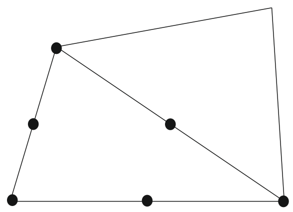
Ovenstående fjederbetragtninger verificerer den vertikale deformation af MATLAB-modellen. I det følgende afsnit sammenholdes MATLAB-modellen med en tilsvarende PLAXIS-model for at verificere den horisontale flytning. Denne sammenligning af de to modeller foretages tilmed for at verificere det samlede system i tilfælde, hvor bjælkens betydning inddrages. Bjælkens betydning bør fremgå ved at påføre bjælken en punktlast, da der således vil forekomme bøjning i bjælken og bjælkens bøjningsstivhed får derved betydning.

4.3.2 Verifikation ved sammenligning med PLAXIS-model

I det følgende beskrives kort opbygningen af den todimensionelle PLAXIS-model, hvorefter den maksimale flytning bestemt i PLAXIS for to lastsituationer sammenholdes med den maksimale flytning opnået i MATLAB-modellen for tilsvarende situationer. De to lastsituationer, som anvendes i sammenligningen, er listet nedenfor. I hver lastsituation betragtes herudover 3 lagdelings situationer.

- Lastsituation 1: En punktlast påført helt til venstre på bjælken
- Lastsituation 2: En jævnt fordelt last påført i hele bjælkens udstrækning

Idet den todimensionelle PLAXIS-model skal verificere den i afsnit 4.2 beskrevne todimensionelle MATLAB-model, dannes denne model på baggrund af samme antagelser og geometri. Imidlertid er det ikke muligt at anvende isoparametriske Q8-elementer i PLAXIS 2D, og der må i stedet vælges imellem et 6-knudet eller et 15-knudet trekantet element. Disse elementer er begge isoparametriske [bv, 2014,afsnit 5.3.1]. Det 6-knudede element vælges, idet dette tilnærmelsesvis er et halvt Q9-element og derfor tættest på Q8-elementet. Det 6-knudede element er afbilledet på figur 4.16.



Figur 4.16: Det 6-knudede trekantelement som anvendes til modellering af den understøttede bjælke samt underliggende jord i den todimensionelle PLAXIS-model.

I PLAXIS-modellen angives et borehul til definition af jorden. Jordlagenes dybde samt egenskaber er angivet i henholdsvis tabel 4.9 og 4.10. Af tabel 4.9 fremgår det, at de første tre lag er af samme jordtype. Disse ekstra laginddelinger af første jordtype muliggør en ekstra fin diskretisering af de øverste jordlag i den efterfølgende modellering. Standardværdien i PLAXIS er valgt for de parametre, som ikke fremgår af tabel 4.10. Dybden af jordlag 3 og 4 vil blive varieret.

Tabel 4.9: Borehul anvendt i todimensionel PLAXIS-model af en fjederunderstøttet bjælke med underliggende jord. Udstrækningen af jordlagene vil blive varieret.

Jordlag	**Dybde [m]**	**Jordtype**
Jordlag 1	$0,0$ til $-0,5$	Tør sand
Jordlag 2	$-0,5$ til $-1,0$	Tør sand
Jordlag 3	$-1,0$ til $-5,0$	Tør sand
Jordlag 4	$-5,0$ til $-10,0$	Kalksten

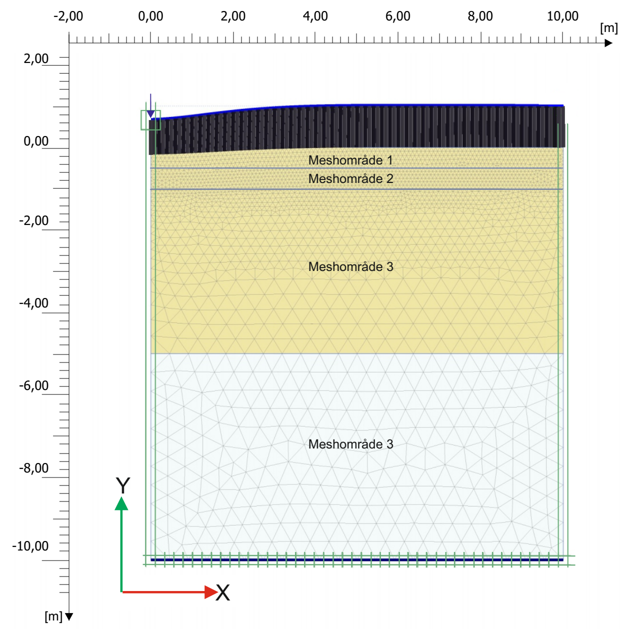
Tabel 4.10: Materialeegenskaber for de i tabel 4.9 angivne jordtyper.

Materialeegenskab/Jordtype	**Enhed**	**Tør Sand**	**Kalksten**	**Kommentar**
Generelt:				
Materialemodel		Lineær elastisk	Lineær elastisk	
Dræningstype		Ikke-porøs	Ikke-porøs	
Initial poretal e_{init}	$[-]$	$0,0001$	$0,0001$	Ofte 1 for ler og $0,5$ for sand, $e = \frac{porevolumen}{kornvolumen}$
Parametre:				
Elasticitetsmodul E	[MPa]	$22,29$	$15,00 \cdot 10^3$	
Poissons forhold ν	$[-]$	$0,3$	$0,25$	
Flow parametre:				
Ændring i permeabilitet c_k	$[-]$	$1,000 \cdot 10^{15}$	$1,000 \cdot 10^{15}$	Ofte $1,0$ for tørv, $0,2$ for ler og $1 \cdot 10^{15}$ for sand.
Interface:				
Styrke		Stiv	Stiv	
Indledende:				
K_0-deformation		Automatisk	Automatisk	

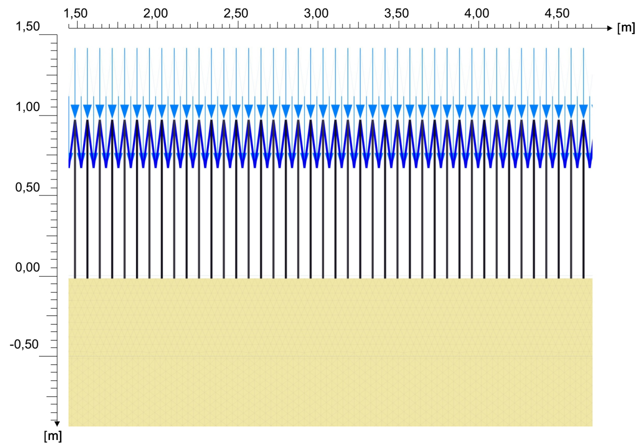
Bjælken modelleres som en plade, idet det herved er muligt at angive en bøjningsstivhed. Herudover angives en aksial stivhed EA_1, hvor A_1 er tværsnitsarealet i bjælkens længderetning. I MATLAB-modellen indgår den aksiale stivhed ikke, men det er blevet påvist, at det er nødvendigt at inddrage denne, hvis pladen skal virke som en bjælke. Eksempelvis gav en aksial stivhed på 1 kN/m alene det korrekte resultat i det punkt, hvor lasten blev påført. Inddragelsen af den aksiale stivhed fremgår tydeligt, når bjælken påføres en jævnt fordelt last, hvilket er afbilledet på figur 4.17. Fjedrene modelleres som “node-to-node anchors ” for hver $0,1$ m. Ved anvendelse af “node-to-node anchor” er det muligt at angive en fjederstivhed, hvorved den ønskede fjedervirkning forekommer. Det blev også forsøgt at modellere fjedrene ved ét interfaceelement med en længde på 10m, men deformationerne heraf var mere lig den for et samlet kontinuum, hvorfor bjælken eksempelvis ikke får mulighed for at deformere som forventet ved påførelse af en punktlast. Derfor giver “node-to-node anchors” en model, som er mere vellignende den MATLAB-modellen. Egenskaberne for pladen samt “node-to-node anchor”er angivet i tabel 4.11.

Tabel 4.11: Egenskaber for plade samt “node-to-node anchor” anvendt i den todimensionelle PLAXIS-model af en fjederunderstøttet bjælke med underliggende jord. Værdierne er pr. tykkelse.

Egenskab/elementtype	**Enhed**	**Plade**	**“Node-to-node anchor”**
Materialetype	$[-]$	Elastisk	Elastisk
Isotropisk	$[-]$	Ja	
Aksial stivhed EA_1	[kN/m]	$3612 \cdot 10^4$	$210 \cdot 10^6$
Bøjningsstivhed EI	[kNm^2/m]	6345	
Poissons forhold ν	$[-]$	$0,3$	



Figur 4.18: Randbetingelser for lastsituation 1 anvendt i den todimensionelle PLAXIS-model. Inddelingen af mesh-områder samt påføring af punktlast fremgår tilmed på denne figur.



Figur 4.17: Betydningen af den aksiale stivhed fremgår på denne figur, hvor værdien EA =1kN/m er anvendt i bjælke-elementerne. Det kan ses at bjælken deformerer på en måde som ikke kan lade sig gøre fysisk.

I PLAXIS forskrives den horisontale flytning på randene af jordvolumenet automatisk til $u = 0$, og i tillæg hertil foreskrives bundlinjen af jordvolumenet automatisk en vertikal flytning på $v = 0$. Dette fremgår på figur 4.18. I den lastsituation, hvor en punktlast påføres bjælkens venstre ende, er det tilmed nødvendigt at fastholde rotationen i modellens venstre side, idet symmetri er anvendt. Dette er tilmed angivet ved en firkant på figur 4.18. I tillæg til figur 4.18 skal det bemærkes, at vandspejlet er placeret i kote -10m, idet dette ikke medtages i beregningerne.

Som nævnt i forbindelse med borehullets angivelse, er sandlaget, som i tabel 4.9 spænder fra jordoverfladen til en dybde på -5 m, inddelt i tre lag i stedet for blot ét lag. Dette skyldes ønsket om muligheden for en finere diskretisering i de øverste to lag, hvorved tre “meshområder” forekommer. Dette er illustreret på figur 4.18. Kalklaget er ikke inddelt yderligere. Den diskretiseringsfinhed, som anvendes i sandlagets nederste meshområde, benyttes også i kalklaget, hvorfor disse to lag har samme meshtype.

Som omtalt ovenfor verificeres MATLAB-modellen ved sammenligning med PLAXIS-modellen for to lastsituationer, og i begge tilfælde er lastens størrelse 1 kN og bjælkens længde er 10m, som angivet i tabel 4.1. Under hver lastsituation undersøges ligheden af de to modeller desuden for tre forskellige laginddelinger: Et jordvolumen alene bestående af sand, et jordvolumen bestående af sand ned til kote -8 m og kalksten i de resterende 2 m og endelig en lagdeling med et jordvolumen, som består af sand i de første 5 m og kalksten i de sidste 5 m. Den sidste lagdeling fremgår på figur 4.18. For at MATLAB-modellen og PLAXIS-modellen er sammenlignelige, skal de have det samme antal fjedre, idet en forskel i antallet af fjedre vil resultere i en forskel i stivheden. Antallet af fjedre i PLAXIS-modellen er konstant 10 stk. pr. meter, hvor fjederantallet vokser med antallet af elementer i bjælkens længderetning i MATLAB-modellen. For at opnå samme stivhed af laget med fjedre i de to modeller anvendes fjederstivhederne angivet i udtryk (4.37).

$$\kappa_{MATLAB} = \frac{80 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 1\text{m}^2}{10\text{m}} = 800\frac{\text{kN}}{\text{m}} \qquad \kappa_{PLAXIS} = \frac{80 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 1\text{m}^2}{10 \cdot 10\text{m}} = 80\frac{\text{kN}}{\text{m}} \tag{4.37}$$

Flytningerne beregnet i de to programmer er listet i forhold til antal elementer for lastsituation 1 og 2 i tabel 4.12 og 4.13 for henholdsvis MATLAB-modellen og PLAXIS-modellen.

For lastsituation 1 er det den maksimale flytning for hver diskretisering, som er angivet i tabel 4.12 og 4.13. På figur 4.19 og 4.20 er de opnåede flytninger plottet i forhold til antal elementer for henholdsvis lastsituation 1 og 2. Heraf fremgår det, at de beregnede flytninger i MATLAB-modellen er stort set uafhængige af den anvendte diskretisering og dermed antallet af elementer, hvor flytningerne i PLAXIS stiger minimalt med antallet af elementer. Sammenlignes de beregnede flytninger i de to modeller, er denne for lastsituation 1 størst i MATLAB, og for lastsituation 2 er flytningen større i PLAXIS.

Den numerisk største flytning, som blev opnået for hver lastsituation under hver lagdeling i de to programmer er listet i tabel 4.14. I denne tabel er den procentvise forskel imellem de maksimale flytninger beregnet i MATLAB-modellen og de maksimale flytninger beregnet i PLAXIS-modellen tilmed angivet. Heraf fremgår det, at for lastsituation 1 er den største procentvise forskel imellem de to modeller $0,13\%$, hvor den største procentvise forskel for lastsituation 2 er $1,65\%$.

Den minimale forskel imellem de beregnede flytninger i de to programmer kan skyldes inddragelsen af bjælkens aksiale stivhed i PLAXIS-modellen, hvilket som nævnt ikke er inkluderet i MATLAB-modellen. Imidlertid vil den aksiale stivhed ikke spille ind på resultaterne under lastsituation 2, idet en jævnt fordelt last her er påført i hele bjælkens længde. Idet det netop er ved lasttilfælde 2, at den største forskel imellem flytningerne i de to modeller forekommer, indikerer dette, at inddragelsen af den aksiale stivhed i PLAXIS-modellen ikke har betydning. Forskellen imellem de beregnede flytninger i de to programmer kan i stedet skyldes, at jordvolumenet er modelleret med forskellige elementer i de to modeller. To trekantede elementer med hver 6 knuder i PLAXIS danner tilnærmelsesvis et Q9-element, hvilket netop har en centreret knude til forskel fra Q8-elementet. For at undersøge betydningen af det valgte element i PLAXIS-modellen, blev det undersøgt, hvorvidt anvendelsen af 15-knudede elementer ville ændre størrelsen på flytnin-

Tabel 4.12: Flytninger i forhold til anvendt diskretisering samt antal elementer beregnet i den todimensionelle MATLAB-model for de tre forskellige laginddelinger.

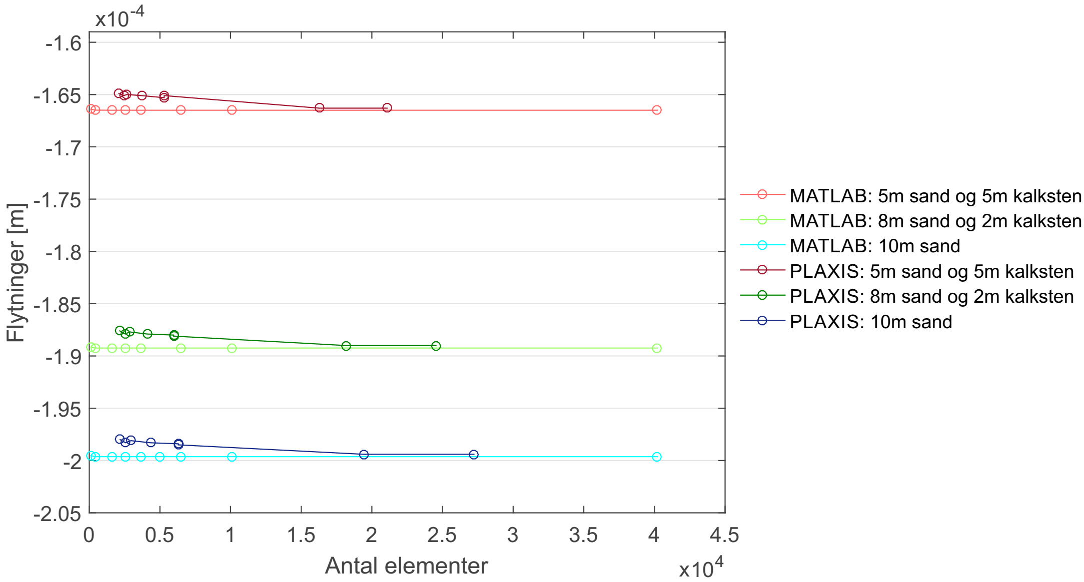
	Anvendt diskretisering	**Antal Elementer**	**Lagdeling 1: Flytninger** [m]	**Lagdeling 2: Flytninger** [m]	**Lagdeling 3: Flytninger** [m]
Lastsituation 1	10	110	$-1,9953 \cdot 10^{-4}$	$-1,8914 \cdot 10^{-4}$	$-1,6639 \cdot 10^{-4}$
	20	420	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,6649 \cdot 10^{-4}$
	40	1640	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,665 \cdot 10^{-4}$
	60	3660	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,665 \cdot 10^{-4}$
	80	6480	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,665 \cdot 10^{-4}$
	100	10100	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,665 \cdot 10^{-4}$
	200	40200	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,665 \cdot 10^{-4}$
Lastsituation 2	10	110	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$
	20	420	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$
	40	1640	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$
	60	3660	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$
	80	6480	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$
	100	10100	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$
	200	40200	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$

Tabel 4.13: Flytninger i forhold til antal elementer beregnet i den todimensionelle PLAXIS-model for de tre situationer.

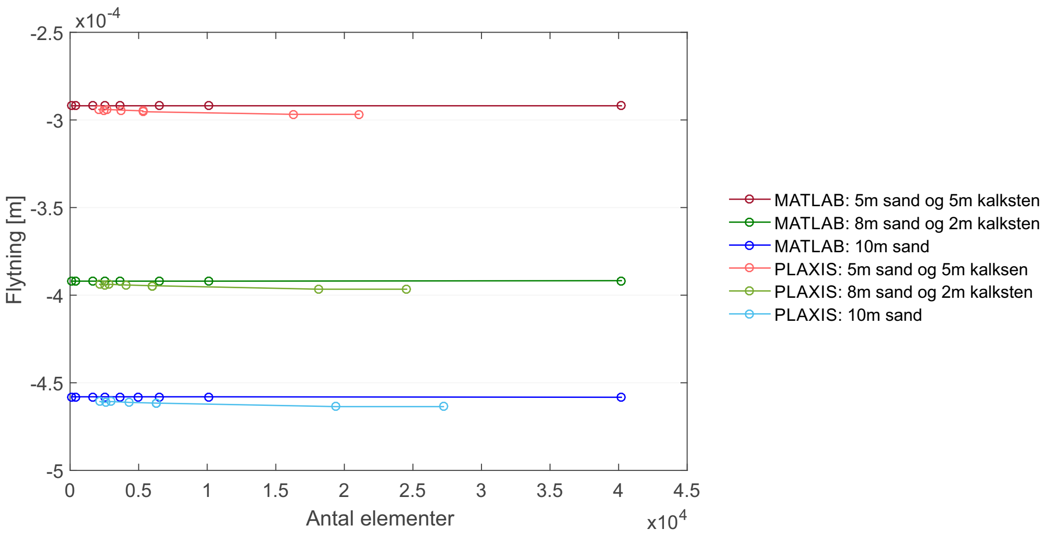
	Lagdeling 1:		**Lagdeling 2:**		**Lagdeling 3:**	
	Antal Elementer	**Flytninger** [m]	**Antal Elementer**	**Flytninger** [m]	**Antal Elementer**	**Flytninger** [m]
Lastsituation 1	2180	$-1,98 \cdot 10^{-4}$	2156	$-1,876 \cdot 10^{-4}$	2098	$-1,649 \cdot 10^{-4}$
	2576	$-1,983 \cdot 10^{-4}$	2853	$-1,877 \cdot 10^{-4}$	2444	$-1,651 \cdot 10^{-4}$
	4333	$-1,983 \cdot 10^{-4}$	4093	$-1,879 \cdot 10^{-4}$	3697	$-1,651 \cdot 10^{-4}$
	6296	$-1,984 \cdot 10^{-4}$	5970	$-1,88 \cdot 10^{-4}$	5298	$-1,653 \cdot 10^{-4}$
	19398	$-1,994 \cdot 10^{-4}$	18152	$-1,89 \cdot 10^{-4}$	16272	$-1,663 \cdot 10^{-4}$
	27225	$-1,994 \cdot 10^{-4}$	24539	$-1,89 \cdot 10^{-4}$	21077	$-1,663 \cdot 10^{-4}$
Lastsituation 2	2180	$-4,607 \cdot 10^{-4}$	2156	$-3,938 \cdot 10^{-4}$	2098	$-2,94 \cdot 10^{-4}$
	2576	$-4,612 \cdot 10^{-4}$	2853	$-3,938 \cdot 10^{-4}$	2661	$-2,94 \cdot 10^{-4}$
	4333	$-4,612 \cdot 10^{-4}$	4093	$-3,942 \cdot 10^{-4}$	3697	$-2,944 \cdot 10^{-4}$
	6296	$-4,616 \cdot 10^{-4}$	5970	$-3,946 \cdot 10^{-4}$	5298	$-2,948 \cdot 10^{-4}$
	19398	$-4,636 \cdot 10^{-4}$	18152	$-3,966 \cdot 10^{-4}$	16272	$-2,968 \cdot 10^{-4}$
	27225	$-4,636 \cdot 10^{-4}$	12035	$-3,966 \cdot 10^{-4}$	21077	$-2,968 \cdot 10^{-4}$

Tabel 4.14: De numerisk største flytninger opnået i MATLAB og PLAXIS for de tre lagdelinger for hver lastsituation samt den procentvise forskel heraf.

		Maksimal flytning MATLAB	**Maksimal flytning PLAXIS**	**Procentvis forskel** [%]
Last-situation 1	Lagdeling 1	$-1,9963 \cdot 10^{-4}$	$-1,994 \cdot 10^{-4}$	0,12
	Lagdeling 2	$-1,8924 \cdot 10^{-4}$	$-1,89 \cdot 10^{-4}$	0,13
	Lagdeling 3	$-1,665 \cdot 10^{-4}$	$-1,663 \cdot 10^{-4}$	0,12
Last-situation 1	Lagdeling 1	$-4,5827 \cdot 10^{-4}$	$-4,636 \cdot 10^{-4}$	1,15
	Lagdeling 2	$-3,9173 \cdot 10^{-4}$	$-3,966 \cdot 10^{-4}$	1,23
	Lagdeling 3	$-2,9191 \cdot 10^{-4}$	$-2,968 \cdot 10^{-4}$	1,65



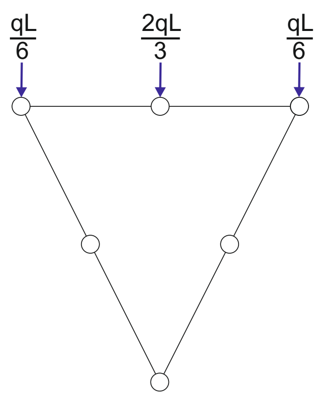
Figur 4.19: De i MATLAB-modellen samt PLAXIS-modellen beregnede flytninger for lastsituation 1 plottet i forhold til antal elementer. Det fremgår af grafen at flytningerne i MATLAB generelt er numerisk større og mindre meshafhængige. Når meshdiskretiseringen forfines i PLAXIS nærmer de numerisk største flytninger sig hinanden.



Figur 4.20: De i MATLAB-modellen samt PLAXIS-modellen beregnede flytninger for lastsituation 2 plottet i forhold til antal elementer. I denne situation findes de numerisk største flytninger i PLAXIS-modellen og når meshet forfines divergerer resultaterne fra hinanden modsat forventningen.

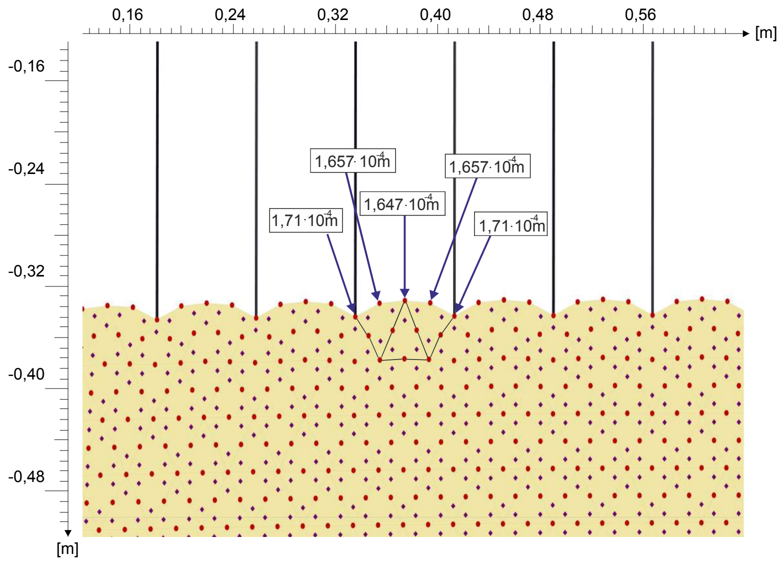
gen. Ændringen af elementtypen påvirkede imidlertid ikke resultaterne for de undersøgte tilfælde, hvilket indikerer, at resultaterne i PLAXIS ikke er påvirket af det valgte element.

Endeligt kan forskellen imellem de beregnede resultater i de to programmer skyldes den lastfordeling, som forekommer, når fjedrene viderefører lasten til jordvolumenet. Det blev i MATLAB påvist, at når lasten påføres bjælken og videreføres igennem fjedrene til jorden, fordeles lasten på jordelementernes knuder, som angivet på figur 4.7. Den lastfordeling, som bør forekomme på jordelementerne PLAXIS-modellen, bør følge samme fordeling som i MATLAB-modellen og er angivet på figur 4.21 [Reig]. Imidlertid er dette ikke tilfældet, hvilket fremgår på figur 4.22. Idet lastfordelingen på de øverste jordelementer ikke følger den på figur 4.21, dannes små buer imellem fjedrene. Dermed overføres lasterne mere og mere lokalt i takt med at meshet forfines. Dette stemmer således godt overens med at flytningerne bliver større i takt med at meshet forfines, da lasten bliver fordelt over mindre og mindre områder. Den numerisk største flytning opstår dermed direkte under et node-node anchor. Betydningen af disse buer er størst ved lastsituation 2, idet flytningen i lastsituation 1 måles lige under den påførte last, hvor lasten påføres over en fjeder. Dette indikerer, at denne lastfordeling har påvirket flytningerne, og kan være en af årsagerne til forskellen imellem de opnåede flytninger i de to programmer.



Figur 4.21: Lastfordeling på LST-element nødvendigt for at elementet deformerer ensartet, og lasten derved bliver jævnt fordelt.

På baggrund af, at forskellen imellem flytningerne opnået i PLAXIS og beregnet i MATLAB-modellen er forholdsvis minimal, må det konkluderes, at den todimensionelle MATLAB-model beskrevet i afsnit 4.2 er korrekt modelleret til det ønskede formål. Samtidig er der blevet anvendt og afprøvet en række modelleringsteknikker i PLAXIS for at genskabe forholdene modelleret i MATLAB. Disse erfaringer kan således også videreføres til de senere modeller, som opstilles i PLAXIS.



Figur 4.22: Flytningerne registreret i jordoverfladens knuder. Pilene angiver ikke flytningernes retning. Flytningernes størrelse indikerer, at lastfordelingen ikke er som de på figur 4.21 angivne.

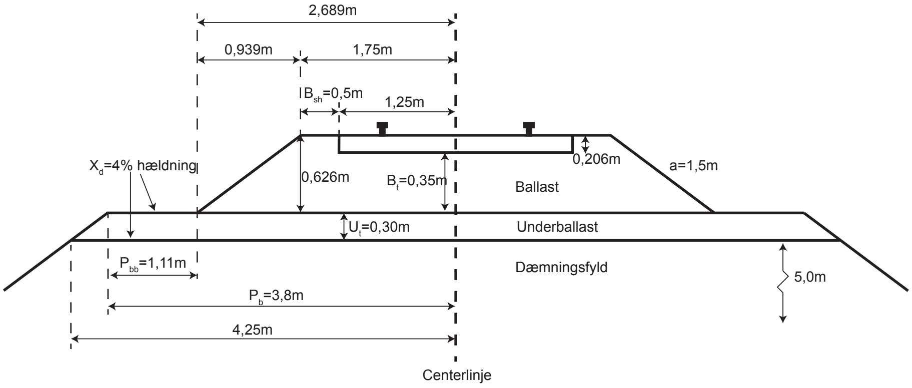
5 Influenslængden

MATLAB-modellen, som blev beskrevet i kapitel 4, anvendes i dette kapitel til at bestemme lastens fordeling i dæmningens lænderetning. På baggrund af denne lastfordeling etableres en tendens for influenslængden. Influenslængden er den længde, som lasterne i den tredimensionelle model skal fordeles ud på for at opnå en linjelast, der resulterer i den samme tilstand som en tilsvarende punktlast i 2D. Tendensen for influenslængden dannes ved at sammenholde resultater fra MATLAB-modellen, et dæmningstværsnit modelleret i PLAXIS 2D samt en dæmning modelleret i PLAXIS 3D. Tendens dannes både for anvendelses- samt brudgrænsetilstanden.

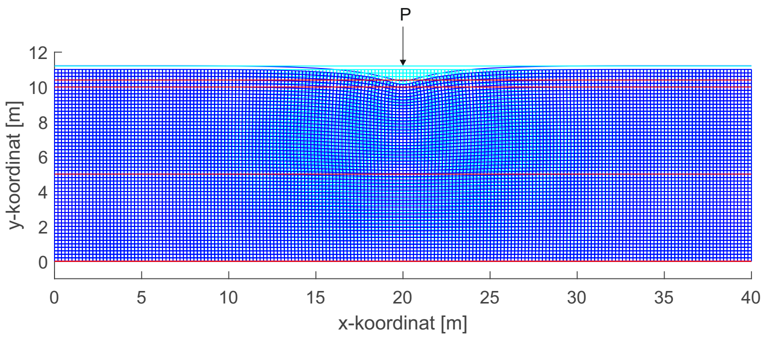
5.1 Dæmningsdimensioner

Dæmningsdimensionerne anvendt i nærværende kapitel er de i [Banedanmark, 2014] angivne minimumsmål, som skal anvendes ved etablering af nyanlæg. På samme måde anvendes skinnetype, materialer mm., som er forskrevet nyanlæg. Dette er uddybet i bilag D, og dæmningstværsnittet beregnet ud fra de angivne minimumsmål er afbilledet på figur 5.1. Af de på figur 5.1 angivne dimensioner er det alene højden af svelle, ballast, underballast samt dæmningsfyld, som anvendes i MATLAB-modellen.

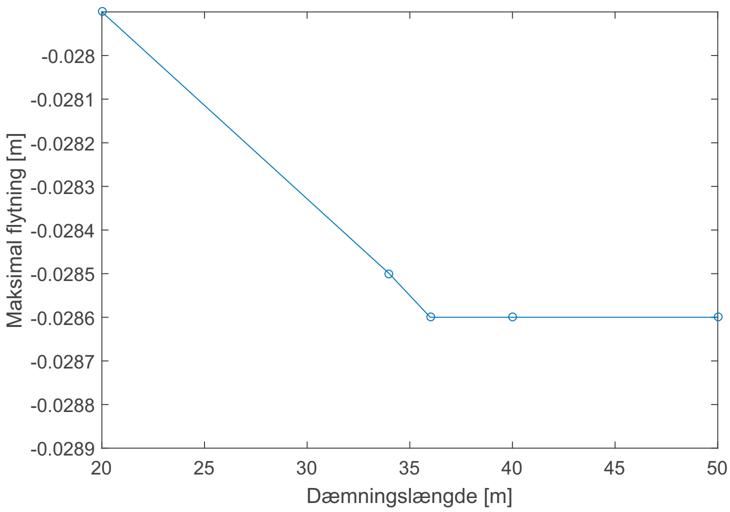
De beregnede flytninger samt brudlaster bør så vidt muligt ikke påvirkes af modellernes grænseflader. Idet en trykspredning finder sted både i dæmningen samt råjord herunder vurderes det, at en råjordsdybde på 10m bør være tilstrækkelig. For at vurdere, hvilken udstrækning modellerne bør have i dæmningens længderetning, undersøges det, ved hvilken dæmningslængde ændringen af flytningerne ophører. Undersøgelsen udføres ved hjælp af MATLAB-modellen, hvor flytningen af jordoverfladen i den halve dæmningslængde sammenholdes med en trinvis forøgelse af dæmningens længde. Situationen er afbilledet på figur 5.2, og på figur 5.3 er flytningerne plottet som funktion af dæmningens længde. Af figur 5.3 fremgår det, at dæmningslængdens påvirkning af flytningen ophører ved en længde på 36m. På baggrund heraf afrundes dæmningens længde til 40m. Skønt overstående dæmningslængde er fastsat ved hjælp af MATLAB-modellen, anvendes denne længde også i den tredimensionelle PLAXIS-model både i anvendelses- samt brudgrænsetilstanden.



Figur 5.1: Dæmningstværsnit ud fra de i tabel D.1 på side 97 angivne minimumsmål samt anvendelse af svelletype S99.



Figur 5.2: En punktlast på 250kN påføres i den halve dæmningslængde i MATLAB modellen.



Figur 5.3: Flytningen af jordoverfladen i den halve dæmningslængde plottet i forhold til dæmningens længde.

I alle beregninger er stivheden af svellen pr. tykkelse og dermed fjedrene $30 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$, hvilket er stivheden for beton [Den Store Danske]. I MATLAB-modellen samt i PLAXIS 3D anvendes jernbaneskinnens stivhed som angivet i tabel 4.7 på side 27. Banedæmningen modelleres med fire forskellige dæmningsfyld, som er listet i tabel 5.1. Af denne tabel er det alene elasticitetsmodulet og Poissons forhold som anvendes i MATLAB-modellen, hvor de øvrige parametre anvendes i PLAXIS. Foruden de i tabel 5.1 listede parametre anvendes standardparametrene i PLAXIS. Endeligt er materialeegenskaberne for ballast samt underballast listet i tabel 5.2.

I den tredimensionelle PLAXIS-model modelleres svellerne som én lang plade i hele dæmningens længde, frem for enkeltvise små plader til modellering af hver enkelt svelle. Dette skyldes, at en plade i PLAXIS ikke har en højde i modelbilledet, hvorfor jernbaneskinnen vil hvile på ballastlaget imellem svellerne, hvis disse modelleres enkeltvis. I et tilfælde, hvor en last påføres skinnen imellem to sveller, vil selve ballastlaget derfor deformere lokalt. Dette vil ikke forekomme i den virkelige situation, hvor et mindre tomrum findes imellem skinner og ballastskærver. På figur 5.4 fremgår det, at jernbaneskinnen ikke hviler på ballastskærverne. I det virkelige billede vil det derfor alene være svellerne, som fordeler lasten ned i dæmningen. Den enkeltvise modellering af svellerne i PLAXIS 3D samt den lokale flytning ved lastpåførelse imellem to sveller fremgår på

Tabel 5.1: Materialeegenskaber for de fire forskellige typer dæmningsfyld, som anvendes under etablering af et generelt udtryk for influenslængden i henholdsvis anvendelsesgrænsetilstanden og brudgrænsetilstanden. Materialeegenskaberne for de forskellige typer dæmningsfyld er fra [Jensen et al., 2009].

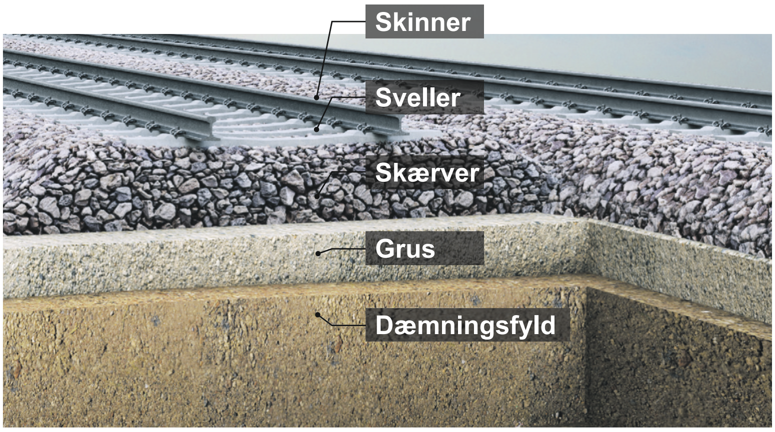
Anvendelsesgrænsetilstand					
	Moræneler 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Morænesand 1	Enhed
Materialemodel	Lineær elastisk	Lineær elastisk	Lineær elastisk	Lineær elastisk	[-]
Dræningstype	ikke porøs	ikke porøs	ikke porøs	ikke porøs	[-]
Rumvægt γ	18	18	18	22	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}\right]$
Initial poretal e_{init}	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	[-]
Elasticitetsmodul E	13109	131092	262185	74286	[MPa]
Poissons forhold ν	$0,3$	$0,3$	$0,3$	$0,3$	[-]

Brudgrænsetilstand					
	Moræneler 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Morænesand 1	Enhed
Materialemodel	Mohr-Coulomb	Mohr-Coulomb	Mohr-Coulomb	Mohr-Coulomb	[-]
Dræningstype	Udrænet (B)	Udrænet (B)	Udrænet (B)	Drænet	[-]
Mættet rumvægt γ_{sat}	22	22	22	22	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}\right]$
umættet rumvægt γ_{unsat}	18	18	18	22	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}\right]$
Initial poretal e_{init}	1	1	1	0,5	[-]
Elasticitetsmodul E	13109	131092	262185	74286	[MPa]
Poissons forhold ν	$0,3$	$0,3$	$0,3$	$0,3$	[-]
Forskydningsstyrke c_u/c'	75	750	1500	$0,2$	[kPa]
Friktionsvinkel φ	-	-	-	38	[°]
Dilatationsvinkel ψ	-	-	-	8	[°]

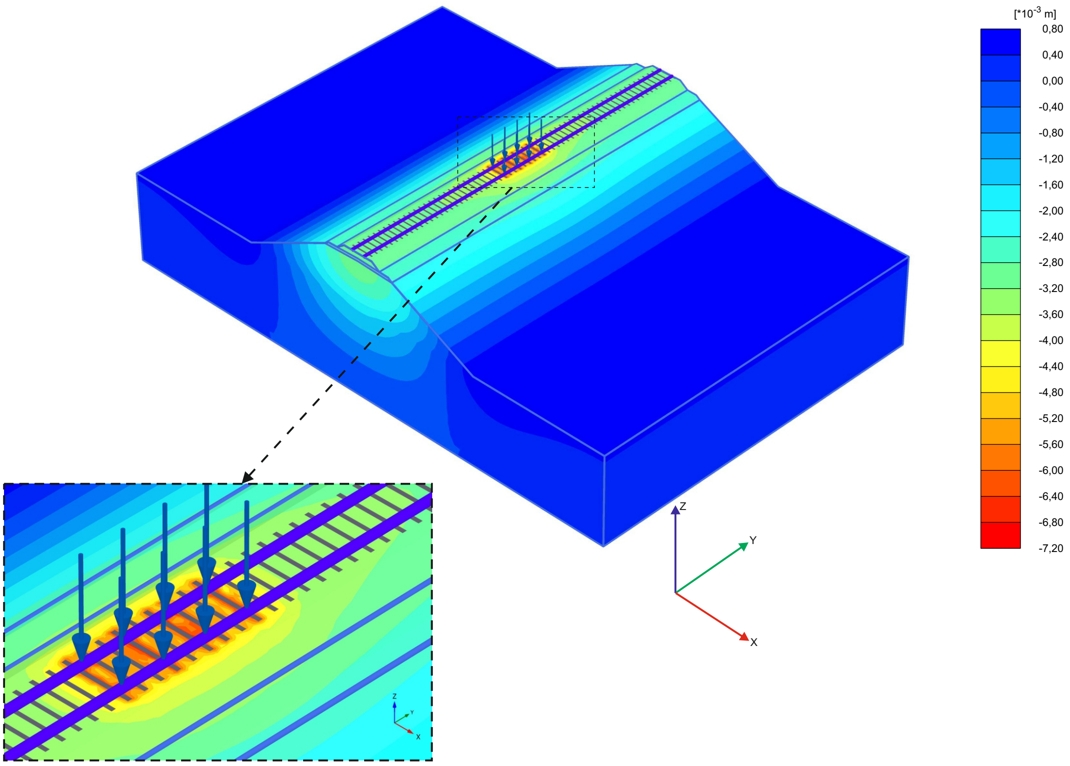
figur 5.5. I Anvendelsegrænsetilstanden modelleres pladen oven på ballastlaget, fremfor at den er beliggende nede i sporkassen. Dette er nærmere omtalt i bilag C.

Tabel 5.2: Materialeegenskaber for dæmningens ballast samt underballast. Parametrene er erfaringstal.

	Anvendelsesgrænsetilstand		Brudgrænsetilstand		
	Ballast	Underballast	Ballast	Underballast	Enhed
Materialemodel	Lineær elastisk	Lineær elastisk	Mohr-Coulomb	Mohr-Coulomb	[-]
Dræningstype	ikke porøs	ikke porøs	ikke porøs	ikke porøs	[-]
Rumvægt γ	18	17	17	18	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}\right]$
Initial poretal e_{init}	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	[-]
Elasticitets-modul E	80000	60000	80000	60000	[MPa]
Poissons forhold ν	$0,3$	$0,3$	$0,3$	$0,3$	[-]
Forskydningsstyrke c_u/c'	-	-	$0,2$	$0,2$	[kPa]
Friktionsvinkel φ	-	-	45	45	[°]
Dilatationsvinkel ψ	-	-	15	15	[°]



Figur 5.4: Skinnen hviler ikke på ballastskærverne, hvorfor alt lasten overføres til dæmningen ved hjælp af svellerne alene [Banedanmark].

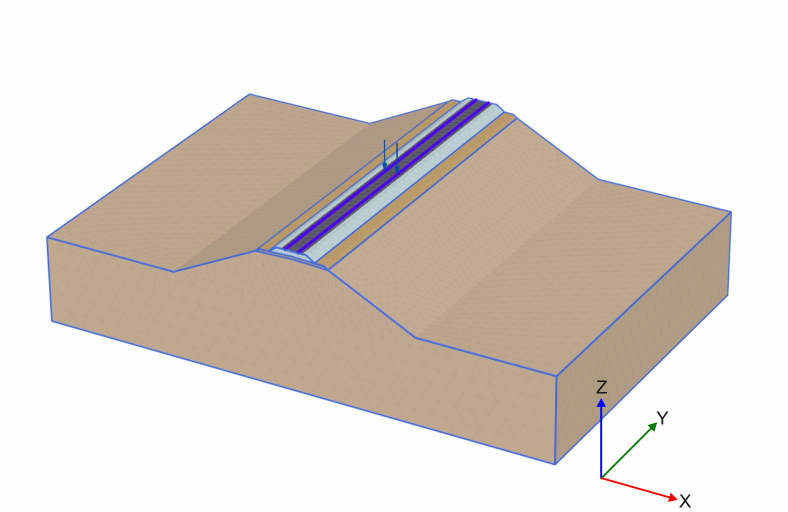


Figur 5.5: PLAXIS 3D model hvor svellerne er modelleret enkeltvis. Når en last påføres imellem to sveller forekommer en lokal flytning af ballastlaget.

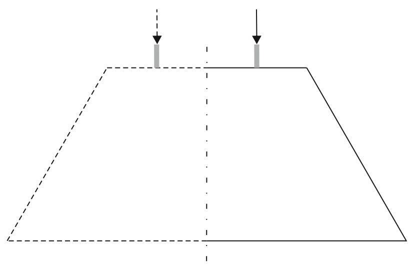
5.2 Influenslængden i anvendelsegrænsetilstand

I dette afsnit findes en tendens for influenslængden i anvendelsesgrænsetilstanden. Denne dannes ved en sammenligning af de maksimale flytninger i den to- og tredimensionelle PLAXIS-model og den todimensionelle MATLAB-model.

I det følgende betragtes en lastsituation, hvor en punktlast på $250\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ er påført hver skinne i den halve dæmningslængde. Dette svarer til en aksellast på omkring 25 tons, og situationen er afbilledet på figur 5.6. Idet alene den halve dæmning er modelleret i MATLAB-modellen, påføres tilsvarende én punktlast i denne model, hvilket er afbilledet på figur 5.7.



Figur 5.6: Lastsituation hvor en punktlast på 250kN er påført hver skinne i den halve dæmingslængde.

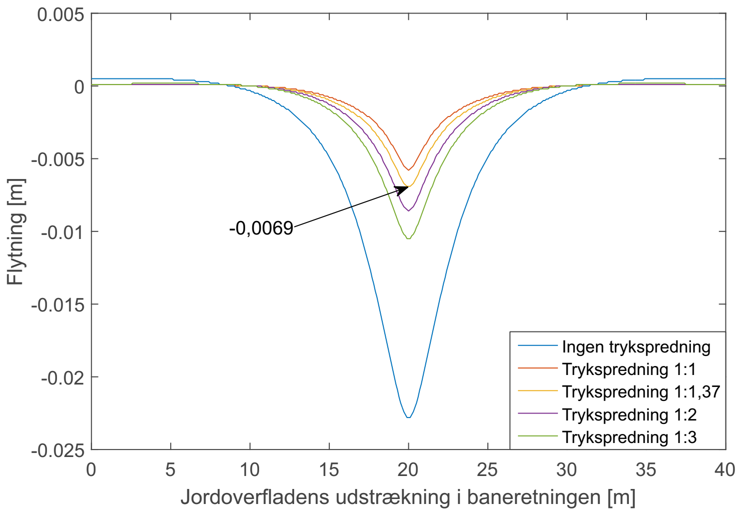


Figur 5.7: En punktlast på 250kN påføres bjælken i MATLAB-modellen. I denne model betragtes alene halvdelen af den på figur 5.6 afbillede tredimensionelle situation.

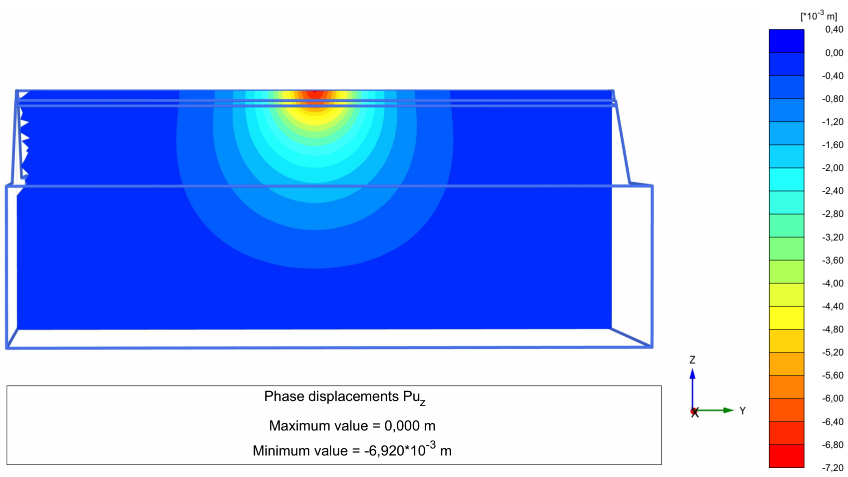
Som led i etableringen af en tendens for influenslængden undersøges betydningen af den i trykspredning, som anvendes i MATLAB-modellen. Det klarlægges på denne måde, hvilken trykspredning, som MATLAB-modellen bør have, for at opnå samme maksimal flytning, som den bestemt i PLAXIS 3D. Det er den maksimale flytning opnået i et snit i længderetningen under den påførte last i den tredimensionelle PLAXIS-model, som sammenholdes med flytningerne beregnet i MATLAB-modellen. På denne måde sammenholdes alene flytningerne i dæmningens længderetning, idet MATLAB-modellen netop er en todimensionel modellering af længderetningen af dæmningen.

På figur 5.8 fremgår de i MATLAB-modellen beregnede flytninger af dæmningens ballastlag lige under svellerne for flere forskellige trykspredninger. Dæmningsfyldet er i dette tilfælde moræneler 1, som blev angivet i tabel 5.1. De tilsvarende flytninger i banedæmningens længderetning bestemt i PLAXIS 3D fremgår på figur 5.9 og 5.10, hvor det på figur 5.10 er illustreret, at flytningerne er bestemt i et snit i dæmningens længderetning.

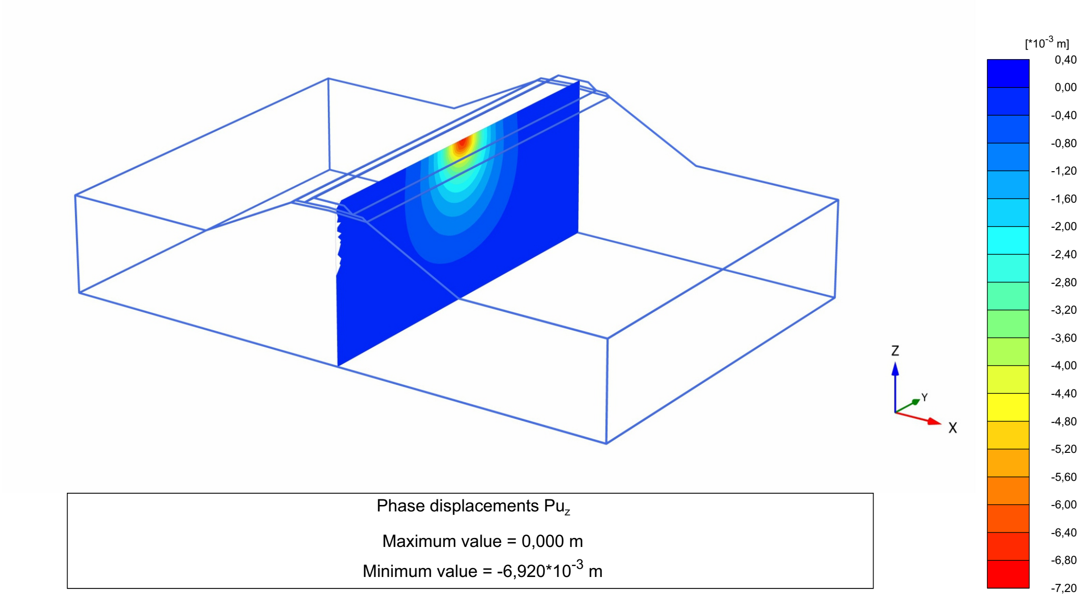
Af figur 5.9 fremgår det, at den maksimalt opnåede flytning i banedæmningens længderetning i et snit under lasten er $-6,92 \cdot 10^{-3}$m. Sammenlignes denne maksimale flytning med flytningskurverne på figur 5.8 fremgår det, at en trykspredning på 1 1,37 giver omtrent samme flytning i MATLAB-modellen. Af figur 5.8 fremgår det desuden, at positive flytninger kan forekomme et stykke væk fra lastens angrebspunkt. Dette skyldes, at jordens volumen er konstant, hvorfor de positive flytninger derved er en kompensation for de negative flytninger. Jorden hæver sig således et stykke væk fra lastens angrebspunkt.



Figur 5.8: Flytninger af ballastlaget ved påførelse af en punktlast på 250kN midt på bjælken i MATLAB-modellen. Dæmningsfyldet er i dette tilfælde den i tabel 5.1 definerede moræneler 1 med et Elasticitetsmodul på 13109MPa.



Figur 5.9: Flytninger under den ene jernbaneskinne i dæmningens længderetning bestemt i PLAXIS 3D. Dæmningsfyldet er den i tabel 5.1 angivne moræneler 1. En punktlast på 250kN er påført i den halve dæmningslængde.



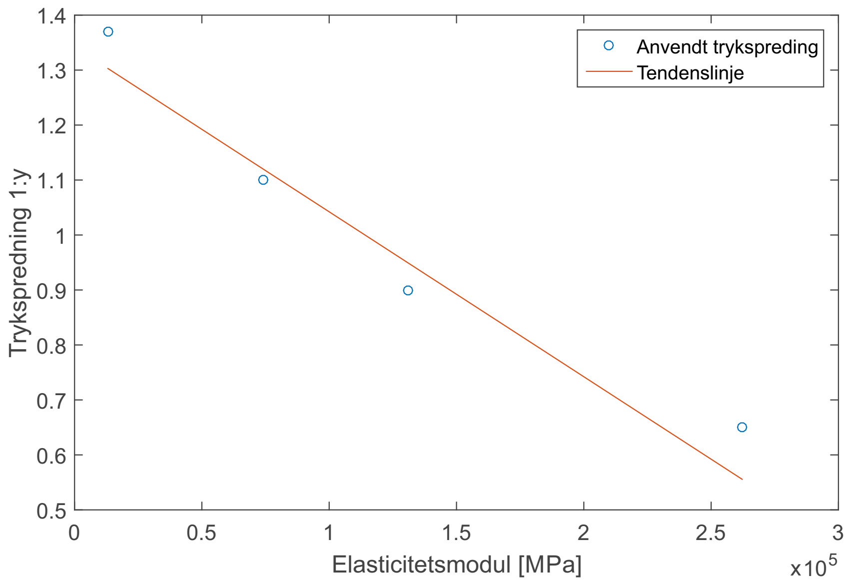
Figur 5.10: Snit i banedæmningens længderetning under den ene jernbaneskinne. Dette snit er afbilledet på figur 5.9.

På samme måde fremgår ballastlagets flytninger bestemt i MATLAB-modellen for de øvrige typer dæmningsfyld i bilag F på side 101 på henholdsvis figur F.1, F.3 og F.5, sammen med de fra PLAXIS 3D tilsvarende flytninger bestemt i dæmningens længderetning på figur F.2, F.4 og F.6. Den i PLAXIS beregnede maksimale flytning samt passende trykspredning og den heraf opnåede maksimale flytning beregnet i MATLAB er angivet i tabel 5.3. I denne tabel er de fire typer dæmningsfyld listet med stigende elasticitetsmodul, og det fremgår, at den trykspredning, som skal anvendes i MATLAB-modellen, er faldende med voksende elasticitetsmodul.

Tabel 5.3: Maksimum flytning opnået i PLAXIS 3D samt MATLAB. Den i MATLAB-modellen anvendte trykspredning, som giver den angivne maksimumsflytning er angivet.

Dæmnings-fyld	Elastictets-Modul [MPa]	Maksimum flytning PLAXIS [m]	Maksimum flytning MATLAB [m]	Anvendte trykspredning	Forskel imellem MATLAB & PLAXIS [%]
Moræneler 1	13109	$-6,92 \cdot 10^{-3}$	$-6,9 \cdot 10^{-3}$	1:1,37	0,3
Morænesand 1	74286	$-2,323 \cdot 10^{-3}$	$-2,3 \cdot 10^{-3}$	1:1,1	1
Moræneler 2	131092	$-1,773 \cdot 10^{-3}$	$-1,757 \cdot 10^{-3}$	1:0,9	0,9
Moræneler 3	262185	$-1,383 \cdot 10^{-3}$	$-1,417 \cdot 10^{-3}$	1:0,65	2,5

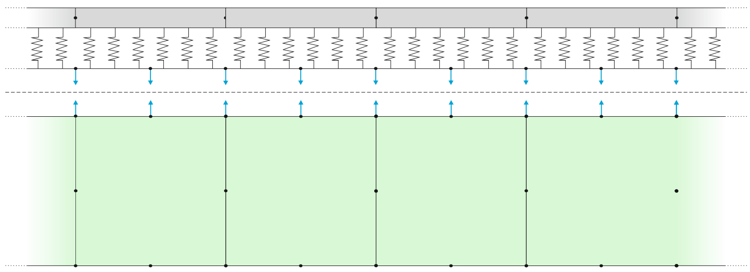
Den anvendte trykspredning er plottet i forhold til dæmningsfyldets elastisitestmodul på figur 5.11, hvoraf en lineær tendens er fundet. Af figuren fremgår det, at specielt første og sidste trykspredning afviger fra tendensen, hvilket også afspejler sig i korrelationskoefficienten på $R^2 = 0,9544$. Imidlertid hænger dette samme med, at den procentvise forskel i den maksimale flytning fundet i MATLAB og og PLAXIS for moræneler 3 er 2,5%, hvilket er knap tre gange mere end den anden største procentvise forskel. Denne forekom ved moræneler 2. Det kan derfor diskuteres, hvorvidt trykspredningen bestemt for moræneler 3 bør medtages ved dannelse af tendenslinjen. Det er imidlertid valgt at medtage denne, idet moræneler 3 netop er det dæmningsfyld med den største stivhed, og tendensen netop ønskes dannet for det størst mulige område af stivheder. Samtidig illustrer figur 5.11 fortsat, at trykspredningen, som skal anvendes i MATLAB-modellen for at opnå samme maksimal flytning, som den opnået i PLAXIS 3D, er faldende med voksende elasticitetsmodul.



Figur 5.11: Trykspredning anvendt i MATLAB-modellen for at opnå samme maksimum flytning som den bestemt i PLAXIS 3D. Trykspredningerne er plottet i forhold til dæmningsfyldets elasticitetsmodul. Tendenslinjen har udtrykket $-3 \cdot 10^{-6}x + 1,3422$ og korrelationskoefficienten er $R^2 = 0,9544$.

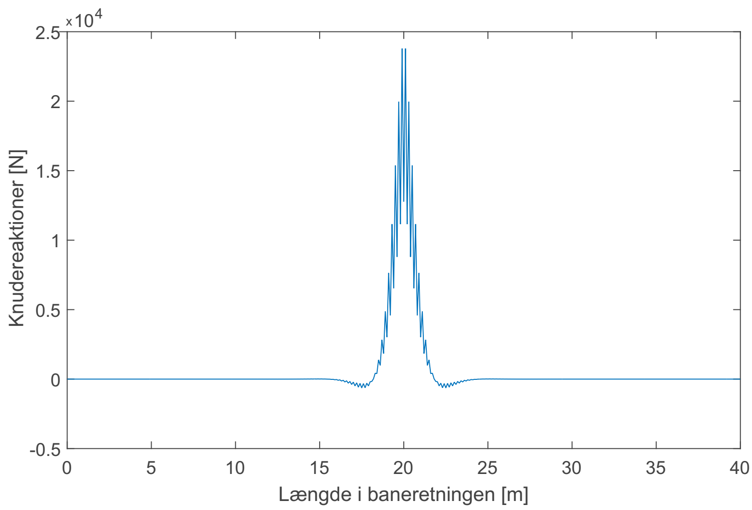
For at opnå et udtryk for influenslængden, skal reaktionerne, som svellerne og dermed fjedrene overfører til ballastlaget, bestemmes ved hjælp af MATLAB-modellen. Idet disse reaktioner netop svarer til den last, som ballasten påføres, vil lastfordelingen blive beskrevet ved hjælp af MATLAB-modellen. Ud fra en vurdering af denne fordeling, kan en tendens for influenslængden etableres, idet lasterne i dæmningens længderetning kan omregnes til linjelaster, som skal påføres dæmningens todimensionelle tværsnit.

Reaktionerne for det samlede system bestemmes ved udtryk 4.29 på side 36, hvilket vil resultere i en reaktion på 0kN i jordoverfladen. Dette skyldes, at frihedsgraderne i jordoverfladen netop er foreskrevet en kraft på 0kN, hvilket gør det muligt, at bestemme de ubekendte flytningerne $\{U\}$ ved udtryk 4.28 på side 35. For at bestemme reaktionerne i jordoverfladen foretages derfor et fiktivt snit således, at bjælke-fjederelementerne og jord-elementerne separeres. Dette fremgår på figur 5.12. Herved kan reaktionerne i jordoverfladen bestemmes efter samme princip som snitkræfterne i en bjælke beregnes ved et fiktivt snit igennem tværsnittet. Efter at de vertikale flytninger i jordoverfladen og herved også flytningerne i bjælke-fjederelementernes bundlinje er bestemt i den samlede model bestående af både bjælke-fjederelementer samt jordelementer, multipliceres disse vertikale flytninger med de respektive dele af stivhedsmatricen for bjælke-fjederelementerne. Herved erhverves de vertikale reaktioner i bjælke-fjederelementernes bundlinje. De samme men modsatrettede reaktioner vil opnås, hvis jordoverfladens flytninger multipliceres på den respektive del af stivhedsmatricen for jordvolumen. Dette fremgår af figur 5.12. Det er vigtigt, at den samlede stivhedsmtrice for bjælkeelementerne alene indeholder bidrag herfra, hvorfor indgangene i den globale stivhedsmatrix tilhørende de respektive frihedsgrader ikke kan anvendes, idet frihedsgraderne tilhørende bundlinjen af bjælke-fjederelementerne i den globale stivhedsmatrice både får et bidrag fra bjælke-fjederelementernes stivhed samt et bidrag fra jordelementernes stivhed. Dette blev nærmere forklaret i afsnit 4.2.4 på side 34. Årsagen til, at det netop bør være stivhedsmatricen alene for bjælke-fjederelementerne, som multipliceres de beregnede frihedsgrader skyldes, at alene bjælke-fjederelementerne betragtes når det fiktive snit opdeler modellen i to dele; en del bestående af bjælke-fjederelementer og en del bestående af Q8-jordelementer.

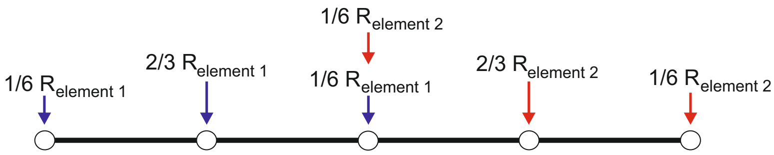


Figur 5.12: Ved et fiktivt snit ved modellens jordoverflade kan reaktionerne, som bjælke-fjederelementerne overfører til jordelementerne, bestemmes. Reaktioner af samme størrelse men med modsat retning overføres fra jordelementerne til bjælke-fjederelementerne.

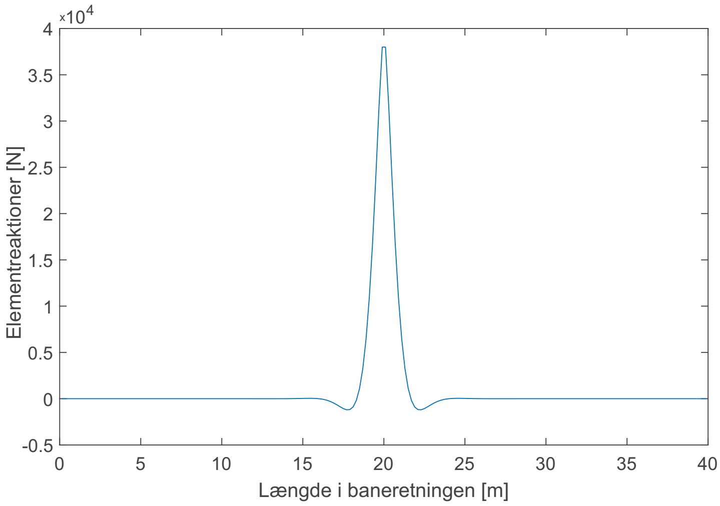
De opnåede reaktioner for en tilstand uden trykspredning i jordvolumenet er plottet på figur 5.13. Heraf fremgår det, at reaktionerne som forventet følger den på figur 4.7 på side 34 angivne fordeling, idet fjedrene netop sikrer, at lasten fordeles jævnt over jordoverfladen. For at opnå den samlede reaktion for hvert element multipliceres hver midterknude med $\frac{3}{2}$, hvorved reaktionen på elementet alene bestemmes ud fra reaktionen i elementets midterknude. Det er nødvendigt at bestemme elementets samlede reaktion på denne måde, idet bjælke-fjederelementerne sammenkobles ved hjælp af endeknuderne, hvorved disse endeknuder får et reaktionsbidrag fra begge elementer, som de sammenkobler. Dette er illustreret på figur 5.14. De beregnede elementreaktioner for de på figur 5.13 afbillede knudereaktioner er angivet på figur 5.15.



Figur 5.13: Reaktionsfordeling i bjælke-fjederelementernes knuder plottet i forhold til jernbanens længderetning. Dæmningsfyldet anvendt til dette plot er den i tabel 5.3 angivne moræneler 3. En punktlast på 250kN er påført midt på bjælken.



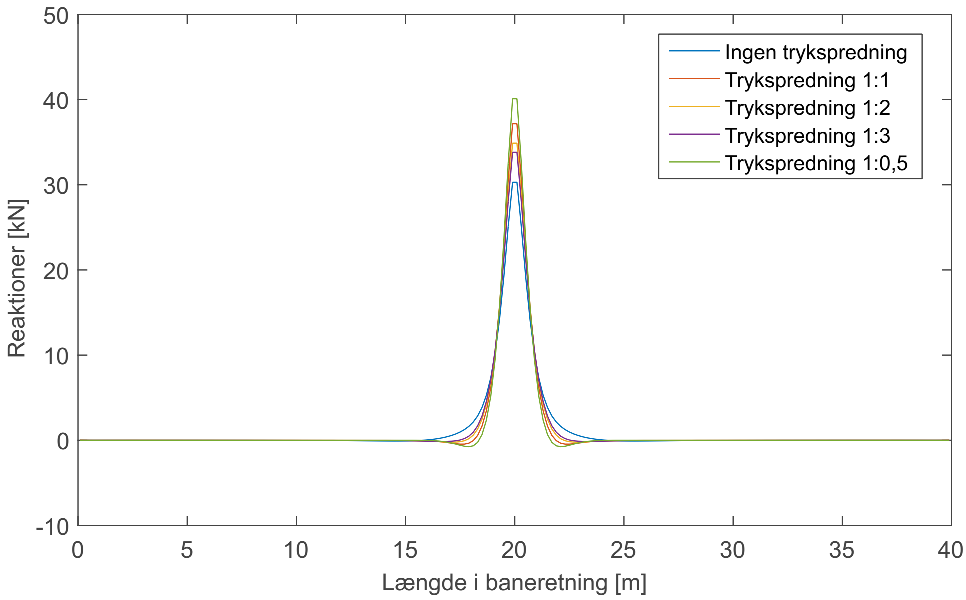
Figur 5.14: Knudereaktioner på bundlinjen af to bjælke-fjederelementer.



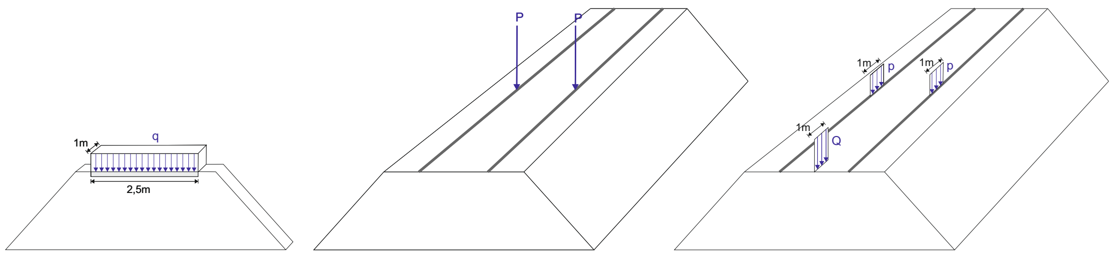
Figur 5.15: Fordeling af elementernes reaktioner angivet i jernbanens længderetning. Elementreaktionerne er beregnet ud fra de på figur 5.13 angivne knudereaktioner. En punktlast på 250 kN er påført midt på bjælken.

På figur 5.13 samt figur 5.15 fremgår det, at reaktionerne både har positive samt negative værdier, hvilket stemmer overens med, at jordoverfladens flytninger både kan have positive samt negative værdier. Det blev ovenfor belyst, hvordan den i MATLAB-modellen anvendte trykspredning har indflydelse på de beregnede flytninger. Nedenfor belyses det, hvorvidt den anvendte trykspredning har indflydelse på de beregnede reaktioner. Reaktionerne for en dæmning med et dæmningsfyld bestående af den i tabel 5.3 angivne moræeneler 1 er beregnet for fem forskellige trykspredninger. Dette er plottet som funktion af afstanden i banedæmningens længderetning på figur 5.16. Af denne figur fremgår det, at trykspredningen har betydning på størrelsen af den maksimale reaktion samt hældningskoefficienten på graferne lige omkrig den maksimale reaktion. Det fremgår af figur 5.16, at den største del af den samlede reaktion er fordelt på de 8m, som ligger omkring modellens midte og dermed lige under lastens angrebspunkt. Derfor er det relevant at undersøge, om trykspredningen har en betydning, som er nødvendig at inddrage eller om influenslængden er længere end den afstand, hvorover betydningen af trykspredningen kan registreres. Influenslængden bestemmes derfor for de på figur 5.16 afbilledede trykspredninger.

For at bestemme influenslængden beregnes først den maksimale flytning, som de to punktlaster på hver skinne medfører i dæmningstværsnittet af den tredimensionelle PLAXIS-model. Punktlasterne har en størrelse på 250kN. Det undersøges herefter, hvor stor linjelasten, som påføres svellen i den todimensionelle modellering af banedæmningstværsnittet skal være, for at opnå samme maksimale flytning, som den erhvervet for tværsnittet i den tredimensionelle model. De to laster sammenholdes herefter ved at omregne den todimensionelle linjelast, som blev påført dæmningstværsnittet, til en tredimensionel linjelast som påføres i dæmningens længderetning. Denne omregning er afbilledet på figur 5.17 og angivet i udtryk (5.1).



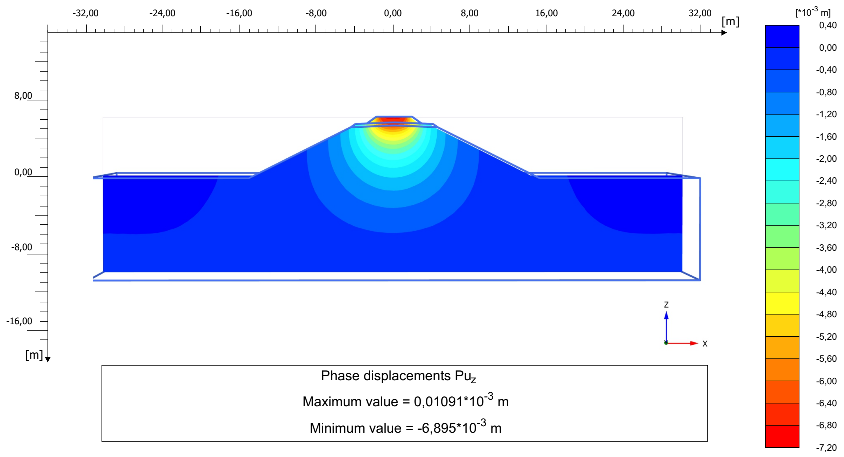
Figur 5.16: Trykspredningens betydning for de beregnede reaktioner for en dæmning med et dæmningsfyld bestående af moræeneler 1. Dette dæmningsfyld er angivet i tabel 5.3. Det fremgår at arealet under alle kurverne det samme, idet den samlede reaktion modsvarer den påførte punktlast.



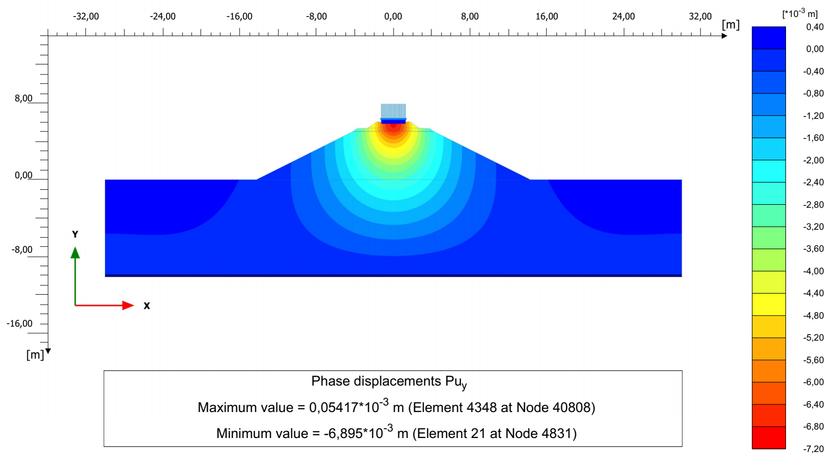
Figur 5.17: Omregning af lasten påført i dæmningens længderetning til en linjelast, som skal påføres dæmningens tværsnit i den todimensionelle model.

$$q\frac{\text{kN}}{\text{m/m}} \cdot 2,5\text{m} = Q\frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \rightarrow \quad \frac{Q\frac{\text{kN}}{\text{m}}}{2} = p\frac{kN}{m} \tag{5.1}$$

For moræneler 1, som er det på figur 5.16 anvendte dæmningsfyld, blev de vertikale flytninger på figur 5.18 og 5.19 opnået i henholdsvis et dæmningstværsnit fra en PLAXIS 3D model og et dæmningstværsnit modelleret i PLAXIS 2D. Det tværsnit, som undersøges i PLAXIS 3D, er placeret midt i dæmningens længderetning, hvilket er illustreret på figur 5.20. En jævnt fordelt linjelast på $25,12\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ er påført svellen i den todimensionelle model på figur 5.19, og af denne figur fremgår det, at denne linjelast medfører en maksimal flytning på $6,92 \cdot 10^{-3}$m. Dette er netop samme maksimale flytning, som de to punktlaster på hver 250kN medførte i den tredimensionelle model. Dette fremgår af figur 5.18. Sammenlignes de to tværsnit på figur 5.18 og 5.19 fremgår desuden lighed i flytningsbilledet.



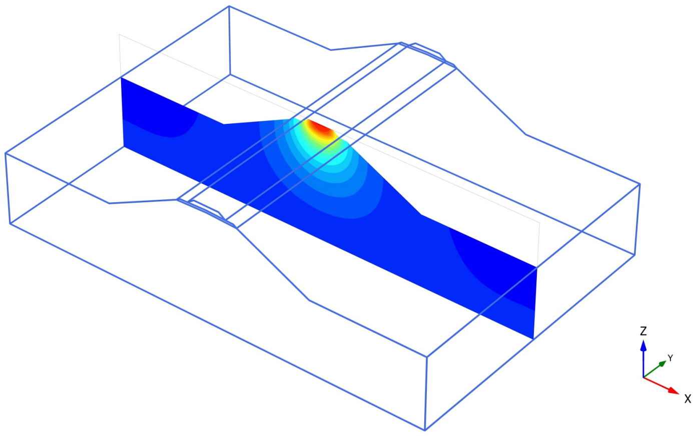
Figur 5.18: Dæmningstværsnit udtaget af en 3D PLAXIS-model. Dæmningsfyldet består af den i tabel 5.3 angivne moræneler 1. En punktlaster på 250kN er påført hver skinne i den halve dæmningslængde.



Figur 5.19: 2D PLAXIS-model af banedæmningstværsnit. Dæmningsfyldet har et elasticitetsmodul på 13109 MPa og er i tabel 5.3 angivet som moræneler 1. Den påførte linjelast er $25,21\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m/m}}$

Ved at omregne den todimensionelle jævnt fordelte linjelast, som er påført i hele svellens længde, til en linjelast i skinnens udbredelsesretning ved hjælp af udtryk (5.1) og figur 5.17, beregnes en linjelast på 63 $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$. Ved at fordele denne linjelast ud på de to skinner opnås en linjelast på $31,5\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$ pr. skinne. Dette fremgår af udtryk (5.2).

$$25,21\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m/m}} \cdot 2,5\mathrm{m} = 63\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \quad \rightarrow \quad \frac{63\dfrac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}}{2} = 31,5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \tag{5.2}$$



Figur 5.20: Dæmningstværsnit udtaget centralt i dæmningens længderetning.

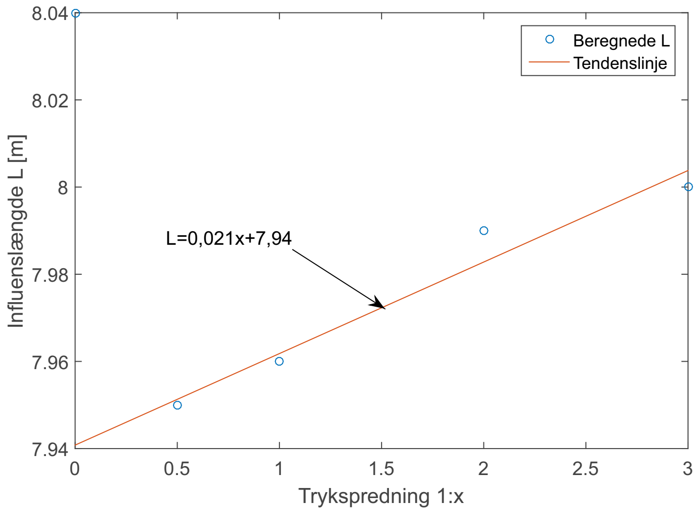
Ved at summere elementreaktionerne, som blev beregnet ved de fem forskellige trykspredninger og afbilledet på figur 5.16, og herefter fordele disse over den længde, hvorover reaktionerne er summeret, erhverves en jævnt fordelt linjelast, p i jernbaneskinnens retning. Ved at undersøge hvor stor en afstand, som reaktionerne skal summeres over, for at opnå linjelasten på $31,5\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$, beregnes de i tabel 5.4 angivne længder for de på figur afbillede 5.16 reaktionsfordelinger. De beregnede længder er netop et udtryk for influenslængden, da de beskriver over hvilken afstand reaktionerne og dermed lastens virkning skal medtages i dæmningens længderetning, for at opnå en linjelast, som giver samme flytning i det todimensionelle banedæmningstværsnit, som den flytning som de to punktlaster og dermed reaktionerne medfører i den tredimensionelle model. Influenslængden L_I defineres ved udtryk 5.3. I dette udtryk er R_n reaktionen for element n, L_n er influenslængden for element n, og p er defineret på figur 5.17.

$$L_I = \frac{\sum R_n}{p} = \sum L_n \tag{5.3}$$

Tabel 5.4: Beregnet influenslængde i forhold til reaktionsfordelingen opnået for de fem forskellige trykspredninger på figur 5.16.

Anvendte trykspredning	Beregnet influenslængde [m]
Ingen	8,04
1:0,5	7,95
1:1	7,96
1:2	7,99
1:3	8,0

De i tabel 5.4 angivne længde viser, at den i MATLAB-modellen anvendte trykspredningens betydning er minimal for influenslængden. Derfor inddrages en variation af trykspredningen ikke i det videre studie. På figur 5.21 er de beregnede længder plottet som funktion af den anvendte trykspredning, hvoraf det fremgår, at en trykspredning på 1:2 resulterer i en middel af de beregnede influenslængder. I bilag E på side 99 er det ved hjælp af en 3D PLAXIS-model desuden undersøgt, hvilken trykspredning som forekommer ned igennem banedæmningen. Ved en gradvis reducering af dæmningens anlæg blev det påvist, at flytningerne er stort set upåvirket af anlægsreduktionen såfremt anlægget er minimum $0,5$. Dette svarer til en trykspredning på 1:2. Ved et anlæg på $0,25$ bliver flytningerne reduceret betragtelig, hvilket skyldes, at trykspredningen, som forekommer ned igennem dæmningen, bliver forhindret af dæmningens geometriske begrænsning. Ved denne undersøgelse blev det derfor påvist, at en trykspredningen i dæmningen er befinder sig i intervallet: 1:2 $\leq$ Trykspredning $<$ 1:4. På baggrund af denne konklusion, samt at en middel af de beregnede infulenslængder listet i tabel 5.4 forekommer ved en trykspredning på 1:2, anvendes en trykspredning på 1:2 i det følgende.



Figur 5.21: Beregnede influenslængder for de på figur 5.16 afbillede reaktionsfordelinger plottet i forhold til den i MATLAB-modellen anvendte trykspredning. Tendenslinjen er dannet uden inddragelse af influneslængden for tilfældet uden trykspredning, idet dette punkt ligger helt uden for den generelle tendens. Tendenslinjen har en korrelationskoefficient på $R^2 = 0,96$.

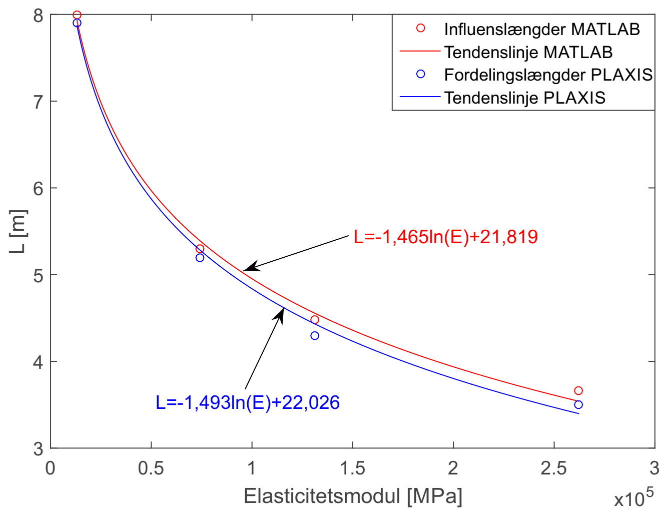
På samme måde som den todimensionelle linjelast, der giver samme flytning som den afbilledet i det tredimensionelle tværsnit, blev bestemt for moræneler 1, er linjelasten blevet bestemt for de i tabel 5.1 øvrige tre typer dæmningsfyld. Tværsnittene udstaget af de tredimensionelle PLAXIS-modeller samt tværsnittene modelleret i PLAXIS 2D fremgår på den vedlagte CD, hvor de beregnede flytninger samt den todimensionelle linjelast er angivet i tabel 5.5. I denne tabel fremgår tilmed de heraf omregnede tredimensionelle linjelaster. I det følgende defineres fordelingslængden, $L_{Fordeling}$, ved udtryk (5.4), hvilket svarer til den længde, som den på hver skinne påførte punktlast P, skal fordeles ud på, for at opnå den beregnede tredimensionelle linjelas p. Punktlasten P og den tredimensionelle linjelast p er angivet på figur 5.17. Fordelingslængden beregnet for hver enkelt dæmningsfyld er angivet i tabel 5.5 og plottet som funktion af dæmningsfyldenes elasticitetsmodul på figur 5.22.

$$L_{Fordeling} = \frac{P}{p} \tag{5.4}$$

Denne såkaldte fordelingslængde, $L_{Fordeling}$, tager imidlertid ikke højde for den distribution, som reaktionerne har og dermed den måde, hvorpå lasten er blevet fordelt ned igennem svellerne. Dette er til gengæld medtaget ved bestemmelsen af influenslængden, L_I, idet denne netop bestemmes ud fra reaktionsfordelingen ved udtryk (5.3). Reaktionsfordelingen er bestemt for de resterende typer dæmningsfyld ved hjælp af MATLAB-modellen, hvilket er afbilledet på figur G.1, G.2 og G.3 i bilag G på side 105. Ud fra de beregnede reaktionsfordelinger er det på samme måde som ovenfor bestemt, over hvilken længde L_I at reaktionerne skal medtages for at opnå de tredimensionelle linjelaster, som er angivet i tabel 5.5. De beregnede influenslængder er listet i tabel 5.5 og plottet som funktion af dæmningsfyldets elasticitetsmodul på figur 5.22. De to tendenslinjer på figur 5.22

Tabel 5.5: Beregnede flytninger i PLAXIS 2D og PLAXIS 3D, anvendt linjelast i PLAXIS 2D, omregnet 3D linjelast samt beregnet fordelingslængde $L_{Fordeling}$ er angivet i tabellen. Desuden er influenslængde L_I, beregnet ud fra den i MATLAB bestemte reaktionsfordeling, angivet.

	Moræneler 1	Morænesand 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Enhed
Elasticitetsmodul E	13109	74286	131092	262185	MPa
Maksimal flytning 2D og 3D	$-6,92 \cdot 10^{-3}$	$-2,323 \cdot 10^{-3}$	$-1,773 \cdot 10^{-3}$	$-1,381 \cdot 10^{-3}$	m
Linjelast 2D q	$25,21$	39	$46,33$	$57,5$	$\frac{kN}{m/m}$
Omregnet 3D linjelast p	$31,5$	$48,1$	$57,9$	$71,9$	$\frac{kN}{m}$
$L_{Fordeling}$	$7,9$	$5,2$	$4,3$	$3,5$	m
L_I	$7,99$	$5,3$	$4,48$	$3,66$	m



Figur 5.22: Blå punkter samt linje: Beregnet $L_{Fordeling}$ plottet som funktion af dæmningsfyldets elasticitetsmodul samt tendenslinjen herfor. Røde punkter samt linje: L_I plottet som funktion af dæmningsfyldets elasticitetsmodul samt den herfor opnåede tendenslinje.

er begge logaritmiske og har en form, som er forholdsvis ens. Ved at sammenholde figur 5.16, figur G.1, figur G.2 og figur G.3 med de beregnede influenslængder, L_I, listet i tabel 5.5 fremgår det, at en reaktionssum $\sum R_n$ svarende til omkring 100% af den påførte last P skal inddrages for at opnå den tredimensionelle linjelast p. Den procentvise andel af den påførte last P_{andel} er således defineret ved udtryk 5.5.

$$P_{andel} = \frac{L_I \cdot p}{P} = \frac{\sum R_n}{P} \tag{5.5}$$

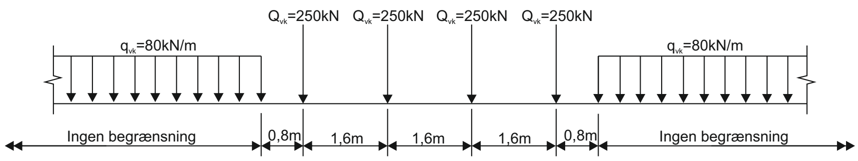
Den nøjagtige P_{andel}, som skal inddrages ved hver type dæmningsfyld, er listet i tabel 5.6, hvoraf det fremgår, at gennemsnittet af P_{andel} mere præcist er 103%, og at P_{andel} desuden er svagt stigende med voksende elasticitetsmodul. Årsagen til, at en reaktionssum $\sum R_n$ på omkring 100% af den påførte last P forekommer over en strækning, som er kortere end hele den modellerede længde skyldes, at også negative reaktioner forekommer. Dette fremgår blandt andet på figur 5.16. Forekomsten af både positive samt negative reaktioner skyldes, at de beregnede flytninger netop er både positive samt negative, hvilket fremgår på figur 5.8. Ved at sammenligne figur 5.16, figur G.1, figur G.2 og figur G.3 med de beregnede influenslængder, L_I, listet i tabel 5.5 fremgår det desuden, at elementreaktionerne netop er begyndt at skifte fortegn inden for området afgrænset af L_I.

Tabel 5.6: Andel af reaktionerne beregnet i MATLAB-modellen, som skal inddrages for at opnå den i tabel 5.1 angivne linjelast for hver type dæmningsfyld.

	Moræneler 1	Morænesand 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Gennemsnit	Enhed
P_{andel}	$100,6$	102	$103,6$	$105,4$	103	%

På baggrund af ovenstående kan det konkluderes, at influenslængden i anvendelsesgrænsetilstanden, kan skønnes ud fra tendenslinjen for L_I på figur 5.22 eller beregnes ved hjælp af MATLAB-modellen, hvor influenslængden udgør den afstand hvorover de summerede reaktioner $\sum R_n$ modsvarer rundt regnet $100si\%$ af den påførte last P.

Ovenstående er beskrevet ud fra en lastmodel, hvor en punktlast på 250kN er påført hver skinne i den halve dæmningslængde. Denne last svarer til et akseltryk på omkring 25tons. Den anvendte materialemodel i både MATLAB-modellen samt PLAXIS 2D og PLAXIS 3D er lineær elastisk, hvorfor de opnåede flytninger, reaktionsfordelinger mm. kan interpoleres lineært, hvis en anden størrelse punktlast ønskes beskrevet. På samme måde kan superposition anvendes, hvis et andet lasttilfælde ønskes beskrevet. I det følgende eftervises dette for en lastsituation, hvor fire punktlaster på -250kN påføres hver jernbaneskinne med en indbyrdes afstand svarende til den angivet i lastmodel 71. Lastmodel 71 er afbilledet på figur 5.23 og er en lastmodel, som ifølge [Dansk Standard, 2003,afsnit 6.3] beskriver normal togtrafik.



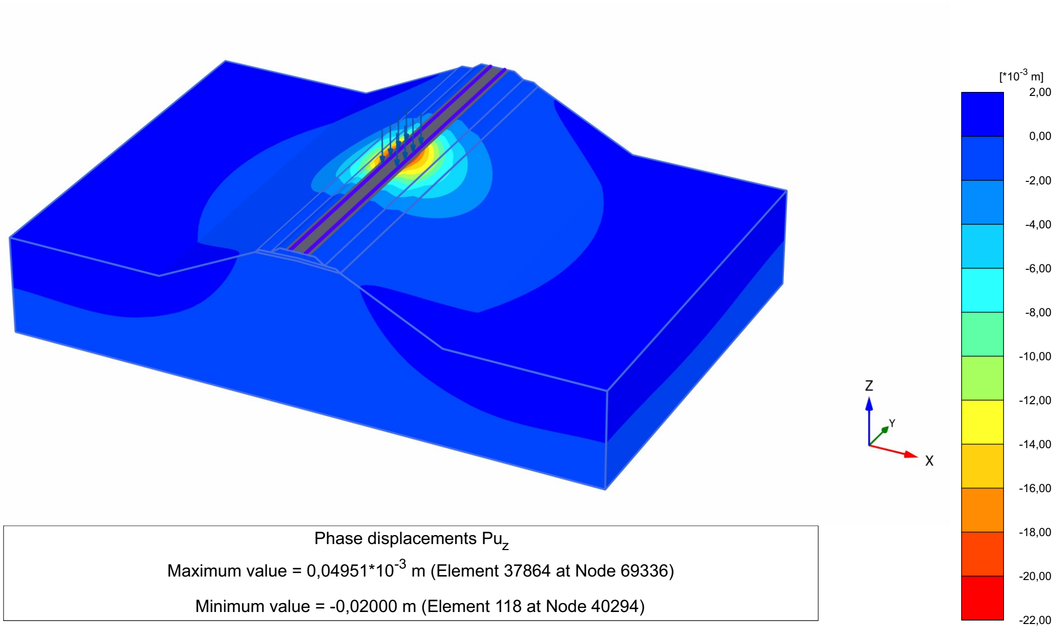
Figur 5.23: Lastmodel 71 (LM71) med karakteristiske værdier for de vertikale laster [Dansk Standard, 2003,figur 6.1].

Når superposition anvendes kan den kombinerede effekt af to eller flere laster beregnes. I tilfældet med lastmodel 71 betyder dette, at ved at udtage dæmningstværsnit i den tredimensionelle PLAXIS-model i afstandene $0,8$m samt $2,4$m fra dæmningens midte, hvor lasten i ovenstående tilfælde blev påført, og herefter kombinere de i tværsnittene fundne flytninger, kan den kombinerede effekt bestemmes. Denne superpositionsmetode bør give samme resultat, som en modellering af den fulde lastmodel 71. At dette er tilfældet fremgår i bilag H. På samme måde som i PLAXIS 3D kan superposition anvendes for resultaterne fra MATLAB-modellen.

Med samme tilgang som ovenfor, hvor alene én punktlast blev påført hver skinne, bestemmes flytningerne nu i den tredimensionelle situation ved PLAXIS 3D, hvor fire punktlaster påføres hver skinne. Dette er afbilledet på figur 5.24, hvor dæmningsfyldet består af den i tabel 5.3 angivne moræneler 1. Det undersøges herefter, hvor stor en linjelast dæmningstværsnittet skal påføres i den todimensionelle situation for at opnå samme maksimale flytning i tværsnittet. Den maksimale flytning, den anvendte linjelast i 2D q, den heraf omregnede tredimensionelle linjelast p samt den heraf beregnede fordelingslængde $L_{Fordeling}$ er angivet i tabel 5.7, hvor den anvendte lastmodel er lastmodel 71. Ved beregning af fordelingslængden tages der højde for de nu fire punktlaster. Resultaterne fra PLAXIS 2D samt PLAXIS 3D findes på den vedlagte CD.

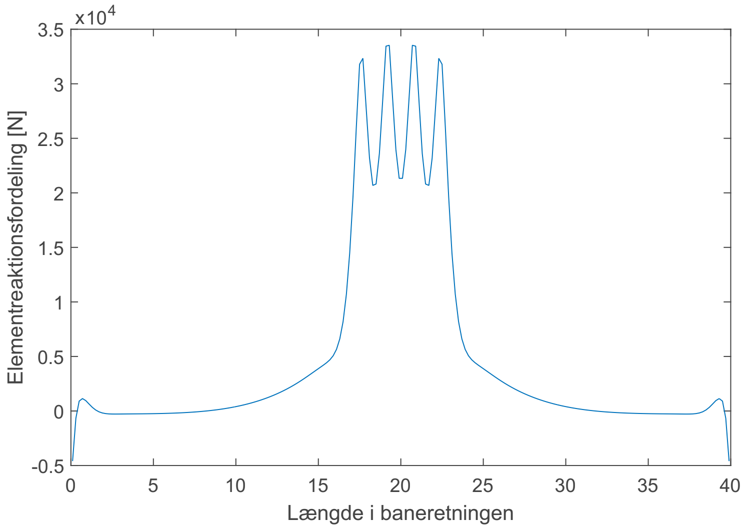
Tabel 5.7: Beregnede flytninger i PLAXIS 2D og PLAXIS 3D, anvendte linjelast i PLAXIS 2D samt beregnet fordelingslængde $L_{Fordeling}$. Desuden er den beregnede influenslængde L_I angivet. Lastmodel 71 er modelleret.

	Moræneler 1	Morænesand 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Enhed
Elasticitetsmodul E	13109	74286	131092	262185	MPa
Maksimal flytning 2D og 3D	$-2\cdot10^{-2}$	$-5{,}037\cdot10^{-3}$	$-3{,}391\cdot10^{-3}$	$-2{,}25\cdot10^{-3}$	m
Linjelast 2D q	$91{,}1$	$105{,}65$	$110{,}8$	$117{,}13$	$\frac{kN}{m/m}$
Omregnet 3D linjelast p	91	$105{,}7$	$110{,}8$	$117{,}1$	$\frac{kN}{m}$
$L_{Fordeling}$	11	$9{,}47$	$9{,}03$	$8{,}54$	m
L_I	$10{,}26$	$9{,}53$	$9{,}1$	$8{,}63$	m

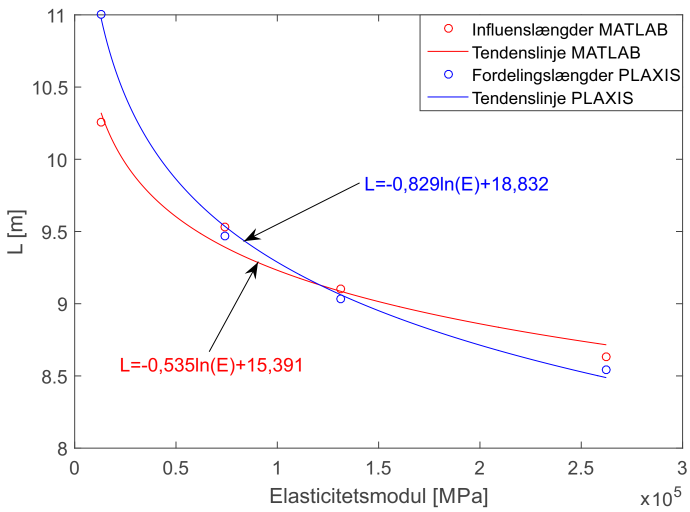


Figur 5.24: Tredimensionel dæmning, som er modelleret i PLAXIS 3D, hvorpå lastmodel 71 er anvendt.

Ud fra den i MATLAB-modellen opnåede reaktionsfordeling bestemmes influenslængden, L_I, hvor resultaterne heraf er angivet i tabel 5.7. Ved at betragte elementreaktionsfordelingen fremgår det tydeligt, at fire punktlaster er påført. Dette er afbilledet på figur 5.25 for moræneler 1. Elementreaktionsfordelingen for de øvrige tre typer dæmningsfyld afbilledet på figurer i bilag G. De beregnede fordelingslængder, $L_{Fordeling}$, samt influenslængder, L_I, som er listet i tabel 5.7, er plottet som funktion af dæmningsfyldets elasticitetsmodul på figur 5.26. Heraf fremgår det, at influenslængden igen er faldende med stigende elasticitetsmodul. Desuden fremgår det, at tendensen fundet for de opnåede $L_{Fordeling}$ samt tendensen for de opnåede L_I er forholdsvis forskellige, hvilket ikke var tilfældet ved lastsituationen med alene én punktlast på hver skinne. Herved fremgår vigtigheden af, at bestemme reaktionsfordelingen ved hjælp af MATLAB-modellen for at få et mere reelt billede af reaktionsfordeling og den heraf fundne influenslængde, L_I.



Figur 5.25: Elementreaktionsfordeling opnået i MATLAB-modellen ved anvendelse af lastmodel 71. Den anvendte dæmningsfyld er den i tabel 5.1 angivne moræneler 1.

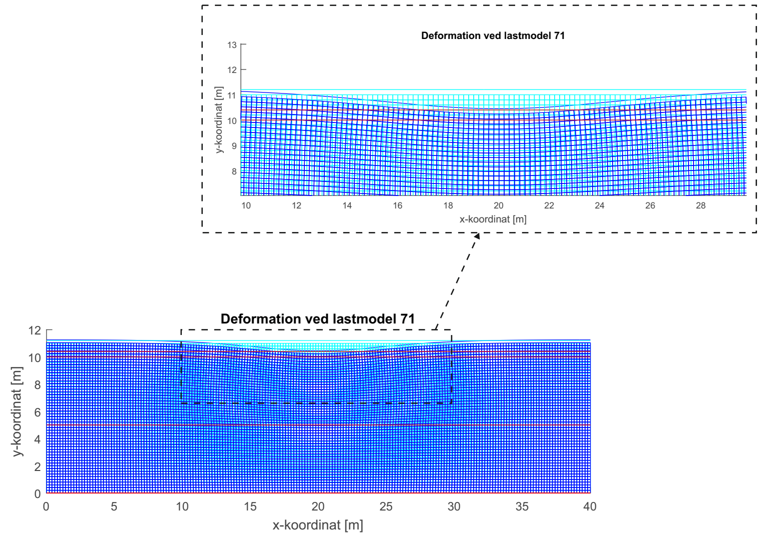


Figur 5.26: Beregnede $L_{Fordeling}$ samt L_I plottet i forhold til dæmningsfyldets elasticitetsmodul. Korrelationskoefficient for tendenslinjen for de beregnede influenslængder, L_I, er R^2=0,98, og korrelationskoefficient for tendenslinjen for fordelinslængderne, $L_{Fordeling}$, er R^2=0,99.

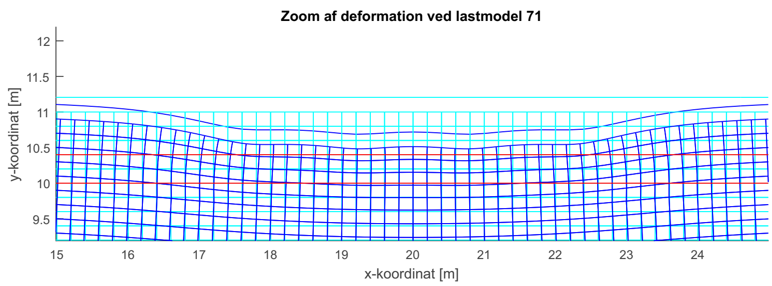
På samme måde som ved lastsituationen, hvor alene én punktlast blev påført hver skinne, er P_{andel} bestemt udtryk (5.5) og listet i tabel 5.8. Heraf fremgår det, at en reaktionssum $\sum R_n$ modsvarende godt 100% af de påførte laster P skal medtages for at opnå den tredimensionelle linjelast, p, som er listet i tabel [**?**]. Dog er den nødvendige reaktionssum, $\sum R_n$, for situationen med en dæmningsfyld bestående af moræeneler 1 alene $93,2\%$. Årsagen hertil kan blandt andet skyldes, at dette dæmningsfyld er meget blød, hvorfor flytningsbilledet ikke har bakketoppe samt dale på samme måde som de øvrige tre typer dæmningsfyld. På figur 5.27 fremgår flytningsbilledet for en dæmning med moræneler 1 som dæmningsfyld og på figur 5.28 fremgår flytningsbilledet for en dæmning med et dæmningsfyld bestående af morænesand 1. Ved at sammenligne disse flytningsbilleder fremgår forskellen tydeligt. Imidlertid forekommer de såkaldte bakkedale samt bakketoppe i reaktionsfordeling på figur 5.25, hvilet netop er reaktionsbilledet for moræneler 1.

Tabel 5.8: Andel af reaktionerne beregnet i MATLAB-modellen, som skal inddrages for at opnå den i tabel 5.7 angivne linjelast p for hver type dæmningsfyld.

	Moræneler 1	Morænesand 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Gennemsnit	Enhed
P_{andel}	$93,2$	$100,7$	$100,9$	$101,1$	99	%



Figur 5.27: Plot af flytninger beregnet i MATLAB-modellen, hvor lastmodel 71 er påført. Dæmningsfyldet anvendt er det i tabel 5.7 angivne moræneler 1. Et udsnit af flytningsbilledet er forstørret. Den anvendte skaleringsfaktor er 1. De rødelinjer i flytningsbilledet er laggrænser, det lyseblå plot er den udeformerede situation, og det mørkeblå plot er den deformerede geometri.



Figur 5.28: Udsnit af flytningsbilledet opnået i MATLAB-modellen for en dæmning med et dæmningsfyld bestående af den i tabel 5.7 angivne moræenesand 1. Skaleringsfaktoren anvendt i billedet er 100. De rødelinjer i flytningsbilledet er laggrænser, det lyseblå plot er den udeformerede situation, og det mørkeblå plot er den deformerede geometri.

På baggrund af ovenstående kan det konkluderes, at influenslængden, L_I, kan bestemmes ved anvendelse af tendenslinjen på figur 5.22 og figur 5.26 for henholdsvis en lastsituation med én punktlast påført hver jernbaneskinne og lastsituationen, hvor fire punktlaster er påført hver jernbaneskinne. Hvis en anden last en 250kN ønskes påført, anvendes lineær interpolation. På samme måde kan influenslinjen bestemmes ved hjælp af de i bilag G afbillede elementreaktionsfordelinger. Ønskes et andet lasttilfælde en de to undersøgt ovenfor kan superposition anvendes. Endeligt kan influenslinjen bestemmes ved hjælp af MATLAB-modellen, hvor det ønskede lasttilfælde kan indføres og reaktionsfordelingen bestemmes. Influneslængen, L_I, fastsættes herefter ved udtryk (5.5) med anvendelse af $P_{andel} \approx 100\%$.

5.3 Influenslængden i brudgrænsetilstanden

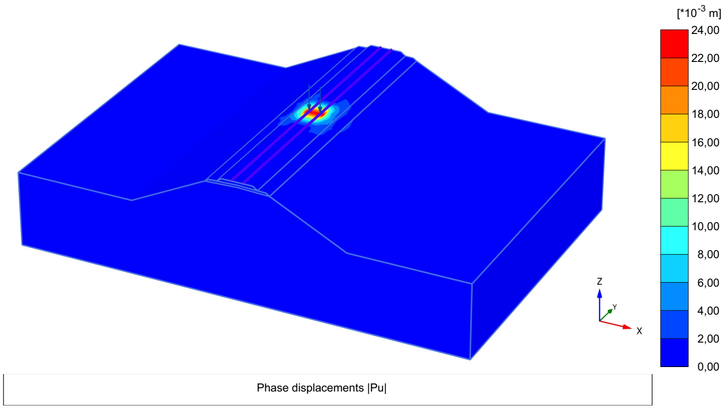
For at bestemme influenslængden i brudgænsetilstanden skal brudlasten indledningsvist bestemmes på samme måde, som de maksimale flytninger blev bestemt i anvendelsesgrænsetilstanden.

Imidlertid er det nødvendigt at definere, hvilken type brud som ønskes bestemt. Dette skyldes, at et jordelement i modsætning til eksempelvis beton ikke går i stykker, når det opnår flydespændingen. Derimod bliver jordelementet plastisk og omfordeler de plastiske tøjninger til de omkringliggende jordelementer. Langsomt vil en såkaldt brudzone vokse sig større og større. Denne består alene af jordelementer i den plastiske tilstand. Når brudzonen er blevet så stor, at en bevægelse af hele dæmningen kan finde sted grundet de plastiske tøjninger i brudzonen, siges et fuldt udviklet plastisk brud at være udviklet. Et sådan brud betegnes også som et stabilitetsbrud. I det omfang, som det er undersøgt i projektet, kan denne type brud alene erhverves ved en såkaldt φ, c-reduktion i PLAXIS 2D samt 3D. Ved en φ, c-reduktion reduceres styrken af jordvolumenet gradvist indtil et brud indtræffer. Dette resulterer i en sikkerhedsfaktor, som giver et udtryk for, hvor meget ringere jordmaterialerne skal være styrkemæssigt, før et stabilitetsbrud indtræffer. Det er styrken af både ballast, underballast samt dæmningsfyld som reduceres. Ved denne metode vil influenslængden estimeres ved at sammenholde sikkerhedsfaktoren i 2D samt 3D. Ved at bestemme den last, som i 2D resulterer i samme sikkerhed som den bestemt i 3D, erhverves en indikation af brudlasterne, som influenslængden kan bestemmes ud fra. Imidlertid hviler denne fremgangsmåde til bestemmelse af influenslængden på en antagelse om, at styrken af ballast, underballast, dæmningsfyld samt råjord er reduceret på samme måde i 2D samt 3D, hvilket er usikkert.

En alternativ måde at definere bruddet på er ved at bestemme lasten, der resulterer i en flytning på eksempelvis $0,1$m. Dette vil være en flytning, som er uacceptabel, idet togtrafikken ikke vil kunne fortsætte på skinner, hvor underlaget har sat sig $0,1$m. Denne type brudbestemmelse minder meget om metoden i anvendelsesgrænsetilstanden, og influenslængden fastsættes på samme måde som beskrevet i afsnit 5.2.

Endeligt kan brudlasten for et lokalt brud bestemmes. I dette tilfælde består selve brudzonen alene af det jordvolumen, som befinder sige umiddelbart under svellen. Dette fremgår på figur 5.29. Ved denne type brud kan influenslængden fastsættes ved at sammenholde brudlasten bestemt i PLAXIS 3D, brudlasten bestemt i PLAXIS 2D samt reaktionsfordelingen bestemt i MATLAB-modellen. Herved sammenholdes lasterne på samme måde som i anvendelsesgrænsetilstanden. Idet denne type brud, trods sin lokale udbredelse, bør give et mere sammenligneligt resultat i PLAXIS 2D samt PLAXIS 3D, anvendes dette i det følgende.

Når brudlasten skal bestemmes, er det i PLAXIS nødvendigt at modellere pladen og dermed også svellen beliggende nede i selve sporkassen, samt erstatte det omkringliggende ballast med en linjelast med en størrelse svarende til vægten af det fjernede materiale. Dette skyldes, at det materiale, som ligger ved svellens sider, vil blive skubbet væk fra svellen, hvorved der er risiko for at dette materiale opnår en plastisk tilstand før materialet under svellen.



Figur 5.29: Illustration af det lokale brud. Dæmningfyldet er i dette tilfælde bestående af moræsand 1. Svellen er deaktiveret på figuren.

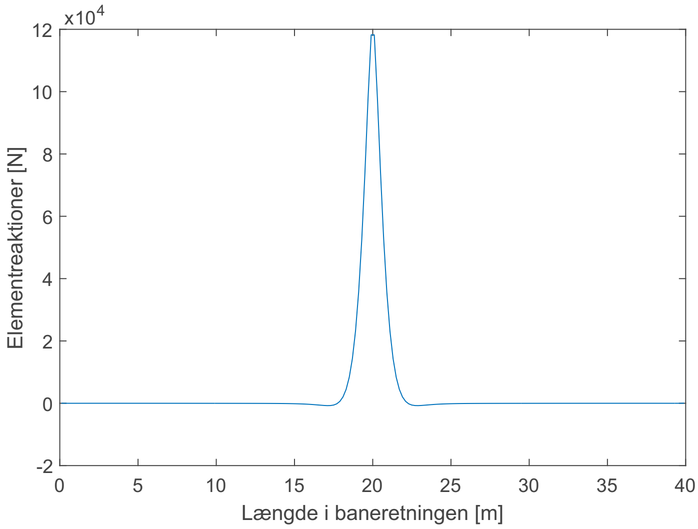
Lasttilfældet, hvor en punktlast er påført hver skinne i den halve dæmningslængde, betragtes. Dette er afbilledet på figur 5.6 på side 53. De i PLAXIS 2D samt PLAXIS 3D beregnede brudlaster er listet i tabel 5.9, og de heraf beregnede fordelingslængder, $L_{Fordeling}$, samt tredimensionelle linjelaster, p, er tilmed angivet. På den vedlagte CD findes lastkurverne for de i tabel 5.9 beregnede brudlaster.

Tabel 5.9: Beregnet brudlast i PLAXIS 2D og PLAXIS 3D. Den heraf omregnede 3D linjelast p, fordelingslængden $L_{Fordeling}$ og influenslængden L_I er tilmed angivet.

	Moræneler 1	Morænesand 1	Moræneler 2	Moræneler 3	Enhed
Elasticitetsmodul E	13109	74286	131092	262185	MPa
Brudlast PLAXIS 2D q	255,5	97,9	732,8	763,7	$\frac{kN}{m/m}$
Brudlast PLAXIS 3D P	847,2	1141	2912	914,4	kN
Omregnet 3D linjelast p	319,4	122,4	916	954,6	$\frac{kN}{m}$
$L_{Fordeling}$	2,65	9,32	3,18	0,96	m
L_I	2,6	9,3	3,34	–	m

Af tabel 5.9 fremgår det, at brudlasten bestemt i PLAXIS 3D for moræneler 3 er mindre end den bestemt for moræneler 2. Da den udrænede forskydningsstyrke c_u for moræneler 3 er dobbelt så stor som den for moræneler 2, bør dette ikke være tilfældet. Derfor kan det konkluderes, at resultaterne for moræneler 3 ikke er pålidelige, og derfor anvendes de ikke i det følgende. Materialeparametrene for de anvendte dæmningsfyld er listet i tabel 5.1 på side 51. Det er ikke muligt at danne en tendenslinje for resultaterne i tabel 5.9, på samme måde som en tendens blev dannet for hver lastsituation i anvendelsesgrænsetilstanden. Dette vil kræve resultater fra minimum tre forskellige typer sand og tre forskellige typer ler. Idet resultatet for moræeneler 3 gav upålidelige resultater, er det valgt at begrænse studiet, til de typer dæmningsfyld, som også blev behandlet i anvendelsesgrænsetilstanden.

Indføres den i PLAXIS 3D fundne brudlast for de tre øvrige typer dæmningsfyld i MATLAB-modellen erhverves fordelingen af elementreaktionerne. For en dæmning med moræneler 1 som dæmningsfyld er elementfordelingen afbilledet på figur 5.30. Af denne figur fremgår det, at reaktionerne skal summeres op over en afstand, L_I, på 2,6m for at opnå den tredimensionelle linjelast, p. Dette stemmer fint overens med den opnåede fordelingslængde, $L_{Fordeling}$, beregnet alene ud fra de opnåede resultater i PLAXIS. På samme måde er fordelingen af elementreaktionerne for de øvrige to typer dæmningsfyld afbilledet på figur G.7 og G.8 i bilag G på side 105.



Figur 5.30: Reaktionsfordeling for bjælke-fjederelementernes bundlinje i MATLAB-modellen for en brudlast på $-847,2$kN. Dæmningsfyldet er i dette tilfælde den i tabel 5.1 angivne moræneler 1.

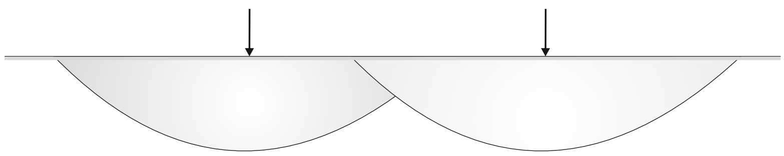
Beregnes P_{andel} ved udtryk (5.5) fremgår det, at den andel af reaktionerne, som skal inkluderes for at opnå den beregnede tredimensionelle linjelast, p, modsvarer i gennemsnit 101% af den påførte last, P. Dette er den samme tendens, som blev fundet i anvendelsesgrænsetilstanden.

Tabel 5.10: Andel af reaktionerne beregnet i MATLAB-modellen, som skal inddrages for at opnå den i tabel 5.9 angivne linjelast for hver type dæmningsfyld.

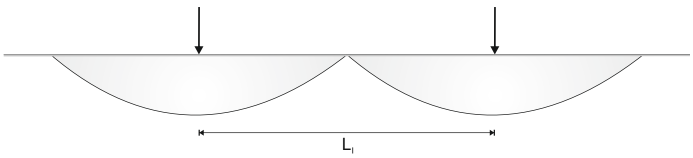
	Moræneler 1	Morænesand 1	Moræneler 2	Gennemsnit	Enhed
P_{andel}	98	100	105	101	%

I anvendelsesgrænsetilstanden er det muligt at anvende superposition i tilfælde, hvor mere end én punktlast påføres hver skinne. Imidlertid kan superposition ikke anvendes i brudgrænsetilstanden, da PLAXIS-modellerne ikke længere er lineær-elastisk i brudzonerne. Når to brudzoner overlapper hinanden, som illustreret på figur 5.31, er det derfor ikke muligt at bestemme flytningerne ved at kombinere påvirkningerne fra hver enkelt last. Derfor ønskes det at opstille en tendens for brudlasten, når afstanden mellem to enkeltlaster på samme skinne varieres således at brudzonerne bliver mere og mere sammenfaldende.

Så længe brudzonerne ikke overlapper hinanden vil lasterne, der fører til brud i hvert enkelt punkt, være upåvirkede af hinanden. Dette er illustreret på figur 5.32, hvor to punktlaster er placeret med en afstand, der er så stor, at brudzonerne ikke påvirker hinanden.

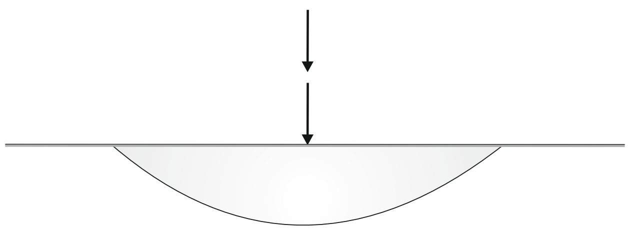


Figur 5.31: To laster er placeret så tæt, at deres brudzoner overlapper hinanden.



Figur 5.32: Når to ens laster er placeret i en afstand fra hinanden, der svarer til eller er større end influenslængden forventes det, at der ikke forekomme et overlap imellem brudzonerne. Den samlede brudlast er dermed uafhængig af interaktioner imellem de to laster.

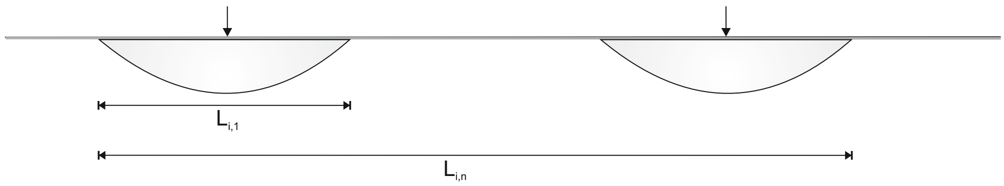
I et ekstremum må det forventes, at to ens laster, der er placeret med en indbyrdes afstand imellem hinanden, som er større end eller lig med influenslængden, L_I, vil lasterne der fører til brud i hvert punkt være af samme størrelse som for en enkelt last. Dette skyldes, at brudzonerne for de to laster ikke overlapper hinanden. I et modsat ekstremum kan de to laster være samlet i samme punkt, hvorved hver enkelt last, der fører til brud vil svare til halvdelen af brudlasten for en enkelt punktlast. Dette er illustreret på figur 5.33.



Figur 5.33: Når to laster har samme angrebspunkt vil brudlasten for hver af de to laster svare til halvdelen brudlasten for en enkelt last.

Hvis brudlasternes størrelse kan beskrives ved denne simple metode, som beskrevet ovenfor, vil influenslængden, L_I, af to brudlaster placeret på den samme jernbaneskinne kunne beskrives ved udtryk 5.6. I dette udtryk er L_I den samlede influenslængde for de to laster, $L_{i,1}$ er influnslængden for én brudlast, n er antallet af laster dvs. 2 i dette simple tilfælde, og endeligt er $L_{i,n}$ afstanden fra den yderste kant af brudzonen for den ene brudlast til den yderste kant af brudzonen for den anden. Dette er illustreret på figur 5.34.

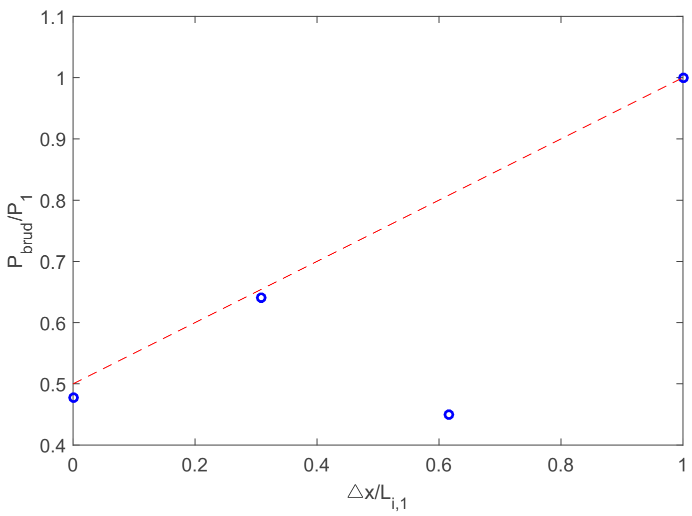
$$L_I = min\left(L_{i,1} \cdot n; L_{i,n}\right) \tag{5.6}$$



Figur 5.34: Illustration af den samlede influenslængde, L_I, for to brudlaster placeret på samme skinne. Den samlede influenslængde er afhængig af om de to brudzoner overlapper i henhold til udtryk (5.6).

Ud fra udtryk (5.6) fremgår det, at hvis lasterne er placeret i samme angrebspunkt, vil den mindste influenslængde være $L_{i,n}$ svarende til $1 \cdot L_{i,1}$. På samme måde vil den mindste influenslængde være $2 \cdot L_{i,1}$, hvis de to lasters angrebspunkter er placeret med en afstand, som er større end eller lig med influenslængden for én punktlast $L_{i,1}$. På denne måde kan der i første omgang opstilles en lineær sammenhæng imellem brudlasterne og deres indbyrdes placering i intervallet $\Delta x = [0 : L_{i,1}]$, hvor Δx angiver afstanden imellem lasterne. Dette er illustreret med den røde linje på figur 5.35. På denne figur er brudlasterne normaliseret i forhold til brudlasten for en enkeltkraft og den indbyrdes afstand imellem lasterne er normaliseret i forhold til influenslængden for en enkeltlast $L_{i,1}$.

Hvorvidt sammenhængen kan antages at være lineær undersøges ved hjælp af PLAXIS 3D, idet de to ekstrema anvendt til bestemmelsen af punkterne herover ikke tager højde for interaktion mellem brudzonerne.



Figur 5.35: Relation imellem brudlasterne P_{brud} og deres indbyrdes afstand, Δx. Værdierne er henholdsvis normaliseret i forhold til brudlasten for en enkeltlast P_1 og influenslængden for en enkeltlast $L_{i,1}$. De blå punkter er resultater opnået i PLAXIS 3D.

Det blev forsøgt at bestemme brudlasterne i PLAXIS 3D for to laster med varierende afstand fra hinanden med moræneler 1 som dæmningsfyld. Resultaterne er angivet på figur 5.35. Af denne figur fremgår det, at brudlastens størrelse er stærkt varierende. Desuden svarer den samlede sum af brudlasten i tilfældet med to laster i samme punkt ikke til det samme tilfælde med en enkelt last i punktet. Det var herudover ikke muligt, at reproducere resultaterne på noget tidspunkt, til trods for at den præcis samme model blev anvendt. På baggrund heraf kan det konkluderes, at det ikke er muligt at opnå retvisende brudlaster i PLAXIS ved denne definition af bruddet. Dette kan blandt andet skyldes, at PLAXIS eventuelt udtrykker, at der er brud på det tidspunkt, hvor programmet ikke kan håndtere beregningerne længere.

Influenslængen antydet i tabel 5.9 må derfor alene være en indikation af, hvad influenslængden kunne være, men resultaterne skønnes ikke at være pålidelige. En reel tendens for influenslængden i brudgrænsetilstanden kan i stedet forsøges etableret på baggrund af enten sikkerhedsfaktoren eller et brud defineret ved en flytning på $0,1\text{m}$, som beskrevet i introduktionen til dette afsnit. Hvorvidt dette er muligt efterlades til et muligt fremtidigt studie.

6 Konklusion

I nærværende projekt er det forsøgt at besvare de to spørgsmål, som blev stillet i problemformuleringen afsnit 2.1.

For at klarlægge, hvilke studier, som hidtil er udført vedrørende konsekvenserne af simplificeringen fra tredimensionelle betragtninger af banedæmninger til todimensionelle betragtninger heraf, er et *state of the art* blevet udarbejdet. I den forbindelse er studier for skråninger inddraget, idet studier heraf er langt mere udbredt end studier specifikt af dæmningerr. Ved talrige studier er det blevet påvist, at sikkerhedsfaktoren ved en 3D analyse er større end ved en tilsvarende 2D analyse. Det er desuden også blevet dokumenteret, at forskellen imellem sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D bliver øget yderligere, hvis de geometriske variationer i den tredje dimension inddrages. Undtagelserne hertil findes, hvor en konveks krumning af skråningsoverfladen betragtes, samt i tilfælde, hvor konveks-drejende skråningshjørner med en skråningsgradient på 90° betragtes. Både ved studier udført numerisk samt ved et fuldskala forsøg udført på en banedæmning blev det påvist, at dæmningens højde har betydning på forskellen imellem sikkerhedsfaktoren i 3D og 2D. Ved et studie, hvor en last blev fordelt på et afgrænset areal af en skråning i 3D og sikkerhedsfaktoren herfor blev sammenlignet med den for en 2D skråning uden påført last, fremgik det, at forskellen i sikkerhedsfaktoren i 2D og 3D afhænger både af størrelsen på lasten og af længden på skråningen. Der blev ikke fundet studier, hvor en ækvivalens opstilles imellem en lastpåvirket dæmning i 2D og 3D, hvilket understreger vigtigheden af den anden del i problemformulering.

For at forsimple 3D betragtningerne af en lastpåvirket banedæmning til en ækvivalent 2D situation er det nødvendigt at kende lastfordelingen i tredje dimension. For at beskrive denne er en 2D finite element model skrevet af forfatteren i programmet MATLAB (Matrix Laboratory), hvor en banedæmning er modelleret i længderetningen. Denne model beskriver, hvordan en last påført jernbaneskinnen fordeles ned i banedæmningen. Modellen er verificeret imod kendte analytiske løsninger samt ved at sammenligne flytningerne med en tilsvarende model opbygget i PLAXIS 2D. Ud fra studier af en banedæmning modelleret i PLAXIS 3D, et dæmningstværsnit modelleret i PLAXIS 2D og MATLAB-modellen er en tendens for influenslængden opstillet i forhold til dæmningsfyldets varierende elasticitetsmodul. En tendens for influenslængden er etabeleret for to lastsituationer i anvendelsesgrænsetilstanden. I første lasttilfælde er en punktlast på 250kN påført hver jernbaneskinne i den halve dæmningslængde. Tendenslinjen for influnenslængden er for denne situation givet ved $L_I = -1,465 \cdot ln(E) + 21,819$. I den anden lastsituation er fire punktlaster af størrelsen 250kN påført hver skinne. Tendensen for influenslængden er for denne lastmodel givet ved $L_I = -0,535 \cdot ln(E) + 15,391$. Modellerne anvendt til opstilling af de to tendenser er alle lineær elastiske, hvorfor lineær interpolation kan anvendes, hvis influenslængden for en last af en anden størrelse ønskes bestemt. På samme måde vil superposition kunne anvendes, hvis et andet lasttilfælde ønskes beskrevet. Ved påførerelse af den ved influenslængden beregnede last i 2D vil den samme flytning erhverves, som den flytning, som den tredimensionelle last medførte i 3D. Alle tendenser for influenslængden er opstillet ved anvendelse af en trykspredning på 1:2 i MATLAB-modellen.

På samme måde som en relation imellem flytningerne er etableret i anvendelsesgrænsetilstanden, blev det i brudgrænsetilstanden forsøgt at etablere en relation imellem brudlasterne. Tendensen blev forsøgt etableret for den brudlast, som resulterer i et lokalt brud under svellen. Imidlertid viste det sig, at det i PLAXIS ikke er muligt, at bestemme brudlasten direkte, hvorfor en tendens for brudlasternes influenslængde ikke er opnået. Det efterlades derfor til et muligt fremtidig studie, at bestemme en tendens for influenslængden i brudgrænsetilstanden ved at sammenligne sikkerhedsfaktoren beregnet i PLAXIS 2D og 3D samt lastfordeling beskrevet ved MATLAB-modellen eller ved at sammenligne den last, som giver en uacceptabel flytning på eksempelvis $0,1$m.

Litteratur

Hauptabmessungen der Vignolschienen - MAIN DIMENSIONS FLAT BOTTOM RAILS. URL: http://www.voestalpine.com/schienen/static/sites/c011/downloads/downloads/profilliste_2013.pdf. Downloaded: 09-03-2015.

Albataineh, 2006. Nermeen Albataineh. *Slope stability analysis using 2D and 3D methods*. URL: https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/document/get/akron1153719372/inline, 2006. Downloaded: 24-09-2014.

Andersen, 2006. Lars Andersen. *Linear Elastodynamic Analysis*. ISSN 1901-7286 DCE Lecture Notes No. 3, Aalborg University, Department of Civil Engineering, Water and Soil, 2006. Downloaded: 01-09-2014.

ArcelorMittal. ArcelorMittal. *Flat bottom Rails. European standards*. URL: http://rails.arcelormittal.com/en/types-of-train-rails.html. Downloaded: 09-03-2015.

Banedanmark, 2014. Banedanmark. *Banenorm BN1-6-5 Tværprofiler for ballasteret spor*. URL: http://www.bane.dk/db/filarkiv/8703/BN1-6-5.pdf, 2014. Downloaded:30-04-2015.

Banedanmark, 1991. Banedanmark. *Normaltegning Blad 7174: Betonsvelle S90, Principtegning*. URL: http://www.bane.dk/banefiler/GAB/BilagGABSpor.pdf, 1991. Downloaded:05-05-2015.

Banedanmark. Banedanmark. *Opbygning af sporkasse*. URL: http://www.bane.dk/db/filarkiv/18480/Sporkasseopbygning.pdf. Downloaded:27-05-2015.

Banedanmark, 2010a. Banedanmark. *Teknisk meddelelse nr. 13*. URL: http://www.bane.dk/db/filarkiv/6930/TM%2013%2012_05_2010.pdf, 2010. Downloaded: 09-03-2015.

Banedanmark, 2011. Banedanmark. *Danmarks hurtigste jernbane: Den nye bane København-Ringsted*. ISBN: 978-87-7126-055-7, Første udgave. Banedanmark, 2011.

Banedanmark, 2012. JBR Banedanmark. *Banedanmark Anlæg og Fornyelse - Generel arbejdsbeskrivelse for sporarbejder*. URL: http://www.bane.dk/db/filarkiv/13272/GAB%20Spor_%20udg.12.pdf, 2012. Downloaded:05-05-2015.

Banedanmark, 2010b. Otto Bach Ulstrup Banedanmark. *Banenorm BN1-59-4 Belastnings- og beregningsforskrift for sporbærende broer og jordkonstruktioner*. URL: http://www.bane.dk/db/filarkiv/4987/bn1-59-4.pdf, 2010. Downloaded:09-05-2015.

Beton, 2015. FC Beton. *Vægtfylde/massefylde for sand, grus, granit og stenmel*. URL: http://www.fc-beton.dk/vaegtfylde-sten-grus-granit-sand_325.html, 2015. Downloaded:05-05-2015.

bv, **2014**. PLAXIS bv. *R. B. J. Brinkgreve and E. Engin and W. M. Swolfs and D. Waterman and A. Chesaru and P. G. Bonnier and V. Galavi*. ISBN: 978-90-76016-15-3. PLAXIS bv, 2014.

Cavounidis, **1987**. S. Cavounidis. *On the ratio of factors of safety in slope stability analysis*. Géotechnique, 37, 207–210, 1987.

Ücer, **2006**. Serkan Ücer. *Comparison of 2D and 3D finite element models of tunnel advance in soft ground: A case study on Bolu Tunnels*. URL: http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12607172/index.pdf, 2006. Downloaded: 21-10-2014.

Chen, **1975**. Wai-Fah Chen. *Limit analysis and soil plasticity*. ISBN: 978-1932159738, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, 1975. Bemærk at kilden er angivet i Michalowski, 2010.

Cook, Malkus, Plesha, og Witt, **2002**. Robert D. Cook, David S. Malkus, Micheal E. Plesha, og Robert J. Witt. *CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS*. ISBN: 978-0-471-35605-9, Fjerde udgave. John Wiley and Sons, 2002.

Cornforth, **2005**. Derek H. Cornforth. *Landslides in practice: Investigations, Analysis and Remedial/Preventative Options in Soils*. ISBN: 0-471-67816-3, Første udgave. John Wiley and Sons, 2005.

Danmarks Statistik, **2014**. Peter Ottosen Danmarks Statistik. *Jernbanenettet pr 1 januar efter banenet og enhed*. URL: http://www.statistikbanken.dk/statbank5a/selectvarval/define.asp?PLanguage=0&subword=tabsel&MainTable=BANE41&PXSId=151014&tablestyle=&ST=SD&buttons=0, 2014. Downloaded: 19-09-2014.

Dansk Standard, **2003**. Dansk Standard. *Eurocode 1: Last på bygværker – Del 2: Trafiklast på broer*. Ref. No. EN 1991-2:2003 E, første udgave. Dansk Standard, 2003.

Danske Jernbaner, **2008**. Danske Jernbaner. *På sporet af nuværende og nedlagte Danske Jernbaner*. URL: http://www.danskejernbaner.dk/, 2008. Downloaded: 07-08-2014.

Den Store Danske, **2013**. Den Store Danske. *Danmark - historie 1814-1900*. URL: http://www.denstoredanske.dk/Danmarks_geografi_og_historie/Danmarks_historie/Danmark_-_historie/Danmark_-_historie_(1814-1900), 2013. Downloaded: 07-08-2014.

Den Store Danske. Den Store Danske. *Elasticitetsmodul*. URL: http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Teknik/Bygningsstatik,_teknisk_statik_og_styrkel%C3%A6re/elasticitetsmodul. Downloaded:20-05-2015.

Ducan og Wright, **1980**. J. M. Ducan og S. G. Wright. *The accuracy of equilibrium methods of slope stability analysis*. Engineering Geology, 16, 5–17, 1980.

Ducan, **1996**. James Michael Ducan. *State of the art: Limit equilibrium and finite-element analysis of slopes*. Journal of Geotechnical engineering, 122, 577–596, 1996.

En grøn transportpolitik, **2009**. En grøn transportpolitik. *En grøn transportpolitik - En aftele mellem Den daværende regering, Socialdemokraterne, Dansk Folkeparti, Socialistisk Folkeparti, Det Radikale Venstre og Liberal Alliance*. URL: http://www.trm.dk/graphics/Synkron-Library/trafikministeriet/Publikationer/2009/En_groen_%20transportpolitik.pdf, 2009. Downloaded: 07-08-2014.

Gens, Hutchinson, og S.Cavounidis, **1988**. A. Gens, J. N. Hutchinson, og S.Cavounidis. *Three-dimensional analysis of slides in cohesive soils*. Géotechnique, 38, 1–23, 1988.

Hansen, **1996**. Claus Hansen. *Jernbanens udvikling i Danmark*. URL: `http://users.cybercity.dk/~ccc6247/historie.html`, 1996. Downloaded: 07-08-2014.

Jensen, Mohr, Mortensen, Hansen, Hansen, Sørensen, Bager, Laustsen, Plum, Svensson, Søndergaard, Adelhøj, Munch-Andersen, Cornelius, Hansen, Goætermann, Steenfelt, Sørensen, og Borchersen, **2009**. Bjarne Chr. Jensen, Gunnar Mohr, Bo Mortensen, Lars Pilegaard Hansen, Svend Ole Hansen, Finn Precht Sørensen, Dirch H. Bager, Henning Laustsen, Carsten Munk Plum, Elif Svensson, Ejnar Søndergaard, John Adelhøj, Jørgen Munch-Andersen, Thomas Cornelius, Lars Zenke Hansen, Per Goætermann, Jørgen S. Steenfelt, Carsen S. Sørensen, og Egil Borchersen. *Teknisk Ståbi*. ISBN: 978-87-571-2685-3, 20. udgave. Nyt Teknisk Forlag, 2009.

Jernbaneverket - Teknisk reglverk, **2014**. Jernbaneverket - Teknisk reglverk. *Skinneprofiler*. URL: `https://trv.jbv.no/wiki/Overbygning/Prosjektering/Sporkonstruksjoner/Vedlegg/Skinneprofiler`, 2014. Downloaded: 09-03-2015.

Leshchinsky og Backer, **1986**. Dov Leshchinsky og Rafael Backer. *Three-dimensional slope stability: End effects*. Soils and Founddations, Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, 26(4), 98–110, 1986.

Leshchinsky, ASCE, og Huang, **1992**. Dov Leshchinsky, ASCE, og Ching-Chuan Huang. *Generalized Three-dimensional slope-stability analysis*. Journal of Geotechnical Engineering, 118 nr. 11, 1748–1761, 1992.

Leung, Gani, Auckland, Terzghi, og Sydney, **2006**. Hester Leung, Cristien Gani, Wataru Okada SKM Auckland, Sergei Terzghi, og SKM Sydney. *Comparison of the effectiveness of Deep Soil Mix columns using 2-D and 3-D Plaxis*. URL: `http://kb.plaxis.nl/publications/comparison-effectiveness-deep-soil-mix-columns-using-2d-and-3d-plaxis`, 2006. Downloaded: 13-01-2015.

Mansikkamäki og Länsivaara, **2012**. J. Mansikkamäki og T. Länsivaara. *3D Stability Analysis of a Full-scale Embankment Failure Experiment*. DGF Bulletin 27, NGM 2012 - Proceedings of the 16th Nordic Geotechnical Meeting, 405–412, 2012.

Michalowski og Drescher, **2009**. R. L. Michalowski og A. Drescher. *Three-dimensional stanility of slopes and excavations*. Géotechnique, 59(10), 839-850, 2009. Bemærk at kilden er angivet i Michalowski, 2010.

Michalowski, **2010**. Radoslaw L. Michalowski. *Limit Analysis and Stability Charts for 3D Slope Failures*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 136, 583–593, 2010.

Nielsen, **2003**. Jan Broch Nielsen. *Dansk Beton: Jernbanen lægger skinner på beton*. URL: `http://www.danskbeton.dk/files/DanskBeton/DanskBeton/7%20Bladet%20Beton/17874.danskbeton4%2003.pdf`, 2003. Downloaded:05-05-2015.

Ottosen og Petersson, **1992**. Niels Saabye Ottosen og Hans Petersson. *Introduction to the FINITE ELEMENT METHOD*. ISBN: 0-13-473877-2, Første udgave. Prentice Hall International (UK) Ltd, 1992.

Ovesen, Krebs, Fuglsang, D., Bagge, Gunnar, Krogsbøll, Anette, Sørensen, S., Hansen, Bent, Bødker, Klaus, Thøgersen, Lotte, Galsgaard, Jens, Augustesen, og H., 2009. Ovesen, Niels Krebs, Fuglsang, Leif D., Bagge, Gunnar, Krogsbøll, Anette, Sørensen, Carsten S., Hansen, Bent, Bødker, Klaus, Thøgersen, Lotte, Galsgaard, Jens, Augustesen, og Anders H. *Lærebog i Geoteknik*. ISBN: 978-87-502-0961-4, Første udgave. Polyteknisk Forlag, 2009.

Papadimitriou, Bouckovalas, Vytiniotis, og Bakas, 2006. A. G. Papadimitriou, G. D. Bouckovalas, A. C. Vytiniotis, og G. J. Bakas. *Equivalence between 2D and 3D numerical simulations of seismic reponse of improved sites*. URL: http://users.ntua.gr/gbouck/downfiles/Equivalence_between_2D_and_3D_numerical_analyses_of_the_seismic_response_of_improved_sites.pdf, 2006. Downloaded: 21-10-2014.

Qureshi, Amin, Sultan, og Sh, 2012. Liaqat Ali Qureshi, Kashif Amin, Tahir Sultan, og M. Ilyas Sh. *Comparison of 2D and 3D finite element analysis of tunnels based on soil-structure interaction using GTS*. URL: http://www.icccbe.ru/paper_long/0416paper_long.pdf, 2012. Downloaded: 21-10-2014.

Reig. Prefessor Dr. Frank Reig. *The tiny Finite Element System for Android Smartphones*. URL: http://www.z88tina.de/manual/online/. Downloaded: 24-04-2014.

Rujikiatkamjorn, Indraratna, og Chu, 2008. Cholachat Rujikiatkamjorn, Buddhima Indraratna, og J. Chu. *2D and 3D Numerical Modeling of Combined Surcharge and Vacuum Preloading with Vertical Drains*. URL: http://ro.uow.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1428&context=engpapers, 2008. Downloaded: 13-01-2015.

Ryltenius, 2011. André Ryltenius. *Fem modelling of piled raft foundations in two and three dimensions*. URL: http://www.byggvetenskaper.lth.se/fileadmin/geoteknik/publications/tvgt5000/web_tvgt_5046.pdf, 2011. Downloaded: 21-10-2014.

Shreir, 1978. L. L. Shreir. *Corrosion: Corrosion Control, Bind 2*. ISBN: 978-0-408-00110-6, 2. udgave. Butterworths, 1978.

Ingeniøren, 2010. Nicolai Østergaard Ingeniøren. *Fire megaprojekter er nøglen til til ny guldalder for Danmarks jernbane*. URL: http://ing.dk/artikel/fire-megaprojekter-er-noglen-til-ny-guldalder-danmarks-jernbane-112533, 2010. Downloaded: 07-08-2014.

Symon, 1971. Keith R. Symon. *Mechanics*. ISBN: 978-0201073928, trejde udgave. Addison-Wesley, 1971.

Trafikstyrelsen, 2013. Trafikstyrelsen. *Trafikplan for den statslige jernbane 2012-2027*. URL: http://www.trafikstyrelsen.dk/~/media/Dokumenter/04%20Kollektiv%20trafik/05%20Trafikale%20analyser/trafik%20plan%202012-2027/Trafikplan%202012-2027.ashx, 2013. Downloaded: 07-08-2014.

Zhang, Cao, Liu, Hu, og Gong, 2011. Ke Zhang, Ping Cao, Zi yao Liu, Hui hua Hu, og Dao ping Gong. *Simulation analysis on three-dimensional slope failure under different condition*. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 21(11), 2490–2502, 2011.

Zhang, Chen, Zheng, Li, og Zhuang, 2013. Yingbin Zhang, Guangqi Chen, Lu Zheng, Yange Li, og Xiaoying Zhuang. *Effects of geometries on three-dimensional slope stability*. Canadian Geotechnical Journal, 50 nr. 3, 233–249, 2013.

A Bilag relateret til state of the art

A.1 Skråningsstabilitetsdiagrammer af [Michalowski, 2010]

I dette afsnit omtales relationen mellem den dimensionsløse gruppe og sikkerhedsfaktoren, som anvendes i skråningsstabilitetsdiagrammerne på figurene 3.2 og 3.3, og desuden findes de drænede stabilitetsdiagrammer fra [Michalowski, 2010].

A.1.1 Relation mellem den dimensionsløse gruppe og sikkerhedsfaktoren

En skråningsstabilitetsanalyse beskrives ved styrkeegenskaberne og rumvægten af jorden (c_u og γ) samt geometrien af skråningen (højden H, hældningsvinklen β og bredden af brudmekanismen B), hvorfor den dimensionsløse gruppe, $\gamma H/c_u$, reducerer antallet af uafhængige parametre fra fem til tre ved at betragte denne faktor som én parameter [Michalowski, 2010,s. 583]. På den måde indeholder diagrammet på figur 3.2 på side 9 alle parametre, som indgår i en skråningsstabilitetsanalyse. Relationen mellem den dimensionsløse gruppe og sikkerhedsfaktoren beskrives nedenfor. Den kritiske værdi af $\gamma H/c_u$ benævnes også den dimensionsløse kritiske højde.

I stedet for sikkerhedsfaktoren, F, anvendes også den dimensionsløse gruppe, $\gamma H/c_u$, hvor et tilsvarende mål for skråningssikkerheden er forholdet mellem den kritiske værdi af den dimensionsløse gruppe og den virkelige værdi heraf for en eksisterende skråning. Dette fremgår af udtryk (A.1), hvor indeks k angiver den kritiske værdi.

$$\left(\frac{\gamma H}{c_u}\right)^k \geq \frac{\gamma H}{c_u} \tag{A.1}$$

Idet den kritiske værdi for den dimensionsløse gruppe opnås, når den bestemmende parameter har opnået sin kritiske værdi, kan udtrykket for den kritiske højde også angives ved (A.2).

$$\left(\frac{\gamma H}{c_u}\right)^k = \frac{\gamma^k H}{c_u} = \frac{\gamma H}{c_u^k} = \frac{\gamma H^k}{c_u} \tag{A.2}$$

I udtryk (A.2) er γ^k rumvægten, som medfører brud, c_u^k er forskydningsstyrken nødvendig for opretholdelse af ligevægt, og H^k er den højde, som medfører brud. Dermed findes den kritiske værdi for den bestemmende parameter og de to øvrige værdier holdes konstant. Dermed kan (A.1) omskrives til (A.3).

$$\frac{\gamma H}{c_u^k} \geq \frac{\gamma H}{c_u} \tag{A.3}$$

Den traditionelle sikkerhedsfaktor, F, kan også formuleres som forholdet mellem jordens forskydningsstyrke og den nødvendige forskydningsstyrke for opretholdelse af ligevægt. For den udrænede forskydningsstyrke gives dette ved (A.4).

$$F = \frac{c_u}{c_{ud}} = \frac{c_u}{c_u^k} \tag{A.4}$$

Hvor c_{ud} er den udrænede forskydningsstyrke nødvendig for opretholdelse af ligevægt, og dermed er $c_{ud} = c_u^k$. Ovenstående udtryk kan omskrives til (A.5).

$$c_u^k = \frac{c_u}{F} \tag{A.5}$$

Hvormed (A.3) kan omskrives til (A.6) og dermed (A.7).

$$\frac{\gamma H}{\frac{c_u}{F}} \geq \frac{\gamma H}{c_u} \tag{A.6}$$

$$F\frac{\gamma H}{c_u} \geq \frac{\gamma H}{c_u} \tag{A.7}$$

Dermed er højresiden i (A.7) parametrene for det virkelige tilfælde, og venstresiden er de kritiske værdier, som vil medføre brud. På figur 3.2 på side 9 aflæses den inverse af venstresiden i udtryk (A.7), og idet γ, H og c_u for skråningen kendes, kan F isoleres heraf. Dermed opnås en værdi for sikkerhedsfaktoren. Ovenfor er den udrænede forskydningsstyrke anvendt, hvorfor denne parameter erstattes med den drænede forskydningsstyrke, c, i drænede situationer.

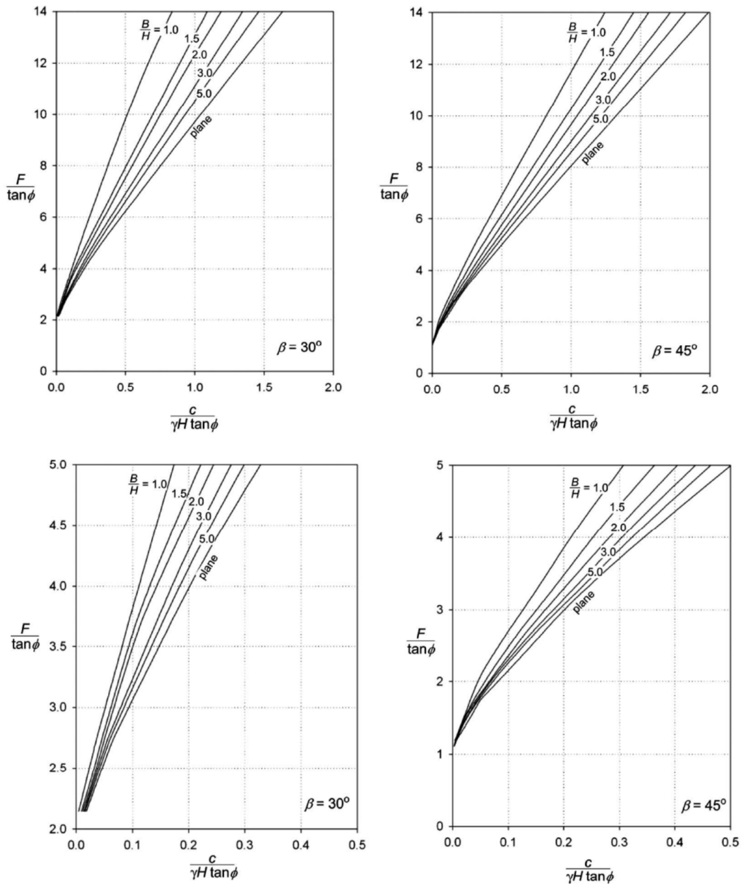
Mere belejligt for det drænede tilfælde er anvendelsen af friktionsvinklen. Sikkerhedsfaktoren, F, formuleres i henhold til (A.8) fremfor (A.4), når friktionsvinklen anvendes.

$$F = \frac{tan\phi}{tan\phi_d} \tag{A.8}$$

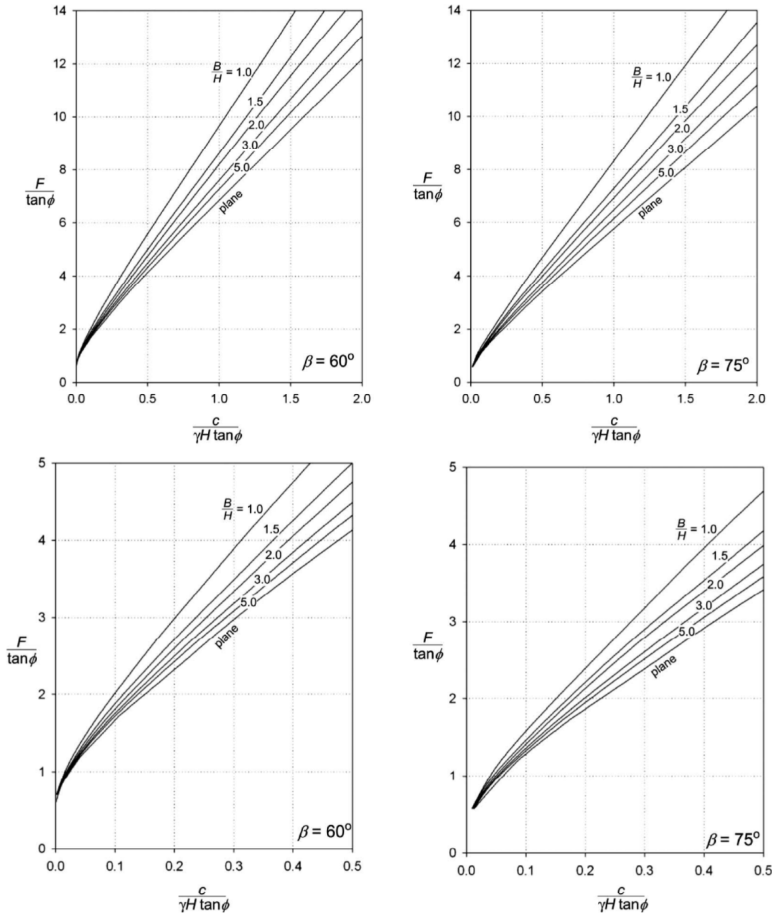
I (A.8) er ϕ_d friktionsvinklen nødvendig for opretholdelse af ligevægt. Udtrykket i (A.8) omskrives til (A.9), og den inverse heraf er angivet på 2. aksen på figur A.1, A.2, og A.3.

$$tan\phi_d = \frac{tan\phi}{F} \tag{A.9}$$

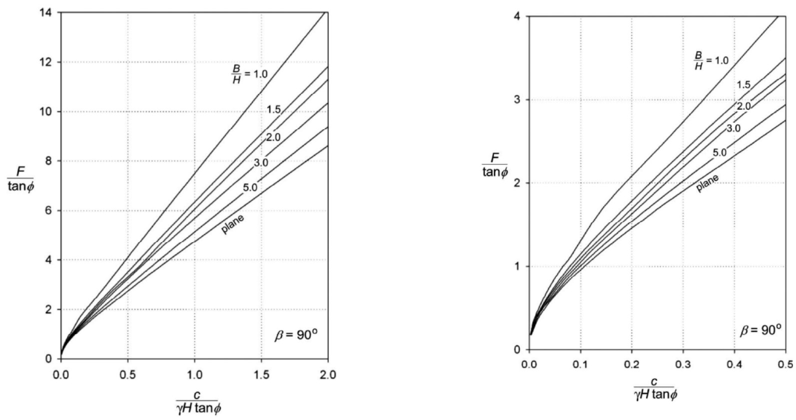
A.1.2 Drænede skråningsstabilitetsdiagrammer af [Michalowski, 2010]



Figur A.1: 3D drænede stabilitetsdiagrammer for skråningsgradienterne $\beta = 30°$ og $\beta = 45°$. Ud fra disse diagrammer kan sikkerhedsfaktoren, F, bestemmes [Michalowski, 2010,figur 9].



Figur A.2: 3D drænede stabilitetsdiagrammer for skråningsgradienterne $\beta = 60°$ og $\beta = 75°$. Ud fra disse diagrammer kan sikkerhedsfaktoren, F, bestemmes [Michalowski, 2010,figur 10].

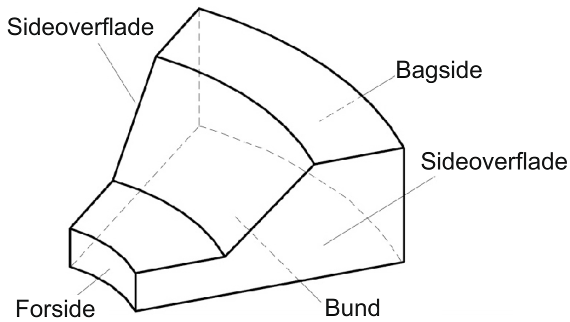


Figur A.3: 3D drænede stabilitetsdiagrammer for skråningsgradienten $\beta = 90°$. Ud fra disse diagrammer kan sikkerhedsfaktoren, F, bestemmes [Michalowski, 2010,figur 11].

A.2 Kort beskrivelse af sidefladernes overfladetyper

I [Zhang et al., 2013] beskrives de forskellige sider og de dertilhørende randbetingelser som angivet i det følgende.

Bunden af en skråning tilbageholder normalt alt bevægelse således, at $u_x = u_y = u_z = 0$, hvor u er flytningen. Derimod er bevægelserne kun tilbageholdt i normalens retning når bagsiden samt forsiden af skråningen betragtes. Sidefladernes begrænsende effekt afhænger af overfladens ruhed. En skråning til illustration af de omtalte flader er afbilledet på figur A.4. Overfladetyperne og de dertilhørende randbetingelser for sidefladerne inddeles ofte i; glat-glat *SS*, grov-glat *RS* samt grov-grov *RR*, hvor *R* står for rough og *S* står for smooth.

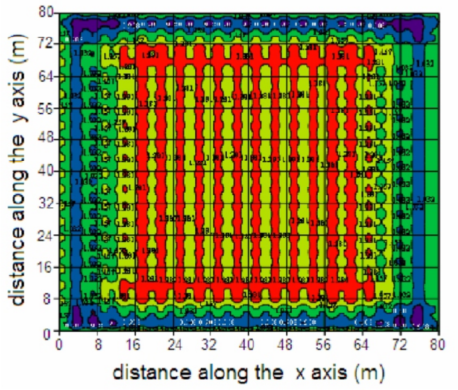


Figur A.4: En illustrativ skråning med afbildning af bagside, forside, bund og sideflader [Zhang et al., 2013,figur 1].

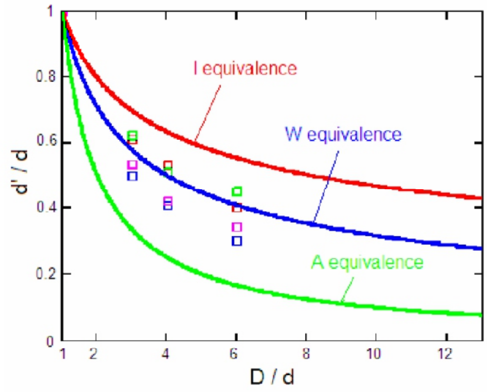
- Glat-Glat *SS*: Overfladerne kan frit bevæge sig sideværts, men den er tilbageholdt i normalens retning. Denne overfladetype anvendes når en kontakt med et fast, men glat, anlæg skal modelleres således, at der ikke er begrænsning på forskydningen i planet, men en reaktionseffekt i form af tryk opnås.
- Grov-Glat *RS*: Den ene overflade er glat og kan frit bevæge sig sideværts, men er fastholdt i normalens retning. Den anden overfalde er grov og er fastholdt i alle tre retninger; normal samt to sideværts. Denne overfladetype anvendes, når kun halvdelen af en skråning med *RR*-overflade skal analyseres grundet symmetri og dermed simplifikation.
- Grov-Grov *RR*: Begge overflader er fastholdt i alle tre retninger; normal og to sideværts. Når en fast kontakt uden mulighed for flytning skal modelleres, anvendes denne overfladetype.

A.3 Figurer og resultater fra [Papadimitriou et al., 2006]

Nedenfor angives resultaterne for et gitter dannet af forstærkende pæle.



Figur A.5: En 3D seismisk responsanalyse af et gitter bestående af forstærkende pæle medførte konturerne af den forstærkede maksimale acceleration, a_{max}, angivet på figuren. Gitteret består af 19 x 19 styk pæle, og de viste konturer er for D=4m og d=1m [Papadimitriou et al., 2006,figur 5].

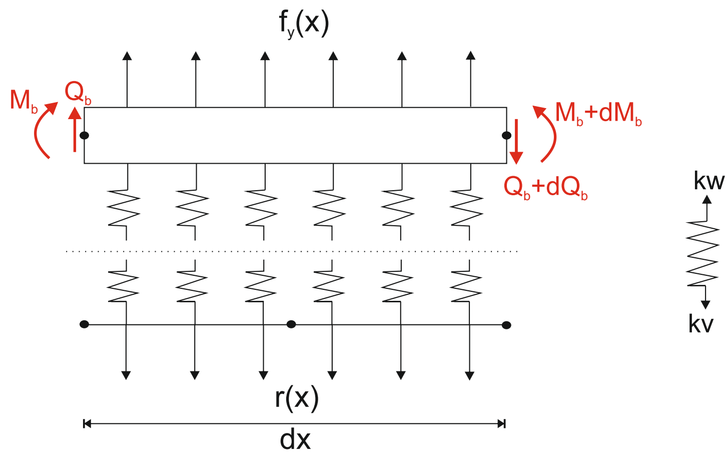


Figur A.6: Sammenligning mellem de tre analytiske ækvivalenser og de numeriske eksperimenter [Papadimitriou et al., 2006,figur 6]. Punkterne repræsenterer de numeriske eksperimenter, som også blev anvendt på figur 3.12. I [Papadimitriou et al., 2006] angives det ikke, hvorfor der er forskel på punkternes farver.

B Bilag til den tekniske beskrivelse af MATLAB-modellen

B.1 Udledning af de styrende ligninger for bjælke-fjederelementet

I det følgende udledes de styrende ligninger for elementet på figur 4.4 på side 27. På figur B.1 er elementets snitkræfter samt fjederkræfter skitseret. Betragtes figur 4.4 og B.1 opnås de vertikale ligevægte (B.1) og (B.2), hvor opadrettede kræfter regnes som værende positiv. $v(x)$ beskriver vertikale flytninger af bunden, mens $w(x)$ relaterer sig til vertikale flytninger af bjælken i toppen. κ angiver fjederstivheden.



Figur B.1: Elementets snitkræfter samt fjederkræfter. Fjederstivheden er givet ved κ

$$Q_b - (Q_b + dQ_b) + \kappa \cdot w(x) \cdot dx - \kappa \cdot v(x) \cdot dx + f_y(x)dx = 0 \tag{B.1}$$

$$\kappa \cdot v(x) \cdot dx - \kappa \cdot w(x) \cdot dx - r(x) \cdot dx = 0 \tag{B.2}$$

Disse udtryk kan omskrives og simplificeres til udtryk (B.3) og (B.4).

$$\frac{dQ_b}{dx} = -\kappa\left(w(x) - v(x)\right) + f_y(x) \tag{B.3}$$

$$\kappa v(x) - \kappa w(x) = r(x) \tag{B.4}$$

På samme måde opstilles en momentligevægt for Bernoulli-Euler elementdelen, hvor der tages moment om højre ende og positiv værende mod urets retning. Momentligevægten er givet ved (B.5).

$$-M_b - Q_b dx - f_y(x)\frac{dx^2}{2} - \kappa w(x)\frac{dx^2}{2} + M_b + dM_b + \kappa v(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \tag{B.5}$$

Dette udtryk kan simplificeres til udtryk (B.6).

$$dM_b - f_y(x)\frac{dx^2}{2} - Q_b dx - \kappa w(x)\frac{dx^2}{2} + \kappa v(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \tag{B.6}$$

Når dx går mod 0, bliver $\frac{dx^2}{2}$ ubetydelig, og udtryk (B.6) kan derfor simplificeres til udtryk (B.7).

$$dM_b - Q_b dx = 0 \tag{B.7}$$

Hvor udtryk (B.7) kan omskrives til udtryk (B.8).

$$\frac{dM_b}{dx} = Q_b \tag{B.8}$$

Et Bernoulli-Euler bjælkeelement anvendes, som angivet på figur 4.4 på side 27. Teorien for en Bernoulli-Euler bjælke foreskriver, at tværsnittet forbliver vinkelret på den deformerede akse, hvormed vinklen θ_z haves. θ_z er vinklen imellem den vertikale akse og tværsnittets deformerede akse. Desuden er vinklen i forhold til den horisontale akse defineret ved $\frac{dw_y(x)}{dx}$. Idet tværsnittet forbliver vinkleret til den kurvede bjælkeakse, vil $\frac{dw_y(x)}{dx} = \theta_z$ gælde.

Momentet for en Bernoulli-Euler bjælke er givet ved (B.9).

$$M_z = EI_z\frac{d\theta_z(x)}{dx} = EI_z\frac{d^2w(x)}{dx^2} \tag{B.9}$$

Ved indsættelse af momentet givet ved (B.9) i udtryk (B.8) erhverves udtryk (B.10).

$$\frac{d^3w(x)}{dx^3}\frac{dEI_z}{dx} = Q_b \tag{B.10}$$

Den vertikale ligevægt for Bernoulli-Euler elementdelen blev bestemt ved (B.3), og indsættes udtryk (B.10) heri opnås den vertikale ligevægt givet ved (B.11) for Bernoulli-Euler elementdelen.

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4}\frac{d^2EI_z}{dx^2} = -\kappa\left(w(x) - v(x)\right) + f_y(x) \tag{B.11}$$

Idet elasticitetsmodulet samt intertimomentet er konstant for jernbaneskinnen, kan udtryk (B.11) simplificeres til (B.12).

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4}EI_z = -\kappa\left(w(x) - v(x)\right) + f_y(x) \tag{B.12}$$

De styrende ligninger for bjælke-fjederelementet afbilledet på figur 4.4 på side 27 er herved givet ved utrykkene (B.4) og (B.12). I disse udtryk er der set bort fra gravitationskraften og masserne i systemet.

B.2 Udledning af stivhedsmatricen for de isoparametriske Q8-jordelementer

For et 2D plan lineær-elastisk element kan det vises, at udtrykket for elementstivhedsmatricen udledt ved hjælp af Galerkin metoden er givet ved udtryk (B.13) [Ottosen og Petersson, 1992,afsnit 16.4].

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] t dA \tag{B.13}$$

I udtryk (B.13) er $[D]$ den konstitutive matrice, som i plan tøjning, $\varepsilon_z = 0$, er givet ved (B.14). $[B]$ er tøjningsinterpolationsmatricen, som er givet ved udtryk (B.15).

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

$$[B] = [\partial]\,[N] \tag{B.15}$$

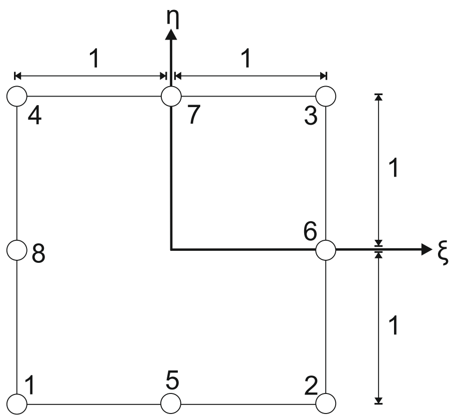
I udtryk (B.15) er $[N]$ formfunktionsmatricen, som er givet ved udtryk (B.16) for et Q8-element. De tomme pladser i udtryk (B.16) indgår for at muliggøre en korrekt multiplikation med en vektor indeholdende frihedsgraderne. Knudeflytningerne i henholdsvis x- og y-retningen bestemmes ved at formfunktionsmatricen multipliceres med frihedsgraderne, hvilket er angivet i udtryk (B.17).

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{B.16}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \tag{B.17}$$

Imidlertid er det isoparametriske Q8-elementer, som er anvendt i dette projekt, hvorfor formfunktionerne er givet i de lokale (ξ,η)-elementkoordinater, som skal transformeres til globale (x,y)-elementkoordinater. På figur B.2 er det isoparametriske Q8-element afbilledet i det lokale domæne, hvoraf det fremgår, at det lokale koordinatsystem har origo i elements tyngdepunkt, og siderne har længden $\xi \pm 1$ og $\eta \pm 1$. Formfunktionerne udtrykt ved de lokale koordinater er angivet i udtryk (B.18), og disse kan verificeres ved, at de skal give 1, hvis koordinaterne til knuden de tilhører indsættes, og nul i alle øvrige knuder. Eksempelvis haves $N_1(-1,-1) = 1$ og $N_5(-1,-1) = 0$.

$$\begin{aligned}
N_1(x) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_8(x)+N_5(x)) & N_5(x) &= \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta) \\
N_1(x) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5(x)+N_6(x)) & N_6(x) &= \frac{1}{2}(1+\xi)\left(1-\eta^2\right) \\
N_3(x) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_6(x)+N_7(x)) & N_7(x) &= \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta) \\
N_4(x) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_7(x)+N_8(x)) & N_8(x) &= \frac{1}{2}(1-\xi)\left(1-\eta^2\right)
\end{aligned} \tag{B.18}$$



Figur B.2: Isoparametrisk Q8-element i det lokale domæne.

For at transformere knuderne fra det lokale system til det globale system således, at en given knude i det lokale domæne svarer til den samme knude i det globale domæne, anvendes Jacobian matricen, $[J]$. Denne transformation er angivet ved udtryk (B.19) [Ottosen og Petersson, 1992,Afsnit 19.1] og er afbilledet på figur 4.6 på side 33. Det skal bemærkes, at knudenummereringen i det lokale og globale domæne skal være ækvivalent.

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{B.19}$$

For at udtryk (B.19) skal være sandt, er det nødvendigt, at Jacobian matricen er positiv. I dette tilfælde betyder det, at midterknuderne skal placeres midt i mellem to hjørneknuder, og desuden skal vinklerne i kvadratet være mindre en 180° [Ottosen og Petersson, 1992,Afsnit 19.3].

Som det fremgår af udryk (B.15) indeholder tøjningsinterpolationsmatricen, $[B]$, den afledede af formfunktionerne med hensyn til x og y. Idet formfunktionerne (B.18) er givet ved lokale (ξ, η)-koordinater, er det nødvendigt at foretage en transformation af $[B]$ fra lokale til globale koordinater. Tøjningsinterpolationsmatricen givet i globale koordinater bestemmes ved udtryk (B.20).

$$[B] = [H]\,[J_{exp}]^{-}1\,[D_{N,exp}] \tag{B.20}$$

$[D_{N,exp}]$ i udtryk (B.20) er de afledede formfunktioner med hensyn til de lokale koordinater. På denne måde er $[D_{N,exp}]$ tøjningsinterpolationsmatricen givet i lokale koordinater samt i udvidet form. Ved multiplikation imellem frihedsgraderne og $[D_{N,exp}]$ erhverves tøjningerne i lokale koordinater, hvorfor $[D_{N,exp}]$ forbinder flytningerne i det globale domæne med deres afledede i lokale koordinater. I udtryk (B.21) er $[D_{N,exp}]$ givet.

$$[D_{N,exp}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x)}{\partial \xi} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8(x)}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1(x)}{\partial \eta} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8(x)}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(x)}{\partial \xi} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8(x)}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1(x)}{\partial \eta} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8(x)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

Matricen $[H]$ i udtryk (B.20) relaterer tøjningerne til de flytningsafledede. På vektorform er tøjningerne i to dimensioner defineret ved (B.22), hvorfor $[H]$-matricen i udtryk (B.23) multipliceret med de flytningsafledede netop vil resultere i tøjningerne. Dette er illustreret ved operationen i (B.24).

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_x y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{B.22}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.23}$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_x y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{B.24}$$

I udtryk (B.25) er $\left[J_{exp}^{-1}\right]$ angivet, hvilket er den inverse ekspanderede Jacobian matrice. Herved er alle størrelser i udtryk (B.20) angivet og bestemmelsen af tøjningsinterpolationsmatricen, $[B]$, er dokumenteret.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \left[J_{exp}^{-1}\right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \left[J_{exp}^{-1}\right] = \begin{bmatrix} J_{2x2}^{-1} & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & J_{2x2}^{-1} \end{bmatrix} \tag{B.25}$$

Af udtryk (B.13) fremgår det, at der ved bestemmelse af stivhedsmatricen integreres over arealet. Idet der ved integrationen også skal tages højde for forskellen mellem det lokale og globale domæne omskrives arealintegralet over dA til et integrale over $d\xi d\eta det\,[J]$, idet relationen $dA = dxdy = d\xi d\eta det\,[J]$ findes imellem det lokale og globale domæne. Her kan $det\,[J]$ betragtes som en skaleringsfaktor, som beskriver forholdet imellem de uendelige små arealer i det globale og lokale domæne [Ottosen og Petersson, 1992,s. 376-380].

Herved bestemmes stivhedsmatricen ved udtryk (B.26). Udtryk (B.26) kan på kort form skrives (B.27), idet udtryk (B.28) anvendes.

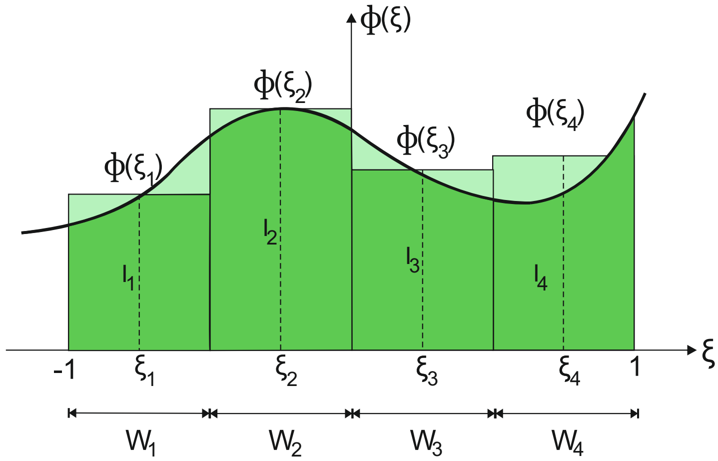
$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[[H]\left[J_{exp}^{-1}\right][D_{N,exp}] \right]^T t\,[D]\,[H]\left[J_{exp}^{-1}\right][D_{N,exp}]\,det\big([J]\big)\,d\xi d\eta \tag{B.26}$$

$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Phi(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \tag{B.27}$$

$$\Phi(\xi,\eta) = \Big[[H]\,[J_{exp}^{-1}]\,[D_{N,exp}]\Big]^T t\,[D]\,[H]\,[J_{exp}^{-1}]\,[D_{N,exp}]\, det\big([J]\big) \tag{B.28}$$

Integrationen, der skal udføres i udtryk (B.27), er en integration over en matrix $\phi(\xi,\eta)$, hvis elementer er ikke-lineære funktioner af ξ og η. Af denne årsag kan integrationen ikke udføres analytisk, men må udføres numerisk [Ottosen og Petersson, 1992,Afsnit 19.8].

Ved numerisk integration inddeles arealet, hvorover integrationen skal udføres, i mindre delarealer, hvilket fremgår på figur B.3. Herefter summeres disse arealer således, at det samlede areal under funktionskurven bestemmes. De enkelte delarealer beregnes ved at multiplicere bredden W_i med højden givet ved funktionsværdien i underintervallets midtpunkt. Gauss integration er den type numerisk integration, som oftest anvendes til beregning af elementmatricer [Cook et al., 2002,afsnit 6.3], hvorfor denne numeriske integrationsmetode også anvendes i dette projekt. For isoparametriske elementer haves typisk en funktion beskrevet ved et polynomium i intervallet $[-1;1]$, som skal integreres i intervallet. Her velegner Gauss integration sig særligt til beregning af elementmatricer.

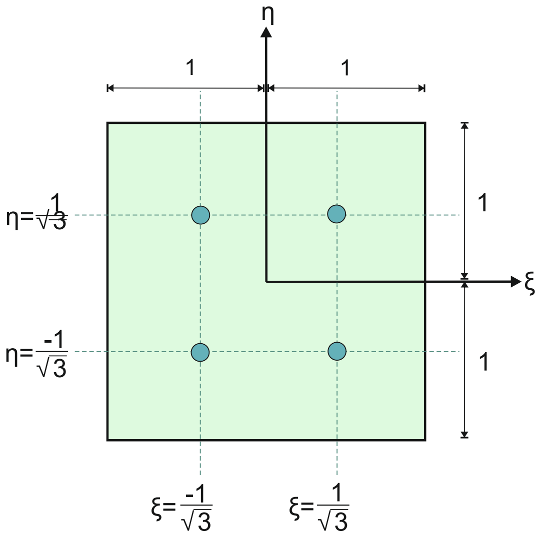


Figur B.3: Illustration af hvordan arealet under et polynomium inddeles i delarealer ved Gauss integration af første orden.

Gauss integration anvender Gausspunkter og vægter disse med det formål, at minimere integrationsfejlen. Beliggenheden af gausspunkterne og tilhørende vægte afhænger af den gaussorden, som vælges, og fremgår i tabel B.1. Til valg af gaussorden haves følgende regel: “Et polynomium af grad $2n-1$ integreres eksakt ved anvendelse af n-gausspunkter. Anvendelse af mere end n gausspunkter vil fortsat give et eksakt resultat ” [Cook et al., 2002,Afsnit 6.3]. For Q8-elementet haves polynomier af integranden af fjerde orden, hvilket betyder at eksakt integration kræver tredje ordens Gauss integration i henhold til den beskrevne regel:

$$n = \frac{4+1}{2} = 2,5 \Rightarrow n = 3 \tag{B.29}$$

På baggrund af [Cook et al., 2002] vides det dog, at reduceret integration (2x2) giver en hurtigere løsning med få fejl. Derfor er det i nærværende projekt valgt at anvende reduceret integration. Den reducerede integration fremgår på figur B.4.



Figur B.4: Q8-elementet integreres numerisk med 4 gausspunkter.

Tabel B.1: Antal gausspunkter og tilhørende vægte i henhold til den valgte gaussorden [Cook et al., 2002]

Orden n	Punkt ξ_1 koordinat	Vægtfaktor W_i
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\pm\sqrt{0,6}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{1,2}}{7}}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6\sqrt{1,2}}$
	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{1,2}}{7}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{1,2}}$

Ved anvendelse af gaussintegration vil stivhedsmatricen, $[K]$, endeligt kunne beregnes ved udtryk (B.30), hvor $\Phi(\xi,\eta)$ er givet i (B.28).

$$[K] = \sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} W_i W_j \Phi(\xi_i,\eta_j) \tag{B.30}$$

Udtryk (B.30) vil i udskrevet form være givet ved (B.31).

$$[K] = \Phi(\xi_1,\eta_1)W_1W_1 + \Phi(\xi_2,\eta_1)W_2W_1 + \Phi(\xi_1,\eta_2)W_1W_2 + \Phi(\xi_2,\eta_2)W_1W_2 \tag{B.31}$$

Ovenfor er det herved blevet dokumenteret, hvordan stivhedsmatricen for de isoparametriske Q8-jordelementer beregnes i det todiemsionelle bjælkemodelprogram.

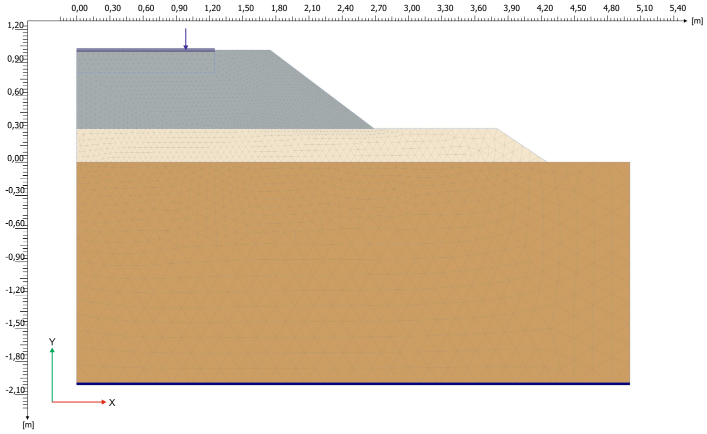
C Betydningen af svellens placering i modelleringen

I COWI er det generelt anvendt at modellere svellen oven på sporkassen, idet svellen i PLAXIS modelleres som en plade, som ikke har nogen højde i modelbilledet. Denne situation fremgår på figur C.1 og benævnes i det det følgende *svellemodellering 1*. Hvis svellen skal placeres fysisk korrekt i forhold til det i banenormen [Banedanmark, 2014] forskrevne, skal den placeres som angivet på figur C.2. Denne modellering benævnes i det følgende *svellemodellering 2*. Af denne figur fremgår det tydeligt, at når svellen modelleres som en plade i PLAXIS, har den ingen synlig højde i modelbilledet. Årsagen til, at *svellemodellering 1* generelt anvendes i COWI, er, at denne medtager en ekstra volumen ballast, hvorfor tyngden af dæmningen på råjorden øges. På denne måde er *svellemodellering 1* mere konservativ ved dokumentation af råjordens stabilitet samt flytninger. Når flytningen af selve svellen imidlertid betragtes, vil flytningen heraf forventes større i *svellemodellering 2*, idet dette design har det mindste ballast volumen og dermed den mindste stivhed. På den måde er *svellemodellering 1* det mest konservative tilfælde ved betragtning af råjorden, hvor *svellemodellering 2* er det mest konservative tilfælde, når selve flytningen af svellen samt jernbaneskinnen betragtes. Imidlertid ønskes *svellemodellering 1* anvendt i dette projekt, da det er denne modelleringsform, som generelt anvendes ved dimensionering af dæmninger. Derfor undersøges det, hvor stor betydning modelleringen af svellen har på svellens flytning, med henblik på at retfærdiggøre anvendelse af *svellemodellering 1* i det videre studie, hvor både flytningen af jernbaneskinnen og råjorden betragtes.

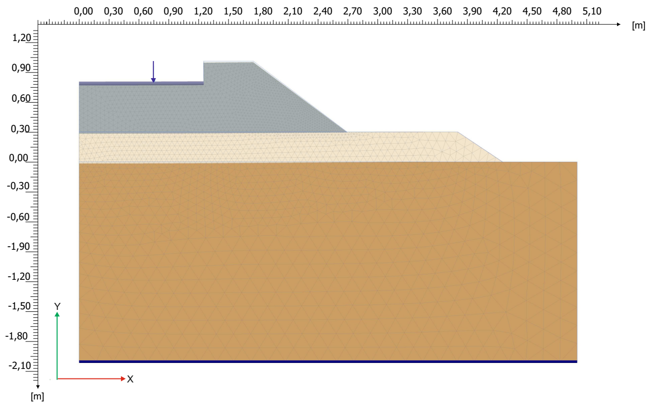
Ved undersøgelsen af svellens flytning modelleres jernbaneskinnen ikke, men en punktlast på 1kN påføres i stedet i det punkt, hvor jernbaneskinnen ville være placeret. Den beregnede flytning for de to typer af svellemodelleringer er listet i tabel C.1. Heraf fremgår det, at flytningen som forventet er størst ved *svellemodellering 2*, idet dæmningens samlede stivhed i dette tilfælde er mindst. Den procentvise forskel imellem de beregnede flytninger er $3,8\%$, hvorfor det på baggrund heraf vurderes, at det er acceptabelt at anvende *svellemodellering 1* ved studie af svellens samt jernbaneskinnens nedbøjning.

Tabel C.1: Beregnede maksimale flytning af svellen i punktet umiddelbart under lastpåførelsen for de to forskellige placeringer af svellen.

	Flytning af svellen	**Enhed**
Svellemodellering 1	$-0,01610$	[m]
Svellemodellering 2	$-0,01674$	[m]
Forskel imellem modelleringer	$3,8$	[%]



Figur C.1: *Svellemodellering 1*. Svellen er placeret oven på sporkassen i denne modellering, hvorved et større volumen ballast haves sammenlignet med *svellemodellering 2*



Figur C.2: *Svellemodellering 2*. Svellen er placeret nede i sporkassen, hvilket er den modellering som banenormen [Banedanmark, 2014] foreskriver.

D Dæmningsgeometri

D.1 Dæmningsgeometri

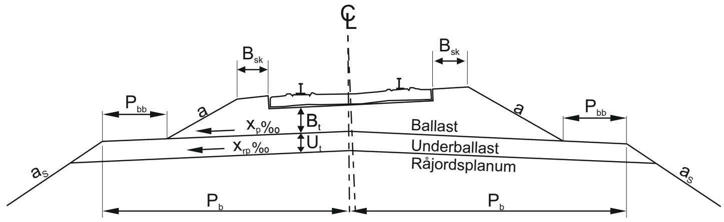
Dæmningsdimensionerne, som skal anvendes ved etablering af nyanlæg, anvendes under etablering af influenslængenden i både anvendelsesgrænsetilstanden samt i brudgrænsetilstanden. Minimumsdimensionerne for nyanlæg er foreskrevet i [Banedanmark, 2014] og er gengivet i tabel D.1. Banenormen [Banedanmark, 2014] er gældende for sporkonstruktioner, hvor nedenstående kombinationer af aksellast samt hastighed er tilladt. Hastighed forkortes V og aksellast forkortes A:

- $\mathrm{V} \leq 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ hvis $\mathrm{A} \leq\ 25,0$ tons
- $100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}} < \mathrm{V} \leq 200\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ hvis $\mathrm{A} \leq 22,5$ tons
- $200\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}} < \mathrm{V} \leq 250\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ hvis $\mathrm{A} \leq 20,0$ tons

I tabel D.1 er minimumsmålene for banedæmninger, hvor hastigheder imellem $200\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ og $250\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ er tilladt, gengivet. Minimumsmålene herfor er større end dem, angivet for mindre hastigheder, hvorfor samtlige af ovenstående kombinationer af hastigheder og aksellast kan anvendes på dæmningen, hvis det ønskes. Betegnelserne anvendt i tabel D.1 fremgår på figur D.1.

Tabel D.1: Krav til tværprofil ved etablering af ny banetracé gældende for toghastigheder imellem $200\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ og $250\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ [Banedanmark, 2014,figur 15.1-2]

Element	**Minimums krav for hovedspor** $200\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}} < \mathrm{V} \leq 250\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$
Ballastskulderens bredde (B_{sk})	$0,50$m
Anlæg af ballastskråning (a)	$1,5$
Ballastens tykkelse (B_t)	$0,35$m
Underballastens tykkelse (U_t)	$0,3$m
Planumsbredde (P_b)	$3,80$m
Hældning af planum (X_p)	40‰
Hældning af råjordsplanum (X_{rp})	40‰



Figur D.1: Illustration af tværprofil for enkeltsporet bane [Banedanmark, 2014,figur17.1-1].

D.2 Dæmningsmaterialer

Ved nyanlæg skal underballastlaget bestå af stabilt grus eller veldrænende grus og ballastlaget skal bestå af ballastskærver [Banedanmark, 2014,afsnit 15.1]. Den skinnetype, som skal anvendes ved etablering af nyanlæg, er 60E2 [Banedanmark, 2010a], og desuden anvendes betonsveller, idet disse har længere levetid sammenlignet med træsveller [Nielsen, 2003]. I [Banedanmark, 2012,side 16] foreskrives, at en betonsvelle af typen S99 skal anvendes, hvis ikke andet er angivet, hvorfor denne type anvendes i dette projekt.

Rumvægten for ballast, underballast, jernbaneskinne samt betonsvelle er listet med tilhørende reference i tabel D.2.

Tabel D.2: Rumvægt for ballast, underballast, jernbaneskinne samt betonsvelle, som anvendes i nærværende projekt. Den anvendte gravitationsacceleration er $9,82\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Materiale	**Rumvægt** $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$
Ballast (*øvre værdi*) [1]	20
Underballast (*stabil grus*) [2]	$16,7$
Betonsvelle [3]	$23,57$
Jernbaneskinne [4]	$77,087$

Svelletypen S99 modelleres ikke med det reelt forekommende varierende tværsnit, men i stedet antages det, at tværsnittet under jernbaneskinnen er gennemgående, hvilket på tegning [Banedanmark, 1991] er snit B-B. Den nominelle svelleafstand skal desuden være 625mm [Banedanmark, 2012,afsnit 2.4.4]. I modelleringen tages der ikke højde for de påkrævede $0,04$m, som overkanten af ballastlaget skal sænkes i forhold til overkanten af svellerne i områder imellem sveller og skinner. Dette er gældende for hastigheder $160\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}} < \mathrm{V} \leq 250\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ [Banedanmark, 2014,afsnit 15.1].

Den dæmningsgeomtri som er opnået ud fra tabel D.1 samt ved anvendelse af svelletype S99 er gengivet på figur 5.1 på side 49, hvilket er dæmningstværsnit, som anvendes i både den to- og tredimensionelle PLAXIS-model.

E Bilag: Estimering af trykspredningen i banedæmningen

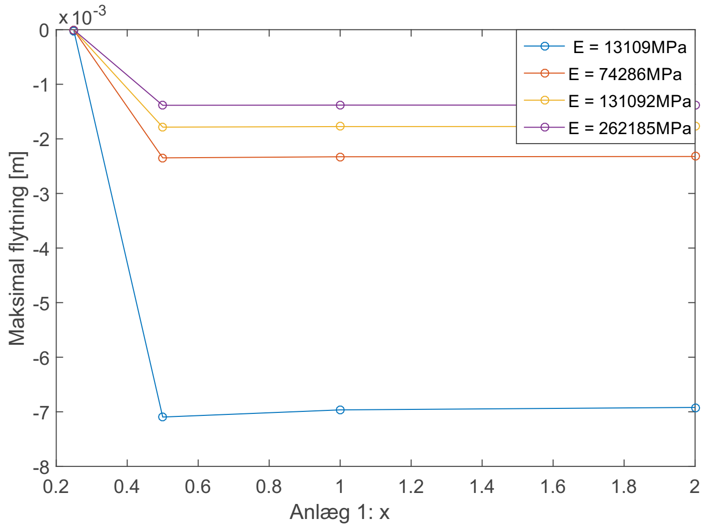
I dette bilag beskrives det, hvordan den trykspredning, som forekommer ned igennem banedæmningen, er bestemt. Trykspredningen bestemmes ved hjælp af en tredimensionel PLAXIS-model, med dimensionerne angivet i afsnit 5.1 på side 49.

Ved gradvist at reducere dæmningens anlæg og klarlægge, hvordan flytningen påvirkes af denne ændring, kan trykspredningen i dæmningen fastsættes. Et tilstrækkelig lavt dæmningsanlæg vil have en geometrisk begrænsning på trykspredningen, hvorfor flytningerne i dæmningen påvirkes. På baggrund heraf vil dæmningsanlægget afsløre, hvilken trykspredning som forekommer ned igennem dæmningen. Den maksimale flytning, som forekommer i dæmningstværsnittet lige under lasten, bestemmes for fire forskellige dæmningsanlæg og er listet i tabel E.1. Dæmningsanlæggets indvirkning på de maksimale flytninger er bestemt for de i tabel 5.1 på side 51 angivne dæmningsfyld. På figur E.1 er de i tabel E.1 angivne maksimale flytninger plottet som funktion af dæmningens anlæg.

Af tabel E.1 samt figur E.1 fremgår det, at de maksimale flytninger er svagt stigende med faldende anlæg til og med dæmningsanlæg $0,5$. Dette skyldes, at en reduktion i dæmningens anlæg medfører en reduktion i dæmningens volumen og dermed også en reduktion af stivheden heraf. Af figur E.1 fremgår det tilmed, at ved anlæg $0,25$ forekommer et brat fald i flytningerne, hvilket skyldes, at trykspredningen ved dette anlæg forhindres af dæmningens geometriske rammer. Dette er illustreret på figur E.2. På baggrund heraf kan det konkluderes, at trykspredningen er større end $1:4$, idet dette svarer til et dæmningsanlæg på $0,25$. Desuden kan det også konkluderes, at trykspredningen som minimum er $1:2$, idet dette svarer til et dæmningsanlæg på $0,5$. Trykspredningen vil derfor befinde sig i et interval givet ved $]1:4\,;\,1:2]$.

Tabel E.1: Banedæmningens anlæg i forhold til de beregnede maksimale flytninger i PLAXIS 3D

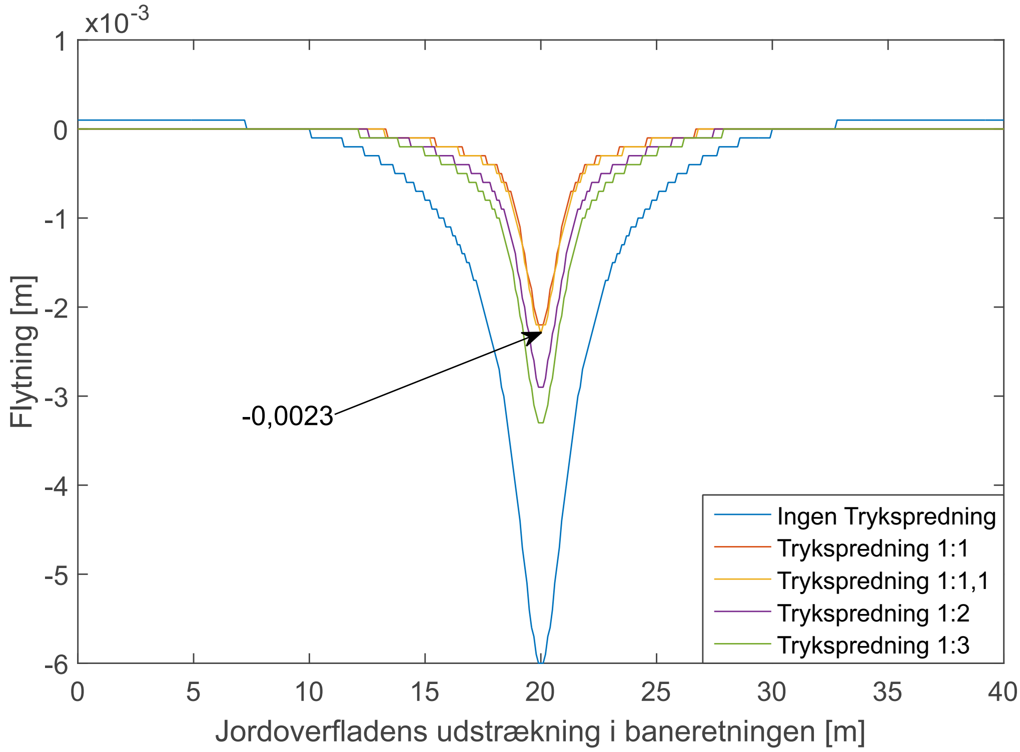
Dæmnings-fyld	Anlæg 2 maks. flytning [m]	Anlæg 1 maks. flytning [m]	Anlæg 0,5 maks. flytning [m]	Anlæg 0,25 maks. flytning [m]
Moræneler 1	$-6,92\cdot 10^{-3}$	$-6,965\cdot 10^{-3}$	$-7,096\cdot 10^{-3}$	$-0,02909\cdot 10^{-3}$
Morænesand 1	$-2,323\cdot 10^{-3}$	$-2,328\cdot 10^{-3}$	$-2,348\cdot 10^{-3}$	$-0,009507\cdot 10^{-3}$
Moræneler 2	$-1,773\cdot 10^{-3}$	$-1,775\cdot 10^{-3}$	$-1,785\cdot 10^{-3}$	$-0,007204\cdot 10^{-3}$
Moræneler 3	$-1,381\cdot 10^{-3}$	$-1,381\cdot 10^{-3}$	$-1,385\cdot 10^{-3}$	$-0,005575\cdot 10^{-3}$



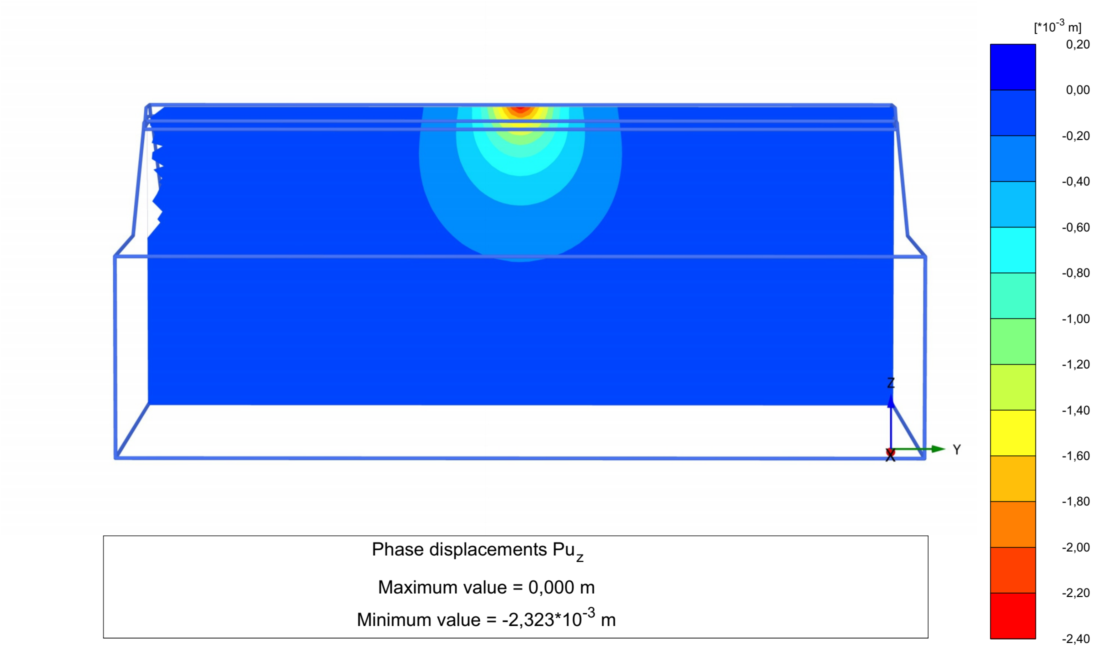
Figur E.1: Maksimum flytning i forhold til banedæmningens anlæg for fire forskellige typer dæmningsfyld.

Figur E.2: Illustration af en trykspredning, som er større end dæmningens anlæg, hvorved den begrænses af dæmningens geometri.

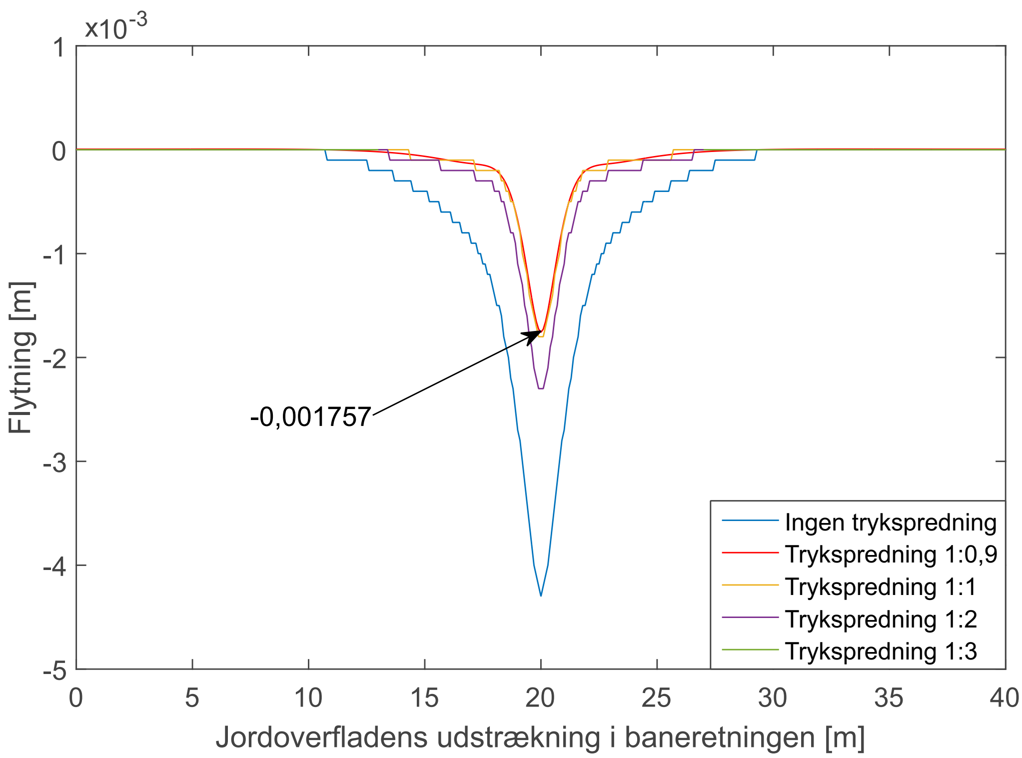
F Plot af flytninger fra MATLAB-modellen og PLAXIS 3D til sammenligning



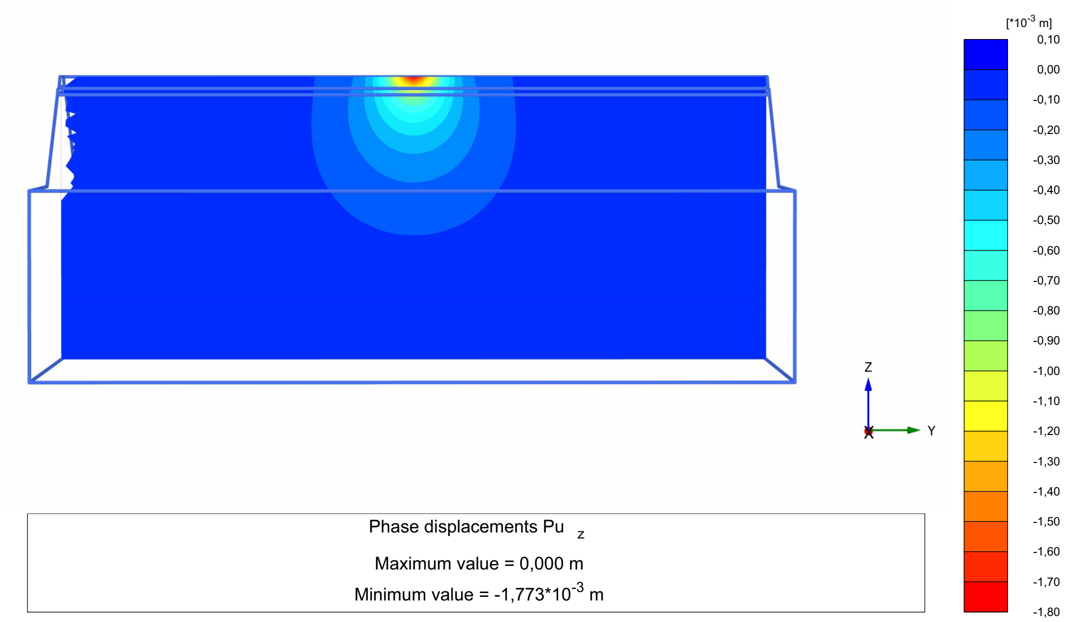
Figur F.1: Flytninger af ballastlaget bestemt i MATLAB-modellen for en dæmning med en dæmningsfyld bestående af morænesand 1. Denne dæmningsfylds egenskaber er angivet i tabel 5.1 .



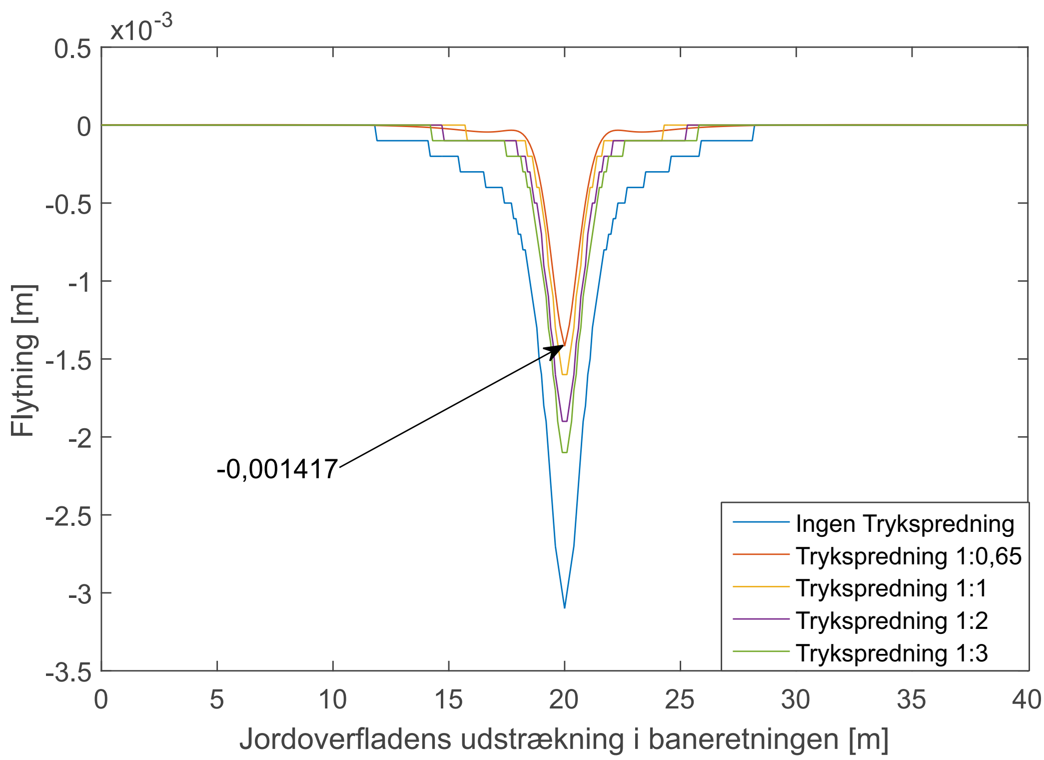
Figur F.2: Flytninger i dæmningens længderetning bestemt i PLAXIS 3D. Dæmningsfylden er den i tabel 5.1 angivne moræneand 1.



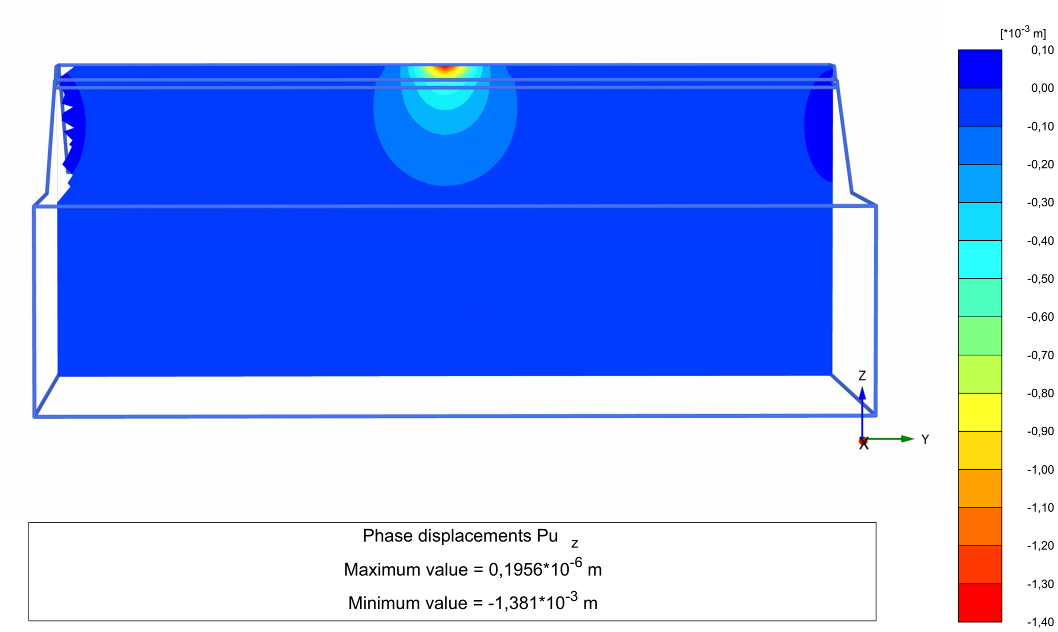
Figur F.3: Ballastlagets flytninger bestemt i MATLAB-modellen for en dæmningen med en dæmningsfyld bestående af moræeneler 2. Denne dæmningsfyld er angivet i tabel 5.1.



Figur F.4: De i PLAXIS 3D beregnede flytninger i længderetningen på en dæmning med en dæmningsfyld bestående af moræneler 2. Denne dæmningsfyld er angivet i tabel 5.1.



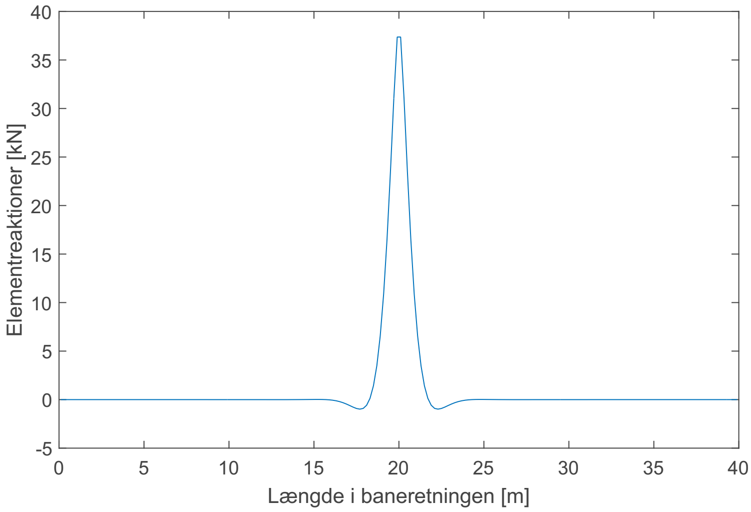
Figur F.5: De i MATLAB-modellen beregnede flytninger af ballastlaget på en dæmning, hvor dæmningsfylden har et elasticitetsmodul på 262185$\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ og dermed er den i tabel 5.1 angivne moræneler 3.



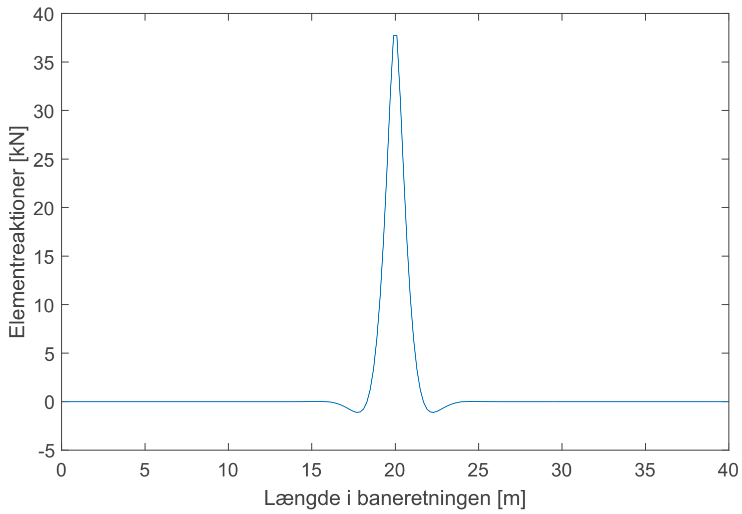
Figur F.6: De i PLAXIS 3D beregnede flytninger i længderetningen på en dæmning med en dæmningsfyld bestående af moræneler 3. Denne dæmningsfyld er angivet i tabel 5.1.

G Plot af elementreaktioner bestemt i MATLAB-modellen

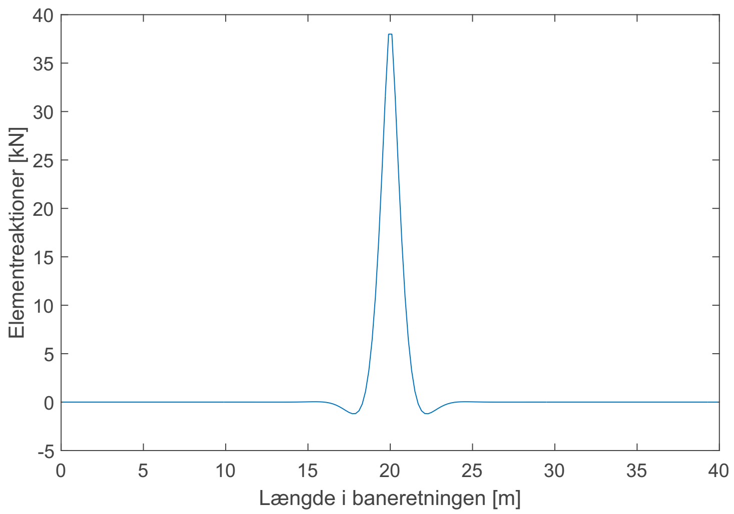
G.1 Elementreaktionsfordelinger bestemt i anvendelsesgrænsetilstanden



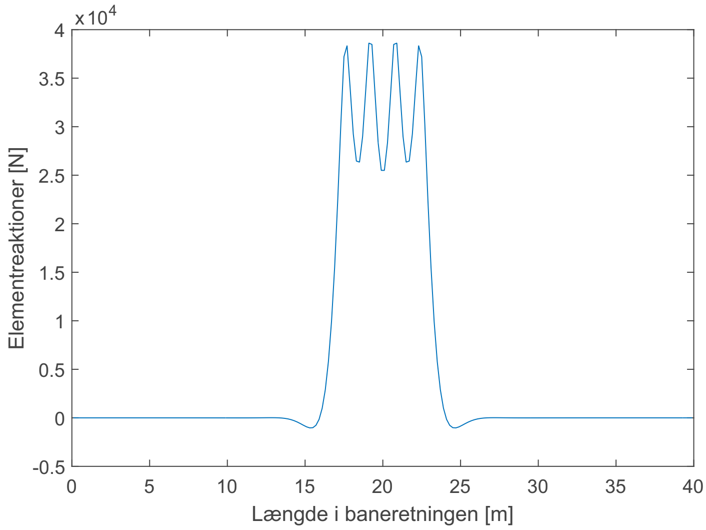
Figur G.1: Elementreaktioner for den i tabel 5.1 angivne morænesand 1 plottet i forhold til længde i baneretningen. En enkelt punktlast på 250kN er påført skinnen.



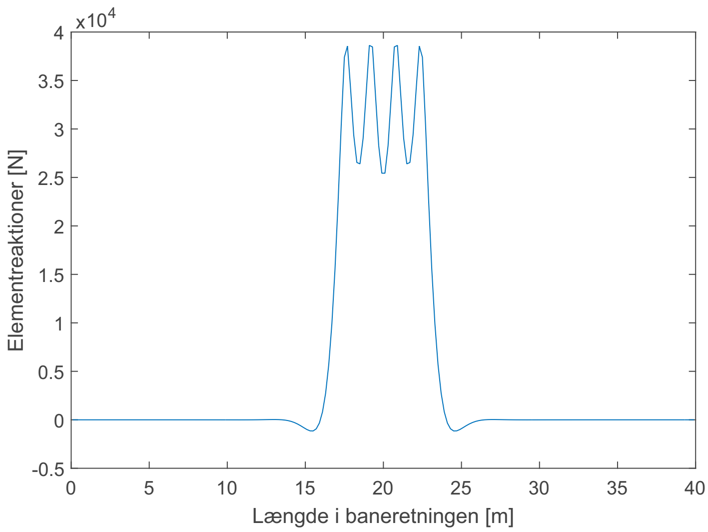
Figur G.2: Elementreaktioner plottet i forhold til længden i baneretningen. Den anvendte dæmningsfyld er på denne graf moræneler 2, som er angivet i tabel 5.1. En enkelt punktlast på 250kN er påført skinnen.



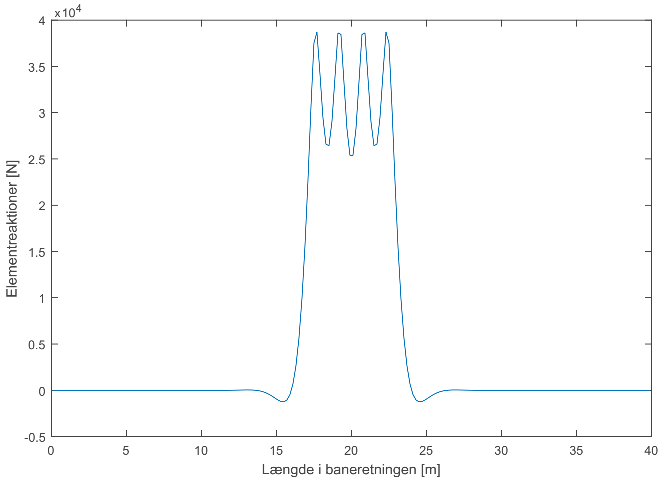
Figur G.3: Elementreaktioner plottet som funktion af længden i baneretningen. Elementreaktionerne er bestemt for en dæmning med en dæmningsfyld bestående af den i tabel 5.1 angivne moræeneler 3. En enkelt punktlast på 250kN er påført skinnen.



Figur G.4: Elementreaktionsfordeling for en dæmning med en fyld bestående af moræneesand 1. Denne dæmningsfyld er angivet i tabel 5.1. Lastmodel 71 er anvendt.

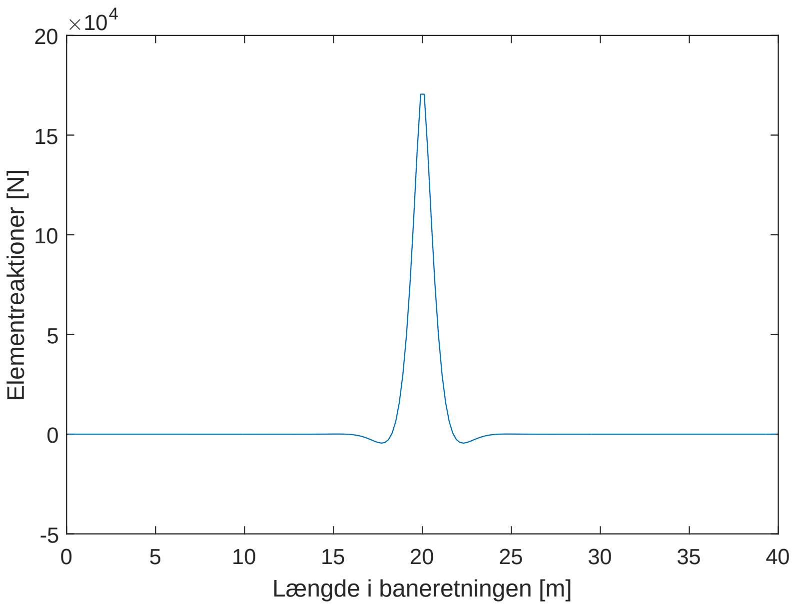


Figur G.5: Elementreaktionsfordeling for en dæmning påført lastmodel 71. Den anvendte dæmningsfyld er den i tabel 5.1 angivne moræneler 2.

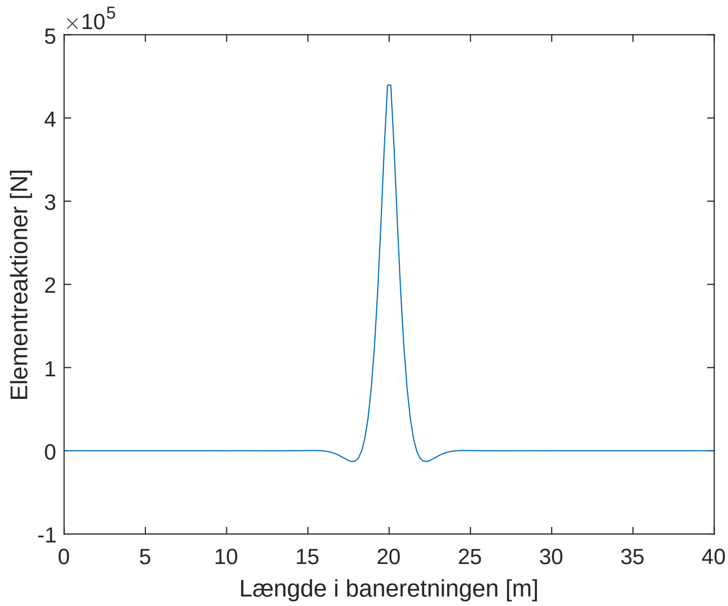


Figur G.6: Elementreaktionsfordeling for en dæmnings med en dæmningsfyld bestående af moræneler 3. Denne dæminingsfyld er angivet i tabel 5.1. Lastmodel 71 er påført dæmningen.

G.2 Elementreaktionsfordelinger bestemt i brudgrænsetilstanden



Figur G.7: Elementreaktionsfordeling bestemt for en dæmning med en dæminingsfyld bestående af morænesand 1 og en punktlast på 1141kN er påført i den halve dæmningslængde. Morænesand 1 er angivet i tabel 5.9.



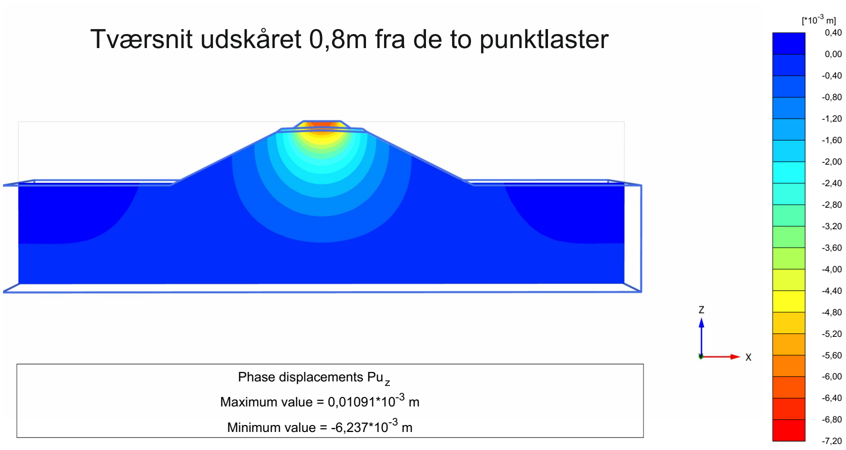
Figur G.8: Fordeling af elementreaktioner bestemt for en dæmning med en dæmningsfyld bestående af den i tabel 5.9 angivne moræneler 2. En punktlast på 2912kN er påført i den halve dæmningslængde.

H Superpostion i PLAXIS 3D modellen

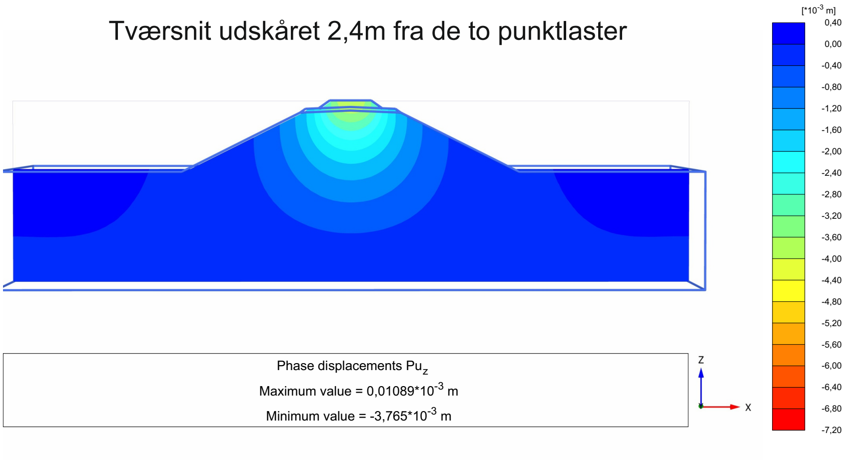
I dette bilag dokumenteres det, at superpostion kan anvendes i PLAXIS 3D. Det dokumenteres, at ved at udtage et dæmningstværsnit i afstanden $0,8$m samt $2,4$m fra de to påførte punktlaster i den tredimensionelle PLAXIS-model og herefter kombinerer de i tværsnittene fundne flytninger, vil den samlede flytning i den halve dæmningslængde kunne bestemmes for lastsituationen bestående af lastmodel 71. Lastmodel 71 er afbillede på figur 5.23 på side 64.

På figur H.1 fremgår dæmningstværsnittet udtaget $0,8$m fra de to påførte punktlaster. På samme måde fremgår dæmningstværsnittet udtaget $2,4$m fra de to påførte punktlaster på figur H.2. Ved at kombinere flytningerne bestemt ved de to tværsnit og multiplicere med to, idet der forekommer to laster på hver side af dæmningens midte i lastmodel 71 erhvervs en samlet flytning på $-0,02$m, hvilket også er angivet i udtryk (H.1). På figur H.3 fremgår et dæmningstværsnit udtaget i den halve dæmningslængde af en tredimensionel PLAXIS model med en lastsituation svarende til lastmodel 71. Den tredimensionelle model, hvoraf dette tværsnit er udskrået, fremgår på figur 5.24 på side 65. Af figur H.3 fremgår det, at den maksimale flytning i tværsnittet i dæmningen halve længde netop er $-0,02$m, hvorved superpostion derfor er gældende.

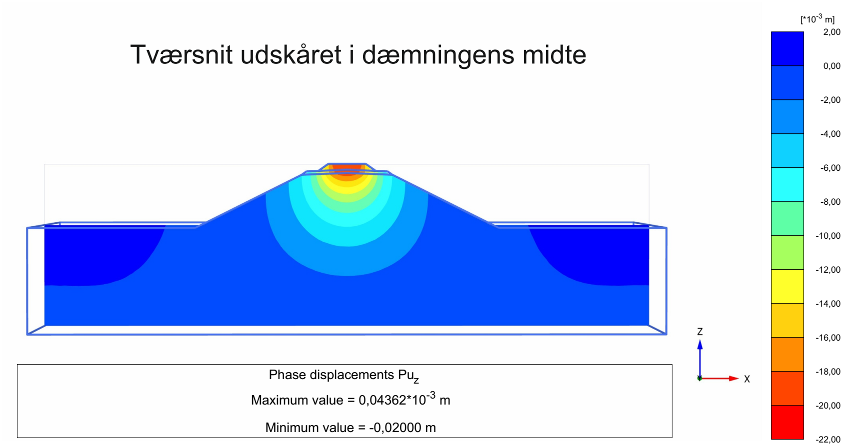
$$u_{dæmningsmidte} = 2 \cdot -6,237 \cdot 10^{-3}\text{m} + 2 \cdot -3,765 \cdot 10^{-3} sim = -0,02\text{m} \tag{H.1}$$



Figur H.1: Dæmningstværsnit udtaget $0,8$m fra de to punktlaster påført dæmningens midte i den tredimensionelle PLAXIS 3D model.



Figur H.2: Dæmningstværsnit udtaget 2, 4m fra de to punktlaster på ført dæmningens midte i den tredimensionelle PLAXIS 3D model.



Figur H.3: Dæmningstværsnit udtaget i den halve dæmningslængde af en tredimensionel PLAXIS-model med en lastsituation svarende til lastmodel 71.