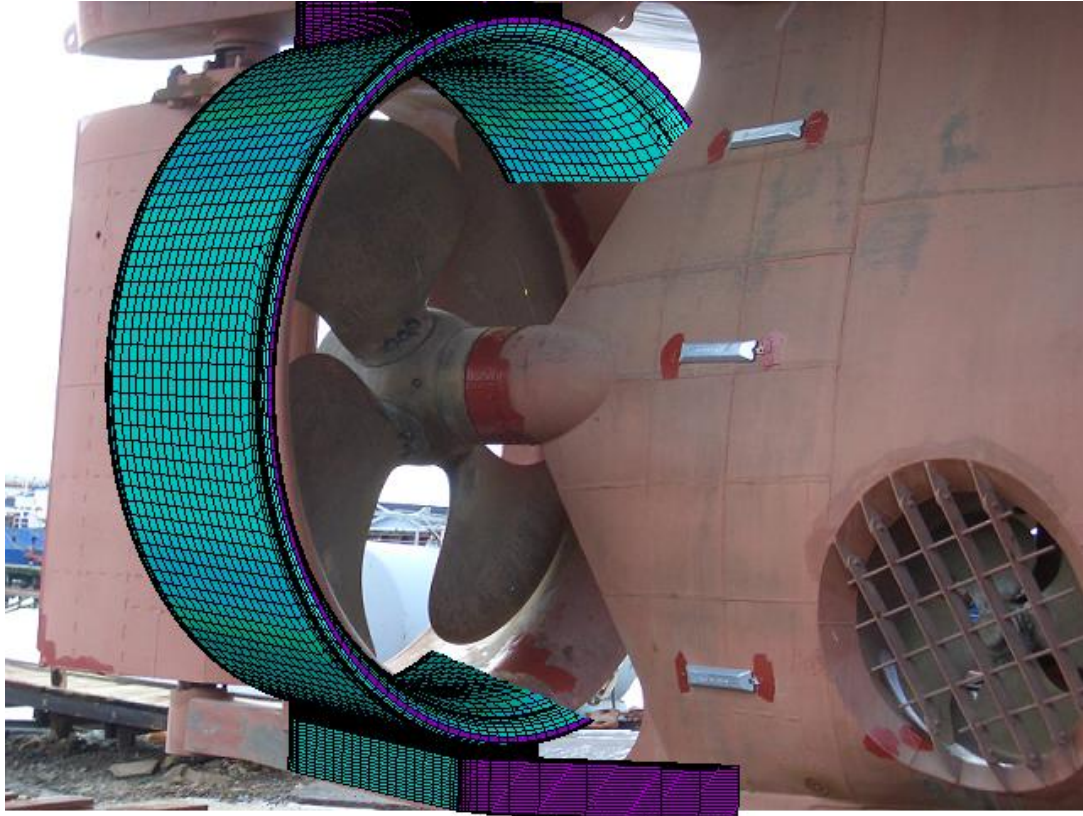


# Egenfrekvensanalyse af propellerdyse i vand



**Maziyar Nesari Zadeh**

**BDMS10, 43F**

**Specialeprojekt**

**Institut for Maskinteknik**



**Titel:** Egenfrekvensanalyse af propellerdyse i vand  
**Semester:** BDMS10  
**Semester tema:** Afgangsprojekt  
**Projektperiode:** 1. september 2008 – 18. december 2008  
**ECTS:** 30  
**Vejledere:** Sergey V. Sorokin  
Niels Olhoff

**Projektgruppe:** 43F

Maziyar Nesari Zadeh

---

Oplag: 5 stk.  
Antal sider: 62 sider  
Appendiks: 3

**SYNOPSIS:**

Denne rapport er lavet i samarbejde med MAN Diesel og omhandler udviklingen af en beregningsmetode til bestemmelsen af de laveste egenfrekvenser af en propellerdyse i vand, hvor løsningen er baseret på at finde vandets effekt på konstruktionen. Først udledes en analytisk metode der korrigeres vha. eksperimentelle data. Derefter benyttes denne metode, sammen med en Fourier-analyse af propellerdysens mode, til at finde vandets effekt og dermed den naturlige egenfrekvens af propellerdysen i vand.



## **Forord**

Denne rapport er skrevet i forbindelse med et afgangprojekt på civilingeniør-uddannelsen Design af Mekaniske Systemer Forløb II på Aalborg Universitet, og blev afviklet i perioden 1/9/2008-18/12/2008. Formålet med rapporten er at udvikle et beregnings-værktøj til bestemmelse egenfrekvenserne af en propellerdyse i vand for MAN Diesel i Frederikshavn. Det forventes at læseren besidder grundviden indenfor svingningslære, faststofmekanik, måleteknik samt Finite Element Method(FEM).

Rapporten består af en hoveddel samt et appendiks og samtlige FE-modeller og makro-filer samt en digital udgave af rapporten findes på den vedlagte CD.

Henvisninger til litteratur er baseret på Harvard-metoden, hvor en reference er givet som [Forfatter(e), udgivelsesår]. Samtlige referencer til materialet på den vedlagte CD er uddybet i kildelisten.

Forfatteren ønsker at takke følgende personer som alle har bidraget med deres viden til gennemførelse af projektet: Skibsiingeniør Henrik Marinussen, civilingeniør Henrik Nørgaard, civilingeniør Thomas Thomsen, måletekniker Kenneth Boesen, civilingeniør Hans Buus og civilingeniør Rasmus Haugaard.



## Indholdsfortegnelse

Abstract .....	1
1 Introduktion .....	3
1.1 Virksomhedspræsentation .....	3
1.2 Problemstilling.....	5
1.2.1 Problemformulering .....	6
1.3 Problemafgrænsning .....	6
2 Vandets effekt på et objekt .....	9
3 Analytisk løsning for simpel geometri .....	15
3.1 Akustisk tryk .....	15
3.2 Egenfrekvens .....	22
3.2.1 Ring – Plant tilfælde .....	22
3.2.2 Cylinder.....	24
4 Verificering af den analytiske løsning.....	27
4.1 Analytisk .....	27
4.2 Numerisk – FEM .....	29
4.3 Eksperimentel.....	34
5 Simplificering af propellerdyse.....	45
5.1 Reducering af randbetingelser .....	45
5.2 Randbetingelsernes betydning for moden .....	47
5.3 Fourier-analyse af mode.....	50
5.4 Vandets kompressibilitet.....	53
6 Beregning af egenfrekvensen.....	55
6.1 Fourier-analyse af mode.....	55
6.2 Masse-forøgelses-faktoren .....	57

6.3	Egenfrekvensen af propellerdysen i vand .....	57
7	Fremgangsmetode til beregningsproces .....	59
8	Konklusion.....	61
	Appendiks A .....	63
	Appendiks B .....	65
	Appendiks C .....	67
	Kildeliste .....	99



## **Abstract**

This report concerns the development of a method and thereby a tool to calculate the lowest natural frequencies of a submerged propeller nozzle for MAN Diesel in Frederikshavn. It is also the purpose of the report to provide an understanding of the effects, which arise when a vibrating structure is submerged due to the dynamic pressure in the fluid. This is carried through by emphasising the added mass effect and finding the added mass coefficient.

The subject of the project is a axis-symmetric propeller nozzle of type FD3630x0.4. Thereby, the first step is to model its geometry as a cylinder, which can be related to the chosen propeller nozzle concerning the analytical determination of the added mass.

The second step is a verification of the analytical solution by using three different methods, which are: analytically by Rayleighs kvotient for an single mode, numerically with a FE-model in vacuum and submerged condition and the last verification is made experimentally by measuring the natural frequencies of cylinders with different lengths. The two first verification methods show fully agreement with the analytical method. But the experiments show a remarkable difference between the analytical and experimental results concerning the natural frequencies in submerged condition. Based upon this knowledge a correction factor for the analytical expression is determined whereby, it can be used to predict the natural frequencies of the propeller nozzle.

The analysis of the propeller nozzle begins with a simplification of the geometry to generate an equivalent shell-model to fit the analytical expression. By a comparison of the results it is shown that no agreement between the shell-model and the analytical expression occurs, which means that, due to the boundary conditions, the equivalent model of the propeller nozzle has an other mode shape than what was expected from visual consideration.

To find the actual mode shape of the equivalent shell-model a Fourier analysis of the mode shape is made and it is concluded, that the mode shape is a superposition of different modes. The added mass coefficient has now to be found as an average of the effect from the different mode shapes. This methodology is valid only if the added mass is independent upon the natural frequencies. This is the case when, the compressibility of water can be neglected. It is possible when dimensions of the propeller nozzle are much smaller than the acoustic wave length.

From the reported results it follows that actually, there is no need to generate an equivalent shell-model, but rather a Fourier analysis of the mode shape of the actual model is needed, which at the same time makes the determination of the added mass independent upon the fixation conditions. Therefore, the final step is to perform this Fourier analysis and determine the added mass and thereby, the fundamental natural frequency of the propeller nozzle in water.

## 1 Introduktion

### 1.1 Virksomhedspræsentation

Denne rapport er lavet i samarbejde med MAN Diesel i Frederikshavn, som er en del af MAN koncernen. MAN står for Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg og blev grundlagt tilbage i 1908 og i 1921 bliver aktiemajoriteten købt af Gutehoffnungshütte(GHH). I 1986 fusionerer MAN og GHH med base i München og i 2006 lægges hovedvægten på fire primære forretningsområder:

- Kommercielle køretøjer
- Diesel-motorer, herunder komplette fremdrivningssystemer til skibe
- Turbo-maskinel
- Industriel service

Koncernen har over 55.000 medarbejder fordelt i 120 lande og et samlet salgstal på €15,5 milliarder.

MAN Diesels ansvarsområde dækker udvikling og produktion af 2- og 4-takts dieselmotorer samt komplette fremdrivningssystemer til skibe og udover dette leveres dieselmotorerne ligeledes til kraftværker.



**Figur 1** Forretningsområder for MAN Diesel.

Fabrikken i Frederikshavn står bl.a. for udvikling af gearkasser, aksler, propeller og propellerdyser og står ligeledes for leverancen af de komplette fremdrivningssystemer til skibe, som består af motor, gearkasse, turbolader, akse, propeller samt propellerdyser. Den største indtægtskilde er baseret på After Sales Service som foregår gennem 59 servicestationer fordelt på hele kloden, hvorfor målet også er en kraftig effektivisering på dette område.

## 1.2 Problemstilling

Ved dimensionering af skibe stilles der store krav til optimeret design, således at skibet kan have den mest optimale ydeevne, hvilket hænger sammen med de høje oliepriser.

På skibstyper hvor fremdrivnings-kraften er højt prioriteret i forhold til hastighed, anvendes propellerdyser for at opnå en stor fremadrettet kraft. På Figur 2 er et eksempel med en propellerdyse af typen FD3630x0.4 angivet.



**Figur 2** Propellerdyse FD3630x0.4.

Ved dimensionering af propellerdyserne og vurdering af påmonteringsprincipperne skal det optimale design indeholde en god hydrodynamisk udformning og samtidigt en høj stivhed. Hydrodynamisk udformning er vigtig for at undgå for meget modstand ved fremdrivning. Samtidigt skal resonans-effekter mellem propellerdysen og propellerbladenes rotationer undgås, da det kan medføre udmattelse af konstruktionen. Det kan derfor hurtigt konstateres, at de to nævnte parametre, hydrodynamik og stivhed, har modsatte indvirkninger i optimeringsprocessen. I denne sammenhæng det er nødvendigt med en pålidelig beregningsmetode til bestemmelsen af propellerdysens egenfrekvenser for at kunne opnå et globalt optimum. Problemstillingen ligger hermed i, at den laveste egenfrekvens skal kunne bestemmes for en propellerdyse i nedsunken tilstand, hvor egenfrekvensen bliver reduceret og dermed nærmer sig propellerbladenes rotationsfrekvens.

Da effekten, fra vandet, der forårsager denne reduktion af egenfrekvenser ikke er formuleret eller kendt, kan egenfrekvenserne kun estimeres på baggrund af forsøg og intuition.

### 1.2.1 Problemformulering

På baggrund af oplysningerne i afsnit 1.2 er målet med dette projekt:

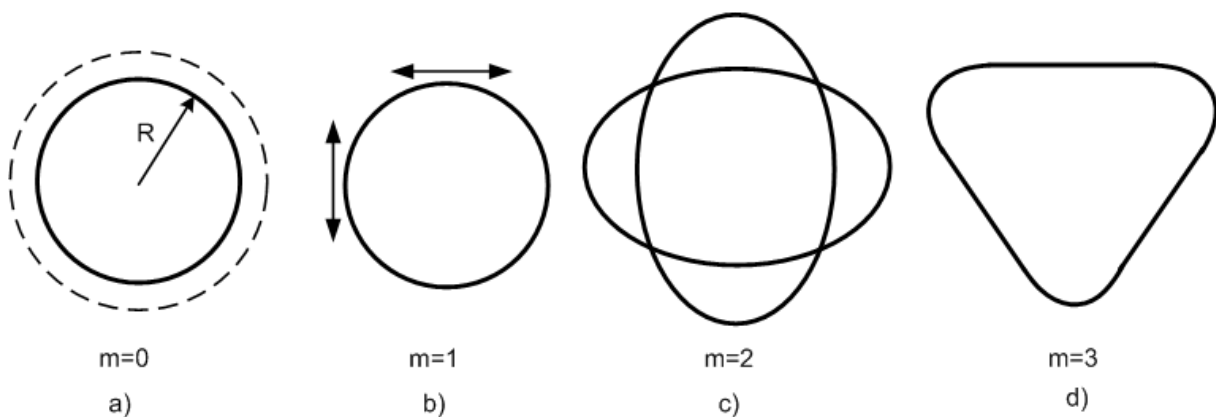
At give en forståelse for vandets effekter på en konstruktion i nedsunken tilstand og samtidigt udvikle et værktøj til bestemmelsen af egenfrekvenserne for en propellerdyse i vand.

### 1.3 Problemafgrænsning

I forbindelse med ovenstående problemformulering vedtages de følgende afgrænsninger:

- Der tages udgangspunkt i FD3630x0.4 pga. symmetriske fordele. Materialet er Grade A-stål, også kendt som skibsbygningsstål, og har samme materialeparametre som S235, hvad angår E-modul og densitet. Se Appendiks A for flere detaljer.
- Der tages ikke hensyn til skibskrogets stivhed, hvormed forbindelsen mellem propellerdysen og skibskroget regnes som en fast indspænding.
- Der tages udgangspunkt i at bestemme den laveste naturlige egenfrekvens.

I forbindelse med punkt *c* skal det vurderes hvilken mode der hører til den laveste naturlige egenfrekvens. Ved cirkulære og symmetriske objekter er følgende modes værd at tage i betragtning:



**Figur 3 Modes** a) Breathing mode b) Stift-legeme-bevægelse c) Egg mode d) Trekant mode.

Den mode, der er repræsenteret på Figur 3c, hvor ringen udvider sig, forekommer kun ved meget høje frekvenser, hvorfor det ikke er nødvendigt at tage den i betragtning.

Ud fra visuelle betragtninger fra en Finite Element model er den laveste mode fundet som en ovalerende mode, dvs. egg mode, som angivet på Figur 3c. Pga. propellernes trykpulsationer på indersiden af propellerdysen vil denne mode ligeledes være oplagt til at blive exciteret, hvorfor der i rapporten bliver lagt vægt på denne specifikke mode.





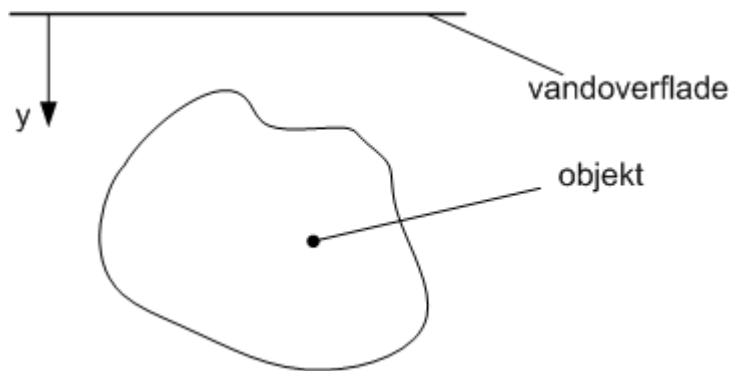
## 2 Vandets effekt på et objekt

Ethvert nedsunket objekt, vil af det omgivende fluid blive udsat for en reaktionskraft der kan betegnes som en tilføjet masse eller ”added mass”, som det kaldes i litteraturen. Den ekstra masse, som påføres objektet, medfører en reducere af egenfrekvenserne uden at ændre stivheden af objektet. Samtidigt har fluidet ingen bemærkelsesværdig effekt på vibrationsformerne (mode shapes). Dette fænomen har kun interesse når objektet er under en accelererende bevægelse, hvilket også gælder vibrationer, hvor næsten samtlige punkter på objektet er i en accelererende tilstand afhængig af vibrationsformen [Sinha et. al, 2002]. Det skal dog bemærkes, at påstanden om at det omgivende fluid ikke har noget indflydelse på stivheden ikke altid er tilfældet. En forklaring af denne del af fænomenet gives senere afsnittet.

I dette projekt skal et vibrerende objekt, der er nedsunket i vand, undersøges, hvor den tilføjede masse kan betragtes som massen af mængden vand, der er ækvivalent med den reaktionskraft som objektet mærker. For et objekt der bevæger sig under vandet, som ikke oplever nogen form for ændring af geometri, er denne kraft kun afhængig af accelerationens størrelse [Blevins, 1990]. Dette er ikke tilfældet for en vibrerende konstruktion, da størrelsen af den tilføjede masse også afhænger af vibrationsformen. For at få en forståelse af dette fænomen, samt komme frem til et udtryk, skal emnet betragtes med teori fra akustikken. Dette er nødvendigt da den tilføjede masse, som svarer til reaktionskraften, er et resultat af det tryk der opstår når konstruktionen vibrerer [Sinha et. al, 2002]. Det samlede tryk der påvirker objektet består af et statisk tryk samt et tidsafhængigt/dynamisk tryk som angivet i formel (2.1):

$$p = p_{ST}(y) + p_D \quad (2.1)$$

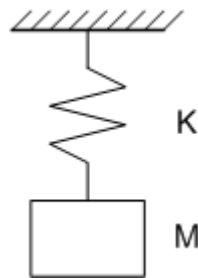
$p_{ST}(y)$  angiver det statiske tryk, der er afhængig af afstanden til vandoverfladen, som illustreret på Figur 4.



Figur 4 Objekt under vand.

Hvis objektet ikke deformeres pga. det statiske tryk, kan der ses bort fra dette ved formuleringen af den tilføjede masse, hvormed denne kun afhænger af den tidsafhængige del af trykket, dvs. det dynamiske  $p_D$ . I tilfældet, hvor der er tale om en vibrerende konstruktion under vand, vil denne del af trykket blive beskrevet som det akustiske tryk. Dette er dog kun gyldigt så længe at vandet bliver betragtet som et kompressibelt medium.

For at få et bedre og mere illustrativt beskrivelse af den tilføjede masse, kan dette også betragtes med almen teori fra svingningslæren med udgangspunkt i et simpelt fjeder-masse-system, som vist på Figur 5.



Figur 5 Simpelt fjeder-masse-system.

Den naturlige egenfrekvens af systemet i vakuum bestemmes som:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.2)$$

Hvis det som tidligere nævnt antages at et fluid ikke har nogen effekt på stivheden af systemet, kan egenfrekvensen i luft da angives som:

$$\omega_n^{luft} = \sqrt{\frac{K}{M + M_{tilfl}}} \quad (2.3)$$

Her angiver  $M_{tilfl}$  i (2.3) den tilføjede masse som forsages af luftens påvirkning på systemet. Da den tilføjede masse bl.a. afhænger af fluidets densitet, vil det hovedsageligt gælde at  $M_{tilfl} \ll M$ , hvorfor effekten fra luften kan negligeres og dermed gælder det at:

$$\omega_n^{luft} \cong \omega_n \quad (2.4)$$

Den naturlige egenfrekvens af systemet i vand kan på samme måde som tidligere bestemmes som:

$$\omega_n^{vand} = \sqrt{\frac{K}{M + M_{tilfv}}} \quad (2.5)$$

I dette tilfælde er den tilføjede masse  $M_{tilfv}$  ikke negligerbar, hvormed der vil være en bemærkelsesværdig forskel på egenfrekvensen i luft og i vand:

$$\frac{\omega_n^{luft}}{\omega_n^{vand}} = \sqrt{\frac{M + M_{tilfv}}{M}} > 1 \quad (2.6)$$

For at finde den tilføjede masse kan en masse-forøgelses-faktor så angives som:

$$K_m = \left( \frac{\omega_n^{luft}}{\omega_n^{vand}} \right)^2 \quad (2.7)$$

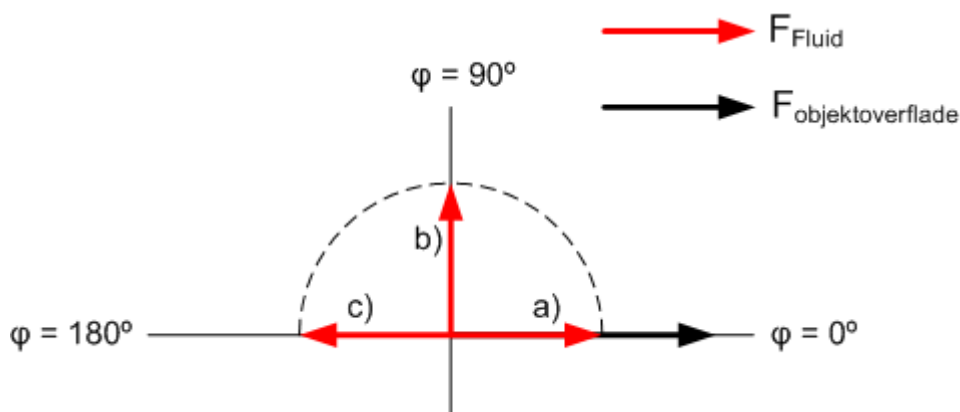
Dvs. at

$$K_m \cdot M = M + M_{tilfv} \quad (2.8)$$

Indtil nu er det antaget, at effekten fra vandet udelukkende bidrager til en tilføjet masse. Dette er, som det blev nævnt i begyndelsen af afsnittet, ikke altid tilfældet da det afhænger af hvorledes vandet bevæger sig i forhold til objektet. Udover tilføjet masse kan der forekomme forøget dæmpning og forøget stivhed.

Der eksisterer følgende muligheder for indbyrdes bevægelse mellem vandet i nærheden af objektoverfladen og objektet, som det er illustreret på Figur 6:

- a) Vandets bevægelse kan være i fase med objektets bevægelse
  - Udelukkende tilføjet masse
- b) Vandets bevægelse kan have en faseforskel på  $\frac{\pi}{2}$  med objektets bevægelse
  - Udelukkende tilføjet dæmpning
- c) Vandets bevægelse kan være i modfase med objektets bevægelse
  - Udelukkende tilføjet stivhed
- d) Vandets bevægelse i forhold til objektets bevægelse kan ligge et sted imellem de tre foregående tilfælde, som giver to resterende muligheder:
  - En blanding mellem tilføjet masse og tilføjet dæmpning
  - En blanding mellem tilføjet dæmpning og tilføjet stivhed



Figur 6 Faseforskel mellem fluid- og objektbevægelse.

I dette projekt kan der allerede på dette stadie ses bort fra stivhedseffekten, da dette kun opstår hvis objektet er omgivet af en defineret lukket volumen. Dermed må vandets effekt på propellerdysen, som er det objekt der skal analyseres, være en blanding af tilføjet masse og dæmpning. Ved lave frekvensområder kan der dog oftest ses bort fra dæmpningseffekter. Frekvensernes størrelse skal ses relativt i forhold til objektet, da de akustiske bølger skal være større en objektets dimensioner for at tilfælde b), c) og dermed også d) kan udelades. I sådan et tilfælde vil kompressibiliteten af vandet kunne negligeres, hvilket betyder at  $F_{Fluid}$ -vektoren vil have en meget lille faseforskydning i forhold til  $F_{objektoverflade}$ . Ved løsningen af problemstillingen i dette projekt, vil det senere kunne vises hvorvidt dette er tilfældet for propeller-dysen.

De forskellige effekter er nu introduceret og grundlæggende skal der tages udgangspunkt i bevægelses-ligningerne for en fluid dvs. bevarelse af masse og bevægelsesmængde, for at finde disse, se Appendiks B

Da det derudfra kan vises at effekterne er baseret på det dynamiske tryk, er det nødvendigt at finde et udtryk for dette, for en geometri der kan relateres til propellerdysen, hvis problemstillingen skal kunne løses. I næste det kapitel udledes hermed et analytisk udtryk for det dynamiske tryk og derefter introduceres en metode til at bestemme egenfrekvenserne for den valgte geometri. Dette bliver gjort med følgende antagelser[Rayleigh, 1945]:

- Vandet at betragtes som et kompressibelt medium, hvormed det er et udtryk for det akustiske tryk der søges.
- Vandet bliver regnet som ikke-viskøst, dvs. at der er intet tab af energi  $\Rightarrow$  ingen viskøs dæmpning.

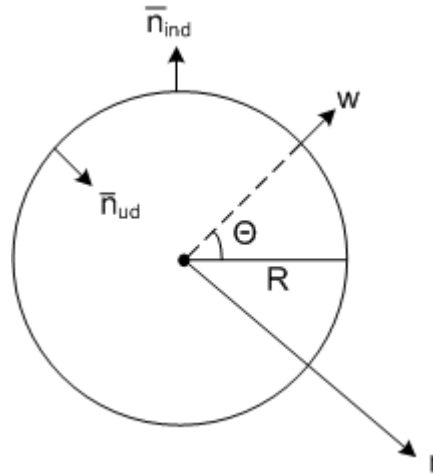
Der bliver taget udgangspunkt i lineær akustik, som kræver en reducere af bevægelsesligningerne for en fluid, se Appendiks B.



### 3 Analytisk løsning for simpel geometri

#### 3.1 Akustisk tryk

For at komme frem til et brugbart udtryk for det akustiske tryk, skal der tages udgangspunkt i en veldefineret geometri. Da dette projekt omhandler en egenfrekvens-analyse af en cirkulær propeller-dyse, hvor den mest kritiske vibrationsform er en ”egg-mode”, vil det være mest oplagt at tage udgangspunkt i en geometri der kan relateres direkte problemstillingen og dermed kan bruges i løsningen af denne. Hermed betragtes en ring, Figur 7, med en given radius  $R$ , hvor problemstillingen samtidig er simplificeret til et plant tilfælde, hvorfor der i første omgang kan ses bort fra de akustiske trykbølger i aksial retning.



Figur 7 Ring.

Det antages, at ringen befinder sig uendeligt langt fra enhver flade, hvilket også gælder vandoverfladen. Denne antagelse er foretaget for at kunne se bort fra effekten fra reflekterende akustiske trykbølger.  $\vec{n}_{ind}$  og  $\vec{n}_{ud}$  er retningsvektorer hvor  $\vec{n}_{ind}$  angiver at det omkringliggende volumen betragtes indefra ringen.  $w$  er normal-forskydningen af ringens periferi og angives som:

$$w(\theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m \cdot \cos(m\theta) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (3.1)$$

hvor  $m$  angiver det periferiske bølgetal og dermed mode-nummer,  $\exp(-i\omega t)$  angiver den tidsafhængige del af forskydningen og  $W_m$  er amplituden[Sorokin, 2005].

Da det er en lineær problemstilling der betragtes, kan normal-forskydningen findes uafhængigt for hvert enkelt periferisk bølgetal:

$$w_m(\theta, t) = W_m \cdot \cos(m\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Det er nu muligt at gå i gang med udledningen af et udtryk for det akustiske tryk. I første omgang introduceres hastighedspotentialet  $\varphi$  som er et rent matematisk udtryk, der anvendes indenfor akustikken, se Appendiks B.

Hvis det omgivende volumen betragtes indefra ringen, kan følgende sammenhæng udtrykkes:

$$\frac{\partial \varphi_{ind}}{\partial \vec{n}_{ind}} = \frac{\partial \varphi_{ind}}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.3)$$

Det ovenstående udtryk(3.3) benyttes samtidig til at udtrykke de randbetingelser der er nødvendige for at komme frem til en løsning af nedenstående differentiaalligning[Rayleigh, 1945, s. 15]:

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_{ind}}{\partial t^2} + \Delta \varphi_{ind} = 0 \quad (3.4)$$

(3.4) er kendt som den akustiske bølgeligning, som er fremkommet ved en linearisering af differentiaalligningerne for fluid-bevægelse, se Appendiks B.  $c_0$  er lydets hastighed i det pågældende medium og beregnes som:

$$c_0 = \sqrt{\frac{b}{\rho_0}} \quad (3.5)$$

hvor  $b$  angiver bulk-modulus af væsken, som i dette tilfælde er vand, og  $\rho_0$  angiver en middeldensitet af væsken[Blevins, 1984]. Hvis vandet betragtes som et inkompressibelt medium kan det første led, og dermed den tidsafhængige del, i (3.4) negligeres. Det skyldes, at for et inkompressibelt medium gælder, at bulk-modulus  $b$  bliver singularært, hvilket medfører at lydets hastighed i vandet vil blive uendelig stort. En reduktion af (3.4) kan så udtrykkes som:

$$c_0 \rightarrow \infty \Rightarrow -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_{ind}}{\partial t^2} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Hermed fås for et inkompressibelt medium[Rayleigh, 1945, s. 9]:

$$\Delta \varphi_{ind} = 0 \quad (3.7)$$

$\Delta$  er Laplace-operatoren som i cylindriske koordinater, for et plant tilfælde, er angivet ved



$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.8)$$

Løsningen af (3.4) er kompliceret pga. tidsafhængigheden af  $\varphi$ , men ved at lave en variabel-reduktion og angive tidsafhængigheden med  $\exp(-i\omega t)$  kan hastighedspotentialet udtrykkes ved

$\varphi = \tilde{\varphi} \exp(-i\omega t)$ . Hermed er det muligt at få et reduceret udtryk for (3.4), også kaldet Helmholtz-ligningen [Rayleigh, 1945, s. 143]:

$$\Delta \tilde{\varphi}_{ind} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \tilde{\varphi}_{ind} = 0 \quad (3.9)$$

Da  $\tilde{\varphi}_{ind}$  hænger sammen med ringens bevægelse må denne nødvendigvis være en superposition af hastighedspotentialerne for samtlige modes. Hermed fås følgende udtryk når det samtidigt er oplyst at  $\tilde{\varphi}_{ind}$  er en funktion af  $r$  og  $\theta$ :

$$\tilde{\varphi}_{ind}(r, \theta) = \sum_m \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \cos(m\theta), \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad (3.10)$$

Ved at indsætte (3.10) i (3.9) fås nu:

$$\begin{aligned} & \sum_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \cos(m\theta) + \sum_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \cos(m\theta) \\ & + \sum_m \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \cos(m\theta) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \sum_m \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \cos(m\theta) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Som det kan ses ved indsættelsen af udtrykket for  $\tilde{\varphi}_{ind}(r, \theta)$ , kan den partielle differentiaalligning omskrives til en ordinær differentiaalligning:

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr^2} \cos(m\theta) + \sum_m \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{\partial r} \cos(m\theta) \\ + \sum_m \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \cos(m\theta)}{d\theta^2} \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \sum_m \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \cos(m\theta) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hermed kan (3.12) omskrives til:

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \right] \cos(m\theta) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Det er nu muligt at opskrive en reduceret problemstilling:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr} + \left( \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Denne reducerede differentiallygning minder meget om en bestemt type ordinær differentiallygning, kaldet Bessel-differentiallygningen, som har følgende form[Kreyzig, 2006]:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (3.15)$$

Denne differentiallygning bliver oftest benyttet i sammenhæng med problemstillinger der involverer cylindrisk symmetri, hvilket er meget passende for dette projekt. Løsningen til (3.15) angives med Bessel-funktionerne  $J_m$  og  $Y_m$  og ud fra dette kan der udtrykkes en løsning til (3.14):

$$\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) = A_m J_m(\kappa r) + B_m Y_m(\kappa r) \quad (3.16)$$

Her er  $\kappa = \frac{\omega}{c_0}$ , hvormed der fås [Sorokin, 2005, s. 23]:

$$\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) = A_m J_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) + B_m Y_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) \quad (3.17)$$

På dette stadie er der kun én randbetingelse til bestemmelse af konstanterne  $A_m$  og  $B_m$ , som er en reducere af (3.3):

$$\left. \frac{d\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr} \right|_{r=R} = -i\omega W_m \quad (3.18)$$

Denne problemstilling kan løses ved at betragte det sidste led i (3.17). Hvis hastighedspotentialet ikke er defineret i ringens centrum, medfører dette at Bessel-funktionen  $Y_m$  bliver singulær for  $r \rightarrow 0$ , hvilket ikke giver en fysisk mening. Det resultere i, at  $B_m = 0$ , hvorfor der nu fås:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)}{dr} \right|_{r=R} &= A_m \left. \frac{dJ_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right)}{dr} \right|_{r=R} = -i\omega W_m \Rightarrow A_m \\ &= \frac{-i\omega W_m}{\left. \frac{dJ_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hastighedspotentialet kan nu udtrykkes som:

$$\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) = -i\omega W_m \frac{J_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right)}{\left. \frac{dJ_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \quad (3.20)$$

Det er nu muligt at komme frem med et udtryk for det akustiske tryk, da der findes en sammenhæng mellem dette og hastighedspotentialet. Hvis tidsafhængigheden af det akustiske tryk også angives som  $\exp(-i\omega t)$  således at  $p(t) = \tilde{p} \exp(-i\omega t)$ , kan sammenhængen udtrykkes ved [Rayleigh, 1945, s. 14]:

$$\tilde{p}_{ind}(r) = i\omega \rho_0 \tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r) \quad (3.21)$$

Ved at indsætte (3.20) i (3.21) fås:

$$\tilde{p}_{ind}(r) = i\omega\rho_0 \left( -i\omega W_m \frac{J_m\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left.\frac{dJ_m\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr}\right|_{r=R}} \right) = \omega^2\rho_0 W_m \frac{J_m\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left.\frac{dJ_m\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr}\right|_{r=R}} \quad (3.22)$$

Et udtryk for det akustiske tryk, som skal bruges til at finde den tilføjede masse, er nu fundet, men (3.22) gælder kun for det tilfælde, hvor det omgivende volumen betragtes indefra ringen, se Figur 7. Derfor er det nødvendigt at komme frem med endnu et udtryk hvor ringen betragtes udefra, dvs. med udgangspunkt i retningsvektoren  $\vec{n}_{ud}$ :

$$\frac{\partial\varphi_{ud}}{\partial\vec{n}_{ud}} = -\frac{\partial\varphi_{ud}}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} = i\omega W_m \cos(m\theta) \quad (3.23)$$

Randbetingelsen i dette tilfælde bliver så udtrykt som:

$$\left.\frac{d\tilde{\varphi}_{ud}^{(m)}(r)}{dr}\right|_{r=R} = i\omega W_m \quad (3.24)$$

Differentialligningen der skal løses er den samme som (3.14), dog hvor  $\tilde{\varphi}_{ind}^{(m)}(r)$  er erstattet med  $\tilde{\varphi}_{ud}^{(m)}(r)$ . Løsningen (3.17) til differentialligningen er dog anderledes da Bessel-funktionen, der skal benyttes, er en linear kombination af  $J_m$  og  $Y_m$ , kaldet Hankel-funktionen, der bruges til at beskrive de udgående bølger i et åbent felt [Pierce, 1974]. Hankel-funktionen udtrykkes ud fra definitionen af tidsafhængigheden:

$$\exp(-i\omega t) \rightarrow H_m^{(1)} = J_m + iY_m \quad (3.25)$$

$$\exp(i\omega t) \rightarrow H_m^{(2)} = J_m - iY_m \quad (2.9)$$

Løsningen ser da ud som følgende:

$$\tilde{\varphi}_{ud}^{(m)}(r) = A_m H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right) \quad (3.26)$$

Med randbetingelsen fås:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\varphi}_{ud}^{(m)}(r)}{dr} \right|_{r=R} &= A_m \left. \frac{dH_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R} = i\omega W_0 \Rightarrow \\ A_m &= \frac{i\omega W_0}{\left. \frac{dH_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nu indsættes (3.27) i (3.26):

$$\tilde{\varphi}_{ud}^{(m)}(r) = i\omega W_m \frac{H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left. \frac{dH_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \quad (3.28)$$

På samme måde som tidligere er det nu muligt at opsætte et udtryk for det akustiske tryk:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ud} &= i\omega\rho_0 \left( i\omega W_m \frac{H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left. \frac{dH_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \right) \\ &= -\omega^2\rho_0 W_m \frac{H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left. \frac{dH_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Det samlede akustiske tryk kan nu angives:

$$\tilde{p}_{samlet} = \tilde{p}_{ud} + \tilde{p}_{ind} = \omega^2\rho_0 W_m \left( \frac{H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left. \frac{dH_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R}} - \frac{J_m\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{\left. \frac{dJ_m\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)}{dr} \right|_{r=R}} \right) \quad (3.30)$$

## 3.2 Egenfrekvens

### 3.2.1 Ring - Plant tilfælde

Det næste skridt er at finde en metode til bestemmelse af egenfrekvenserne for en ring med givne dimensioner. Dette gøres ved at implementere udtrykket for det akustiske tryk i de styrende bevægelsesligninger for en skal, der påvirkes af et akustisk medium ved plant tøjningstilstand [Sorokin, 2006, s. 13]. Da der i dette tilfælde ikke tages hensyn til propagering af bølger i aksiel retning bliver disse reduceret til:

$$\frac{m^2}{R^2} V_m + \frac{h^2 m^2}{12 R^4} V_m + \frac{m}{R^2} W_m + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} W_m - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} V_m = 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{R^2} V_m + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} V_m + \frac{W_m}{R^2} + \frac{h^2 m^4}{12 R^4} W_m - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} W_m \\ - \frac{i \rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2)}{E h} \varphi_m = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$V_m$  angiver amplituden for den tangentielle forskydning af et punkt på ringen og er angivet på samme måde som (3.2):

$$v_m(\theta, t) = V_m \cdot \sin(m\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad (3.33)$$

Udtrykket for det akustiske tryk kan indføres i bevægelsesligningerne ved at indsætte (3.21) i det sidste led for (3.32):

$$\begin{aligned} \frac{m}{R^2} V_m + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} V_m + \frac{W_m}{R^2} + \frac{h^2 m^4}{12 R^4} W_m - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} W_m \\ - \frac{\rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2)}{E h} W_m \left( \frac{J_m \left( \frac{\omega}{c_0} r \right)}{\left. \frac{dJ_m \left( \frac{\omega}{c_0} r \right)}{dr} \right|_{r=R}} - \frac{H_m^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} r \right)}{\left. \frac{dH_m^{(1)} \left( \frac{\omega}{c_0} r \right)}{dr} \right|_{r=R}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Med de givne ligningssystemer kan det ses, at der på nuværende tidspunkt er to ligninger men tre ubekendte. Da der kun er interesse for frie vibrationer kan der ses bort fra amplituderne  $V_m$

og  $W_m$  og ved at kalde det sidste led i parantesen i (3.34) for  $\Delta$ , så kan bevægelsesligningerne skrives på følgende måde:

$$\begin{bmatrix} \frac{m^2}{R^2} + \frac{h^2 m^2}{12 R^4} + \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} & \frac{m}{R^2} + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} \\ \frac{m}{R^2} + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} & \frac{1}{R^2} + \frac{h^2 m^4}{12 R^4} - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} + \frac{\rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2)}{Eh} \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ W_m \end{bmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Det kan nu ses at en løsning til ligningssystemet kan findes ved at løse determinanten til koefficient-matricen:

$$\begin{vmatrix} \frac{m^2}{R^2} + \frac{h^2 m^2}{12 R^4} + \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} & \frac{m}{R^2} + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} \\ \frac{m}{R^2} + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} & \frac{1}{R^2} + \frac{h^2 m^4}{12 R^4} - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} + \frac{\rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2)}{Eh} \Delta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

På dette stadie er det muligt at udtrykke hvorledes den tilføjede masse træder frem i løsningen af bevægelsesligningerne og dermed i beregningen af egenfrekvensen. Dette gøres ved at reducere det sidste komponent i (3.36), hvor densiteten af ringen og fluidet indgår:

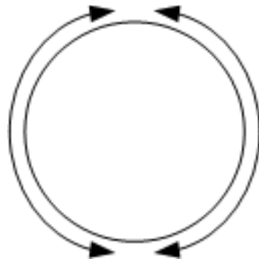
$$\frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} + \frac{\rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2)}{Eh} \Delta = \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} \left( 1 + \underbrace{\frac{\rho_0 \Delta}{\rho_{ring} Eh}}_{ADD} \right) \quad (3.37)$$

Det led der er angivet med "ADD" i (3.37) er årsagen til den tilføjede masse, hvor en beregning af masseforøgelsesfaktoren vha. dette led vil kræve en iterationsproces. Denne iterative metode vil dog ikke være fuldstændig korrekt i forhold til formel (2.7) i kapitel 2, da  $\rho_{ring}$  ligeledes indgår i det første komponent i (3.37), men her er ADD ikke tilføjet. Dermed vil en beregning af masse-forøgelses-faktoren, med den netop nævnte metode, give en lille forskel i forhold til formel (2.7) i kapitel 2. Forskellen vil dog være negligerbar i forhold til de interessante modes i dette projekt, men formel (2.7) vil blive benyttet, da det er den hurtigste og mest korrekte beregningsmetode. Ved de høje modes bliver denne forskel dog mere fremtrædende, da kompressibiliteten af vandet vil få en betydning.

Der findes samtidig en anden bemærkelsesværdig forskel mellem de to metoder til bestemmelsen af masseforøgelsesfaktoren, som ligeledes bør nævnes. Ved løsningen af (3.36) kan det ses at egenfrekvensen vil blive udtryk i 4. orden, hvormed der fås to løsninger:

$$\omega^4 \rightarrow \omega_1 \text{ og } \omega_2 \text{ hvor } \omega_2 \gg \omega_1 \quad (3.38)$$

$\omega_1$  angiver egenfrekvensen for de radiale modes og dermed dem der er interessante for dette projekt.  $\omega_2$  er egenfrekvensen for tangentielle modes, se Figur 8, hvilke har meget større værdier i forhold til  $\omega_1$ .



Figur 8 Tangentiell mode.

Ved beregningen af masse-forøgelses-faktoren kan der med formel (2.7) opstilles følgende udtryk for de to frekvensspektre:

$$K_m^1 = \left( \frac{\omega_1^{luft}}{\omega_1^{vand}} \right)^2 \quad (3.39)$$

og

$$K_m^2 = \left( \frac{\omega_2^{luft}}{\omega_2^{vand}} \right)^2 \quad (3.40)$$

Da vandet der omgiver ringen ikke kan have nogen effekt på de tangentielle modes, må det nødvendigvis gælde at  $K_m^2 \simeq 1$ . Hvis denne faktor i stedet beregnes med den iterative metode, vil det vise sig at  $K_m^2 \neq 1$ . Begrundelsen for dette ligger i, at mode-afhængigheden ved den iterative metode, kun fremkommer i det sidste komponent i (3.36) via Hankel-funktionen, som indgår i  $\Delta$ , se formel (3.34). Da  $\rho_{ring}$ , som tidligere nævnt, også indgår i det første komponent i (3.36) og dermed ikke påvirkes af mode-afhængigheden, vil der altid genereres en fejl med den iterative metode.

### 3.2.2 Cylinder

Indtil nu er løsningen af egenfrekvens-problemet kun baseret på et plant tilfælde, men med samme fremgangsmåde kan der findes et analytisk udtryk for en cylinder. Dette medfører, at



der skal tages hensyn til propagering af bølger i aksiel retning, hvorfor bølgetallet  $k$  skal medtages, og samtidig implementeres følgende udtryk for den aksielle forskydning i bevægelsesligningerne:

$$u_m(\theta, t) = U_m \cdot \sin(kx) \cdot \cos(m\theta) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (3.41)$$

hvor

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.42)$$

Det kan dog ud fra  $\sin(kx)$ -leddet i (3.41) ses, at der for  $n \neq 0$  bliver tilnærmet en cylinder med frie ender, men for  $n = 0$  fås præcist plan tøjningstilstand, som teorien i dette afsnit baseres på, da det er en uendelig lang cylinder der betragtes.

Den tangentielle samt periferiske forskydning bliver så:

$$v_m(\theta, t) = V_m \cdot \cos(kx) \cdot \sin(m\theta) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (3.43)$$

$$w_m(\theta, t) = W_m \cdot \cos(kx) \cdot \cos(m\theta) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (3.44)$$

Da der i udtrykket for hastighedspotentialet også skal tages hensyn til aksiel propagering af

bølger, betyder dette at  $\kappa = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 + k^2}$  for  $n \neq 0$ .

Bevægelsesligningerne for et cylindrisk emne, som er påvirket af et akustisk medium kan hermed angives på følgende måde:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{bmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

hvor

$$A_{11} = k^2 + \frac{1 - \nu m^2}{2} \frac{m^2}{R^2} - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E}$$

$$A_{12} = k \frac{1 + \nu m}{2} \frac{m}{R}$$

$$A_{13} = -\frac{\nu}{R} k$$

$$A_{21} = k \frac{1 + \nu m}{2 R}$$

$$A_{22} = k^2 \frac{1 - \nu}{2} + \frac{m^2}{R^2} + \frac{h^2 2(1 - \nu)}{12 R^2} + \frac{h^2 m^2}{12 R^4} + \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E}$$

$$A_{23} = \frac{m}{R^2} + \frac{h^2 m^3}{12 R^4} + \frac{h^2 (2 - \nu)m}{12 R^2} k^2$$

$$A_{13} = \frac{\nu}{R} k$$

$$A_{23} = \frac{m}{R^2} + k^2 \frac{h^2 m (2 - \nu)m}{12 R^2 R^2}$$

$$A_{33} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} k^4 + k^2 \frac{h^2 2m^2}{12 R^2} + \frac{h^2 m^4}{12 R^4} - \frac{\rho_{ring} \omega^2 (1 - \nu^2)}{E} - \frac{i \rho_0 \omega^2 (1 - \nu^2)}{E h} \varphi_m$$

Da det som tidligere kun er frie vibrationer der betragtes, ses der bort fra amplituderne  $U_m, V_m$  og  $W_m$ , hvormed egenfrekvenserne findes ved at løse determinanten til koefficientmatricen:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.46)$$

Det kan ud fra koefficienterne ses, at for  $n = 0$  ved angivelsen af bølgetallet  $k$  udgår samtlige led hvor længden  $L$  af cylinderen indgår. Dette må nødvendigvis betyde, at for den givne vibrationsform hvor  $n = 0$ , er egenfrekvenserne uafhængige af længden.

Ved at betragte følgende udtryk for egenfrekvensbestemmelsen af et fjedre-masse-system, kan det konkluderes, at stivheden og massen af en cylinder må følges proportionelt ved en ændring af længden:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.47)$$

Denne antagelse vil blive udforsket nærmere vha. en numerisk model i kapitel 4, hvor de hidtil opnåede udtryk, (3.36) og (3.46) også vil blive afprøvet samt verificeret.

## 4 Verificering af den analytiske løsning

Da den anvendte teori og de fundne analytiske udtryk i kapitel 3 bliver grundlaget for det videre forløb, er det nødvendigt at undersøge, om der kan opnås korrekte resultater på baggrund af denne teori. Verificeringen vil foregå på følgende tre måder:

- Analytisk
  - Vha. Rayleighs kvotient
- Med en numerisk model(FEM)
  - En ring med plane struktur-elementer samt plane fluid-elementer til en fluid-structure-interface analyse
  - En cylindrisk model med skal-elementer at bevise længde-uafhængighed
- Eksperimentel
  - Egenfrekvensanalyse af cylindre med forskellige længder i tør og nedsunket tilstand

### 4.1 Analytisk

Der kan foretages en analytisk verifikation af (3.36) ved hjælp af Rayleighs kvotient. Dette gøres ved at betragte en ”breathing mode” i luft, hvor  $m = 0$ , hvilket svarer til at ringen udvider sig. (3.36) reduceres i første omgang til

$$\begin{vmatrix} \frac{\rho_{ring}\omega^2(1-\nu^2)}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} - \frac{\rho_{ring}\omega^2(1-\nu^2)}{E} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

Ved at løse ovenstående determinant fås:

$$\omega^2 \left( \frac{\rho_{ring}(1-\nu^2)}{E} - \frac{\rho_{ring}^2\omega^2(1-\nu^2)^2R^2}{E^2} \right) = 0 \quad (4.2)$$

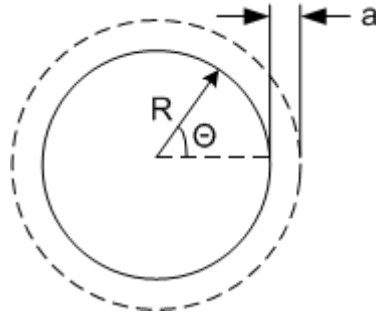
Det kan så ses at løsningen angives som:

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho_{ring}(1-\nu^2)R^2} \quad (4.3)$$

Nu betragtes samme mode hvor løsningen, som tidligere nævnt, skal findes vha. Rayleighs kvotient, hvilket er angivet som[Shames, 1991]:

$$\omega^2 = \frac{\text{Maks. potentiel energi}}{\text{Maks. kinetisk energi}} \quad (4.4)$$

På Figur 9 er udvidelsen af en ring ved en breathing mode angivet som  $a$  og ringens tykkelse benævnes  $h$ .



Figur 9 Breathing mode.

For at kunne komme frem til et brugbart udtryk for den potentielle,  $V_{max}$ , samt den kinetiske energi,  $T_{max}$ , skal der findes et udtryk for den tøjning og spænding, der opstår ved udvidelsen  $a$ .

Energi-betragtningerne for en ring med tykkelsen  $h$ , angives som:

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} h R d\theta \quad (4.5)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho (\omega a)^2 h R d\theta \quad (4.6)$$

Fra elasticitetsteorien kendes følgende sammenhænge udtrykt i polære koordinater [Ugural, 2003]:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E} - \frac{\nu \sigma_r}{E} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu \sigma_{\theta}}{E} \quad (4.8)$$

Da  $\varepsilon_r = 0$  i dette tilfælde fås:

$$\frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu \sigma_{\theta}}{E} = 0 \Rightarrow \sigma_r = \nu \sigma_{\theta} \quad (4.9)$$

Dette indsættes i (4.7) og følgende to udtryk fremkommer:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \sigma_{\theta} \Leftrightarrow \sigma_{\theta} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \varepsilon_{\theta} \quad (4.10)$$

Tøjningen kan vha. udvidelsen  $a$  udtrykkes som:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{2\pi(R + a) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{a}{R} \quad (4.11)$$

Ved at indsætte dette og (4.10) i (4.5) og (4.6) fås nu:

$$V_{max} = \frac{1}{2} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{a}{R}\right)^2 hR \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \frac{a^2}{R} \quad (4.12)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \rho(\omega a)^2 R \int_0^{2\pi} d\theta = \rho\pi h \omega^2 a^2 R \quad (4.13)$$

Nu opstilles  $T_{max} = V_{max}$ :

$$\rho\pi h \omega^2 a^2 R = \pi \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \frac{a^2}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{E}{(1 - \nu^2)R^2\rho} \quad (4.14)$$

Det kan nu ses, at (4.14) stemmer overens med (4.3), men da dette kun er en verificering for  $m = 0$ , bliver det næste skridt at afprøve teorien for en egg mode med FEM, hvor vandets effekter også medtages.

## 4.2 Numerisk - FEM

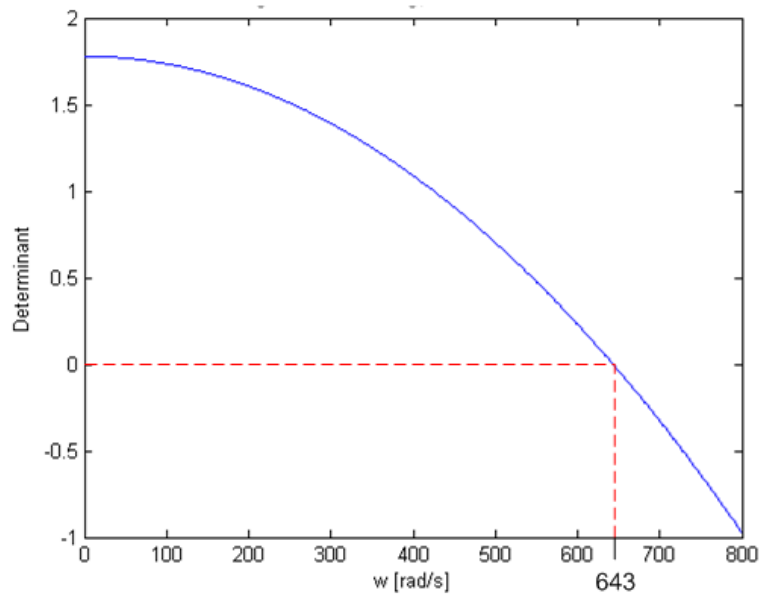
I første omgang tages der udgangspunkt i en ring, dvs. et plant tilfælde, ved at implementere (3.36) i Matlab. Følgende dimensioner og konstanter er benyttet:

- $R = 0.19825m$
- $h = 0,006m$
- $c_0 = \sqrt{\frac{b}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2,34 \cdot 10^9 N/m^2}{1024 kg/m^3}} = 1512 \frac{m}{s}$
- $\rho_{ring} = 7800 \frac{kg}{m^3}$
- $\nu = 0,3$

- $E = 210.000MPa$

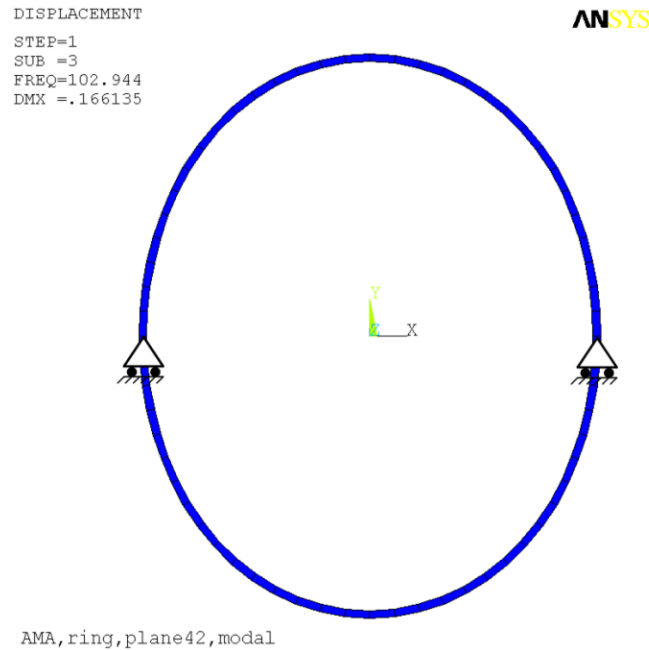
De angivne dimensioner svarer til dimensionerne på de cylindre, der indgår i det eksperimentelle forsøg, som bliver beskrevet i næste afsnit.

I Matlab-koden [RFI] er der lavet et plot af determinanten (3.36) som funktion af  $\omega$ , for at finde skæringen med x-aksen, som er egenfrekvensen i luft for den valgte mode. At der som tidligere nævnt er interesse i den såkaldte "egg mode", betyder at beregningerne bliver foretaget for  $m = 2$ . Resultatet af plottet er vist på Figur 10.



**Figur 10** Egenfrekvens af ring,  $m = 2$  - tør tilstand.

Ud fra grafen på Figur 10 kan det ses at egenfrekvensen er  $f = \frac{643 \text{ rad/s}}{2\pi} = 102,3 \text{ Hz}$ . Dette resultat skal nu sammenlignes med en model opstillet i ANSYS. Modellen består af PLANE42 elementer, som er 4-knuders plane elementer, hvor plan tøjning er valgt som egenskab[Ring42].

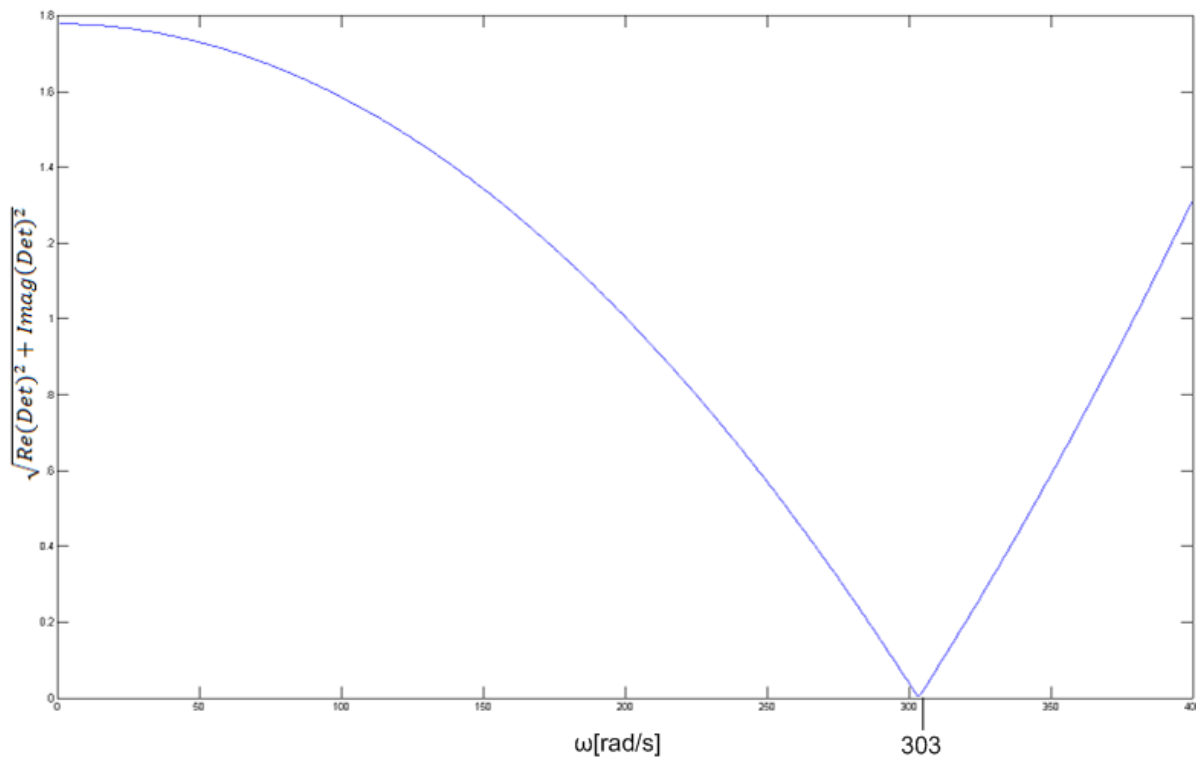


**Figur 11** Modalanalyse af ring i ANSYS, egg mode - vakuum.

Figur 11 viser ringen i fri vibrationstilstand med en egenfrekvens på  $f = 102,9 \text{ Hz}$ , hvormed det kan konkluderes at (3.36) kan give det korrekte resultat for en ring der ikke er påvirket af et akustisk medium.

Det næste skridt er at undersøge, om det er muligt at finde egenfrekvensen af ringen i nedsunken tilstand. Dette gøres igen ved at sammenligne et analytisk resultat med en fluid-structure model i ANSYS. Hvis resultaterne stemmer overens kan dette ligeledes opfattes som en validering af fluid-elementernes egenskaber i ANSYS.

Da Hankel-funktionen indgår i hastighedspotentialet for en nedsunken ring, vil dette betyde at (3.36) bliver et komplekst udtryk. Egenfrekvensen bliver derfor fundet som et minimum ved et plot af  $\sqrt{\text{Re}(Det)^2 + \text{Imag}(Det)^2}$  som funktion af  $\omega[\text{RFIU}]$ .



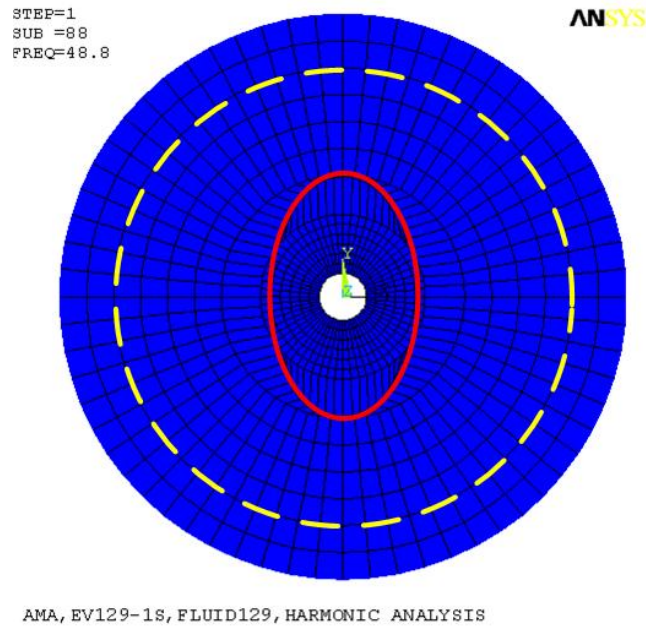
**Figur 12** Egenfrekvens af ring,  $m = 2$  - nedsunket.

På Figur 12 er minimumsværdien angivet og egenfrekvensen bliver da  $f = \frac{303 \text{ rad/s}}{2\pi} = 48,2 \text{ Hz}$ .

Dette resultat skal som tidligere sammenlignes med en numerisk model i ANSYS. Denne FE-analyse kan foretages ved at benytte FLUID29 og FLUID129 elementer. FLUID29 elementer benyttes til at modellere et akustisk medium samt kontaktfladen mellem et objekt og en fluid. FLUID129 elementet bruges som et supplement til FLUID29 og kan absorbere akustiske trykbølger, således at et emne der er uendelig langt fra enhver flade kan simuleres[ANSYS, 2007].

Figur 13 viser simuleringen af ringen i en vibrationstilstand uendelig langt under vandoverfladen[Ring]. Selve ringen er markeret med rød og den gule stiplede ring angiver grænsen mellem FLUID29 og FLUID129 elementerne, hvor de yderste elementer er FLUID129.

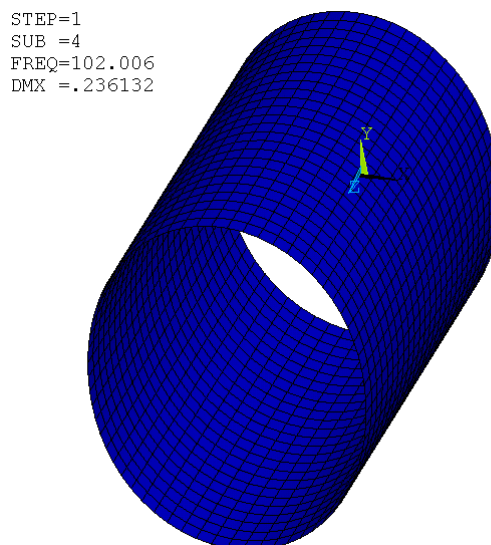




**Figur 13** Egenfrekvens af nedsunken ring i ANSYS, egg mode.

Som det er angivet på Figur 13 er egenfrekvensen af ringen, ifølge simuleringen i ANSYS,  $f = 48,8 \text{ Hz}$ . Dette stemmer godt overens med det analytiske resultat på  $f = 48,2 \text{ Hz}$ , men det er åbenlyst at den analytiske model vil være meget nemmere at benytte.

Ved nu at vise, at egenfrekvensen af en cylinder er uafhængig af længden for  $n = 0$ , vil det netop være tilstrækkeligt at benytte det analytiske udtryk for det plane tilfælde, til at løse problemstillingen med selve dysen. Dette er gjort vha. FE-modellen som er vist på Figur 14 hvor en cylinder, opbygget med SHELL93 skal-elementer, med  $L = 0,5 \text{ m}$  er fastgjort i enderne for at



**Figur 14** Egenfrekvens af cylinder, egg mode – vakuum.

simulere plan tøjningstilstand[Cyl]. Egenfrekvensen blev fundet til  $f = 102 \text{ Hz}$ , hvilket stemmer rigtig godt overens med det plane tilfælde på Figur 11, hvorfor længde-uafhængigheden hermed er verificeret.

### 4.3 Eksperimentel

De to foregående verificeringsmetoder af resultaterne og antagelserne fra afsnit 4.2 er baseret på teori, hvorfor det vil være fornuftigt at foretage en eksperimentel validering.

Formålet med forsøget er at opfange egenfrekvensen, for en egg mode og trekant mode, af 4 cylindriske emner med samme diameter, godstykkelse og materialeparametre, men forskellige længder:

$$-D = 0,4025m$$

$$-d = 0,3905m$$

$$-L_1 = 0,03m$$

$$-L_2 = 0,77m$$

$$-L_3 = 0,115m$$

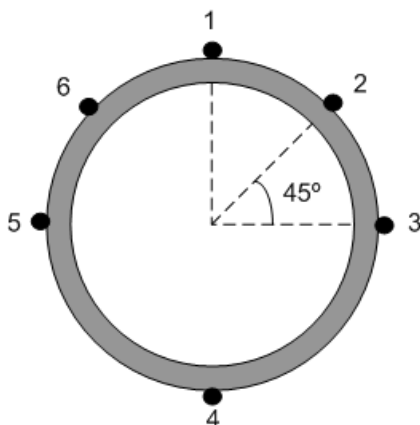
$$-L_4 = 0,195m$$

$$-E = 210GPa \text{ (Ståltype: S235)}$$

$$-\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$$

Dette skal foretages både i tør og nedsunket tilstand, hvorefter resultaterne sammenlignes med den analytiske metode. For at kunne opfange frekvenserne ved de to modes bliver 6 accelerometre placeres som vist på Figur 15.

Nr. 1, 3, 4 og 5 skal bruges til at verificere en egg mode og nr. 2,4 og 6 skal dermed opfange en trekant mode. I databehandlingen lægges der dog størst vægt på at analysere den førstnævnte mode, da det er denne der skal sammenlignes med de analytiske og numeriske metoder. Selve forsøgsmetoden er baseret på et slag-test med en hammer, hvor responset bliver målt i energi-enheder.



**Figur 15** Placering af accelerometre.

Til forsøget benyttes en Brüel & Kjær-dataopsamler type 45070 B001 og databehandlingen foregår via PULSE 12, se Figur 16.



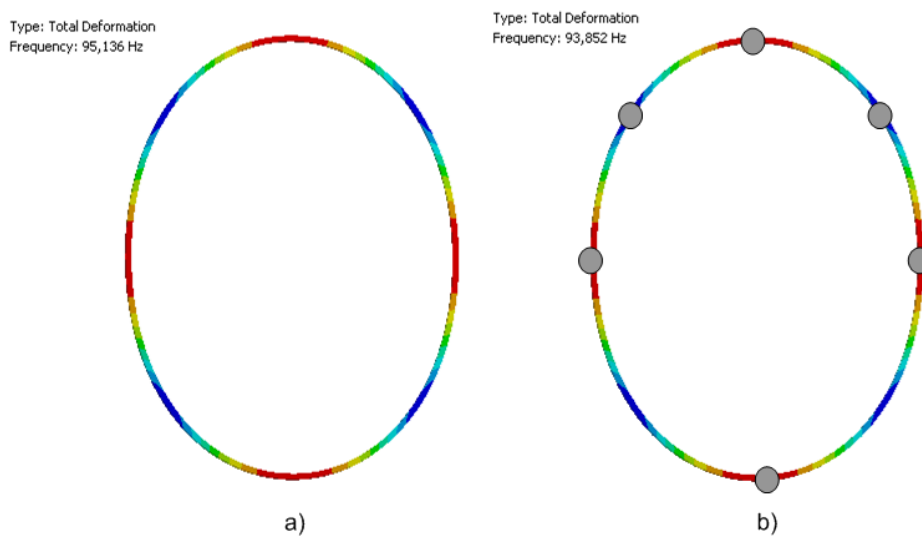
**Figur 16** Dataopsamler, hammer og pc med PULSE.

Til databehandlingen vælges følgende indstillinger:

- Frekvens-opløsning i FFT-vindue:  $\frac{400\text{Hz}}{1600} = 0,25\text{Hz}$
- Måletid:  $T_{rec} = \frac{1}{0,25\text{Hz}} = 4\text{s}$

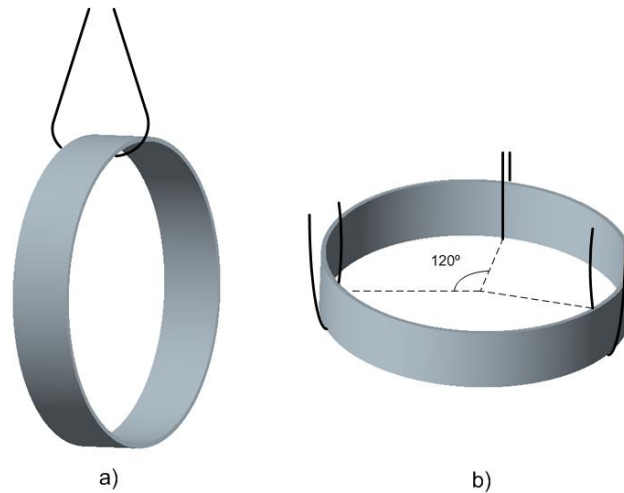
Opløsningen i FFT-vinduet er valgt ud fra de analytiske resultater, hvor egenfrekvensen for en ring i luft forventes at ligge i nærheden af  $100\text{ Hz}$  og  $270\text{ Hz}$  for henholdsvis egg mode ( $m = 2$ ) og trekant mode ( $m = 3$ ) [RFI].

Da accelerometerenes masse vil påvirke forsørgresultaterne ved højst sandsynligt at reducere egenfrekvenserne, skal effekten fra disse undersøges. Dette kan gøres ved at påføre massen af accelerometerene som punktmasser på en FE-model af en ring med  $L = 0,03\text{ m}$ . Figur 17 viser to simuleringer af en egg mode og Figur 17b er placeringen af punktmasserne illustreret, hvor massen af én accelerometer er målt til  $m_{acc} = 0,029\text{ kg}$ .



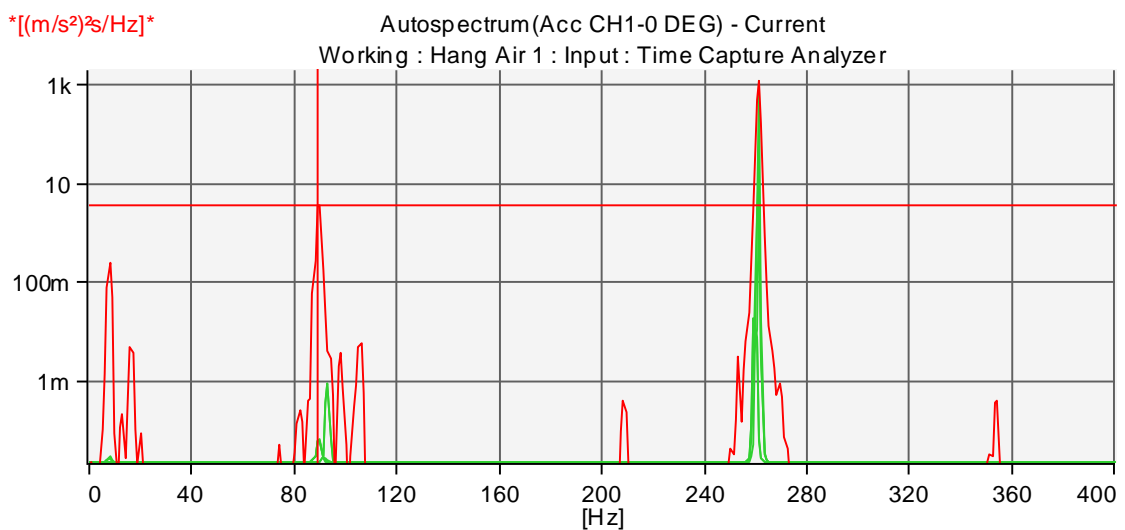
**Figur 17** Effekt fra accelerometere på egenfrekvens, a) uden accelerometere b) med accelerometere.

Det kan ses, at accelerometerene medfører en reduktion af egenfrekvensen på  $\Delta f = 95,1\text{ Hz} - 93,9\text{ Hz} = 1,2\text{ Hz}$ , hvilket anses for ikke at være et problem ved evaluering af resultaterne. Udover effekten fra accelerometerene, er det også nødvendigt at undersøge påvirkningen fra randbetingelserne i forsørgsopstillingen. Da den analytiske løsning er baseret på en frit svævende ring, er det vigtigt at randbetingelserne på forsørgsemnerne kun får en minimal effekt på målersultaterne. Der vil blive taget udgangspunkt i de to illustrerede ophængnings-principper på Figur 18, hvor et af disse principper skal udvælges ved at evaluere resultaterne fra en egenfrekvens-analyse i luft.



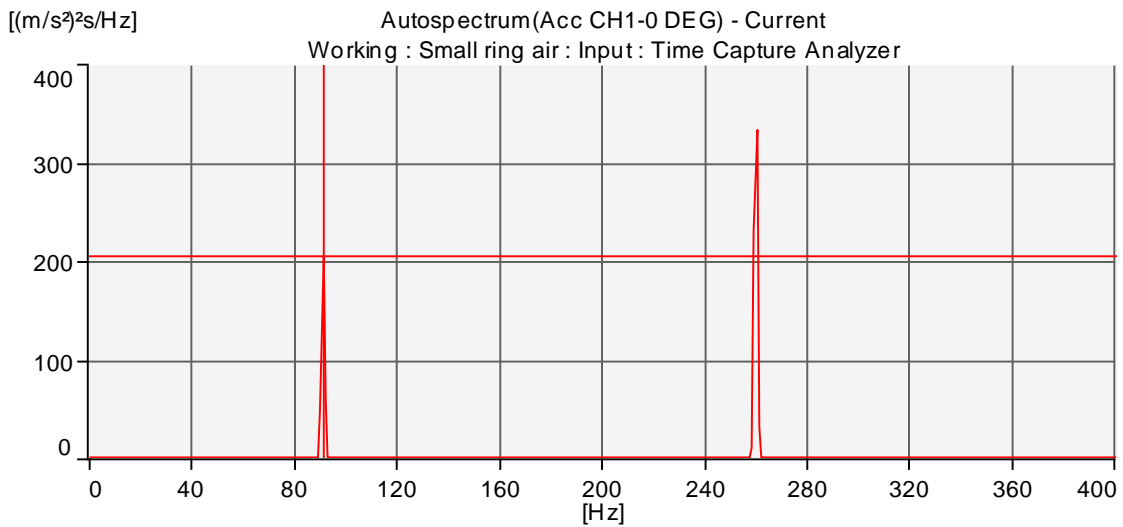
**Figur 18** Ophængning af forsøgsemne, a) ét punkt, lodret b) tre punkter, vandret.

Hvis der ønskes en minimal påvirkning fra randbetingelserne er det mest oplagt at vælge princippet angivet på Figur 18a. Ved et slag-test i luft viser det sig dog, at dette ikke er tilfældet. Figur 19 viser responset fra accelerometer 1, for et forsøgsemne med  $L = 0,03m$ , hvor egenfrekvensen er målt til  $f = 89Hz$ .



**Figur 19** FFT - accelerometer 1, ophængning i ét punkt,  $L=0,03m$ .

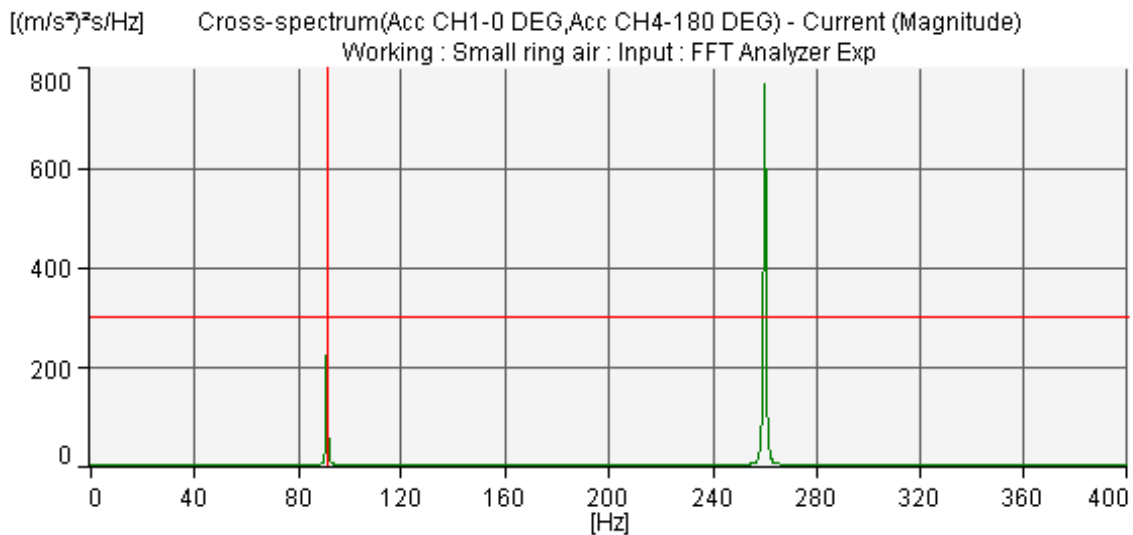
Det samme forsøg er foretaget med tre ophængningspunkter som vist på Figur 18b og responssignalet kan ses på Figur 20, hvor egenfrekvensen her er målt til  $f = 91Hz$ . Det kan samtidig ses, at amplituden er meget større ved denne forsøgsopstilling, hvilket tyder på at tyngdekraften har en dæmpende effekt på vibrationerne når forsøgsemnet er i lodret position.



**Figur 20** FFT - accelerometer 1, ophængning i tre punkter,  $L=0,03\text{m}$ .

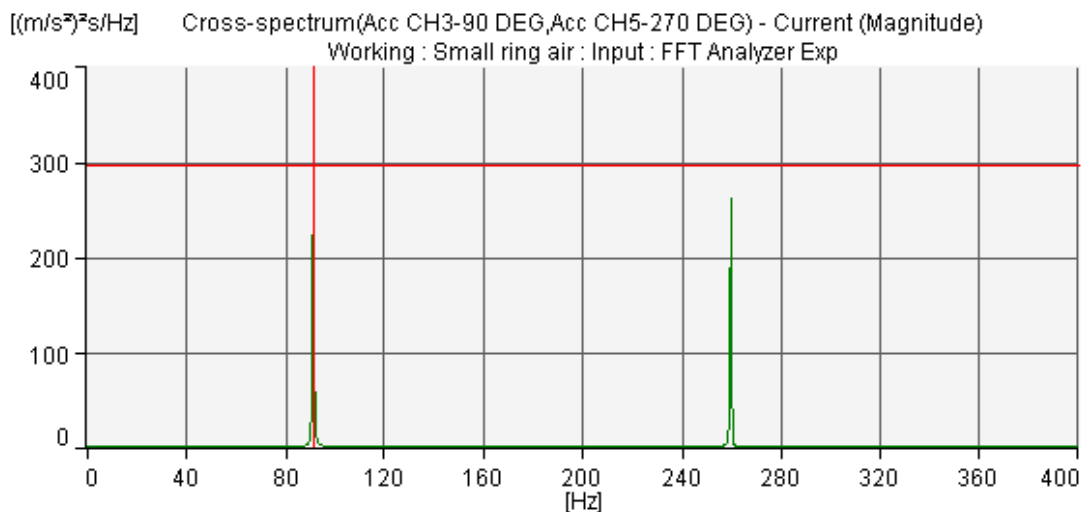
Ud fra de foregående forsøgsresultater er det oplagt at vælge princippet på Figur 18b til det videre forløb, men først skal det dog sikres at accelerometer 1 og 4 er i fase og samtidigt i modfase med 3 og 5.

Figur 21 viser et krydsprektrum af responset fra accelerometer 1 og 4 hvor fase-forskellen er aflæst til  $\varphi = -0,4^\circ$  og dermed kan det konkluderes at de to accelerometre er i fase.



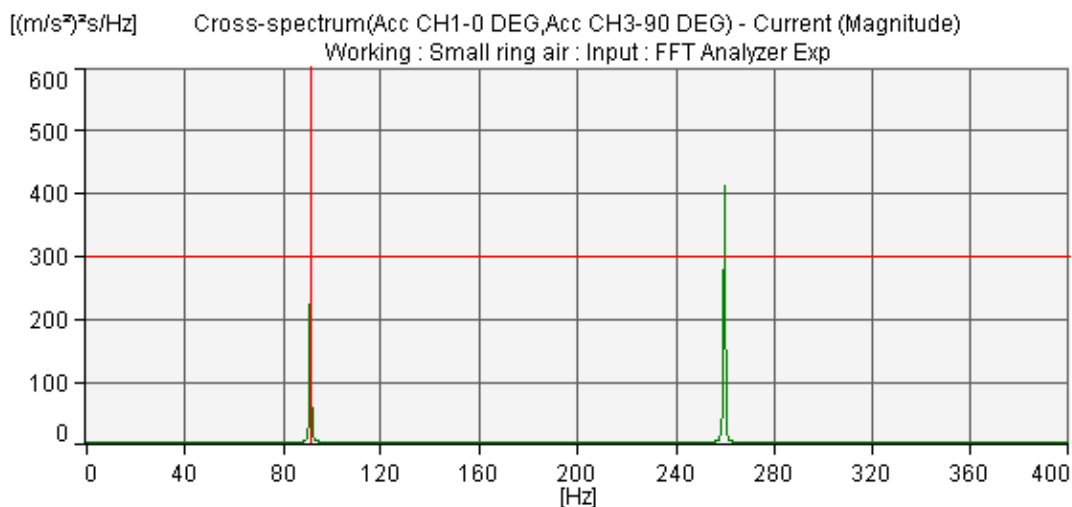
**Figur 21** Krydsppektrum - accelerometer 1 og 4.

På Figur 22 er krydsprektret for accelerometer 3 og 5 angivet med en fase-forskel på  $\varphi = -0,2^\circ$ , hvormed disse også kan antages at være i fase.



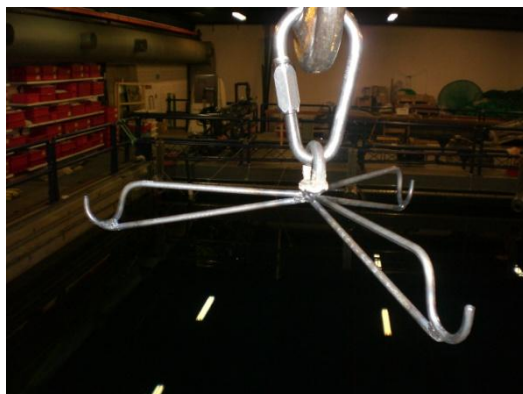
**Figur 22** Krydsspektrum - accelerometer 3 og 5.

Da det skal sikres at den såkaldte egg mode faktisk forekommer undersøges krydsspekter for accelerometer 1 og 3, Figur 23. I dette tilfælde er fase-forskellen  $\varphi = 180^\circ$ , som betyder at disse er i modfase og dette betragtes som et bevis for at det er en egg mode der opfanges.



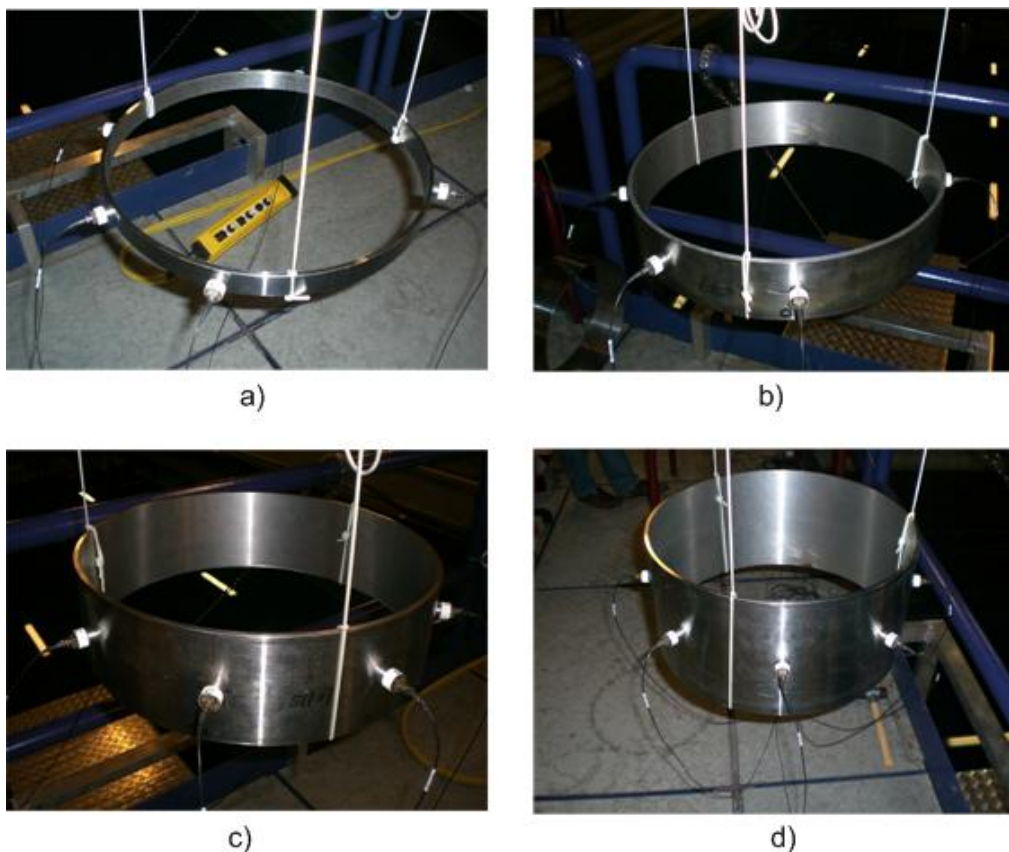
**Figur 23** Krydsspektrum - accelerometer 1 og 3.

Det er nu muligt at gennemføre de egentlige eksperimenter og for at sikre nogle fornuftige resultater benyttes en, til forsøget, specialfremstillet krog som vist på Figur 24. Dette hindrer snorene, der benyttes til ophængning, i at påvirke cylindrene med inplane kræfter.



Figur 24 Krog.

De fire klargjorte forsøgsemner er illustreret på Figur 25 og da disse skal nedsænkes i vand er det nødvendigt at tætn accelerometerene.



Figur 25 Alle forsøgsoptillinger, a)  $L = 0,03\text{m}$  b)  $L = 0,077\text{m}$  c)  $L = 0,115\text{m}$  d)  $L = 0,195\text{m}$ .

På Figur 26 er det vist hvorledes accelerometerene er tætnet vha. stævnerørsfedt, hvilket er tilstrækkeligt til, at vandet ikke trænger ind og dermed medfører ukorrekte resultater.





**Figur 26** Forsegling af accelerometer.

For at kunne frembringe de ønskede modes, skal slaget fra hammeren påføres inplant på cylindrene som vist på Figur 27.



a)



b)

**Figur 27** Slag-test, a) I luft b) I vand.

Forsøgsresultaterne for egg mode er angivet i Tabel 1 og et eksempel for den næste egenfrekvens er angivet i Tabel 2. Krydsppektre samt FFT-grafer fra forsøgene kan ses i Appendiks C.

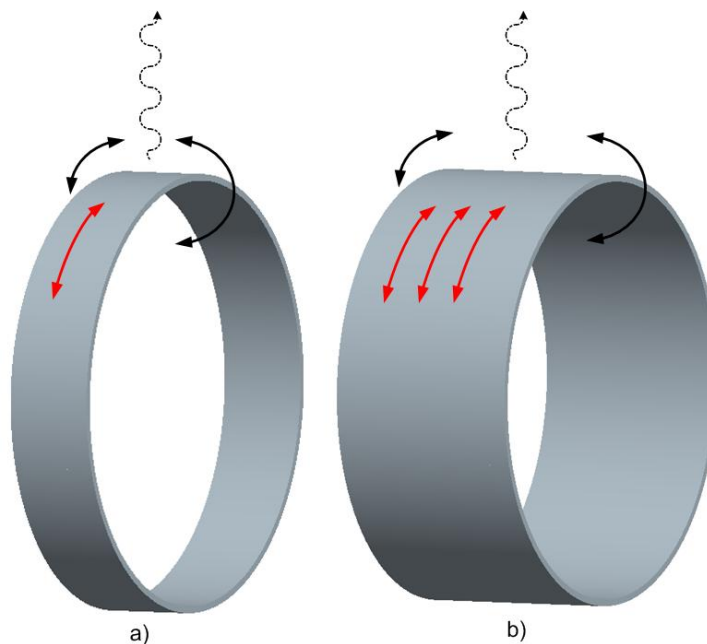
Forsøgsemne	$L = 0,03m$	$L = 0,077m$	$L = 0,115m$	$L = 0,195m$	Analytisk( $m=2$ )
$f_{luft}[Hz]$	91,0	99,4	102,3	102,7	102,3
$f_{nedsunken}[Hz]$	76,3	71,5	67,1	61,0	48,2

**Tabel 1** Forsøgsresultater samt analytisk resultat, egg mode.

Forsøgsemne	$L = 0,115m$	Analytisk(m=3)
$f_{luft} [Hz]$	287,5	289,5
$f_{nedsunken} [Hz]$	190	158,5

**Tabel 2** Forsøgsresultater samt analytisk resultat, trekant mode.

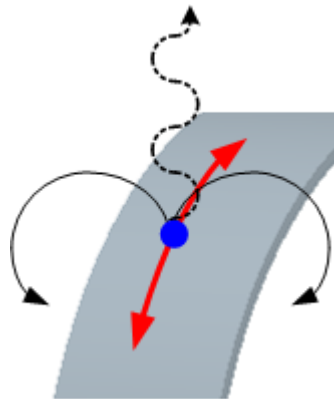
Ud fra tabellerne kan det tydeligt ses, at de eksperimentelle resultater konvergerer mod de analytiske resultater når længden forøges. Begrundelsen for dette ligger i at ved en længdeforøgelse tilnærmes plan tøjningstilstand, hvilket den analytiske løsning jo er baseret på. Resultaterne er dog kun tilfredsstillende for egenfrekvensbestemmelsen i luft. Da formålet med eksperimentet, som tidligere nævnt, er at verificere den analytiske metode, er afvigelsen mellem de eksperimentelle og analytiske resultater i nedsunken tilstand ikke acceptable. Forklaringen på denne forskel er givet i det følgende.



**Figur 28** Illustration af vandets bevægelse ved inplane vibrationer, a) Kort cylinder b) Lang cylinder.

Figur 28 illustrerer det fænomen der forårsager afvigelserne mellem de analytiske og eksperimentelle resultater for egenfrekvensen af cylindrene i nedsunken tilstand. De sorte pile angiver grænselags-effekten, hvor vandet bevæger sig ud af planet mellem cylindrenes ydre og indre. Hermed bidrager denne del af vandet minimalt til den tilføjede masse. De røde pile angiver vandets inplane bevægelse, som er hovedårsagen til den tilføjede masse og dermed en

reduktion af egenfrekvensen. På er Figur 29 dette fænomen illustreret med udgangspunkt i en enkelt vandpartikel.

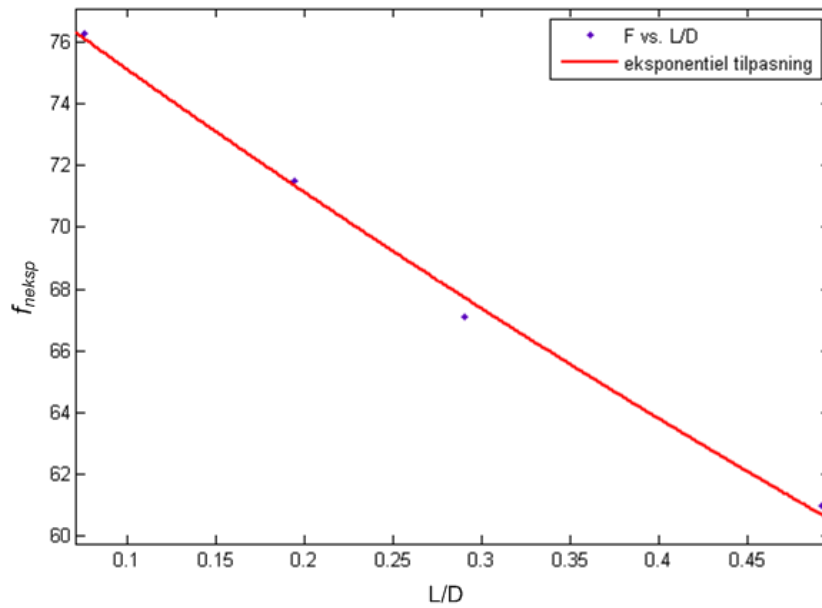


**Figur 29** Illustration af bevægelsen af en vandpartikel.

Som resultaterne fra eksperimentet viser, Tabel 1, fås der en bedre overensstemmelse mellem disse og de analytiske resultater når længden af cylinderen forøges. Dette kan begrundes ud fra, at grænselagseffekten er dominerende ved en kort cylinder, men da denne effekt er uafhængig af længden og forbliver konstant medfører dette, at de inplane bevægelser begynder at dominere når længden forøges.

De stiplede bølgende linjer illustrerer det tredje fænomen der kan opstå, nemlig akustisk stråling. Dette fænomen er dog ikke kun gældende for cylindriske skal-elementer, som teorien i denne rapport er baseret på, men gælder ligeledes for enhver plade, der er belastet med et akustisk medium. Strålingen opstår ved relativt høje frekvenser, hvor der med ordet *relativt* menes at dette afhænger af dimensionerne på den konstruktion, der undersøges. Det kan generelt siges, at hvis vibrationshastigheden af den belastede overflade er større end lydets hastighed i vandet  $c_0$ , vil der forekomme akustisk stråling [Sorokin, 1995, s. 63]. I sådan et tilfælde kan kompressibiliteten af vandet ikke negligeres, da dette vil have en effekt på den tilføjede masse. Hvor vidt dette fænomen har en betydning for propellerdysen undersøges i næste kapitel.

På nuværende stadie betragtes grænselagseffekten som den mest fremtrædende årsag til afvigelsen mellem de eksperimentelle og analytiske resultater. Vha. resultaterne for  $f_{nedsunken}$  i Tabel 1 kan der genereres en graf, beskriver egenfrekvensen i nedsunken tilstand  $f_{neksp}$ , se Figur 30, som funktion af forholdet mellem længde og diameter af forsøgsemnerne.



**Figur 30** Eksponentiel tilpasning af forsøgsresultater.

Ved at foretage en eksponentiel tilpasning af de benyttede data fås følgende udtryk:

$$f_{neksp} = 79,32 \exp\left(-0,5446 \cdot \left(\frac{L}{D}\right)\right) \quad (4.15)$$

Det er hermed muligt at udtrykke en korrektionsfaktor,  $K_{korr}$ , for den analytiske løsning, som med en given længde-diameter forhold beregnes som:

$$K_{korr} = \frac{f_{neksp}}{f_{analytisk}} \quad (4.16)$$

hvor  $f_{analytisk}$  er egenfrekvensen for en ring med samme diameter og godstykkelse som forsøgsemnerne.

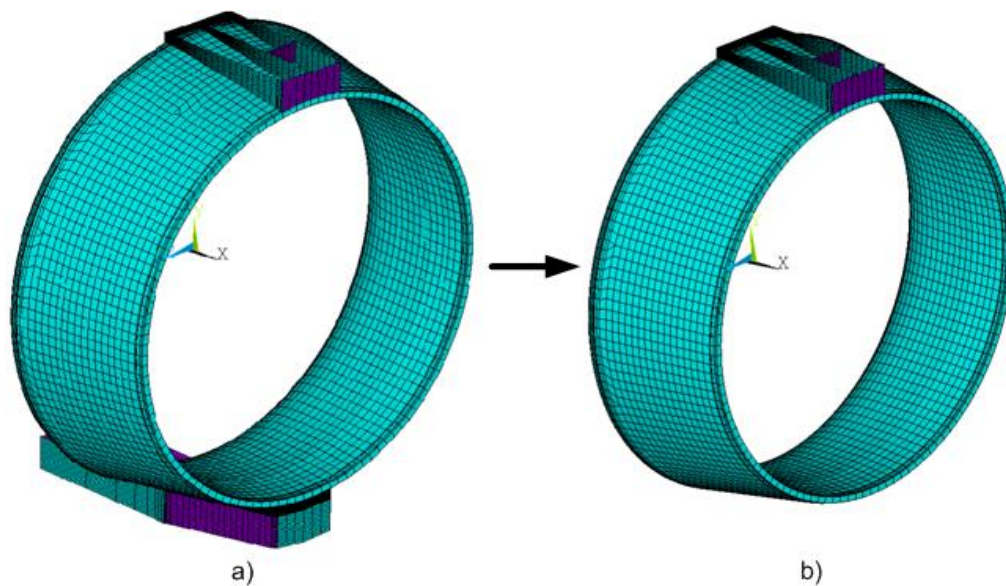
I dette afsnit blev det bevist at den analytiske løsning kun kan give korrekte resultater for en cylinder hvor  $L \gg D$ . Ved nu at have implementeret korrektionsfaktoren er det muligt at påbegynde processen til den endelige bestemmelse af propellerdysens egenfrekvens i vand.

## 5 Simplificering af propellerdyse

### 5.1 Reducering af randbetingelser

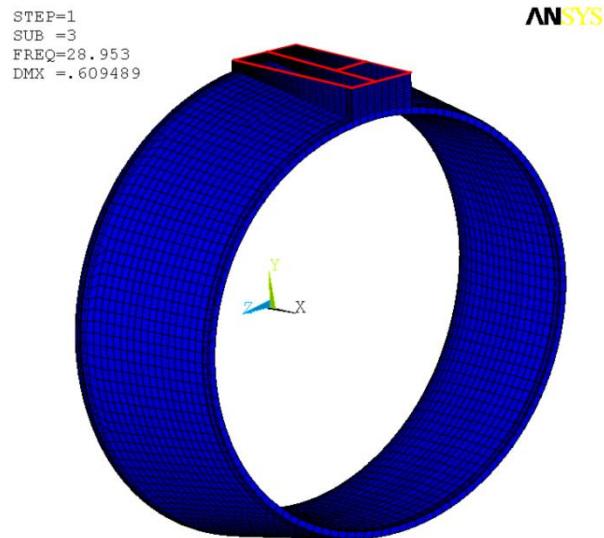
På nuværende stadie er teorien samt de nødvendige eksperimenter, for en analyse af propellerdysen, fastlagt. Da teorien er baseret en cylindrisk skal-struktur er det åbenlyst, at denne ikke kan overføres direkte til propellerdysen. Dette begrundes ud fra propellerdysens komplekse afstivnings-elementer, se Appendiks A, samt at propeller-dysen ikke er fuldt ud cylindrisk men nærmere konisk. Løsningen til denne problemstilling er at generere en ækvivalent cylindrisk skal-model af propellerdysen.

Da dimensionerne og materialeparametrene af den ækvivalente model skal kunne indtastes direkte i Matlab-koden[SRVIU], for at kunne sammenligne den numeriske og analytiske model, fjernes den nederste indspænding på FE-modellen af dysen, se Figur 31.



**Figur 31** a) Oprindelig dyse b) Dyse uden nederste indspænding.

Ved at lave denne reducereing, tilnærmes dysen en cylindrisk model som kan analyseres ved frie vibrationer. Det skal dog bemærkes, at denne model stadigvæk ikke kan bruges direkte i forbindelse med teorien om en cylindrisk skal-model der er påvirket af et akustisk medium. I første omgang beregnes egenfrekvensen den reducerede model, Figur 31b, for en egg mode, hvilket er vist på Figur 32, hvor modellen er fast indspændt i områderne angivet med røde linier.



**Figur 32** Modalanalyse af reduceret dyse-model i ANSYS, egg mode – vakuum.

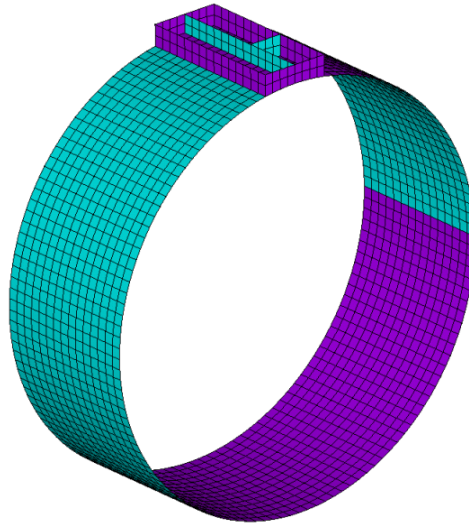
Egenfrekvensen er beregnet til  $f \approx 29\text{Hz}$  og nu er det næste skridt at finde frem til en ækvivalent skal-model med samme randbetingelser som den reducerede model. Ved generering af den ækvivalente model skal længden, diameteren og tykkelsen af profilet så vidt muligt bibeholdes. Dette er bl.a. for at undgå unødvendige og ikke-linieære skalerings effekter og samtidig er det i afsnit 4.3 vist, at grænslagseffekten af afhængig af længde-diameter-forholdet. Hermed bliver der taget udgangspunkt i følgende dimensioner for at modellere cylinderen, se Appendiks A:

$R_G = 1.9775\text{m}$  - Gennemsnitsradius af dyse

$L = 1.440\text{m}$  - Længde af dyse

$h_G = 0.1335\text{m}$  - Gennemsnitstykkelse af dyse

Den nye simplificerede model er vist på Figur 33, som består af SHELL93 elementer.

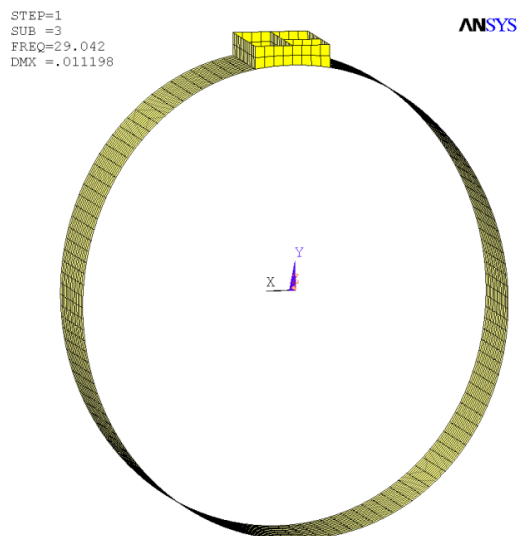


Figur 33 Skal-model

Densiteten af materialet bliver bibeholdt som  $\rho = \rho_{st\ddot{a}l} = 7800 \frac{kg}{m^3}$ , da det er denne der skal ændres med masse-forøgelses-faktoren, som blev præsenteret i kapitel 2, formel (2.7). Hermed er det kun E-modulet, der bliver ændret for at opnå samme ækvivalente stivhed og dermed egenfrekvens som den reducerede dyse-model på Figur 32.

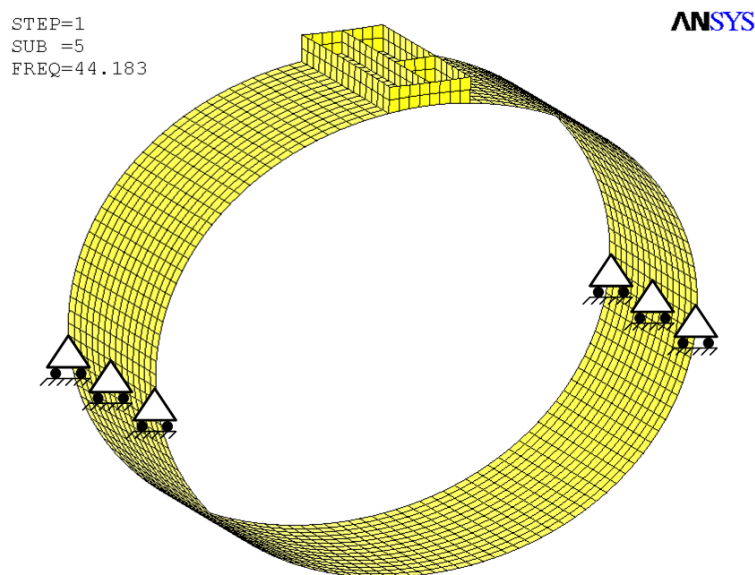
## 5.2 Randbetingelsernes betydning for moden

Den ækvivalente skal-model opnås med en E-modul på  $E = 810Gpa$ , hvor der fås en frekvens på  $f = 29Hz$ , som vist på Figur 34, med samme randbetingelser som modellen på Figur 32.



Figur 34 Modalanalyse af ækvivalent skal-model af dyse.

Ved nu at indtaste de angivne dimensioner og materialeparametre i matlab-koden [SRFI] for en egg mode, dvs.  $m = 2$ , bør resultatet fra den analytiske metode ligge meget tæt på 29 Hz. Dette er dog ikke tilfældet da der fås en egenfrekvens på  $f_{analytisk} = 45,5\text{Hz}$ . En mindre afvigelse ville have været acceptabelt da den analytiske løsning er baseret på plan tøjningstilstand, men da afvigelsen er på over 50%, må forklaringen ligge andetsteds. Den mest logiske årsag må være at randbetingelsen på den reducerede dyse samt den ækvivalente skal-model af dysen medfører, at den angivne mode ikke er en ideel egg mode. Denne problemstilling kan i første omgang undersøges ved at ændre randbetingelserne på den ækvivalente dyse-model, således at disse svarer til dem der er benyttet i afsnit 4.2, Figur 11. Modellen med de modificerede randbetingelser er vist på Figur 35, hvor der nu fås en egenfrekvens på  $f = 44,2\text{Hz}$ , hvilket stemmer godt overens med den analytiske løsning. Den lille forskel ligger som tidligere nævnt i, at den analytiske beregningsmetode er baseret på plan tøjning.

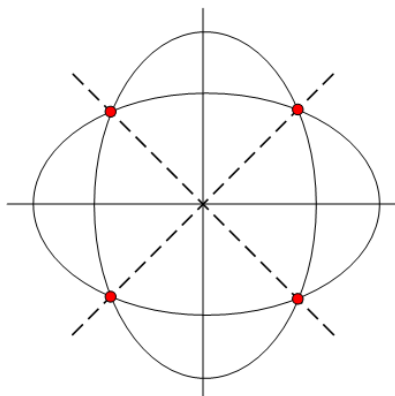


Figur 35 Modalanalyse af ækvivalent dyse-model med nye randbetingelser.

Resultatet, som er opnået med de nye randbetingelser, verificerer antagelsen om, at en ideel egg mode ikke fremkommer med en fast indpænding i toppen af dysen, som det er tilfældet på Figur 32 og Figur 34.

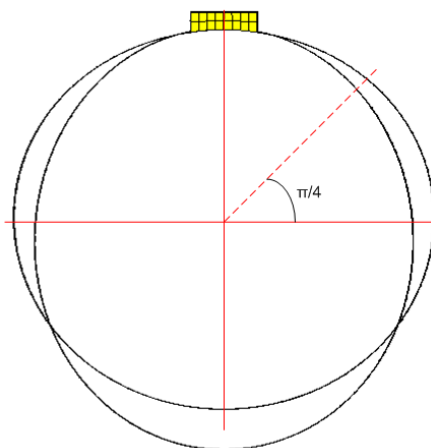
Ved nu at betragte formel (3.2) kan det ses, at for en egg mode hvor  $m = 2$  og  $\theta = \frac{\pi}{4}$  bliver  $w_m = 0$ . Det betyder at 4 punkter i periferien ikke er i bevægelse for en ideel egg mode. Dette fænomen er illustreret på Figur 36.





**Figur 36** Ideel egg mode.

Ved at tage to plot af den ækvivalente dyse-model i yderpositionerne af vibrationstilstanden, som vist på Figur 37, kan det tydeligt ses at for  $\theta = \frac{\pi}{4}$  er periferi-forskydningen forskellig fra 0.



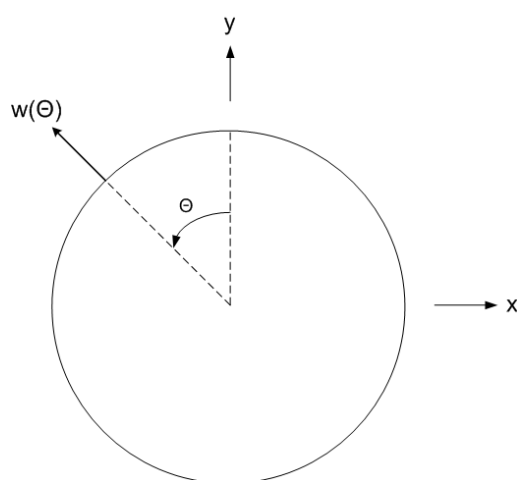
**Figur 37** Yderpositioner af ikke-ideel egg mode for ækvivalent dyse.

Dette har tydeligvis en indvirkning på egenfrekvensen, men hvis formen af den pågældende mode for dysen ligger meget tæt op ad en ideel egg mode, så bør den tilføjede masse ud fra formel (2.7) stadigvæk kunne beregnes, dog så længe at den tilføjede masse, der opstår når dysen er nedsunken i vand, er uafhængig af egenfrekvensen. Denne antagelse er kun gyldig hvis vandet kan regnes som et inkompressibelt medium, hvilket kan undersøges ved at lade  $c_0 \rightarrow \infty$  i udtrykket for det akustiske tryk, som er angivet med formel (3.30). Dermed kan det ses at  $\frac{\omega}{c_0} r \rightarrow 0$  i Besselfunktionerne, hvorved  $\omega$  ikke længere vil have nogen effekt. I dette tilfælde kan det dynamiske tryk i formel (2.1) ikke længere benævnes det akustiske tryk, da bølge-propagering ikke kan forekomme i et inkompressibelt medium.

Inden kompressibiliteten af vandet udforskes skal der foretages en analyse af den mode der fremkommer for den ækvivalente dysemodel, Figur 37, for at finde sammenhængen mellem denne og en ideel egg mode. Analysen foretages vha. en Fourier-rækkeudvidelse som introduceres i det følgende.

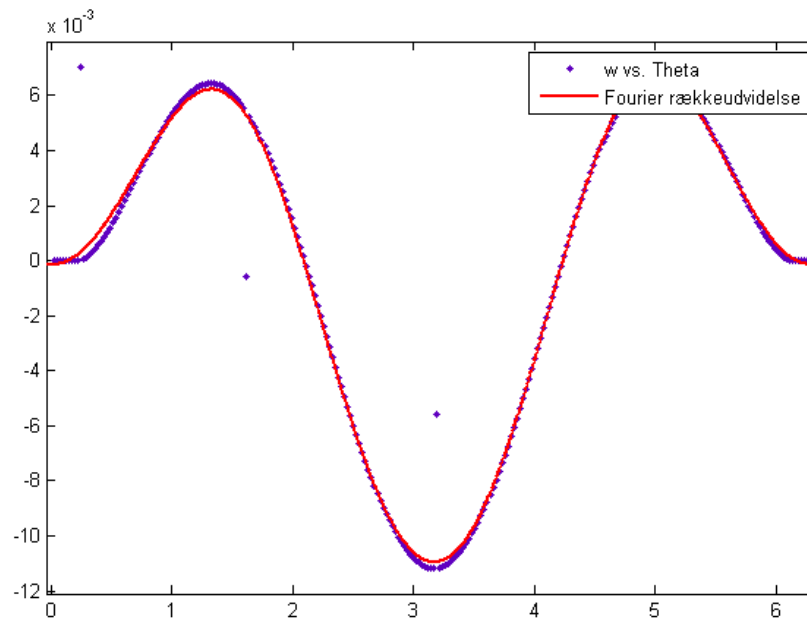
### 5.3 Fourier-analyse af mode

I første omgang skal normalforskydningen  $w$  af hvert elementknude på en linie i periferien af den ækvivalente dyse-model beregnes, se Figur 38. Dette gøres ved at hente størrelsen af forskydningerne fra FE-modellen [SDyse] i x- og y-retningen og herefter omregne disse.



Figur 38 Illustration af normalforskydning.

Da normal-forskydningen for den ideelle egg mode er udtrykt ved  $\cos(2\theta)$ , se formel (3.2), bør dette også være den dominerende faktor, hvis der findes et udtryk der beskriver  $w(\theta)$ . Denne funktion kan udledes ved at foretage en Fourier-rækkeudvidelse til at beskrive forskydningen af samtlige knudepunkter, som vist på Figur 39.



**Figur 39** Normal-forskydning af periferi.

Resultatet af Fourier-rækkeudvidelsen bliver hermed:

$$w(\theta) = a_0 + a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta) + a_2 \cos(2\theta) + b_2 \sin(2\theta) + a_3 \cos(3\theta) + b_3 \sin(3\theta) + a_4 \cos(4\theta) + b_4 \sin(4\theta) \quad (5.1)$$

hvor

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| - $a_0 = -4.935e-5$  | - $b_1 = 8.152e-6$   |
| - $a_1 = 0.005654$   | - $b_2 = -0.0003334$ |
| - $a_2 = -0.005584$  | - $b_3 = 7.346e-5$   |
| - $a_3 = -0.0002548$ | - $b_4 = 5.779e-5$   |
| - $a_4 = 9.086e-5$   |                      |

Det kan nu ses, at de største koefficienter er  $a_1$  og  $a_2$ , dvs. at  $\cos(\theta)$  og  $\cos(2\theta)$  dominerer normalforskydningens størrelse. Da det var forventet at kun  $\cos(2\theta)$  skulle være fremtrædende skal der nu gives en forklaring på problemstillingen. Da koefficienten  $a_1$  har en næsten ligeså stor absolut værdi som  $a_2$ , betyder dette at det ikke kun er en egg mode det forekommer, men samtidig forekommer der også en stift-legeme bevægelse. Derfor skal en masseforøgelsesfaktoren for stift-legeme-bevægelsen også beregnes.

I luft er egenfrekvensen af en ring ved stift-legemebevægelse givet som:

$$\omega_{luft} = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K}{2\pi R h \rho_{ring}}} \quad (5.2)$$

Den tilføjede masse for en ring i vand ved stift-legeme-bevægelse er givet ved[Blevins, 1990]:

$$M_{tilf} = \rho_{fluid} \pi R^2 \quad (5.3)$$

Som det blev introduceret med (2.5) i kapitel 2 kan egenfrekvensen i nedsunken tilstand beregnes som:

$$\omega_{nedsunken} = \sqrt{\frac{K}{M + M_{tilf}}} = \sqrt{\frac{K}{2\pi R h \rho_{ring} + \rho_{fluid} \pi R^2}} \quad (5.4)$$

Med en omformulering af (5.4) kan masse-forøgelses-faktoren for stift-legeme-bevægelse udtrykkes:

$$\begin{aligned} \omega_{nedsunken} &= \sqrt{\frac{K}{2\pi R h \rho_{ring} + \rho_{fluid} \pi R^2}} \\ &= \sqrt{\frac{K}{2\pi R h \rho_{ring}}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{R \rho_{fluid}}{h \rho_{ring}}}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Masse-forøgelses-faktor}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ved at benytte dimensionerne fra den ækvivalente dyse-model kan masseforøgelses-faktoren for stift-legeme-bevægelse beregnes:

$$K_{slb} = 1 + \frac{1}{2} \frac{R \rho_{fluid}}{h \rho_{ring}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1.9775m \cdot 1030 \frac{kg}{m^3}}{0.1335m \cdot 7800 \frac{kg}{m^3}} \approx 2,0 \quad (5.6)$$

Da den absolutte værdi af koefficienterne  $a_1$  og  $a_2$  er lige store, hvormed egg mode og trekant mode er lige dominerende, kan en ny masse-forøgelses-faktor for den blandede mode beregnes som en gennemsnits-værdi:

$$K_{mf} = \frac{K_{slb} + K_{egg}}{2} \quad (5.7)$$

Hvor  $K_{egg}$  angiver masseforøgelsesfaktoren for en ideel egg mode.

Som tidligere nævnt kan denne masse-forøgelses-faktor kun gælde hvis der kan ses bort fra vandets kompressibilitet, hvilket skal undersøges i det følgende afsnit.

#### 5.4 Vandets kompressibilitet

I Matlab-koden [SRVIU] fås egenfrekvensen for en ring med dimensionerne af den ækvivalente dyse, både i vakuum og nedsunket. Nedenfor er to beregninger af egenfrekvensen angivet, hvor lydets hastighed i vand er ændret med en faktor 100.

$$c_0 = 1512 \frac{m}{s} \Rightarrow f_{nedsunket} = 28,6Hz$$

$$c_0 = 151200 \frac{m}{s} \Rightarrow f_{nedsunket} = 28,6Hz$$

Da egenfrekvensen ikke ændres, kan vandet regnes som inkompressibelt for en dyse med de anvendte dimensioner. Grunden til dette kan billedligt beskrives ved, at dysen ikke "ser" de akustiske bølger for frekvenser under en bestemt værdi. For den fundne egenfrekvens er bølgelængden angivet ved:

$$\lambda = \frac{c_0}{f_{nedsunket}} = \frac{1512 \frac{m}{s}}{28,6Hz} \approx 53m \quad (5.8)$$

Da bølgelængden er langt større en dysens diameter har kompressibiliteten af vandet ingen betydning for egenfrekvensen. Det skal nu bevises, at den tilføjede masse er uafhængig af egenfrekvensen, men kun afhængig af vibrationsformen dvs. mode-nummer, samt de angivne dimensioner. Dette foretages ved at beregne egenfrekvensen af ringen i nedsunket tilstand, for en egg mode, ved forskellige værdier af E-modulet i [SRVIU]. Samtidig beregnes masseforøgelsesfaktoren  $K_{egg}$  for en egg mode med formel (2.7):

$$K_{egg} = \left( \frac{\omega_{m=2}^{luft}}{\omega_{m=2}^{vand}} \right)^2 \quad (5.9)$$

Resultaterne er angivet i Tabel 3:

E-modul[MPa]	200	400	600	800
$f_{nedsunken}$ [Hz]	14,2	20,0	24,7	28,3
$K_{egg}$	2,55	2,54	2,52	2,55

**Tabel 3** Verificering af masse-forøgelses-faktorens uafhængighed af egenfrekvensen.

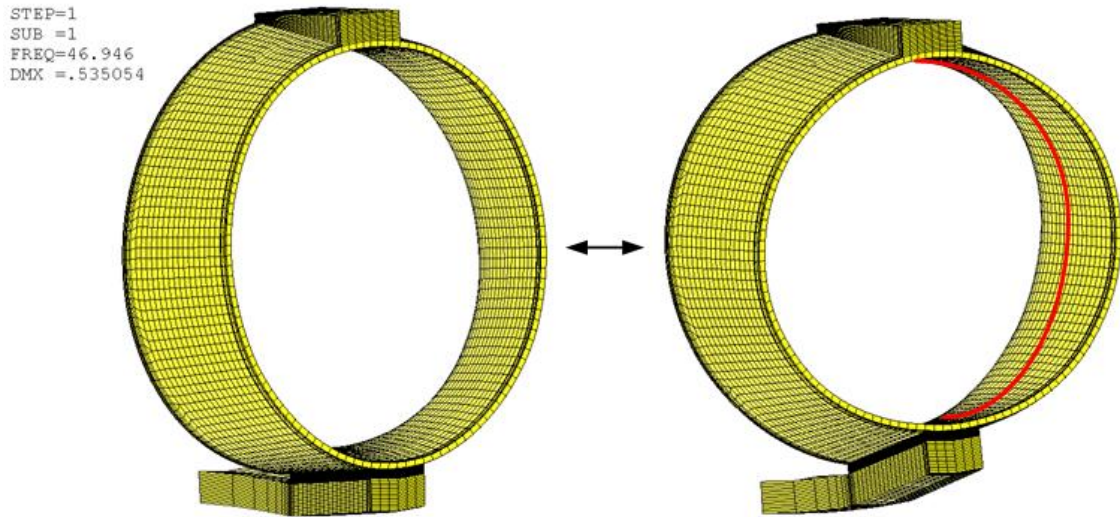
Som det kan ses, forekommer der ingen bemærkelsesværdig ændring af masse-forøgelses-faktoren  $K_{egg}$ , ved forskellige egenfrekvenser, hvormed frekvensuafhængigheden er verificeret.

Da grænselags-effekten må være uafhængig af mode-nr., hvormed (4.16) forbliver det samme, er det næste skridt nu at finde frem til egenfrekvensen af propellerdysen i vand, og da det har vist sig at randbetingelserne kan medføre en blanding af modes, er det endnu engang nødvendigt at foretage en Fourier-analyse af propellerdysen mode.

## 6 Beregning af egenfrekvensen

### 6.1 Fourier-analyse af mode

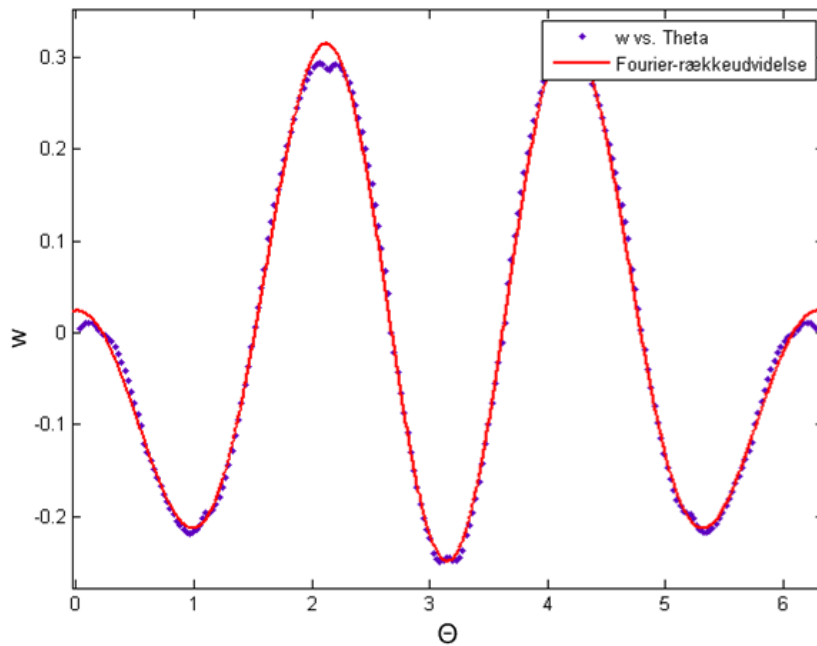
Ved igen at påføre den nederste indspænding på propellerdysen, forøges stivheden af konstruktionen og dermed egenfrekvensen til  $f_{vaku\ddot{u}m} = 47Hz$ , se Figur 40[FD3630x0.4].



Figur 40 Propellerdyse(FD3630x0.4) - laveste mode.

På samme måde som i afsnit 5.3 beregnes normalforskydningen  $w$  for alle knudepunkter, denne gang på en linie i midten af dysen, som markeret med rød på Figur 40.

Den grafiske tilpasning af forskydningerne er angivet på Figur 41, hvorudfra det også kan ses, at propellerdysen er fuldt ud symmetrisk.



**Figur 41** Fourier-analyse af normalforskydning

Normal-forskydningen kan vha. en Fourier-rækkeudvidelse igen beskrives som:

$$w(\theta) = a_0 + a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta) + a_2 \cos(2\theta) + b_2 \sin(2\theta) + a_3 \cos(3\theta) + b_3 \sin(3\theta) + a_4 \cos(4\theta) + b_4 \sin(4\theta) \quad (6.1)$$

Koefficienterne bliver i dette tilfælde beregnet til:

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| - $a_0 = -0.0009639$ | - $b_1 = -0.003154$ |
| - $a_1 = -0.08475$   | - $b_2 = 0.0004929$ |
| - $a_2 = -0.08111$   | - $b_3 = 0.006537$  |
| - $a_3 = 0.2208$     | - $b_4 = -0.00142$  |
| - $a_4 = -0.03007$   |                     |

Som det kan ses, er  $a_1$ ,  $a_2$  og  $a_3$  de dominerende koefficienter og det er især  $a_3$  der er fremtrædende og dermed  $\cos(3\theta)$  der beskriver normal-forskydningen. Dette betyder, at det hverken er en stift-legeme-bevægelse eller en egg mode der hovedsageligt forekommer, men derimod en trekant mode. Dette medfører, at den endelige masse-forøgelses-faktor for propellerdysen FD3630x0.4 hovedsageligt bliver præget af en trekant mode, hvormed det næste skridt er at få beregnet denne.



## 6.2 Masse-forøgelses-faktoren

Da masse-forøgelses-faktorene for stift-legeme-bevægelse,  $K_{slb}$ , og for egg mode,  $K_{egg}$ , er kendte fra hhv. afsnit 5.3 og 5.4, er det kun masse-forøgelses-faktoren for trekant moden,  $K_{tr}$ , der mangler at blive beregnet. Dette gøres ved at vælge  $m = 3$  i [SRVIU] :

$$K_{tr} = \left( \frac{\omega_{m=3}^{luft}}{\omega_{m=3}^{vand}} \right)^2 = 2,2 \quad (6.2)$$

Den samlede og dermed endelige masse-forøgelses-faktor angives dermed som en vægtning af de 3 fundne værdier:

$$K_{mf} = \frac{K_{slb}a_1 + K_{egg}a_2 + K_{tr}a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{2,0a_1 + 2,5a_2 + 2,2a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 2,22 \quad (6.3)$$

Resultatet skal nu implementeres i FE-modellen af propellerdysen for at finde egenfrekvensen svarende til, at propellerdysen er nedsunket.

## 6.3 Egenfrekvensen af propellerdysen i vand

Ved nu at forøge densiteten af propellerdysen med  $K_{mf} = 2,2$  fås en egenfrekvens på  $f_{K_m} = 31,5\text{Hz}$  [FD3630SUB], hvormed der fås en reducere af egenfrekvensen på:

$$\frac{f_{vakuu} - f_{K_m}}{f_{vakuu}} = \frac{47\text{Hz} - 31,5\text{Hz}}{47\text{Hz}} = 0,33 = 33\% \quad (6.4)$$

Det sidste skridt i beregningen af propellerdysens egenfrekvens, i nedsunket tilstand, er at korrigerer egenfrekvensen pga. effekten fra grænselaget som findes vha. (4.16).

Korrektionsfaktoren beregnes til  $K_{korr} = 1,35$  [SRVIU] med  $\frac{L}{D} = \frac{1,44\text{m}}{2R_G} = 0,36$  og den endelige egenfrekvens for propellerdysen i vand,  $f_{pd}$ , kan hermed beregnes til:

$$f_{psub} = f_{K_m} \cdot K_{korr} = 31,5\text{Hz} \cdot 1,35 = 42,5\text{Hz} \quad (6.5)$$

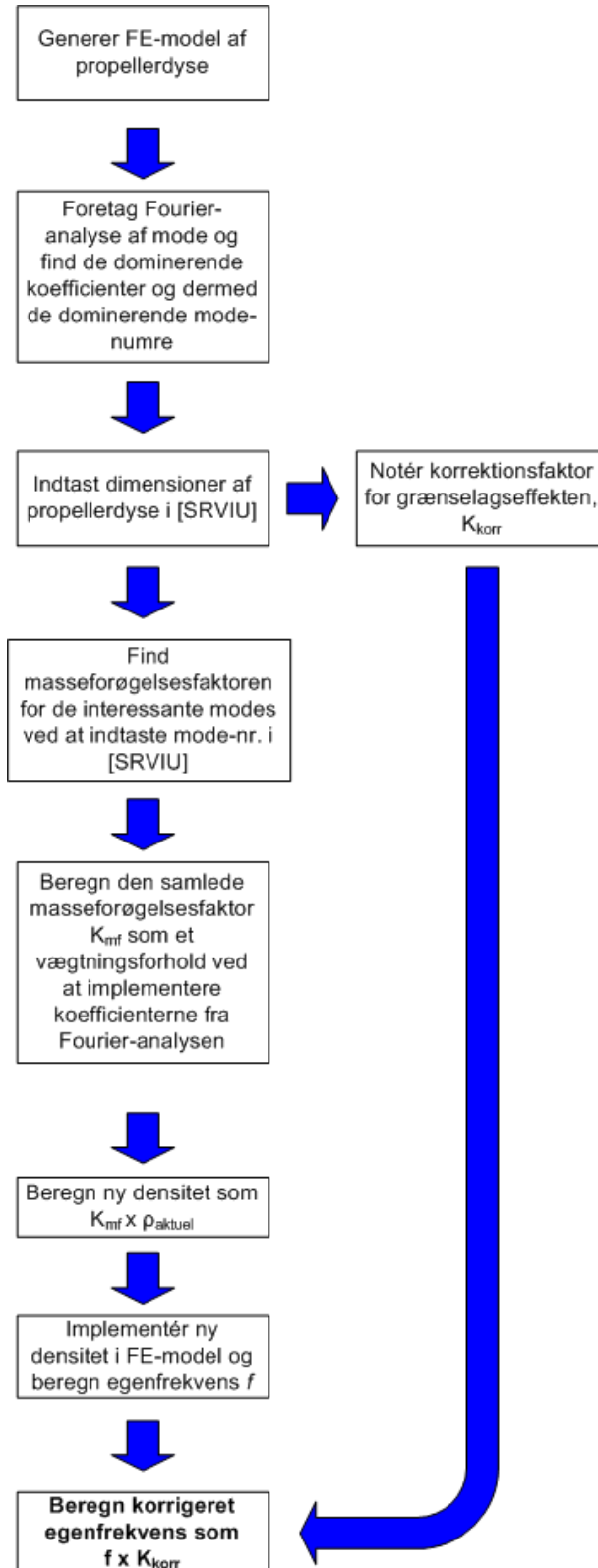
Reduktionen af egenfrekvensen bliver dermed:

$$\frac{f_{\text{vakuum}} - f_{\text{psub}}}{f_{\text{vakuum}}} = \frac{47\text{Hz} - 42,5\text{Hz}}{47\text{Hz}} = 0,01 = 10\% \quad (6.6)$$

Det resultat, der har været ét af målene med dette projekt er nu fundet. Dog er der fortsat én bestemt problemstilling, som ikke er blevet diskuteret i forbindelse med metoden til at finde egenfrekvensen af propellerdysen i vand. I afsnit 5.1 blev det nævnt, at dimensionerne af propellerdysen skulle bibeholdes ved simplificeringen for at undgå effekter fra ikke-lineariteter i skaleringsforhold. Dermed kan det virke undrende, at der benyttes en korrektionsfaktor, som er fundet vha. nogle forsøgsemner, der er meget mindre end selve propellerdysen. Dette kan dog retfærdiggøres ud fra, at der generelt med dimensionerne af propellerdysen og forsøgsemnerne arbejdes i små skalaforhold sammenlignet med de akustiske bølgelængder der betragtes, se afsnit 5.4 formel (5.8). Ved høje frekvensområder vil det dermed ikke være korrekt at anvende denne korrektionsmetode, og i disse tilfælde kan fuldskala-forsøg være nødvendige.

Som det sidste led i denne rapport angives en overskuelig fremgangsmetode til beregningen af egenfrekvensen for en tilfældig propellerdyse i vand.

## 7 Fremgangsmetode til beregningsproces





## 8 Konklusion

Formålet med dette projekt var at udvikle et værktøj, der kan bruges i forbindelse med beregning af de laveste egenfrekvenser af en propellerdyse i vand. Samtidig skulle der gives en generel beskrivelse af vandets effekter på et nedsunket objekt, hvor hovedvægten i rapporten blev lagt på den tilføjede masse.

Problemløsningen tog udgangspunkt i at introducere vandets effekter med basis-teori fra svingningsslæren. Derefter blev der, med udgangspunkt i en cylinder, udledt en analytisk metode, der kunne relateres til propellerdysen FD3630x0.4 i forbindelse med beregningen af masse-forøgelses-faktoren og dermed den tilføjede masse. Den analytiske metode blev derefter verificeret med en numerisk model samt en simpel analytisk formulering. En eksperimentel verificeringsproces viste dog, at den analytiske metode ikke kunne gengive virkelighedens forhold. Ud fra de indhentede data blev der genereret et udtryk til at bestemme en korrektionsfaktor for den analytiske løsning. Dermed kunne den analytiske metode blive benyttet til at bestemme masse-forøgelses-faktoren for propellerdysen.

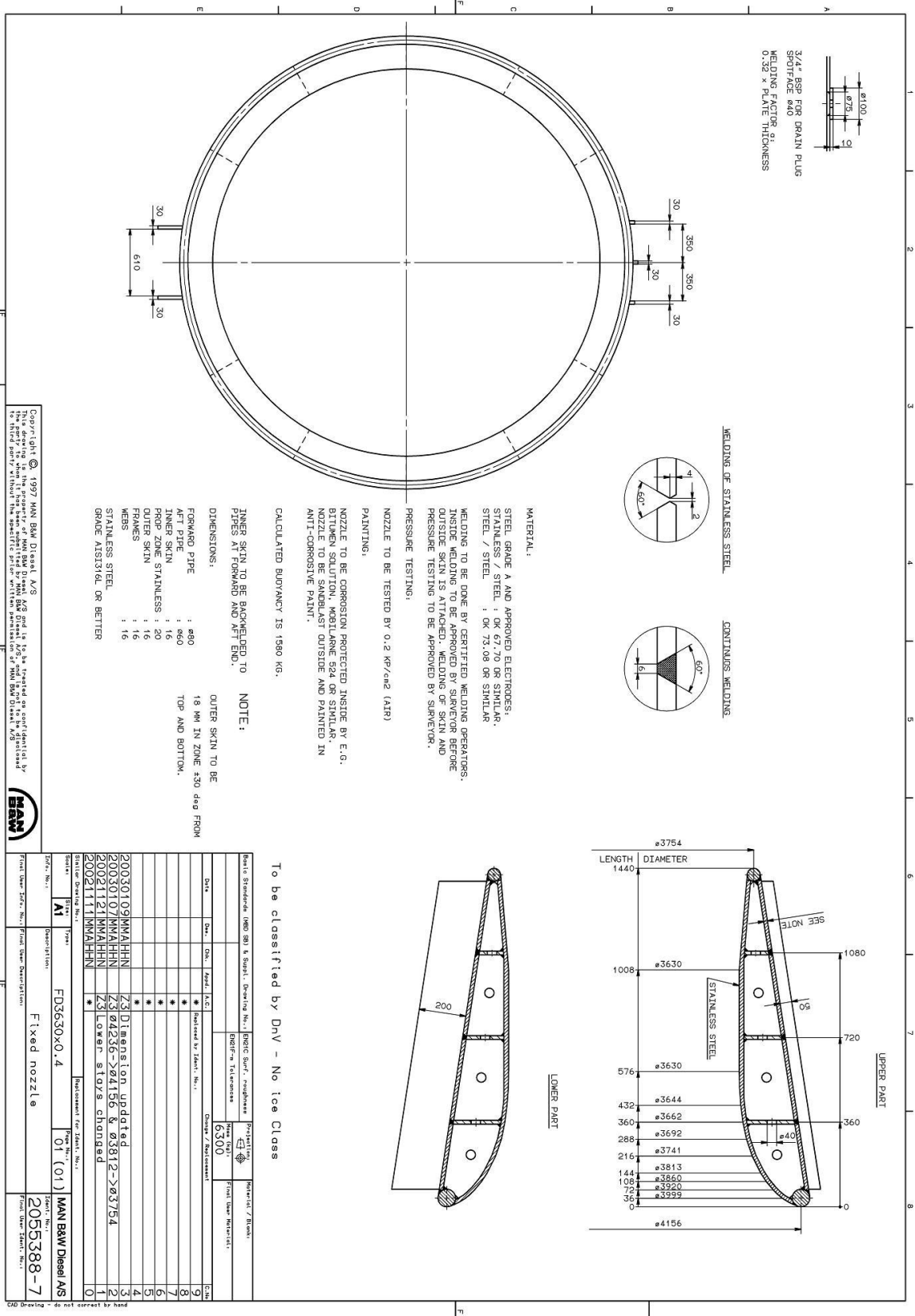
Det første skridt i analysen af selve propellerdysen tog udgangspunkt i en ækvivalent skal-model, som skulle tilpasses den analytiske metode. Ved en analyse af resultaterne fra de to modeller blev der, imod al forventning, fundet en markant uoverensstemmelse. Dette skyldtes, at moden af skal-modellen, pga. randbetingelserne, ikke stemte overens med det, der var antaget ud fra visuelle betragtninger. Hermed blev den aktuelle mode fundet vha. en Fourier-analyse, hvor den viste sig at være en addition af flere modes, hvormed masse-forøgelses-faktoren skulle findes som et gennemsnit af effekten fra de forskellige modes vha. den korrigerede analytiske metode. Denne antagelse kræver, at vandet kunne betragtes som et inkompressibelt fluid, hvilket var tilfældet da propellerdysens dimensioner er langt mindre end de akustiske bølgelængder. Da moden dermed kunne bestemmes med en Fourier-analyse, er en ækvivalent skal-model ikke nødvendig. Det betyder sammenlagt at en bestemmelse af masse-forøgelses-faktoren er uafhængig af påmonterings-princippet mellem propellerdyse og skibsskrog.

For at løse problemstillingen blev der hermed foretaget en Fourier-analyse af moden for den rigtige propellerdyse, hvormed masse-forøgelses-faktoren og dermed den naturlige egenfrekvens blev fundet.

Baseret på afgrænsningerne er problemet blevet løst, men da propellerdysen består af en kompliceret afstivet struktur og teorien er baseret på en cylindrisk skal-struktur, kan dette medføre uønskede fejlestimeringer. Samtidig er det antaget at propellerdysen befinder sig uendelig langt væk fra enhver flade, hvormed der ikke tages hensyn refleksionseffekter. Disse to simplificeringer kan der tages hensyn til hvis der i fremtiden bevilges midler til en fuldskalatest, der kan give et pålideligt billede af propellerdysens opførsel under vibrationer i nedsunken tilstand. Hvis dette forsøg realiseres, kan pålideligheden af beregningsmetoden vurderes og metoden kan eventuelt korrigeres.

# Appendiks A

## Samlingstegning af propellerdyse – FD3630x0.4







## Appendiks B

Noter fra: [Sorokin, 2005]

### 1. THEORY OF LINEAR ACOUSTICS

Acoustics constitutes the subject of a great practical importance in any industrial and environmental application. It also can be viewed as an elegant and consistent theory, which clearly demonstrates the power of mathematics to model complicated physical phenomena and to provide their meaningful interpretations. The fundamentals of this theory are thoroughly discussed in the classical texts [1-5]. This section of the Lecture Notes presents a very brief overview of the fundamentals and the reader is encouraged to address these texts to familiarise himself with many details left out in these notes.

#### 1.1 The governing equations

The equations of fluid motion can be formulated by means of the mass conservation and Newton's second law:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho \vec{v} = -\nabla p. \quad (1.1b)$$

$\rho$  is the density,  $\vec{v}$  is the velocity of a fluid particle and  $p$  is the pressure. Note that fluid's viscosity is neglected.

These equations are reduced to equations of linear acoustics by the following steps

1. The density and pressure are slightly disturbed in the acoustic wave

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 \gg \rho', \quad \rho_0 = \text{Const}$$

$$p = p_0 + p', \quad p_0 \gg p', \quad p_0 = \text{Const}$$

2. The pressure and density perturbation are proportional to each other

$$p' = c_0^2 \rho', \quad \text{where } c_0 \text{ is the sound speed in an undisturbed fluid}$$

3. The velocity is sufficiently small to neglect the non-linear convective term in equation (1.1b)

Then equations (1.1) are reduced as

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'. \quad (1.2b)$$

In acoustics, the fluid motion is considered as irrotational, so that it is possible to introduce the velocity potential  $\varphi$  such that  $\vec{v} = \nabla \varphi$ . The second equation is written as

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p' \right) = 0. \quad (1.3)$$

Then

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p' = \text{Const} \quad (1.4)$$

The constant in right hand side of equation (1.4) may be chosen arbitrary, since it presents a reference level for the acoustic pressure  $p'$ . The natural choice of this level is  $\text{Const} = 0$ , which yields

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.5)$$

The equation (1.2a) becomes (note that  $\operatorname{div}(\nabla \varphi) \equiv \Delta \varphi$  and that  $\rho_0 \neq 0$ )

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi = 0 \quad (1.6)$$

One recognizes equation (1.6) as a wave equation.

The Laplace operator  $\Delta$  is given by

- in Cartesian coordinates:  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- in cylindrical coordinates  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- in spherical coordinates  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$

## Appendiks C

Forsøgsdata, genereret direkte fra PULSE

### Resultater for forsøgsemne med L=0,030m

I luft:

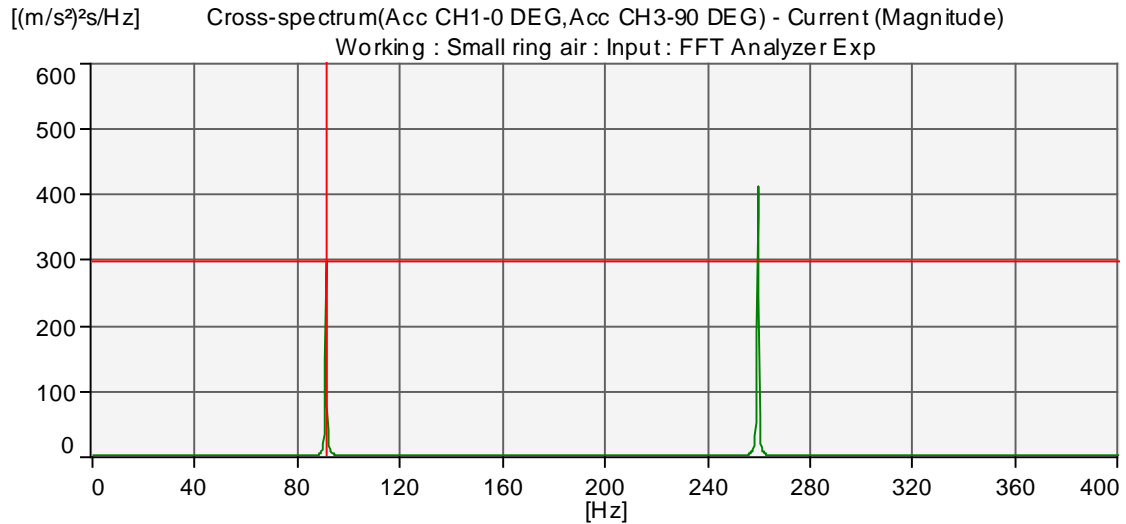


Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current

**Cursor Values**

Y = 295 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 91,00 Hz

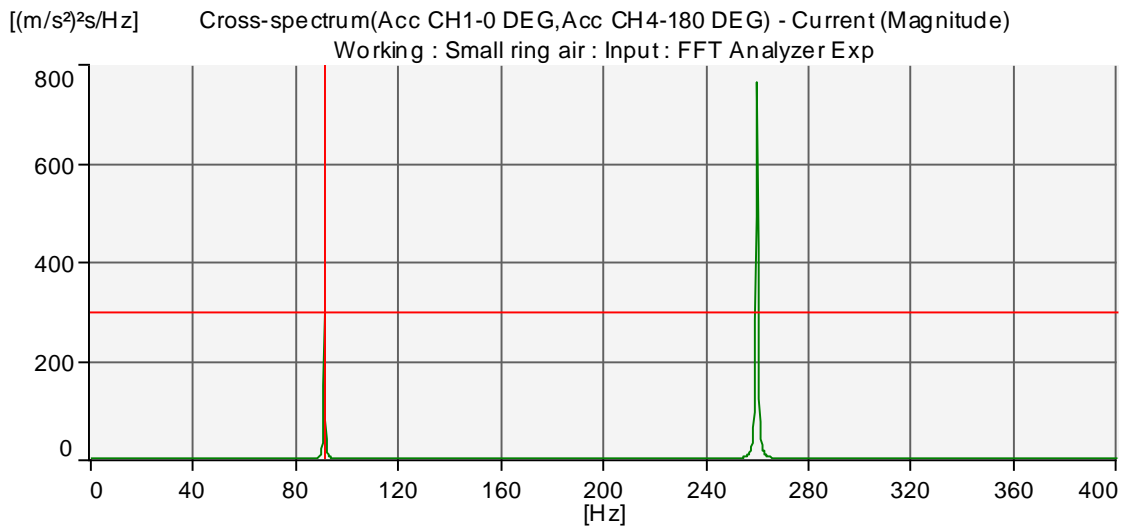
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 295 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 91,00 Hz

Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current



**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 299 (m/s²)²s/Hz

X = 91,00 Hz

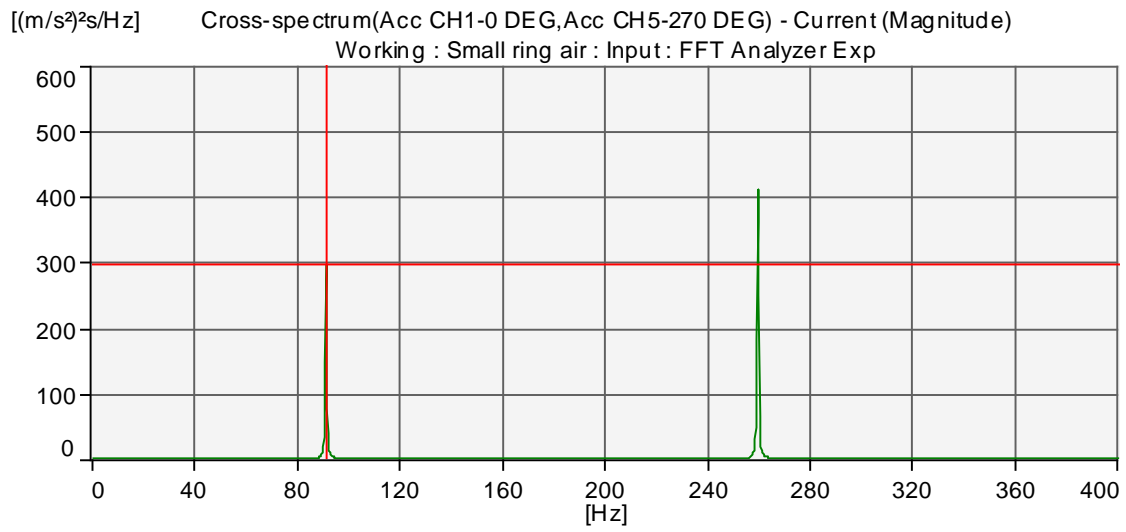
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 299 (m/s²)²s/Hz

Phase = -0,390 Degree

X = 91,00 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**



**Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 295 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 91,00 Hz

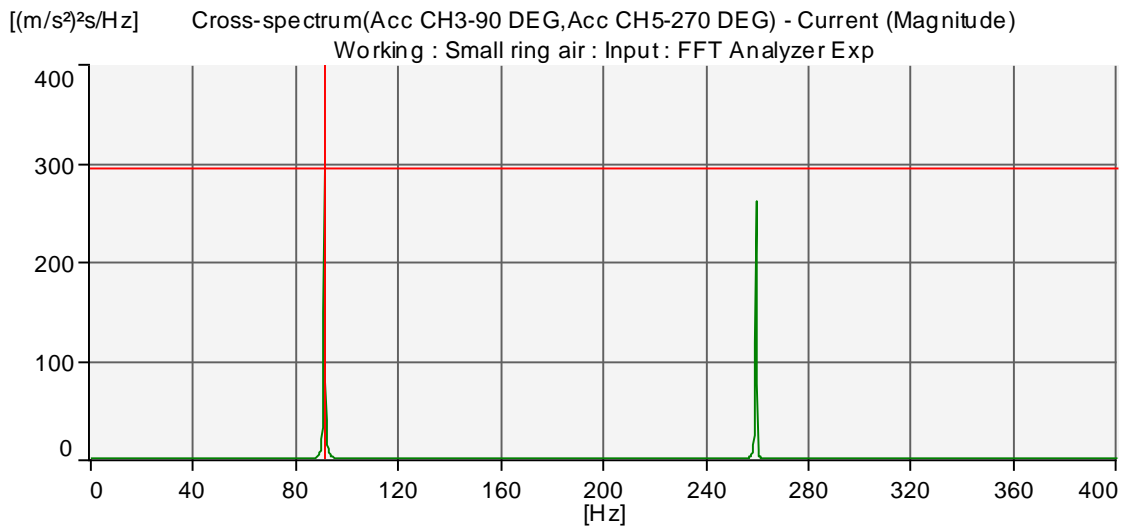
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 295 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 91,00 Hz

**Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**



**Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 294 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 91,00 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

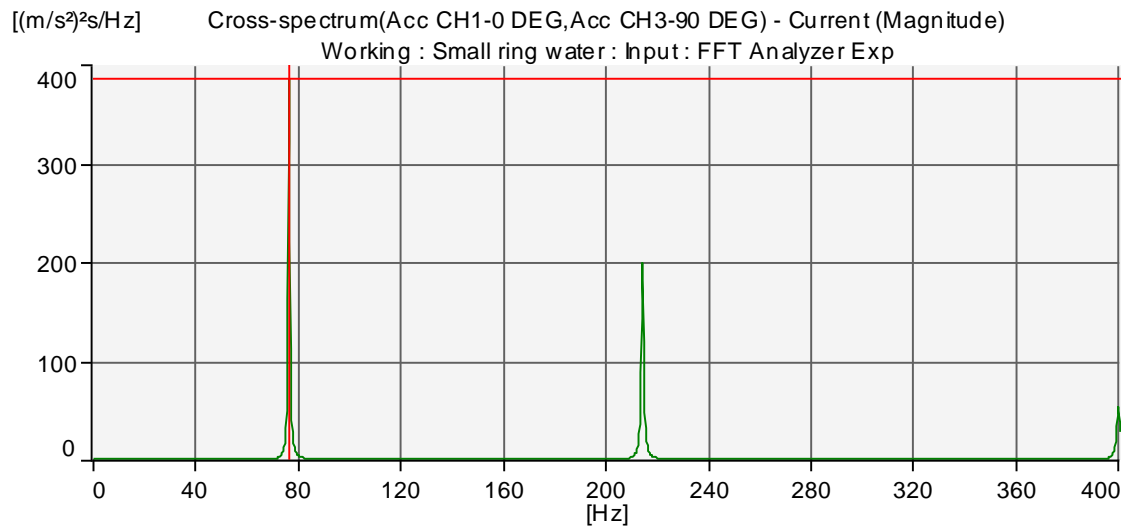
Magnitude = 294 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,187 Degree

X = 91,00 Hz

**Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**I vand:**



**Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 385 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 76,25 Hz

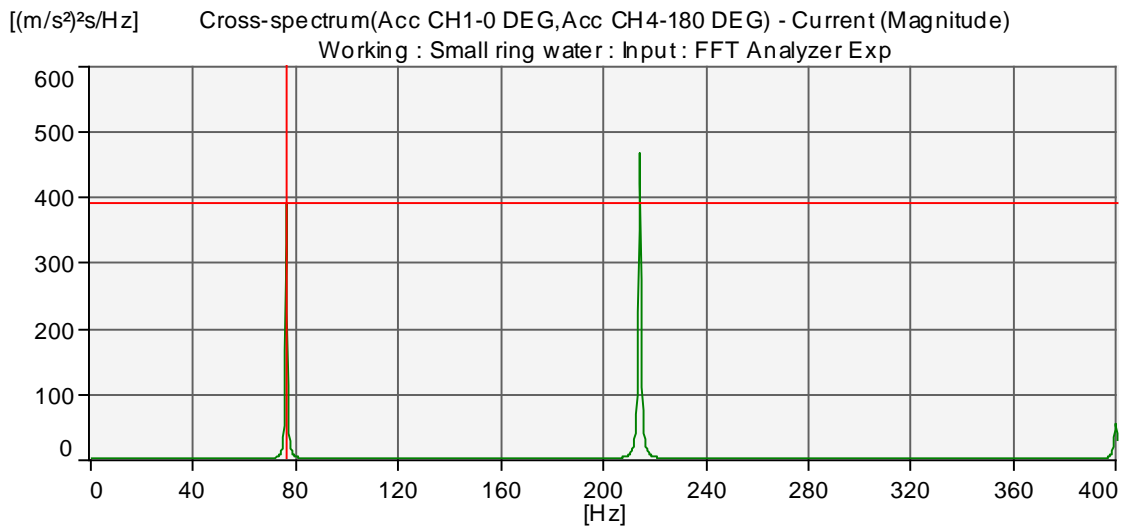
**Magnitude(Lin) & P hase**

Magnitude = 385 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 76,25 Hz

**Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**



**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 390 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 76,25 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

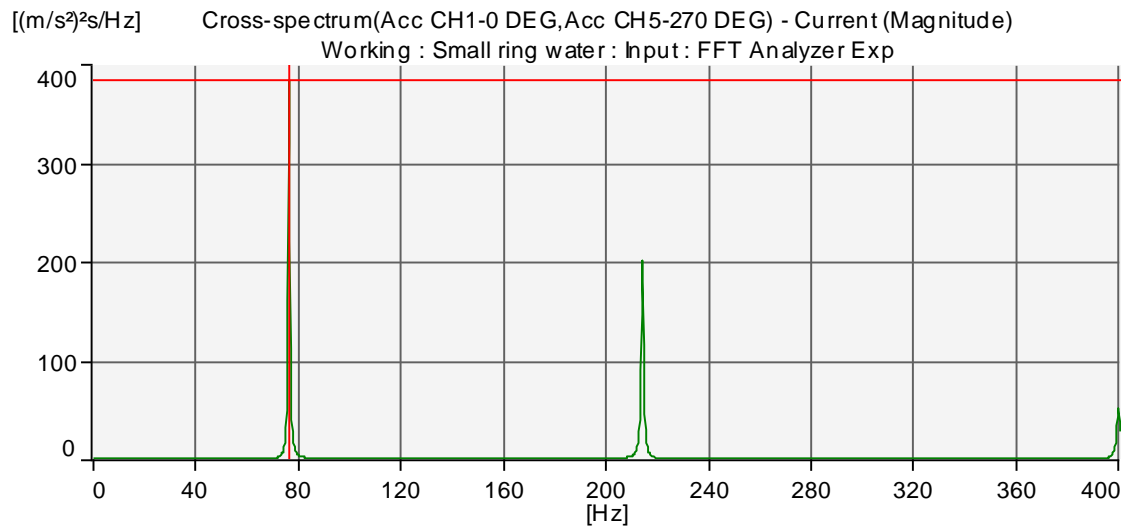
Magnitude = 390 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,532 Degree

X = 76,25 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**





**Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 384 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 76,25 Hz

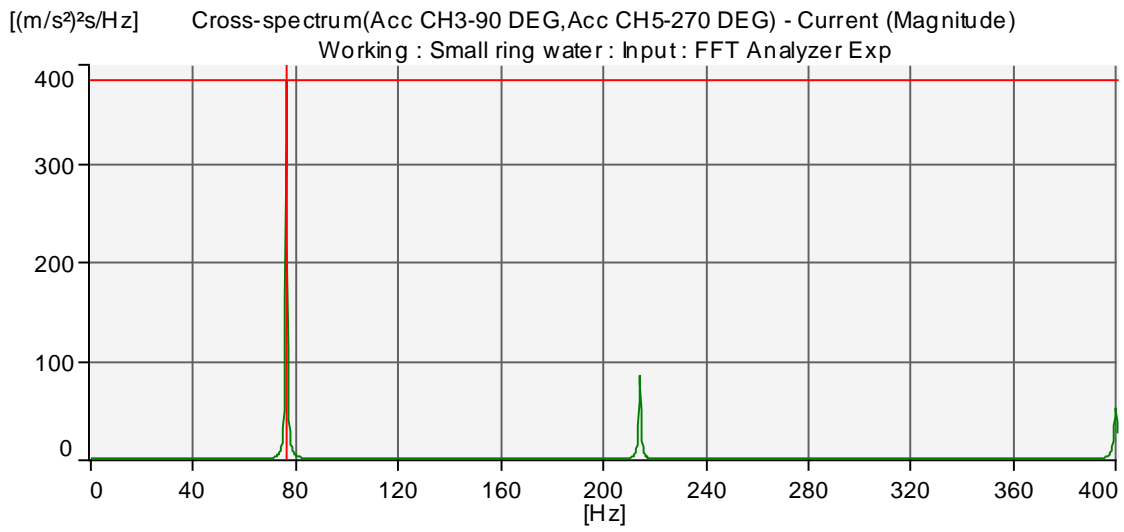
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 384 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 76,25 Hz

**Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**



**Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 384 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 76,25 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 384 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

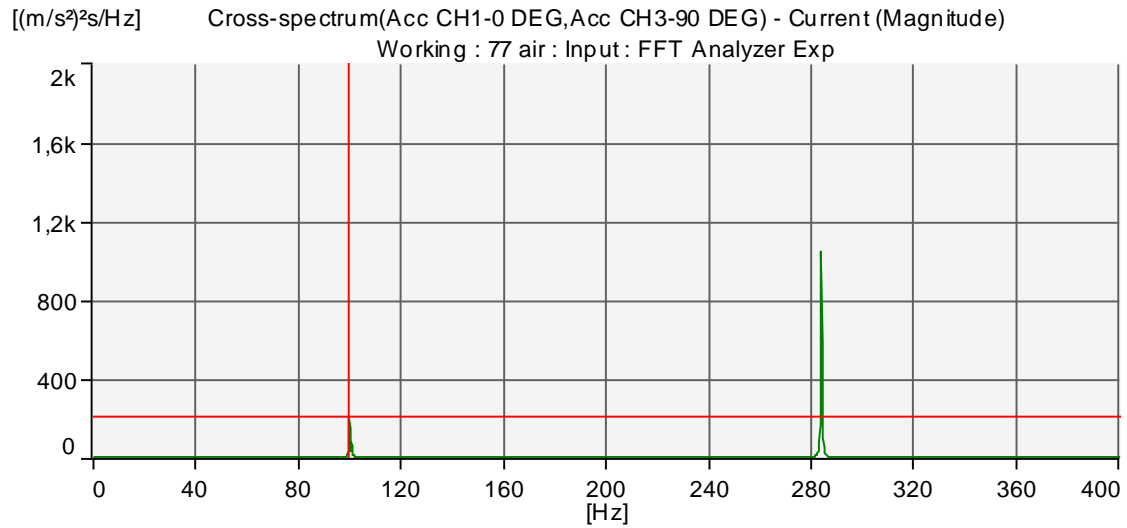
Phase = 0,370 Degree

X = 76,25 Hz

**Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Resultater for forsøgsemne med L=0,077m:**

**I luft:**



**Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**

**Cursor Value s**

Y = 207 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 99,75 Hz

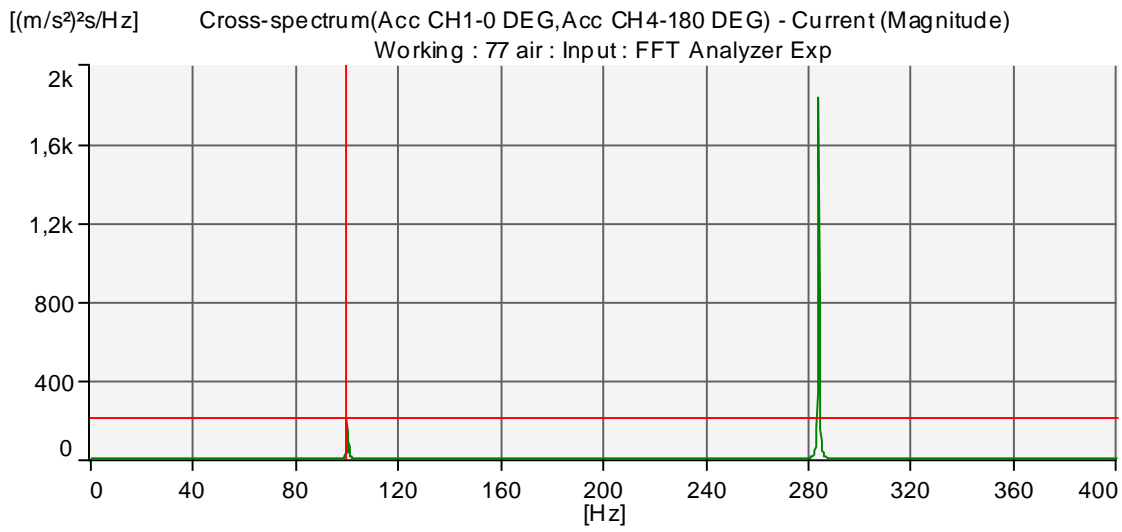
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 207 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 99,75 Hz

**Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**



**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 206 (m/s²)²s/Hz

X = 99,75 Hz

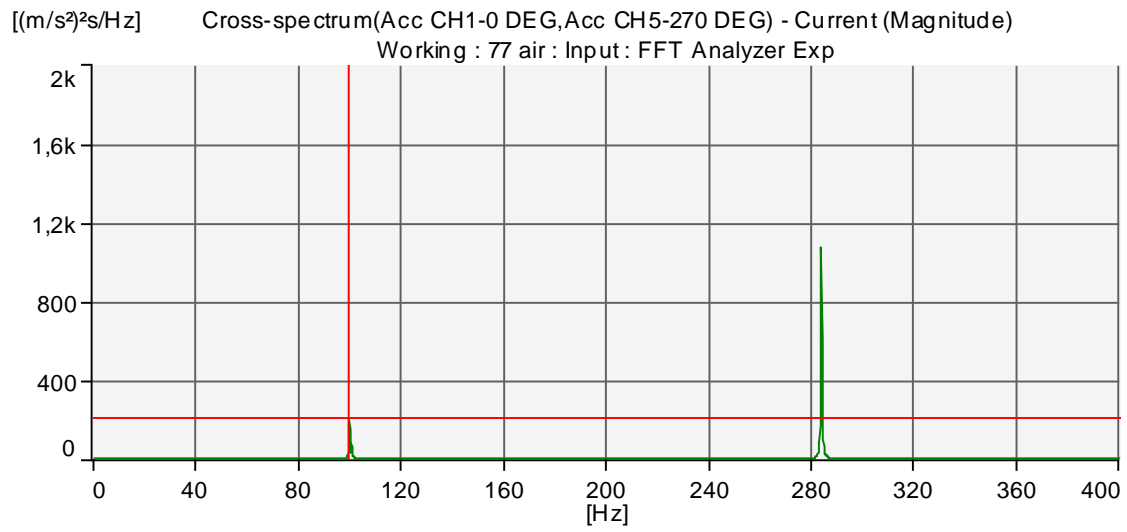
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 206 (m/s²)²s/Hz

Phase = -0,352 Degree

X = 99,75 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**



**Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 206 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 99,75 Hz

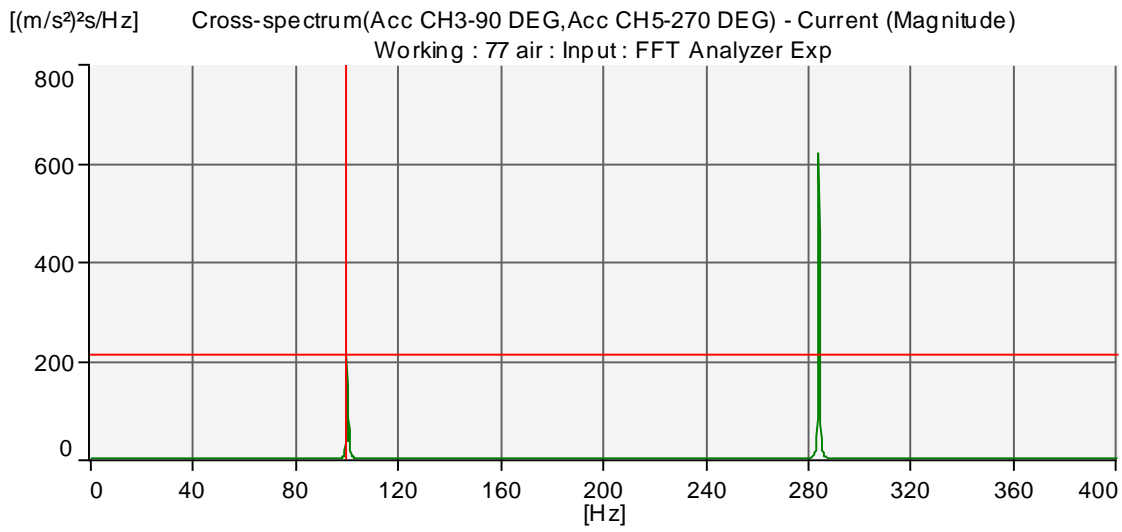
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 206 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 99,75 Hz

**Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**



**Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 210 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 99,75 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

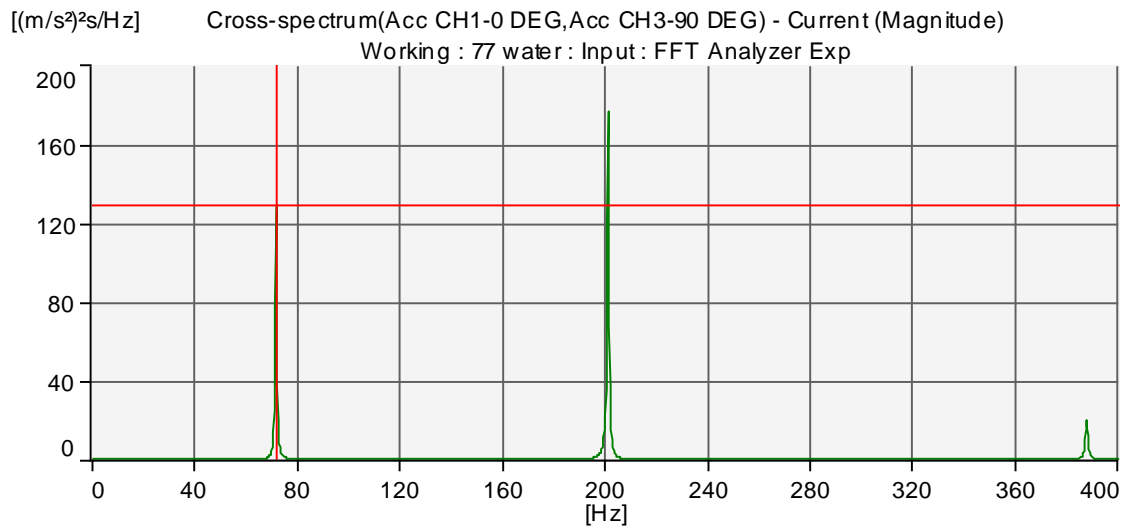
Magnitude = 210 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,0771 Degree

X = 99,75 Hz

**Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**I vand:**



**Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 128 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 71,50 Hz

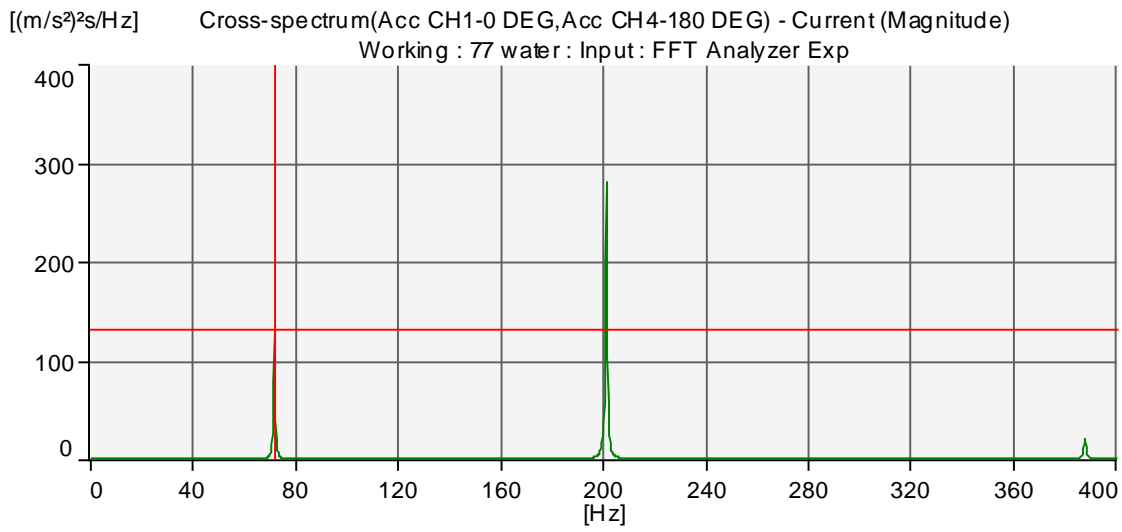
**Magnitude(Lin) & P hase**

Magnitude = 128 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 71,50 Hz

**Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**



**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 130 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 71,50 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 130 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,810 Degree

X = 71,50 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**



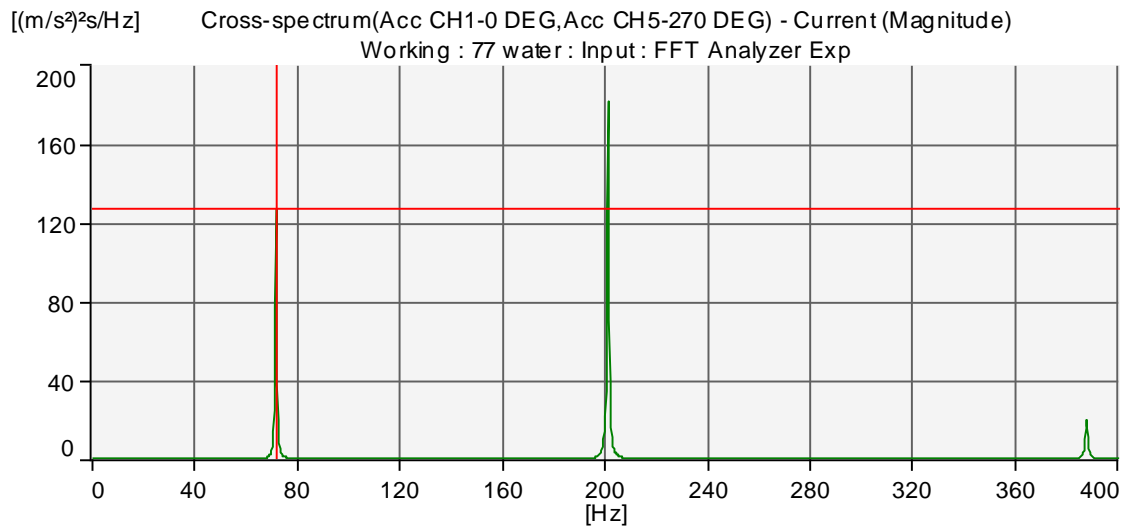


Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current

**Cursor Values**

Y = 127 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 71,50 Hz

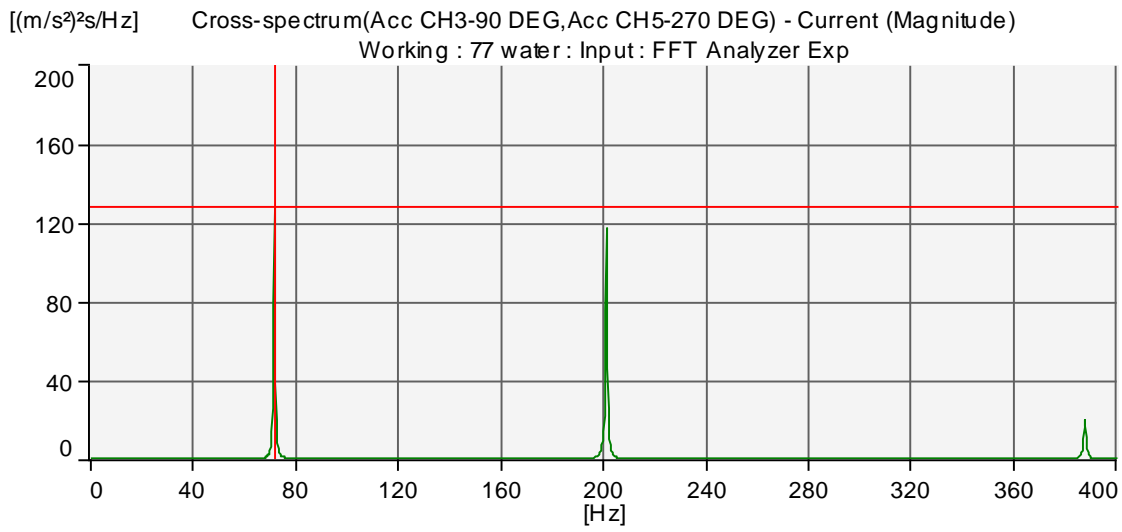
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 127 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 71,50 Hz

Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current



**Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 127 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 71,50 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 127 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

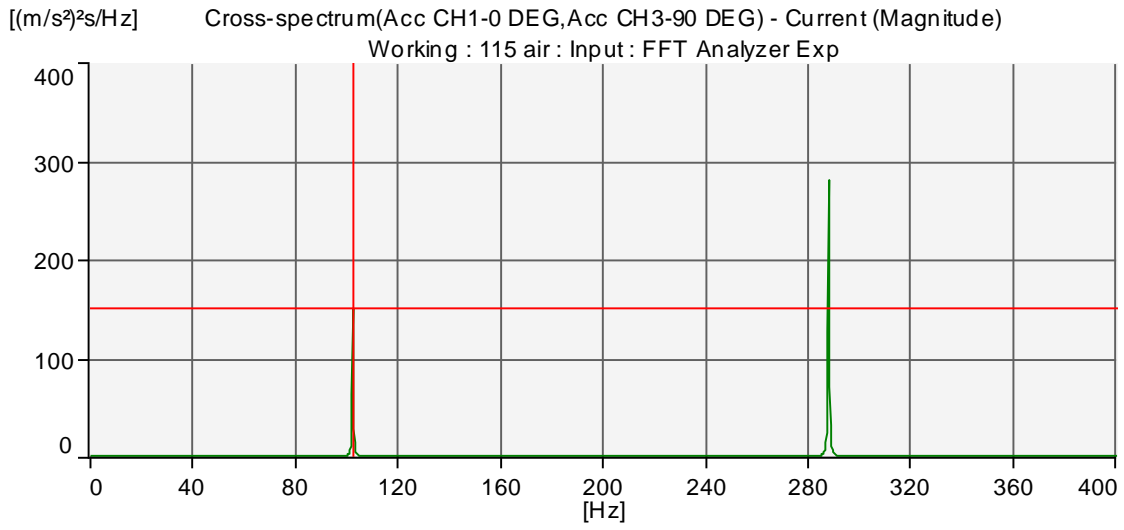
Phase = -0,0578 Degree

X = 71,50 Hz

**Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Resultater for forsøgsemne med L=0,115m:**

**I luft:**



**Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 150 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 102,3 Hz

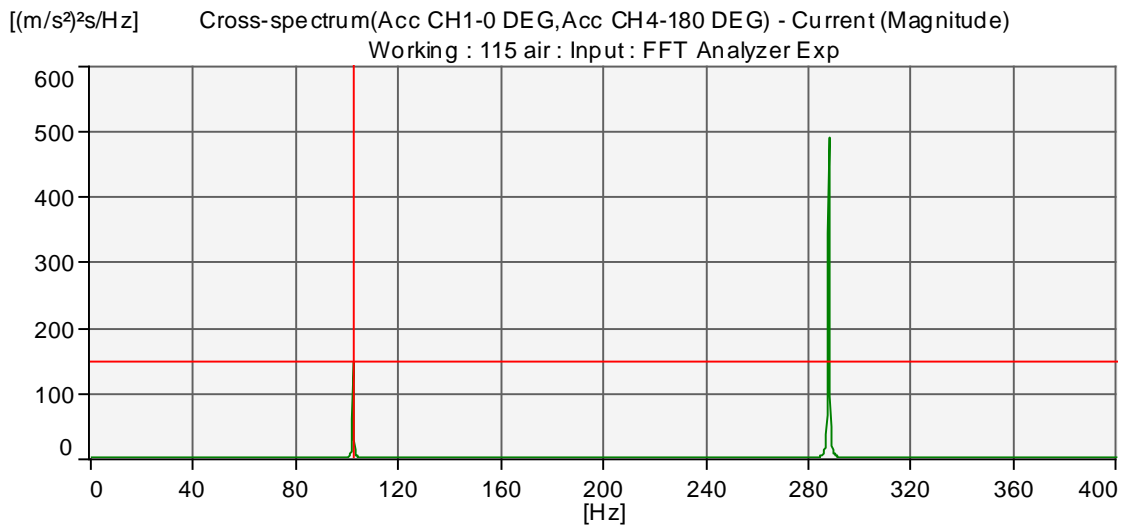
**Magnitude(Lin) & P hase**

Magnitude = 150 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 102,3 Hz

**Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**



**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 146 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>/Hz

X = 102,3 Hz

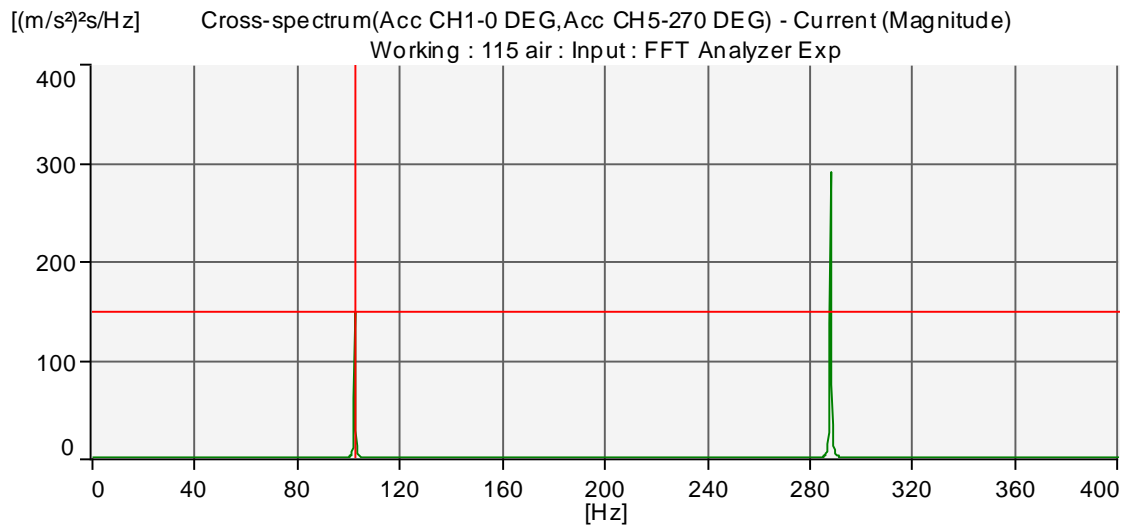
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 146 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>/Hz

Phase = -0,246 Degree

X = 102,3 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**



**Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 148 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 102,3 Hz

**Magnitude(Lin) & P hase**

Magnitude = 148 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 102,3 Hz

**Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

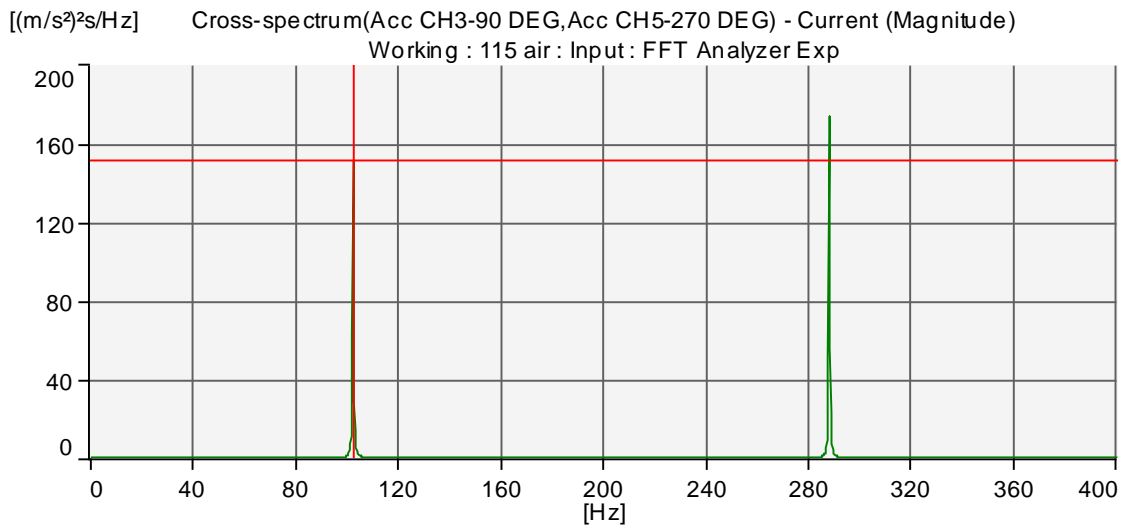


Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current

**Cursor Values**

Y = 151 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 102,3 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 151 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,0860 Degree

X = 102,3 Hz

Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current

Det næste plot er for trekant mode for L=0,115m

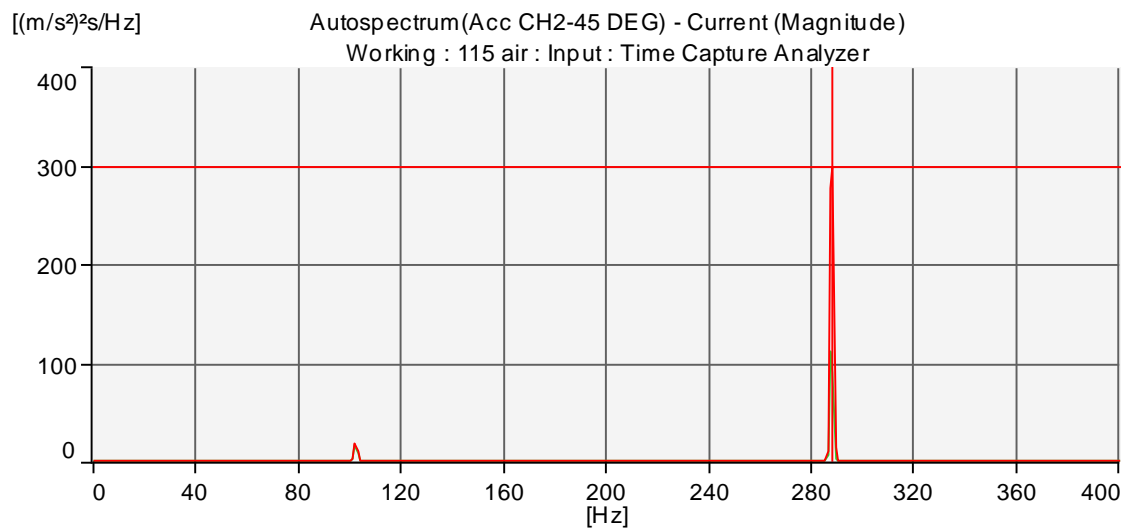


Figure 1: Autospectrum(Acc CH2-45 DEG) - Current

**Cursor Values**

Y = 297 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 288,0 Hz

Z = 867,2m s

**Corrected Frequency**

X = 287,53 Hz

Y = 597 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>

**Total**

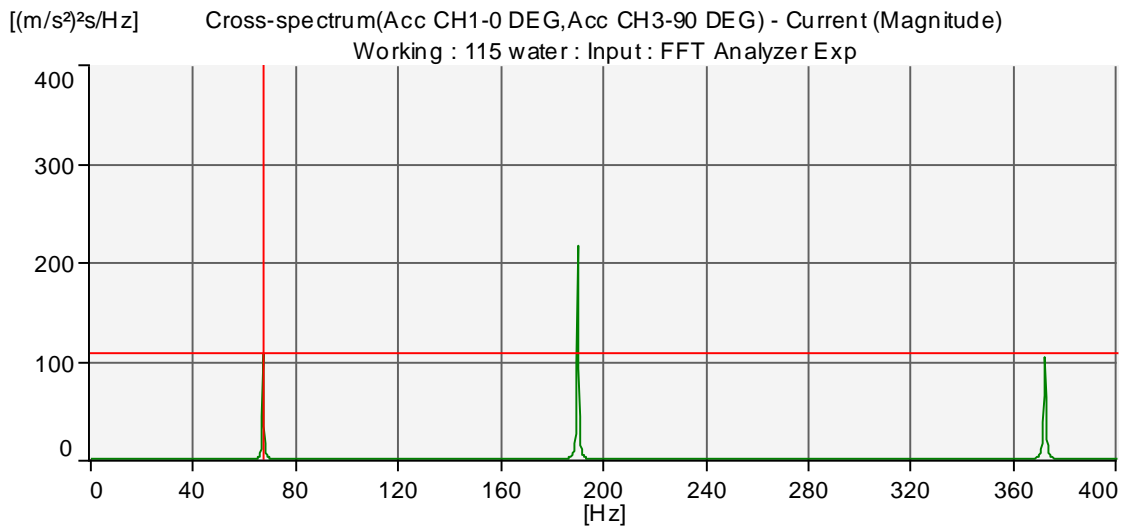
Sum = 633(m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup> s

**Status**

03-12-2008 09:41:33.414

Figure 2: Cursor for Autospectrum(Acc CH2-45 DEG) - Current

**I vand:**



**Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 107 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 67,00 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

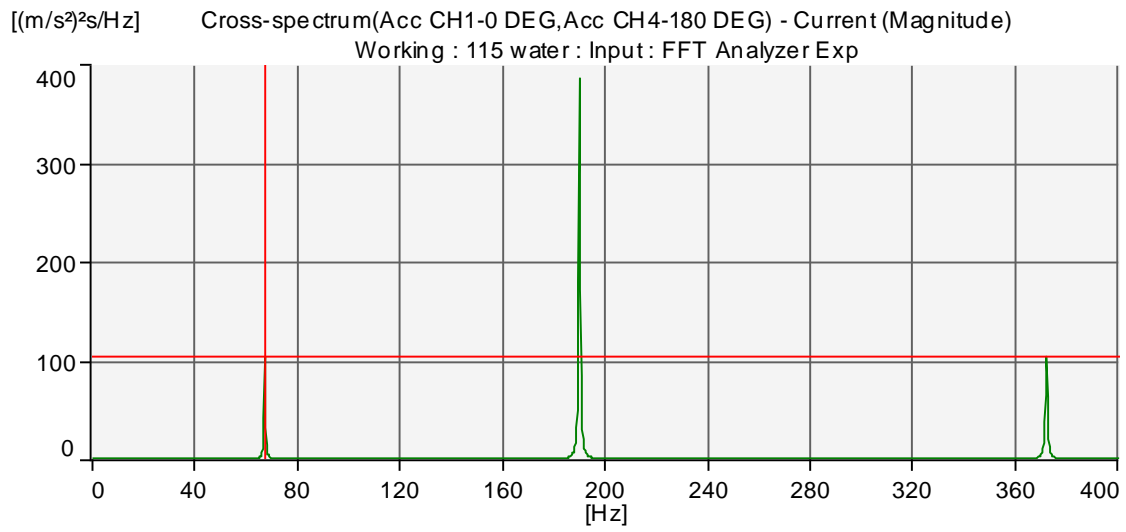
Magnitude = 107 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 67,00 Hz

**Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**





**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 103 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 67,00 Hz

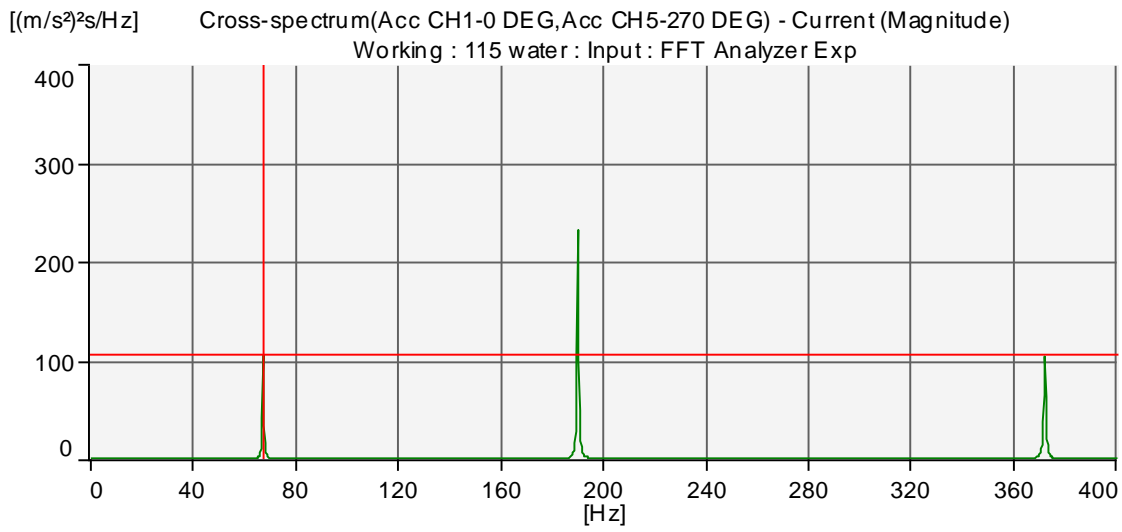
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 103 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,560 Degree

X = 67,00 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**



**Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 105 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 67,00 Hz

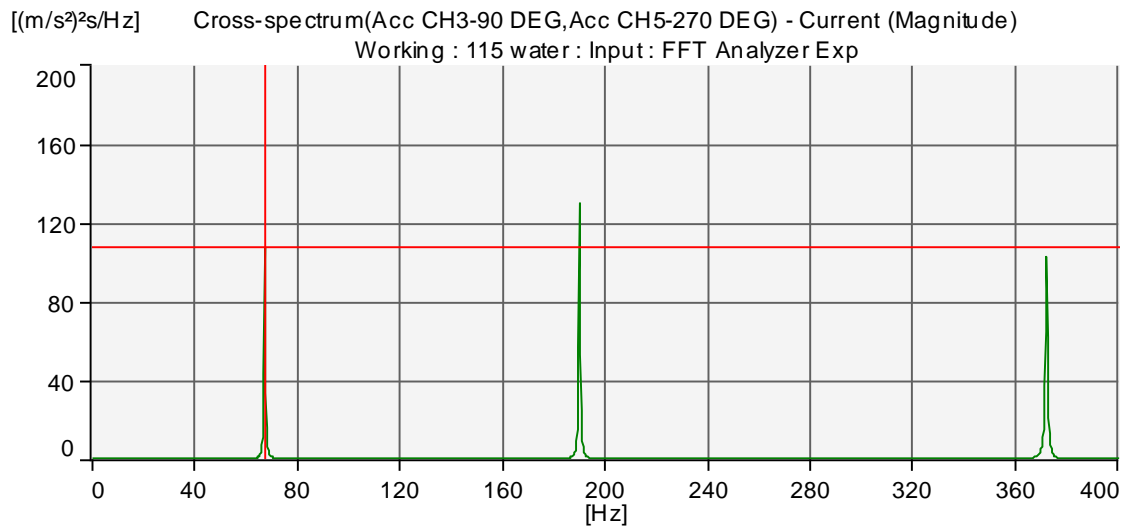
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 105 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 67,00 Hz

**Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**



**Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 107 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 67,00 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 107 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,0597 Degree

X = 67,00 Hz

**Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

Det næste plot er for trekant mode i vand for L=0,115m

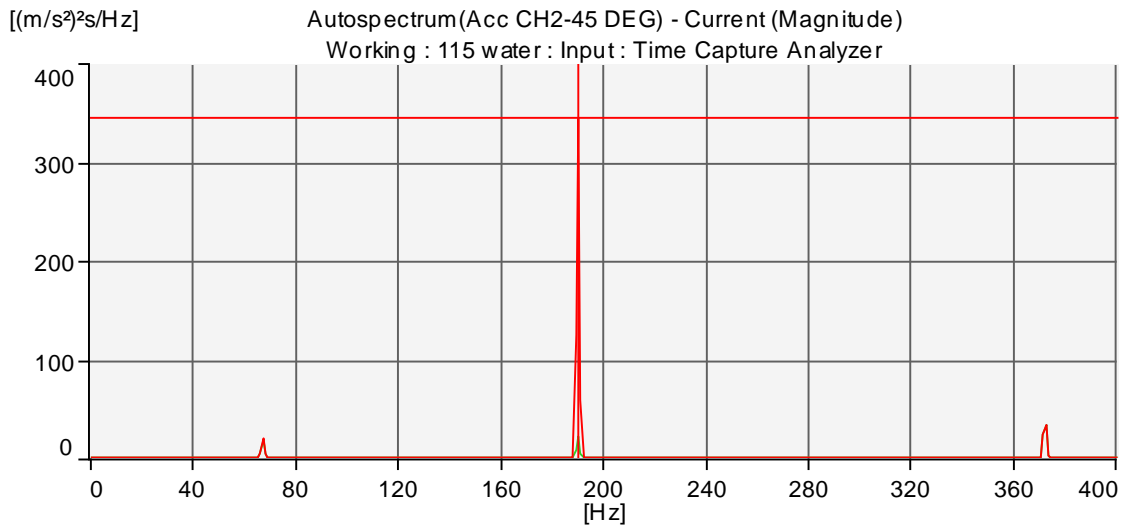


Figure 1: Autospectrum(Acc CH2-45 DEG) - Current

**Cursor Values**

Y = 344 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 190,0 Hz

Z = 867,2m s

**Corrected Frequency**

X = 189,87 Hz

Y = 527 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>

**Total**

Sum = 623(m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup> s

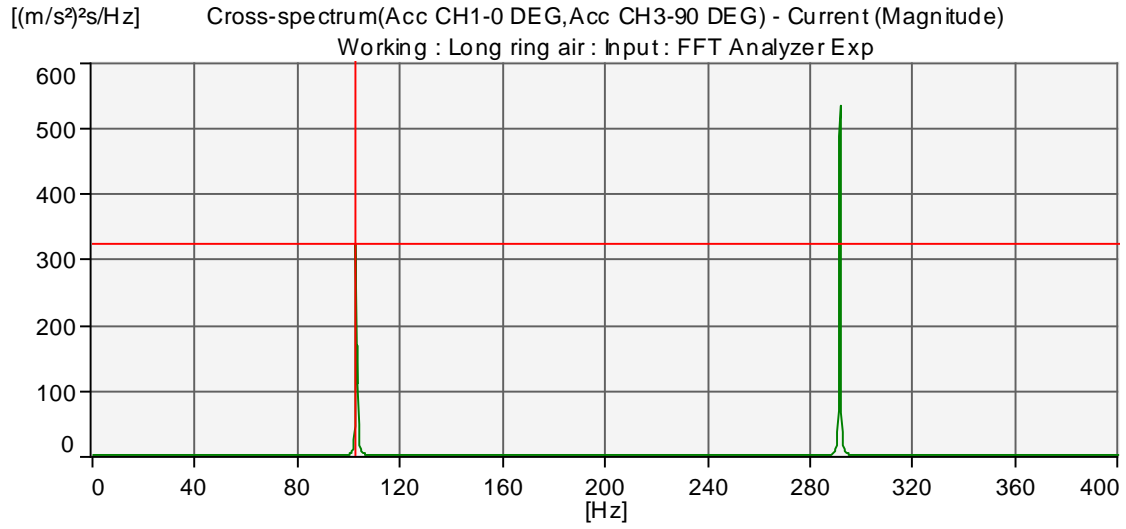
**Status**

03-12-2008 09:47:04.266

Figure 2: Cursor for Autospectrum(Acc CH2-45 DEG) - Current

**Resultater for forsøgsemne med L=0,195m:**

**I luft:**



**Figure 7: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 322 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 102,8 Hz

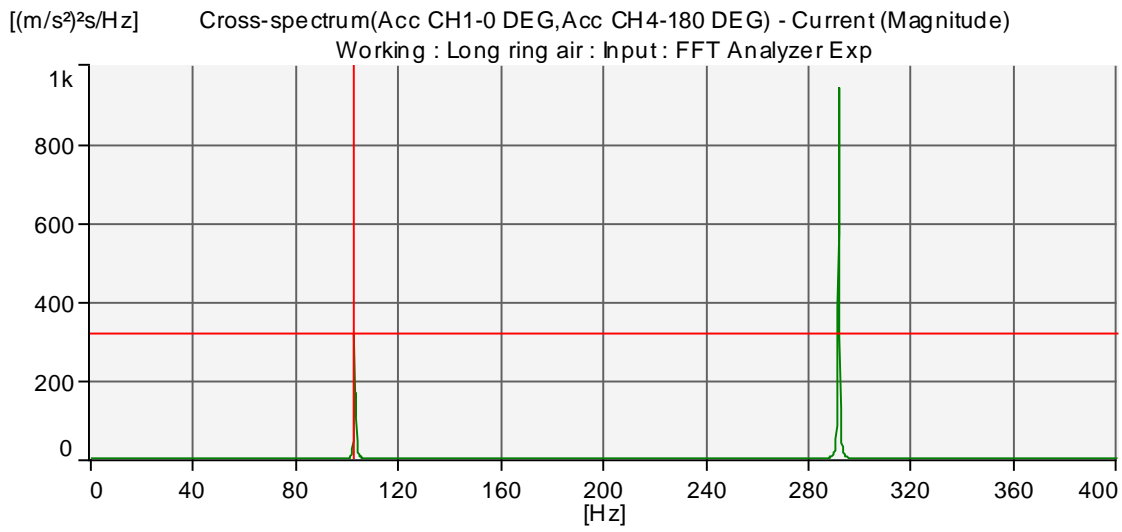
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 322 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 102,8 Hz

**Figure 8: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH3-90 DEG) - Current**



**Figure 9: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 316 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 102,8 Hz

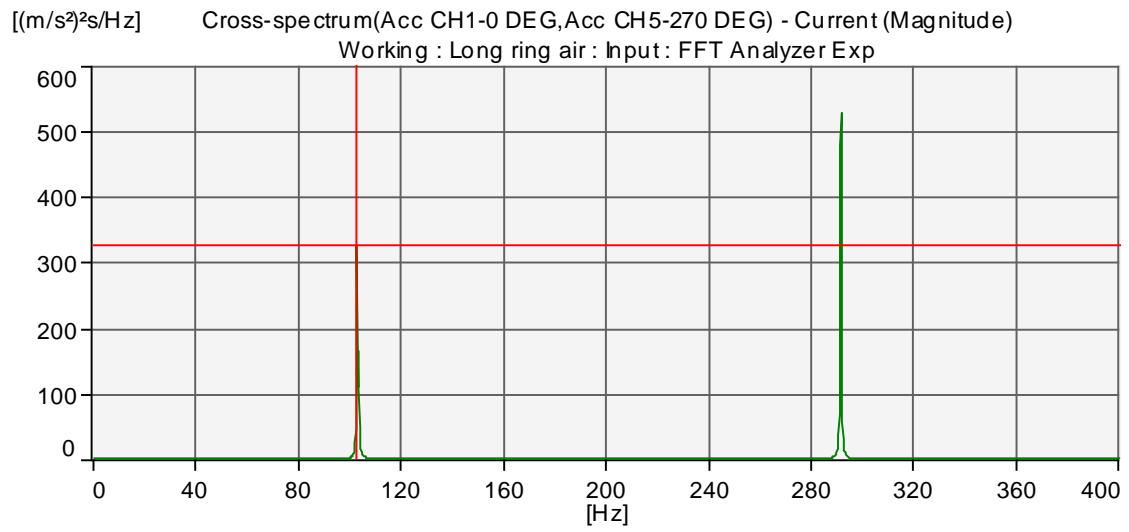
**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 316 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

Phase = -0,406 Degree

X = 102,8 Hz

**Figure 10: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH4-180 DEG) - Current**



**Figure 11: Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 325 (m/s²)²s/Hz

X = 102,8 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 325 (m/s²)²s/Hz

Phase = 180 Degree

X = 102,8 Hz

**Figure 12: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH1-0 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current**

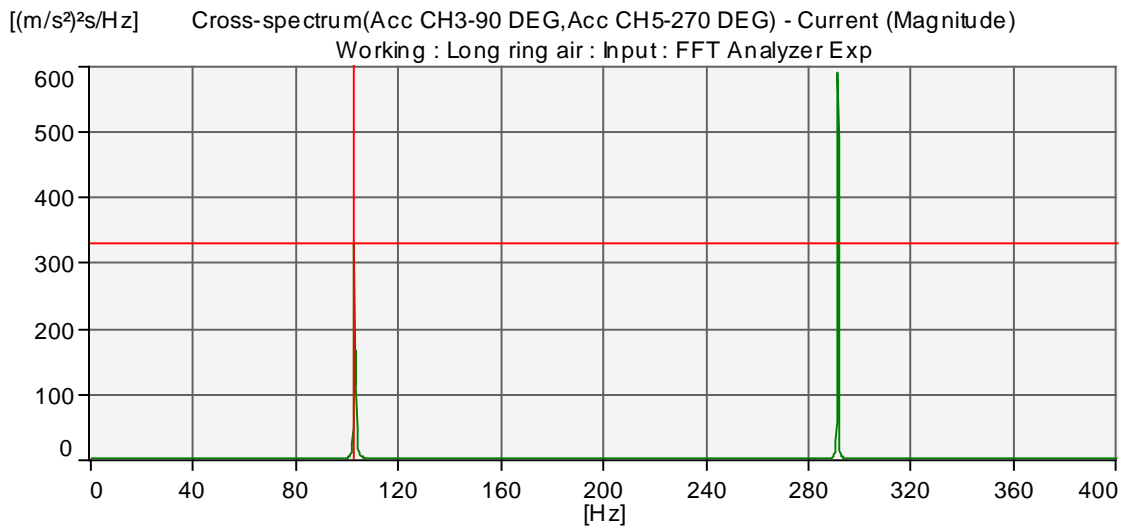


Figure 13: Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current

**Cursor Values**

Y = 329 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 102,8 Hz

**Magnitude(Lin) & Phase**

Magnitude = 329 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

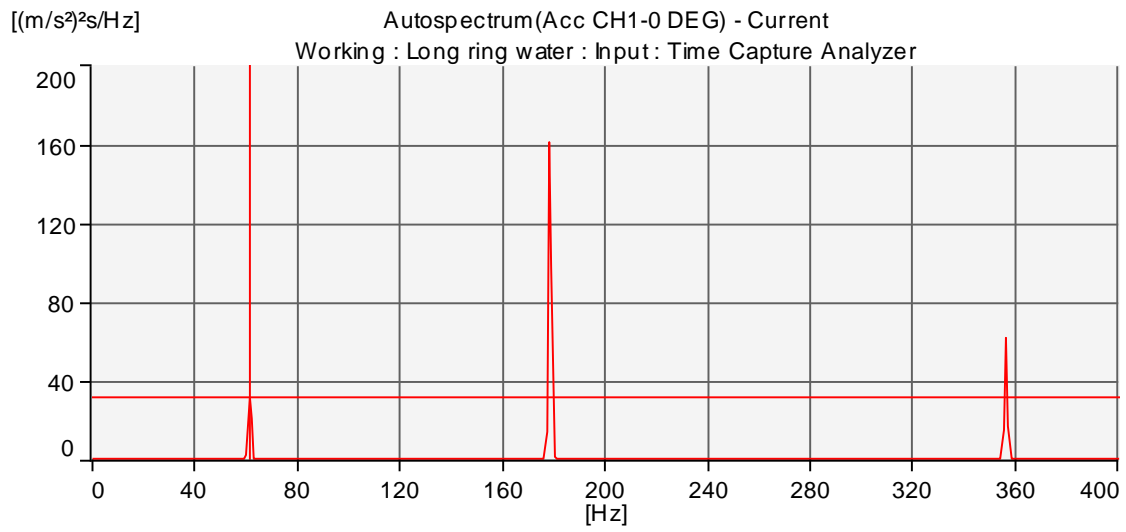
Phase = 0,371 Degree

X = 102,8 Hz

Figure 14: Cursor for Cross-spectrum(Acc CH3-90 DEG,Acc CH5-270 DEG) - Current



**I vand:**



**Figure 1: Autospectrum(Acc CH1-0 DEG) - Current**

**Cursor Values**

Y = 31,9 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>s/Hz

X = 61,00 Hz

Z = 837,9m s

**Corrected Frequency**

X = 61,342 Hz

Y = 55,6 (m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup>

**Total**

Sum = 424(m/s<sup>2</sup>)<sup>2</sup> s

**Status**

18-11-2008 09:49:46.479

**Figure 2: Cursor for Autospectrum(Acc CH1-0 DEG) - Current**



## Kildeliste

ANSYS, I. (2007). *Acoustic Fluid Fundamentals*.

Blevins, R. D. (1984). *Applied Fluid Dynamics Handbook*. Van Nostrand Reinhold Co., Inc.

Blevins, R. D. (1990). *Flow-Induced Vibration 2. Edition*. Krieger Publishing Company.

Cyl. *Cyl.mac*. Makro-fil, findes på den vedlagte CD under mappen "Makro-filer".

FD3630SUB. *FD3630SUB.db*. ANSYS-fil, ligger på den vedlagte CD under mappen "FD3630x0.4".

FD3630x0.4. *FD3630x0.4.db*. ANSYS-fil, ligger på den vedlagte CD under mappen "FD3630x0.4".

Kreuzig, E. (2006). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc.

Pierce, J. (1974). *Almost all about waves*. MIT Press.

Rayleigh, J. (1945). *The Theory of Sound II*. Dover Publications, Inc.

RFI. *RFI.m*, Matlab-kode til beregning af egenfrekvens af en ring i vakuum. Ligger på den vedlagte CD under "Matlab"-mappen.

RFIU. *RFIU.m*, Matlab-kode til beregning af egenfrekvens af en ring i vand. Ligger på den vedlagte CD under "Matlab"-mappen.

Ring. *Ring.mac*. Makro-fil, findes på den vedlagte CD under mappen "Makro-filer".

Ring42. *Ring42.mac*. Makro-fil, findes på den vedlagte CD under mappen "Makro-filer".

SDyse. *Ring42.mac*. Makro-fil, findes på den vedlagte CD under mappen "Makro-filer".

Shames, I. H. (1991). *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. Taylor and Francis.

Sinha et. al, J. K. (2002). Added mass and damping of submerged perforated plates.

Sorokin, S. V. (2006). *An Introduction To The Theory Of Wave Propagation In Elastic Cylindrical Shells Filled With An Acoustic Medium*.

Sorokin, S. V. (1995). *Introduction to Structural Acoustics*. Institut for maskinteknik, Aalborg Universitet.

Sorokin, S. V. (2005). *Lecture notes on Machine Acoustics*.

SRFI. *SRFI.m*, Matlab-kode til beregning af egenfrekvens af en dyse i vakuum. Ligger på den.

SRVIU. *SRVIU.m*, Matlab-kode til beregning af egenfrekvens af en ring i vakuum og vand samt masse-forøgelses-faktor, med dimensioner svarende til den ævivalente dyse. Ligger på den vedlagte CD under "Matlab"-mappen.

Ugural. (2003). *Advanced Strength and Applied Elasticity 4. Ed.* Prentice Hall Professional Technical Reference.

Ugural, A. C. (2003). *Advanced Strength and Applied Elasticity 4. Ed.* Prentice Hall Professional Technical Reference.