

Title: *Analysis of Dynamic Response of Light*House*

Based on Aerodynamic Modeling of Windloads

Theme: *Long Master Thesis*

Duration of project: *September 1st 2007 – June 11th 2008*

Project group: *B201*

Synopsis:

Participants:

Per Kjærsgaard Andersen

Phu Do Tran

Supervisors:

Lars Andersen

Jesper Winther Stærdahl

Copies: 5

Main thesis – number of pages: 121

Appendix – number of pages: 27

Finished: *June 10th 2008*

In this project the dynamic response of Light*House due to wind loads has been investigated. This includes the modeling of the carrying and stabilizing structure, the ground and the wind load.

The structure is modeled by means of the finite element method. First a beam representation based on Bernoulli Euler finite elements is introduced. This model has been programmed by the project group itself and can to a large extent be configured to represent a given three-dimensional structure. In this regard it has been investigated what the influence of the mass modeling of the floor decks is in terms of lumped masses versus equally distributed masses. After this the structure has been modeled by means of plate finite elements in Abaqus where eigenmodes and –frequencies has been determined. This model is introduced in order to explore what the more realistic plate model means to the results in terms of stiffness and mass distribution.

The windload has been modeled by means of two different approaches. First the main purpose has been to introduce a load model which is directly dependent on the response of the structure. The choice of load model is the Wake model, which has been developed to predict forces caused by current on offshore pipelines. Therefore this model has little physical justification for high rise buildings like Light*House. After this a two-dimensional CFD model has been used to investigate how different physical aspects influence the load series on the structure. Here it has been explored which main components the windload consists of. This has been done for both a circular crosssection and a parallelogram. The results of these analyses has been calibrated to mathematical expressions and implemented in the computer program developed by the project group.

The interaction between the structure and the ground has been modeled infinitively stiff. After this it has been attempted to implement the so-called Lumped Parameter Model which models the impedance of the ground by means of discrete mechanical systems. Unfortunately this has not been achieved due to lack of time in the last days of the project period. The documentation of the theories used in LPM has been included in the thesis, however.

The photos used on the front and back pages of the thesis has been taken from www.lighthouse-arhus.dk.

Titel: *Dynamisk responsanalyse af Light*House på baggrund af aerodynamisk modellering af vindlast*

Tema: *Langt afgangsprøje*

Projektperiode: *1. september 2007 – 11. juni 2008*

Projektgruppe: *B201*

Synopsis:

Deltagere:

Per Kjærsgaard Andersen

Phu Do Tran

Vejledere:

Lars Andersen

Jesper Winther Stærdahl

Oplagstal: *5*

Rapport - sideantal: *121*

Appendiks - sideantal: *27*

Afsluttet: *10. Juni 2008*

I dette projekt er det dynamiske respons af højhuset Light*House som følge af vindlast undersøgt. Dette omfatter modellering af såvel den bærende og stabiliserende konstruktion, den underliggende jord og vindlasten.

Konstruktionen er gennem hele projektet modelleret vha. finite element metoden. Først indføres en bjælkepræsentation bestående af Bernoulli Euler bjælkeelementer. Denne model er programmeret af gruppen selv, og kan i vidt omfang konfigureres, så den kan modellere en given bjælkekonstruktion i rummet. Det er i forbindelse med strukturmodelleringen undersøgt, hvilken betydning det har for responset, om massen fra etagedækkene påsættes som punktlaster eller som en jævnt fordelt last over kernen. Efterfølgende er konstruktionen modelleret vha. en plade-skivemodel i Abaqus, hvor der er gennemført en systemanalyse angående egensvingsformer og –frekvenser. Denne undersøgelse skal klarlægge, hvilken betydning det har, at kunne modellere konstruktionen mere præcist mht. stivhed og massefordeling.

Vindlasten er modelleret vha. to forskellige modeller. Først har det været ønsket at implementere en lastmodel, som er direkte afhængig af konstruktionsresponset uden særlig hensyntagen til modellens fysiske berettigelse. Dette er foretaget med den såkaldte Wakemodel, som er udviklet med henblik på estimering af strømkræfter på offshore rørledninger. Efterfølgende er der foretaget et parameterstudie af relevante fysiske størrelsesindflydelse på vindlasten vha. en 2d CFD-analyse foretaget i ANSYS CFX. Heri er det identificeret, hvilke hovedkomponenter lastsignalet består af, og hvad disse afhænger af. Denne undersøgelse er foretaget for både et cirkulært referencetværsnit og det faktiske, parallelogramformede tværsnit. Resultatet fra analysen er herefter implementeret i gruppens beregningsprogram.

Bygningens interaktion med jorden er først modelleret uendelig stiv, hvorefter der er forsøgt indført den såkaldte Lumped Parameter Model, som vha. diskrete mekaniske systemer kalibreret efter jordens frekvensafhængige stivhed, udgør en jordmodel med kun ringe beregningsbyrde. Dette er imidlertid ikke lykkedes grundet tidspres i projektets slutfase. Dog er det tilhørende teori afsnit omkring LPM medtaget i rapporten.

Forord

Denne rapport er resultatet af et langt afgangsprøveprojekt udarbejdet i perioden 1. september 2007 - 11. juni 2008 på Aalborg Universitet af gruppe B201. Rapporten henvender sig til læsere med et grundlæggende kendskab til overbygning indenfor ingeniørfaget konstruktion.

Projektmateriale består af en rapport med efterfølgende appendiks samt en cd-rom. I rapporten præsenteres forudsætninger, der ligger til grund for de anvendte teorier og modeller. Desuden indeholder rapporten resultater af analyser og undersøgelser. I appendiks findes udvalgte grundlæggende teori afsnit som der løbende bliver henvist til. CD-rom'en kan benyttes efter behov, og er ikke nødvendig for den samlede forståelse af rapporten.

PC-programmerne MATLAB, ANSYS CFX og ABAQUS er anvendt til at udføre beregninger og simuleringer. Alle programfiler, som er udarbejdet i disse programmer i forbindelse med projektet, er vedlagt på CD-rommen. CD-rommen er organiseret i hovedmapperne **HOVEDRAPPORT**, **APPENDIKS**, **MATLAB-FILER**, **CFX-FILER** og **ABAQUS-FILER**. Ved reference til programfiler skrives filens navn med en anden typografi. Følgende er et eksempel på en sådan skrivemåde: **BJMODEL**.

Litteraturlisten er placeret bagerst i rapporten. Litteraturhenvisninger er fortaget efter Harvardmetoden på formen (fortatter, årstal). Figurer og tabeller er nummereret fortløbende i hvert kapitel, og er ledsaget af forklarende tekst.

Indhold

INDLEDNING	7
1.1 PROJEKTFOKUS	8
1.2 RAPPORTENS 2 FASER	8
FASE 1	11
KAPITEL 2 INTRODUKTION TIL FASE 1	13
KAPITEL 3 STRUKTUR- OG BJÆLKEMODEL	15
3.1 STRUKTURMODEL	16
3.2 BJÆLKEMODEL	22
3.3 MODALANALYSE	27
KAPITEL 4 LASTMODEL FOR FASE 1	29
4.1 WAKEMODELLEN	29
4.2 IMPLEMENTERING I BJMODEL	32
KAPITEL 5 RESULTATER FOR FASE 1	35
5.1 KONSTANT VINDFELT	36
5.2 FLUKTUERENDE VINDFELT	37
5.3 UNDERSØGELSE AF MASSEMODELLERING	39
KAPITEL 6 PROGRAMOVERSIGT	43
FASE 2	46
KAPITEL 7 FORBEDRET FE-MODEL VED ABAQUS	47
7.2 ANVENDELSE I BJMODEL	50
7.3 RESULTATER	51
KAPITEL 8 FORBEDRET LASTMODEL VED CFD	57
8.1 CFD-MODEL 1 - CYLINDER	58
8.2 CFD-MODEL 2 - PARALLELOGRAM	78
8.3 RESULTATER FRA CFD-SIMULERING	83
KAPITEL 9 IMPLEMENTERING AF CFX-RESULTATER I BJMODEL	85
9.1 RESPONSUNDERSØGELSE FOR CFD LASTMODEL	87
9.2 FLUKTUERENDE VINDFELT	90
9.3 KONKLUSION AF LASTMODEL FRA CFD	94
KAPITEL 10 LUMPED PARAMETER MODELLING	97
10.1 MODELLERING AF FUNDAMENT OG JORD	97
10.2 ALGORITME FOR INTERAKTION MELLEM JORD OG KONSTRUKTION	98

10.3 RESULTATER 107

SAMMENLIGNING **109**

KAPITEL 11 SAMMENLIGNING **111**

11.1 STRUKTURMODEL 111

11.2 LASTMODEL 116

KONKLUSION **119**

LITTERATURLISTE **121**

Indledning

Denne projektrapport koncentrerer sig om en række ingeniørmæssige analyser af Light*House, som med start primo 2008 opføres på Århus havn. Byggeriet placeres hvor der tidligere har været anlagt kontainerhavn. Rådgivende ingeniør på opgaven er Grontmij | Carl Bro, og arkitektarbejdet er forestået af 3XN. Nedenstående skitser viser Light*House set fra vandsiden.



Figur 2.1: Skitse af havnefronten i Århus med Light*House i front (www.lighthouse-aarhus.dk, 2008).

Light*House er vartegnet for en helt ny bydel ved havnefronten i Århus, som det er ambitionen skal udgøre et yderst attraktivt område i Århus, både for private og erhvervslivet. Dette gælder også selve Light*House, som med sine 142 m og 42 etager vil kunne rumme et stort antal private beboelseslejligheder samt kontorlokaler. Herudover vil den øverste etage i bygningen være reserveret til en 'skybar', hvor alle borgere vil få mulighed for at komme op og nyde udsigten over byen. En skitse af denne er vist på figur 2.2 sammen med en illustration af Light*House oplyst om aftenen.

Dette markerer et vigtigt element i etableringen af hele bydelen ved den gamle kontainerhavn: Det er ønsket, at området skal være præget af en bred vifte af såvel erhvervsgrupper som befolkningsgrupper og således danne rammerne om et pulserende aktivitetsudbud. Eksempelvis vil der blive opført et udbud af restauranter og cafeer.



Figur 2.2: Skitse af Skybar'en på øverste etage i Light*House(www.lighthouse-aarhus.dk, 2008).

1.1 Projektfokus

Denne rapport fokuserer på at analysere en række forhold omkring Light*House's respons på lastpåvirkningen fra vinden. Dette medfører, at en række avancerede analysemetoder må tages i brug for at kunne danne sig et realistisk billede af dette på et rent teoretisk basis. Først og fremmest betyder bygningens højde på 142 m i sammenhold med det slanke arkitektoniske udtryk, at det er nødvendigt at betragte struktur-last interaktionen dynamisk, da konstruktionens egenfrekvens herved kan risikere at ligge tæt på vindlastens. Dette kan medføre dramatisk dynamisk forstærkning af lastresponsset i forhold til en statisk betragtning. Derfor koncentrerer en stor del af projektet sig om den matematiske modellering af konstruktionen med henblik på at kunne bestemme lastresponsset. Dette gør sig især gældende hvad programmeringsarbejdet angår.

Som et vigtigt led i en god model for den betragtede konstruktion indgår naturligvis jordens opførsel under de givne belastninger. Dette kan have signifikant indflydelse på bygningens dynamiske respons. Da rapporten ikke fokuserer på geoteknik som sådan, vil der blive anvendt en række matematiske modeller for jordens dynamiske stivhed, som kan kalibreres efter den tilgængelige viden om frekvensresponsspektret for jorden på projektlokaliteten. I det aktuelle tilfælde er jordbundsforholdene så komplekse set fra en ingeniørmæssig synsvinkel, at jordmodellen baseres på et antaget jordprofil. Dog er dette valgt, så det i nogen grad minder om det faktiske. Dette vil sige et mindre lag øverst svarende til et fyldlag, og herunder et større lag med lille stivhed svarende til et yngre lerlag. Alternativt ville jorden kunne modelleres ved eksempelvis en ikke-lineær FE-repræsentation. Dette indebærer imidlertid særdeles store beregningsmængder, idet FE-domænet i så fald skal analyseres for en lang række belastningsfrekvenser fra konstruktionen.

Udfordringen omkring vindlasten består i høj grad af bestemmelsen af interaktionen mellem vinden og konstruktionen. Dette giver anledning til anvendelsen af avancerede numeriske værktøjer, som kan give et billede af, hvilke komponenter vindlasten består af, og hvad de stammer fra.

Sidste del af rapporten præsenterer en række relevante sammenligninger af resultaterne opnået på baggrund af de værktøjer, der udvikles løbende i rapporten. På denne måde kan det verificeres, i hvilket omfang de mere avancerede metoder bibringer ekstra information til problemets løsning.

1.2 Rapportens 2 faser

Det er valgt at inddele rapporten i 2 delfaser, som hver især repræsenterer en sammenhængende del af det fulde projekt. Disse 2 faser beskrives i det følgende.

1.2.1 Fase 1

Det overordnede formål med projektets indledende fase, er at etablere en referencemodel for problemstillingen, som tager udgangspunkt i en række forholdsvis simple modeller. Der programmeres et program i MATLAB, som indeholder moduler til håndtering af såvel en dynamisk strukturanalyse som simple modeller for vindlasten og jordens stivhed.

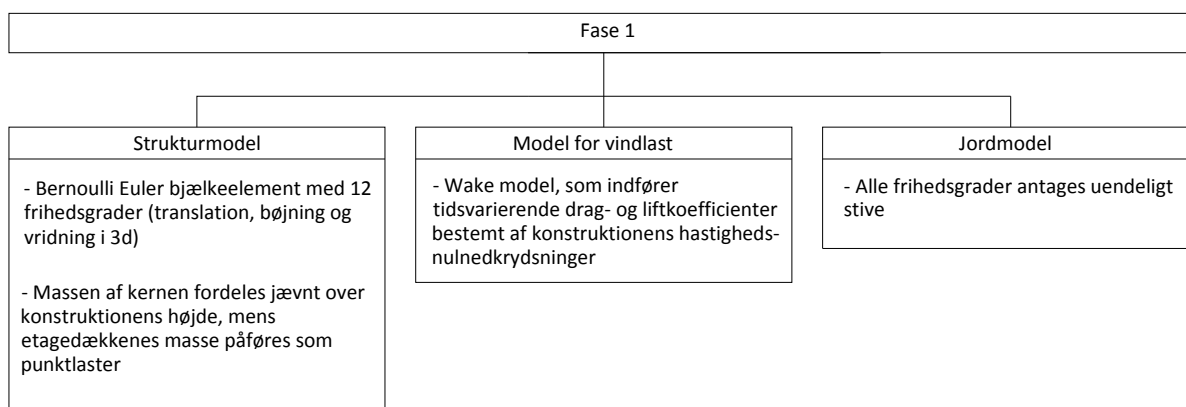
Bjælke modellen programmeres, så den indeholder to hovedmoduler. Dels en simpel finite element model baseret på 3d bjælkeelementer. Dels et modul til bestemmelse af lastresponsen vha. en modalanalyse. Denne opbygning sikrer, at programmet ikke er bundet til den valgte finite element bjælkeformulering, med hvad det indebærer af forsimplinger af den virkelige konstruktion. Ved at løse bevægelsesligningerne i modalform er det forholdsvist let at implementere de nødvendige data fra en mere avanceret finite element model senere. Dette vil i praksis sige modalformer, egenfrekvenser samt de modale systemmatricer for stivhed og masse.

Finite element modellen i fase 1 er baseret på en 3d Bernoulli Euler bjælkeformulering, hvor der er mulighed for en valgfri geometri og diskretisering af konstruktionen. Modellen er i stand til at bestemme egensvingningsformer og -frekvenser. De elastiske bjælkestivhedsparametre samt materialedata angives eksplicit som inputs.

Alle frihedsgrader i overgangen mellem konstruktion og jord modelleres på den simplest tænkelige måde, nemlig som uendeligt stive.

Vindlasten modelleres ved et hastighedsfelt, hvis variation i tid og sted beskrives analytisk. Herudover anvendes den såkaldte Wakemodel til at estimere drag- og liftkræfterne på konstruktionen, hvor begge regnes tidsafhængige (LamBrakos, et al., 1987). Wakemodellen forsøger at beskrive det 'wake' eller hvirvelfelt, der opstår på bagsiden af bygningen, når vinden strømmer forbi denne. Modellen implementeres i fase 1 alene for at etablere en lastmodel, hvor konstruktionens respons har direkte indflydelse på lasten. Rent fysisk har Wakemodellen ikke nogen større berettigelse, da den er udviklet med henblik på estimering af strømkræfter på offshore rørledninger.

Nedenfor er vist en skematisk oversigt over indholdet i fase 1.



1.2.2 Fase 2

Grundlæggende beskæftiger fase 2 sig med de samme problemstillinger som fase 1, dvs. modellering af 'Light*House' respons på vindlasten. Men modellen fra fase 1 forbedres mht. alle tre hoveddele af analysen, dvs. struktur-, last- og jordmodel.

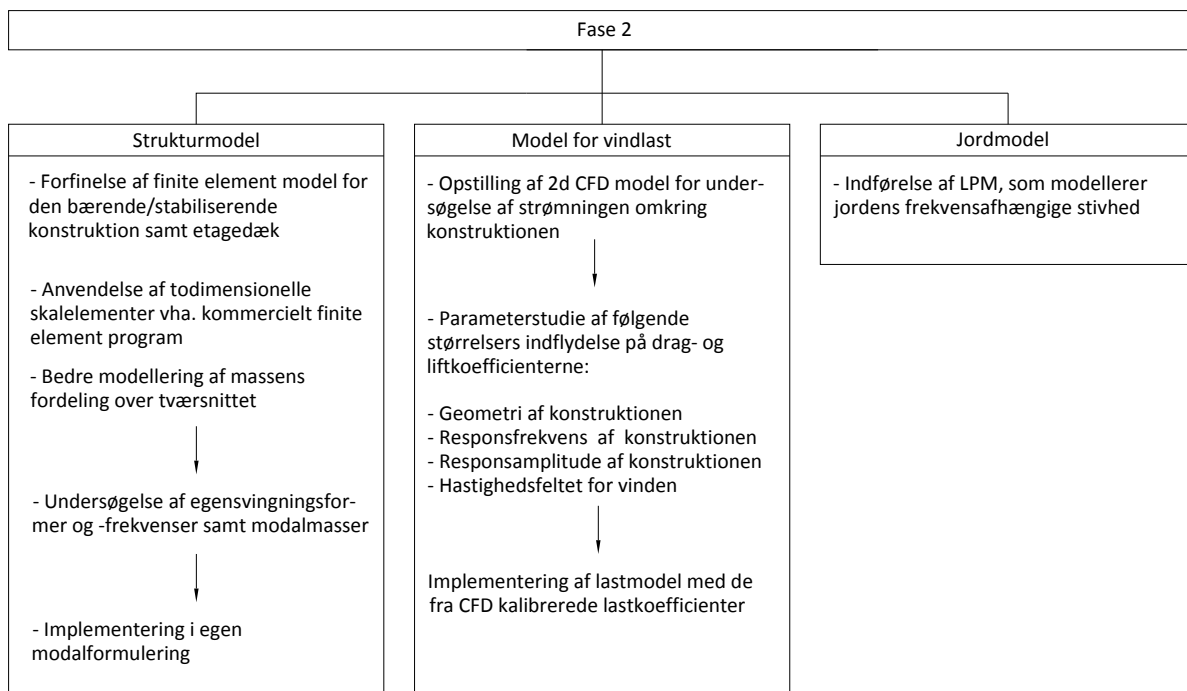
For strukturmodellens vedkommende modelleres den bærende og stabiliserende kerne samt etagedækkene vha. mere avancerede elementtyper. Dette være sig plade- eller skiveelementer. Dette indebærer bl.a. mulighed for en mere realistisk fordeling af massen over kernens tværsnit, og der-

med en bedre modellering af inertikræfterne. Ved at løse for egensvingningsformer, egenfrekvenser samt modalmasser for dette forbedrede system, kan resultaterne heraf implementeres i den programmerede modaldel fra fase 1.

Jordens stivhed som funktion af belastningsfrekvens modelleres vha. en LPM (Lumped Parameter Model), som er en metode til at modellere jordens frekvensafhængige stivhed vha. mekaniske systemer bestående af diskrete fjeder-, masse- og dæmpningselementer. Metoden er dybest set en beregningseffektiv måde at introducere en simpel model kalibreret efter tilgængelige data for jordens frekvensresponspektrum.

Til bestemmelse af drag- og liftkoefficienterne for vindlasten anvendes der i fase 2 2d CFD modelleringer. Her laves der et parameterstudie af en række relevante størrelses indflydelse på drag- og liftkoefficienterne. Herefter kan resultaterne herfra implementeres i en simpel lastmodel, som benyttes i det fremstillede program.

Nedenfor er vist en skematisk oversigt over indholdet i fase 2.



Fase 1

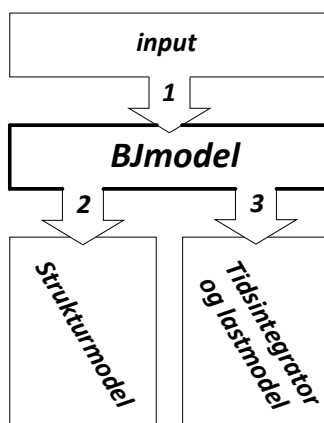
Kapitel 2

Introduktion til fase 1

I dette afsnit følger en kort introduktion til projektets første fase. Som redegjort for i indledningen er formålet med fase 1, at kunne modellere såvel konstruktion, jord og last på et relativt simpelt grundlag. Dette indebærer en FE-model bestående af en af de simpleste elementtyper, nemlig endimensionale Bernoulli Euler bjælkeelementer. Jorden modelleres som uendelig stiv i alle frihedsgrader, mens vindlasten introduceres gennem den såkaldte Wakemodel, som er afhængig af konstruktionens respons. Men da Wakemodellens gyldighedsområde er stærkt begrænset for en konstruktion som Light*House med de givne flowforhold, tjener modellen først og fremmest som en nødvendig del af programmeringsarbejdet i første fase, for at have en komplet last-strukturmodel.

Det er valgt at opbygge et program i MATLAB, **BJMODEL**, hvis grundlæggende opbygning vil gå igen i begge projektets faser. Navngivningen skyldes, at programmet er bygget op omkring en bjælkerrepræsentation af den modellerede konstruktion.

Programmet opbygges, så det består af en hovedfil, **BJMODEL**, som henter langt de fleste inputs fra **INPUT**, hvor brugeren kan definere, hvilken kørsel der ønskes. Herudover kaldes en række funktioner, som der ikke skal redegøres nærmere for her, men som udfører to overordnede opgaver: Først etableres en komplet FE-model for konstruktionen og jorden, hvorefter responset løses i tids-, og frekvensdomænet på grundlag af den løbende lastberegning, som bestemmes iterativt på grundlag af responset. Nedenstående figur viser den overordnede opbygning af **BJMODEL**, samt i hvilken rækkefølge de enkelte moduler kaldes.



Det har været et gennemgående krav **BJMODEL** i fase 1, at det skal kunne modellere bjælkekonstruktioner i en bred forstand, dvs. ikke kun Light*House. Derfor indeholder programmet visse funktioner, som reelt ikke bruges i forbindelse med analyse på dette. Herunder kan nævnes koordinattransformationsmodulet, som først er aktuelt for bjælkekonstruktioner med forskellig orientering af elementerne, samt at det er muligt at påsætte vridende laster, hvilket ikke foretages i det aktuelle tilfælde.

Som et første skridt i modelleringen af Light*House må der foretages en række valg af, hvordan konstruktionen skal modelleres, for at kunne foretage de ønskede analyser omkring struktur-last interaktionen. Dette følger i det kommende afsnit.

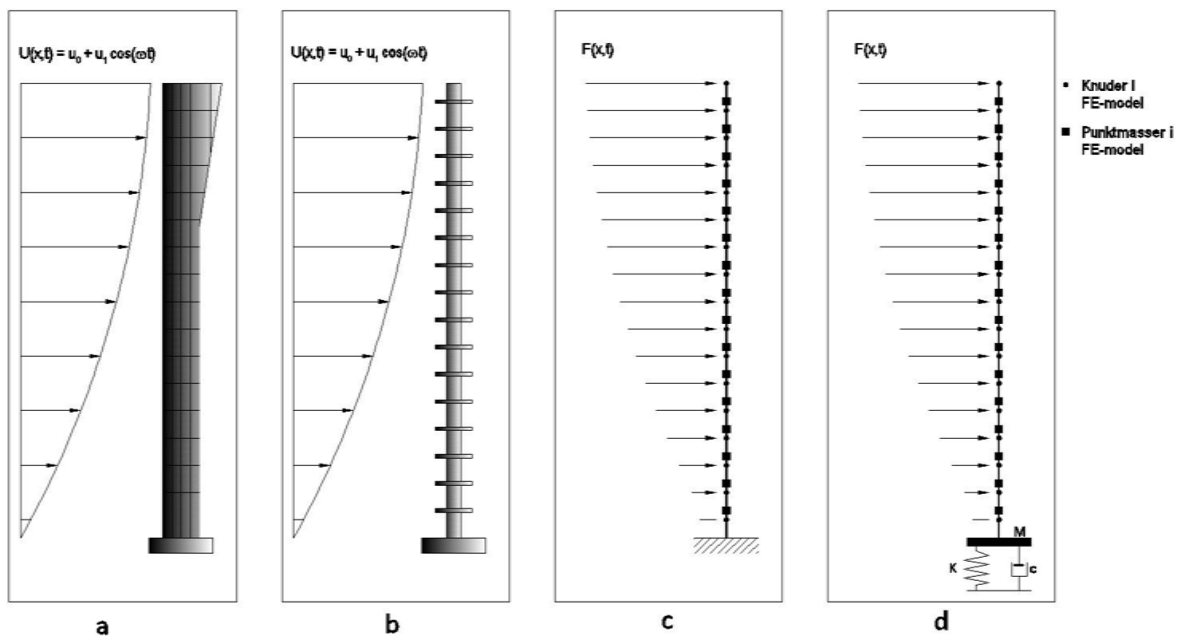
Kapitel 3

Struktur- og bjælkemodel

I dette afsnit beskrives bjælke modellen som benyttes til modellering af bygningen. Som nævnt i indledningen modelleres bygningen i fase 1 vha. af 3d finite element Bernoulli Euler bjælkeelementer. I denne forbindelse skelnes mellem følgende betegnelser

- Strukturmodel – Simplificering af visse strukturelle elementer
- Bjælke model – Matematisk model af strukturelle elementer

Disse to modeller er illustreret på figur 3.1b og c, hvor hhv. struktur- og bjælke modellen er vist.



Figur 3.1: a) Skitse af bygningen påvirket af et fluktuerende vindfelt. b) Bærende og stabiliserende kerne samt etagedækkene påvirket af et fluktuerende vindfelt. c) FE-model af 3D bjælkeelementer påvirket af knudelaster, hvor jorden er modelleret uendelig stiv. d) Samme FE-model hvor jordens dynamiske stivhed er modelleret ved LPM.

Figur 3.1 a viser en skitse af den virkelige bygning Light*House. For at kunne foretage en strukturel dynamisk analyse på bygningen er det nødvendigt at foretage visse simplificeringer af den strukturelle opbygning. Dette er illustreret på figur 3.1 b, hvor strukturmodellen er vist. Denne model består af en stabiliserende og bærende kerne samt en række etagedæk. Strukturmodellen kan betragtes som en fysisk model for den virkelige bygning. I denne model antages det, at bygningens dynamiske respons og generelle opførsel alene påvirkes af kernen og etagedækkene. Derudover har konstruktionens strukturelle dæmpning indflydelse på bygningens respons. De strukturelle dæmpningsforhold for konstruktionen stammer fra alt fra kernen, etagedækkene, facaden og sågar de enkelte samlinger i

konstruktionen. Dette indikerer, at dæmpningsforholdet er ret komplekst at estimere, hvorfor disse blot skønnes, og dæmpningsmatricen estimere ved en matematisk model, som vil blive beskrevet senere. Bjælkemodellen jf. figur 3.1c tager hensyn de strukturelle elementer i form af stivhed, dæmpning samt massen af kernen og etagedækkene. Eksempelvis modelleres etagedækkene vha. punktmasser. Denne model giver derfor en matematisk beskrivelse af den fysiske model.

I det følgende behandles de to modeller hver for sig.

3.1 Strukturmodel

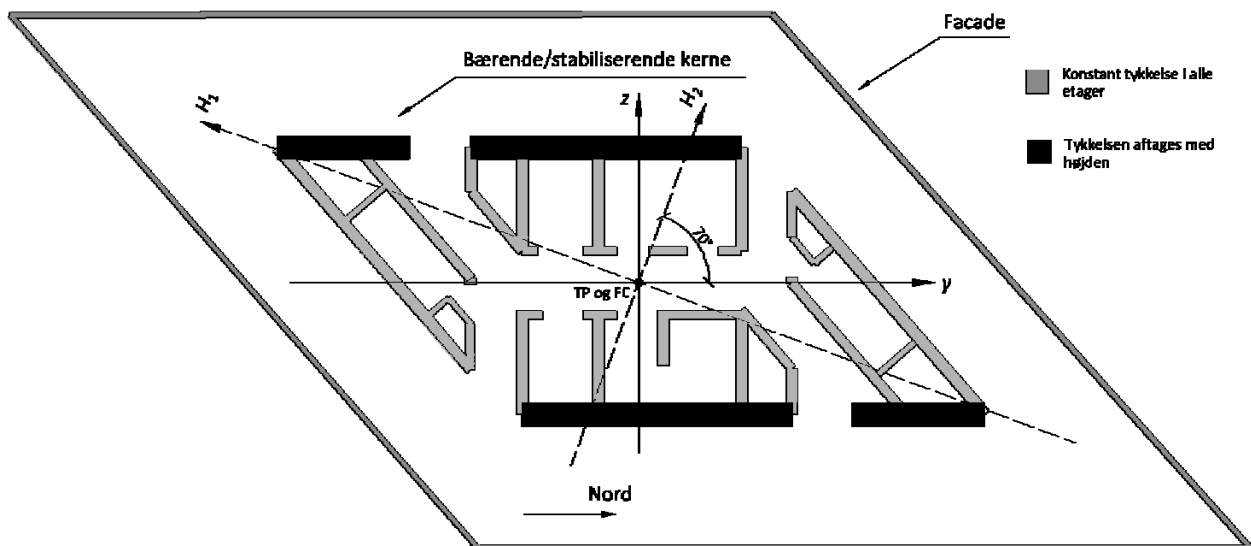
Som nævnt er det i forbindelse med en svingningsanalyse foretaget på Light*House nødvendigt at indføre visse strukturelle antagelser. Dette omfatter

- Estimering af massefordelingen pr. løbende meter op langs bygningen
- Bestemmelse af materialestivhed
- Bestemmelse af tværskningskonstanter for bygningens stabiliserende og bærende konstruktion
- Skøn af dæmpningsforholdene for de første 2 modes

I det følgende præsenteres den stabiliserende og bærende kerne af Light*House, hvorefter redegørelsen af de nævnte punkter foretages.

3.1.1 Stabiliserende og bærende kerne

På figur 3.2 er tværsnittet af bygningens stabiliserende og bærende kerne samt facaden vist.



Figur 3.2: Stabiliserende og bærende kerne samt facade af Light*House svarende til 1. etage med angivelse af hovedakser H1 og H2.

Overordnet har konstruktionens tværsnit samme form op gennem bygningens 42 etager. Det vil sige, at centerlinjerne er placeret samme sted op gennem bygningen. Kun tykkelsen af de 1 m brede væg-

ge, som er sorte på figuren, ændres op gennem bygningen. Dimensionerne af disse er vist i tabellen nedenfor.

Tabel 3.1: Ændring af vægtykkelsen op gennem bygningens etager.

Etage (sektion)	Vægtykkelse i m
Kælder	1.20
1. - 12. (sektion 1)	1.00
13. - 20. (sektion 2)	0.80
21. - 42. (sektion 3)	0.60

Ved analyse af bygningens svingningsrespons betragtes kun 1. - 42. Etage og kælderetagen modelleres således ikke. Hovedakserne for tværsnittet er indikeret på figuren med henholdsvis H_1 og H_2 .

3.1.2 Tværsnitskonstanter

Det fremgår af figur 3.2, at konstruktionens forskydningscentrum (FC) er sammenfaldende med tyngdepunktet (TP). Hovedakserne er derimod roteret med vinklen $\theta \approx 70^\circ$ i forhold til y -aksen. Dette varierer en smule fra sektion til sektion grundet de forskellige vægtykkelser på en del af tværsnittet. I tabel 3.2 er hovedaksernes rotation i forhold hold til y -aksen angivet. Konstruktionens stivheder bestemmes omkring hovedakserne.

I forbindelse med bestemmelse af tværsnitskonstanter af konstruktionen er der benyttet et tillægsprogram til STADPRO kaldet *FreeSketch* samt funktionen *massprop* i AutoCAD. Resultatet for de forskellige tværsnitskonstanter er vist i følgende tabel.

Tabel 3.2: Tværsnitskonstanter for sektionerne. I_1, I_2 og I_v er bøjningsinertimoment omkring hhv. 1.- og 2.- hovedakse samt vrindningsinertimoment. A er arealet og θ er vinklen mellem hovedakserne og y - z -koordinatsystemet som vist på figur 3.2

	I_1	I_2	I_v	A	θ
Sektion 1	5645 m^4	1091 m^4	1396 m^4	80.7 m^2	70.11°
Sektion 2	5055 m^4	962 m^4	1308 m^4	73.6 m^2	70.86°
Sektion 3	4594 m^4	823 m^4	1208 m^4	66.5 m^2	71.61°

3.1.3 Materiale

Materialet af den stabiliserende og bærende kerne i Light*House består af armeret beton. Da det ikke er muligt at få specifikke oplysninger, er det antaget, at materialet er homogent, lineær elastisk og isotropt. Dette er grove antagelser, da beton er ikke-lineærelastisk eller isotropt og på grund af armeringen er armeret beton heller ikke homogent. Men pga. manglende informationer om materialegenskaberne er ovenstående antagelser benyttet i projektet. Desuden fokuserer projektet ikke på

en egentlig brudgrænseanalyse, hvilket retfærdiggør de nævnte antagelser. For isotropt og lineær-elastisk materiale gælder følgende sammenhæng mellem elasticitetsmodul og forskydningsmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.1)$$

I nedenstående tabel er de anvendte materialeparametre for den stabiliserende og bærende kerne listet.

Tabel 3.3: Antagede materialeparametre for stabiliserende og bærende kerne.

E [MPa]	G [MPa]	ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	ν [-]
30 000	11 500	2 500	0.3

3.1.4 Masseinertmoment og masse per længde

I dette afsnit redegøres der for, hvordan massen af Light*House er modelleret i strukturmodellen i hhv. **BJMODEL**s indbyggede finite element model og Abaqus, som senere anvendes til modellering af en plade-skivemodel for Light*House. For yderligere beskrivelse af Abaqus-modellen henvises til Kapitel 7. Det er tilstræbt at gøre massemodelleringerne så identiske som muligt i de to modeller. I denne forbindelse er der taget udgangspunkt i følgende:

- Den totale tyngde af konstruktionen er af Grontmij | Carl Bro opgivet til 645 MN. Denne værdi dækker udover tyngden af kernen og etagedækkene en ikke nærmere specificeret nyttelast. I massemodelleringen vælges det at placere denne overskydende tyngde jævnt på etagedækkene. Dette vurderes at være den mest ugunstige situation, da massen herved optræder med størst mulig afstand til forskydningscentrum, forudsat at massen fordeles jævnt overalt, hvilket antages her. I praksis vil der sandsynligvis være en større masse helt ude ved kanten af etagedækkene grundet facadekonstruktionen. Dette ses der i denne analyse bort fra.
- Der regnes med en densitet på materialet af såvel kerne som etagedæk på $2500 \frac{kg}{m^3}$. Dette svarer til en typisk densitet for armeret beton (Jensen, 2003 s. 66).

Idet den del af de 645 MN, der stammer fra nyttelast, placeres på etagedækkene, beregnes der en effektiv densitet for etagedækkene, hvori både egen- og nyttelast er indeholdt. Der forekommer dog en forskel i massefordelingen i de to strukturmodeller. Således modelleres kernen i **BJMODEL** som fortløbende over hele konstruktionshøjden på 142 m med jævnt fordelte punktmasser svarende til etagedækkenes masse og placering. I Abaqusmodellen arbejdes med 42 kernesektioner af en etagehøjde med etagedæk indskudt imellem disse. Således vil kernens masse pr. løbende meter være en smule lavere i **BJMODEL** for at kompensere for den lille fejl, at etagedækkene er modelleret som punktmasser.

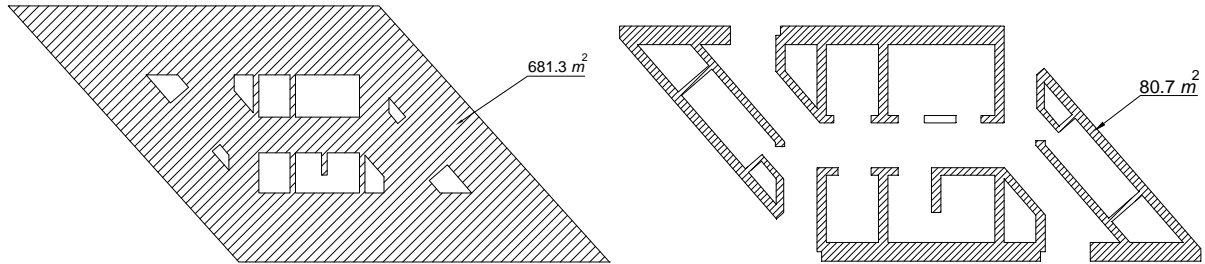
Nedenfor anføres en række relevante størrelser til beregning af massefordelingen. Den totale regningsmæssige masse af Light*House udgør

$$\frac{645 \text{ MN}}{9.82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 65.68 \cdot 10^6 \text{ kg} \quad (3.2)$$

Den effektive kernelængde, dvs. fratrukket etagedækkenes højde på hver 0.25 m udgør

$$142 \text{ m} - 42 \cdot 0.25 \text{ m} = 131.5 \text{ m} \quad (3.3)$$

Arealet af et etagedæk eksklusiv diverse huller, se figur 3.3 til venstre, udgør 681.3 m^2 .



Figur 3.3: Tv.: Arealangivelse af etagedæk. Th.: Arealangivelse af kernesektion, her vist med 1000 mm ydervægge.

Tilsvarende udgør tværsnitsarealet af kernesektionerne, se figur 3.3 til højre, som angivet i tabel 3.4.

Tabel 3.4: Tværsnitsareal af kernesektioner.

Kernesektion	Tværsnitsareal [m^2]	Antal eta- ger	Samlet højde ekskl. dæk [mm]	Samlet højde inkl. dæk [mm]
1000 mm	80.7	12	37 572	40 572
800 mm	73.6	8	25 048	27 048
600 mm	66.5	22	68 882	74 382

Abaqus

Til strukturmodellen i Abaqus beregnes nedenstående den effektive densitet for materialet til etagedækkene, når densiteten i kernen fastholdes på $2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\begin{aligned} & \rho_{\text{dæk,eff}} \cdot 42 \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 681.3 \text{ m}^2 + 80.7 \text{ m}^2 \cdot 37.57 \text{ m} \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + \\ & 73.6 \text{ m}^2 \cdot 25.05 \text{ m} \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 66.5 \text{ m}^2 \cdot 68.88 \text{ m} \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 65.68 \cdot 10^6 \text{ kg} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_{\text{dæk,eff}} = 5879 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Omregnet til en fladelast pr. m^2 svarer dette til

$$\rho_{\text{dæk,eff}} = 5879 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.25 \text{ m} \approx 1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \quad (3.5)$$

BJmodel

Som tidligere nævnt tages der i **BJMODEL** ikke højde for, at etagedækkene udgør en mindre del af bygningens samlede højde, idet de modelleres som punktmasser. Som en følge heraf må den effekti-

ve densitet for kernemateriale nødvendigvis være en smule lavere end de $2500 \frac{kg}{m^3}$, der regnes med i Abaqus modellen. Denne beregnes nedenstående.

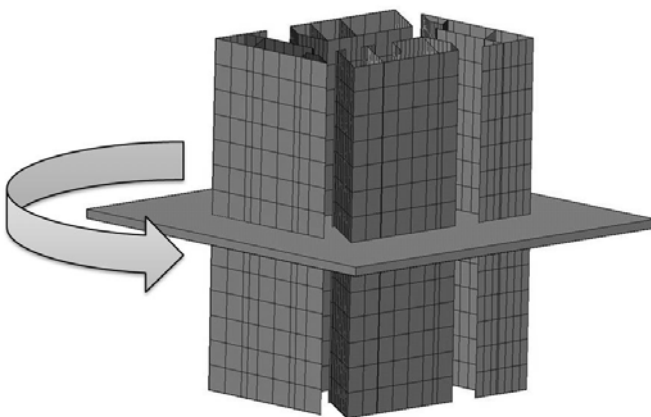
$$\begin{aligned}
 &681.3m^2 \cdot 0.25m \cdot 42 \cdot 5879 \frac{kg}{m^3} + 40.57m \cdot 80.7m^2 \cdot \rho_{kerne,eff} + 27.05m \cdot 73.6m^2 \cdot \rho_{kerne,eff} \\
 &+ 74.38m \cdot 66.5m^2 \cdot \rho_{kerne,eff} = 65.68 \cdot 10^6 kg \\
 &\Downarrow \\
 &\rho_{kerne,eff} = 2315 \frac{kg}{m^3}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Omregnet svarer dette til følgende punktmasse for et etagedæk og masse pr. løbende meter for de enkelte kernesektioner.

Tabel 3.5: Regningsmæssige masser i BJmodel.

Betegnelse	Masse
Etagedæk	1001t
1000 mm kernesektion	187 $\frac{t}{m}$
800 mm kernesektion	170 $\frac{t}{m}$
600 mm kernesektion	154 $\frac{t}{m}$

Konstruktionens masse pr. længdeenhed, når der ikke indlægges punktmasser fra etagedækkene, bestemmes ud fra den total masse og højde af bygningen. Som tidligere nævnt er bygningens totale masse $M_{total} = 645MN$ og den totale højde er 142 m. Massen pr. længdeenhed er derfor $645MN / 142m = 454.2 \frac{kN}{m} = 46.26 \frac{t}{m}$.



Figur 3.4: Skitse af Light*House's bærende og stabiliserende kerne samt etagedæk.

Det fremgår af skitsen, at når konstruktionen er vridningspåvirket, vil den masse, som stammer fra etagedækket, frembringe store inertikræfter, da massefordelingen har stor radius til forskydningscentrum. Masseinertimomentet spiller derfor en væsentlig rolle, når konstruktionen er påvirket af et vridende moment. Masseinertimomentet for etagedækket bestemmes ved

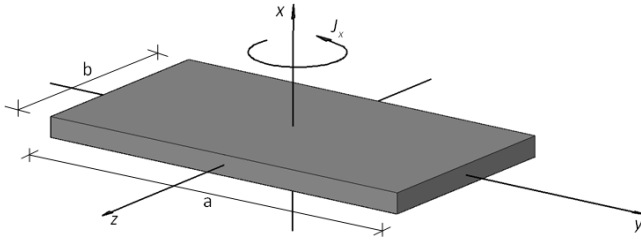
$$J = \int_A r^2 dm \quad (3.7)$$

hvor

r er radius i polære koordinater

dm er massen pr. arealenhed

A er massens areal



Figur 3.5: Rektangulær plade med bredden b og længden a .

For en rektangulær plade med massen M , som vist på figur 3.5, bestemmes masseinertimomentet ved

$$J_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \frac{M}{ab} dydz = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \quad (3.8)$$

hvor

$$dm = \frac{M}{ab} dzdy$$

Massen af etagedækket er bestemt ud fra den estimerede effektive densitet på $\rho_{dæk,eff} = 5879 \frac{kg}{m^3}$.

Tykkelsen på etagedækket er 250 mm .

I FreeSketch er arealet bestemt til $A_{dæk} = 681 \text{ m}^2$. Dette giver

$$M_{dæk} = 1000 \text{ t} \quad (3.9)$$

Masseinertimomentet for etagedækket bestemmes vha. formel (3.8), hvor integrationsgrænserne ændres således at dette svarer til bredden og højden i et parallelogram, svarende til formen af etagedækket jf. figur 3.2. Det antages, at massen af den del af etagedækket, som ligger indenfor den stabiliserende og bærende kerne, ikke giver væsentlige bidrag til masseinertimomentet. Ved bestemmelse af masseinertimomentet er kun massen af den del af etagedækket, som ligger udenfor den stabiliserende og bærende kerne medregnet.

Ved indsættelse i formel (3.8) er masseinertimomentet for et etagedæk bestemt til

$$J_x = 1000 \cdot 10^3 \text{ kg} \left[(23\text{m})^2 + (34\text{m})^2 \right] = 1.69 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \text{ kg}$$

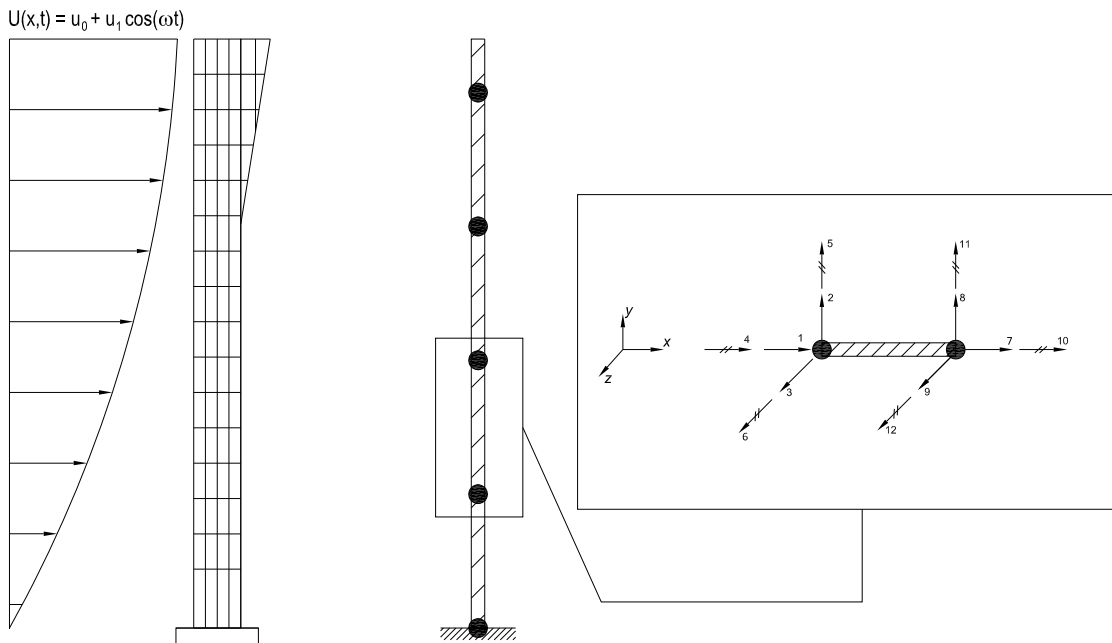
3.2 Bjælke­model

Som nævnt i indledningen til dette afsnit skal den fysiske model af bygningen, som består af en stabiliserende og bærende kerne samt etagedækkene, beskrives ved en matematisk model.

En bjælke­model er ikke hensigtsmæssig, når spændingsfordelingen skal modelleres, da denne model beskriver en tværs­nitsudstrækning med arealer og inertimomenter. Af samme grund er massens udstrækning dårligt modelleret. Bjælke­modellen kan derudover ikke modellere tvungen vridning pga. en endimensional antagelse, som udelukker hensyntagen til hvælving. Fordelene ved en bjælke­model, sammenlignet med eksempelvis en plade-skivemodel er, at bjælke­modellen er simplere at formulere. Beregningstiden er højst sandsynligt lavere, da der skal flere frihedsgrader til at modellere en plade-skivemodel end en bjælke­model. Derudover kan der foretages hurtige kontrolberegninger for en bjælke­model. Da det primært er bygningens respons på vindlasten som skal modelleres, og ikke f.eks. spændingsfordeling, er en bjælke­model hensigtsmæssig.

3.2.1 Definition af bjælke­element

På figur 3.6 er en FE-bjælke­model for kernen skitseret. Som det er vist på skitsen består hvert bjælke­element af to knuder og i alt 12 frihedsgrader. Bjælke­elementet er beskrevet vha. seks translationsfrihedsgrader, 4 rotationsfrihedsgrader og 2 torsionsfrihedsgrader. Torsionsfrihedsgraderne og aksialfrihedsgraderne er dekoblede fra de resterende, mens eksempelvis frihedsgraderne 2 og 6 er koblede. Generelt vil en rotation et vilkårligt sted på bjælke­element medføre en translation. Der er derfor kun 4 kinematiske feltstørrelser i dette tilfælde, dvs. tre translationer og en torsion.



Figur 3.6: Skitse af et bjælke­element med dets frihedsgrader og orientering ift. det lokale koordinatsystem.

For at beskrive feltstørrelserne mellem knuderne i et element benyttes interpolationsmatricen \mathbf{N} . I Appendiks B er denne matrice udledt for det skitserede bjælkeelement. Dimensionen og formen af interpolationsmatricen ser således ud

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_z \\ \mathbf{N}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & 0 & N_{26} & 0 & N_{28} & 0 & 0 & 0 & N_{212} \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & N_{35} & 0 & 0 & 0 & N_{39} & 0 & N_{311} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{410} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det første indeks i indgangene angiver hvilke af de fire kinematiske feltstørrelser, der er tale om, og det andet indeks angiver nummeret på den frihedsgrad, som bidrager til feltstørrelsen. På kompakt form kan \mathbf{N} skrives som

$$\mathbf{N} = N_{ij} \quad (3.10)$$

hvor $i=1,2,\dots,4$ og $j=1,2,\dots,12$.

3.2.2 Elementmatricer

Den matematiske formulering for det på figur 3.6 skitserede bjælkeelement består i at opstille elementmatricerne. Der findes flere forskellige indgangsvinkler til formulering af elementstivhedsmatricen. Eksempelvis kan energibalancen for bjælkeelementet betragtes. Her knyttes elementets stivhed til den potentielle energi, mens massen er knyttet til den kinetiske energi. I henhold til (Nielsen, 2004 s. 153) bestemmes elementets stivheds- og massematrice ved:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \left(EA \frac{d\mathbf{N}_x^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_x}{dx} + EI_y \frac{d^2\mathbf{N}_y^T}{dx^2} \frac{d^2\mathbf{N}_y}{dx^2} + EI_z \frac{d^2\mathbf{N}_z^T}{dx^2} \frac{d^2\mathbf{N}_z}{dx^2} + GI_v \frac{d\mathbf{N}_\theta^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_\theta}{dx} \right) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_0^L \left(\mu(x) \left[\frac{d\mathbf{N}_x^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_x}{dx} + \frac{d^2\mathbf{N}_y^T}{dx^2} \frac{d^2\mathbf{N}_y}{dx^2} + \frac{d^2\mathbf{N}_z^T}{dx^2} \frac{d^2\mathbf{N}_z}{dx^2} \right] + J_x \frac{d\mathbf{N}_\theta^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_\theta}{dx} \right) \quad (3.12)$$

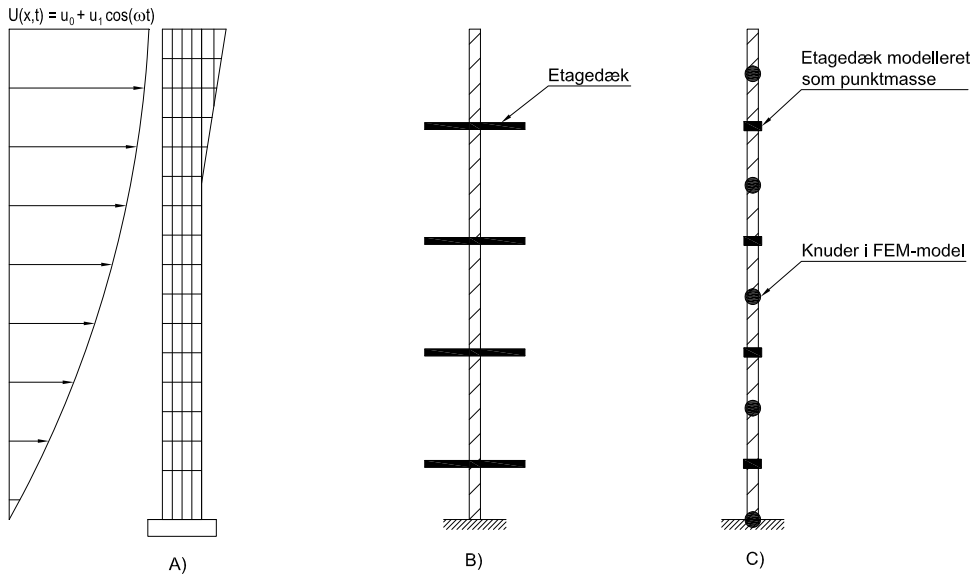
hvor

I er inertimomentet om hhv. x -, y - og z -aksen

$\mu(x)$ er massen pr. meter

J_x er masseinertimomentet omkring x -aksen

Massen for den bærende og stabiliserende kerne antages konstant op langs bygningen, mens massen af etagedækkene skal lægges til i form af en punktmasse i de elementer, som indeholder et etagedæk. Dette er illustreret på nedenstående figur, hvor hvert element indeholder en punktmasse.



Figur 3.7: Etagedæk modelleret som punktmasser.

Antages det at punktmassen er placeret ved x_0 som vist på ovenstående figur, kan massen pr. løbende meter udtrykkes som:

$$\mu(x) = \mu_0 + \delta(x)M_{dæk} \tag{3.13}$$

hvor

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = x_0 \\ 0 & \end{cases}$$

μ_0 er jævn fordelt masse pr. længdeenhed her 46.3 t/m

Det antages, at afstanden mellem etagedække er den samme op langs bygningen. Ved integration af (3.11) og fås

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Elementmassematrixen, hvor etagedækkene ikke er medregnet, bestemmes ved integration af formel (3.12)

$$\mathbf{M}_e = L\mu_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{-13L}{420} \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & \frac{-13L}{420} & 0 & \frac{L^2}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{-11L}{210} \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{-13L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11L}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 \\ 0 & \frac{-13L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Som nævnt i afsnit 3.1.4 skal der for etagedækkene tages hensyn til masseinertimomentet, da massen strækker sig langt fra tyngdepunktaksen. Masseinertimomentet for etagedækkene skal derfor ganges på de indgange, der svarer til torsionsfrihedsgraderne. Da elementlængderne kan variere vilkårligt afhængig af diskretiseringen skal det sikres, at dette kun bliver ganget på de elementer, hvor der er et etagedæk svarende til skitsen på figur 3.7.

Udover stivheds- og massematrixen er dæmpningsmatrixen formuleret vha. Rayleighs dæmpningsmodel

$$\mathbf{C}_e = a_0 \mathbf{M}_e + a_1 \mathbf{K}_e \quad (3.16)$$

hvor a_0 og a_1 er konstanter bestemt ud fra en estimering af konstruktionens dæmpningsforhold for de første to egensvingningsformer. For en mere detaljeret beskrivelse af Rayleighs dæmpningsmodel henvises til Appendiks G. Når stivheds-, masse- og dæmpningsmatrixerne for alle bjælkeelementer er bestemt, transformeres disse, så de er udtrykt efter det globale koordinatsystem og assembleres til systemmatrixer. Dette er programmeret således at bjælke modellen kan orienteres vilkårligt i rummet, men for denne specifikke analyse er den lokale bjælkeakse sammenfaldende med den globale x-akse, og transformationen er derfor principielt ikke nødvendigt. For en detaljeret beskrivelse af dette henvises til Appendiks C og D.

3.2.3 Egensvingningsform og egenfrekvens

For at bestemme systemets cirkulære egenfrekvenser løses følgende karakteristiske ligning som er udledt i Appendiks E.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.17)$$

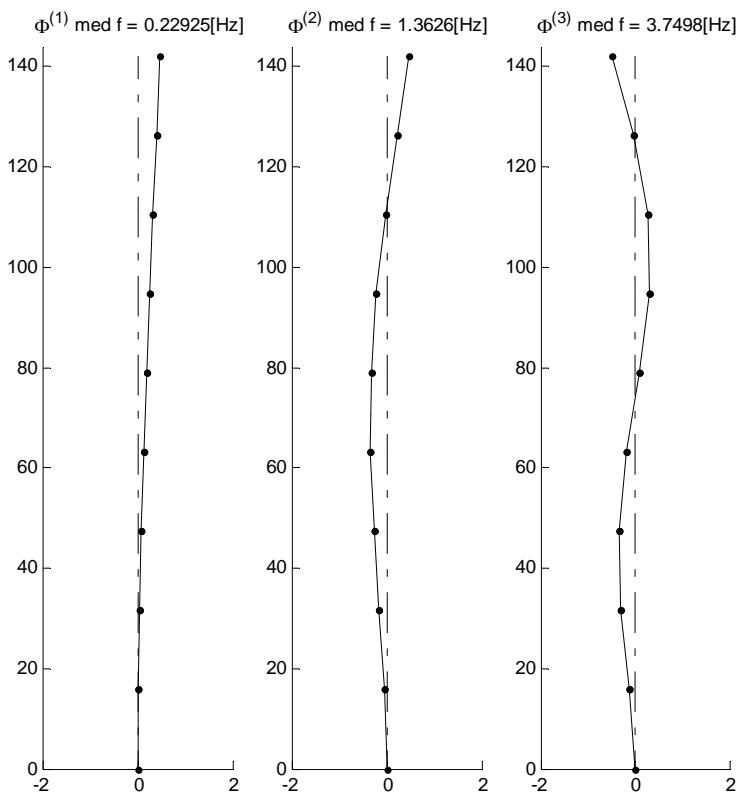
For at bestemme de tilhørende egensvingningsformer løses følgende egenværdiproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi = 0 \quad (3.18)$$

hvor

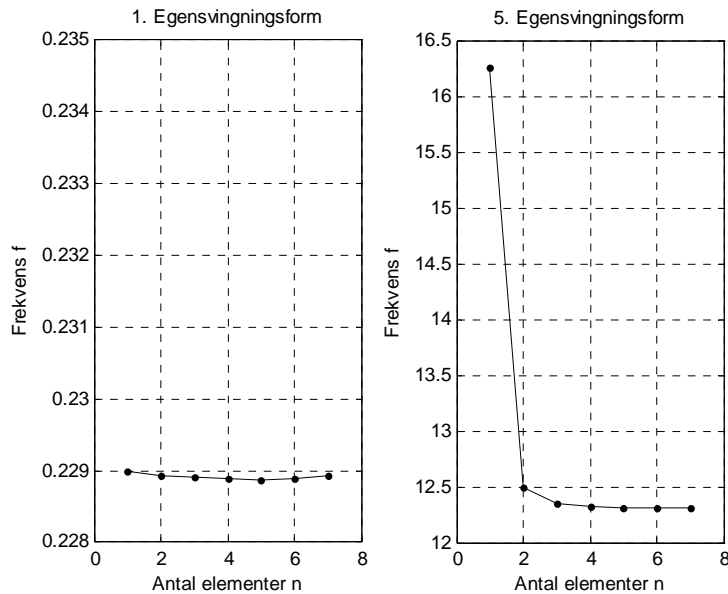
- \mathbf{K} er konstruktionens stivhedsmatrice
- \mathbf{M} er konstruktionens massematrice
- Φ er egensvingningsformerne
- ω er de cirkulære egenfrekvenser (egenværdier)

I MATLAB-filen **ELEMDATA.M** er dette foretaget. Resultatet for de første tre egensvingningsformer er vist på nedenstående figur.



Figur 3.8: De tre første egensvingningsformer omkring den svage akse med de tilhørende egenfrekvenser. Beregningerne er foretaget for systemet modelleret ved en uendelig stiv indspændning i jorden.

Det ses af figuren, at den laveste frekvens for konstruktion ligger omkring 0.23 Hz. En konvergensanalyse for denne er foretaget med hensyn til antallet af elementer og dermed også antallet af frihedsgrader.



Figur 3.9: Konvergensanalyse med hensyn til antal af hovedelementer for frekvensen ved første og femte egensvingningsform.

Det ses af figuren, at frekvensen for den første egensvingningsform konvergerer allerede ved 1-2 elementer. Analysen viser samtidig, at ved frekvenserne svarende til de højere egensvingningsformer skal der flere hovedelementer til for konvergens, hvilket også er forventet, da et bjælkeelement ikke er i stand til at antage formerne svarende til de højere egensvingningsformer. For den femte egensvingningsform kræves ca. 5 elementer for at egenfrekvensen konvergerer.

3.3 Modalanalyse

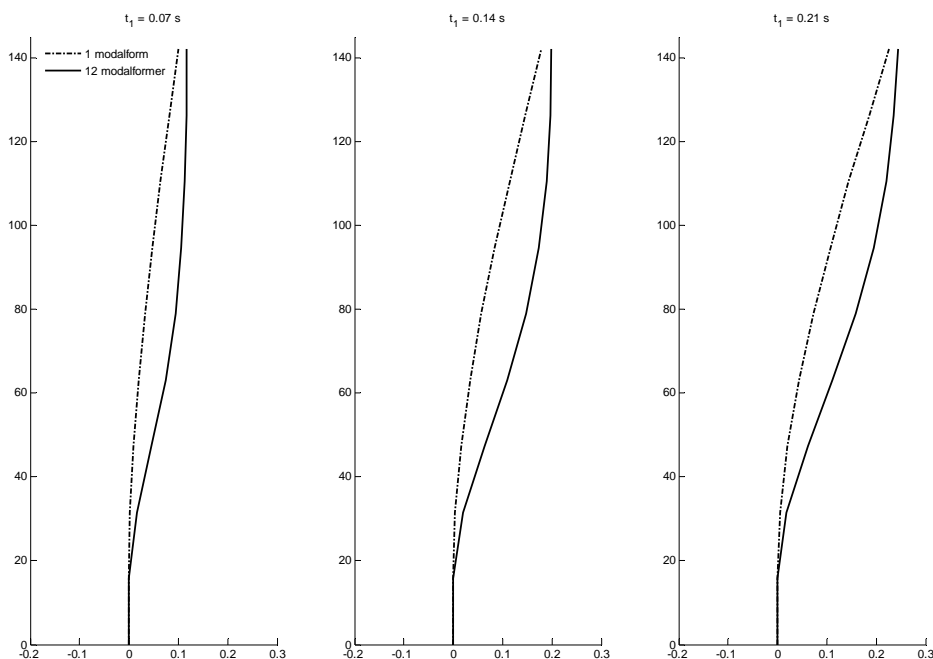
For at optimere beregningstiden er det fordelagtigt at løse bevægelsesligningerne ved en modalanalyse. Dette skyldes, at der ved en modalanalyse kræves, at et systems egensvingningsformer er fuldstændig dekoblet. Når systemet er dekoblet, er det muligt at analysere den enkelte ligning uafhængig af de resterende ligninger i systemet. Det vil sige, at der i stedet for at løse et system med n frihedsgrader kan nøjes med at løse n systemer med 1 frihedsgrad. Dette giver mulighed for at reducere systemet således at det ikke er nødvendigt at løse alle bevægelsesligningerne, men blot nogle få som er tilstrækkelig til at beskrive en konstruktions respons. Dette gøres med hensyn til tidsvarierende modalkoordinater i stedet for geometriske koordinater. Der kan typisk opnås gode resultater med en modalanalyse med blot nogle få modalformer, da hver af disse aktiverer frihedsgrader fordelt over hele konstruktionen. Ses der f.eks. på et system med én modalform, vil denne beskrive hele konstruktionens respons vha. denne ene egensvingningsform. Dekoblingsbetingelsen opfyldes ved:

$$\Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 2\zeta_i \omega_i M_i & , \quad i = j \end{cases} \quad (3.19)$$

hvor

M_i er modalmassen defineret ud fra ortogonalitetsbetingelsen som er beskrevet i (Nielsen, 2004 s. 68)

i MATLAB-filen **BJMODEL** er modalanalysen foretaget for det aktuelle system. Der foretages en analyse, hvor alle egensvingningsformer er medtaget. Dette benævnes det *fulde system*. Denne analyse udnytter ikke fordelene ved modalanalysen, men benyttes til visualisering af forskellen mellem den "korrekte" analyse og modalanalysen. På figur 3.10 er konstruktionens respons i tre forskellige tidskridt for hhv. det fulde system og et system med en modalform plottet. Den påførte vindlast er beskrevet i Kapitel 4, og responset er bestemt vha. Newmark algoritmen, som løser bevægelsesligningerne numerisk ved at steppe frem i tiden. Begyndelsesflytninger og begyndeshastigheder er sat til 0. For en mere detaljeret beskrivelse af algoritmen henvises til Appendiks H.



Figur 3.10: Konstruktionens respons med hhv. det fulde og det reducerede system.

Det ses at responset fra de to analyser stemmer forholdsvis godt overens selv med kun én modalform. Til tiden t_2 og t_3 ses det dog, at responset i det fulde system har en vendetangent. Dette er ikke tilfældet for systemet med kun én modalform, hvilket skyldes at den første egensvingningsform ikke har nogen vendetangent. Det må derfor konkluderes, at beskrivelse af konstruktionens respons med én modalform, i dette lasttilfælde, ikke er tilstrækkeligt. Antallet af modalformer som skal benyttes i de enkelte simuleringer vurderes i de specifikke tilfælde afhængig af simuleringernes formål. Der kan herudfra fortages en konvergensanalyse af antallet af modalformer. I praksis har de høje modalformer ikke så stor indflydelse på responset, og der kan derfor nøjes med få modalformer.

Kapitel 4

Lastmodel for fase 1

I dette afsnit redegøres der for, hvordan vindlasten er modelleret i projektets fase 1, og hvordan den er påført strukturmodellen.

Det grundlæggende krav til lastmodellen benyttet i fase 1 har været, at den skal inkludere en struktur-last interaktion, dvs. at vindlasten er direkte afhængig af bygningens respons. Der er lagt mindre vægt på, hvorvidt den benyttede lastmodel leverer realistiske resultater, da det blot ønskes med succes at implementere en responsstyret lastmodel i **BJMODEL**. Senere i fase 2 indføres en mere realistisk lastmodel baseret på resultater kalibreret efter CFD-analyser, hvor en stor del af programmeringsarbejdet i forbindelse med implementeringen af lastmodellen i fase 1 vil kunne genbruges.

Valget af lastmodel i fase 1 er faldet på den såkaldte Wakemodel af (LamBrakos, et al., 1987). Denne lastmodel er udviklet med henblik på estimering af strømkræfter på offshore rørledninger beliggende på havbunden. Derfor er den fysiske berettigelse af Wakemodellen for et højhus som Light*House ret begrænset, så længe der benyttes samme kalibreringskonstanter. Det vil givetvis være muligt at opnå ligeså tilfredsstillende resultater for højhuse, hvis Wakemodellen blev kalibreret til denne type konstruktion i det pågældende type flow. I det følgende gøres der kort rede for Wakemodellen, hvorefter der fokuseres på implementeringen i **BJMODEL**.

4.1 Wakemodellen

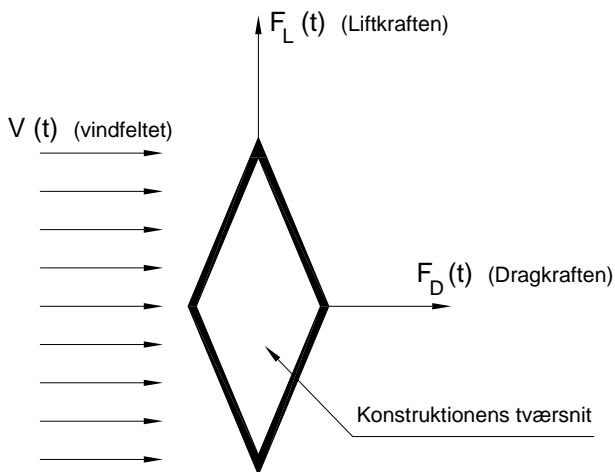
Der tages udgangspunkt i Morisons formel for kraftpåvirkningen fra en omstrømmende fluid på et fast legeme. Den resulterende kraft opløses i to komponenter, hhv. i retning af og normalt på strømningsretningen.

$$\begin{aligned} F_D &= 0.5\rho V^2 DC_D \\ F_L &= 0.5\rho V^2 DC_L \end{aligned} \tag{4.1}$$

hvor

- ρ er densiteten på den strømmende væske
- V er hastigheden af den strømmende væske
- D er en karakteristisk længde. For en cylinder svarer dette til diameteren
- C er en drag- eller liftkoefficient

Nedenstående figur skitserer definitionen af lift- og dragkraften.



Figur 4.1: Definitionsskitse for drag- og liftkraftkomponenten.

Wakemodellen anvendes generelt til at beskrive tidsafhængigheden af drag- og liftkoefficienterne C_D og C_L . Det er således beregningen af C_D og C_L bestemt af konstruktionsresponsset isoleret set, der gøres brug af.

Udtrykkene for C_D og C_L i Wakemodellen er empirisk bestemt, idet modellen er formuleret på baggrund af forsøgsmålinger, som blev iværksat som følge af utilfredshed med beregningsnøjagtigheden i de traditionelle lastmodeller med drag- og liftkoefficienter, der alene afhænger af flowet. Som redegjort for i (LamBrakos, et al., 1987), har det vist sig, at Wakemodellen giver gode resultater for det den er udviklet til, dvs. offshore rørledninger.

Beregningsudtrykket for drag- og liftkoefficienterne i Wakemodellen ser ud som vist nedenfor

$$C_D = C_{DS} + \alpha_D \left(\frac{S}{D} \right)^{\beta_D} \exp \left[\gamma_D \left(\frac{S}{D} \right)^{\delta_D} \right] \quad (4.2)$$

$$C_L = C_{LS} + \alpha_L \left(\frac{S}{D} \right)^{\beta_L} \exp \left[\gamma_L \left(\frac{S}{D} \right)^{\delta_L} \right] \quad (4.3)$$

hvor

C_{DS} er et statisk bidrag til dragkoefficienten

C_{LS} er et statisk bidrag til liftkoefficienten

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ er konstanter kalibreret efter forsøgsdata

D er en ækvivalent diameter

S er den tidsintegrerede hastighed af konstruktionen givet ved

$$S = \int_{t_0}^{t^*} |\dot{u}(t)| dt$$

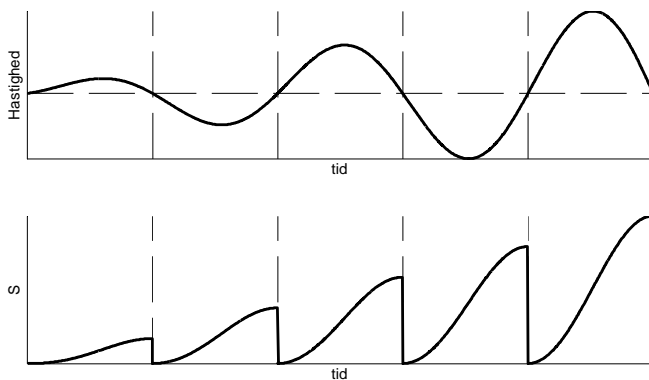
hvor

$\dot{u}(t)$	er konstruktionens hastighed
t_0	er tiden ved den første hastighedsnulkrydsning
t^*	er tiden ved den næste hastighedsnulkrydsning

Denne tidsintegrede hastighed er beskrevet nærmere i det følgende.

4.1.1 Tidsintegreret hastighed

Måden hvorpå Wakemodellen inddrager konstruktionsresponsen som styrende parameter for drag- og liftkoefficienterne, foregår ved at integrere hastigheden af konstruktionen over tiden, hvilket parameteren S , som vist i formel (4.2) og (4.3), dækker over. Desuden nulstilles S hver gang der har været en nulkrydsning af hastigheden, dvs. når konstruktionen er i en yderposition. På denne måde fremkommer der et uregelmæssigt kraftsignal over tid, styret af dels det indkommende flow, dels konstruktionsresponsen. Figur 4.2 viser princippet i, hvordan S udvikles på baggrund af konstruktionens hastighed.



Figur 4.2: Principskitse over nulkrydsningsstyret hastighedsintegration

4.1.2 Kalibreringskonstanter

Værdierne af de indgående konstanter i formel (4.2) og (4.3) er taget direkte fra forsøgsresultaterne for offshore rørledninger, med undtagelse af C_{DS} og C_{LS} , som er fastsat ud fra CFD-simuleringer jf. afsnit 8.3. De anvendte værdier er vist i tabel 4.1.

Tabel 4.1: Anvendte konstanter i Wakemodellen.

Konstant	Dragværdi	Liftværdi
C_S	1.44	-0.004
α	0.38	9.80
β	1.00	0.65
γ	-1.16	-1.00
δ	4.00	1.20

4.2 Implementering i BJmodel

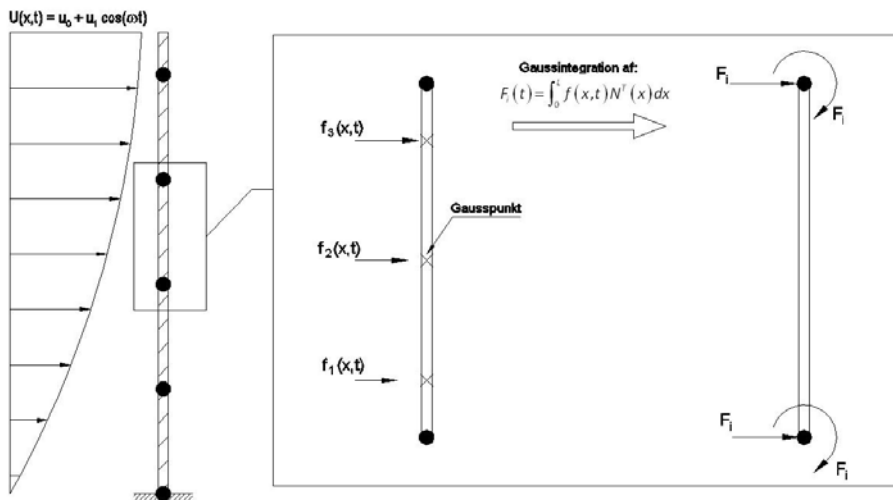
Wakemodellen er indbygget i **NEWMARK_WAKE.M**, som er funktionen til numerisk beregning af responset i **BJMODEL**. Der er i forbindelse med implementeringen af Wakemodellen desuden oprettet funktionerne **SINT.M**, **GAUSS.M** og **NEWMARK_F_WAKE.M**. Sidstnævnte indeholder blot beregningsudtrykkene for Wakemodellen som beskrevet ovenfor, når den tidsintegrerede hastighed, S , kendes. **SINT.M** integrerer hastigheden op i tre Gausspunkter for hvert element og nulstilles, når konstruktionen i det pågældende punkt har foretaget en hastighedsnulnedkrydsning. I det følgende redegøres for, hvorfor det vælges at indlægge 3 Gausspunkter i hvert bjælkeelement. For at fordele lasten ud til knuderne benyttes formfunktionerne ved

$$F_i(t) = \int_0^L f(x,t) N^T(x) dx \quad (4.4)$$

hvor

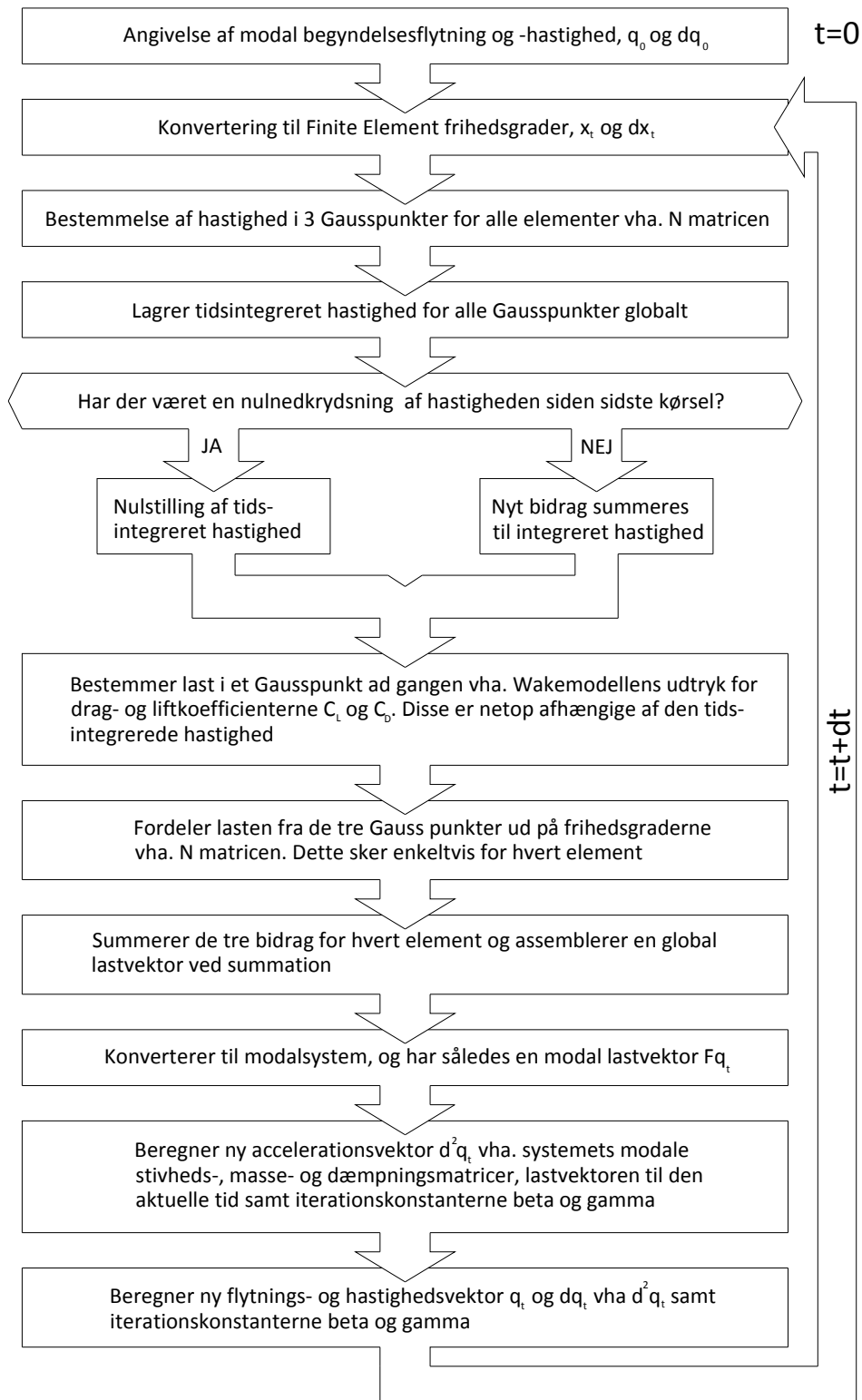
- $F_{i(t)}$ er knudelasterne
- $f(x,t)$ er vindlastens variation over et element
- $N(x)$ er formfunktioner

Da det antages at vindlastens variation over et element kan beskrives ved et 2. ordens polynomium og de enkelte indgange i formfunktionsmatricen er op til 3. ordens polynomier, er produktet under integrationstegnet maksimalt et 5. ordens polynomium. I (Petyt, 1990 s. 121) er det vist, at et 5. ordens polynomium kan integreres eksakt med 3 Gausspunkter. På nedenstående figur er princippet, i fordeling af vindlasten ud til knuderne vist.



Figur 4.3: Principskitse for fremgangsmåden i fordeling af vindlasten ud til knuderne.

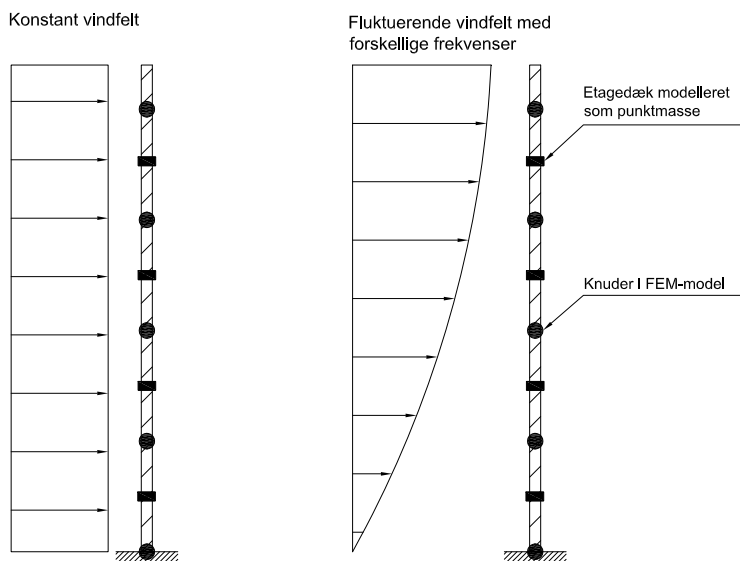
Gaussintegrationen er foretaget i funktionen **GAUSS.M**, hvis beregningsproces er illustreret på nedenstående flowdiagram.



Kapitel 5

Resultater for fase1

I dette afsnit gengives resultaterne for den simple struktur- og lastmodel, hvor konstruktionen er påvirket med forskellige vindfelter som vist på nedenstående figur.



Figur 5.1: Skitse af strukturmodellen påvirket af forskellige vindfelter.

Tv.: Konstant vindfelt. Th.: Fluktuerende vindfelt med forskellige frekvenser.

Alle vindhastigheder er baseret på en logaritmisk hastighedsfordeling efter DS 410, hvor basisvindhastigheden er 24 m/s . Terræncategori er 1 da bygningen ligger ud til åbent vand. Terræntopografifaktoren er sat til 1, da højden over terrænet i dette tilfælde er antaget mere end 5 gange eventuelle bakker og skrånninger omkring bygningen. Dette giver

$$V(x, t) = V_0(x) + V_1 \cos(\omega_v t) \quad (5.1)$$

hvor

$$V_0 = \begin{cases} 0.17 \log\left(\frac{x}{0.01}\right) 24 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{for } x > 2\text{m} \\ 0.17 \log\left(\frac{2}{0.01}\right) 24 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{for } x \leq 2\text{m} \end{cases}$$

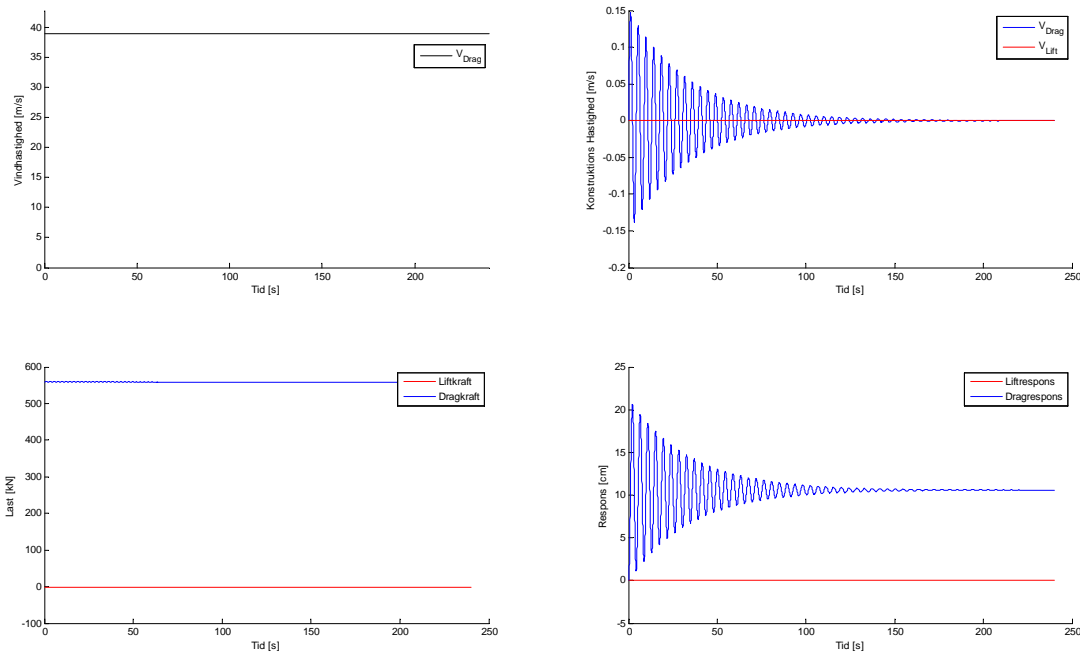
x er konstruktionens højde op til 142 m

V_1 er amplituden på fluktuationsdelen som er sat til 3 m/s

I de følgende undersøgelser løses tidsintegrationen ved medtagelse af de seks første modalformer.

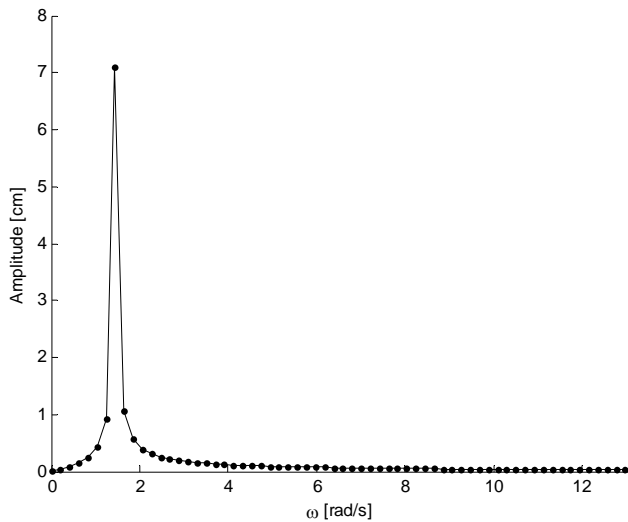
5.1 Konstant vindfelt

I denne undersøgelse sættes $V(x) = V_0(x)$ i henhold til formel (5.1), således at vindfeltet er konstant. På nedenstående figur er vindhastighed, last samt konstruktionens hastighed og respons plottet for den frihedsgrad, som svarer til 142 m's højde og vi belastningsretningen.



Figur 5.2: Plot af vindhastighed, last samt konstruktionens hastighed og respons med konstant vindfelt.

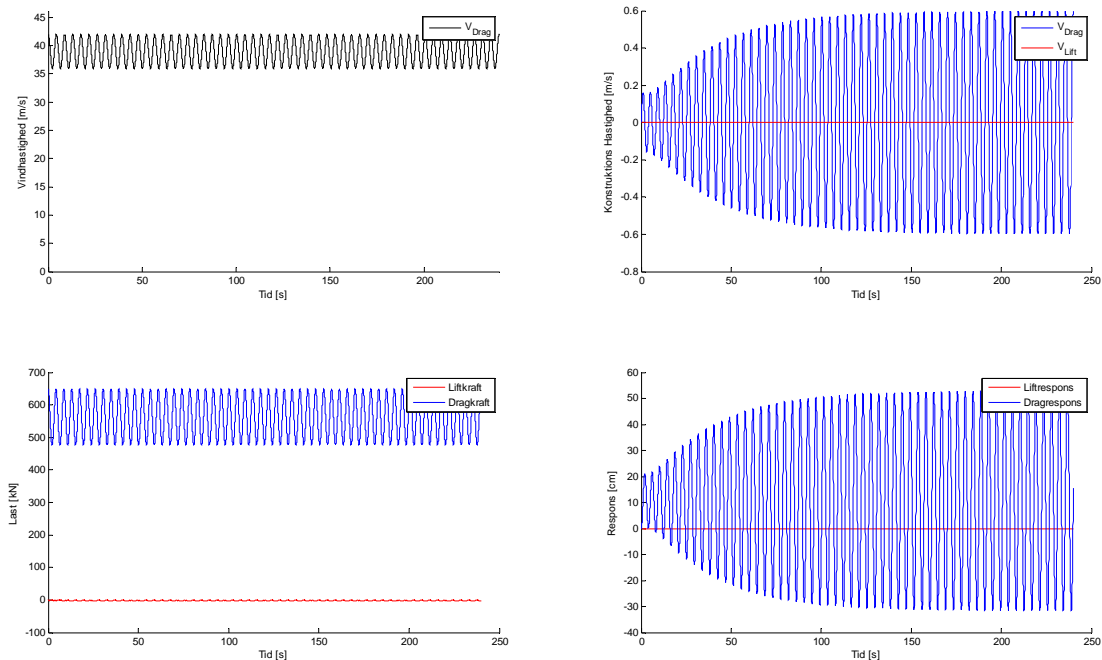
Som forventet er lasten konstant med dragkomponenten som den dominerende del. Det ses, at responset dæmpes ud til en konstant udbøjning med tiden på grund af statisk last med startup-effekt. Konstruktionens harmoniske bevægelse har en frekvens svarende til den første cirkulære egenfrekvens. Dette er vist ved et amplitudespektrum bestemt ved en FFT af responssignalet. Amplitudespektret tjener i dette tilfælde udelukkende formålet at identificere signalets dominerende frekvenser, hvorfor der ikke skal lægges vægt på værdierne af amplituderne. For beskrivelse af FFT henvises til Appendiks J. Det ses at der er en dominerende peak ved første cirkulære egenfrekvens på $\omega_1 = 1.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



Figur 5.3: FFT af responssignalet når konstruktionen påvirkes af et konstant vindfelt.

5.2 Fluktuerende vindfelt

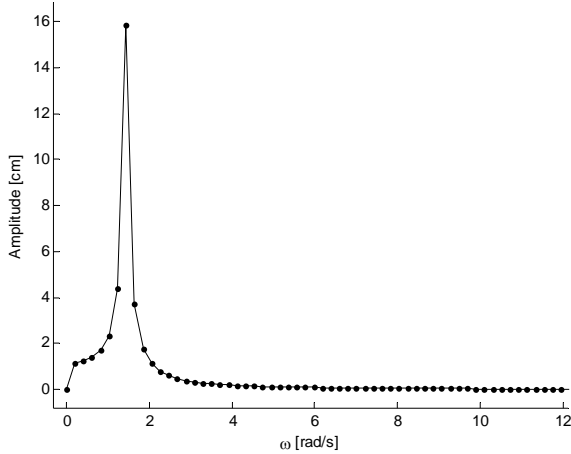
Belastes konstruktionen med et fluktuerende vindfelt svarende til den første cirkulære egenfrekvens, således at $V(x) = V_0(x) + 3\cos(1.5t)$, fås lasten samt konstruktionens hastighed og respons som vist på nedenstående figur.



Figur 5.4: Plot af vindhastighed, last samt konstruktionens hastighed og respons med et fluktuerende vindfelt med frekvensen svarende til den første cirkulære egenfrekvens.

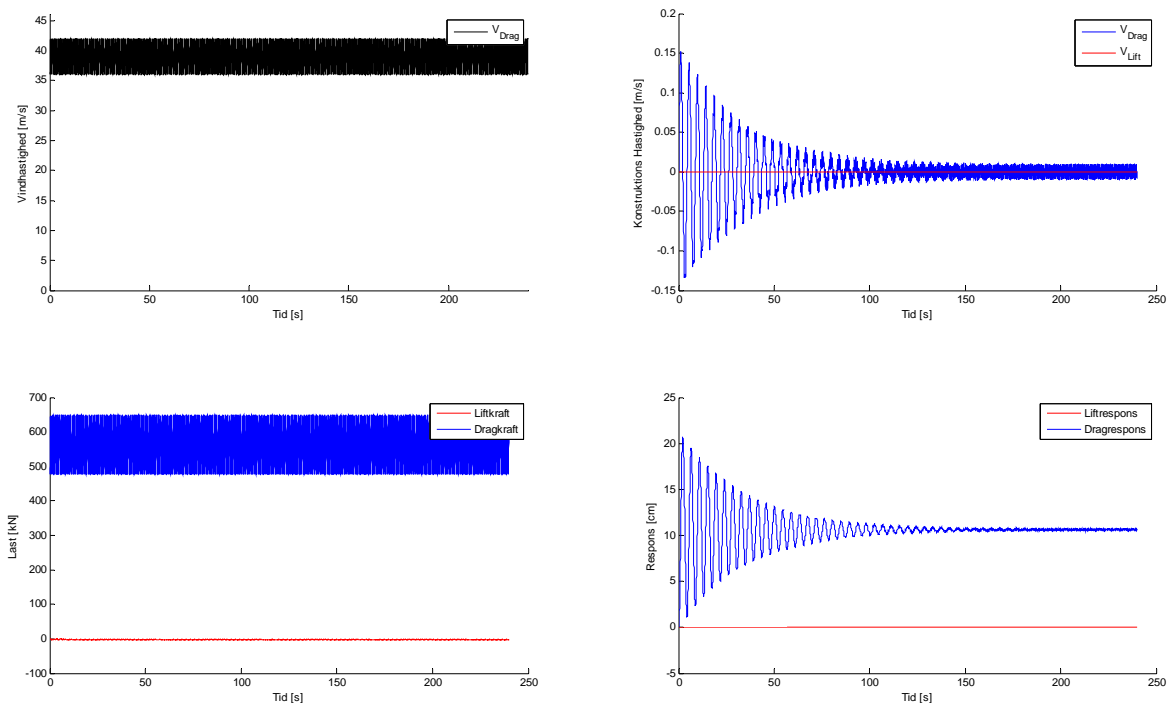
I modsætning til det tilfælde hvor vindfeltet er konstant, bliver responset forstærket, når vindfeltet er fluktuerende med en belastningsfrekvens svarende til konstruktionens første egenfrekvens. Re-

sponset bliver som forventet harmonisk med belastningsfrekvensen. Konstruktionens dæmpningsforhold er sat til 1 % i dette tilfælde, og forhindrer derfor responset i at blive forstærket med tiden. På nedenstående figur er amplitudespektret for responssignalet plottet hvor det ses, at der kun er en dominerende peak svarende til den første egenfrekvens.



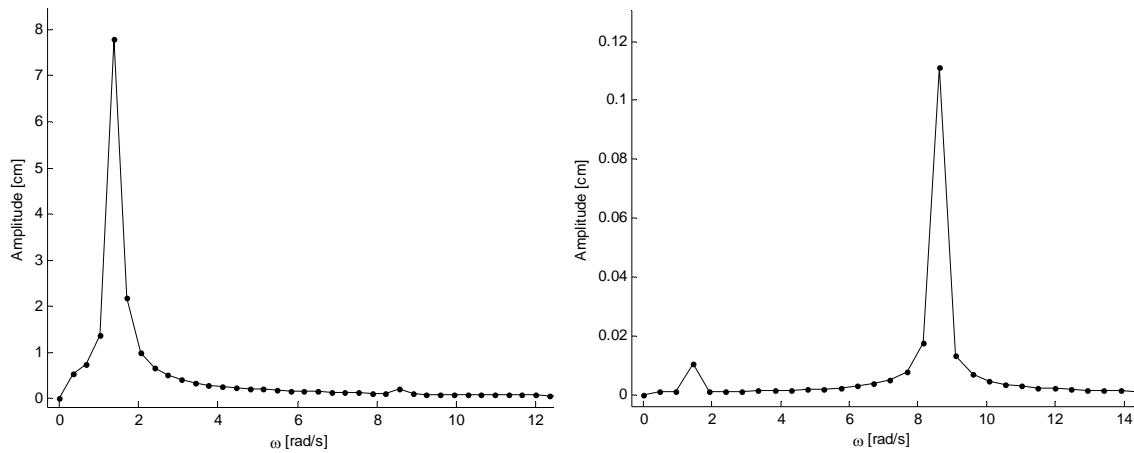
Figur 5.5: FFT af responssignalet når konstruktionen påvirkes af et fluktuerende vindfelt med frekvensen svarende til første cirkulære egenfrekvens.

Belastes konstruktionen med et fluktuerende vindfelt med frekvensen svarende til den anden cirkulære egenfrekvens fås lasten samt konstruktionens hastighed og respons som vist på nedenstående figur.



Figur 5.6: Plot af vindhastighed, last samt konstruktionens hastighed og respons med et fluktuerende vindfelt med frekvensen svarende til anden cirkulære egenfrekvens.

Det ses at konstruktionens hastighed og respons består af 2 forskellige frekvenser hvor amplituderne på signalet dæmpes ud med tiden. På nedenstående figur er amplitudespektret for responssignalet plottet til to tidsintervaller.



Figur 5.7: Amplitudespektrum for responssignalet. Tv.: Signalet for $t = 0 - 18$ sekunder. Th.: signalet for $t = 127 - 240$ sekunder.

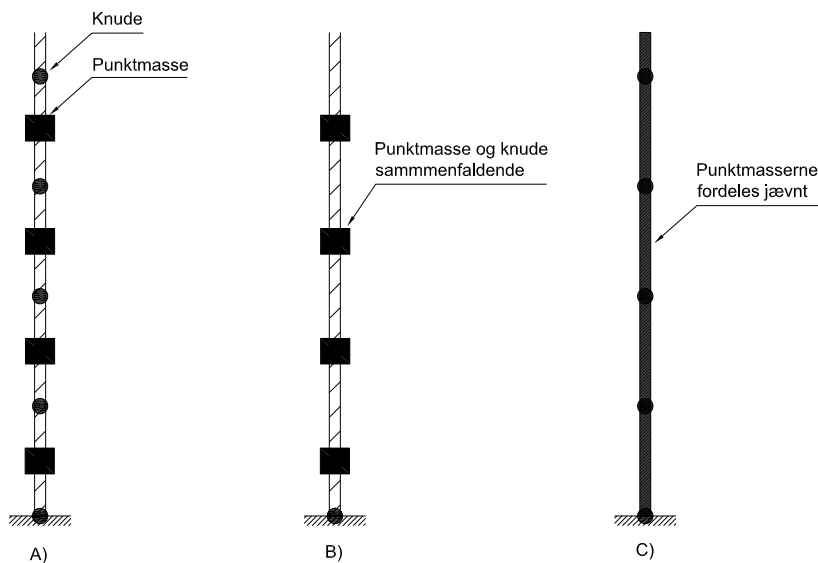
I det første tidsinterval er konstruktionens første cirkulære egenfrekvens dominerende, mens anden cirkulære egenfrekvens bliver anslået i et senere tidsinterval.

5.3 Undersøgelse af massemodellering

Som redegjort for i afsnit 3.1.4, er det i **BJMODEL** muligt at vælge mellem to forskellige fordelinger af massen i konstruktionen, når der køres med bjælke modellen for strukturen: Dels ved en jævn fordeling af massen over elementerne og dels ved modellering af etagedæk nyttelast som punktmasser.

I det følgende præsenteres en række resultater, som viser hvilken betydning det har for den maksimale udbøjning samt de tre laveste egenfrekvenser for udbøjning om den svage hovedakse, hvilket massefordelingsprincip der benyttes.

Undersøgelsen foretages for begge lastmodeller i **BJMODEL**, dvs. Wakemodellen og den CFD-baserede lastmodel. Når etagedækkene modelleres som punktmasser, vil placeringen af disse som oftest ligge et givent sted mellem knuderne på elementerne i bjælke modellen. Herved skal interpolationsmatricen N benyttes til at fordele feltlasterne ud på de respektive frihedsgrader. I denne forbindelse undersøges det, om det har nogen indflydelse, om bjælke modellen diskretiseres med et lille antal bjælkeelementer, eller om der anvendes en finere diskretisering svarende til, at hver punktmasse er sammenfaldende med en knude. Endelig undersøges det, hvilken indflydelse det vil have, at der i stedet for 42 punktmasser svarende til antallet af etagedæk, påføres kun 5 punktmasser jævnt fordelt over konstruktionen med opretholdelse af den samme, totale masse. Dette kan umiddelbart forventes at medføre noget anderledes egenfrekvenser. De forskellige undersøgelser er vist på nedenstående figur.



Figur 5.8: Forskellige undersøgelser for placering af punktmasserne
 A) Punktmasser ved hvert element. B) Punktmasser ved hver knude.
 C) Punktmasserne fordeles jævnt over hele bygningen.

Nedenstående tabel angiver de forskellige kombinationer af parametre, der er undersøgt for, samt resultaterne heraf. Bemærk, at egenfrekvenserne for identiske strukturelle systemer naturligvis er ens, hvorfor disse går igen flere gange.

Tabel 5.1: Undersøgelser foretaget mht. massefordeling samt resultaterne heraf.

Nr.	Elementer	Massetype	Last-type	Max U [cm]	1. egenf. [Hz]	2. egenf. [Hz]	3. egenf. [Hz]
1	6	Jævn	Wake	52.8	0.2304	1.3854	3.8264
2	42	Jævn	Wake	50.1	0.2304	1.3850	3.8195
3	6	42 pkt. masser	Wake	52.8	0.2293	1.3636	3.7586
4	42	42 pkt. masser	Wake	52.8	0.2293	1.3625	3.7479
5	6	Jævn	CFD	105.0	Som 1	Som 1	Som 1
6	42	Jævn	CFD	92.7	Som 2	Som 2	Som 2
7	6	42 pkt. masser	CFD	104.5	Som 3	Som 3	Som 3
8	42	42 pkt. masser	CFD	105.3	Som 4	Som 4	Som 4
9	6	5 pkt. masser	Wake	53.0	0.2052	1.2205	3.3717
10	6	5 pkt. masser	CFD	94.2	Som 9	Som 9	Som 9

Som det ses af tabel 5.1 har det kun ringe indflydelse på det maksimale respons, om bjælkemodellens masse modelleres rent jævnt fordelt, eller om etagedækkene medregnes som punktmasser. Dette gør sig gældende, både når der køres med Wake-modellen og CFD-modellen. Derimod har det større indflydelse, hvor fint konstruktionen diskretiseres. Her medfører en fin diskretisering et lidt mindre respons, når massen modelleres fuldt jævnt fordelt. Dette må umiddelbart skyldes numerisk unøjagtighed når lasten integreres op, idet en finite element model normalt konvergerer mod lavere

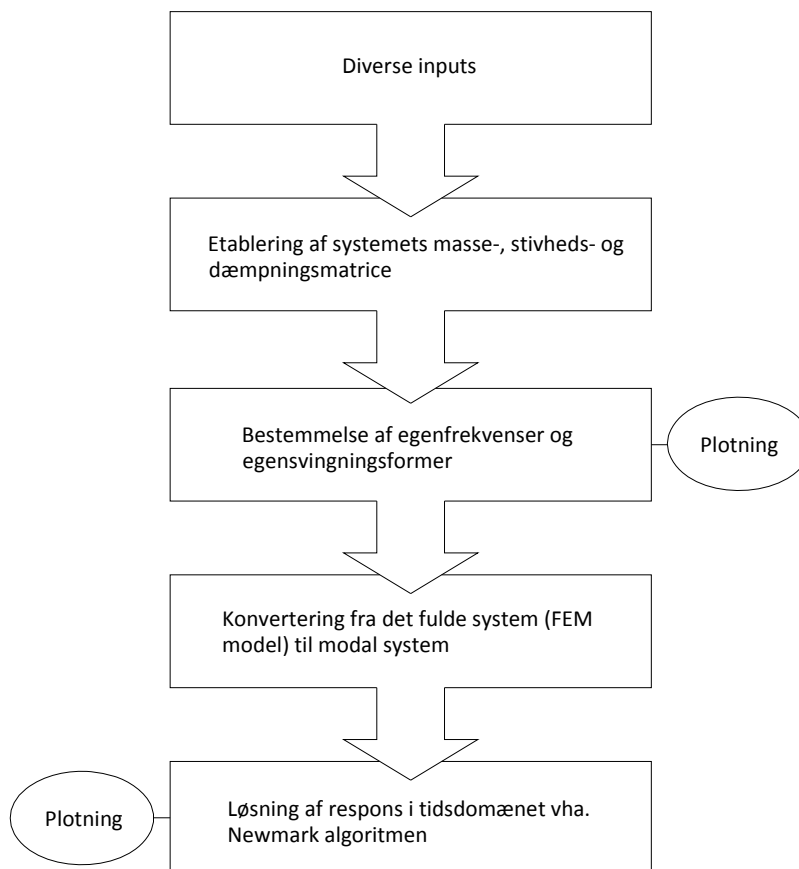
stivhed, når diskretiseringen forøges. Som det ses, er egenfrekvenserne i kørsel 1-8 stort set identiske.

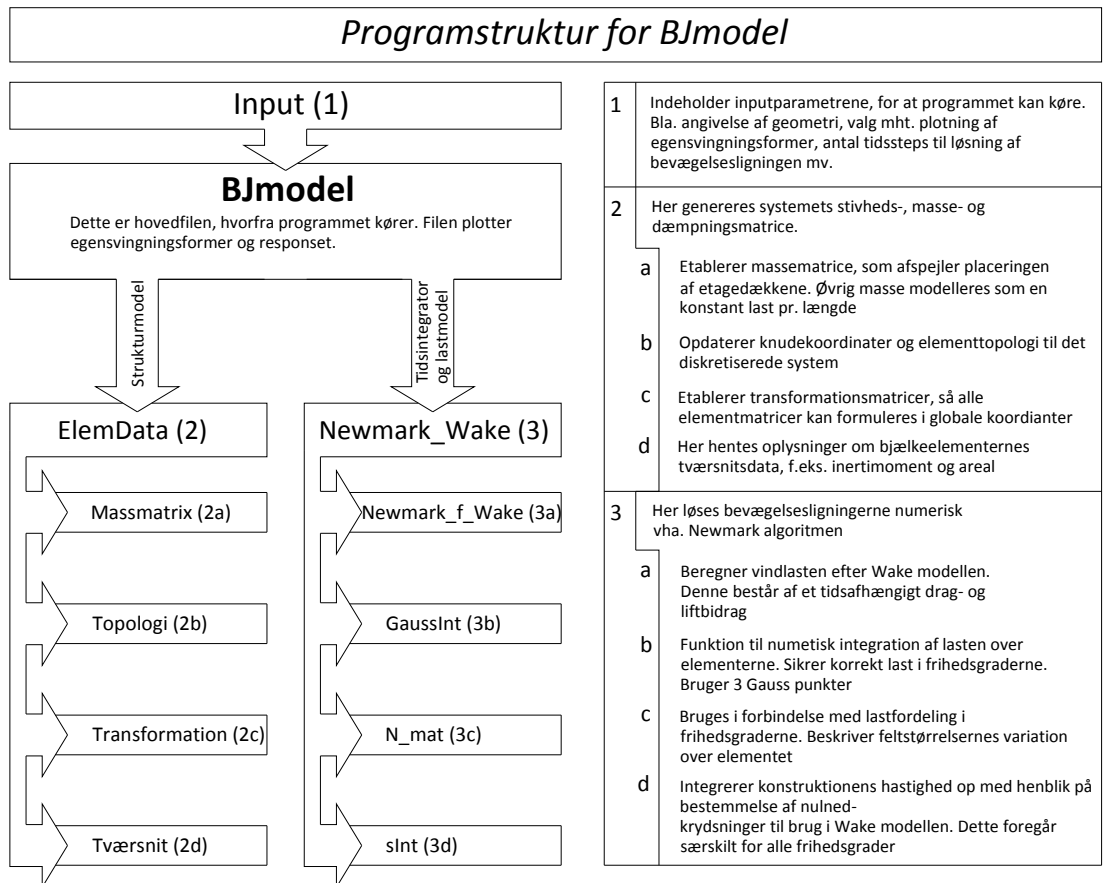
Når konstruktionen påsættes 5 store punktmasser med samme samlede masse som de 42 etagedæk inklusive nyttelast, nedsættes egenfrekvenserne en del. Dette er også forventeligt, da det er en væsentlig mere kritisk massefordeling.

Kapitel 6

Programoversigt

Nedenstående figurer illustrerer, hvordan den overordnede algoritme forløber i **BJMODEL**, samt hvordan programmet er opbygget af hoved- og underfiler.





Fase 2

Fase 2

Kapitel 7

Forbedret FE-model ved Abaqus

I dette afsnit introduceres en mere avanceret FE-modellering af Light*House end den bjælke-model, der er beskrevet i fase 1. Der benyttes således nu todimensionelle plade-skiveelementer i stedet for de tidligere endimensionelle bjælkeelementer. Udover dette skift i den strukturelle model, benyttes nu modsat tidligere et kommercielt program, Abaqus, til at opbygge og analysere modellen i.

Formålet med at modellere Light*House vha. plade-skiveelementer er at undersøge, hvilken indflydelse det i sidste ende har på løsningen af det dynamiske respons i såvel tids- som frekvensdomænet. Specielt kan det forventes, at en plade-skivemodel i kraft af sin todimensionelle udstrækning vil kunne modellere massefordelingen væsentligt bedre end en bjælke-model, som matematisk set er endimensionel, og derfor ikke kan modellere massens udstrækning over tværsnittet. Ved at indføre de todimensionelle plade-skiveelementer, som assembleres til en tredimensionel FE-model, er det ikke længere nødvendigt at indføre massen som en udglattet værdi pr. længde eller som punktmasser. Men også stivheden af systemet kan forventes bedre modelleret i en plade-skivemodel, idet der i bjælke-modellen er anvendt Bernoulli Euler elementer, som ikke medtager forskydningsbidraget.

Fremgangsmåden i forbindelse med indførelsen af en plade-skivemodel er, at benytte det allerede programmerede **BJMODEL** så meget som muligt. Således benyttes den samme numeriske tidsintegrator for responset som for bjælke-modellen, nemlig Newmark algoritmen. Derfor modelleres Light*House vha. plade-skiveelementer i Abaqus, hvorefter der gennemføres en systemanalyse og løses for et antal modalformer med tilhørende egenfrekvenser og modalmasser. Således påføres der ingen laster i Abaqus, da der er tale om en ren systemanalyse. Herefter findes efter de gældende relationer den modale stivhedsmatrice, og dæmpningsmatricen indføres som ved bjælke-modellen vha. Rayleighs dæmpningsmodel, dvs. som en linearkombination af masse- og stivhedsmatricerne. Herefter påsættes laster som tidligere i **BJMODEL**, og der løses for responset.

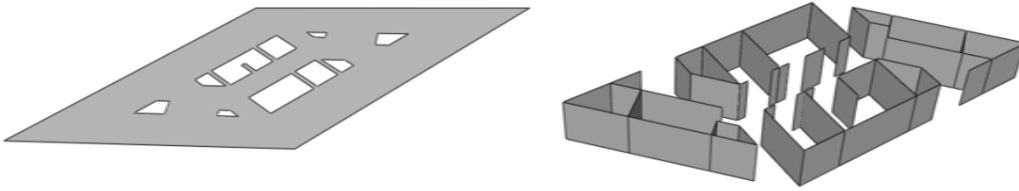
7.1.1 Opbygning af Abaqus model

I det følgende er der gjort rede for relevante valg foretaget i forbindelse med opbygningen af plade-skivemodellen i Abaqus. Gennemgangen følger de grundlæggende trin i Abaqus, som brugeren skal igennem for at opbygge en komplet model, der kan analyseres. Det er forudsat, at læseren er bekendt med terminologien i Abaqus og betydningerne heraf. Således forklares det f.eks. ikke, hvad en *part* dækker over i forhold til en *instance*.

Part

Modellen består af to parts: Et etagedæk og en kernesektion. Denne er herefter kopieret, så der er i alt er tre kerneparts med varierende vægtykkelser, se afsnit 3.1. Alle parts er importeret som sket-

ches fra AutoCAD. Herefter er kernesektionerne ekstruderet til en højde svarende til en etagehøjde. Nedenstående er vist et etagedæk samt en kernesektion.



Figur 7.1: Part'en etagedæk og kernesektion.

Property

Propertymodellet indeholder flere trin. Først er der defineret to materialer, hvor eneste forskel er, at stivheden er praktisk talt uendelig for det ene. Dette materiale benyttes til modellering af etagedækkene for at undgå egensvingningsformer, hvor disse deformerer. Dette valg er truffet, da etagedækkene blot opfattes som koncentrerede masser på kernen. Det er således egensvingningsformerne af dette forsimplede system, der ønskes løst for. Tabel 7.1 viser de anvendte materialedata.

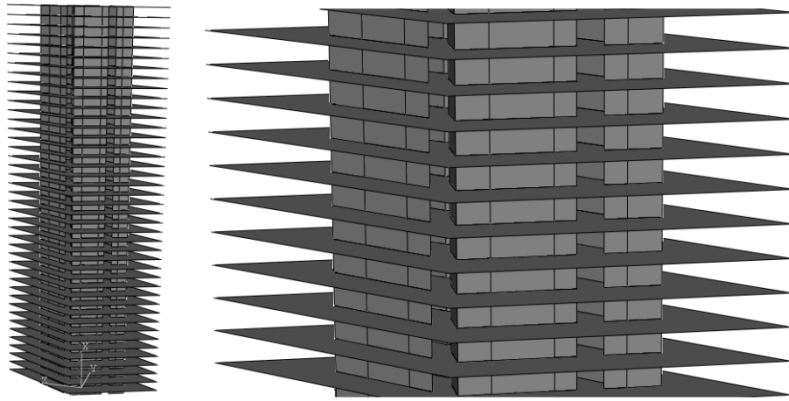
Tabel 7.1: Materialedata anvendt i Abaqus.

	Concrete	Inf. Stiff concrete
Densitet $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	2500	2500
E-modul $[MPa]$	30 000	∞
Poissons forhold $[-]$	0.3	Ej meningsfuldt
Materialemodel	Lineær elastisk	Lineær elastisk

I propertymodulet påføres de enkelte parts desuden sections, hvilket i dette tilfælde indebærer, at de enkelte dele af kernesektionen påføres de korrekte vægtykkelser.

Assembly

I dette modul sammensættes modellen med samtlige 42 etager. Da modellen består af nogle få parts benyttes blot en offset funktion til placering af de enkelte instances. Nedenfor er vist den færdigassemblerede model.



Figur 7.2: Light*House opbygget som plade-skivemodell i Abaqus med forstørret udsnit til højre.

Step

I stepmoduliet defineres, hvad brugeren ønsker at analysere, og følgende indstillinger er valgt:

Tabel 7.2: Step-indstillinger.

Analyseart	Linear Perturbation
Type	Frekvensanalyse
Antal modalformer ønsket	20
Modalformer normeret efter	Største flytning

Interaction

Her angives det, hvordan de enkelte instances interagerer med hinanden, og det er i denne forbindelse valgt, at samtlige kontaktflader sættes til *tie*, hvilket låser to naboelementer sammen i alle delte frihedsgrader. Abaqus er selv i stand til at kontrollere, om brugeren har defineret to instances som *tied*, selv om de ikke er placeret i umiddelbar nærhed af hinanden. Hvis dette er tilfældet ignorerer programmet dette, og melder en fejl i løsningsfilen.

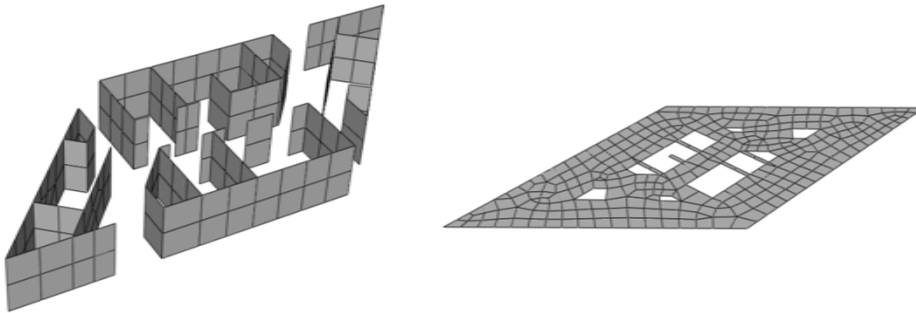
Load

Da der er tale om en ren systemanalyse, er det ikke relevant at påsætte nogle laster. I stedet benyttes loadmoduliet til at indføre en fast indspænding for alle modellens kontaktflader med fundament. Der benyttes således den simplest mulige randbetingelse svarende til understøtningstype 1 i **BJMODELS** FE-model.

Mesh

Det er valgt at genere et net per part, og ikke per instance. Dette betyder, at der spares beregningstid, da Abaqus ellers ville skabe et unikt net for hver instance globalt på modellen. Dette er ikke vurderet relevant, da der ikke umiddelbart forekommer områder på modellen, hvor der kan forventes en specielt høj flytningsgradient. Nedenstående er vist hvordan etagedækket og kernesektionen er

tilført et net. Der er anvendt standardindstillinger i Abaqus hvad angår finheden af nettet, elementformen og elementtype. Elementtypen er et 3- eller 4-knudet plade-skiveelement med seks frihedsgrader i hver knude, bestående af tre translations- og tre rotationsfrihedsgrader.



Figur 7.3: Kernesektion og etagedæk vist med netgenerering udført.

7.2 Anvendelse i BJmodel

Efter endt analyse i Abaqus fås følgende outputdata:

- x -, y - og z -translation af tre referencepunkter på hvert etagedæk i hver egensvingningsform.
- Rotation og x -, y - og z -aksen for et enkelt referencepunkt.
- Egenfrekvensen svarende til hver af de løste egensvingningsformer.
- Modalmasse svarende til hver af de løste egensvingningsformer.

Som beskrevet i afsnit 7.2.1 behandler MATLAB-funktionen **ABQDATAIMP.M** flytningsoutputtene, og konverterer disse til et bjælkesystem med 6 frihedsgrader i 43 knuder, svarende til 42 etager plus fundament. Frihedsgraderne ved fundament er sat til nul. Denne fremgangsmåde sikrer, at lastmodellen i **BJMODEL** kan påsættes strukturmodellen uafhængigt af, om det vælges at køre med den indbyggede FE-model i **BJMODEL**, eller der benyttes plade-skivemodellen fra Abaqus.

For at kunne gennemføre en tidsserieanalyse af responset fra konstruktionen, er det nødvendigt at kende den modale stivhedsmatrice og dæmpningsmatrice. Til bestemmelse af den modale stivhedsmatrice benyttes nedenstående relation mellem modalmasser, egenfrekvenser og stivhed.

$$K_i = \omega_i^2 \cdot M_i \tag{7.1}$$

hvor

K_i er den i 'te diagonalindgang i den modale stivhedsmatrice

ω_i er den cirkulære egenfrekvens $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ for den i 'te egensvingningsform

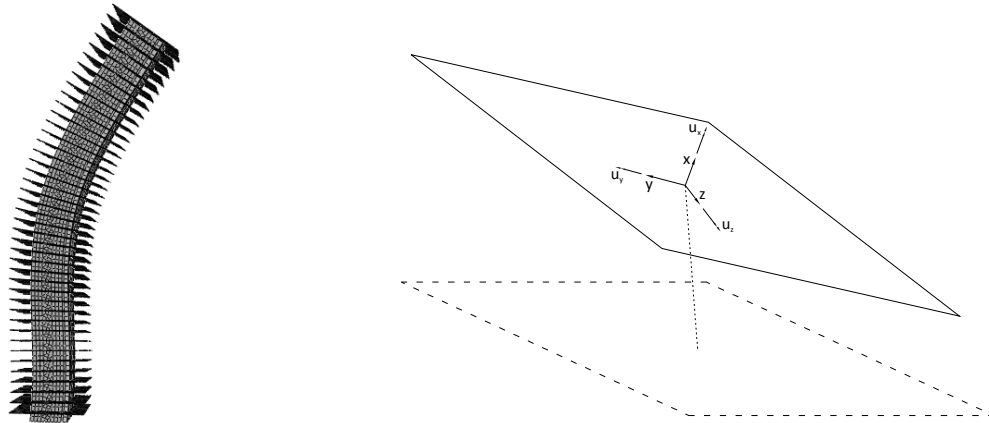
M_i er modalmassen svarende til den i 'te egensvingningsform

I forbindelse med formel (7.1) er det antaget, at systemet kan regnes modal dekoblet.

Den modale dæmpningsmatrice bestemmes efter Rayleighs dæmpningsmodel, som redegjort for i Appendiks G.

7.2.1 Konvertering af egensvingsformer

I det følgende gøres der kort rede for, hvordan de tredimensionelle fremstillinger af egensvingsformerne af plade-skivemodellen i Abaqus omsættes til data, som kan implementeres direkte i **BJMODEL**. Det er valgt at ækvivalere egensvingsformerne med en bjælkeanalogi i den forstand, at egensvingsformerne konverteres til et system bestående af 43 knuder, en for hver etage plus fundament. Hver af disse knuder placeres på bjælkeaksen af kernetværsnittet, og indeholder i lighed med bjælke modellen tre translations- og tre rotationsfrihedsgrader. Nedenstående figur viser til venstre, hvordan Abaqus visualiserer egensvingsformer for den tredimensionelle model.



Figur 7.4: Tredimensionel fremstilling af egensvingsform i Abaqus, samt skitsering af flytningsvektorer.

Som tidligere nævnt modelleres etagedækkene som uendeligt stive. Således translateres og roteres disse som stive legemer i rummet. På denne måde kan det enkelte etagedæks position i den enkelte egensvingsform benyttes som en entydig ækvivalent til de 6 frihedsgrader i den pågældende etageknude. Figur 7.4 til højre illustrerer hvorledes et etagedæk deformerer i en egensvingsform, og at denne deformation kan beskrives entydigt vha. tre translations- og tre rotationsfrihedsgrader.

I Abaqus defineres referencepunkt i tyngdepunktet, fra hvilket der eksporteres de seks nævnte frihedsgrader for hvert etagedæk i hver egensvingsform. På denne måde kan egensvingsformerne implementeres i **BJMODEL** på samme måde, som i den indbyggede bjælke model.

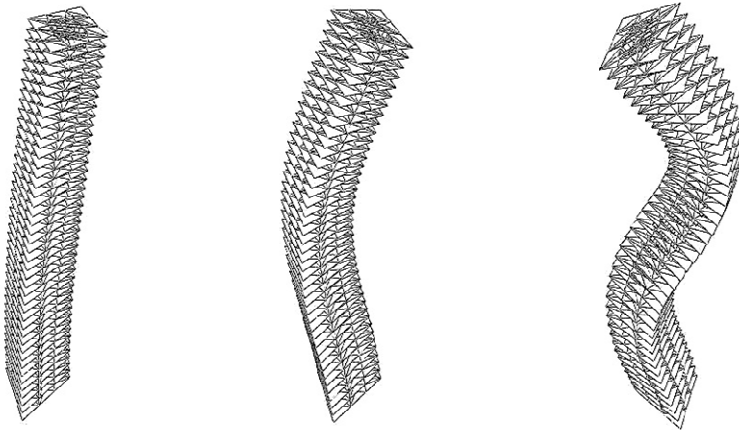
7.3 Resultater

I det følgende gengives udvalgte resultater i forbindelse med plade-skivemodellen af Light*House og hvordan dette ændrer på resultaterne ved implementering i **BJMODEL**.

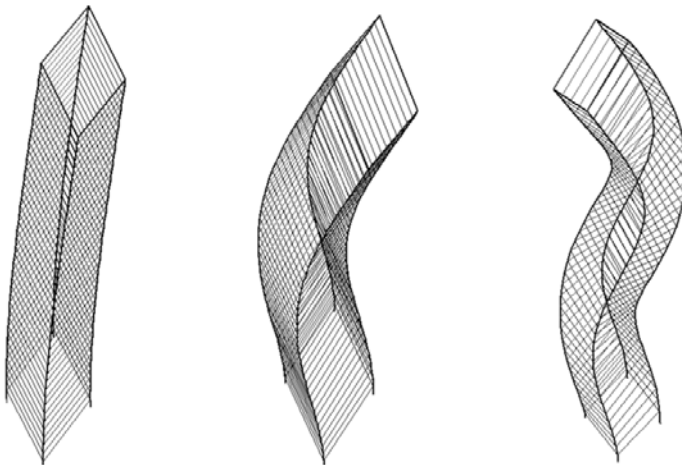
7.3.1 Egensvingsformer

Da koordinatsystemet følger hovedakserne, og i øvrigt er placeret ens i **BJMODELS** strukturmodel og i Abaqus, er det muligt direkte at sammenligne egensvingsformerne. Nedenstående sammenlignes de første tre egensvingsformer med udslag om den svage hovedakse i kernen. Selve formen på egensvingsformerne er visualiseret på figur 7.5, som stammer fra Abaqus' visualiseringsmo-

dul, og figur 7.6, som stammer fra en programmeret funktion, **EIGENMODEPLOT**, som vha. de seks frihedsgrader i en knude plotter en 3d model af den deformerede konstruktion.



Figur 7.5: De tre første egensvingningsformer med udslag om den svage hovedakse i abaqus plade-skivemodellen.



Figur 7.6: De tre første egensvingningsformer med udslag om den svage hovedakse i BJmodel bjælke modellen.

Sammenlignes egenfrekvenserne for disse tre modes, ses det, at der er en forholdsvis god overensstemmelse. Dette er angivet i tabel 7.3.

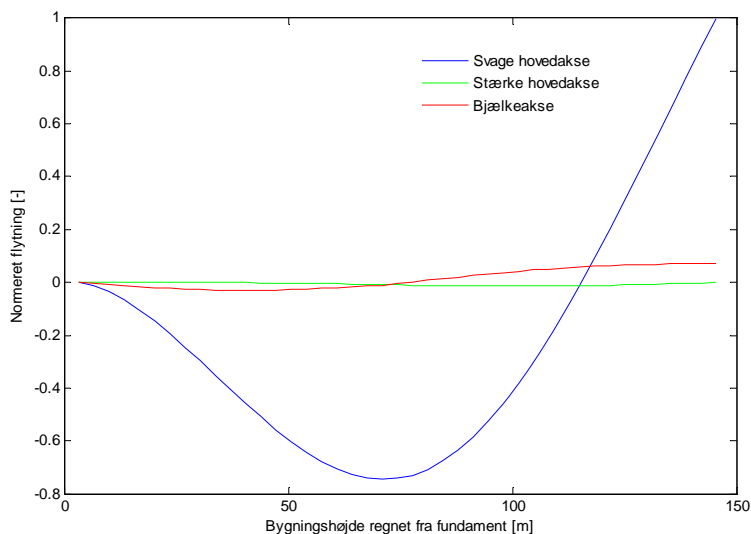
Tabel 7.3: Sammenligning af de tre første egenfrekvenser for den svage hovedakse for hhv. plade-skivemodellen i Abaqus og bjælke modellen.

	Bjælke model [Hz]	Plade-skivemodell [Hz]	Forskel [%]
1. egenfrekvens	0.23	0.23	0.0
2. egenfrekvens	1.38	1.25	10.4
3. egenfrekvens	3.76	3.18	18.2

I bjælke modellen er der ved den enkelte egensvingningsform udelukkende udslag i et geometrisk plan, hvilket skyldes at systemmatricerne for bjælkelementerne er formuleret efter hovedakserne. I plade-skivemodellen derimod får det konsekvenser for egensvingningsformerne, at kernen ikke har

helt samme orientering af hovedakserne i alle tre sektionstyper. Således er der også et mindre udslag om den stærke akse for de egensvingsformer, der ellers er klart domineret af udslag om den svage, og omvendt. Dette er illustreret på nedenstående figur, hvor 2. egensvingsningsform med frekvensen 1.25 Hz er undersøgt.

Som det ses, er flytningen om den svage akse normeret til 1. Da der som vist også er udslag om bjælkeaksen, indeholder denne egensvingsningsform således også en smule vridning af konstruktionen. Set ud fra et matematisk synspunkt, er eneste krav til egensvingsningsformerne, at disse skal være lineært uafhængige for at der kan gennemføres en modalanalyse. Dette er automatisk opfyldt, når konstruktionens understøtningsforhold sikrer, at der ikke kan optræde stivlegemeflytninger.



Figur 7.7: Geometrisk form af 2. egensvingsningsform om den svage hovedakse for plade-skivemodellen.

En anden interessant undersøgelse af systemanalyserne for de to FE-modeller, er i hvilken rækkefølge de enkelte egensvingsformer kommer. Dette er illustreret på nedenstående figurer og efterfølgende figur 7.8, som viser de første 10 egensvingsningsformer for hhv. bjælke modellen i **BJMODEL** og Abaqus plade-skivemodellen. Rækkefølgen følger egenfrekvenserne i stigende orden. Tabel 7.4 viser, hvordan rækkefølgen for de to modeller svarer til hinanden, når der tages udgangspunkt i rækkefølgen fra **BJMODEL**.

Tabel 7.4: Rækkefølge og beskrivelse af egenmodes for de to strukturmodeller.

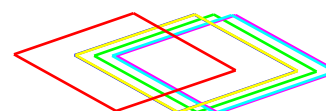
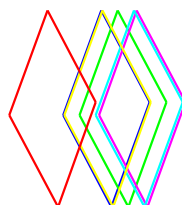
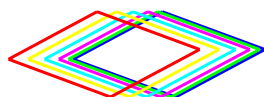
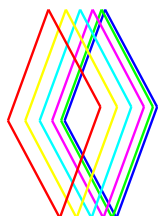
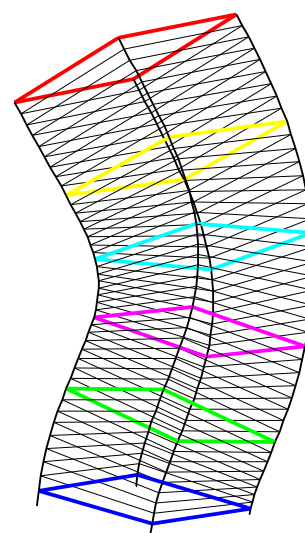
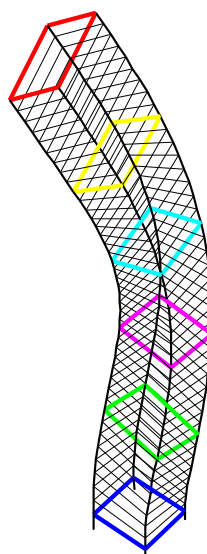
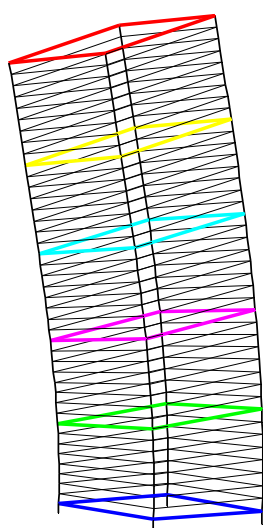
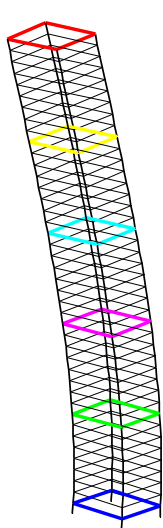
Egensvingsform	BJmodel	Ækvivalent	Abaqus
1	Første mode om svage akse	1	Se beskrivelse for BJmodel
2	Første mode om stærke akse	2	Se beskrivelse for BJmodel
3	Anden mode om svage akse	4	Se beskrivelse for BJmodel
4	Anden mode om stærke akse	5	Se beskrivelse for BJmodel
5	Første vridningsmode	3	Se beskrivelse for BJmodel
6	Tredje mode om svage akse	6	Se beskrivelse for BJmodel
7	Første mode i bjælkeakse	8	Se beskrivelse for BJmodel
8	Fjerde mode om svage akse	-	Kompleks om begge akser
9	Tredje mode om stærke akse	-	Kompleks om begge akser
10	Anden vridningsmode	7	Se beskrivelse for BJmodel

0.23Hz

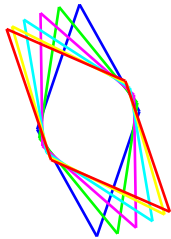
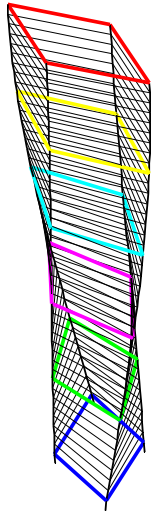
0.52Hz

1.38Hz

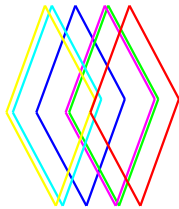
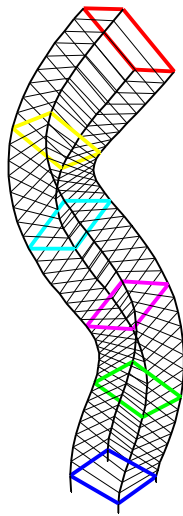
3.13Hz



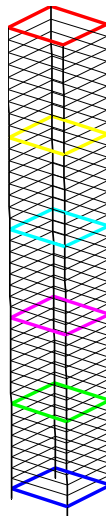
3.24 Hz



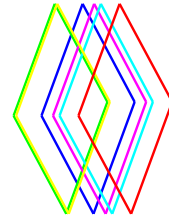
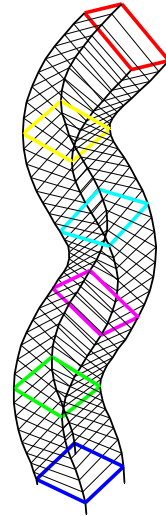
3.76 Hz



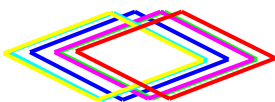
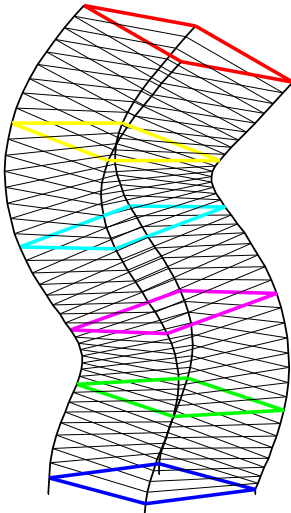
3.92 Hz



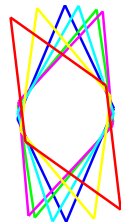
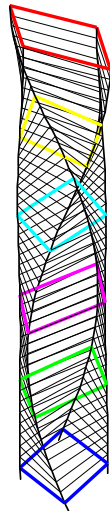
7.36 Hz

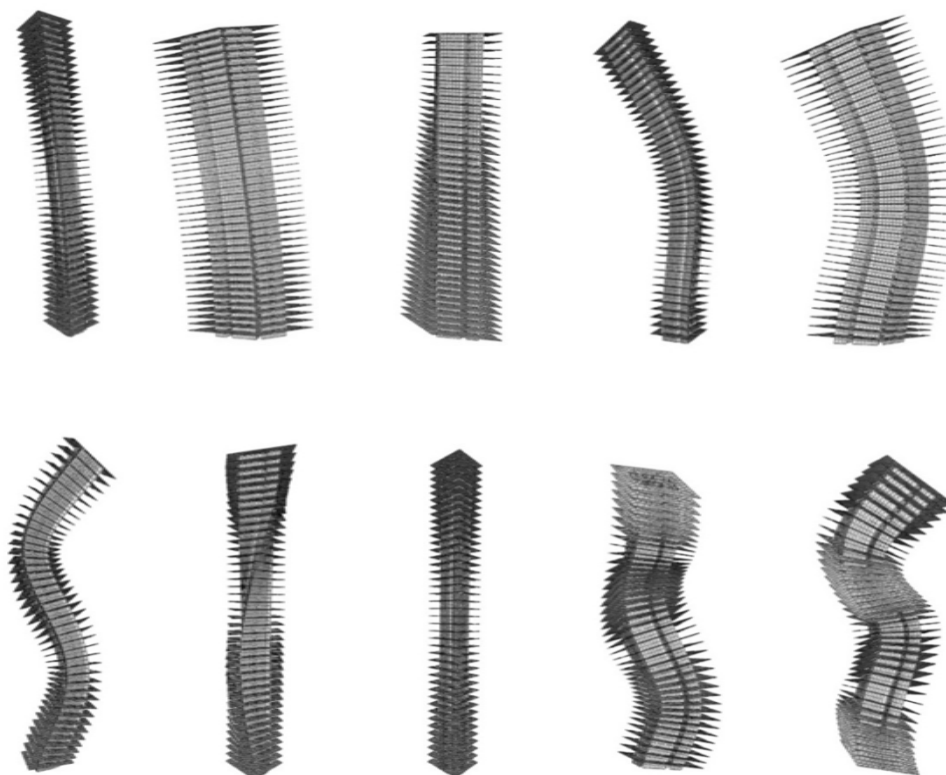


8.67 Hz



9.52 Hz





Figur 7.8: Visualisering af de første 10 egensvingsformer i Abaqus plade-skivemodell.

Tabel 7.5: Angivelse af egenfrekvenser for de første 10 egensvingsformer i Abaqus modellen.

Egensvingsform	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Egenfrekvens [Hz]	0.23	0.51	1.21	1.25	2.45	3.18	3.46	3.98	5.50	5.62

Hvis det sammenlignes, hvor store modalmasserne tilhørende de forskellige modes er for hver strukturmodel, fås resultatet vist i tabel 7.6, som medtager de første seks modes. I denne er modalmasserne for Abaqusmodellen ordnet således, at hver model svarer til den tilsvarende mode i **BJMODELS** bjælkemodell jf. tabel 7.4.

Tabel 7.6: Sammenligning af de første seks modalmasser svarende til rækkefølgen af modes fra BJmodel.

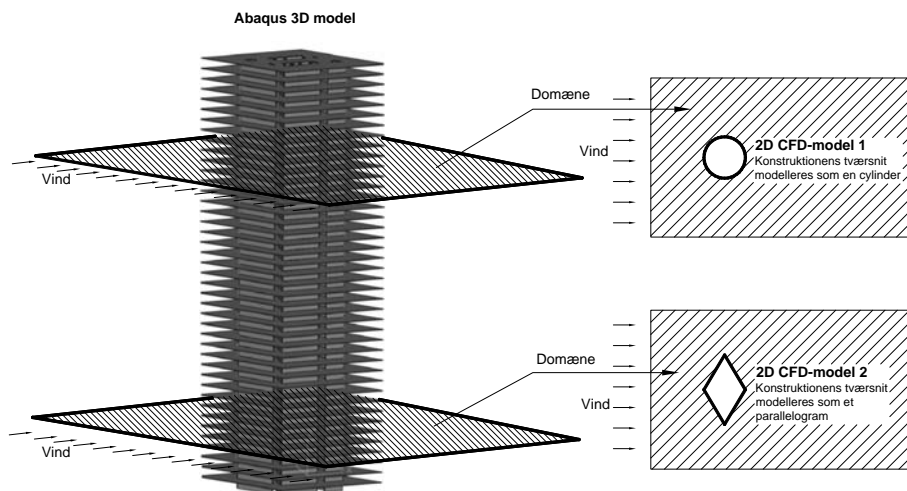
Strukturmodel	Modalmasse tilhørende egensvingsform nummer					
	1	2	3	4	5	6
BJmodel	1630	1635	1674	1700	31064	1735
Abaqus	1681	1762	2468	525	1756	2182
Afvigelse i %	3	7	31	-224	1669	21

Som det ses, er der voldsomme afvigelser på de lidt højere modes, mens især de to laveste er sammenlignelige. I praksis viser det sig, at netop de to laveste modes, dvs. første mode om hhv. den svage og den stærke akse, er dem der er klart dominerende i en tidsserieanalyse. Derfor betyder det ikke så meget for det resulterende respons, at de højere modes har vidt forskellige modalmasser.

Kapitel 8

Forbedret lastmodel ved CFD

Til bestemmelse af drag- og liftkoefficienten for vindlasten på konstruktionen er det valgt at anvende CFD-modelleringer. Først foretages et parameterstudie af størrelser, som har indflydelse på lastkoefficienterne, hvorefter resultaterne implementeres i **BJMODEL.M**. På nedenstående figur ses de 2 modeller af konstruktionens tværsnit, som er anvendt. Der er i første omgang foretaget CFD-simuleringer, hvor konstruktionens tværsnit antages cirkulært (CFD-model 1). Analysen for disse simuleringer viser nogle af de overordnede fysiske fænomener som opstår, når vinden blæser ind på konstruktionen samtidig med at denne bliver flyttet. Herefter foretages samme simuleringer hvor konstruktionens tværsnit har formen som et parallelogram, hvilket tilnærmelsesvis svarer til den reelle konstruktion. I begge modeller er der anvendt den samme vindhastighed ved 142 m over terrænet. Alle simuleringerne er foretaget med todimensionelle strømningberegninger i ANSYS CFX.



Figur 8.1: Principskitse for de 2 CFD-modeller som er foretaget. Begge modeller anvender de samme fysiske antagelser ved 142 m over terrænet.

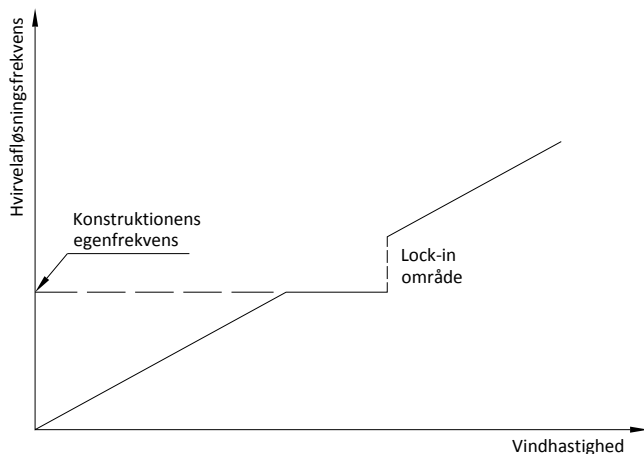
I det følgende beskrives CFD-model 1 med hensyn til

- Geometrisk opbygning i ANSYS - *Geometry*
- Valg af randbetingelser
- Valg af diskretisering
- Påførsel af tvungen bevægelse
- Analyse af CFX-data

De samme punkter gentages for CFD-model 2.

Et vigtigt aerodynamisk fænomen, som kan opstå, er vortex lock-in. Nedenstående skitse viser princippet i dette. Som det ses, vil der normalt være en lineær sammenhæng mellem vindhastigheden og

hvirvelafløsningsfrekvensen bestemt af geometrien jf. afsnit 8.1.5. Men som vist kan der opstå det fænomen, at når hvirvelafløsningsfrekvensen når op på konstruktionens egenfrekvens, vil denne blive eksiteret så meget i den tilsvarende egensvingningsform, at det er konstruktionens bevægelse, der styrer hvirvlernes afløsning, selvom vindhastigheden ændrer sig. Dette fænomen kan finde sted i kortere eller længere tid, hvorefter det igen vil være vindhastigheden, der er betydende for hvirvelafløsningsfrekvensen.



Figur 8.2: Principskitse for Vortex Lock-in.

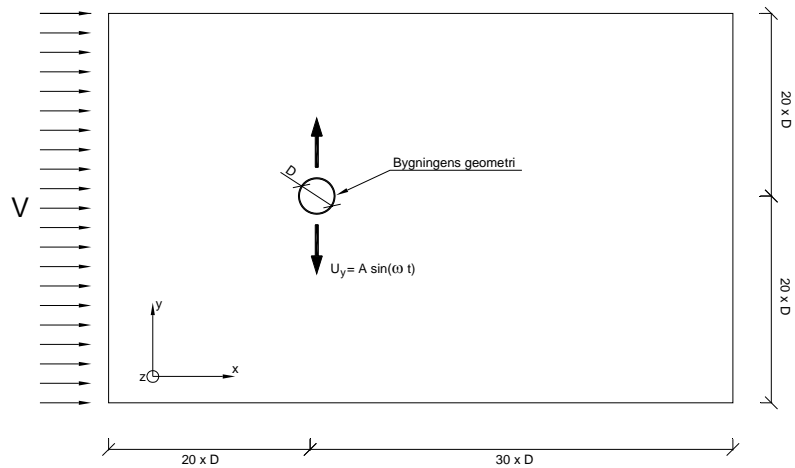
I dette projekt er Strouhalstallet bestemt ved at påføre konstruktionsgeometrien varierende vindhastigheder i CFX, og herefter analysere lastsignalet herfra. På denne baggrund er der fittet et matematisk udtryk, som beskriver hvirvelafløsningsfrekvensen alene som funktion af vindhastigheden. Denne analyse vil generelt godt kunne anvendes til at undersøge hvorvidt lock-in fænomenet kan finde sted. Dette har dog ikke været fokus i dette projekt, hvorfor der ikke er arbejdet målrettet med at optimere net, tidsskridt og lastpåførsel specifikt for undersøgelse af konstruktionens følsomhed overfor lock-in. I stedet er formålet at undersøge relevante størrelses indflydelse på lastkoefficienterne, når disse modelleres afhængige af responset fra konstruktionen.

8.1 CFD-model 1 - Cylinder

Modellen som benyttes i disse simuleringer er vist på figur 8.3, hvor konstruktionens tværsnit er antaget cirkulært og benævnes i det følgende *cylinder*. Der påføres et vindfelt på det på figuren skitserede domæne samtidig med at cylinderen tvinges i en harmonisk bevægelse vinkelret på vindfeltet. Denne bevægelse benævnes *tværflytning*. Det matematiske udtryk for denne bevægelse er vist på figuren. Følgende parametres indflydelse på drag- og liftkoefficienten ønskes undersøgt:

- Hastigheden af det uforstyrrede vindfelt V
- Tværflytningens amplitude A
- Tværflytningens frekvens ω

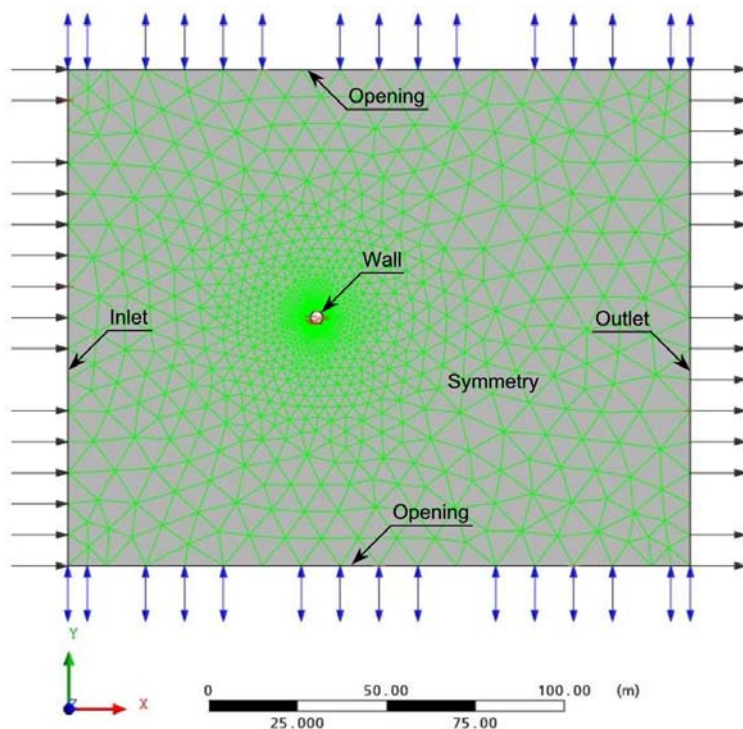
Betegnelserne er illustreret på nedenstående definitionsskitse.



Figur 8.3: Definitionsskitse af modellen som er benyttet ved simuleringerne i ANSYS Workbench.

8.1.1 Valg af randbetingelser

I det følgende defineres randene i domænet. Nedenstående figur viser de forskellige rande, som er benyttet i domænet.



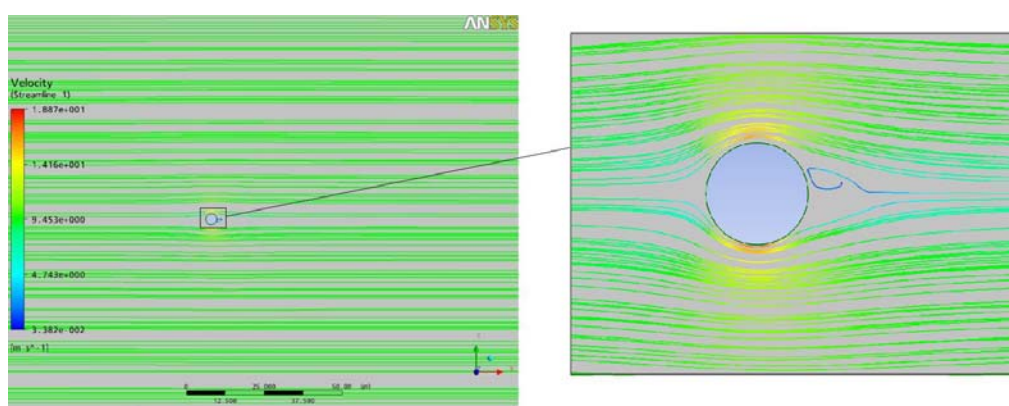
Figur 8.4: Domænet med de tilhørende rande.

Domænet består af symmetrirande i hhv. toppen og bunden, mens cylinderen er beskrevet ved randen wall. Opsætningerne for randene er angivet i nedenstående tabel.

Tabel 8.1: Opsætning for randene. *Den skalerede hastighed som i fuldskala vil svare til 30 m/s.

Randtype	Beskrivelse	Strømningsspecifikation
Inlet	Benyttes når strømmingen er predefineret. I dette tilfælde påføres et hastighedsfelt som strømmer vinkelret på randen.	Hastighedsfelt 9.5 m/s *
Outlet	Benyttes når strømmingen er predefineret. I dette tilfælde antages randen upåvirket af strømmingen omkring cylinderen da denne er placeret lang væk fra cylinderen og den relative trykforskel er derfor 0.	Relativt tryk 0 Pa
Opening	Benyttes når der kendes nogle betingelser ved randen men ingen videre kendskab til strømmingen ind og ud af randen. I dette tilfælde antages randen upåvirket af strømmingen omkring cylinderen da denne er placeret lang væk fra cylinderen og den relative trykforskel er derfor 0.	Relativt tryk 0 Pa
Wall	Dette er den mest almindelige wall type. Strømningshastigheden umiddelbart udenfor wall er den samme som hastigheden ved wall, dvs. 0.	No Slip, Glat væg
Symmetry	Benyttes når der er symmetri omkring en plan. I dette tilfælde er toppen og bunden af domænet defineret ved symmetriplanen, da det kun er den plane strømning som ønskes.	Uspecificeret

Det fremgår af nedenstående figur, at strømlinjerne er parallelle ude ved randene *opening*, hvilket indikerer at strømmingerne her er upåvirket af strømmingerne omkring cylinderen. Det ses at strømmingen bag cylinderen er turbulent, hvilket hænger sammen med de høje Reynolds tal i størrelsesordenen 10^8 .



Figur 8.5: Strømlinjer i domænet der viser at strømlinjerne ude ved randene er parallelle.

8.1.2 Geometrisk opbygning

Den geometriske opbygning af modellen er foretaget i underprogrammet *Geometry*. Først er det antaget at bygningens tværsnit er cirkulært som skitseret på figur 8.3. Den ækvivalente diameter er

valgt til 35 m således at arealet svarer til det virkelige tværsnit. Geometrien af domænet omkring bygningen skal være så stort, at strømningssforholdene omkring cylinderen ikke påvirker strømningerne ude ved randene. Dette sker ud fra betingelsen om, at strømlinjerne skal være parallelle med domænerandene langs disse. Det ses af figur 8.3, at afstandene fra cylinderen ud til randene er sat til enten $20D$ eller $30D$, hvilket svarer til hhv. 700 m eller 1050 m. Det viser sig at CFX har problemer med at håndtere store domæner, hvorfor det vælges at skalere modellen med 1:10, dvs. med en længdeskala på $\lambda_L = 10$. Som det fremgår af tabel 8.1, er det valgt at påføre en vindhastighed på 30 m/s, hvilket svarer til hastigheden 142 m over jordoverfladen med en logaritmisk hastighedsfordeling efter DS 410 jf. 0. I henhold til (Brorsen, et al., 2003 s. 80) benyttes Froudes modellov, når tyngdekraften er dominerende, hvilket er gældende i denne forbindelse. Hastighedsskalaen er derfor

$$\lambda_V = \lambda_L^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \tag{8.1}$$

Hastigheden i modellen bliver derfor

$$V = \frac{30 \frac{m}{s}}{\sqrt{10}} = 9.5 \frac{m}{s} \tag{8.2}$$

CFX foretager strømningssberegningerne i tre dimensioner, mens det i projektet ønskes at modellere strømningerne i det plane tilfælde, som vist på ovenstående skitse. Det er derfor nødvendigt at angive en tykkelse på det på figur 8.3 skitserede domæne. Tykkelsen er sat til 1 m, hvilket svarer til ca. 1 % af de to øvrige dimensioner af domænet.

8.1.3 Valg af diskretisering

For at finde det bedste kompromis mellem beregningstid og nøjagtighed optimeres nettet omkring cylinderen. Det er valgt at følge CFX Mesh's standard netgenerering langt fra cylinderen, da dette område af domænet ikke er særlig følsomt overfor nettets diskretisering. Tabel 8.2 viser standard opsætningerne når CFX Mesh genererer nettet.

Tabel 8.2: Standard opsætning i forbindelse med netgenerering i ANSYS.

Option	Angular Resolution
Angular Resolution [grader]	30
Minimum sidelængde [m]	0.03
Maksimum sidelængde [m]	16

Der genereres først todimensionelle net, hvorefter nettet ekstruderes. For at gøre diskretiseringen omkring cylinderen finere uden væsentlige ændringer i resten af domænet, indlægges et *face spacing* lag som er vist på figur 8.6.

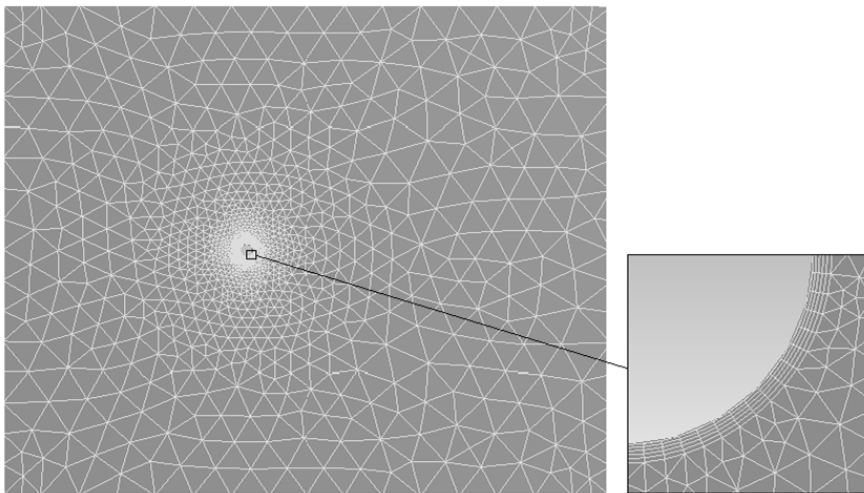
Tabel 8.3 viser opsætningerne for dette.

Tabel 8.3: Opsætningerne for face spacing.

Option	Konstant
--------	----------

Konstant sidelængde [m]	0.01
Radius af face spacing [m]	-
Ekspansionsfaktor	1.2

Yderligere indlægges et *inflation layer*, som vist på nedenstående figur. Dette lag beskriver geometrien omkring cylinderen vha. rektangler i stedet for trekantede elementer, og er vist på nedenstående figur. På den måde reduceres antallet af elementer omkring cylinderen. Opsætningerne for inflation laget er angivet i tabel 8.4.

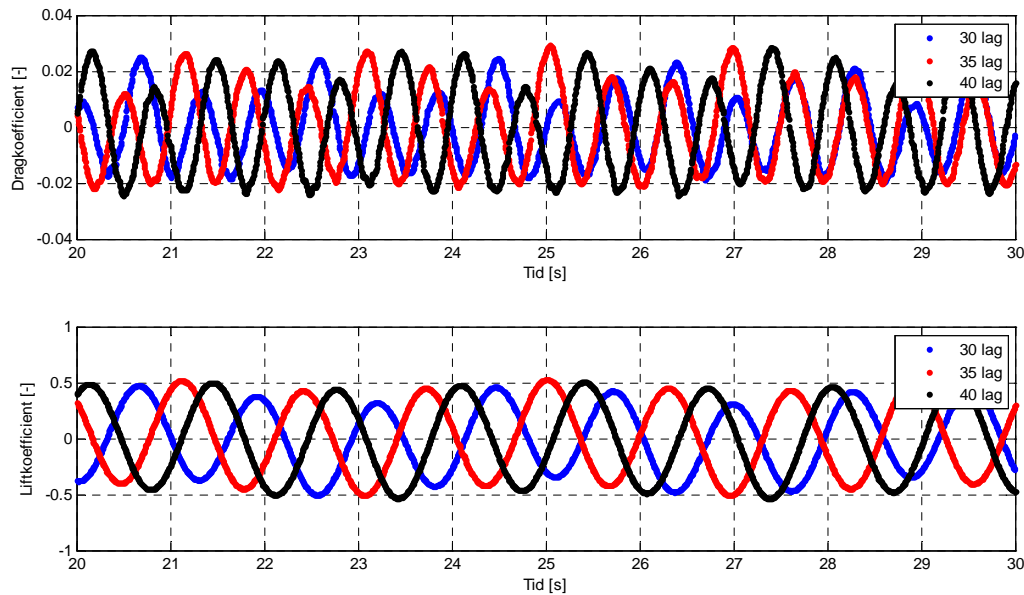


Figur 8.6: Domænet omkring cylinderen med indlæggelse af face spacing og inflation layer.

Tabel 8.4: Opsætningerne for inflation layer.

Antal inflation layers	35
Ekspansionsfaktor	1.1
Minimum interne vinkel [grader]	2.5
Minimum eksterne vinkel [grader]	10.0
Option	Total tykkelse
Tykkelse multiplikator	5

Nettet omkring cylinderen optimeres ved at foretage en konvergensanalyse af drag- og liftkoefficienten ved forskellige antal af inflation layers omkring cylinderen. Den samlede tykkelse af inflation layerne er sat til 0.2 m , og hvert inflation layer har 256 elementer omkring cylinderen. Konvergensanalysen foretages ved at øge antallet af inflation layers, mens den samlede tykkelse af lagene holdes konstant på 0.2 m . På den måde gøres de forskellige lag i inflation layeret finere. På figur 8.7 er drag- og liftkoefficienternes variation ved forskellige antal af inflation layer optegnet. Det ses at kurverne med 35 og 40 lag har samme amplitude og frekvenser som blot er faseforskudt. Dette skyldes en lidt tilfældig begyndelsesbetingelse i CFX som gør, at kurverne ikke har samme fase. Det kan derfor konkluderes, at det er tilstrækkeligt med 35 lag.



Figur 8.7: Drag- og liftkoefficientens variation ved forskellige antal af inflation layer.

De forskellige kurver på figuren er plottet på baggrund af en transient simulering skitseret på figur 8.3 med følgende parameterindstilling.

Tabel 8.5: Indstillinger for de på figur 8.7 plottede lift- og dragkoefficienter. Alle parametre er skaleret efter Froudes modellov.

Hastighed V	Re	Amplitude A	Frekvens w	Tidsskridt	Turbulensmodel
9.5 m/s	1.8623e+07	0.05 m	1.50 rad/s	0.005 s	$k - \omega$

8.1.4 Valg af turbulensmodel

I det følgende beskrives den turbulensmodel, som er i benyttet i forbindelse med CFD-simuleringerne. Afsnittet er baseret på (Wilcox, 2006). Der er i projektet ikke lagt vægt på undersøgelse af forskellen i resultaterne af de forskellige turbulensmodeller, men blot fokuseret på beskrivelse af den anvendte turbulensmodel. Den anvendte turbulensmodel hører under typen RANS, hvor parametrene i den styrende Navier-Stokes ligning er midlet over tiden ved Reynolds dekompositionsmetode. Denne ligning er givet ved

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ji} - \rho \overline{u_j u_i}) \tag{8.3}$$

hvor

- U er middelhastigheden
- ρ er luftens densitet
- μ er den molekulære viskositet

S er en tøjningstensor givet ved $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

u er hastigheden givet ved $u(x,t) = U(x) + u'(x,t)$

u' er et fluktuationsled

P er trykket

I formel (8.3) er $\overline{u'_j u'_i}$ Reynolds spændingstensor, som oftest betegnes τ_{ij} . Denne spændingstensor er symmetrisk, og består af 6 ubekendte komponenter. Yderligere er hastighedskomponenterne i 3 retninger samt trykket ubekendte. Ud fra kontinuitetsligningerne samt ligningerne for impulsbevarelse haves 6 ligninger men 10 ubekendte. Ligning (8.3) er derfor ubestemt. I [Wilcox] er der redegjort for, at når der forsøges at tilføje flere ligninger til løsning af ligning (8.3) fås endnu flere ubekendte. Der er i denne forbindelse indført en række turbulensmodeller som, benytter enten 1 eller 2 ekstra transportligninger til bestemmelse af Reynolds spændingstensoren. Basis for alle 2-lignings modeller er den såkaldte *Boussinesq eddy viscosity* antagelse som postulerer, at Reynolds spændingstensor er proportional med tøjningstensoren S_{ij} og kan skrives som

$$\tau_{ij} = 2\mu_T S_{ij} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (8.4)$$

hvor

μ_T er den turbulente viskositet (eddy viskositet)

k er den turbulente kinetiske energi

I det følgende betragtes $k-\omega$ -modellen.

k - omega turbulensmodel

$k-\omega$ -modellen tager udgangspunkt i følgende 2 ekstra transportligninger

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (8.5)$$

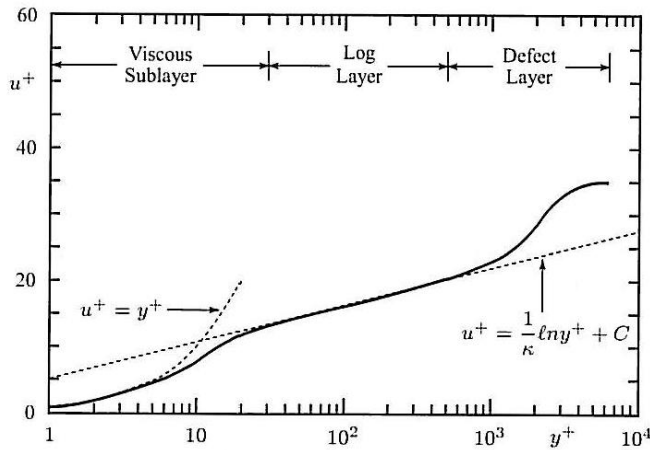
og

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (8.6)$$

hvor parametrene i de to transportligninger er bestemt empirisk, som har et vist gyldighedsområde for visse "standardgeometrier" og strømningstyper. Erfaring viser dog, at disse parametre giver fornuftige resultater selv når gyldighedsområdet ikke er opfyldt. Den turbulente viskositet bestemmes ved

$$\mu_T = \frac{k}{\omega} \quad (8.7)$$

Når den turbulente viskositet kendes, kan Reynolds spændingstensor bestemmes og ud fra kontinuitetsligningerne samt impulsbevarelseligningerne kan løsningen til (8.3) findes. Til forskel fra $k-\varepsilon$ -modellen er $k-\omega$ -modellen bedre til at modellere separationen tæt på væggen, hvor hastigheden og dermed Renoldstallet er lavt. Alternativt kan vægloven anvendes i grænselaget, hvor hastigheden bestemmes som vist på nedenstående figur.



Figur 8.8: Typisk hastighedsprofil for turbulentstrømning i grænselaget (Wilcox, 2006).

På figuren er den dimensionsløse hastighed u^+ og afstand fra vægoverfladen y^+ defineret ved

$$u^+ = \frac{U}{\mu_\tau} \quad \text{og} \quad y^+ = \frac{\mu_\tau}{\mu} y \tag{8.8}$$

hvor y er den fysiske afstand fra vægoverfladen. Følgende udtryk for hastighedsprofilet benyttes i de forskellige lag

Viskose lag: $u^+ = \frac{\mu_\tau}{\mu} y$

Log lag: $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.0$

8.1.5 Påførsel af flytning på cylinderen

Som tidligere nævnt ønskes det at undersøge, hvorledes drag- og liftkoefficienterne for vindlasten er påvirket af forskellige parametre. Der påføres en flytning på cylinderen, hvilket sker vha. en *expression* i CFX på følgende form

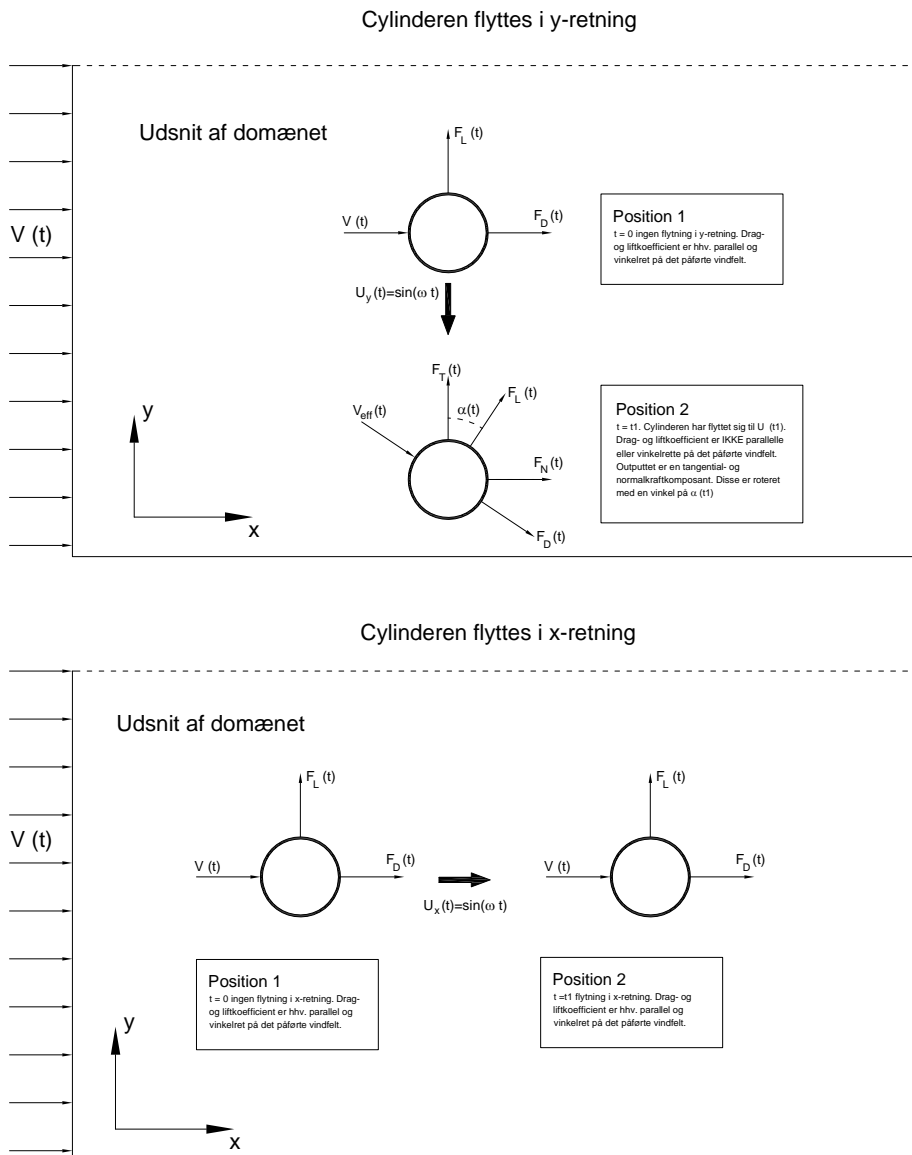
$$U_y = A \sin(\omega t) \tag{8.9}$$

Som nævnt er det valgt at se på tre parametre, som kan påvirke cylinderens drag- og liftkoefficient. I det følgende benævnes drag i stedet normal, og lift i stedet tangential, idet drag og lift refererer til den effektive vindretning, som ikke er konstant, når cylinderen bevæges. Kraftoutputtet fra CFX kan

med fordel normeres med faktoren $\frac{1}{2}\rho V^2 D$ ved at betragte hhv. tangential- og normalkraftkomponenten

$$F_T = \frac{1}{2}\rho V^2 D C_T \quad F_D = \frac{1}{2}\rho V^2 D C_D \quad (8.10)$$

Nedenstående figur viser hvordan tangential- og normalkraftkomponenterne er defineret.



Figur 8.9: Definitionsskitse af kraftkomponenterne når cylinderen flyttes i hhv drag- og liftretningen.

Nedenstående tabel viser de simuleringer, som er kørt i CFX, hvor alle parametrene er i modelskala.

Tabel 8.6: Forskellige kombinationer af amplitude, frekvens og hastighed.
Alle værdier er i modelskala.

Simulering Nr.	Amplitude	Frekvens	Hastighed	Reduceret frekvens
	$A [m]$	$\omega [\frac{rad}{s}]$	$V [\frac{m}{s}]$	$K [-]$
1	0.05	1.50	2.5	2.10
2	0.05	1.50	5.5	0.95
3	0.05	1.50	7.5	0.70
4	0.05	1.50	9.5	0.55
5	0.05	1.50	11.5	0.46
6	0.05	1.50	13.5	0.39
7	0.05	1.50	14.5	0.36
8	0.05	0.09	14.5	0.22
9	0.05	1.10	14.5	0.27
10	0.05	1.30	14.5	0.31
11	0.05	1.70	14.5	0.41
12	0.05	1.90	14.5	0.46
13	0.05	2.10	14.5	0.51
14	0.05	2.30	14.5	0.56
15	0.05	6.00	14.5	1.45
16	0.07	1.50	14.5	0.36
17	0.09	1.50	14.5	0.36
18	0.11	1.50	14.5	0.36
19	0.13	1.50	14.5	0.36

8.1.6 Estimering af tangential- og normalkoefficient

Når cylinderen flyttes i enten x - eller y -retningen vil der både være et bidrag i normal- og tangential-retningen jf. figur 8.9. I (Scanlan, et al., 1996) antages det at lastkoefficienterne er lineær afhængig af bevægelsens hastighed efter udtrykket vist i formel (8.11), som er baseret på normal praksis indenfor aerodynamik for broprofil. Der er foruden lasten generet af bevægelsen adderet et lastbidrag til F_N og F_L , som stammer fra hvirvelaflysninger omkring konstruktionen.

$$\begin{aligned}
 F_N &= \frac{1}{2} \rho V^2 D \left(K S_{Nx} \frac{\dot{u}_x}{V} + K S_{Ny} \frac{\dot{u}_y}{V} + f_N(\zeta, V) \right) \\
 F_T &= \frac{1}{2} \rho V^2 D \left(K S_{Tx} \frac{\dot{u}_x}{V} + K S_{Ty} \frac{\dot{u}_y}{V} + f_T(\zeta, V) \right)
 \end{aligned}
 \tag{8.11}$$

hvor

\dot{u} er cylinderens hastighed i hhv. i x - og y -retning

V er vindhastighed

$S(K)$ er en dimensionsløs parameter som er givet ved formel (8.22)

K er en dimensionsløs frekvens givet ved

$$K = \frac{D\omega_b}{V}$$

hvor ω_b er den cirkulære frekvens for cylinderens bevægelse

$f(\zeta, V)$ er en funktion der beskriver hvirvlernes bidrag til lastkoefficienterne

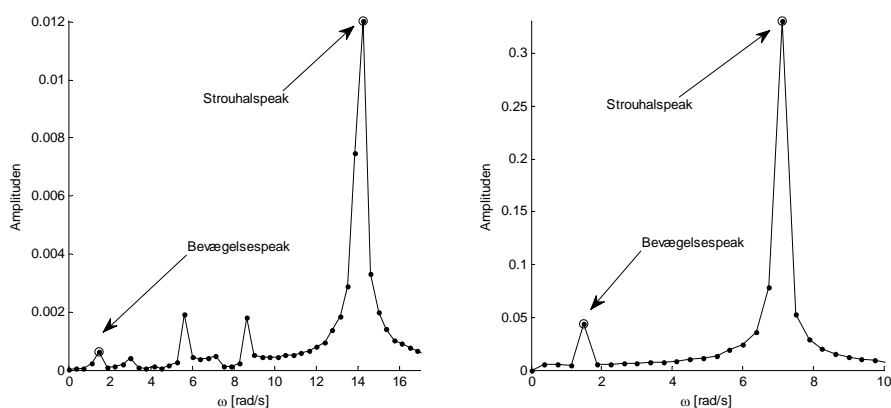
hvor ζ er Strouhalsstallet.

Strouhalstallet er defineret som

$$\zeta = \frac{\omega_s D}{V} \quad (8.12)$$

hvor ω_s er strouhalsfrekvensen.

For en bestemt vindretning og geometri er Strouhalstallet konstant. I formel (8.11) angiver indeks x og y cylinderens bevægelsesretning. S_{Tx} og S_{Ty} angiver parameteren S bestemt ud fra signalet for hhv. tangential- og normalcoeffcienten, når cylinderens flyttes i hhv. x - og y -retningen. Når cylinderen bevæges i x -retningen vil bidraget i tangentialretningen være dominerende i forhold til bidraget i normalretningen. Omvendt vil bidraget i normalretningen være dominerende, når cylinderen flyttes i x -retningen. Dette er vist på nedenstående figur, hvor amplitudespektret for signalet af hhv. normal- og tangentialcoeffcienten for simulering nr. 6 i tabel 8.6, hvor cylinderen bevæges i liftretningen, er vist. Det ses, at begge peaks i tangentialsignalet er meget større end de tilsvarende peaks i normalsignalet. Endvidere ses, at peaken fra cylinderens bevægelse er ubetydelig sammenlignet med strouhalspeaken for signalet for normalcoeffcienten. Strouhalspeaken for dette signal kan dog ikke negligeres, da denne er i samme størrelsesorden som bevægelsespeaken for tangentialcoeffcienten.



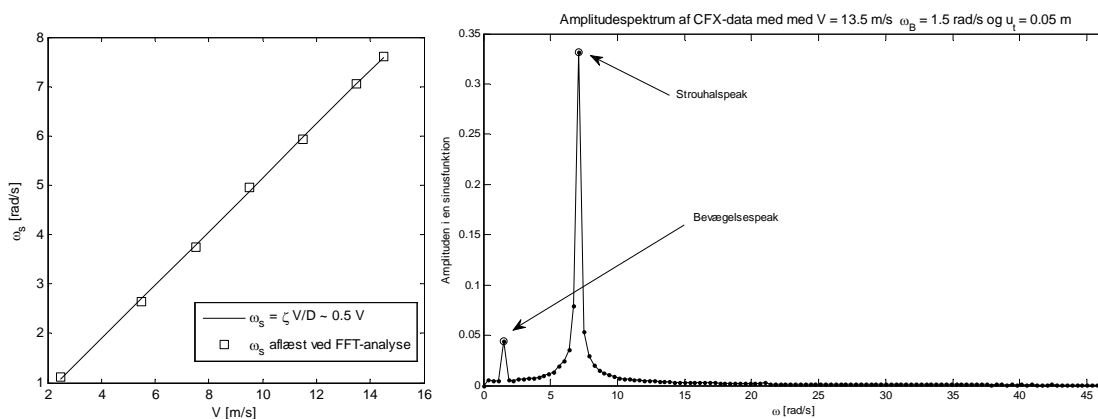
Figur 8.10: Tv.: Amplitudespektrum for signalet for normalcoeffcient. Th.: amplitudespektrum for signalet for tangentialcoeffcient. Begge signaler svarer til simulering nr. 6 i tabel 8.6 hvor cylinderen bevæges i y -retningen.

I det følgende betragtes de to tilfælde hvert for sig, og kun den dominerende del tages i regning, dvs. at S_{Ny} og S_{Tx} antages lig 0. Formel (8.11) reduceres derfor til

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{2} \rho V^2 D \left(K S_{Nx} \frac{\dot{u}_x}{V} + f_N(\zeta, V) \right) \\ F_T &= \frac{1}{2} \rho V^2 D \left(K S_{Ty} \frac{\dot{u}_y}{V} + f_T(\zeta, V) \right) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Tangentialkoefficient

Til venstre på nedenstående figur er strouhalsfrekvensen til forskellige hastigheder optegnet for signalet for tangentialkoefficienten. De optegnede frekvenser er estimeret ved en FFT-analyse, som er vist på figuren til højre. For nærmere beskrivelse af FFT-analysen for CFX-data henvises til Appendiks J. Det ses af figuren, at der er 2 dominerende peaks på amplitudespektret stammende fra hhv. cylinderens bevægelse og hvirvelafløsningen. På tilsvarende måde bestemmes de øvrige strouhalsfrekvenser på figuren til højre. Ud fra disse punkter er sammenhængen mellem den påførte vindhastighed V og strouhalsfrekvensen ω_s bestemt.



Figur 8.11: Tv.: Plot af strouhalsfrekvens som funktion af vindhastighed. Th.: Amplitudespektrum af CFX-data svarende til simulering nr. 6 i tabel 8.6. Dataene stammer fra CFX-simulering 6 for tangentialkoefficienten.

Som vist på figuren kan strouhalsfrekvensen til forskellige vindhastigheder bestemmes ved

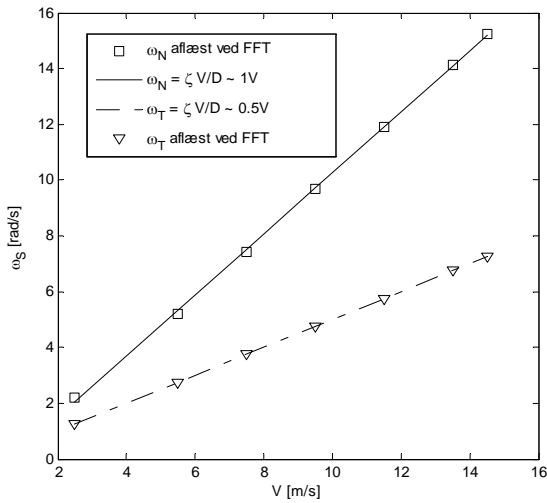
$$\omega_{S,Tangential} = \frac{\zeta}{D} V = 0.5V \quad (8.14)$$

Det vil sige at

$$\frac{\zeta}{D} = 0.5 \Rightarrow \zeta = 0.5D = 1.75 \quad (8.15)$$

Strouhalstallet angives almindeligvis således, at denne medfører en strouhalsfrekvens i Hz. Dette tal bør principielt divideres med 2π . I det følgende anvendes enheden *rad/s* for strouhalsfrekvensen. Strouhalsfrekvensen i begge retninger er den samme, men frekvensen hvorpå hvirvlerne påvirker cylinderen med er dobbelt så stor i dragretningen end i liftretningen.

Normal- og tangentialpåvirkningsfrekvensen, når cylinderen bevæges i y-retningen, er vist på nedenstående figur.



Figur 8.12: Fit af normal- og tangentialpåvirkningsfrekvensen når cylinderen bevæges i y-retningen.

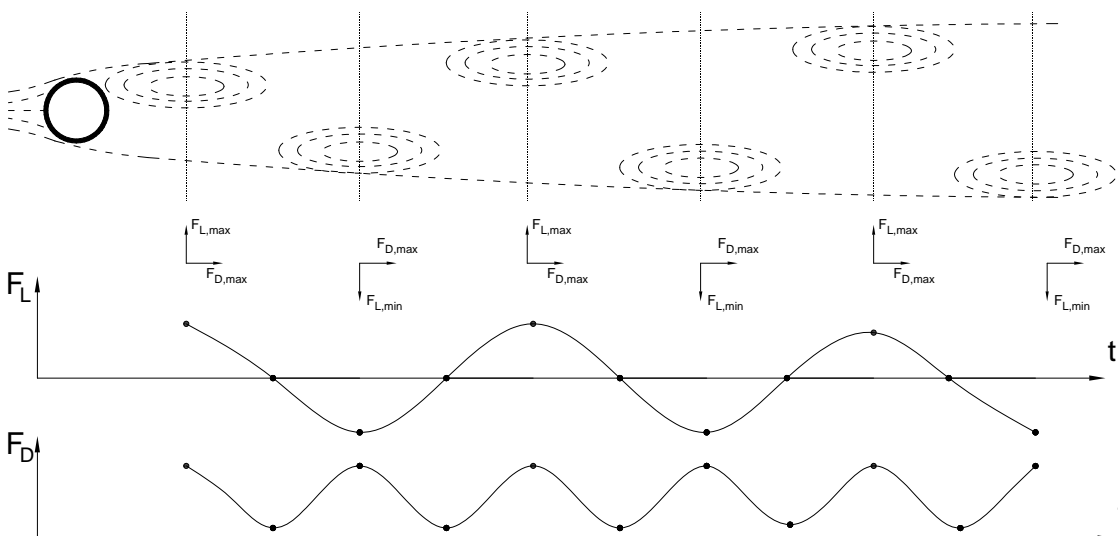
Tangentialpåvirkningsfrekvensen er fittet til

$$\omega_T = \frac{\zeta}{D} V = 0.5V \quad (8.16)$$

Normalpåvirkningsfrekvensen er fittet til

$$\omega_N = 2\omega_T = 1V \quad (8.17)$$

Det ses at påvirkningsfrekvensen for en given hastighed er dobbelt så stor i normalretningen sammenlignet med tangentialretningen. På nedenstående figur er dette skitseret ved en principskitse.



Figur 8.13: Principskitse for hhv. drag- og liftkraften fra hvirvlerne.

Som skitseret på figuren er drag- og liftkraften maksimal ved den første hvirvel, og ved hvirvel nummer 2 er dragkraften maksimal, mens liftkraften minimal. Ved optegning af disse lastsignaler ses det,

at lastsignalet for dragkraften har en frekvens, som er dobbelt så stor som lastsignalet for liftkraften. Dette forklarer, hvorfor påvirkningsfrekvensen i dragretningen er dobbelt så stor som i liftretningen.

Af formel (8.13) ses det, at tangentialkoefficienten kan skrives som summen af et bidrag fra cylinderens bevægelse og et bidrag fra hvirvelafløsning

$$c_T = K S_{T_y} \frac{\dot{u}_y}{V} + f_T(\zeta, V) \quad (8.18)$$

I det følgende benyttes S og \tilde{u} i stedet for S_{T_y} og \dot{u}_y . Det antages, at bygningens bevægelse er harmonisk og har formen

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} e^{i\omega_b t} \Rightarrow \\ \dot{u} &= i\omega_b \tilde{u} e^{i\omega_b t} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Indsættes dette i formel (8.18) fås

$$c_T = i\omega_b K S \frac{\tilde{u} e^{i\omega_b t}}{V} + f_T(\zeta, V) \quad (8.20)$$

Det antages, at lastkoefficienternes variation over tiden kan udtrykkes ved

$$c_T = A_B e^{i(\omega_b t - \varphi_B)} + f_T(\zeta, V) \quad (8.21)$$

hvor

φ_B er faseforskydningen relativt til cylinderens bevægelse

A_B er amplituden fra bidraget fra cylinderens bevægelse

Sættes nu (8.18) lig med (8.21) fås

$$\begin{aligned} i\omega_b K S \frac{\tilde{u} e^{i\omega_b t}}{V} &= A_B e^{i(\omega_b t - \varphi_B)} \Rightarrow \\ i\omega_b K S \frac{\tilde{u} e^{i\omega_b t}}{V} &= A_B e^{i\omega_b t} e^{-i\varphi_B} \Rightarrow \\ i\omega_b K S \frac{\tilde{u}}{V} &= A_B e^{-i\varphi_B} \Rightarrow \\ \omega_b K S \frac{\tilde{u}}{V} &= \text{Im}(A_B e^{-i\varphi_B}) \Rightarrow \\ S &= \text{Im}\left(\frac{V A_B e^{-i\varphi_B}}{K \omega_b \tilde{u}}\right) \Rightarrow \\ S &= \text{Im}\left(\frac{V A_B e^{-i\varphi_B} D}{K \omega_b \tilde{u} D}\right) \Rightarrow \\ S &= \text{Im}\left(\frac{A_B e^{-i\varphi_B} D}{K^2 \tilde{u}}\right) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Hermed kan parameteren S bestemmes, når φ_B og A_B er kendt. Når S er bestemt, kan bidraget til lastkoefficienten fra cylinderens bevægelse bestemmes ved indsættelse i formel (8.18). Som tidligere

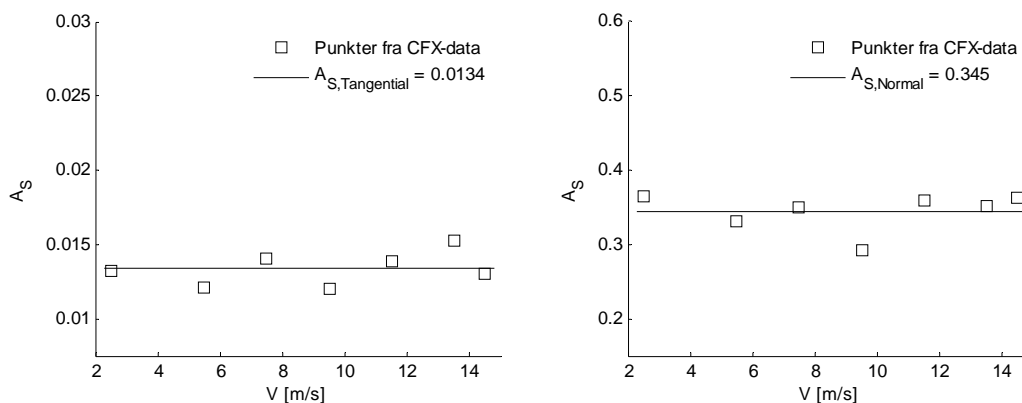
nævnt fittes fasen og amplituden for cylinderens bevægelse i første omgang ved en FFT-analyse. Appendiks J viser, at for at få en god fitning af fasen og amplituden i en sinusfunktion, kræves en inddeling af frekvensen, således at peaken rammes nøjagtigt. Da det ikke er muligt at ændre på tids-skridtene i CFX-dataene, medmindre der køres nye simuleringer, er det valgt at benytte MATLAB's toolbox `CFTOOL` til bestemmelse af amplituden og fasen. Denne toolbox fitter CFX-dataene vha. en ulineær Least Squares, hvor der kan vælges op til 8 sinusled. Datene er fittet med 8 sinusled, hvorefter FFT-analysens resultater benyttes til udvælgelse af hvilken af de 8 sinusled, som svarer til cylinderens bevægelse.

Det antages, at hvirløsløsningens bidrag til lastkoefficienterne kan beskrives ved

$$f_T(\omega_s, V) = A_s \sin(\omega_s t - \phi_B) \quad (8.23)$$

Der skal derfor bestemmes en amplitude A_s og en strouhalsfrekvens ω_s . Det ses, at fasen i bidraget fra strouhalsfrekvensen er sat til den samme som fasen for cylinderens bevægelse. Dette skyldes, at fasen hørende til hvirvelafløsning som vist på figur 8.7 er helt arbitrær. Det antages, at det mest kritiske tilfælde er, når hvirvel- og bevægelsesfrekvenserne ligger på tæt hinanden. Når disse lastbidrag er i modfase, vil de formentlig udligne hinanden, og det værste tilfælde må være, når disse er i fase. Af definitionen i formel (8.12) ses det, at strouhalsfrekvensen kun afhænger af hastigheden V , da diameteren og strouhalstallet er konstante.

Det antages, at amplituden A_s kun afhænger af V . På nedenstående figur ses det, at amplituden er tilnærmelsesvis konstant ved forskellige hastigheder. Det antages derfor, at $A_{S,Tangential} = 0.0134$ og $A_{S,Normal} = 0.345$ svarende til middelværdierne.

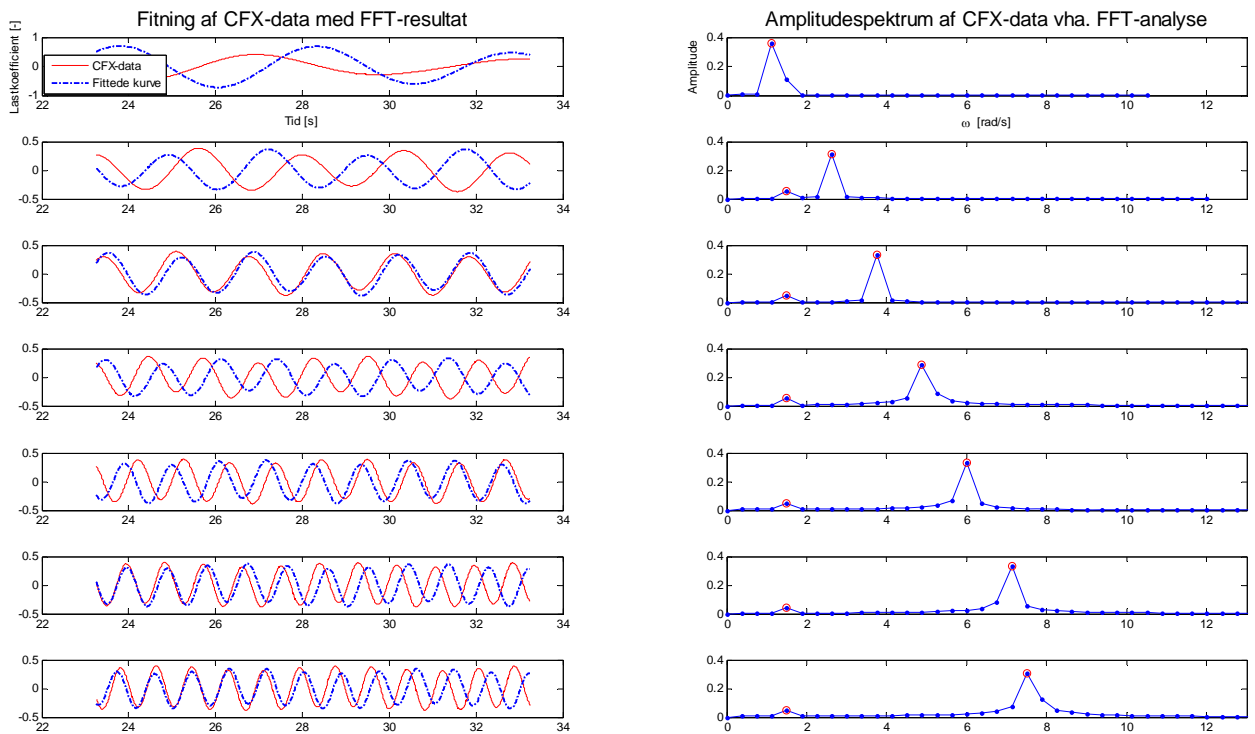


Figur 8.14: Plot af amplituden svarende til strouhalsfrekvensen som funktion af vindhastigheden. Tv.: Signalet i liftretning. Th.: Signalet i dragretning.

Nedenstående figur viser et amplitudespektrum af CFX-dataene, samt hvor gode disse er fittet med de oprindelige data. Plottene er vist for simuleringerne 1-7 jf. tabel 8.6, hvor hastigheden varieres, mens bevægelsesfrekvens og amplitude holdes konstant. Dette fremgår ligeledes af amplitudespektret, hvor peaken svarende til bevægelsesfrekvensen ligger ved samme frekvens, mens peaken svarende til strouhalsfrekvensen flyttes højere op i frekvensen med stigende vindhastighed. Ud fra amplitudespektrene vælges de frekvenser, faser og amplituder, som svarer til de 2 peaks som er markeret på figurerne. Disse parametre benyttes til at plote den fittede kurve op mod de oprindeli-

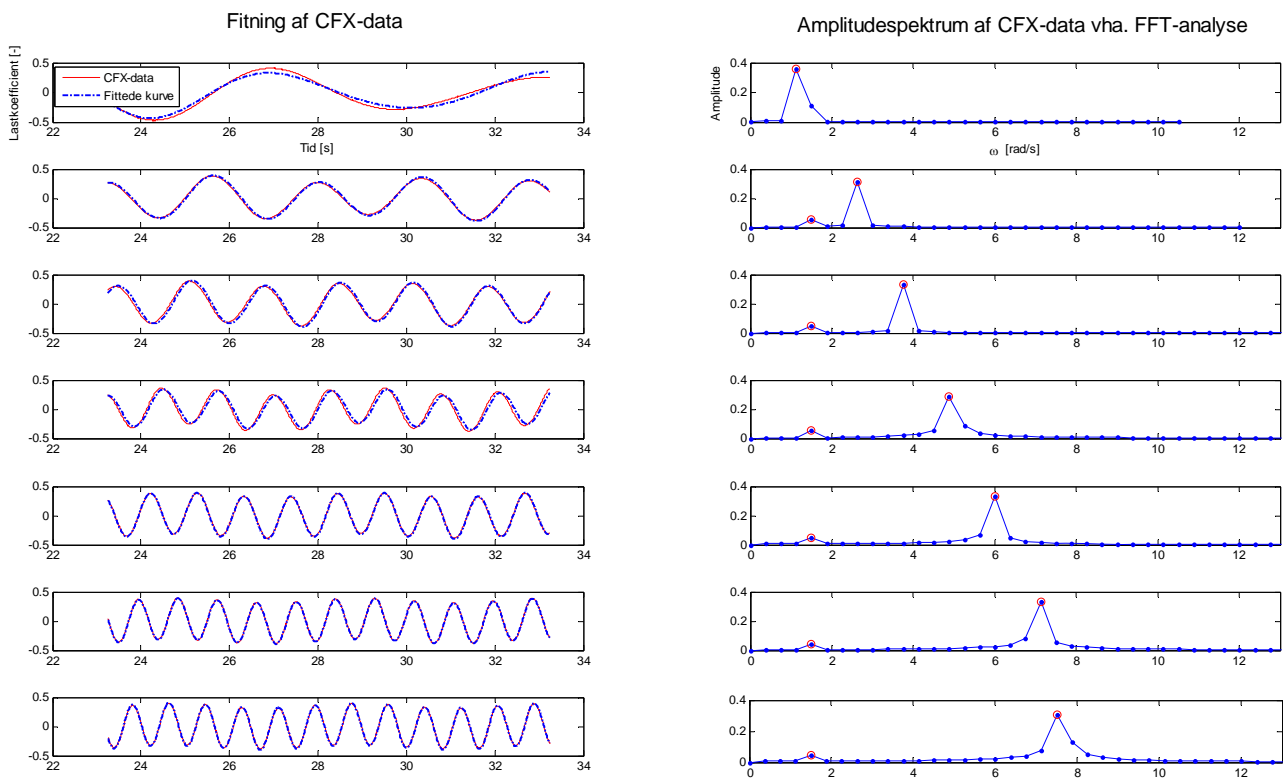
ge data, og resultatet ses på figurerne til venstre. Det ses, at de fittede amplituder og frekvenser stemmer godt overens med det oprindelige datasæt, mens faserne ikke er fittet korrekt. Derudover observeres det, at i første simulering, hvor der køres med en vindhastighed på 2.5 m/s, dvs. en Strouhalsfrekvens på $\omega_s = 1.13$ rad/s, overlappes hvirvfløsningsfrekvens af cylinderens bevægelsesfrekvens på 1.5 rad/s. Dette fremgår af amplitudespektret, hvor der kun er en peak, som strækkes over et større frekvensinterval, og med en lidt højere peak. Dette har betydning for fittet af dataene, da de ønskede amplituder ikke kan estimeres korrekt.

Ved betragtning af anden amplitudespektrum fra oven kan det sandsynliggøres, at konstruktionen ikke umiddelbart er følsom overfor lock-in fænomenet, da de to peaks svarende til bevægelses- og Strouhalsfrekvensen optræder som to separate peaks, til trods for de ligger tæt. I så fald lock-in fandt sted ville der kun optræde en sammentrukket peak. Dette indikerer, at intervallet hvori lock-in vil finde sted for den givne konstruktion er begrænset. En nærmere undersøgelse af dette ville indebære en mere kontinuert forøgelse af den påførte vindhastighed, således at området hvori bevægelses- og Strouhalsfrekvenserne er tilnærmelsesvist sammenfaldende, opløses bedre.



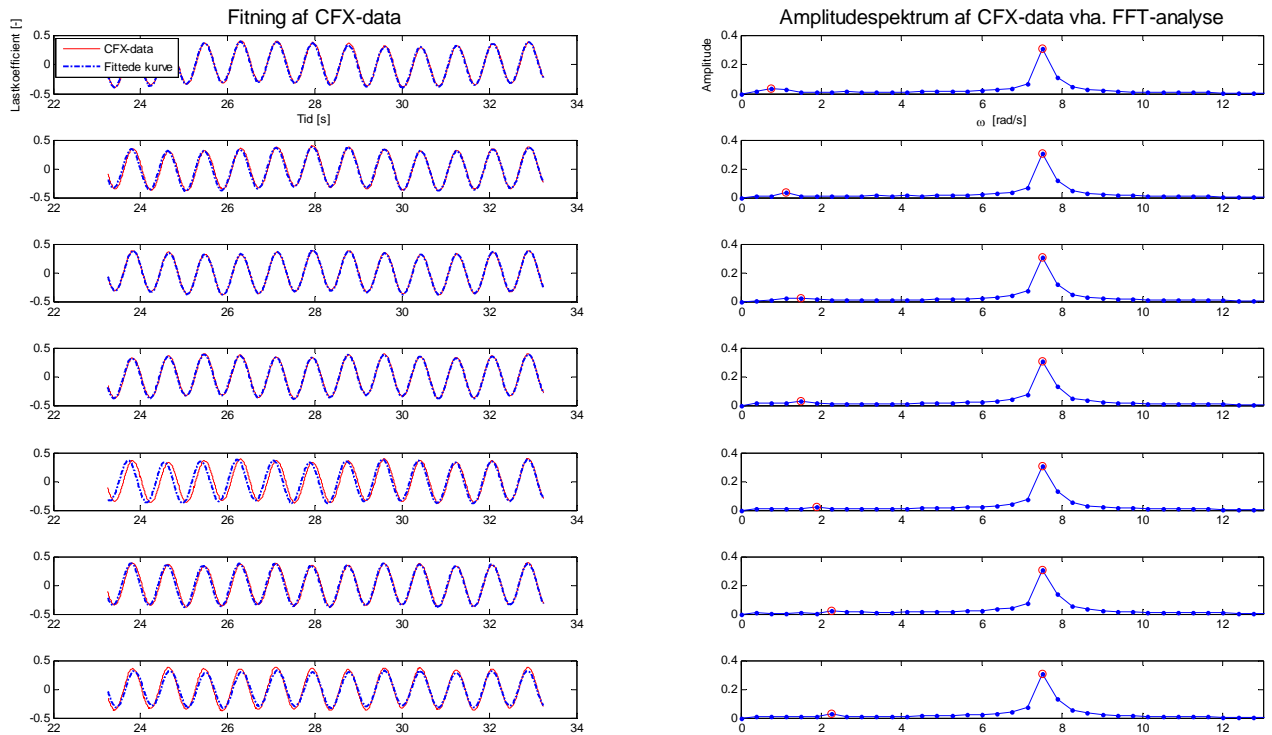
Figur 8.15: Tv.: Fitning af CFX-data med resultater fra FFT-analysen. Th.: Amplitudespektrum af CFX.data vha. FFT-analysen. Dataene svarer til simuleringerne 1-7 i tabel 8.6.

Nedenstående figur viser hvordan fitningen matcher med CFX-dataene når **CFTOOL** er benyttet. Det vælges derfor at benytte FFT-analysen til at indsnævre intervallet for amplituderne hvorefter **CFTOOL** benyttes til at estimere de korrekte amplituder, frekvenser og faser.



Figur 8.16: Tv.: Fitning af CFX-data vha. MATLAB-toolboxen **CFTOOL**. Th.: Amplitudespektrum af CFX-data vha. FFT-analysen. Dataene svarer til simuleringerne 1-7 i tabel 8.6.

Tilsvarende viser nedenstående figur de samme plots for simuleringerne 8-14, hvor bevægelsesfrekvensen varierer, mens bevægelsesamplituden og vindhastigheden holdes konstante. Det ses, at FFT-analysen ikke rammer de korrekte bevægelsesfrekvenser, hvorfor det naturligvis ikke kan forventes, at amplituderne og faserne ved denne analyse er korrekte.



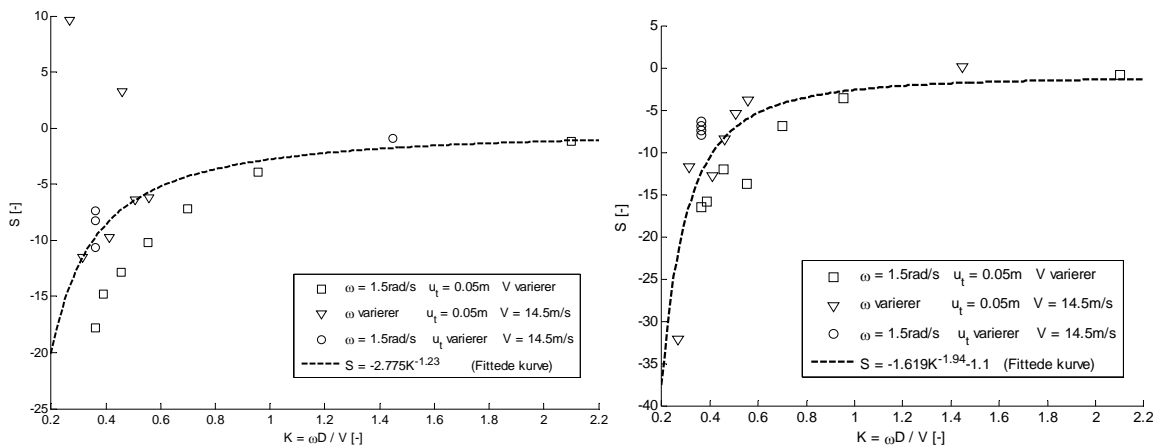
Figur 8.17: Tv.: Fitning af CFX-data vha. MATLAB-toolboxen **CFTOOL**. Th.: Amplitudespektrum af CFX-data vha. FFT-analysen. Dataene svarer til simuleringerne 8-14 i tabel 8.6.

I tabel 8.6 er parametrene, som er fittet ved hhv. FFT-analysen og MATLAB-toolboxen **CFTOOL**, listet. Det ses, at der generelt er en stor afvigelse i parameteren S , hvilket hovedsageligt skyldes, at faseforskydningen ikke er fittet korrekt. Dette sker til trods for, at amplituderne er forholdsvis godt fittet. Som det fremgår af udtrykket for parameteren S i formel (8.22), indgår faseforskydningen eksponentielt i udtrykket, hvilket giver den dominerende effekt.

Tabel 8.7: Bevægelses amplitude, fase og parameteren S_{Ty} ved hhv. FFT-analyse og ved **CFTOOL**.

Simulering Nr.	$A_{B,FFT}$	$A_{B,cftool}$	$\varphi_{B,FFT}$	$\varphi_{B,cftool}$	S_{FFT}	S_{cftool}	$\frac{S_{cftool} - S_{FFT}}{S_{cftool}}$ [%]
1	0.360	1.100	-2.94	0.55	-1.15	-0.92	-25
2	0.054	0.060	-1.90	0.89	-3.95	-3.58	-10
3	0.051	0.049	-1.37	1.51	-7.16	-6.97	-3
4	0.057	0.063	-0.90	1.88	-10.19	-13.73	26
5	0.046	0.041	-0.97	2.06	-12.81	-12.08	-6
6	0.044	0.040	-0.80	2.10	-14.73	-15.83	7
7	0.045	0.039	-0.83	2.23	-17.77	-16.45	-8
8	0.038	0.048	-0.59	-3.52	-31.44	-26.57	-18
9	0.038	0.040	2.88	2.20	9.64	-32.13	130
10	0.025	0.036	-0.72	9.00	-11.56	-11.73	1
11	0.027	0.033	-1.08	-4.33	-9.75	-12.81	24
12	0.020	0.026	2.64	1.78	3.23	-8.44	138
13	0.025	0.022	-1.17	-4.25	-6.37	-5.44	-17
14	0.029	0.021	-1.27	2.18	-6.21	-3.88	-60
15	0.035	0.029	-0.93	2.33	-10.80	-8.02	-35
16	0.0348	0.029	-0.93	2.12	-8.27	-7.39	-12
17	0.0353	0.030	-0.91	2.06	-6.76	-6.39	-6
18	0.0406	0.042	-0.85	2.22	-6.25	-6.92	10

Nedenstående figurer viser kurven for S_{Ty} som funktion af den dimensionsløse frekvens K .



Figur 8.18: Plot af S_{Ty} som funktion af K . Tv.: $S_{Ty}(K)$ ved FFT-analysen. Th.: $S_{Ty}(K)$ ved **CFTOOL**.

Det ses af begge figurer, at S_{Ty} er tilnærmelsesvis konstant, når hastigheden og frekvensen på cylinderens bevægelse holdes konstant mens amplituden varieres. Det vil sige, at S_{Ty} er uafhængig af

cylinderens bevægelsesamplitude, men afhængig af den påførte vindhastighed og bevægelsesfrekvens, dvs. K . Af udtrykket for S_{Ty} i formel (8.22) fremgår det at $S_{Ty} \propto K^{-2}$. Da

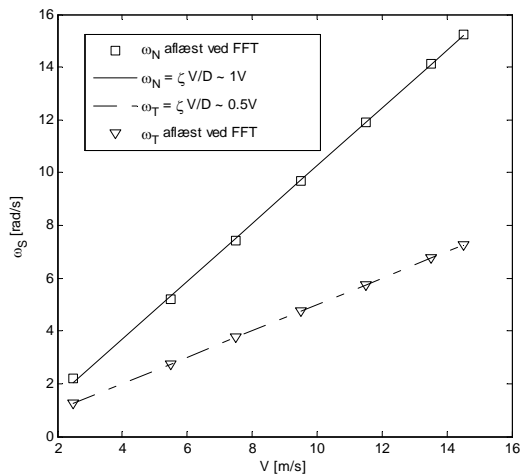
$$\begin{aligned} S_{FFT} &= -2.775K^{-1.23} \\ S_{cftool} &= -1.619K^{-1.94} - 1.1 \end{aligned} \quad (8.24)$$

konkluderes det at parameteren S som funktion af den dimensionsløse frekvens K kan udtrykkes ved:

$$S_{Ty} = -1.619K^{-1.94} - 1.1 \quad (8.25)$$

Normalkoefficient

I det følgende foretages samme analyse for normalcoeffcienten, hvor cylinderen flyttes i x -retningen jf. figur 8.9. Der køres med de samme simuleringer som angivet i tabel 8.6. Nedenstående figur viser strouhalsfrekvensen som funktion af hastigheden. Det ses, at strouhalsfrekvensen til en given hastighed i både normal- og tangentialretning er identisk med de simuleringer, hvor cylinderen bevæges i y -retningen. Dette skyldes, at cylinderens hastighed stammende fra den tvungne bevægelse er i størrelsesorden $10^{-3} \frac{m}{s}$, mens vindhastigheden er i størrelsesorden $10^1 \frac{m}{s}$. Den effektive hastighed, når cylinderen flyttes i enten x - eller y -retningen, er tilnærmelsesvis ens. Da cylinderen er aksialsymmetrisk, vil den karakteristiske længde hvorpå hastighedsfeltet påvirker cylinderen være konstant under cylinderens bevægelse.



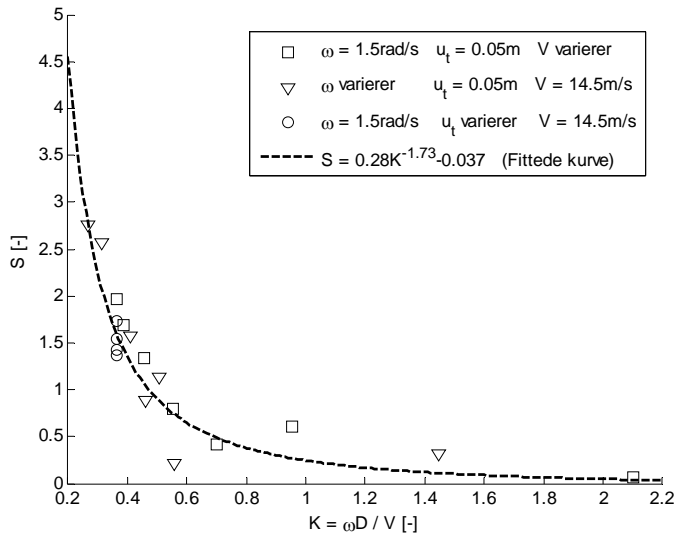
Figur 8.19: Fit af påvirkningsfrekvensen på cylinderen bevæges i x -retningen.

Ved fitting af parameterens S som funktion af den dimensionsløse frekvens K er følgende udtryk fundet

$$S_{Nx} = 0.49K^{-1.41} - 0.23 \quad (8.26)$$

Den fittede kurve for S_{Nx} er plottet på nedenstående figur. Det ses af figuren, at kurven ikke fitter alle punkter, men giver dog et acceptabelt fit. Når bevægelsesfrekvensen og -hastigheden holdes konstant, og bevægelsesamplituden varierer forventes det at faktoren S_{Nx} er konstant. Dette er vist med "cirkler" på figuren, hvor det ses, at S_{Nx} er tilnærmelsesvis konstant. Dette bekræfter antagelsen

om, at S_{Nx} kun afhænger af K idet K er konstant når bevægelsesfrekvensen og hastigheden er konstante.



Figur 8.20: Plot af S_{Nx} som funktion af K .

Af ovenstående analyser for cylinderen kan det konkluderes at

- Bidraget til lastkoefficienterne fra hhv. cylinderens bevægelse og hvirvelaflysninger er uafhængige. Dette er vist på figur 8.16 og figur 8.17, hvor hhv. cylinderen bevægelse ændres og hvirvelaflysningsfrekvensen ændres. Det ses af figurerne, at når den ene af de to bidrag ændres, er det andet bidrag konstant.
- Når cylinderen bevæges i for eksempel liftretningen fås kun et bidrag fra denne bevægelse i tangentialkoefficient og ikke i normalkoefficient og omvendt.
- Den dimensionsløse faktor S kun er afhængig af den reducerede frekvens K som vist på figur 8.18 og figur 8.20. På disse figurer ses det, at når K er konstant, dvs. når bevægelsesamplituden varierer mens frekvensen og vindhastigheden er konstant, er S tilnærmelsesvis konstant. Afvigelsen mellem den fittede kurve og de plottede resultater kan skyldes numerisk unøjagtighed i CFX.
- Hvirvelaflysningsfrekvensen i vindens retning er 2 gange større end vinkelret vindens retning. Dette er vist på figur 8.13.

8.2 CFD-model 2 - Parallelogram

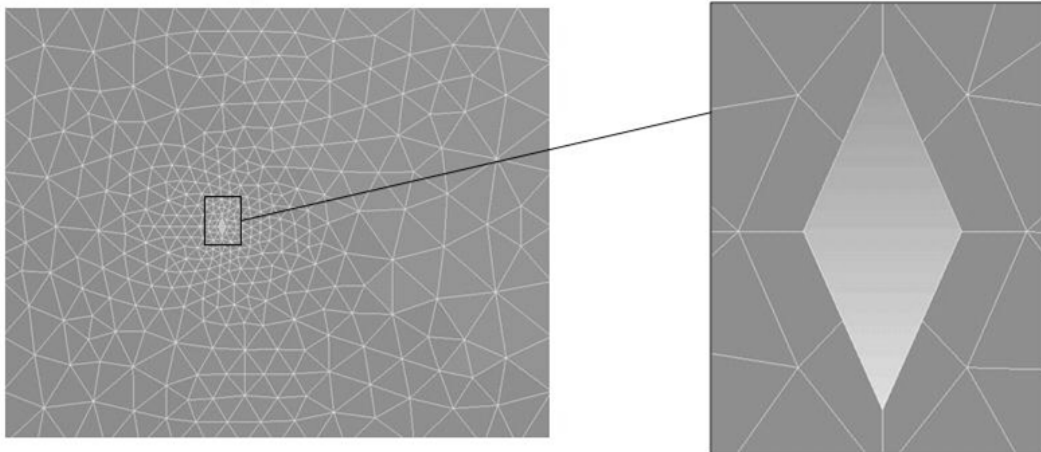
I det følgende foretages de samme analyser som forrige afsnit. Da analysen for cylinderen viser at bidraget til lastkoefficienterne fra hhv. konstruktionen og hvirvelaflysninger er uafhængige af hinanden er det fordelagtigt at foretage analyserne separate. Analyserne er derfor opdelt i to dele som består af en

- **Bevægelsesdel:** Her køres simuleringerne med et groft net jf. figur 8.21, hvor konstruktionen bevæges og vindhastigheden varieres således at K varierer som vist i tabel 8.8. Når der køres

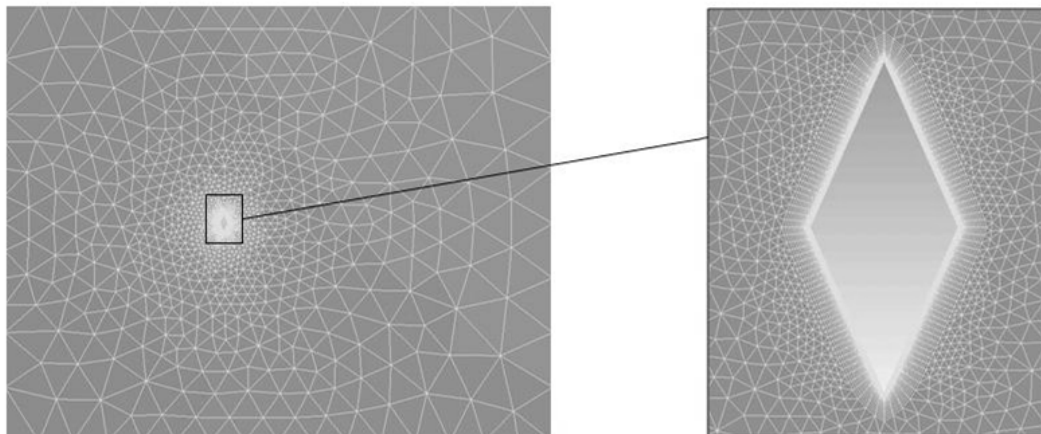
med et groft net vil bidraget fra hvirvelaflysningerne ikke blive opfanget. Dette reducerer beregningstiden væsentligt, da beregningsnettet reduceres fra 12366 knuder til 750 knuder som vist på figur 8.21.

- **Hvirvelaflysningsdel:** Her køres simuleringerne med et fint net som vist på figur 8.21, hvor konstruktionen holdes stille mens vindhastigheden varierer som vist i tabel 8.9. I Appendiks I er det sandsynliggjort, at den effektive vindhastighed når konstruktionens bevægelse medregnes ikke afviger væsentligt fra den uforstyrrede vindhastighed. Dette skyldes, at konstruktionen som beregnet i Appendiks I, ikke flytter sig mere end ca. 0.5 m i toppen. Derfor nøjes der med at betragte bidraget til lastkoefficienterne fra hvirvelaflysningerne i denne vinkel.

Groft net - 750 knuder



Fint net - 12366 knuder



Figur 8.21: Groft net vs. fint net for hhv. simulering af bevægelsesdelen og hvirvelaflysningsdelen.

For det grove net påføres konstruktionen en harmoniske bevægelse med følgende udtryk

$$\begin{aligned} u_y &= A \sin(\omega_b t) \\ &= 0.1m \sin\left(1.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right) \end{aligned} \tag{8.27}$$

I alle disse simuleringer køres der med den samme harmoniske bevægelse mens vindhastigheden varierer. Nedenstående tabel viser de simuleringer som er foretaget med det grove net, hvor konstruktionen holdes stille og vindhastigheden varierer.

Tabel 8.8: Forskellige kombinationer af hastigheder med tilhørende reduceret frekvens K for simuleringer med groft net. Alle værdier er i modelskala.

Simulering Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
$V \left[\frac{m}{s} \right]$	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	9.5	11.5
$K [-]$	3.54	2.53	2.00	1.61	1.36	1.18	0.93	0.77

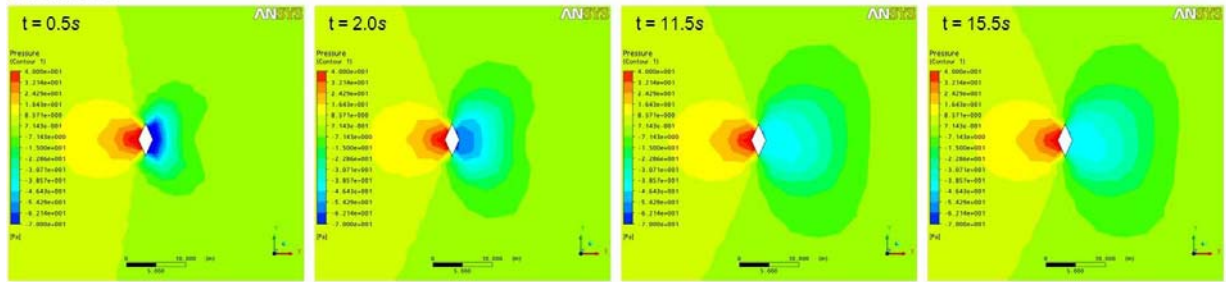
For det fine beregningsnet, hvor konstruktionen holdes stille, varieres der på den indkommende vindhastighed. Nedenstående tabel angiver de vindhastigheder, som er påført på konstruktionen.

Tabel 8.9: Forskellige kombinationer af hastigheder med tilhørende hvirvelafsløsningsfrekvens og amplitude for simuleringer med fint net. Alle værdier er i modelskala.

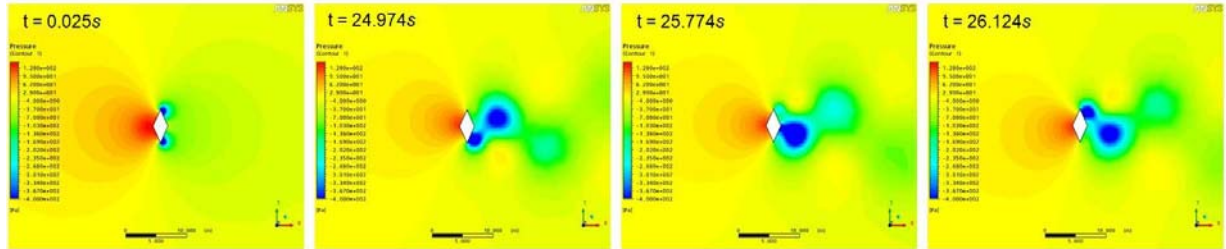
Simulering Nr.	1	2	3	4	5	6
$V \left[\frac{m}{s} \right]$	2.5	3.5	5.5	7.5	9.5	14.5
$\omega_{S_Fit} \left[\frac{rad}{s} \right]$	0.289	0.352	0.567	0.755	0.951	1.492
A_{S_fit}	0.0146	0.0145	0.0136	0.0121	0.0103	0.0081

For simuleringerne foretaget med et groft net forventes det, at hvirvelafsløsningerne på bagsiden af konstruktionen ikke bliver opfanget. Dette er vist på figur 8.22, hvor trykfordelingsvariation over tiden er plottet. Det ses at undertrykket på bagsiden af konstruktionen for det grove net varierer med tiden indtil $t = 11.5$ s, hvorefter det ses at trykket tilnærmelsesvis er konstant. Trykvariationen over tiden indtil $t = 11.5$ s skyldes at beregningerne i CFX ikke er konvergeret. Til tiden $t = 11.5$ s er beregningsnettet konvergeret, hvorefter trykfordelingen tilnærmelsesvis er konstant. Det må derfor konkluderes, at beregningsnettet er tilstrækkelig godt til at simulere trykvariationen, når konstruktionen bliver bevæget og samtidig ikke opfanger hvirvelafsløsningerne. For det finere net ses det, at der opstår hvirvelafsløsninger på bagsiden af konstruktionen. For disse simuleringer holdes konstruktionen stille mens vindhastigheden gradvis stiger. Det ses, at der skiftevis opstår et undertryk på toppen og bunden af konstruktionen, som skyldes, at hvirvlerne bliver afløst.

Groft net



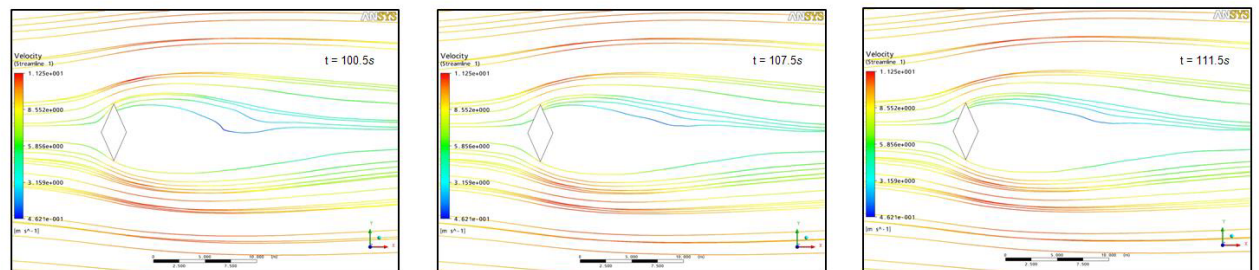
Fint net



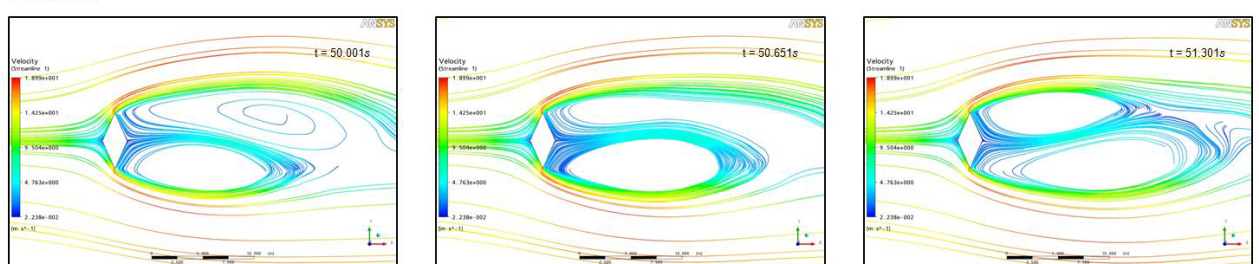
Figur 8.22: Trykfordelingen over tid for hhv. groft og fint net.

På figur 8.23 betragtes de samme simuleringer, hvor der i stedet for trykfordelingen ses på strømlinjer. Det ses, at simuleringerne med det grove net ikke opfanger hvirvlerne bag konstruktionen i modsætning til simuleringerne med det finere net. Det ses for det fine net, at hvirvlerne skiftevis afløser hinanden og på den måde forårsager en større kraftpåvirkning på konstruktionen.

Groft net



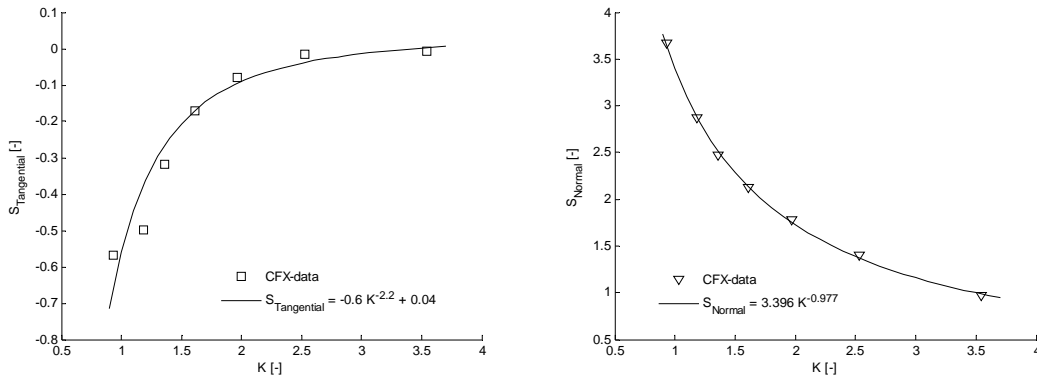
Fint net



Figur 8.23: Strømlinjer for konstruktionen med hhv. det grove og fine net.

For bevægelsesdelen fittes den dimensionsløse parameter S som funktion af K , hvor S beregnes ved formel (8.22). De beregnede værdier for S er plottet til forskellige værdier af K på nedenstående figur. På figuren er de fittede kurver for $S(K)$ optegnet. Det ses at der god overensstemmelse mellem de beregnede værdier for S og den fittede kurve. På figuren er $S_{Tangential}$ bestemt ud fra lastsignalet,

hvor konstruktionen bevæges i y -retningen og S_{Normal} er bestemt ud fra lastsignalet, hvor konstruktionen bevæges i x -retningen.

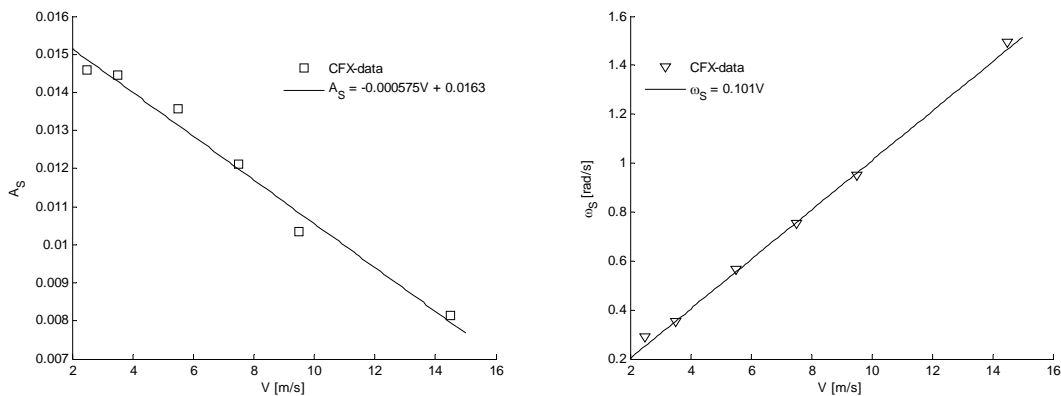


Figur 8.24: Plot samt fit af parameteren S som funktion af K i hhv. tangential- og normalretningen. De beregnede værdier stammer fra hhv. simuleringer med groft net hvor konstruktionen bevæges.

Den fittede dimensionsløse parameter S som funktion af K , når konstruktionen bevæges i hhv. x - og y -retningen er

$$\begin{aligned} S_{Tangential} &= -0.6K^{-2.2} + 0.04 \\ S_{Normal} &= 3.396K^{-0.977} \end{aligned} \quad (8.28)$$

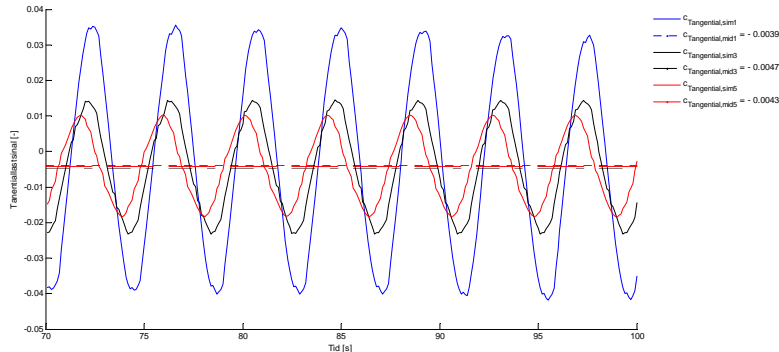
Ved hjælp af simuleringerne med fint net, hvor konstruktionen holdes stille mens vindhastigheden gradvis øges som angivet i tabel 8.9 fittes konstruktionens hvirvelafløsningsfrekvens og de tilhørende amplituder. Dette er vist på nedenstående figur.



Figur 8.25: Fit af hvirvelafløsningsfrekvens og de tilhørende amplituder til forskellige vindhastigheder. Alle data er taget fra simuleringerne med fint net hvor konstruktionen holdes stille.

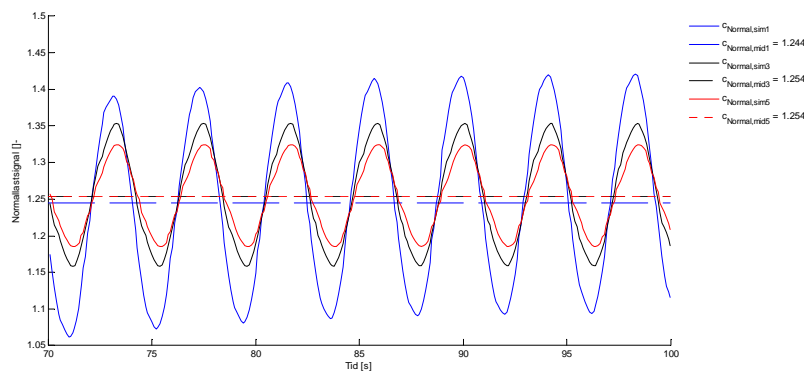
Det ses, at de fittede kurver for hvirvelafløsningsfrekvenserne og de tilhørende amplituder ved forskellige hastigheder stemmer godt overens med dataene fra CFX. Disse frekvenser og amplituder gælder kun når vinden påvirker konstruktionen om den svage hovedakse som vist på figur 8.22. I Appendiks I er det sandsynliggjort, at når konstruktionen ikke bevæges mere end ca. 0.5 m i toppen, kan det med god tilnærmelse antages, at Strouhalstallet og dermed hvirvelafløsningsfrekvensen er konstant for en given hastighed.

For ovenstående analyser er middelværdien fratrukket lastsignalet. Middelværdien fra normal- og tangentiallastsignalet svarer til den statiske lastkoefficient. På nedenstående figur er tangentiallastkoefficienten for simulering 1, 3 og 5 i tabel 8.8 samt middelværdierne optegnet. Det ses, at middelværdierne for disse signaler er tilnærmelsesvis konstante, hvilket også er forventeligt.



Figur 8.26: Lastkoefficientsignal for tangentialkoefficient svarende simulering nr. 1,3 og 5 i tabel 8.8 samt middelværdierne.

På nedenstående figur normallastkoefficienten for simulering 1, 3 og 5 i tabel 8.9 samt middelværdierne optegnet. Det ses igen at middelværdierne for disse signaler er tilnærmelsesvis konstante.



Figur 8.27: Lastkoefficientsignal for normalkoefficient svarende simulering nr. 1,3 og 5 i tabel 8.9 samt middelværdierne.

8.3 Resultater fra CFD-simulering

Følgende resultater er benyttet og implementeret i **BJMODEL**.

$$\begin{aligned}
 c_T &= KS_T \frac{\dot{u}}{V} + A_{S,T} \sin(\omega_s t - \varphi_{B,T}) + \bar{c}_T \\
 c_N &= KS_N \frac{\dot{u}}{V} + A_{S,N} \sin(2\omega_s t - \varphi_{B,N}) + \bar{c}_D
 \end{aligned}
 \tag{8.29}$$

hvor

$$\begin{aligned}
 S_T &= -0.6K^{-2.2} + 0.04 \\
 S_N &= 3.396K^{-0.977}
 \end{aligned}$$

$$\omega_s = 0.101V$$

$$A_{s,T} = -0.000575V + 0.0163$$

$$A_{s,N} = \frac{1}{2}A_{s,T}$$

$$\bar{c}_T = -0.0043$$

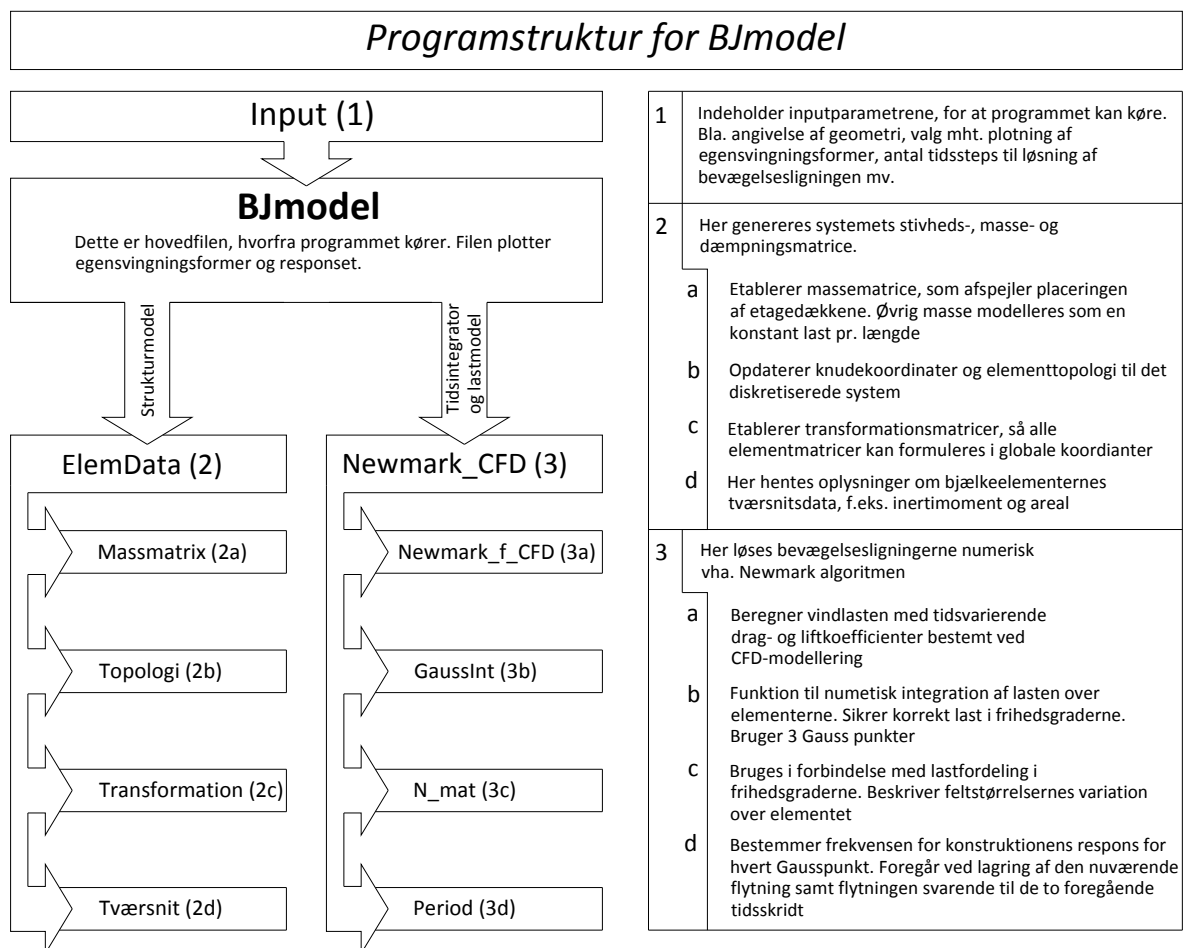
$$\bar{c}_N = 1.2457$$

Det ses, at amplituden fra hvirvelafløsningsdelen er relativ lille i forhold til bevægelsesdelen, hvorfor det må forventes, at bevægelsesdelen er mest dominerende. Derudover ses det, at middelværdien for normalcoeffcienten er numerisk meget større end tangentialdelen, hvorfor det ligeledes forventes at normalkraften, og dermed udbøjningen i denne retning, er meget større end i tangentialretningen.

Kapitel 9

Implementering af CFX-resultater i BJmodel

I det følgende beskrives fremgangsmåden i implementeringen af resultaterne fra CFD-simuleringerne i den programmerede struktur- og lastmodel hvorefter resultaterne af forskellige undersøgelser gives. Nedenstående figur viser et diagram over de nye funktioner, som er programmeret i forbindelse med implementeringen, og hvordan disse funktioner spiller sammen med resten af modellen.



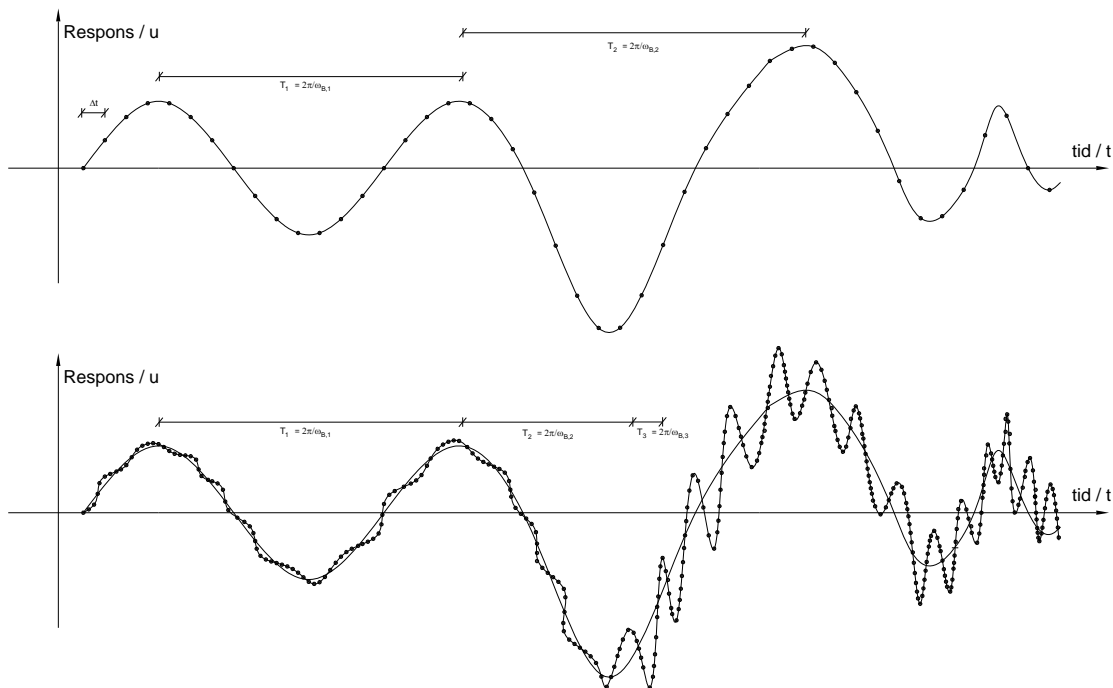
Figur 9.1: Flowdiagram visende implementering af lift- og dragkoefficienter fra CFD-simuleringerne.

Overordnet er flowet i programmet det samme. Ændringerne ligger i funktionerne **NEWMARK_CFD**, **NEWMARK_F_CFD** og **PERIOD**, hvor drag- og liftkoefficienterne bestemt ved CFD-simuleringerne, implementeres i beregningsgangen.

I denne forbindelse skal frekvensen for konstruktionens respons kendes. Dette er foretaget i funktionen **PERIOD**, hvor frekvensen bestemmes for hver periode af responset for hvert Gausspunkt. De beregnede lift- og dragkoefficienter er baseret på frekvensen hørende til den forrige periode, da det ikke er muligt at fastsætte perioden og dermed frekvensen, før denne er overstået.

I praksis foregår frekvensbestemmelsen i **PERIOD** ved, at programmet konstant lagrer flytningen til det nuværende tidsskridt sammen med flytningen til de to forrige tidsskridt for hvert Gausspunkt på konstruktionen. Ved at undersøge, om flytningen for et punkt er faldende eller stigende over de tre tidsskridt fastslår programmet, om responset for det givne Gausspunkt har nået en top eller en dal. Hvis dette er tilfældet, undersøges det, om der har været en eller to toppe/dale siden sidste periodeskift. Hvis der har været to, tolkes det som en ny periode, og frekvensen beregnes på baggrund af den nuværende tid og tiden for sidste periodeskift, som løbende lagres.

På nedenstående figur er en skitse for signalet af konstruktionens respons vist. Ud fra ovennævnte algoritme for frekvensbestemmelsen, illustrerer figur 9.2, hvordan programmet vil fastlægge perioden i forskellige tilfælde. På øverste del af figuren forløber responset som en forholdsvis glat kurve over tiden, og der er ingen tvivl om, hvor toppene og dalene skal identificeres. På nederste del af figuren ses det, at responset er overlejret af to frekvenser, hvis amplituder i forhold til hinanden er afgørende for, hvor perioderne identificeres. På første halvdel af tidsserien er den højfrekvente del af signalets amplitude så lille, at det resulterende respons er strengt faldende eller stigende, bestemt af den lavfrekvente del af signalet. Således identificerer **PERIOD** ikke de små "krusninger" på det samlede signal. Dette er derimod tilfældet på sidste halvdel af tidsserien, hvor amplituden af den højfrekvente del af signalet er så stor, at der forekommer egentlige, sekundære perioder overlejret af lavfrekvente perioder i signalet. I dette tilfælde vil **PERIOD** kun identificere de korte perioder.



Figur 9.2: Skitse for signalet af konstruktionens respons.

9.1 Responsundersøgelse for CFD lastmodel

Følgende undersøgelser tager udgangspunkt i konstruktionens strukturmodel som den er modelleret i **BJMODEL** hvor der påføres forskellige belastninger på konstruktionen. Dette sker ved at variere det virkende vindfelt med hensyn til maksimal hastighed og forskellige frekvenser på fluktuationsdelen. Først holdes vindhastigheden konstant over tiden mens der varieres på størrelsen af den virkende vindstyrke. Efterfølgende påføres konstruktionen et vindfelt med forskellige frekvenser på fluktuationerne. Alle vindhastigheder er baseret på det i 0 benyttede vindfelt som er udtrykt ved

$$V(x,t) = V_0(x) + V_1 \cos(\omega_v t) \quad (9.1)$$

hvor

$$V_0 = \begin{cases} 0.17 \log\left(\frac{x}{0.01}\right) 24 \frac{m}{s} & \text{for } x > 2m \\ 0.17 \log\left(\frac{2}{0.01}\right) 24 \frac{m}{s} & \text{for } x \leq 2m \end{cases}$$

x er konstruktionens højde op til 142 m

V_1 er amplituden på fluktuationsdelen som er sat til 3 m/s

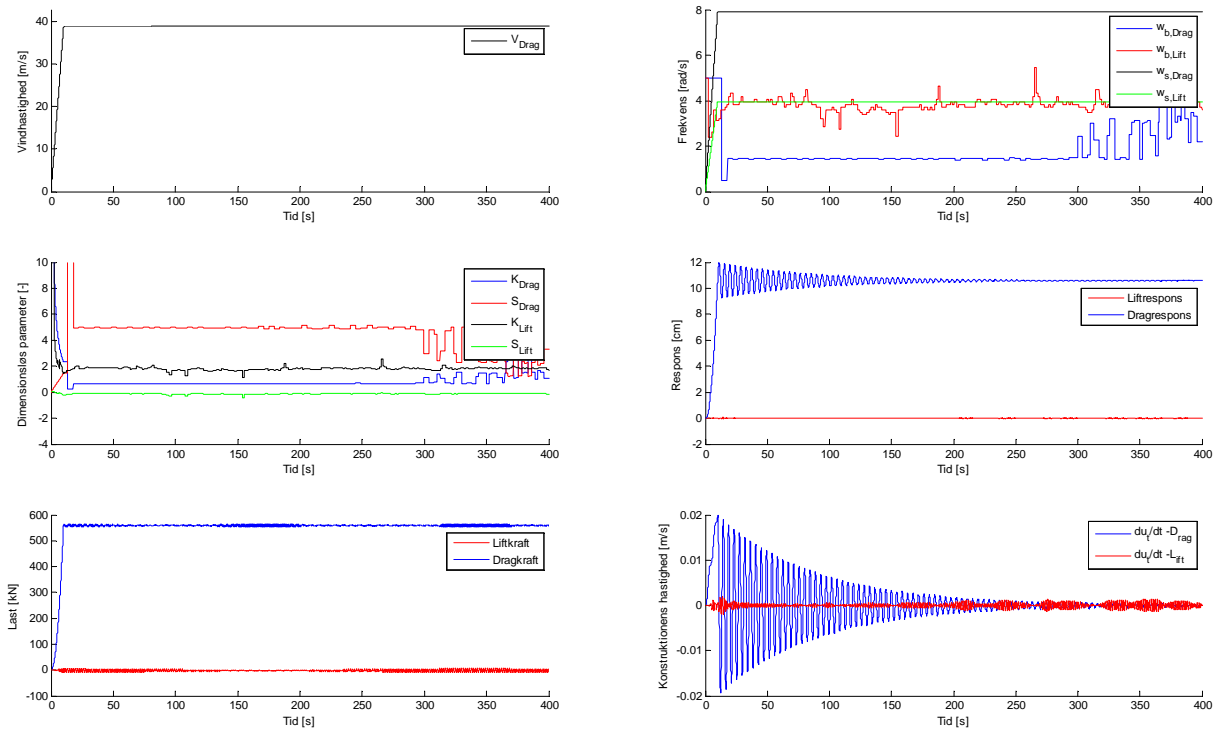
9.1.1 Konstant vindfelt

Nedenstående tabel viser de forskellige vindfelter som er påført konstruktionen. Som nævnt er disse vindfelter konstante over tiden mens der varieres på størrelsen på disse. Det vil sige at V_1 i formel (9.1) er sat til 0, mens V_0 varierer.

Tabel 9.1: Analyser med forskellige konstante vindhastigheder samt konstruktionens maksimale udbøjning. Vindhastighederne svarer til den maksimale vindhastighed på toppen af konstruktionen.

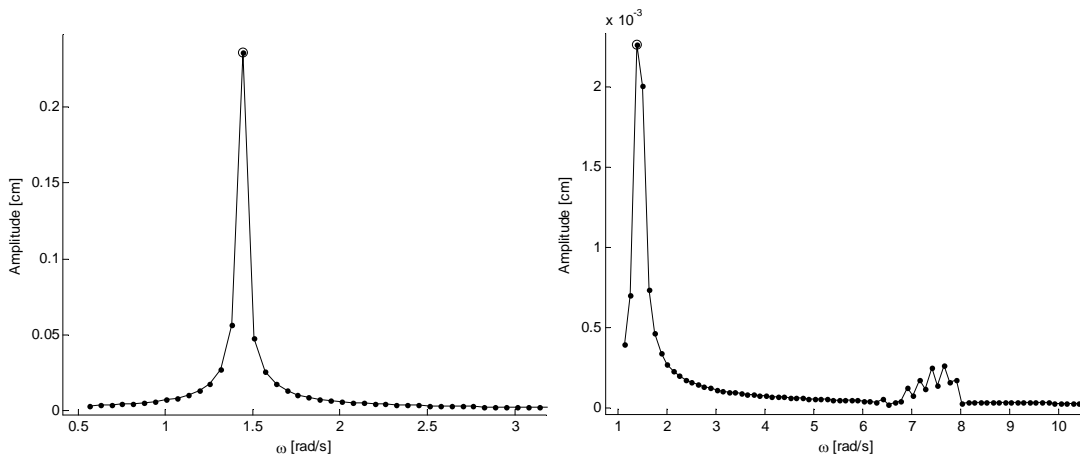
Analyse nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_{\max, \text{top}} \left[\frac{m}{s} \right]$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$x_{\max} [cm]$	0.8	1.8	3.1	4.9	7.1	9.6	12.0	15.9	19.7	23.8

På nedenstående figur er de forskellige parametre plottet svarende til analyse nr. 7 i ovenstående tabel.



Figur 9.3: Plot af vindhastighed, reduceret frekvens, dimensionsløs parameter S , lastsignal, responssignal samt forskellige frekvenser. Alle plots svarer til analyse nr. 7 i tabel 9.1.

Det ses at når konstruktionen påvirkes af et konstant vindfelt vil den til at starte med blive anslået i sin første mode som har en cirkulær egenfrekvens på $\omega_1 = 1.44 \frac{rad}{s}$. Denne bevægelse dæmpes ud efter et vist tidsinterval hvorefter responset bliver konstant svarende til en statisk last. Dette ses af signalet for responset på figur 9.3 og bekræftes yderligere af nedenstående figur hvor en FFT for responssignalet er foretaget over forskellige tidsintervaller.

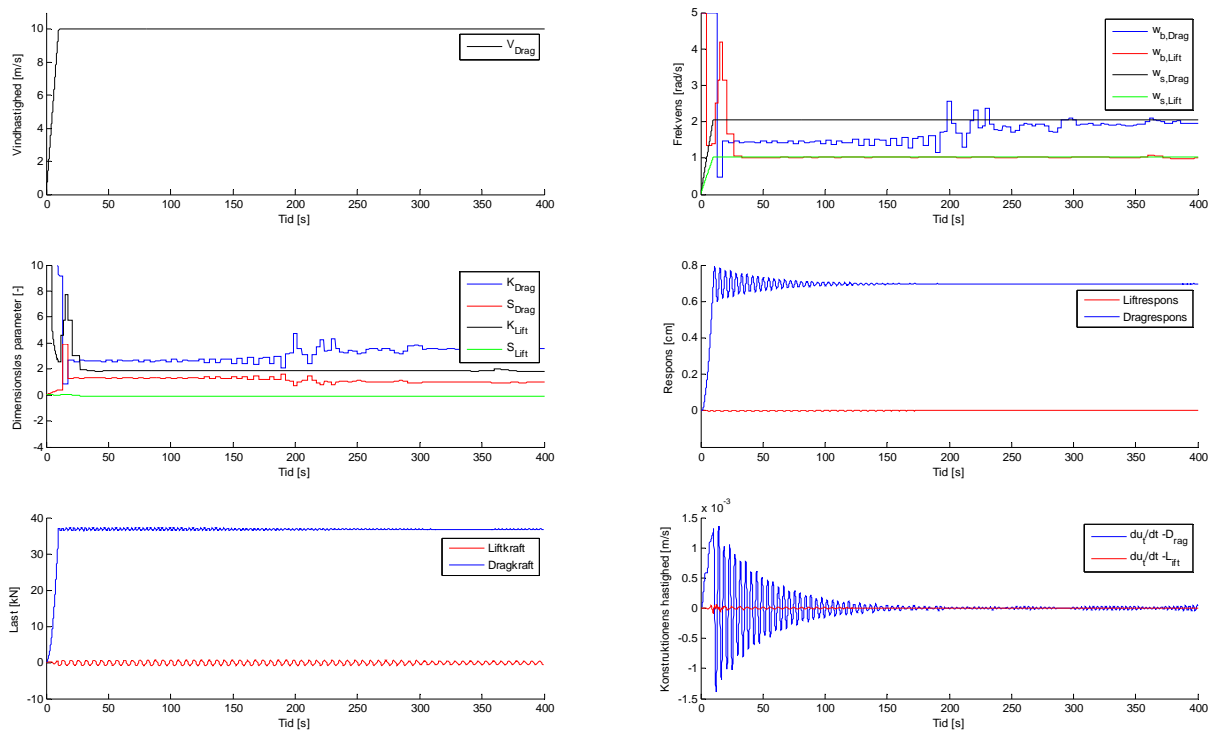


Figur 9.4: FFT af responssignalet for analyse nr. 7 i tabel 9.1. Tv.: Signalet i tidsinterval 0 – 150 sekunder. Th.: Signalet i tidsinterval 350 - 400 sekunder.

Det ses i begge intervaller at peaken svarende til konstruktionens første mode er dominerende. Ved det sidste interval ses igen peaken ved første mode samt en mindre peak ved en cirkulær frekvens på $7.8 \frac{rad}{s}$. Dette svarer til 2. cirkulære egenfrekvens for konstruktionen. Det må derfor konstateres at

når konstruktionen belastes med et konstant vindfelt vil 1. mode blive anslået hvilket også er forventeligt. Det ses yderligere af figur 9.3 hvor de forskellige frekvenser er plottet at hvirvelafløsningsfrekvensen i dragretningen ligger langt fra konstruktionens bevægelsesfrekvens i dragretningen hvorfor hvirvlerne med denne vindhastighed ikke har stor virkning på konstruktionens bevægelse. I liftretningen ligger hvirvelafløsningsfrekvenserne tæt på konstruktionens bevægelse hvorfor det forventes at størstedelen af responset på konstruktionen skyldes afløsninger af disse hvirvler. På samme plot ses det at konstruktionens bevægelsesfrekvens starter med at ligge på en tilnærmelsesvis konstant værdi hvorefter der sker nogle spring i signalet. Dette skyldes igen at konstruktionen til at starte med bevæges i den første mode og slutter af med at konvergere mod en konstant udbøjning. Dette skyldes naturligvis, at udbøjningen fra en konstant last kun påvirkes af stivheden, som er identisk, uanset hvilken dynamisk lastmodel, der benyttes.

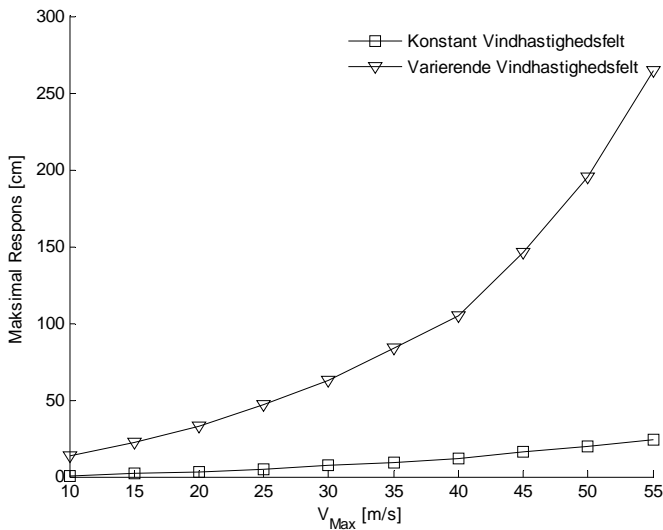
På nedenstående figur er resultaterne for analyse nr. 1 jf. tabel 9.1 vist. Overordnet ses det at denne analyse giver samme resultater som analyse nr. 7 i tabellen blot med nogle andre værdier for last og respons. Det ses at responset i denne analyse dæmper hurtigere ud til en konstant udbøjning end ved analyse nr. 7.



Figur 9.5: Plot af vindhastighed, reduceret frekvens, dimensionsløs parameter S , lastsignal, responsignal samt forskellige frekvenser. Alle plots svarer til analyse nr. 1 i tabel 9.1.

Det ses at den maksimale udbøjning er mindre end ved analyse nr. 7 jf. tabel 9.1. På nedenstående figur er den maksimale udbøjning ved forskellige maksimale vindhastigheder på toppen af konstruktionen plottet, når det påførte vindfelt er hhv. konstant og varierende. Det ses at den maksimale udbøjning generelt er meget større når vindfeltet er fluktuerende med første egenfrekvens i forhold til når vindfeltet er konstant.

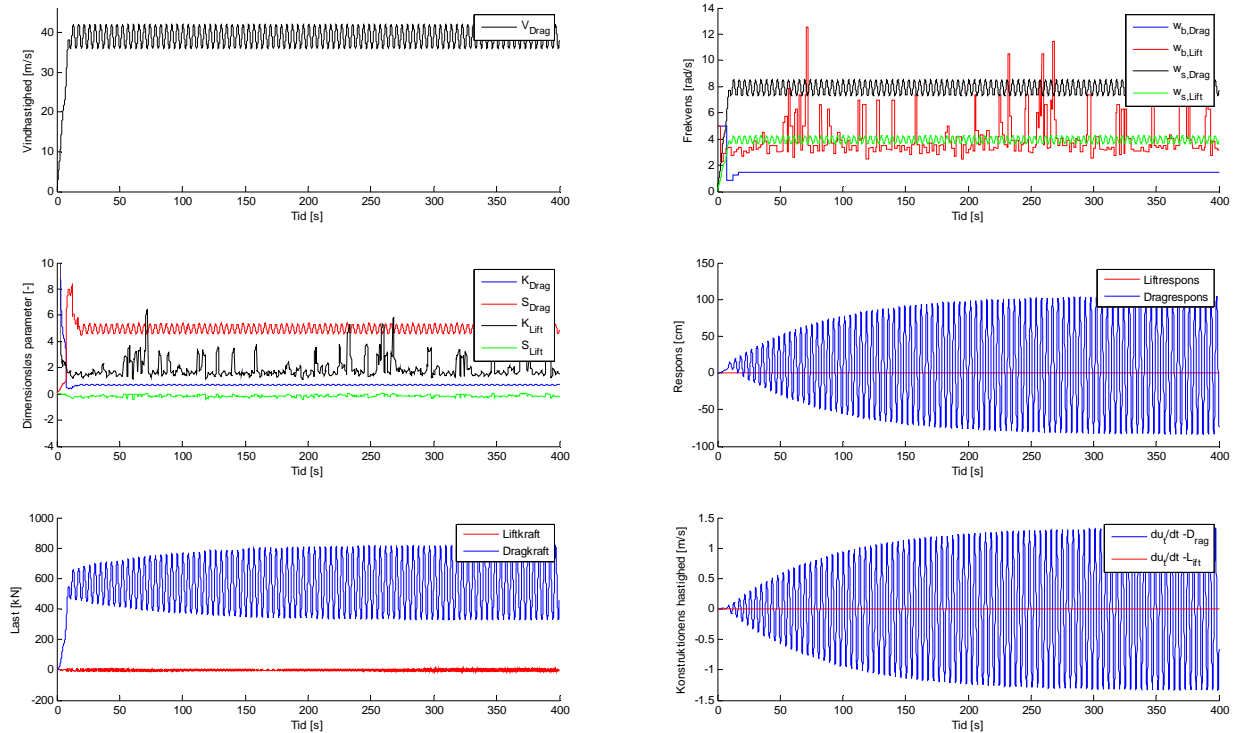
Hvis det forsøges at fitte en funktion til kurven for det konstante vindfelt, viser det sig, at dataene kan beskrives ved et 2. ordenspolynomium. Dette giver god mening, idet vindlasten jf. Morisons formel stiger med kvadratet på vindhastigheden. Og idet der i denne undersøgelse er tale om en statisk påvirkning, er der en lineær sammenhæng mellem vindlast og udbøjning, når der som her er antaget en lineær elastisk spændings-tøjningsrelation.



Figur 9.6: Maksimal udbøjning ved forskellige vindhastigheder på toppen af konstruktionen når det påførte vindfelt er hhv. konstant eller varierende med tiden.

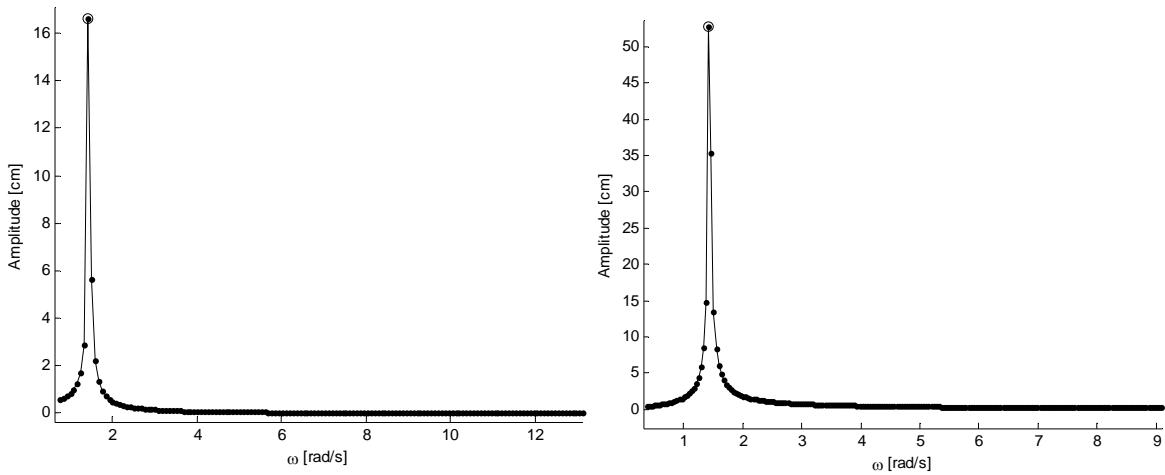
9.2 Fluktuerende vindfelt

I det følgende redegøres for de samme undersøgelser for konstruktionen blot med et fluktuerende vindfelt. Vindhastigheden for det fluktuerende vindfelt er vist i formel (9.1) hvor amplituden på den fluktuerende del sættes til 3 m/s og frekvensen sættes til de forskellige cirkulære egenfrekvenser. På nedenstående figur er undersøgelserne foretaget for den første cirkulære egenfrekvens. Det ses at middelhastigheden ligger omkring 40 m/s svarende til analyse nr. 7 i tabel 9.1 mens responset er væsentlig højere end ved et konstant vindfelt.



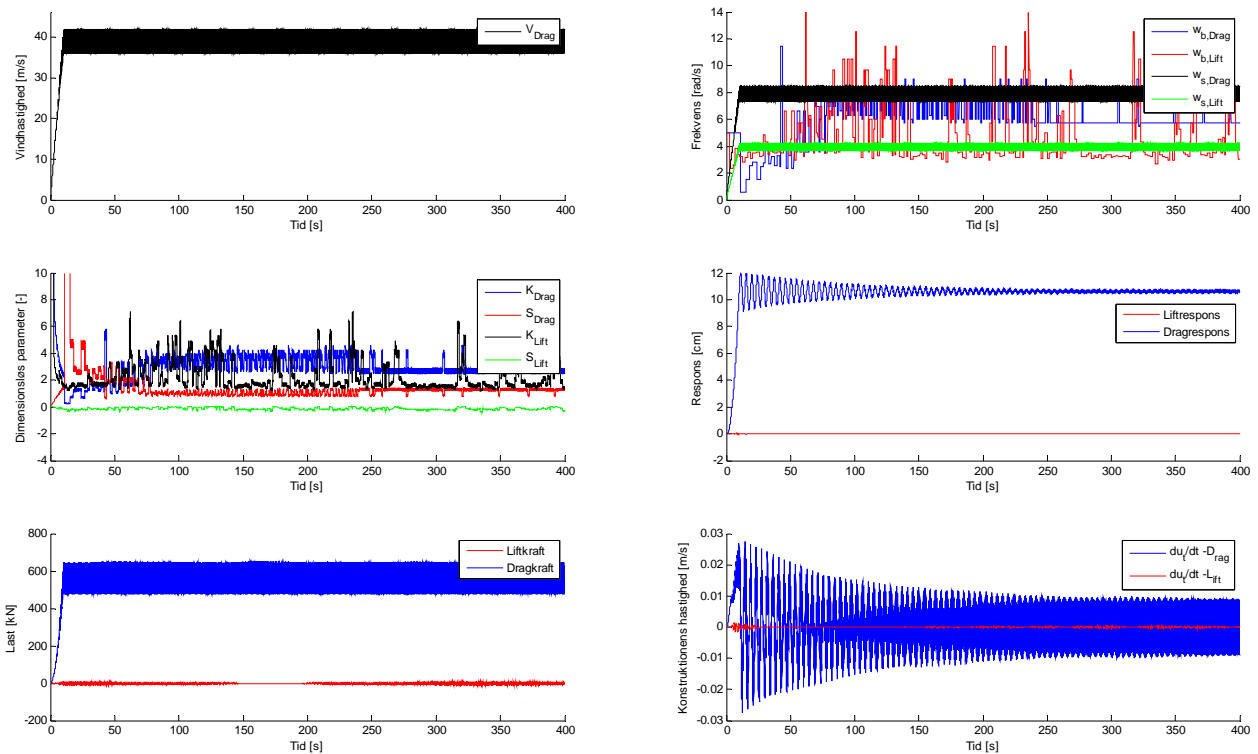
Figur 9.7: Plot af vindhastighed, reduceret frekvens, dimensionsløs parameter S , lastsignal, responssignal samt forskellige frekvenser. Alle plots er kørt med en fluktuerende vindfelt med en frekvens svarende til konstruktionens første cirkulære egenfrekvens og en amplitude på 3 m/s.

Det ses i modsætning til belastning fra et konstant vindfelt at responset bliver forstærket med tiden hvilket skyldes dynamisk forstærkning, som igen er stærkt afhængigt af dæmpningsforholdet, som er en skønnet størrelse, idet der ikke foreligger forsøgsdata for dæmpningen. Konstruktionen svinger i samme frekvens som vindfeltet og bliver dermed forstærket med tiden. Dette er igen vist ved et udsnit af et amplitudespektrum for responssignalet på nedenstående figur. De bemærkes at akserne på de to figurer forskellige.



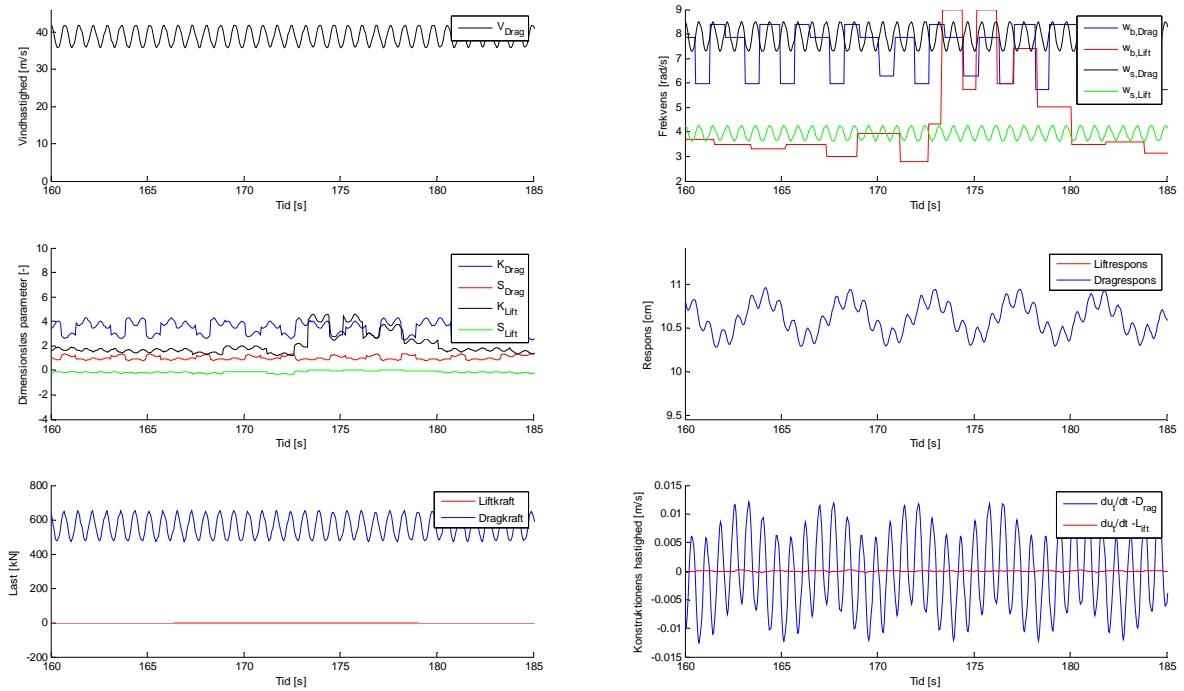
Figur 9.8: FFT af responssignalet for fluktuerende vindfelt ved første egenfrekvens. Tv.: Signalet i tidsinterval 0 – 100 sekunder. Th.: Signalet i tidsinterval 250 - 400 sekunder.

Sammenlignes dette spektrum med spektret for konstant vindfelt på figur 9.4 ses det at kun frekvensen svarende til den første cirkulære egenfrekvens bliver anslået. For at sammenligne resultater er samme undersøgelse foretaget hvor vindfeltets fluktuation har en frekvens svarende til den anden cirkulære egenfrekvens.



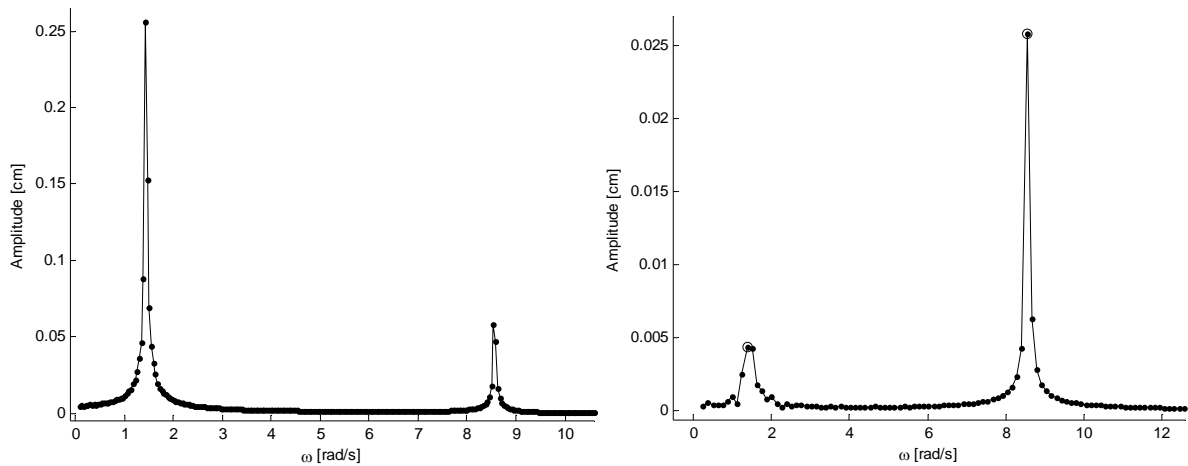
Figur 9.9: Plot af vindhastighed, reduceret frekvens, dimensionsløs parameter S , lastsignal, responssignal samt forskellige frekvenser. Alle plots er kørt med en fluktuerende vindfelt med en frekvens svarende til konstruktionens anden cirkulære egenfrekvens og en amplitude på 3 m/s.

Det ses af figuren at responset ikke bliver forstærket med tiden men dæmpes ud til en konstant udsving omkring værdien af den statiske udbøjning. På nedenstående figur er et udsnit af det på figur 9.9 plottede optegnet.



Figur 9.10: Udsnit af plottene på figur 9.9.

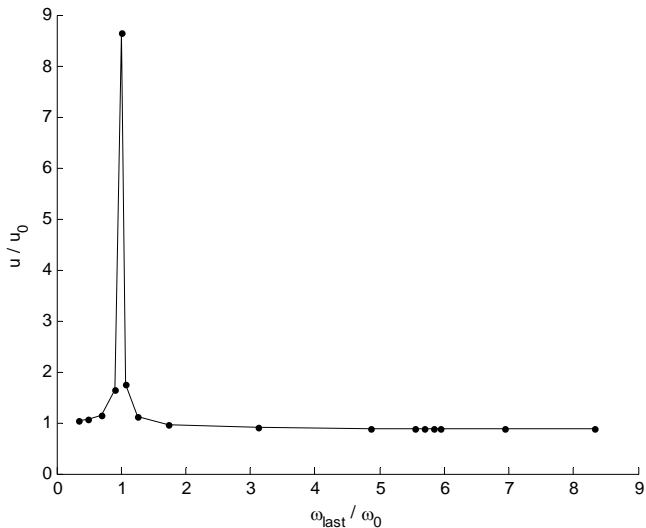
Det ses at responset i tidsintervallet 160 - 185 sekunder består af 2 overløjerede frekvenser svarende til konstruktionens første og anden cirkulære egenfrekvens. Dette må skyldes at konstruktionen til at starte med bliver anslået i den første mode og overgår med tiden til anden mode. Dette er igen vist ved en FFT af responssignalet i to forskellige tidsinterval på nedenstående figur.



Figur 9.11: FFT af responssignalet for fluktuerende vindfelt med konstruktionens anden egenfrekvens.

Tv.: Signalet i tidsinterval 0 – 100 sekunder. Th.: Signalet i tidsinterval 250 - 400 sekunder.

Det ses af amplitudespektrene at konstruktionen bliver anslået i første mode til at starte med. Med tiden overgår bevægelsen over til vindfeltets fluktuerende frekvens som er den 2 cirkulære egenfrekvens. På nedenstående figur er frekvensresponspektret plottet som funktion af belastningsfrekvensen.



Figur 9.12: Frekvensresponspektrum hvor belastningsfrekvensen er normeret i forhold til første egenfrekvens og responset er normeret i forhold til den statiske udbøjning.

Som forventet bliver responset forstærket væsentlig når belastningsfrekvensen ligger tæt på konstruktionens første egenfrekvens. Højere op i frekvensbåndet bliver responset mindre end den statisk udbøjning. Dette hænger sammen med, at det i dette frekvensområde primært er massen, og ikke dæmpningen, som er styrende for responset.

9.3 Konklusion af lastmodel fra CFD

Ovenstående undersøgelser viser god sammenhæng mellem det påførte vindfelt og vindlasten samt konstruktionens respons. Resultaterne kan opsummeres ved følgende punkter

- Når vindfeltet er konstant bliver konstruktionen anslået i første mode pga. opstart af lasten og konvergerer med tiden mod en konstant udbøjning. Der sker som forventet ikke dynamisk forstærkning når vinden er konstant.
- Når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens første egenfrekvens bliver responset som forventet anslået i den første mode. Her bliver responset forstærket af vinden (lasten) og lasten forstærker igen responset. På den måde bliver konstruktion forstærket dynamisk indtil en maksimal udbøjning, bestemt af dæmpningsforholdet.
- Når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens anden egenfrekvens bliver konstruktionen til at starte med anslået i første mode pga. opstart af lasten. Efter et stykke tid overgår konstruktionens bevægelse til anden mode, idet første mode dæmpes ud, da den ikke eksiteres af lasten. Dette forhold gør sig naturligvis gældende i en mere generel forstand, og således ikke kun ved en harmonisk last med frekvens som konstruktionens anden egenfrekvens.

Af disse undersøgelser må det konkluderes at struktur- og lastmodellen opfører sig som forventet. Samtidig konkluderes det at det primært er konstruktionens bevægelse sammen med vindfeltet som giver den dynamiske forstærkning. Hvirvelafløsningerne har med den pågældende konstruktion ikke

væsentlig indflydelse på responset. Dette skyldes at amplituden for hvirvelaflysningerne som bestemt i afsnit 8.2 er små i forhold til amplituden fra bevægelsesdelen.

Kapitel 10

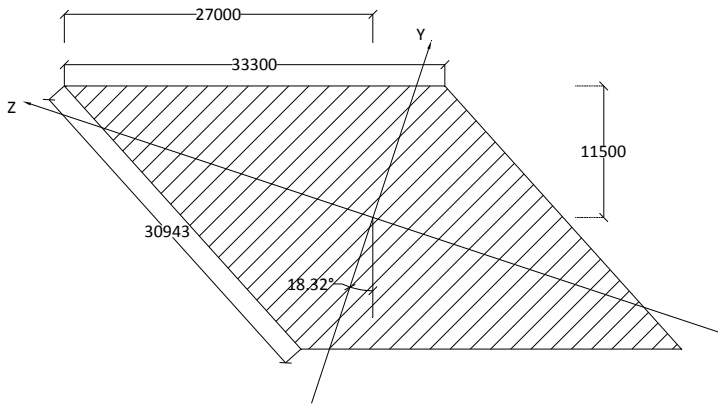
Lumped Parameter Modelling

I dette afsnit indføres en egentlig jordmodel i den strukturelle model af Light*House. Hvor det hidtil er antaget, at samtlige strukturmodellens frihedsgrader på grænsen til jorden er foreskrevet til værdien nul, indfører Lumped Parameter Modelling (LPM) en endelig, frekvensafhængig stivhed for hver af de seks frihedsgrader mellem konstruktion og jord. Det overordnede formål med LPM, er at beskrive jordens frekvensafhængige stivhed vha. et mekanisk system bestående af relativt få diskrete fjeder-, masse- og dæmpningselementer. Dette system kan uden videre implementeres i den eksisterende finite element repræsentation af konstruktionen. Forudsat at LPM-modellen kalibreres op imod en nøjagtig model er det muligt at modellere jordens respons ved en beskeden udvidelse af FE modellen for den samlede konstruktion. Dette står i kontrast til eksempelvis en direkte implementering af en finite element model for jorden, hvilket vil kræve langt større beregningstid, især hvis den baseres på en ulineær konstitutiv materialemodel.

Som nævnt skal der foreligge en nøjagtig model, som LPM-modellen efterfølgende kalibreres efter. Denne kaldes i det følgende *referenceløsning*, og kan være baseret på flere forskellige typer analyse af jordens dynamiske respons. I dette tilfælde er referenceløsningen baseret på den såkaldte domænetransformationsmetode for et plant fundament på en lagdelt jord.

10.1 Modellering af fundament og jord

Den anvendte referenceløsning for LPM-modellen baseres på et overfladefundament med et parallelogramformet grundplan med dimensioner svarende til formen på Light*House. For at sikre så få koblinger som muligt mellem de seks frihedsgrader for fundamentet indlægges der et koordinatsystem med origo i tyngdepunktet, hvilket ligeledes er sammenfaldende med forskydningscentrum. Akserne orienteres efter hovedakserne for fundamentsformen. Herved dekobles en stor del af de seks kinematiske frihedsgrader for fundamentet, når det samtidig sikres, at de diskrete beregningspunkter for fundamentet indlægges symmetrisk om origo. Figur 10.1 viser en skitse af fundamentsformen påført dimensioner, samt hvorledes koordinatsystemet er orienteret.

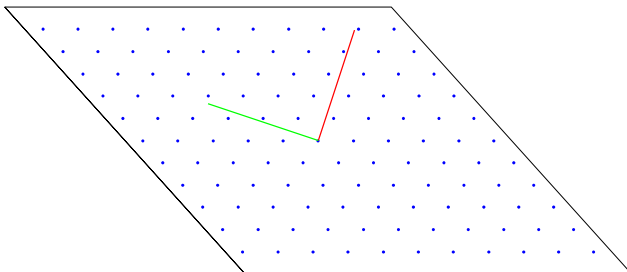


Figur 10.1: Skitse af fundamentsform for LPM model. Alle mål i mm.

Der er udarbejdet en MATLAB-funktion til diskretisering af beregningspunkterne for fundamentet kaldet **PARALLELOGRAM.M**. Disse beregningspunkter anvendes i forbindelse med en numerisk elasto-dynamisk bestemmelse af jordens frekvensafhængige stivhed for et paralleleformet overfladefundament. Diskretiseringsfunktionen er lavet, så der kan varieres på følgende parametre:

- Sidelængderne på parallelogrammet
- Den spidse vinkel i parallelogrammet
- Antal beregningspunkter angivet som et antal rækker og søjler

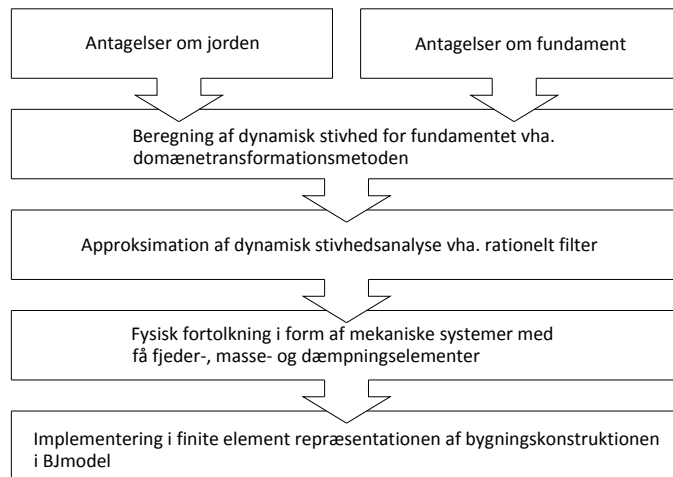
For en fundamentsform svarende til Light*House samt $11^2 = 121$ beregningspunkter viser figur 10.2 resultatet af diskretiseringen. Som det ses ligger der et beregningspunkt i origo af koordinatsystemet.



Figur 10.2: Diskretisering af beregningspunkter for fundament i LPM modellen. Rød akse er positiv y-akse mens grøn akse er positiv z-akse.

10.2 Algoritme for interaktion mellem jord og konstruktion

I det følgende beskrives de enkelte skridt i den valgte fremgangsmåde til modellering af jordrespons. Figur 10.3 viser et flowdiagram over de enkelte faser, som jordmodellen kan inddeles i. De efterfølgende afsnit refererer til de enkelte dele af flowdiagrammet, og uddyber disse.

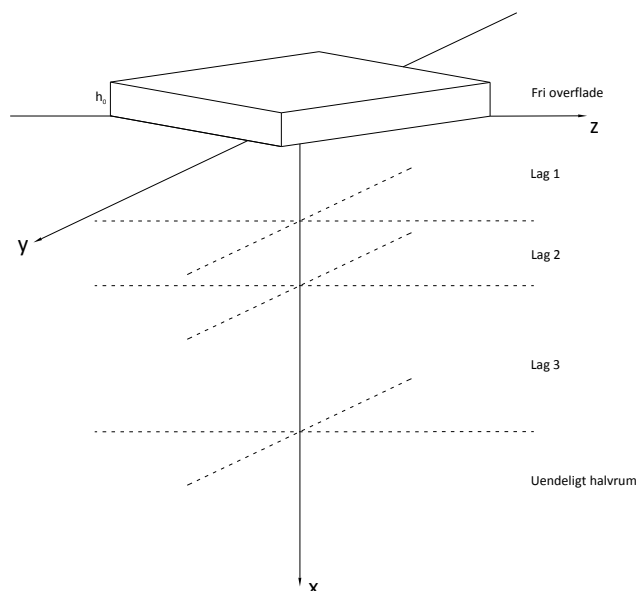


Figur 10.3: Flowdiagram over beregningsgangen i implementeringen af jordmodel efter LPM metoden.

Nedenfor følger en redegørelse for hver af faserne som vist på figur 10.3.

10.2.1 Antagelser om fundament og jord

Det er antaget, at fundamentet udgøres af et plant overfladefundament med højden h_0 og med form som et parallelogram. Jorden består af et antal lag med vandret øvre og nedre grænse samt et uendeligt homogent halvrum nederst. Dette er illustreret på figur 10.4.



Figur 10.4: Skitse af overfladefundament samt lagdelt jord.

Fælles for alle jordlagene er, at materialet modelleres som lineært viskoelastisk, homogent og isotropt. Således udgøres inputdataene for hvert jordlag af følgende parametre:

- Elasticitetsmodulen E
- Poissons forhold ν
- Massedensiteten ρ
- Tabsfaktoren η
- Lagtykkelsen h

Tabsfaktoren η indgår på baggrund af den anvendte dæmningsmodel, nemlig hysteretisk dæmpning, og defineres som det relative tab af amplitude i løbet af en cyklus. Elasticitetsmodulen indføres i beregningerne som en kompleks størrelse, idet løsningsfasen foregår i frekvensdomænet, dvs. $E^* = E(1 + i\eta)$.

Da jordbundsforholdene på projektlokaliteten på Århus Havn, set fra et ingeniørmæssigt synspunkt, giver anledning til en række ret komplekse problemstillinger, er der i dette projekt blot antaget et jordbundsprofil til LPM-modelleringen, som ikke stemmer overens med de faktiske forhold. De valgte jordparametre udgøres af værdierne vist i tabel 10.1:

Tabel 10.1: Jordparametre for de tre jordlag.

	Lag 1	Lag 2	Lag 3
E	$5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$	$2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$	$5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
ν	0.35	0.495	0.25
ρ	$2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
η	0.03	0.02	0.01
h	5 m	25 m	∞

Som det ses på figur 10.4, er fundamentalsbunden givet ved $x = 0$.

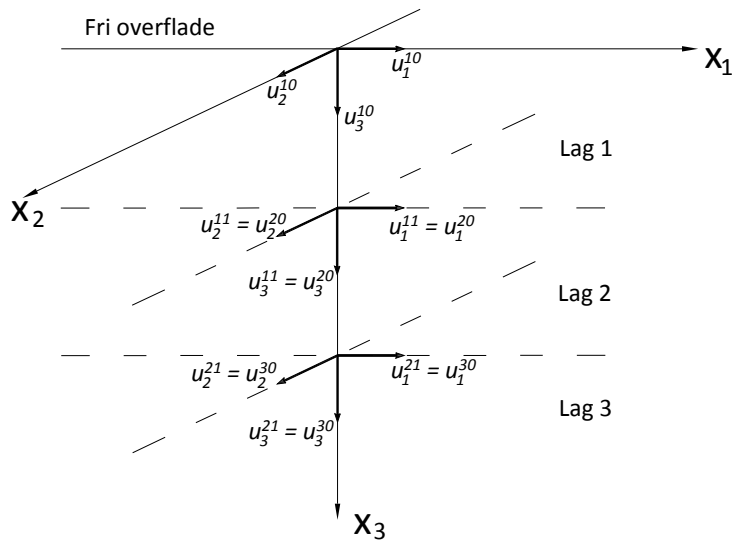
10.2.2 Domænetransformationsmetode

Som tidligere nævnt anvendes en semianalytisk model for jordens frekvensafhængige stivhed baseret på domænetransformationsmetoden. Det ønskes at beskrive relationen mellem en last som virker i et givet punkt i jorden til en given tid og de dertil hørende flytninger i punkt på jordoverfladen eller laggrænsen til enhver tid. Følgende betegnelser benyttes for hhv. flytning og kraft i tidsdomænet.

$$\begin{aligned} u_i^{nm}(x_1, x_2, t) \\ p_i^{nm}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{10.1}$$

hvor indeks $i = 1, 2, 3$ angiver de tre retninger i et kartesisk koordinatsystem, n angiver nummeret på det jordlag, som betragtes jf. figur 10.4 og m angiver enten positionen ved lagets top (0) eller lagets bund (1). Flytningerne ved jordoverfladen er derfor $u_i^{10}(x_1, x_2, t)$. Det antages at flytningerne og

kræfterne ved overgangen mellem to jordlag er den samme, dvs. $u_i^{11} = u_i^{20}$, $p_i^{11} = p_i^{20}$ osv. Dette er skitseret på nedenstående figur.



Figur 10.5: Definition af flytningskomponenter.

I henhold til (Andersen, 2008) kan flytningskomponenten i den i 'te retning ved jordoverfladen

$$u_i^{10}(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, t - \tau) p_j^{10}(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2 d\tau \quad (10.2)$$

hvor

g_{ij} Greens funktion

$p_j^{10}(y_1, y_2, \tau)$ er lasten i den j 'te retning ved et punkt på overfladen til tiden τ

I det generelle tilfælde kan denne ligning ikke løses i tidsdomænet, da Greens funktion kun kan udledes i få meget simple tilfælde. Desuden er det beregningsmæssigt særdeles krævende at evaluere det 3-dobbelte integrale. I det følgende transformeres ligningerne fra tids- til frekvensdomænet samt fra fysiske koordinater til bølgetalsdomænet ved i alt tre Fourier transformationer. Ved Fourier transformation af formel (10.2) med hensyn til tiden fås

$$U_i^{10}(x_1, x_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^{10}(x_1, x_2, t) e^{-i\omega t} dt \quad (10.3)$$

Tilsvarende fås lasten og Green's funktionen i frekvensdomænet ved Fourier transformation med hensyn til tiden. Således haves

$$U_i^{10}(x_1, x_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \omega) p_j^{10}(y_1, y_2, \omega) dy_1 dy_2 \quad (10.4)$$

hvor G_{ij} og p_i^{10} er hhv. Greens funktion og lasten i frekvensdomænet. Transformation af de fysiske koordinater over til bølgetalsdomænet sker ved

$$\bar{U}_i^{10}(k_1, k_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_i^{10}(x_1, x_2, \omega) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (10.5)$$

hvor k_1 og k_2 er bølgetal i hhv. x_1 - og x_2 -retningen. Tilsvarende fås lasten og Green's funktionen i bølgetals- og frekvensdomænet således at

$$\bar{U}_i^{10}(k_1, k_2, \omega) = \bar{G}_{ij}(k_1, k_2, \omega) \bar{P}_j^{10}(k_1, k_2, \omega) \quad (10.6)$$

hvor \bar{G}_{ij} og \bar{P}_j^{10} er hhv. Greens funktion og lasten i frekvens- og bølgetalsdomænet. Denne formel har den fordel, sammenlignet med udtrykket i kartesiske koordinater i tidsdomænet, at integrationerne kan undgås. Udfordringen ligger i at bestemme Greens funktionen, der nu beskriver relationen mellem en last og de dertilhørende flytninger, i frekvens- og bølgetalsdomænet. Der tages udgangspunkt i de styrende ligninger for bølgeudbredelse, den såkaldte Naviers ligning

$$(\lambda^j + \mu^j) \frac{\partial \Delta^j}{\partial x_i} + \mu^j \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x_k \partial x_k} = \rho^j \frac{\partial^2 u_j^i}{\partial t^2} \quad (10.7)$$

hvor

λ^j er en Lamé konstant for materialet som i frekvensdomænet er defineret ved

$$\lambda^j = \frac{\nu^j E^j (1 + i \operatorname{sign}(\omega) \eta^j)}{(1 + \nu^j)(1 - 2\nu^j)}, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

μ^j er en Lamé konstant for materialet som i frekvensdomænet er defineret ved

$$\mu^j = \frac{E^j (1 + i \operatorname{sign}(\omega) \eta^j)}{2(1 + \nu^j)}, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

Δ^j er dilatationen som i fysiske koordinater er defineret ved

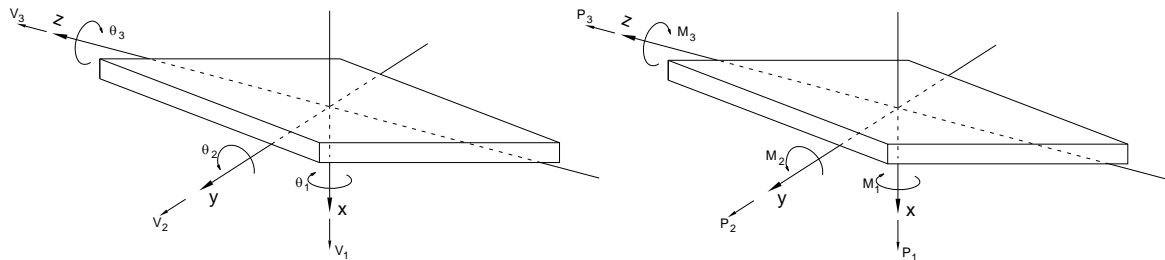
$$\Delta^j = \frac{\partial u_k^j}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

De enkelte led i Navier ligningen transformeres til bølgetals- og frekvensdomænet ved Fourier transformation. I (Andersen, 2008) er det vist, at dette fører til en række ordinære differentialligninger, hvis randbetingelser i et lag er værdierne i toppen og bunden af laget. Ved løsning af Naviers ligning opnås relationen mellem last og flytning som kan ækvivaleres med Greens funktion. Denne løsning kan uden problemer transformeres tilbage til fysiske koordinater ved invers Fourier transformation. For en detaljeret matematisk udledning af løsning til Naviers ligning samt bestemmelse af Greens funktion henvises til (Andersen, 2008).

Efterfølgende løses formel (10.4) for en udbredt enhedslast i retning j koncentreret omkring hvert af de diskrete punkter angivet på figur 10.2. Denne øvelse gentages for alle punkter (x_1, x_2) anvendt som modtagerpunkt hvorved der for hver frekvens, ω , opbygges en fleksibilitetsmatrix for fundamentets interaktion med jorden. Dette er netop den frekvensafhængige sammenhæng mellem flytningen og lasten, også kaldt mekanisk impedans som beskrives i det følgende afsnit.

10.2.3 Impedans af et stift overfladefundament

Kinematikken af et stift overfladefundament kan beskrives entydigt ved tre translationsfrihedsgrader og tre rotationsfrihedsgrader som skitseret på figur 10.6a.



Figur 10.6: Principskitse visende de seks frihedsgrader og tilhørende kræfter for et stift fundament.

I frekvensdomænet er disse frihedsgrader relateret til de tilhørende kræfter og momenter, se figur 10.6b, ved impedansmatricen $Z(\omega)$:

$$Z(\omega)V(\omega)=F(\omega) \quad (10.8)$$

hvor

$$V(\omega)=[V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

$$F(\omega)=[P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3]^T$$

Opgaven består derfor i at bestemme den frekvensafhænge impedansmatrice $Z(\omega)$ for den aktuelle geometri af fundamentet ved påførsel af en udbredt enhedslast. I det generelle tilfælde vil alle 36 indgange i impedansmatricen være forskellige fra nul, dvs. der findes generelt i alt 30 koblingsled, da de seks diagonalindgange beskriver impedansen af en given frihedsgrad isoleret set. Dog vil impedansmatricen være symmetrisk, hvorfor de maksimale 30 koblingsled vil bestå af 15 par.

Ved at antage, at jorden består af et antal vandrette lag i et uendeligt stratum, samt at alle spændingsresultanter virker i tyngdepunktet og forskydningscentrum på fundamentet, dekobler V_3 og θ_3 fra de øvrige frihedsgrader. I kraft af fundamentets fysiske udstrækning er der dog stadig en kobling mellem de øvrige to rotationer θ_1 og θ_2 , i det følgende benævnt *rocking*, og de vandrette translationsfrihedsgrader V_1 og V_2 .

Ved at orientere koordinatsystemet efter fundamentets hovedakser som vist på figur 10.1, opnås færrest mulige koblingsled i impedansmatricen. Ved at betragte figur 10.1 ses det dog, at der ud over de ovennævnte parvise koblinger mellem rocking og horisontal translation desuden vil være en kobling mellem de to rockingfrihedsgrader. Yderligere sikrer den valgte diskretiseringsmetode af beregningspunkterne som vist på figur 10.2, at der altid vil være et beregningspunkt at finde i det sammenfaldende tyngdepunkt og forskydningscentrum.

10.2.4 LPM-model af fundament og jord

Komponenterne i impedansmatricen kan udtrykkes som

$$Z_{ij}(a_0) = K_{ij} S_{ij}(a_0) \quad (10.9)$$

hvor i og j løber fra 1 til 6, og angiver indgangsnummer i impedansmatricen. Bemærk, at formel (10.9) ikke skal opfattes som en matrixligning, hvorfor der ikke skal summeres over i og j .

a_0 er en dimensionsløs frekvens givet ved $a_0 = \omega r_0 / c_0$. Her er r_0 en karakteristisk længde og c_0 en karakteristisk bølgehastighed for jorden. K_{ij} er den statiske stivhedsfaktor i impedansen, og kan således opfattes som impedansen ved den cykliske frekvens nul.

Traditionelt opdeles den frekvensafhængige impedansfaktor, $S_{ij}(a_0)$, i to led: Dels et singulært led og dels et regulært led, dvs.

$$S_{ij}(a_0) = S_s(a_0) + S_r(a_0) \quad (10.10)$$

Den singulære del udtrykkes endvidere på formen

$$S_s(a_0) = k^\infty + ia_0 c^\infty \quad (10.11)$$

De to reelle konstanter k^∞ og c^∞ vælges, så leddet $K S_s(a_0)$ i formel (10.9) udtrykker den fulde stivhed i grænsetilfældet, hvor $a_0 \rightarrow \infty$. For et stift overfladefundament antager den reelle del af $S_s(a_0)$ værdien nul, dvs. $k^\infty = 0$. Således består den komplekse stivhed i højfrekvensområdet udelukkende af en rent mekanisk impedans, hvor følgende udtryk for c^∞ for de forskellige frihedsgrader gør sig gældende. Bemærk, at ρ , c_p og c_s alle refererer til det øverste jordlag, da det er her, grænsefladen mellem fundament og jord befinder sig.

$$\text{Horizontal:} \quad c_{11}^\infty = c_{22}^\infty = \frac{\rho c_s A_0}{K}$$

$$\text{Vertikal:} \quad c_{33}^\infty = \frac{\rho c_p A_0}{K}$$

$$\text{Rocking:} \quad c_{44}^\infty = c_{55}^\infty = \frac{\rho c_p I_0}{K}$$

$$\text{Torsion:} \quad c_{66}^\infty = \frac{2\rho c_s I_0}{K}$$

Her er A_0 arealet af et horisontalt snit af fundamentet, mens I_0 er inertimomentet.

Den regulære del af formel (10.10) udgøres af den resterende del af den dynamiske stivhed, og bestemmes ved at fitte et såkaldt rationelt filter til resultater af følgende udtryk, som fremkommer direkte ved omskrivning af de ovenstående udtryk:

$$S_r(a_0) = \frac{Z(a_0)}{K} - S_s(a_0) \quad (10.12)$$

$S_r(a_0)$ findes ved domænetransformationsmetoden som tidligere beskrevet.

Et rationelt filter, her betegnet $\hat{S}_r(ia_0)$, antager matematisk form som en polynomiumsbrøk, dvs.

$$S_r(a_0) \approx \hat{S}_r(ia_0) = \frac{P(ia_0)}{Q(ia_0)} \quad (10.13)$$

hvor tæller- og nævnerpolynomierne er givet ved følgende, hvor alle koefficienter er reelle:

$$P(ia_0) = 1 - k^\infty + p_1(ia_0) + p_2(ia_0)^2 + \dots + p_{M-1}(ia_0)^{M-1} \quad (10.14)$$

$$Q(ia_0) = 1 + q_1(ia_0) + q_2(ia_0)^2 + \dots + q_M(ia_0)^M \quad (10.15)$$

Ordenen af det rationelle filter, M , skal være høj nok til at sikre et tilfredsstillende fit til de fra domænetransformationsmetoden opnåede diskrete punkter, som tilsammen udgør referenceløsningen. På den anden side viser det sig, at en for høj orden af det rationelle filter kan medføre, at den fittede løsning springer op og ned udenfor området af frekvenserne, til hvilke der fittes. Det bedste kompromis i denne henseende må opnås ved manuelt at skrue på M , samt ved at benytte domænetransformationsmetoden på flere eller færre diskrete frekvenser.

Den fulde approksimation til $S(a_0)$ findes som givet ved formel (10.10) ved addition af formel (10.11) og formel (10.13).

Approksimationen af $S(a_0)$ er valgt, idet det ønskes at denne udviser følgende dobbeltasymptotiske forløb med hensyn til de lave og de høje frekvenser.

I det statiske grænsetilfælde skal impedansfaktoren have værdien en.

$$S_{ij}(a_0) \approx S_s(a_0) + \hat{S}_r(ia_0) \rightarrow 1 \quad \text{for } a_0 \rightarrow 0 \quad (10.16)$$

I det øvre frekvensgrænsetilfælde skal impedansfaktoren udgøres af en rent singular del.

$$S_{ij}(a_0) \rightarrow S_s(a_0) \quad \text{for } a_0 \rightarrow \infty \quad (10.17)$$

10.2.5 Fysisk fortolkning af et rationelt filter

Et essentielt element i LPM er, at den matematiske beskrivelse af impedansen kan tolkes som en række forholdsvis simple mekaniske systemer bestående af et antal fjeder-, masse- og dæmpningselementer. Ved at ækvivalere de fundne matematiske udtryk til disse systemer, kan der foretages en direkte implementering af stivhedsmodelleringen af jorden i eksempelvis en finite element model af selve konstruktionen.

I det følgende gennemgås kortfattet, hvordan impedansfaktoren S kan ækvivaleres til simple, mekaniske systemer.

Ved omskrivning af formel (10.13) fra en polynomiumsbrøk til en sum af stambrøker, fås nedenstående udtryk, såfremt alle polerne er reelle:

$$\hat{S}_r(i a_0) = \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{i a_0 - s_m} \quad (10.18)$$

I ovenstående formel er s_m polerne til $\hat{S}_r(i a_0)$, hvor m går fra 1 til M . Med andre ord er s_m rødderne til nævnerpolynomiet $Q(i a_0)$ i formel (10.13), mens A_m er de tilhørende residualer. Ved argumentationen givet i [kilde Lars Andersen] angående de eventuelle komplekse residualer, kan det vises, at impedansfaktoren S kan udtrykkes som vist i nedenstående formel:

$$\hat{S}(i a_0) = k^\infty + i a_0 c^\infty + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_{0n} + \beta_{1n} i a_0}{\alpha_{0n} + \alpha_{1n} i a_0 + (i a_0)^2} + \sum_{n=N+1}^{M-N} \frac{A_n}{i a_0 - s_n} \quad (10.19)$$

Her er det implicit defineret, at $2N \leq M$, hvor $2N = M$ i tilfældet, hvor samtlige residualer er komplekse.

De reelle koefficienter α_{0n} , α_{1n} , β_{0n} og β_{1n} som optræder i andenordensleddet i formel (10.19) er givet ved:

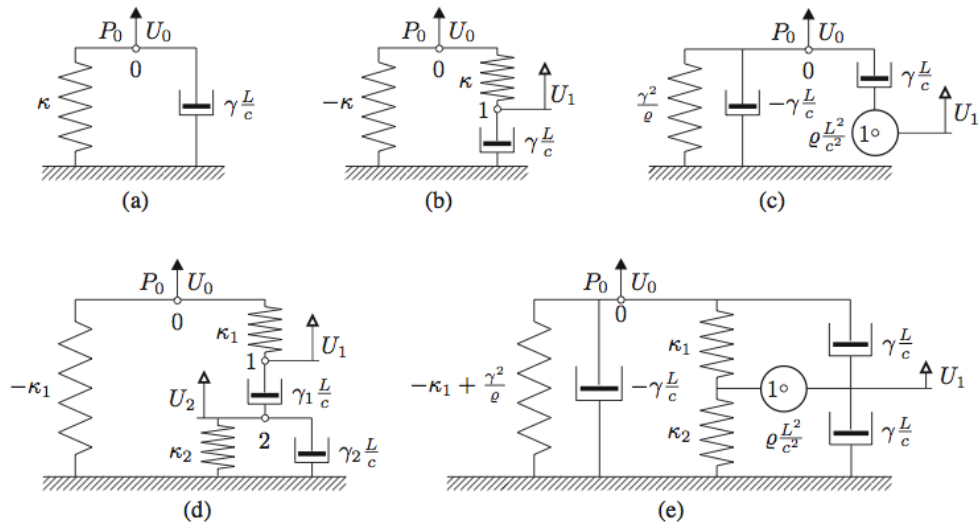
$$\begin{aligned} \alpha_{0n} &= \{s_n^{\Re}\}^2 + \{s_n^{\Im}\}^2 \\ \alpha_{1n} &= -2s_n^{\Re} \\ \beta_{0n} &= -2A_n^{\Re} s_n^{\Re} + 2A_n^{\Im} s_n^{\Im} \\ \beta_{1n} &= 2A_n^{\Re} \end{aligned} \quad (10.20)$$

Her er $s_n^{\Re} = \Re(s_n)$ og $s_n^{\Im} = \Im(s_n)$ hhv. de reelle og de imaginære dele af de komplekst konjugerede poler. Tilsvarende er $A_n^{\Re} = \Re(A_n)$ og $A_n^{\Im} = \Im(A_n)$ de reelle og imaginære dele af de komplekst konjugerede residualer.

De tre led i formel (10.19), når de to første led opfattes som et, konstant-lineært led, kan tolkes som frekvensresponsfunktioner for forskellige diskrete, mekaniske systemer [kilde]. Disse mekaniske systemer er skitseret på figur 10.7. Som det fremgår af figurteksten, kan første- og andenordensleddet i formel (10.19) tolkes på de to viste måder.

På figur 10.7c og e indeholder systemet en punktmasse, som i figur 10.7c betegnes *monkey tail*. Dette navn referer til, at en punktmasse ophængt i et dæmperelement i det statiske tilfælde ikke giver mening. Således kræves et system i bevægelse, dvs. et dynamisk system, hvilket en springende abe fint lever op til.

Som redegjort for i [kilde] kan det vises, at det i de fleste tilfælde vil være en fordel at benytte netop disse systemer, da det er med til at reducere antallet af indre frihedsgrader i det færdige LPM system, og dermed en så lille udvidelse af den samlede finite element model som muligt.



Figur 10.7: Diagram over ækvivalente mekaniske systemer tilhørende hhv. det konstant-lineære led (a), førsteordensleddet (b og c) samt andenordensleddet (d og e) (Andersen, 2006).

10.3 Resultater

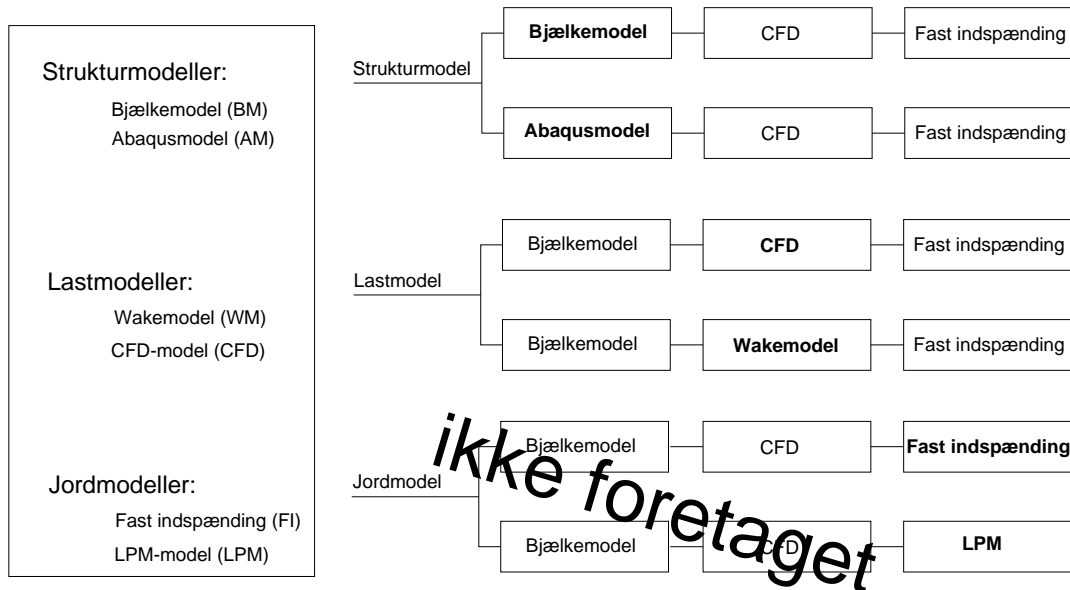
Grundet problemer med implementeringen af LPM-modellen i **BJMODEL** har det på afleveringstidspunktet ikke været muligt at foretage de planlagte undersøgelser af forskellen mellem den simple, fuldt indspændte jordmodel og LPM-modellen.

Sammenligning

Kapitel 11

Sammenligning

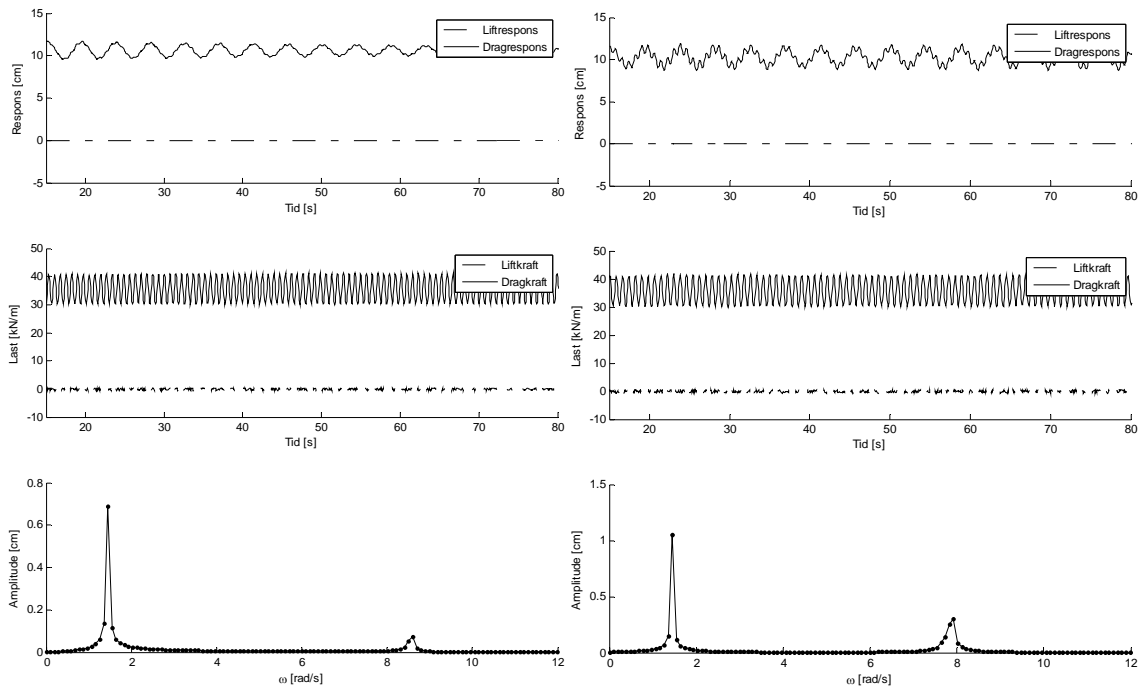
I dette afsnit sammenlignes de struktur-, last- og jordmodeller som er benyttet i projektet med hensyn til lastoutputtet og responset. De enkelte sammenligninger er struktureret som vist på nedenstående diagram.



Som tidligere nævnt har der været problemer med implementeringen af LPM-modellen i **BJMODEL** hvorfor sammenligningen mellem den simple, fuldt indspændte jordmodel og LPM-modellen ikke er foretaget.

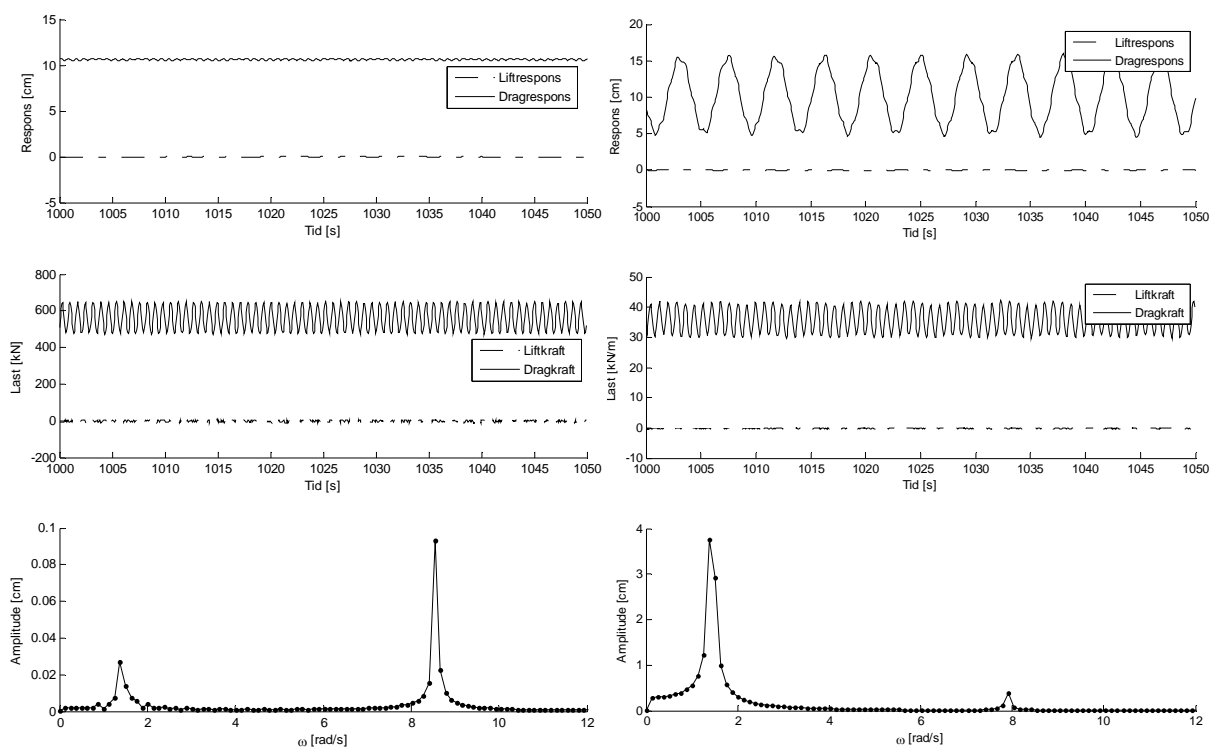
11.1 Strukturmodel

I denne undersøgelse betragtes forskellen i lastoutputtet og responset for konstruktionen når denne belastes med den samme last men med forskellige strukturmodeller: Henholdsvis bjælke- og Abaqus- modellen. Konstruktionen belastes med et fluktuerende vindfelt med en frekvens svarende til konstruktionens 2. cirkulære egenfrekvens. Randbetingelserne mellem konstruktionen og jorden antages fast indspændt. På nedenstående figur er lastoutputtet og responset samt amplitudespektret for responssignalet i dragretningen plottet ved opstartsfasen i tidsintervallet 15 - 80 sekunder.



Figur 11.1: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragresponsen i tidsintervallet 15 - 80 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens 2. cirkulær egenfrekvens. Tv.: Bjælke-strukturmodel. Th.: Abaqus-strukturmodel.

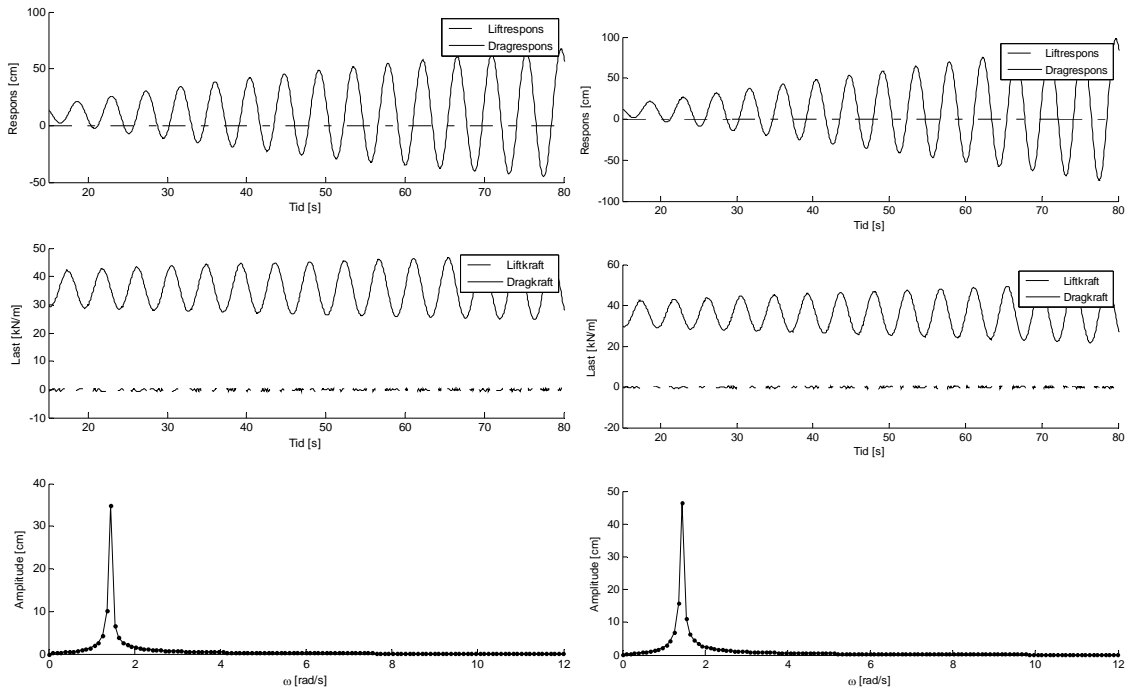
Det ses af plottene at den statiske udbøjning er tilnærmelsesvis ens i begge responssignalet (ca. 10 cm). I bjælke-strukturmodellen er responssignalet domineret af første cirkulær egenfrekvens mens 2. cirkulær egenfrekvens er væsentlig mindre. I Abaqus-strukturmodellen er 1. cirkulære egenfrekvens igen dominerende, men 2. egenfrekvens har større betydning i forhold til bjælke-strukturmodellen. På nedenstående figur betragtes de samme signaler i tidsintervallet 1000 - 1050 sekunder.



Figur 11.2: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragresponsen i tidsintervallet 1000 - 1050 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens 2. cirkulære egenfrekvens. Tv.: Bjælke-strukturmodel. Th.: Abaqus-strukturmodel.

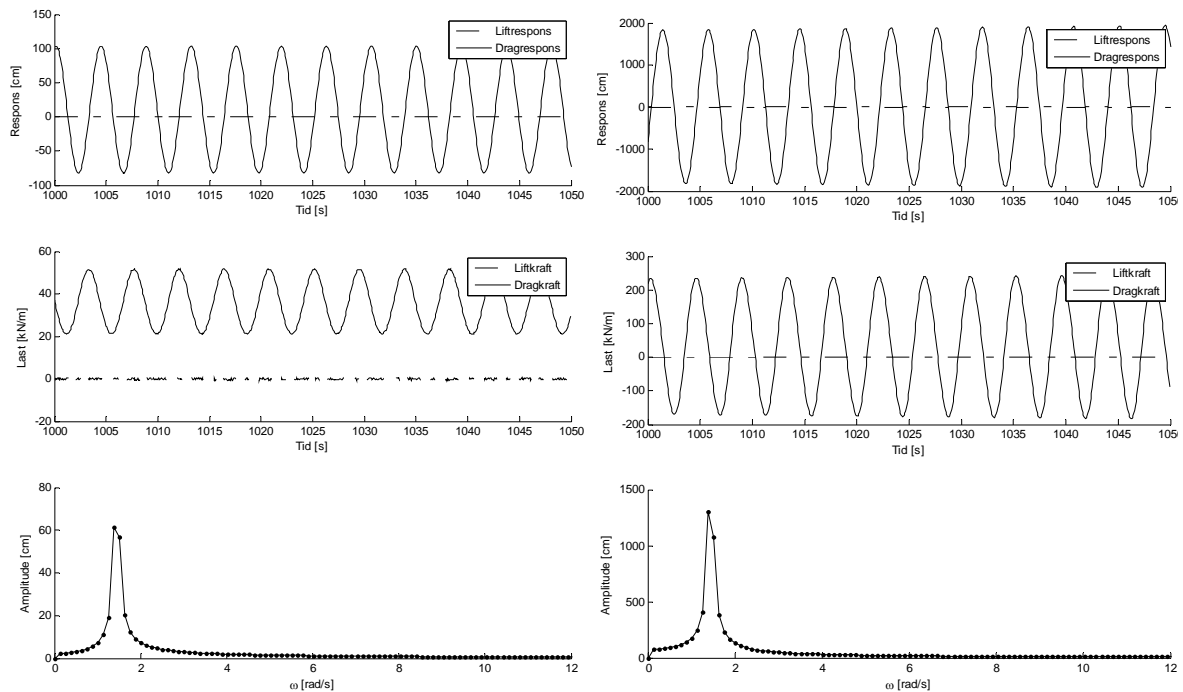
Det ses at responset for bjælke-strukturmodellen er dæmpet ud og domineres af 2. egenfrekvens som har en mindre amplitude. Lastvariationen i begge modeller er tilnærmelsesvis identisk med lastsignalet i tidsintervallet 15 - 80 sekunder som vist på figur 11.1 og nedenstående figur. Responset for Abaqus-strukturmodellen bliver i modsætning til bjælke modellen forstærket med frekvensen svarende til konstruktionens første egenfrekvens. Dette kunne tyde på, at der er en vis kobling mellem første og anden mode. Da responset ikke er konvergeret kan denne dynamiske forstærkning matematisk set fortsætte med at vokse med tiden. Det ses dog at responset fra tidsintervallet 15 - 80 sekunder til 1000 - 1050 sekunder kun er vokset med ca. få centimeter. Det vurderes derfor at denne kritiske situation er usandsynlig, da dette kræver en kombination af et vindfelt som er fluktuerende med den samme frekvens svarende til konstruktionens 2. egenfrekvens over en meget lang tidsperiode.

Foretages samme undersøgelse hvor vindfeltets frekvens sættes til konstruktionens 1. cirkulære egenfrekvens fås outputtene som vist på nedenstående figur.



Figur 11.3: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragrespons i tidsintervallet 15 - 80 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens første cirkulær egenfrekvens. Tv.: Bjælke-strukturmodel. Th.: Abaqus-strukturmodel.

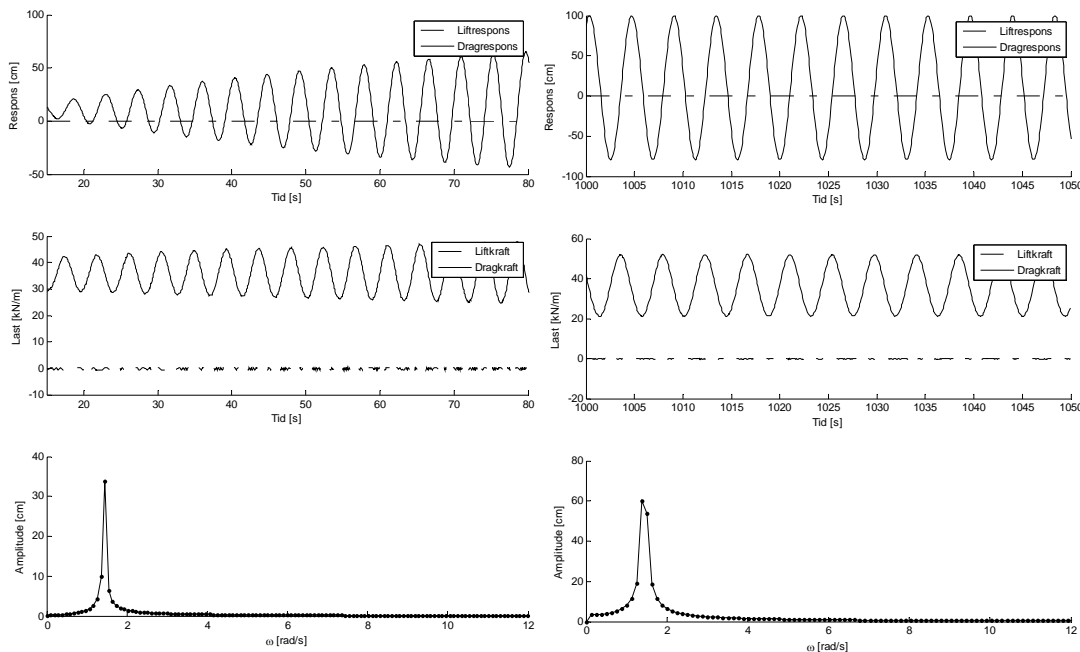
Det ses af ovenstående figur at signalet for responsen og lasten i dette tidsinterval for de to modeller er ret identiske både mht. frekvens og amplitude. For samme undersøgelse i tidsintervallet 1000 - 1050 sekunder ses det af nedenstående figur at responsen for bjælke-strukturmodellen er konvergeret med en maksimal udbøjning på ca. 1 m. Responsen ved Abaqus-strukturmodellen har derimod en urealistisk stor udbøjning. Det samme kan ses af lastsignalet. Det ses at den maksimale udbøjning ligger omkring 17-19 m, hvilket er overkritisk.



Figur 11.4: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragresponsen i tidsintervallet 1000 - 1050 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens første cirkulær egenfrekvens. Tv.: Bjælke-strukturmodel. Th.: Abaqus-strukturmodel.

Denne sammenligning viser, at der er forskel i last- og responssignalet når konstruktionen modelleres med hhv. en bjælke- og en ditto baseret på en skalmodel. Afsnit 7.3 viser at egenfrekvenserne, som kun afhænger af konstruktionens stivhed- og massematrix, i de to modeller er ret identiske for de laveste modes. Stivhedsmatricen i bjælke-strukturmodellen er bestemt ud fra kernens tværsnitskonstanter som er forholdsvis simple at bestemme. Det forventes derfor, at stivhedsmatricen for de to modeller er ret ens. Dette er også tilfældet for de to laveste modes, hvorimod der er store forskelle for de højere modes.

Det forventes, at Abaqus-strukturmodellen er bedre til at modellere massefordelingen da denne tager hensyn til massens udstrækning. I bjælke-strukturmodellen modelleres kernens masse som en jævnt fordelt masse uden udstrækning og etagedækkens masse modelleres som punktmasser med et masseinertimoment. I afsnit 7.3 tabel 7.6 ses det, at der er en vis afvigelsesprocent mellem modalmassematricen i de to modeller, hvor det ses at indgangene svarende til mode 1,2,3 og 6 i Abaqus-strukturmodellen er større end i Bjælke-strukturmodellen. Ovenstående undersøgelser viser, at det kun er de to første modes i konstruktionen, der bliver anslået. Det konkluderes derfor at den urealistiske udbøjning, når Abaqus-strukturmodellen benyttes må skyldes dennes massemodellering. Når konstruktionens dæmpningsforhold sættes op fra 1% til 2%, ændrer responset sig derimod radikalt, som vist på nedenstående figur.

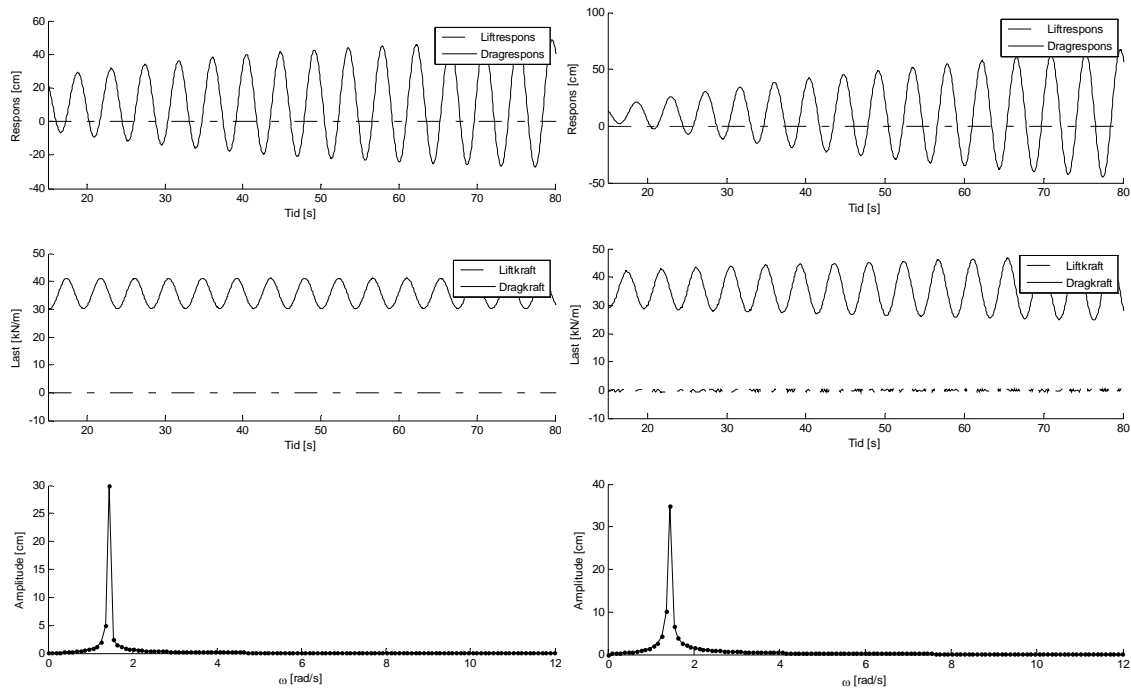


Figur 11.5: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragresponset i tidsintervallet 1000 - 1050 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens første cirkulær egenfrekvens. Konstruktionens dæmpningsforhold sættes fra 1% til 2%. Tv.: Bjælke-strukturmodel. Th.: Abaqus-strukturmodel.

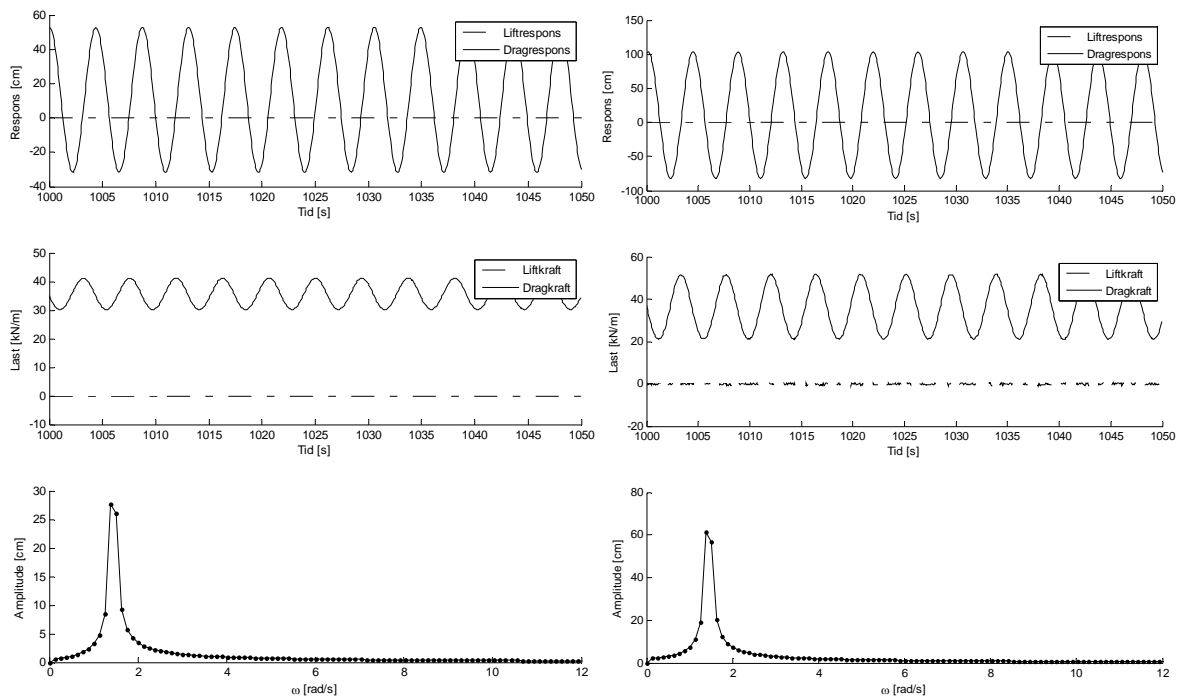
Det ses at konstruktionens udbøjning og lastresponset er realistisk i dette tilfælde og den maksimale udbøjning svarer til resultatet for Bjælke-strukturmodellen. Da dæmpningsforholdet kun er skønnet, kan det kun konkluderes, at Abaqus-strukturmodellen giver resultater tilsvarende bjælkemodellen, når dæmpningsforholdet er ca. 2 %.

11.2 Lastmodel

I det følgende sammenlignes de 2 lastmodeller som er benyttet i projektet hvor der køres med Bjælke-strukturmodellen og konstruktionen antages fast indspændt i jorden. I Wakemodellen benyttes de statiske lastkoefficienter som er bestemt ved CFD-simuleringerne, mens den tidsvarierende del er beregnet ved formel (4.2) og (4.3). På nedenstående figurer er plots af last og respons samt amplitudespektret for dragresponset i 2 forskellige tidsintervaller optegnet. Det ses, at den gennemsnitlige last er den samme i begge modeller, mens CFD-lastmodellen har større amplitude på det harmoniske signal. Dette ses af responssignalet idet amplituden ved CFD-lastmodellen er tilsvarende større end Wakemodellen. Wakemodellen, som er et empirisk model, har i dette tilfælde kun det formål at få belastet strukturmodellen med en tidsvarierende last bestemt af konstruktionsresponset. Modellen er kalibreret ud fra forsøg med rørledninger i væske, hvorfor det ikke forventes, at denne model giver resultater, som er sammenlignelige med lastmodellen bestemt ved CFD-simuleringer.



Figur 11.6: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragresponsen i tidsintervallet 15 - 80 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens første cirkulær egenfrekvens. Tv.: Wake-lastmodel. Th.: CFD-lastmodel.



Figur 11.7: Plot af last og respons samt amplitudespektrum for dragresponsen i tidsintervallet 1000 - 1050 sekunder når vindfeltet er fluktuerende med en frekvens svarende til konstruktionens første cirkulær egenfrekvens. Tv.: Wake-lastmodel. Th.: CFD-lastmodel.

Konklusion

I denne projektrapport er der gennemført en række analyser på Light*House med henblik på at estimere det dynamiske lastrespons fra vinden. Problemstillingen er undersøgt ved at inddele analyserne i tre hoveddele:

- **Strukturmodel:** Modellering af den stabiliserende og bærende konstruktion samt etagedæk
- **Lastmodel:** Modellering af vindlasten og dennes interaktion med konstruktionsresponsen
- **Jordmodel:** Modellering af jordens interaktion med konstruktionen

I forbindelse med hvert af de tre hovedfokusområder er der indledningsvist anvendt en reference-model, hvorefter der er indført en mere avanceret metode.

Det er fra starten valgt, at den strukturelle modellering af Light*House omfatter den bærende og stabiliserende kerne samt de 42 etagedæk. Således er facadebeklædning, elevatoranordninger mv. ikke medtaget i analyserne.

Der er løbende gennem projektperioden udviklet et MATLAB-program, **BJMODEL**, som indeholder moduler svarende til alle projektets berøringsområder. Desuden er der lagt vægt på at gøre programmet så generelt som muligt i den forstand, at mange af **BJMODELS** funktioner vil kunne anvendes på andre konstruktioner end Light*House.

Den strukturelle modellering er undersøgt med en finite element bjælke-model baseret på Bernoulli Euler bjælkelementer. Herunder er der foretaget forskellige massemodelleringer for etagedækkene. Denne bjælke-model kan diskretiseres valgfrit, ligesom konverteringen til modalsystem kan medtages med et valgfrit antal modelformer i den valgte numeriske tidsintegrator, Newmark algoritmen. Strukturen kan udover bjælke-modellen vælges at baseres på en plade-skivemodel opbygget i Abaqus, hvor der er løst for egensvingningsformer og -frekvenser.

Vindlasten er indledningsvist indført gennem den såkaldte Wakemodel, som er udviklet med henblik på estimering af strømkræfter på offshore rørledninger. Således er modellen ikke indført med brugbare resultater for øje, men for med succes at implementere en lastmodel, som løbende opdateres med relevant information om konstruktions øjeblikkelige respons. Herefter er fokus rettet mod en realistisk model for vindlasten baseret på CFD-modelleringer i ANSYS CFX. Her er der gennemført en række parameterstudier for en 2d model af bygningstværsnittet, når der påsættes et realistisk vindfelt. Der er undersøgt for følgende størrelses indflydelse på vindlasten:

- Bygnings bevægelsesfrekvens og -amplitude
- Vindhastigheden
- Formen på bygningstværsnittet

Ud fra disse undersøgelser har det været muligt at identificere, hvilke hovedkomponenter vindlasten består af, når lastsignalet analyseres vha. en Fourier transformation. Det har vist sig, at lastsignalet primært udgøres af en del styret af bygningens bevægelse og en del styret af vindhastigheden og

bygningstværsnittet gennem det såkaldte Strouhalstal. Det er gennem CFD-analyserne desuden sandsynliggjort, at lock-in fænomenet ikke er et udpræget problem for Light*House. Efter endt analysearbejde i CFX, er der fittet en række matematiske udtryk, der som funktion af bla. vindhastigheden og bygningens bevægelsesfrekvens bestemmer vindlasten. Dette er implementeret i **BJMODEL**.

Jordmodelleringen er i projektet udelukkende baseret på en simpel antagelse om, at alle frihedsgrader er uendeligt stive. Det har fra starten været planen, at den såkaldte Lumped Parameter Model skulle implementeres for at kunne estimere, hvilken betydning det har på konstruktionsresponsen, at jordens frekvensafhængige stivhed medtages i modellen. Grundet problemer med programmeringsarbejdet i forbindelse med implementeringen af LPM i **BJMODEL** i projektets slutfase har det dog desværre ikke været muligt at medtage disse resultater i rapporten. Teoriafsnittene vedrørende LPM er dog stadig at finde i projektet.

Litteraturliste

- Andersen, Lars. 2008.** Impedance of Surface Footings on Layered Ground. *ELSEVIER - Computers & Structures*. 86 (1-2), 2008.
- . **2006.** *Linear Elastodynamics Analysis*. Aalborg : Aalborg University, 2006. 1901-7286.
- Brorsen, Michael og Larsen, Torben. 2003.** *Lærebog i Hydraulik*. Aalborg : Aalborg Universitetsforlag, 2003. 87-7307-691-0.
- Chopra, Anil K. 2001.** *Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Berkeley : University of California, 2001. 0-13-086973-2.
- Jensen, Bjarne Chr. 2003.** *Teknisk Ståbi*. Viby : 18, 2003. 87-571-2134-6.
- LamBrakos, K.F., et al. 1987.** Wake Model of Hydrodynamic Forces on Pipelines. *Ocean Engineering*. 14 (2), 1987.
- Nielsen, Søren R. K. 2005.** *Structural Dynamics, VOL. 9 - Computational Dynamics*. Aalborg : Aalborg tekniske Universitetsforlag, 2005. 1395-8232 U2005-1.
- . **2004.** *Vibration Theory, VOL. 1 - Linear Vibration Theory*. Aalborg : Aalborg Tekniske Universitetsforlag, 2004. 1395-8232 U2004-1.
- Petyt, Maurice. 1990.** *Introduction To Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. 0-521-63417-2.
- Scanlan, R.H. 1978.** The Action of Flexible Bridges under Wind. *Journal of Sound and Vibration*. 60 (2), 1978.
- Scanlan, Robert H. og Simiu, Emil. 1996.** *Wind Effects On Structures - Fundamentals And Applications to Design*. United States of America : John Wiley & Sons, Inc., 1996. 0-471-12157-6.
- Wilcox, David C. 2006.** *Turbulence Modeling for CFD*. California : DCW Industries, 2006. 1-928729-08-8.
- Williams, M. S. og D., Todd J. 2000.** *Structures Theory And Analysis*. s.l. : MACMILIAN PRESS LTD, 2000. 0-333-67760-9.
- www.lighthouse-aarhus.dk. 2008.** Light*House på vej. *Light*House på vej*. [Online] 10.. juni 2008. [Citeret: 10.. juni 2008.] www.lighthouse-aarhus.dk.

Indhold

APPENDIKS A	DISKRETISERING AF BJÆLKEMODEL	125
APPENDIKS B	UDLEDNING AF FLYTNINGSINTERPOLATIONSMATRICE FOR ET BJÆLKEELEMENT	127
APPENDIKS C	FORMULERING AF ELEMENTSTIVHEDSMATRICEN	129
APPENDIKS D	TRANSFORMATION AF FRIHEDSGRADER	133
D.1	BESTEMMELSE AF TRANSFORMATIONSMATRICEN	134
APPENDIKS E	EGENSVINGNINGSFORM OG EGENFREKVENNS	136
APPENDIKS F	MODALANALYSE	138
F.1	MODALKOORDINATER	138
F.2	MODALFORMULERING	139
APPENDIKS G	DÆMPNINGSMODEL	141
G.1	RAYLEIGH'S DÆMPNINGSMODEL	142
APPENDIKS H	NEWMARK ALGORITMEN	143
APPENDIKS I	EFFEKTIV VINDHASTIGHED	146
APPENDIKS J	ESTIMERING AF AMPLITUDE OG FASE AF SIGNAL VED FFT-ANALYSE	147

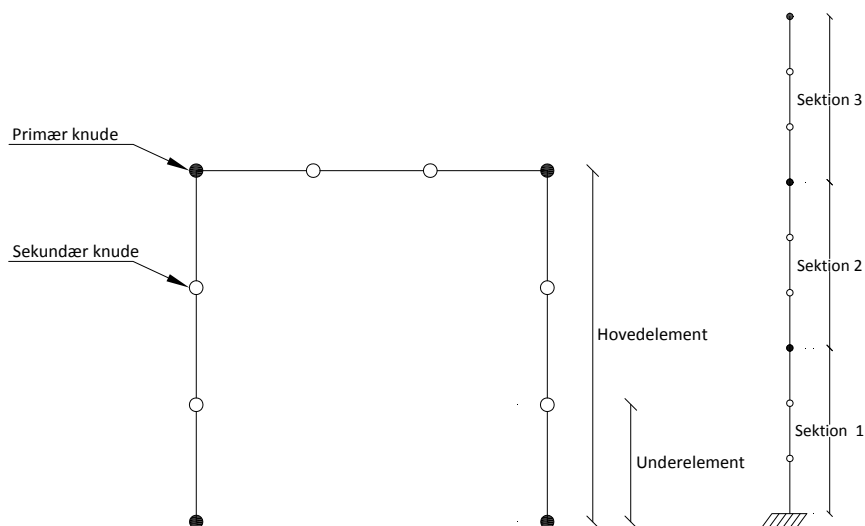
Appendiks A

Diskretisering af bjælkemodel

Det har været et grundlæggende krav, at det i **BJMODEL.M** skal være muligt at diskretisere en bjælkekonstruktion vilkårligt orienteret i rummet med en given finhed. I denne forbindelse er der foretaget nogle valg mht. mulighederne for dette:

- Det angives i **INPUT.M**, hvor mange underelementer hvert hovedelement som angivet under topologi skal indeholde. Figur A.1 viser definitionen af hovedelementer og underelementer.
- Der er kun mulighed for at diskretisere alle hovedelementer med samme antal underelementer, og længden af disse fordeles jævnt. Således vil et langt hovedelements underelementer ligeledes være længere end et kort hovedelements. Dette er ligeledes illustreret på figur a.1.
- Alle underelementer er af samme type, nemlig 3d bjælkeelementer med tre translationsfrihedsgrader og tre rotationsfrihedsgrader i hver knude.

I forbindelse med en dynamisk analyse af en konstruktion vil en forholdsvis fin diskretisering være nødvendig for på tilfredsstillende vis at beskrive de høje egensvingningsformer, idet formen af disse kan være ganske komplekse.



Figur A.1: Definition af hovedelementer og sekundære elementer samt principskitse af dets anvendelse for Light*House.

Højre del af figur a.1 illustrerer brugen af hoved- og underelementer i forbindelse med modelleringen af Light*House. Som det ses, består konstruktionen af tre hovedsektioner, som repræsenterer de tre kernesektioner med forskellige inertimomenter. Da et underelement altid har samme materiale- og tværsnitsdata som hovedelementet, det stammer fra, er det nødvendigt at opdele Light*House i tre hovedelementer.

A.1.1 Hovedgeometri og -topologi

Som en del af det input, **BJMODEL.M** behøver for at kunne køre, findes angivelsen af konstruktionens geometri samt elementtopologien. Dette finder sted i **INPUTS.M** i matricerne **NODECOOR** og **ELEMTOP**. Betydningen af disse fremgår herunder:

- **NODECOOR** indeholder x -, y - og z -koordinaterne til samtlige primære knuder i konstruktionen. Med primære knuder menes de knuder, som er nødvendige for at beskrive geometrien, og således ikke blot tjener som knuder i forbindelse med en finere diskretisering.
- **ELEMTOP** angiver, hvilken start- og slutknode hvert bjælkeelement i konstruktionen har. Således vil en knude typisk blive delt af flere bjælkeelementer.

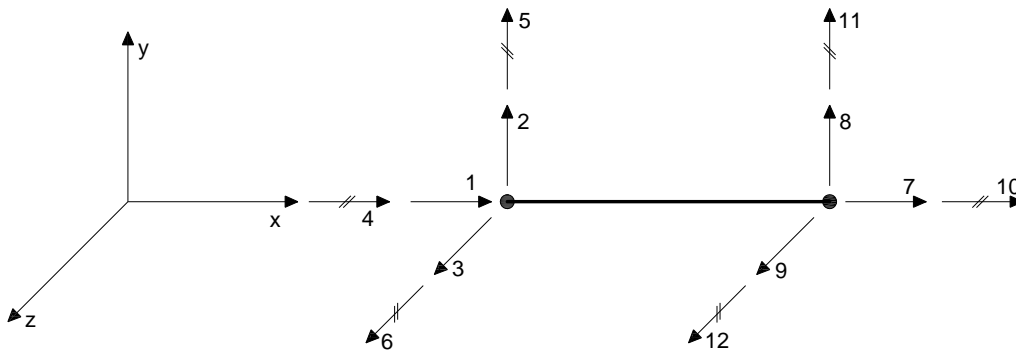
Ud fra informationen i disse to matricer, er det muligt at udvide dem, så de repræsenterer det diskretiserede system af n underelementer pr. hovedelement. De tilsvarende matricer benævnes nu **NODECOOR_FULL** og **ELEMTOP_FULL**, med henvisning til at der nu er tale om det fulde, diskretiserede system. Algoritmen til bestemmelse af **NODECOOR_FULL** og **ELEMTOP_FULL** bliver foretaget i **TOPOLOGI.M**, og er beskrevet nedenfor.

- Koordinaterne for alle sekundære knuder på hvert hovedelement bestemmes vha. kendskabet til start- og slutknudernes koordinater samt det ønskede antal inddelinger.
- **NODECOOR_FULL** etableres som en matrice, som indeholder alle knudekoordinater globalt på konstruktionen, samt nummereringen af disse. En rutine i **TOPOLOGI.M** sørger for, at denne ikke indeholder det samme koordinatpunkt flere gange, til trods for at det deles af flere elementer.
- **ELEMTOP_FULL**, som beskriver, hvilke to knuder hvert enkelt element i konstruktionen har, opstilles.

Appendiks B

Udledning af flytningsinterpolationsmatrice for et bjælkeelement

I det følgende udledes flytningsinterpolationsmatricen, N , for et bjælkeelement. Nedenstående figur viser orientering af et referencebjælkeelement samt definitionen på frihedsgraderne.



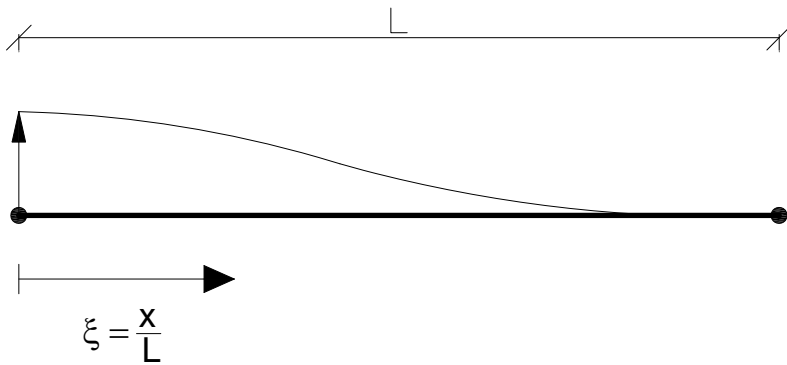
Figur B.1: Bjælkeelement med rumlig orientering samt definition af frihedsgrader. Tallene angiver nummerering af frihedsgraderne.

På figuren ses det at frihedsgraderne 1, 2 og 3 er translationsfrihedsgrader, 5 og 6 er rotationsfrihedsgrader, mens 4 er torsionsfrihedsgrad for knuden til venstre. På tilsvarende vis er frihedsgraderne defineret i knuden til højre. Det ses at frihedsgraderne 1 og 7 samt torsionsfrihedsgraderne er dekoblede fra de resterende frihedsgrader., mens frihedsgraderne 2, 6 og 3, 5 er koblede. Det vil eksempelvis sige at en rotation i frihedsgrad 6 vil give et bidrag til translation i frihedsgrad 2 og på samme vis i frihedsgraderne 5 og 3. Der er derfor fire feltstørrelser som kan beskrives ved de 12 frihedsgrader. Flytningsinterpolationsmatricen har dermed dimensionen $\mathbf{N} = [4 \times 12]$ og har formen:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & 0 & N_{26} & 0 & N_{28} & 0 & 0 & 0 & N_{212} \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & N_{35} & 0 & 0 & 0 & N_{39} & 0 & N_{311} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{410} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For at bestemme de forskellige indgange i N -matricen påsættes eksempelvis en enhedsflytning i frihedsgrad 2 mens de resterende frihedsgrader holdes på 0. Dette svarer til indgang N_{22} og er illustreret på figur b.2.

Udledning af flytningsinterpolationsmatrice for et bjælkeelement



Figur B.2: Den antagede flytning af bjælkeelementet når der påføres en enhedsflytning i frihedsgrad 2 mens de resterende frihedsgrader forbliver 0. Bjælkeelementet har længden L og den dimensionsløse parameter ξ indføres.

Af figuren ses det at flytningen skal være hhv. 1 og 0 ved knuderne, samt at rotationen skal være 0 ved knuderne. Dette kan beskrives ved et 3. grads polynomium

$$N_{22} = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \quad (1.1)$$

hvor følgende betingelser skal være opfyldt

$$\begin{aligned} N_{22}(0) &= 1 \\ N_{22}(1) &= 0 \\ \left. \frac{dN_{22}}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= 0 \\ \left. \frac{dN_{22}}{d\xi} \right|_{\xi=1} &= 0 \end{aligned}$$

De fire betingelser medfører entydigt

$$N_{22} = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad (1.2)$$

På tilsvarende vis bestemmes translationsindgangen N_{33} i N -matricen. Ved bestemmelse af torsionsindgangene i N -matricen påføres en torsion på 1 ved den ene knude og torsionen antages lineært aftagende til den anden knude. Dette gøres ligeledes for de aksiale flytninger. De resterende indgange i N -matricen er vist nedenfor

$$\begin{aligned} N_{11} &= 1 - x & N_{11} &= x & N_{28} &= -2x^3 + 3x^2 \\ N_{22} &= 2x^3 - 3x^2 + 1 & N_{26} &= (x^3 - 2x^2)L & N_{39} &= N_{28} \\ N_{33} &= N_{22} & N_{35} &= -N_{26} & N_{212} &= (x^3 - x^2)L \\ N_{44} &= N_{11} & N_{410} &= N_{17} & N_{311} &= -N_{212} \end{aligned} \quad (1.3)$$

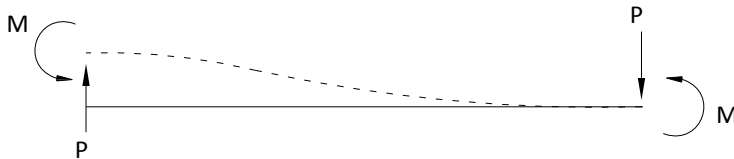
Appendiks C

Formulering af elementstivhedsmatricen

Der findes flere forskellige indgangsvinkler til formulering af elementstivhedsmatricen, \mathbf{K}_e . For bjælkeelementer kan der følges en rent fysisk metode, hvor det vha. bjælkens differentialligning og ligevægtsbetragtninger er muligt at formulere elementstivhedsmatricen ud fra følgende fremgangsmåde.

Den i 'te søjle i stivhedsmatricen kan tolkes som en vektor, der indeholder knudekræfterne associeret med en enhedsflytning af den i 'te frihedsgrad og alle andre frihedsgrader sat lig nul.

Dette er illustreret på figur c.1, hvor det viste bjælkeelement er givet en translation i den ene ende. Dette giver anledning til et flytningsfelt som vist. Desuden kan man let overbevise sig om, at der nødvendigvis må optræde en lodret kraft samt et bøjende moment ved hver bjælkeende associeret med flytningsfeltet.



Figur C.1: Endekræfter og -momenter associeret med det viste flytningsfelt.

For mere avancerede elementer er det ikke muligt at formulere stivhedsmatricen ud fra en rent fysisk betragtning. Det skal dog bemærkes, at ovenstående fysiske tolkning af indgangene i stivhedsmatricen også holder for et vilkårligt andet finite element. Blot er det ikke muligt uden videre at bruge denne tolkning til udfyldelse af stivhedsmatricens indgange for mere avancerede elementer. Her må anvendes enten virtuelt arbejde eller der må gøres brug af en passende funktional. Her vil princippet om minimal potentiel energi for elastisk strukturmekanik typisk blive benyttet som funktional.

I denne forbindelse er en funktional et integraludtryk, som implicit indeholder de tilknyttede differentialligninger. Disse behøver ikke være opfyldt i ethvert punkt, men kun i en gennemsnitlig forstand. Dette betyder, at finite element metoden ikke er en eksakt beregningsmetode, men en approksimation. Eksakt skal her forstås som den formulerede matematiske model, som i sig selv indeholder en række antagelser som f.eks. lineær elasticitet og isotropi.

Denne form for opfyldelse af de tilknyttede differentialligninger kaldes en svag formulering, hvorimod differentialligningerne plus randbetingelser i sig selv udgør den stærke formulering af problemet. Den stærke form formulerer forhold, som må være opfyldt i ethvert materialepunkt, hvorimod den svage formulering formulerer forhold, som skal overholdes i en gennemsnitlig eller integralmæssig forstand. Den valgte funktional skal kunne integreres over hele domænet i et problem, hvilket

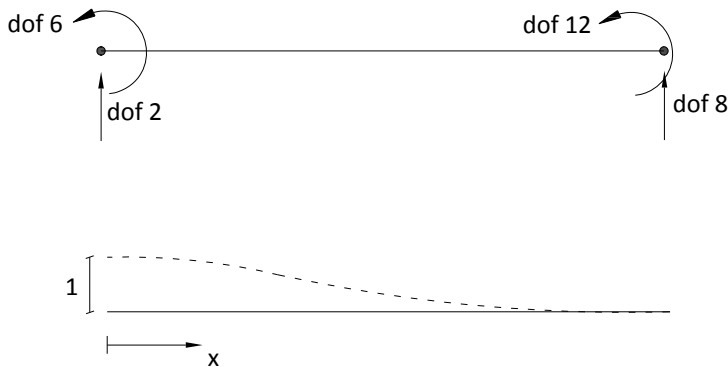
netop er muligt for den potentielle energi, da denne er formuleret som hhv. de indre spændingers arbejde og de ydre kræfters potentiale. Disse to størrelser kan altid formuleres for hele domænet.

Selvom navngivningen stærk og svag formulering antyder, at den svage formulering er mindre præcis end den stærke, er dette ikke tilfældet, når blot antallet af frihedsgrader gøres tilstrækkeligt stort. Den svage form anvendes, da det rent løsningsmæssigt er en stor fordel at kunne håndtere et stort system af differentiaalligninger ved hjælp af integraler i stedet for de egentlige udtryk.

C.1.1 Direkte fysisk formulering

I det følgende vises det, at det for endimensional finite element teori er muligt at opstille elementstivhedsmatricen vha. de fra bjælketeorien kendte flytningsdifferentiaalligninger. I **BJMODEL.M** anvendes som nævnt bjælkeelementer med i alt 12 frihedsgrader. I det følgende vises det, hvordan 2. søjle i elementstivhedsmatricen kan etableres ved anvendelse af bjælkens flytningsdifferentiaalligning for bøjning. Således gives bjælkeelementet en enhedsflytning i 2. frihedsgrad, og de tilhørende knudekræfter og -momenter associeret med det fremkomne flytningsfelt bestemmes. Disse kræfter og momenter udgør således 2. søjle i stivhedsmatricen. Det skal dog bemærkes, at der vil forekomme en del nuller i samme søjle, idet det anvendte bjælkeelement har 12 frihedsgrader. Således vil kun en del af de tilhørende kræfter eller momenter blive aktiveret i forbindelse med et givet flytningsfelt.

Som vist på figur c.2 er det bøjningsfrihedsgraderne 6 og 12 samt den tilsvarende translationsfrihedsgrad i knude 2, der bliver aktiveret ved en enhedsflytning i frihedsgrad 2. Den nederste del af figuren viser udbøjningfiguren, som opfylder de relevante kinematiske randbetingelser.



Figur C.2: Frihedsgrader, i hvilke der forekommer kræfter eller momenter i forbindelse med enhedsflytning af frihedsgrad 2.

Flytningsdifferentialligningen for en lineært elastisk bjælke påvirket til bøjning lyder

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EI_z}$$

hvor

w er nedbøjning i xy -planet som funktion af x

p er lasten i y -retningen som funktion af x

EI_z er bøjningsstivheden mod laster i y -retningen

I dette tilfælde er der ingen last på bjælkeelementet bortset fra de kræfter og momenter svarende til de på figur c.2 viste frihedsgrader, der medfører den undersøgte udbøjningsform. Derfor er $p=0$. Dette svarer således til en fast indspændt bjælke kun påvirket af en kraft og et moment ved den frie ende. Derfor fås ved fire gange integration af udtrykket

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

↓

$$w = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Ved indførelse af randbetingelserne, at frihedsgrad 2 er lig 1, og de øvrige lig nul, fås

$$w(0) = 1, \quad \frac{dw}{dx}(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(L) = 0$$

↓

$$c_1 = \frac{2}{L^3}, \quad c_2 = -\frac{3}{L^2}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 1$$

Således er udbøjningsformen som skitseret nederst på figur c.2 givet ved

$$w(x) = 2\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{x^2}{L^2} + 1$$

For at finde momentfordelingen ved denne udbøjningsform, differentieres der i henhold til den konstitutive betingelse, $M = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$, to gange med hensyn til x , og der multipliceres med bøjningsstivheden EI

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{d^2 w}{dx^2} EI \\ &= 12 \frac{EI}{L^3} x - 6 \frac{EI}{L^2} \end{aligned}$$

Da det endvidere benyttes, at forskydningskraften V kan udtrykkes ved $V = -\frac{dM}{dx}$, findes nedenfor endemomentet og -kraften svarende til 2. og 8. indgang i stivhedsmatricens 2. søjle.

$$V(0) = -\frac{dM}{dx}(0) = k_{22} = -12 \frac{EI}{L^3}$$

$$M(0) = k_{62} = -6 \frac{EI}{L^2}$$

Ved at kræve momentligevægt om knude 2 samt lodret kraftligevægt, fås tilsvarende

$$V(L) = k_{82} = 12 \frac{EI}{L^3}$$

$$M(L) = k_{122} = -6 \frac{EI}{L^2}$$

Således er 2. søjle i elementstivhedsmatricen bestemt ved anvendelse af flytningsdifferentialligningen for en bjælke påvirket til bøjning, som er fremkommet ved en række fysiske betragtninger af bjælkens kinematiske, statiske og fysiske forhold. Den fundne søjle i elementstivhedsmatricen ser således ud som vist nedenfor

$$\mathbf{K}_{i2}^T = \begin{bmatrix} 0 & -12 \frac{EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6 \frac{EI}{L^2} & 0 & 12 \frac{EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6 \frac{EI}{L^2} \end{bmatrix}$$

De øvrige søjler i elementstivhedsmatricen for et bjælkeelement vil kunne bestemmes på tilsvarende, direkte vis. I **BJMODEL.M** er elementmatricerne blot angivet som færdige udtryk, hvorfor ovenstående gennemgang blot tjener som dokumentation for baggrunden for udledelsen af stivhedsmatricens udseende. De resterende indgange ses af nedenstående formel

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

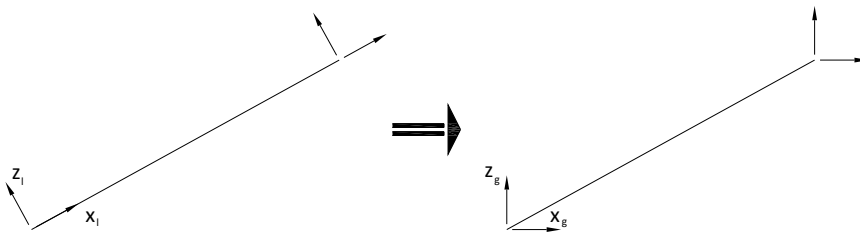
Appendiks D

Transformation af frihedsgrader

Som tidligere nævnt viser det sig nødvendigt at udføre en matrixoperation, som konverterer de lokale elementstivhedsmatricer, så disse er udtrykt i de globale frihedsgrader. Når dette er foretaget, og der i øvrigt er klarhed over systemets topologi, dvs. hvilke elementer der har hvilke globalt nummerede frihedsgrader, kan en assemblering af systemstivhedsmatricen uden videre gennemføres. I det følgende vises det, hvordan transformationsmatricen T etableres.

Først antages det, at der eksisterer en relation mellem en vektor i det globale og det lokale koordinatsystem, se figur d.1. I første omgang betragtes kun xz -planet. I nedenstående udtryk betegner l lokal g betegner global.

$$\begin{bmatrix} X_l \\ Z_l \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} X_g \\ Z_g \end{bmatrix} \quad (1.5)$$



Figur D.1: Transformation fra lokale til globale koordinater.

Denne transformation skal være gældende for alle typer af transformation fra lokalt til globalt system, dvs. både kræfter, momenter, flytninger og rotationer.

Antages det, at et element beskrives vha. det lokale koordinatsystem defineret ud fra, at x -aksen er sammenfaldende med bjælkeaksen, er følgende sammenhæng mellem knudflytninger og -kræfter gældende

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \quad (1.6)$$

hvor

\mathbf{K}_e er elementstivhedsmatricen

\mathbf{u}_l er flytningskomponenterne beskrevet efter det lokale koordinatsystem

\mathbf{f}_l er kraftkomponenterne beskrevet efter det lokale koordinatsystem

\mathbf{u}_l indeholder både translationer og rotationer, og \mathbf{f}_l indeholder både kræfter og momenter. Udtrykkes \mathbf{u}_l og \mathbf{f}_l i globale frihedsgrader, kan formel (1.6) omskrives til:

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{T}^T \mathbf{u}_g, \quad \mathbf{f}_l = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_g \Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{T}^T \mathbf{u}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_g \quad (1.7)$$

Idet det udnyttes, at $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$ fås ved multiplikation med \mathbf{T} på begge sider af udtrykket

$$\mathbf{TK}_e \mathbf{T}^T \mathbf{u}_g = \mathbf{f}_g, \quad \mathbf{K}_g = \mathbf{TK}_l \mathbf{T}^T \Rightarrow \mathbf{K}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{f}_g \quad (1.8)$$

D.1 Bestemmelse af transformationsmatricen

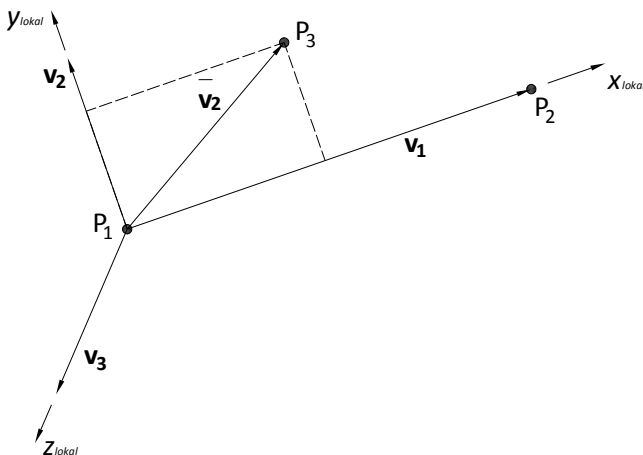
Det ønskes at kunne beskrive det lokale koordinatsystem vha. de tre basisvektorer \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 og \mathbf{e}_3 , som angiver retningen af hhv. den lokale x-, y- og z-akse udtrykt i globale koordinater. Hvis det lokale koordinatsystem er sammenfaldende med det globale, haves således

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{i}_3$$

hvor

\mathbf{i}_j er basisvektorerne i det globale koordinatsystem, når $j=1,2,3$

For at kunne bestemme basisvektorerne i det lokale koordinatsystem er det nødvendigt at kende til tre punkter, P_1, P_2 og P_3 , som kan definere orienteringen af dette. Dette gøres i praksis ved at formulere to lineært uafhængige vektorer på baggrund af de tre punkter, som udspænder xy-planet i det lokale koordinatsystem. Dette er illustreret på nedenstående skitse.



Figur D.2: Retningsvektorer til definition af geometrien i det lokale koordinatsystem.

Hvis der anvendes en finite element analyse med todimensionelle elementer, vælges blot tre punkter i elementets plan. Hvis der derimod, som tilfældet er med modelleringen i **BJMODEL.M**, er tale om endimensionale bjælkeelementer, må der udover de to punkter som definerer bjælkeaksen indlæg-

ges et 3. punkt, som ligger i xy -planet, og som ikke har en negativ y -værdi. Dette krav skyldes, at krydsproduktet mellem de to tidligere nævnte vektorer i xy -planet må have et entydigt fortegn for at kunne generalisere transformationsprocessen med henblik på programmering.

Antag, at de tre punkter er beskrevet ved de globale koordinater

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3$$

Definer nu vektorerne \mathbf{v}_1 og $\bar{\mathbf{v}}_2$ ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

Som en normalvektor på xy -planet etableres \mathbf{v}_3 ved $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \bar{\mathbf{v}}_2$, og $\bar{\mathbf{v}}_2$ ved $\bar{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$. Herved have vi nu tre vektorer, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 og \mathbf{v}_3 , som i globale koordinater beskriver retningen af de tre koordinat-akser i det lokale koordinatsystem.

Til brug i transformationsmatricen \mathbf{T} skal retningsvektorerne normeres til længden 1, hvorfor vektorerne e_1 , e_2 og e_3 fremkommer ved

$$e_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \quad e_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \quad e_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|}$$

Således kan transformationsmatricen nu formuleres som

$$\mathbf{T}_{[3 \times 3]} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]$$

Hvis det ønskes at transformere en elementmatrice med dimensionen $[12 \times 12]$, hvilket er tilfældet i **BJMODEL.M**, hvor der anvendes bjælkeelementer med i alt 12 frihedsgrader, udvides transformationsmatricen blot som vist nedenfor. Dette er gyldigt, da de 12 frihedsgrader er nummeret som hhv. 3 translationsfrihedsgrader og 3 rotationsfrihedsgrader for første anden knude.

$$\mathbf{T}_{[12 \times 12]} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{[3 \times 3]} & & & 0 \\ & \mathbf{T}_{[3 \times 3]} & & \\ & & \mathbf{T}_{[3 \times 3]} & \\ 0 & & & \mathbf{T}_{[3 \times 3]} \end{bmatrix}$$

Appendiks E

Egensvingsform og egenfrekvens

I det følgende redegøres for, hvorledes egensvingsformer og egenfrekvenser for den stabiliserende kerne af Light*House, som i det efterfølgende blot benævnes *konstruktionen*, bestemmes. Redegørelsen foretages primært med baggrund i (Nielsen, 2004). I henhold til (Nielsen, 2004), er den strukturelle dæmpning negligabel i forbindelse med bestemmelse af egensvingsformer og egenfrekvenser. Der tages derfor udgangspunkt i det lineære differentiaalligningssystem for et udæmpet egensvingsproblem af MDOF-system

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

hvor

\mathbf{M} er massematricen

\mathbf{K} er stivhedsmatricen

\mathbf{x} er det tidsafhængige respons fra konstruktionen

Systemet antages at bestå af n frihedsgrader. En løsning til det udæmpede egensvingsproblem beskrevet i (1.9) kan opstilles på følgende form

$$\mathbf{x}(t) = \text{Re}(\Phi e^{i\omega t}) \quad (1.10)$$

hvor

ω er en kompleks egenfrekvens

Φ er den komplekse egensvingsform

For alle reelle t fås ved indsættelse af (1.10) i (1.9)

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Phi e^{i\omega t} \right] &= 0 \\ (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Dette egenværdiproblem er et homogent system af n lineære ligninger. Betingelsen for en ikke-trivielløsning $\Phi \neq \mathbf{0}$ kræver at

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (1.12)$$

Dette benævnes den karakteristiske ligning som har rødderne $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, hvor ω_i er den i 'te egenfrekvens. For hver rod eksisterer der en ikke-trivielløsning $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ som er lineær uaf-

hængige og benævnes egensvigningsformer. Såfremt \mathbf{M} og \mathbf{K} er symmetriske og positiv definite er rødderne i den karakteristiske ligning (1.11) reelle og egensvigningsformerne er dermed også reelle. Dette er vist i (Nielsen, 2004 s. 47). Det er derfor tilstrækkeligt at betragte den reelle del af løsningen, når \mathbf{M} og \mathbf{K} opfylder de nævnte betingelser.

Appendiks F

Modalanalyse

For at foretage en modalanalyse kræves at dekoblingsbetingelsen er opfyldt

$$\Phi^{(i)\top} \mathbf{C} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , & i \neq j \\ 2\zeta_i \omega_i M_i & , & i = j \end{cases} \quad (1.13)$$

hvor

M_i er modalmassen defineret ud fra ortogonalitetsbetingelsen som er beskrevet i (Nielsen, 2004 s. 68)

$$\Phi^{(i)\top} \mathbf{M} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , & i \neq j \\ M_i & , & i = j \end{cases}$$

$$\Phi^{(i)\top} \mathbf{K} \Phi^{(j)} = \begin{cases} 0 & , & i \neq j \\ \omega^2 M_i & , & i = j \end{cases}$$

Det bemærkes at M_i er en matematisk størrelse der ikke har nogen fysiske tolkning, da denne er afhængig af normeringen af egensvingsformerne.

F.1 Modalkoordinater

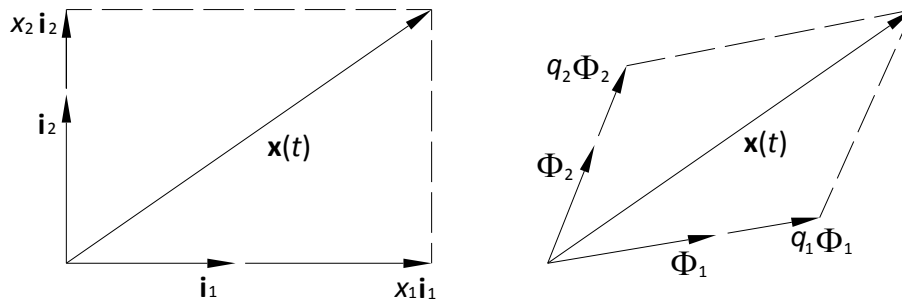
Betragtes responsvektoren som en n -dimensional vektor kan denne beskrives som linearkombinationer af n lineært uafhængige vektorer. I et kartesisk koordinatsystem kan de uafhængige vektorer være basisvektorerne $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ og \mathbf{i}_3 . I et rum udspændt af egensvingningsformerne, kan responsvektoren beskrives som linearkombinationer af disse, da egensvingningsformerne er lineært uafhængige (Nielsen, 2004 s. 72) Responsvektoren kan således udtrykkes ved

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= x_1(t) \mathbf{i}_1 + x_2(t) \mathbf{i}_2 + \dots + x_n(t) \mathbf{i}_n \\ &= q_1(t) \Phi^{(1)} + q_2(t) \Phi^{(2)} + \dots + q_n(t) \Phi^{(n)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

hvor

$q(t)$ er modalkoordinaten.

Dette er illustreret på figur f.1.



Figur F.1: Tv.: Opløsning af responsvektoren i basisvektorenes komponenter i et kartesisk koordinatsystem. Th.: Opløsning af responsvektoren i et koordinatsystem udspændt af egensvingningsformerne.

Defineres nu modalmatricen som

$$\mathbf{P} = [\Phi^{(1)} \quad \Phi^{(2)} \quad \dots \quad \Phi^{(n)}] \quad (1.15)$$

og modalkoordinatvektoren som:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T \quad (1.16)$$

kan responsvektoren skrives som

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{q}(t) \quad (1.17)$$

F.2 Modalformulering

Betragtes nu et dæmpet system som er påvirket af en tidsvarierende last havet

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} &= \mathbf{f}(t), \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Systemet ønskes formuleret i modalkoordinater. Af formel (1.14) ses det at responsvektoren kan skrives på følgende form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi^{(j)} \mathbf{q}_j \quad (1.19)$$

Indsættes (1.19) i (1.18) fås

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{M}\Phi^{(j)}\ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{C}\Phi^{(j)}\dot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{K}\Phi^{(j)}\mathbf{q}_j) = \mathbf{f}(t) \quad (1.20)$$

Ganges nu igennem med $\Phi^{(i)T}$ fås modalformuleringen af differentialligningen for det dæmpede system som er påvirket af en tidsvarierende last

$$\sum_{j=1}^n (\Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \ddot{q}_j + \Phi^{(i)T} \mathbf{C} \Phi^{(j)} \dot{q}_j + \Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)} q_j) = \Phi^{(i)T} \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow$$

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + \omega^2 M_i q_i = F_i(t) \Leftrightarrow \quad (1.21)$$

$$\ddot{q}_i + \frac{1}{M_i} C_i \dot{q}_i + \omega^2 q_i = \frac{1}{M_i} F_i(t) \quad , \quad i=1, \dots, n$$

hvor

M_i er modalmasse.

C_i er modaldæmpning udtrykt i formel (1.13).

$F_i(t)$ er modallasten, som er defineret ved

$$F_i(t) = \Phi^{(i)T} \mathbf{f}(t) \quad , \quad i=1, 2, \dots, n$$

I formel (1.21) er det udnyttet at de enkelte produkter i summen kun er forskellige fra nul når $j=i$. For at løse bevægelsesligningerne for systemet, er det nødvendigt at transformere begyndelsesbetingelserne til en modalformulering. Af formel (1.14) ses det at

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n \Phi^{(j)} q_j(0)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \sum_{j=1}^n \Phi^{(j)} \dot{q}_j(0) \quad (1.22)$$

Ganges nu igennem med $\Phi^{(i)T} \mathbf{M}$ fås

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{x}_0 &= \sum_{j=1}^n \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} q_j(0) \\ \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \sum_{j=1}^n \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \Phi^{(j)} \dot{q}_j(0) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \quad (1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} q_i(0) &= \frac{1}{M_i} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \\ \dot{q}_i(0) &= \frac{1}{M_i} \Phi^{(i)T} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \right\}$$

Appendiks G

Dæmpningsmodel

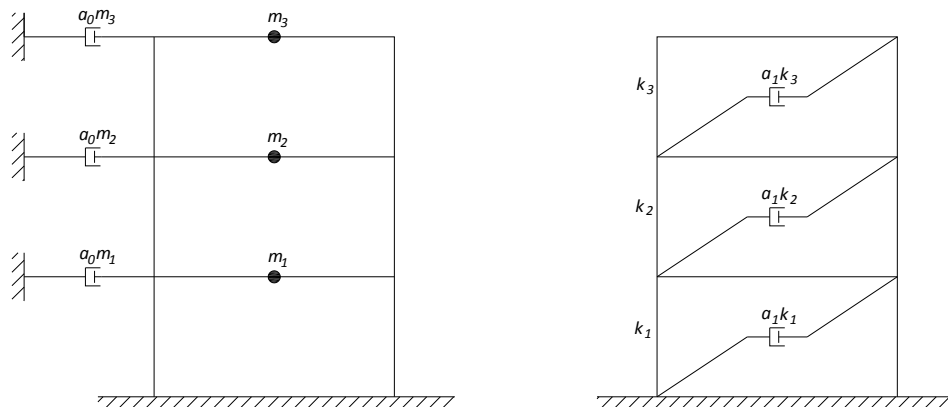
I det følgende opstilles en model for den strukturelle dæmpning. Afsnittet er baseret på (Chopra, 2001 s. 455-458). Der opstilles to strukturelle dæmningsmodeller, *masseproportional* og *stivhedsproportional*, som antages proportionale med hhv. modalmassematricen \mathbf{m} og modalstivhedsmatricen \mathbf{k}

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{mass} &= a_0 \mathbf{m} \\ \mathbf{c}_{stiv} &= a_1 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.24)$$

hvor

a_0, a_1 er proportionalitetskonstanter.

Den fysiske virkemåde de to dæmningsmodeller repræsenterer, er illustreret på nedenstående figur. Stivhedsproportional dæmpning kan tolkes der den energi, der dissiperer internt i konstruktionen ved deformation, mens masseproportional dæmpning kræver en mere kompliceret fysisk tolkning. Dette skyldes at massen dæmpes af den omkringliggende luftstrømning, dvs. aerodynamisk dæmpning. Modellen skal dog ikke opfattes som en eksakt fysisk modellering af de omtalte dæmningsbidrag.



Figur G.1: Den strukturelle dæmningsmodel for en etagebygning. Tv.: Dæmningsmodel ved masseproportionalitet. Th.: Dæmningsmodel ved stivhedsproportionalitet.

Af formel (1.24) samt ortogonalitetsbetingelsen $\Phi^{(i)T} \mathbf{K} \Phi^{(j)} = K_i = \omega_i^2 M_i$ for $i=j$, kan den enkelte dæmningskoefficient bestemmes ved

$$\begin{aligned} C_{i,mass} &= a_0 M_i \\ C_{i,stiv} &= a_1 \omega_i^2 M_i \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ud fra dekoblingsbetingelsen findes $C_i = 2\zeta_i M_i \omega_i$ for $i=j$. Indsættes dette i formel (1.25) fås det i 'te dæmpningsforhold for hhv. masse- og stivhedsproportionalitet

$$2\zeta_i M_i \omega_i = a_0 M_i \Rightarrow \zeta_{i,mass} = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_i} \quad (1.26)$$

$$2\zeta_i M_i \omega_i = a_1 \omega_i^2 M_i \Rightarrow \zeta_{i,stiv} = \frac{a_1}{2} \omega_i$$

Det ses at dæmpningsforholdene, og dermed også dæmpningskoefficienterne, er afhængige af egenfrekvenserne. Et kvalificeret skøn for de 2 første strukturelle dæmpningsforhold er henhold til (Nielsen, 2004 s. 12) lig med 1 %. Af formel (1.26) kan proportionalkoefficienterne bestemmes ved

$$a_0 = 2\zeta_{i,mass} \omega_i \quad a_1 = \frac{2\zeta_{i,stiv}}{\omega_i} \quad (1.27)$$

Kendes a_0 og a_1 kan de strukturelle dæmpningsforhold for $i=3,4,\dots,n$ bestemmes ved formel (1.26). I henhold til (Chopra, 2001) stemmer ingen af de to beskrevet dæmpningsmodeller med resultater fra forsøg. Det viser sig derimod at ved at kombinere de to modeller, fås bedre overensstemmelse med resultater fra forsøg. Dette beskrives i det følgende.

G.1 Rayleighs dæmpningsmodel

Rayleighs dæmpningsmodel tager udgangspunkt i ovenstående beskrivelse hvor dæmpningsmatricen nu antages bestemt ved en linearkombination af modalmasse- og stivhedsmatricen:

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (1.28)$$

Dæmpningsforholdet bestemmes ved

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \zeta_{i,mass} + \zeta_{i,stiv} \\ &= \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_i} + \frac{a_1}{2} \omega_i \end{aligned} \quad (1.29)$$

Forudsættes $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$, kan proportionalitetskoefficienterne bestemmes ved

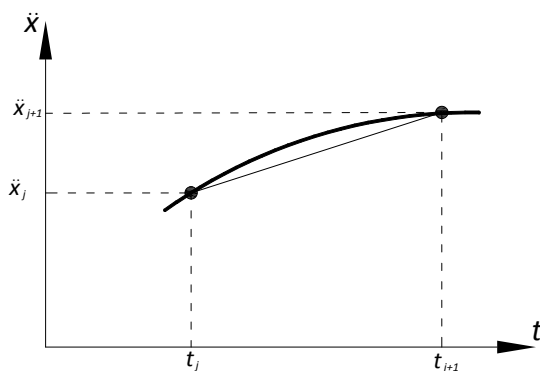
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Med de kendte proportionalitetskoefficienter bestemmes $\zeta_3, \zeta_4, \dots, \zeta_n$ ved formel (1.29). I MATLAB-filen **ELEMDATA.M** er bestemmelsen af dæmpningsmatricen vha. Rayleighs dæmpningsmodel foretaget.

Appendiks H

Newmark algoritmen

I det følgende redegøres kort for hvordan bevægelsesligningerne kan løses numerisk ved en Newmark algoritme. Algoritmen er anvendt i MATLAB-filen **NEWMARK.M**. I Newmark algoritmen forudsættes det at flytningen og hastigheden til tiden t_j kendes. Herudfra bestemmes flytningen, hastigheden og accelerationen til tiden t_{j+1} , hvor $j=0, 1, \dots, n$.



Figur H.1: Lineært approksimation af acceleration.

Der tages udgangspunkt i følgende bevægelsesligning

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.31)$$

For $j=0$ dvs. til tiden $t=t_0$ antages begyndelsesflytningen \mathbf{x}_0 og begyndeshastigheden $\dot{\mathbf{x}}_0$ kendte, hvorefter begyndelsesaccelerationen bestemmes ved

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{x}_0 \Leftrightarrow \\ \ddot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ved lineær approksimation af accelerationen i tidsintervallet $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ som illustreret på figur h.1, kan dette udtrykkes ved

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_j + \frac{1}{\Delta t}(\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j)\tau \quad \text{for } 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad (1.33)$$

Ved integration hvor det benyttes at $\dot{\mathbf{x}}_j = \dot{\mathbf{x}}(0)$ fås

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \int \left(\ddot{\mathbf{x}}_j + \frac{1}{\Delta t} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j) \tau \right) d\tau \\
 &= \dot{\mathbf{x}}_j \tau + \frac{1}{2\Delta t} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j) \tau^2 + k \\
 &= \dot{\mathbf{x}}_j \tau + \frac{1}{2\Delta t} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j) \tau^2 + \dot{\mathbf{x}}_j
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

hvor k er en integrationskonstant. Flytningen fås ved integration af ovenstående formel hvor det igen benyttes at $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_j$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \int \left(\dot{\mathbf{x}}_j \tau + \frac{1}{2\Delta t} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j) \tau^2 + \dot{\mathbf{x}}_j \right) d\tau \\
 &= \dot{\mathbf{x}}_j \tau + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{x}}_j \tau^2 + \frac{1}{6\Delta t} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j) \tau^3 + k_1 \\
 &= \dot{\mathbf{x}}_j \tau + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{x}}_j \tau^2 + \frac{1}{6\Delta t} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \ddot{\mathbf{x}}_j) \tau^3 + \mathbf{x}_j
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Evalueres (1.34) og (1.35) i $\tau = \Delta t$ fås

$$\dot{\mathbf{x}}_{j+1} = \dot{\mathbf{x}}_j + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} + \ddot{\mathbf{x}}_j) \tag{1.36}$$

og

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \dot{\mathbf{x}}_j \Delta t + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 (\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} + 2\ddot{\mathbf{x}}_j) \tag{1.37}$$

I Newmark algoritmen antages det at formel (1.36) og (1.37) kan omskrives til

$$\dot{\mathbf{x}}_{j+1} = \dot{\mathbf{x}}_j + \Delta t \left[(1-\gamma) \ddot{\mathbf{x}}_j + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{j+1} \right] \tag{1.38}$$

og

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \dot{\mathbf{x}}_j \Delta t + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_j + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{j+1} \right] \tag{1.39}$$

Det ses at når $\gamma = \frac{1}{2}$ og $\beta = \frac{1}{6}$ svarer formel (1.38) og (1.39) formel (1.36) og (1.37), hvor accelerationen antages lineært variende i tidsintervallet Δt . Tilsvarende kan det vises at når $\gamma = \frac{1}{2}$ og $\beta = \frac{1}{4}$ svarer dette til at accelerationen antages konstant med værdien $(\ddot{\mathbf{x}}_j + \ddot{\mathbf{x}}_{j+1})/2$ i tidsintervallet Δt . Parametrene γ og β indikerer derfor variationen af accelerationen i tiden t_j til t_{j+1} . Flytningen bestemmes implicit ved evaluering af bevægelsesligningerne i tiden t_{j+1}

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{j+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_{j+1} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{f}_{j+1} \tag{1.40}$$

Accelerationen $\ddot{\mathbf{x}}_{j+1}$ bestemmes ved isolation af (1.37) samt anvendelse af (1.39)

$$\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\mathbf{x}}_j - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{x}}_j \tag{1.41}$$

Indsættes (1.41) i (1.36) fås hastigheden til tiden t_{j+1}

$$\dot{\mathbf{x}}_{j+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{x}}_j + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{x}}_j \quad (1.42)$$

Indsættes (1.41) og (1.42) i (1.40) kan flytningen bestemmes ved

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{j+1}) \quad (1.43)$$

I henhold til (Nielsen, 2005) er algoritmen ubetinget stabil når parametrene vælges således at følgende kriterium er opfyldt

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta \quad (1.44)$$

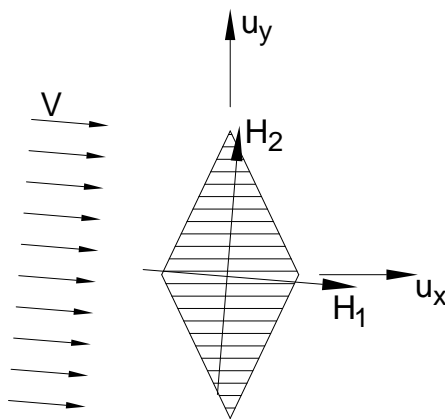
Det ses derfor at når accelerationen i intervallet Δt antages konstant, er algoritmen stabil.

Newmark algoritmen er anvendt i MATLAB-filen **NEWMARK.M** og **NEWMARK_F.M**, hvor parametrene er valgt således $\gamma = \frac{1}{2}$ og $\beta = \frac{1}{4}$, og dermed opfylder kriteriet for ubetinget stabilitet.

Appendiks I

Effektiv vindhastighed

I dette appendiks estimeres den effektive vindhastighed når konstruktionens hastighed adderes til den virkende vindhastighed. På nedenstående figur er konstruktionens tværsnit samt retningen på vindhastigheden skitseret. I denne forbindelse antages vinden virkende i samme retning som konstruktionens svage hovedakse.



Figur I.1: Skitsering af effektiv vindhastighed.

Det antages at konstruktionen frit kan bevæges i de to angivne retninger. I henhold til hovedrapporten, kan der forventes en harmonisk bevægelse i størrelsesordenen 0.5 m i toppen af konstruktionen med en cirkulær frekvens på 1.5 rad/s svarende omtrent til den første cirkulære egenfrekvens. Det vil sige at

$$u_x = u_y = A \sin(\omega t) = 0.5 \text{ m} \sin\left(1.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right) \quad (1.45)$$

Den maksimale hastighed som konstruktion vil opnå alene af sin bevægelse er

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega A \cos(\omega t) \Rightarrow \\ \dot{u}_{\max} &= \omega A \cos(\omega t) \Big|_{t=0} \\ &= 1.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0.5 \text{ m} \\ &= 0.75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Da vindhastigheden i toppen af konstruktionen er estimeret til ca. 30 m/s giver konstruktionens hastighed ikke en væsentlig ændring i den effektive vindhastighed selv når konstruktionen er i yderposition eller opnår sin maksimale hastighed.

Appendiks J

Estimering af amplitude og fase af signal ved FFT-analyse

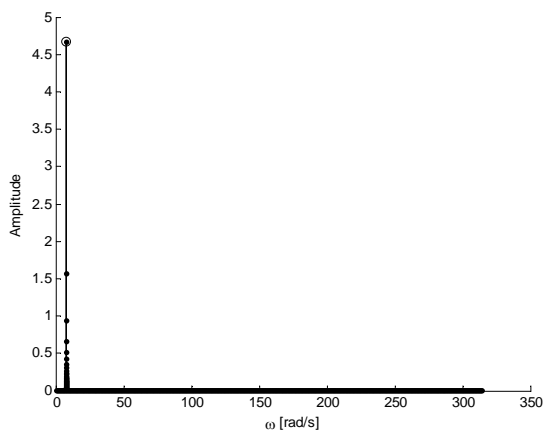
I det følgende redegøres for hvorledes amplituden og faseforskydningen for et signal som har et harmonisk forløb kan fittes. Der tages udgangspunkt i følgende vilkårligt valgte funktion

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= 5.2 \cos(7.4t + 3) \end{aligned} \quad (1.47)$$

hvor $t = [0:0.01:3000]$. FFT-funktionen i MATLAB giver et variansspektrum i tidsdomænet som består af en række komplekse tal svarende til antallet af data. Amplituden bestemmes som modulusen for de enkelte komplekse tal, mens faseforskydningen bestemmes som argumentet. For at få et dobbeltsiddet amplitudespektrum ganges amplituden med 2. Transformationen fra tidsdomænet til frekvensdomænet sker ved:

- Bestemmelse af opsamlingsfrekvensen $f_s = \frac{1}{dt}$, hvor dt er tidsskridtet på 0.01
- Tiden svarende til opsamlingsfrekvensen er $T = ndt \cdot dt$, hvor ndt er antallet af tidsskridt
- Transformationen fra tid til frekvens sker ved $f = [0:\frac{1}{T}:f_s - \frac{1}{T}]$. Ganges f med 2π fås frekvensen i $[\frac{rad}{s}]$

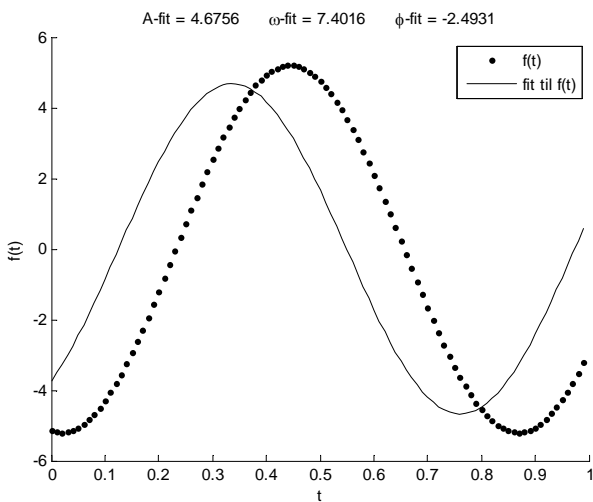
Amplitudespektret er vist nedenfor.



Figur J.1: Amplitudespektrum for $f(t)$

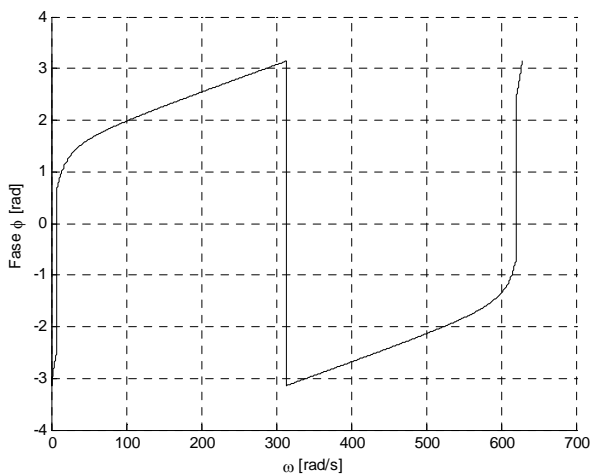
Estimering af amplitude og fase af signal ved FFT-analyse

Vælges amplituden, frekvensen samt faseren svarende til peaken på figuren kan disse plottes op mod den oprindelige funktion $f(t)$. Dette er vist på nedenstående figur.



Figur J.2: Fit af $f(t)$ ved FFT-analyse.

Det ses at frekvensen fitter godt, mens amplituden og faseren ikke stemmer godt overens med det analytiske udtryk for $f(t)$. Faseren i det analytiske udtryk er på 3 rad svarende til en frekvens på 7.4 rad/s. Det ses af nedenstående figur at denne fase ligger omkring en frekvens på 300 rad/s hvilket ikke svarer til frekvensen i $f(t)$ på 7.4 rad/s.



Figur J.3: Fasespektrum for $f(t)$ ved FFT-analyse.

Det har vist sig at for at få et bedre fit er det nødvendigt at frekvensen til den ønskede peak rammes mere præcis. Sættes denne cirkulære frekvens lig med $\frac{2\pi}{T}$ fås

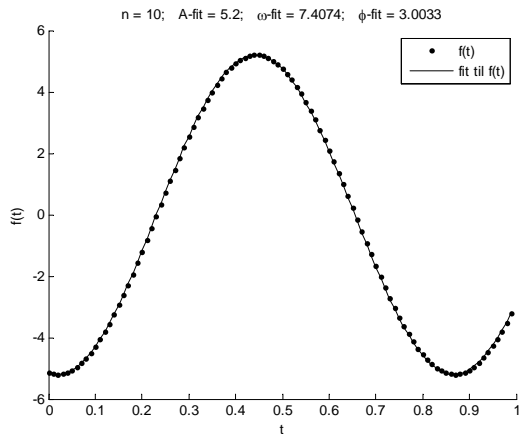
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{ndt \cdot dt} \quad (1.48)$$

Det ses af ovenstående formel at for at ramme den ønskede frekvens kan enten ndt eller dt justeres. Da FFT-analysen benyttes til at fitte data fra CFX-simuleringer som er kørt med en fast tidskridt

er justering af dette udelukket. Derimod kan antallet af data afkortes således at denne passer med den ønskede frekvens. Af formel (1.48) fås

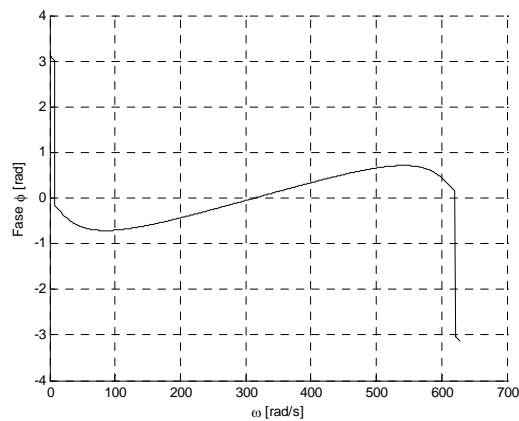
$$ndt = \frac{2\pi}{\omega \cdot dt} = n \frac{2\pi}{\omega \cdot dt} \tag{1.49}$$

hvor n er et helt tal. Denne faktor kan ganges med et helt tal såfremt der ønskes flere datapunkter. Dette giver følgende resultat. Det ses at dette fitter meget bedre end det forrige fit.



Figur J.4: Fit af $f(t)$ ved FFT-analyse.

Nedenstående figur viser fasespektret for FFT-analysen. Det ses af figuren at fasen ved en frekvens på 7.4 rad/s er ca. 3 rad, hvilket svarer til det ønskede fit i $f(t)$.



Figur J.5: Fasespektrum for $f(t)$ ved FFT-analysen.

Det konstateres at for at få et godt estimat ved FFT-analysen er det nødvendigt at opløsningen af dataene er tilstrækkelig fin til at identificere de ønskede frekvenser, når disse viser sig som meget spidse peaks på amplitudespektret.