

Aalborg Universitet

Topologioptimering af strukturer udsat for dynamisk belastning

PROJEKTPERIODE: 3. September 2007-3 Juni 2008

PROJEKTGRUPPE: 48b, DMS 9-10 (lang afgang)

Gruppemedlem: Miguel Adolfo Hoffmann

Vejleder: Niels Olhoff

Antal kopier: 3

Rapport sideantal: 84

Index sideantal: 10

Appendiks sideantal: 13

Total sideantal: 107

Indholdsfortegnelse

	Indholdsfortegnelse	iii
	Forord	v
	Abstrakt	vii
	Resumé	ix
1	Indledning	1
2	Elementmetoden i et 2D problem	3
2.1	Valg af elementer.....	3
2.2	Opstilling af stivhedsmatricen for et Q4 element.....	3
3	Minimering af compliancen	9
3.1	Optimering af compliancen.....	9
3.1.1	Optimering af den statiske compliance.....	10
3.1.2	SIMP materialemodellen.....	11
3.2	Opstilling af objektfunktionen.....	14
3.2.1	Topologioptimeringsproblemet.....	14
3.3	Optimeringsprogrammet.....	19
3.3.1	Stopkriterium.....	20
4	Filtrering	23
4.1	Checkerboard problemet.....	23
4.2	Løsning af checkerboard problemet.....	24
4.2.1	Digital filtrering.....	24
4.2.2	Meshuafhængigt filter eller traditionelt følsomhedsfilter.....	29
4.2.3	Mean sensitivity filter.....	30
5	Dynamisk optimering i 2D	33
5.1	Formulering af problemet.....	33
5.2	Følsomhedsanalyse.....	36
5.3	Materialemodel.....	39
5.3.1	Lokaliserede vibrationsmodes.....	39
5.4	Optimeringsmetoder.....	41
5.4.1	Kontinuationsmetoden.....	41
5.4.2	Constraintmetoden.....	43
6	Optimeringsresultater i 2D	45
6.1	Initialdesign.....	45
6.1.1	Egenmodes.....	47
6.2	Optimeret design for statisk belastning.....	48
6.3	Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=40$ rad/s).....	50
6.4	Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=60$ rad/s).....	52
6.5	Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=80$ rad/s).....	54
7	Optimering af en plade	57
7.1	Bi-tykkelsesmodellen.....	57

7.1.1	Bestemmelse af materialekonstanter for bi-tykkelsesmodellen.....	57
7.2	SIMP modellen for bi-tykkelsesstrukturer.....	59
7.3	Objektfunktionen.....	61
7.3.1	Normalisering af objektfunktionen og følsomheden.....	62
7.4	Filtrering af følsomheden.....	62
7.5	Volumenconstraint.....	63
8	Optimeringsresultater for en plade.....	65
8.1	Initialdesign.....	65
8.2	Optimeret design for en statisk belastning.....	69
8.3	Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=100$ rad/s).....	71
8.4	Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=240$ rad/s).....	73
8.5	Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=850$ rad/s).....	75
8.6	Problemer.....	77
9	Konklusion.....	79
	Nomenklaturliste.....	81
	Litteraturliste.....	83
	Appendices.....	I
A	Q4 element.....	III
A.1	B matrice.....	III
A.2	Stivhedsmatricen.....	III
B	Compliance plots.....	V
B.1	Compliance plot for initialdesign.....	VI
B.2	Compliance plot for statisk optimering.....	VII
B.3	Compliance plot for dynamisk belastning ($\omega_p=40$ rad/s).....	VIII
B.4	Compliance plot for dynamisk belastning ($\omega_p=60$ rad/s).....	IX
B.5	Compliance plot for dynamisk belastning ($\omega_p=80$ rad/s).....	X
C	Oversigt over programmerne på CD.....	XI
D	Oversigt over CD.....	XIII

Forord

Denne rapport er udarbejdet af gruppe 48b DMS 9-10, som dokumentation for projektet "Topologioptimering af strukturer udsat for dynamisk belastning". Bagerst i rapporten ligger appendiks. Derudover findes i omslaget en CD-rom med programmer og filer, som er udviklet under projektet. Programmerne er skrevet i Matlab og Maple. Nomenklatur- og litteraturliste er vedlagt bagerst i rapporten. Lige før indledningen findes der et resumé på engelsk, over rapporten.

Abstrakt

Denne rapport omhandler topologioptimering af kontinuerte strukturer uden dæmpning, som bliver udsat for en harmonisk varierende belastning, der er uafhængigt af designet. Belastningens amplitude og excitationens frekvens er givet på forhånd. Formålet med optimeringen er at maksimere den dynamiske stivhed, som svarer til at minimere den dynamiske compliance.

Når sådan et problem løses sker det normalt ved at resonansfrekvenserne skubbes så langt væk som muligt fra den givne excitationens frekvens. I denne rapport optimeres der ikke direkte på resonansfrekvenserne, idet problemet løses ud fra de tvungne svingninger. Resultatet er dog, at resonansfrekvenserne skubbes væk fra excitationens frekvensen.

Løsningen af problemet er baseret på en enkeltmateriale model og en bi-tykkelsesmodel, som anvender SIMP modellen for at penalisere materialet, og designvariablene er elementernes volumendensitet. Det tilladelige designvolumen, randbetingelserne og materialevolumenet er definerede på forhånd. Det er regnet på flere repræsentative eksempler, og løsningerne vises.

Resumé

This project is about topology optimization of continuum structures subjected to forced vibration. The goal is to minimize the dynamic compliance (maximum dynamic stiffness) of a single material structure or a plate like structure. In the case of the single material structure the optimization are based on the idea of having areas (elements) with material and without material (void areas). In the plate structure the optimization are carried out by changing the thickness of each element.

The basic assumptions are, that the damping are not taking into account in the calculations, and the loading type are dynamic, time harmonic and design independent. The amplitude, frequency and spatial distribution of the applied force are prescribed.

The project are divided in two parts, the first part comprises setting up a program to minimize the dynamic compliance of a 2D structure and the second part is about minimizing the dynamic compliance of a plate. In both cases the task are setting up a program that can make the optimization, and the corresponding finite element program used to calculate the compliance in the optimization process.

The finite element used in the 2D case (examples are shown in section 5) are the bilinear rectangle (Q4) element. This is a four node plane element with 8 degree of freedom. The finite element used in the plate structure (examples shown in section 8) are based on Mindlin plate theory, it's a 9 node plate element with 27 degree of freedom and it is using the Lagrange interpolation formula. Each node having 3 degrees of freedom, 2 rotations in the plane of the plate and 1 displacement out of the plane.

The optimizer used are the MMA method developed by Krister Svanberg.

Minimizing the dynamic compliance of a structure is normally achieved by moving the eigenfrequencies ahead of the excitation frequency, but it is important to distinguish between eigenfrequencies and resonant frequencies, because not all the eigenfrequencies are excited by the applied load. The resonant frequencies are the eigenfrequencies that are excited, which eigenfrequencies are excited depends of the spatial distribution of the applied load. In the cases covered in this project the frequencies pushed away from the excitation frequency are only the resonant frequencies, the eigenfrequencies who are not excited by the applied load have no influence in the dynamic compliance.

The finite element method used to calculate the compliance are based on the fact that the structures to optimize are meshed with a regular pattern. All elements having the same volumen, this means that there are no needs to calculate the stiffnessmatrix for each element, this can be calculated for a standard element and then used to solve the finite element problem. This make the numerical problem much easier to solve.

In the chapter 2 there are a review of the finite element methods used in this project, in chapter 3 there are a review of the definition of the compliance, the SIMP material model and the optimizer used to solve the problems (MMA method). The checkerboard problem, the mesh dependency problem and the solution of this problems with filtering techniques are discussed in chapter 4.

The theoretical fundament used to minimize the dynamic compliance for a plane, single material structure are in chapter 5 and several examples are in chapter 6. The following chapter 7 is about minimizing the dynamic compliance for a plate structure using a model based on changing the thickness of the plate, the examples are in chapter 8.

1 Indledning

Topologioptimering blev først udviklet til at finde den optimale fordeling af et elastisk materiale, som skal fordeles i et givet designvolumen, og som belastes med statisk kraft. Formålet med optimeringen var at opnå en struktur der var så stiv som muligt for en begrænset mængde materiale. En meget komplet overblik over topologioptimering findes i (NOL02).

Sammenlignet med andre former for optimering, for eksempel formoptimering, har topologioptimering den fordel, at metoden tillader store ændringer i geometrien. Huller kan opstå og forsvinde fra strukturen, og det giver meget store muligheder for at opnå en mere optimal løsning. Den indebærer dog, at resultaterne kan være noget grove i kanterne, og den resulterende geometri kan have nogle kærve, som det kan være nødvendigt at glatte ud. Metoden kan altså med fordel kombineres med formoptimering, således at en struktur først topologioptimeres og derefter formoptimeres.

Topologioptimeringen behøver ikke altid at ændre strukturens rande, det kan også være en bi-materiale struktur hvor det er fordelingen af materialet, der ændres på (NTR01). Formålet behøver heller ikke altid at sigte på at optimere en struktur, det kan også være at designe en mekanisme (OSI01).

På samme måde som den statiske compliance er et mål for en strukturs stivhed (en lavere compliance svarer til en højere stivhed), så er den dynamiske compliance også et mål for, hvor store amplituderne af udbøjningerne bliver (JOG01).

Optimering af den dynamiske compliance kan fokusere på at flytte egenfrekvenser for en plade ved forskellige former for afstivning (LNO01). I andre tilfælde kan der være tale om at optimere på en struktur, der er udsat for tvungne svingninger for at minimere den dynamiske compliance (NOL01), eller minimere støjen fra en vibrerende struktur (JDN01).

Dette projekt tager sigte på at udvikle en metode til at minimere en strukturs dynamiske compliance, når den bliver udsat for tvungne svingninger. Hovedformålet er optimering af en plade, men for at opnå de nødvendige færdigheder i at udføre en topologioptimering, startes der med simple opgaver som gradvis udvikler sig i retning af optimering af en plade. Den model der anvendes til at optimere pladen er stærkt inspireret af den bi-materiale model, som bruges i (NOL01). I stedet for en bi-materialemodel bruges en bi-tykkelsesmodel, og interpolationsformlen, som anvendes sammen med bi-tykkelsesmodellen, er analog til den blandingsformel, som bruges i det nævnte paper.

I første del af projektet analyseres en 2D opgave, der optimeres for forskellige belastninger, både statiske og dynamiske. I den anden del ændres programmet, så det kan håndtere en pladestruktur.

En topologioptimering er meget tæt forbundet med den elementmetode, som beregner strukturens forskydninger, så dette projekt omfatter også udvikling af den nødvendige finite element kode.

Der anvendes MATLAB som programmeringsprog, MAPLE er dog også anvendt når det har været nødvendigt med analytiske løsninger.

Som udgangspunkt for at starte med opgaven er der anvendt et topologioptimeringsprogram skrevet af Ole Sigmund (SIG05), dette program er derefter blevet udbygget og ændret.

Kapitel 2 er en gennemgang af elementmetoden med fokus på, hvordan stivhedsmatricen opstilles og hvordan den samles, samt hvordan ligningssystemet løses. Kapitel 3 indeholder en definition af compliancen, en forklaring af SIMP materialemodellen og en gennemgang af den valgte optimeringsmetode (MMA) samt en oversigt over programmet.

I kapitel 4 analyseres nogle problemer som kan opstå under optimeringen (checkerboard problemet og meshafhængige designs) samt anvendelse af filtrering til at løse problemerne. Kapitel 5 fokuserer på optimering af dynamiske problemer, og i kapitel 6 præsenteres eksempler som er beregnet med et program, der bygger på teorien fra kapitel 5.

Kapitel 7 omhandler teorien for optimering af en plade som udsættes for dynamiske belastninger, og i kapitel 8 præsenteres eksempler som er beregnet med et program der bygger på teorien fra kapitel 7, og rapporten afsluttes med en konklusion.

2 Elementmetoden i et 2D problem

Oversigt: I dette projekt indgår også at opstille et element program til at beregne udbøjningerne. Dette kapitel indeholder oplysninger om hvordan elementprogrammet er bygget op og det valgte element (Q4) som anvendes i de indledende beregninger i 2D. Dette kapitel bygger hovedsagligt på to bøger [CMP00] og [WFC00]. Den beskrevne metode til at samle stivhedsmatricen anvendes også til massematricen og til pladeberegningerne. Måden at beregne flytningerne på bruges også når der regnes på plader. Programmet er skrevet i Matlab og de analytiske beregninger er gennemført i Maple.

2.1 Valg af elementer

Topologioptimering bygger på en diskretiseret fordeling af det til rådighed værende materiale. Som grundelement i diskretiseringen er det i dette tilfælde valgt at anvende elementet som bruges til elementberegningerne. Designspacet bliver inddelt i et net bestående af de valgte elementer. Det er vigtigt at holde sig for øje at meshet kommer til at bestå af elementer der alle har den samme geometri og som alle er parallelle med akserne, der findes ingen "skrå" sider på nogle af elementerne.

Som element til beregningerne i 2D er der valgt et Q4 element, dvs. valget er faldet på et simpelt element og ikke et mere kompliceret 8 eller 9 knuders element. Begrundelsen for dette valg er, at selv om de højere ordens elementer nok giver en bedre beskrivelse af stivheden og ikke er så følsomme overfor checkerboard problemet¹ som Q4 elementet, så er beregningstiden øget med op til en faktor 16 og hukommelseskravet er forøget med en faktor 4, side 69 [SIG01]

2.2 Opstilling af stivhedsmatricen for et Q4 element

Et skema over et Q4 elementet kan ses i fig. (2-1), elementet er defineret ud fra a og b , som bestemmer sidelængden af elementet.

Det første skridt til at opstille stivhedsmatricen består i at formulere interpolationspolynomiet, \mathbf{X} , som ses i vektorform i ligning (2-1).

$$\mathbf{X} = [1, x, y, x \cdot y] \quad (2-1)$$

¹Se kapitel (4)

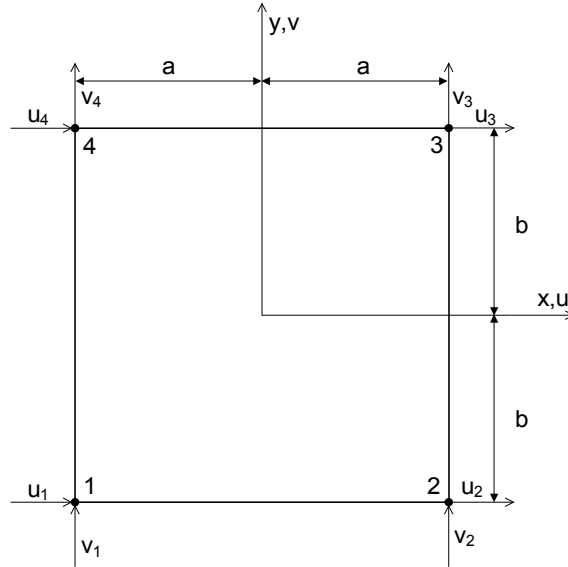


Fig. 2-1: Q4 Element

Derefter er det muligt at opbygge A matricen, eller som den også hedder, koefficientmatricen, der er vist i ligning (2-2). Den opstilles ved at interpolationspolynomiet evalueres i alle elementets knuder.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & a \cdot b \\ 1 & a & -b & -a \cdot b \\ 1 & a & b & a \cdot b \\ 1 & -a & b & -a \cdot b \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

Derefter inverteres A matricen.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4 \cdot a} & \frac{1}{4 \cdot a} & \frac{1}{4 \cdot a} & -\frac{1}{4 \cdot a} \\ -\frac{1}{4 \cdot b} & -\frac{1}{4 \cdot b} & \frac{1}{4 \cdot b} & \frac{1}{4 \cdot b} \\ \frac{1}{4 \cdot a \cdot b} & -\frac{1}{4 \cdot a \cdot b} & \frac{1}{4 \cdot a \cdot b} & -\frac{1}{4 \cdot a \cdot b} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

Ligning (2-4) udtrykker forholdet mellem interpolationspolynomiet og koefficientsmatricen. Resultatet er N , der i dette tilfælde er en vektor, men det er kun fordi der er tale om et problem i én dimension.

$$N = X \cdot A^{-1} \quad (2-4)$$

Ved at udføre produktet og tage højde for at der er tale om to dimensioner opnås følgende udtryk (2-5). I dette tilfælde er N en matrice hvor antallet af rækker er bestemt af antallet af frihedsgrader per knude.

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

Indgangene i N matricen er formfunktioner, som har et udtryk svarende til Lagrange's interpolationsformel. At der er tale om Lagrange's interpolationsformel betyder, at det kun er funktionsværdien i de forskellige knuder der har den samme værdi, hældningen i de forskellige knuder behøver ikke at være den samme. Hvis det var nødvendigt at sikre at både funktionsværdien og hældningen i de forskellige knuder er ens, skal der anvendes andre formfunktioner.

Efterfølgende vises udtrykket for formfunktionerne.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{a \cdot b - x \cdot b - y \cdot a + x \cdot y}{4 \cdot a \cdot b} \\ N_2 &= \frac{a \cdot b + x \cdot b - y \cdot a - x \cdot y}{4 \cdot a \cdot b} \\ N_3 &= \frac{a \cdot b + x \cdot b + y \cdot a + x \cdot y}{4 \cdot a \cdot b} \\ N_4 &= \frac{a \cdot b - x \cdot b + y \cdot a - x \cdot y}{4 \cdot a \cdot b} \end{aligned}$$

Efter at interpolationsfunktionerne er bestemt, er det nu muligt at definere flytningerne i elementet ud fra knudepunktsflytningerne.

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

Forholdet mellem tøjninger og flytninger i et 2 dimensionalt element er

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-7)$$

Tøjnings- forskydningsmatricen, B , matricen kommer til at have følgende udtryk

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} \quad (2-8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Grundet pladshensyn er det ikke hensigtsmæssig at vise B matricen og stivhedsmatricen i dette kapitel. Udtrykket for B matricen og den komplette stivhedsmatrice for et Q4 element kan ses i Appendiks (A).

Den struktur der regnes på i den første del er plan, og der arbejdes med plan spænding. Udtrykket for den konstitutive matrice for plan spænding er vist i ligning (2-10), det var det sidste der manglede for at beregne stivhedsmatricen.

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Efter at \mathbf{B} matricen er kendt kan stivhedsmatricen for et element beregnes som vist i ligning (2-11).

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, dx \quad (2-11)$$

Som nævnt er det kun stivhedsmatricen for et enkelt element der er udtrykt i ligning (2-11), stivhedsmatricen for hele strukturen konstrueres ud fra denne ved at samle stivhedsmatricerne for hvert enkelt element. I det følgende eksempel er det et termisk problem, eller et andet problem hvor knuderne kun har en frihedsgrad, der analyseres for at vise hvordan stivhedsmatricen samles, der er valgt en opstilling med kun en frihedsgrad per knude for at matricerne bliver mere overskuelige.

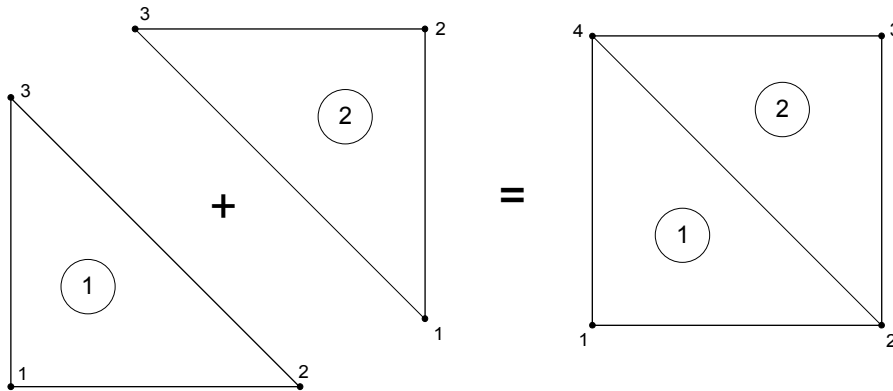


Fig 2-2: Tegning over de 2 elementer der bruges som eksempel på hvordan stivhedsmatricen samles.

Ved hjælp af et eksempel vil det nu blive gennemgået hvordan stivhedsmatricen samles. For disse trekantselementer ser stivhedsmatricerne således ud.

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

$$\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

Derefter bliver stivhedsmatricerne omskrevet til globale koordinater.

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & a_5 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_8 & 0 & a_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

Eftersom \mathbf{k}_1 og \mathbf{k}_2 er lige store og opererer på den samme vektor kan de lægges sammen.

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{k} \quad (2-16)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & a_5 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_8 & 0 & a_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & a_5 + b_1 & b_2 & a_6 + b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ a_7 & a_8 + b_7 & b_8 & a_9 + b_9 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

Efter at den globale stivhedsmatrice er samlet, beregnes \mathbf{D} ud fra følgende udtryk.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{R} \quad (2-18)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & a_5 + b_1 & b_2 & a_6 + b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ a_7 & a_8 + b_7 & b_8 & a_9 + b_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

Dette ligningssystem løses, og resultatet er flytningerne som anvendes til at beregne compliancen. Det er dog ikke helt ligetil at løse, der findes nemlig ubekendte både i \mathbf{D} og \mathbf{R} vektoren. Den løses ved at opstille en reduceret stivhedsmatrice, som kun indeholder de frihedsgrader der ikke er låst. For eksempel, hvis der i eksemplet på fig. (2-2) antages at knude 2 er låst, så kommer den reducerede stivhedsmatrice til at have følgende udtryk

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_5 & b_6 \\ a_7 & b_8 & a_9 + b_9 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

Og ligningssystemet der skal løses får følgende udtryk

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_5 & b_6 \\ a_7 & b_8 & a_9 + b_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

I ligning (2-21) er alle komponenterne af \mathbf{D} vektoren ubekendte, og alle komponenterne af \mathbf{R} vektoren er kendte, dette ligningssystem løses, og nu er alle \mathbf{D} værdierne kendte. Den sidste ubekendte er r_2 , men den er nem nok at bestemme.

$$D_1 \cdot a_4 + D_2 \cdot (a_5 + b_1) + D_3 \cdot b_2 + D_4 \cdot (a_6 + b_3) = r_2 \quad (2-22)$$

Under optimeringen er geometrien for alle elementerne den samme, det eneste der varierer er den volumendensiteten, det betyder at det er den samme stivhedsmatrice der anvendes over hele strukturen. Det giver mulighed for at opstille det analytiske udtryk for stivhedsmatricen i dette tilfælde

beregnet ved hjælp af MAPLE. Det har den store fordel, at integralet der er vist i ligning (2-11) ikke skal beregnes for hver element, det eneste der skal gøres er at indsætte værdierne i udtrykket for stivhedsmatricen der er hentet fra Maple. Alle de nævnte beregninger er udført i et Maple program som er vedlagt på CD.

3 Minimering af compliancen

Oversigt. I dette kapitel omtales grundideen om hvordan en topologioptimering udføres. Selvom dette projekts hovedopgave går ud på at minimere den dynamiske compliance, vil der i dette kapitel blive fokuseret på den statiske compliance for et 2D problem (plan spænding). Når programmet fungerer for det statiske tilfælde, vil det blive udbygget til også at omfatte dynamiske belastninger og pladeproblemer. Den anvendte bog er [SIG02] og følgende papers [NOL02], [NOL03]. Det anvendte materialemodel analyseres og det optimeringsprogrammets funktionsmode opridses.

3.1 Optimering af compliancen

Topologioptimering er som navnet siger en optimering af topologien. Ordet kommer fra det græske topos og betyder placering, sted, plads eller område.

Topologioptimering kan hovedsagligt deles op i 2 fremgangsmåder, en der koncentrerer sig om materialet og den anden om geometrien. Dette projekt er baseret på den første af de nævnte fremgangsmåder.

Når en struktur skal optimeres, er der en maksimal mængde materiale til rådighed, dette materiale er i starten af optimeringen jævnt fordelt over det tilladelige designvolumen. Der er ikke materiale nok til at fylde designvolumenet, så det har en relativ densitet der er lavere end 1, efterhånden som optimeringen skrider frem ændres den relative densitet så den i nogle områder går mod 0 og i andre mod 1. Denne begrænsning af materialet udgør en constraint, nemlig materialeconstrainten.

For hver iteration beregnes strukturens compliance ved en finite element analyse hvor elementernes stivhed er afhængig af volumendensiteten. Denne volumendensitet, ρ_e , er et mål for, om et element er fyldt op med materiale eller ikke, hvis den er 1 så er der massivt materiale, og hvis den er 0 så er der et hul. Når volumendensiteten ligger mellem 0 og 1, er det materiale den repræsenterer et fiktivt materiale, det eksisterer ikke i virkeligheden, det er dog ikke noget problem da det kun drejer sig om mellemregninger og ikke det endelige resultat.

Finite element diskretiseringen er bestemt på forhånd og ligger fast under hele optimeringen, den består af firkantede elementer der alle er ens. Optimeringen går altså ud på at bestemme hvorvidt de forskellige elementers volumendensiteter skal være 1 eller 0. Der introduceres en penaliseringsfunktion for at sikre, at volumendensiteterne bliver presset til at blive 0 eller 1.

Det ideelle resultat opnås når der kun er to mulige værdier for volumendensiteterne, nemlig 0 eller 1, men dette er som sagt den teoretiske løsning. Det er ikke muligt at opnå et fuldstændigt diskret resultat, men det er vigtigt at komme så tæt på som overhovedet muligt.

At optimere en strukturs compliance er altså et spørgsmål om at finde den rette distribution af materialet, så strukturen bliver så stiv som overhovedet muligt. Materialet eller materialerne som skal optimeres, er alle steder i denne rapport isotrope, lineært elastiske materialer.

3.1.1 Optimering af den statiske compliance

Hvis compliancen, C , defineres som de ydre kræfters arbejde, W , når strukturen er i ligevægt, så betyder det, at maksimeringen af stivheden svarer til at minimere compliancen. Compliancen svarer altså til ydre kræfters arbejde, når strukturen er i ligevægt.

De ydre kræfters arbejde kan udtrykkes på følgende vis.

$$W = \int_V \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} dV + \int_A \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{D} dA \quad (3-1)$$

Her er \mathbf{F} volumenkræfterne, \mathbf{D} flytningerne og \mathbf{P} overfladekræfterne. Denne ligning kræver at strukturen skal være i ligevægt, hvilket kan løses ved hjælp af en finite element analyse. For at udtrykke problemet på finite element form anvendes formlen for den totale potentiale energi.

$$\Pi = U_e - W = \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV - \int_V \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} dV - \int_A \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{D} dA \quad (3-2)$$

Her er U_e den elastiske energi også kaldet tøjningsenergien.

$$U_e = \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (3-3)$$

\mathbf{E} er den konstitutive matrix og $\boldsymbol{\epsilon}$ er tøjningerne. At øge en strukturs stivhed går sådan set ud på at finde den optimale konstitutive matrix (stivhedstensor), desto mere optimal den er, desto mindre vil også tøjningerne og flytningerne være og derfor vil de ydre kræfters arbejde også være mindre. Den konstitutive matrix varierer hen over strukturen fra element til element. Ligning (3-2) kan omskrives til finite element form.

$$\Pi = U_e - W = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{U} \quad (3-4)$$

I denne ligning er \mathbf{U} flytningsvektoren, \mathbf{K} er stivhedsmatricen og \mathbf{R} er belastningsvektoren. Princippet om minimum total potential energi anvendes og det kræver at den totale potentiale energi er stationær i forhold til flytningsvektoren \mathbf{U} .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (3-5)$$

Derved fremkommer ligevægtsligningen.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3-6)$$

De flytninger, \mathbf{U} , der beregnes ud fra ligning (3-6) substitueres ind i ligning (3-1) og så kan minimeringen af de ydre kræfters arbejde i ligevægt skrives som følger.

$$\begin{aligned} \min_{\rho_e} W(\mathbf{U}) \\ \text{begrænset til : } \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3-7)$$

I denne ligning er ρ_e designvariablen som er en del af et begrænset volumen. Det antages at volumenkræfterne er nul, så kan ligningen for de ydre kræfters arbejde forkortes til.

$$W(\mathbf{U}) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \quad (3-8)$$

Ud fra compliancens definition så kan udtrykket for den statiske compliance ses i ligning (3-9).

$$C = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \quad (3-9)$$

Udtrykket for kraften ses i ligning (3-10).

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (3-10)$$

Ved at erstatte \mathbf{P} i ligning (3-9) med (3-10) opstår følgende.

$$C = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (3-11)$$

Ligning (3-11) er udtrykket for den totale compliance, omfattende hele volumenet, alle de involverede matricer og vektorer er globale. Under optimeringsproceduren er det imidlertid nødvendigt at arbejde med et udtryk hvor compliancen er defineret som en funktion af de forskellige elementer som volumenet er opdelt i.

$$C = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}_e \quad (3-12)$$

I denne ligning er \mathbf{u}_e flytningerne på elementniveau, \mathbf{k}_e er den lokale stivhedsmatrice og N er antallet af elementer. Den totale compliance er summen af hvert elements compliance.

3.1.2 SIMP materialemodellen

I et område der er diskretiseret med et finite element mesh, kan en vilkårlig topologi beskrives ved at tænde og slukke for de forskellige elementer, dvs. at elementerne enten er fyldt helt op med materiale eller helt tomt for materiale. Det ligner et sort hvidt billede, hvor pixelerne består af elementerne.

Hvis materialets volumendensitet kun kan antage værdien 0 eller 1, så er det et heltalsproblem. En måde at løse det på, kunne være at prøve alle de mulige kombinationer af forskellige mønstre, og så vælge det mønster der har den laveste compliance. Der er dog det problem, at antallet af løsningsmuligheder er enormt, og det gør problemet vanskeligt at løse.

Den metode der normalt anvendes, og som også er valgt i dette projekt, er baseret på relaxation. Det bliver tilladt for volumendensiteten at variere kontinuert fra 0 til 1. Denne relaxation sørger for at objektfunktionen bliver kontinuert og differentiabel, det er altså muligt at beregne gradienten i forhold til volumendensiteten. Så kan matematiske metoder anvendes til at finde objektfunktionens minimum. Når optimeringen er færdig, skal alle volumendensiteterne have værdien 0 eller 1, hvis ikke det er tilfældet skal de i hvert fald være meget tæt på.

Den anvendte materialemodel kaldes SIMP² modellen. Den bygger på, at materialet bliver straffet (penaliseret) for at presse materialets volumendensitet til at gå mod én af de to ekstreme værdier, 0 eller 1.

² Solid Isotropic Microstructure with Penalty.

I et optimeringsproblem findes der et tilladeligt designområde, Ω , og det er inden for dette område at materialet bliver fordelt. Materialets volumen, Ω_{mat} , er normalt mindre en designområdets volumen, som ikke bliver fyldt helt op med materiale. Hvorvidt der skal være materiale eller ikke i et givet element, afhænger af hvilket stivhed elementet skal have.

$$\mathbf{E}_e = \rho_{int} \cdot \mathbf{E}_0 \quad \rho_{int} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \rho_{int} \in \Omega_{mat} \\ 0 & \text{hvis } \rho_{int} \in \Omega \setminus \Omega_{mat} \end{cases} \quad (3-13)$$

$$\int_{\Omega} \rho_{int} d\Omega = Vol(\Omega_{mat}) \leq V_0 \quad (3-14)$$

De viste ligninger viser hvordan det diskrete problem ser ud. Her er \mathbf{E}_0 stivheden for det anvendte isotrope materiale og \mathbf{E}_e er elementets stivhed, der afhænger af ρ_{int} . Denne ρ_{int} er volumendensiteten der i dette tilfælde kun har to mulige værdier, 0 eller 1. Ligning (3-14) udtrykker, at det til rådighed værende materiale er begrænset.

Som før nævnt ændres det diskrete problem til et kontinuert problem. Volumendensiteten ρ_{int} erstattes med ρ_e der kan variere kontinuert fra 0 til 1. Dette ρ_e er volumendensiteten i et givet element, dvs. at det udtrykker hvor meget materiale der er i et element i forhold til hvor meget der kan være.

$$\rho_e = \frac{v_{0e}}{v_e} \quad (3-15)$$

Her er v_{0e} volumenet af det materiale der er i elementet og v_e er elementets totale volumen, som det også er vist i fig.(3-1).

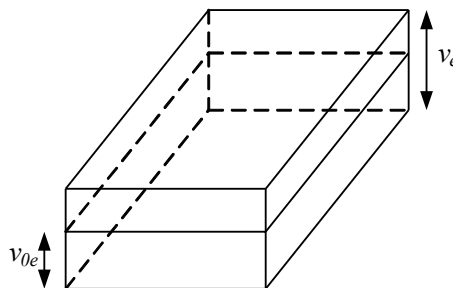


Fig. 3-1: Snit af et element der viser hvad v_e og v_{0e} hentyder til.

De første opgaver der regnes på er 2D problemer som befinder sig i plan spænding, i ligning (3-16) vises udtrykket for den konstitutive matrice, \mathbf{E}_0 , for et isotropt materiale.

$$\mathbf{E}_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

Det er muligt at opstille en modificeret konstitutiv matrice, \mathbf{E}_e , som beregnes ud fra elementets relative densitet, hvor p er penaliseringsfaktoren.

$$\mathbf{E}_e = \rho_e^p \cdot \mathbf{E}_0 \quad (3-17)$$

Finite element formuleringen for stivhedsmatricen på elementniveau, \mathbf{k}_e , har følgende udtryk.

$$\mathbf{k}_e = \int_{v_e} \mathbf{B}_e^T \cdot \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{B}_e dv_e \quad (3-18)$$

Her kan \mathbf{E}_e erstattes med ligning (3-17) og faktoren, ρ_e^p , kan sættes uden for integraltegnet. Herved kan \mathbf{k}_e udtrykkes på følgende måde.

$$\mathbf{k}_e = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0 \quad (3-19)$$

$$\mathbf{k}_0 = \int_{v_e} \mathbf{B}_e^T \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_e dv_e \quad (3-20)$$

Derved får vi et udtryk for \mathbf{k}_e der er afhængigt af den relative densitet, penalty faktoren og \mathbf{k}_0 . Da penalty faktoren og \mathbf{k}_0 kan betragtes som konstanter så er elementets stivhed kun afhængigt af elementets relative densitet.

Som det kan ses i ligning (3-19), er \mathbf{k}_0 uafhængigt af hvordan strukturen ændrer sig, den bestemmes ud fra elementets dimensioner og materialets egenskaber. Eftersom alle elementerne er ens, kan \mathbf{k}_0 beregnes en gang for alle og derefter kan den samme matrice anvendes til alle elementerne. Det er altså ikke nødvendigt at beregne integralet i ligning (3-20) for hver element, som i en normal finite element analyse. Det betyder en enorm besparelse af regnekraft.

Den nævnte penalty faktor, p , er den der penaliserer den relative densitet

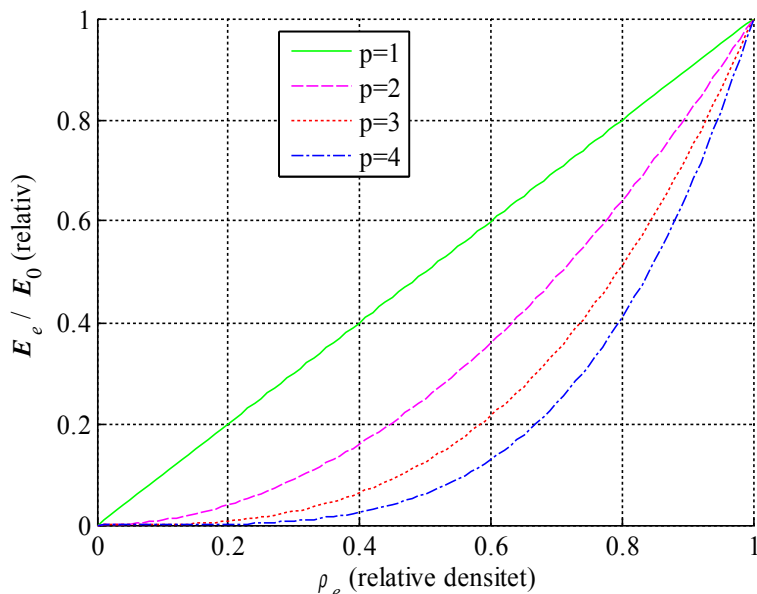


Fig. 3-2: Stivheden som en funktion af densiteten, vist for forskellige p værdier.

I fig. (3-2) kan det ses hvordan stivheden varierer med forskellige p , efterhånden som p øges bliver de forskellige værdier for \mathbf{E}_e presset til at gå mod 0 eller 1. Når ρ_e ligger mellem 0 og 1, er stivheden lavere i forhold til hvor meget materiale der anvendes, end hvis den relative densitet har de ekstreme værdier 0 eller 1. Optimeringsrutinen vil prøve at presse ρ_e til at have en værdi så stivheden i forhold

til mængden bliver optimalt. Så ved at penalisere vil det endelige resultat blive et design med en 0-1 løsning eller i hvert faldt meget tæt på. I praksis vil der dog altid være nogle gråzoner³.

3.2 Opstilling af objektfunktionen

I et optimeringsproblem er objektfunktionen navnet på den funktion der skal optimeres, i dette tilfælde minimeres. Målet for optimeringen i denne rapport er at maksimere stivheden af en given struktur. Det er analogt med at minimere compliancen. Objektfunktionen er altså et udtryk for compliancen, der ud fra ligning (3-12) kan skrives på følgende måde.

$$C = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}_e \quad (3-21)$$

Og ved at indsætte ligning (3-19) så fremkommer følgende udtryk for compliancen.

$$C = \sum_{e=1}^N \rho_e^P \cdot \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{u}_e \quad (3-22)$$

I ligning (3-22) ses hvordan compliancen er defineret for det nuværende problem, ligningen er sat op så compliancen beregnes for hvert element og den totale compliance er resultatet af at summere op over alle elementerne. Compliancen beregnes for hvert element, fordi volumendensiteten er forskellig fra element til element.

3.2.1 Topologioptimeringsproblemet

Efter at objektfunktionen er blevet defineret, kan optimeringsproblemet opstilles på følgende vis.

$$\begin{aligned} \underbrace{\min}_{\rho_e} : C &= \sum_{e=1}^N \rho_e^P \cdot \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{u}_e \\ \text{begrænset til} : \frac{V(\rho_e)}{V^*} - 1 &\leq 0 \\ &: \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \\ &: 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \end{aligned} \quad (3-23)$$

Der er 3 constraints, den første er volumenbegrænsningen, som definerer hvor meget materiale der kan anvendes, derefter kommer ligevægtsligningen der skal være opfyldt. Når programmet skrives er det dog ikke nødvendigt at opstille den som en separat constraint, eftersom den anvendes til beregningen af compliancen og er derfor implicit opfyldt. Den tredje constraint sørger for, at volumendensiteten ligger mellem 0 og 1, ρ_{min} har en meget lille værdi og meningen med den er at sikre at ρ_e ikke bliver nul, for at undgå at stivhedsmatricen bliver singular.

Objektfunktionens følsomhed

For at kunde anvende en gradientbaseret matematisk metode, er det nødvendigt at kende objektfunktionens følsomhed. Den har følgende udtryk.

³ Når der tales om gråzoner hentydes der til områder, hvor den relative densitet ligger imellem 0 og 1, i modsætning til sort-hvid zoner hvor der hentydes til et område hvor den relative densitet er enten 0 eller 1.

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \quad (3-24)$$

Denne afledte kunne umiddelbart se enkelt nok ud, hvis det ikke var fordi den kræver den afledte af \mathbf{U} i forhold til ρ_e , da beregningen af \mathbf{U} blandt andet indebærer en finite element analyse kan den være noget vanskeligt at udlede. Dette problem kan dog omgås ved hjælp af adjoint metoden (TDM01), i denne metode opstilles et adjoint problem som er nemmere at løse.

Til at starte med opstilles udtrykket for compliancen og ligevægtsligningen.

$$C = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3-25)$$

Ved hjælp af en Lagrange's multiplikator adderes ligevægtsligningen til compliancen.

$$C = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} - \lambda^T \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{P}) \quad (3-26)$$

Det er værd at bemærke, at compliancen ikke ændres, da udtrykket i parenteser er lig med 0. Ligningen differentieres,

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \lambda^T}{\partial \rho_e} \cdot \underbrace{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{P})}_0 - \lambda^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \right) \quad (3-27)$$

Lambda ganges ud over parenteser,

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - \lambda^T \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (3-28)$$

De led der indeholder den afledte af \mathbf{U} samles,

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = (\mathbf{P}^T - \lambda^T \cdot \mathbf{K}) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (3-29)$$

Det er nu muligt at identificere adjoint problemet, hvis det er lig med 0 så forsvinder den afledte af \mathbf{U} ud af ligningen,

$$\mathbf{P}^T - \lambda^T \cdot \mathbf{K} = 0 \quad (3-30)$$

$$\mathbf{P}^T = \lambda^T \cdot \mathbf{K} \quad (3-31)$$

Der ganges \mathbf{K}^{-1} på fra højre.

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} = \lambda^T \quad (3-32)$$

$$\mathbf{U}^T = \lambda^T \quad (3-33)$$

Ligning (3-33) indsættes i (3-29).

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (3-34)$$

Eftersom

$$\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (3-35)$$

Kan ligning (3-34) skrives som

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = 2 \cdot \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} - \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} \quad (3-36)$$

Dette er det fulde udtryk for compliancens følsomhed, når strukturen er udsat for statiske belastninger. Eftersom det antages at belastningen er konstant, kan ligning (3-36) reduceres yderligere,

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = -\mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} \quad (3-37)$$

I den viste ligning er \mathbf{U} og \mathbf{K} globale vektorer og matricer, men når det analyseres på elementniveau så er det klart at den afledte af \mathbf{k}_e , hvor \mathbf{k}_e er den lokale stivhedsmatrice, i forhold til de andre elements relative densiteter er 0. Ligning (3-37) kan altså omskrives til lokal form.

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = -\mathbf{u}_e^T \cdot \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{u}_e \quad (3-38)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = -p \cdot \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{u}_e \quad (3-39)$$

Dette er det endelige udtryk for compliancens følsomhed som det anvendes i programmet. Den skal evalueres for hver element så resultatet bliver en vektor der indeholder alle følsomhederne. \mathbf{u}_e er den lokale flytningsvektor.

Materialevolumenet

I dette optimeringsproblem er der lagt en begrænsning på, hvor meget materiale der må anvendes under optimeringen. Da volumen og mængde hænger sammen, er det designvolumenet, V^* , der udgør constrainten

$$V^* = f \cdot V_0 \quad (3-40)$$

hvor V_0 er volumen af det totale tilladte designområde.

$$V_0 = n_{elx} \cdot n_{ely} \cdot A_e \cdot t_e \quad (3-41)$$

I denne ligning er n_{elx} og n_{ely} antallet af elementer i henholdsvis x og y-retningen, A_e er elementets areal, t_e er elementets tykkelse og f er volumenfraktionen. Denne volumenfraktion er en relativ størrelse der definerer hvor meget materiale der må anvendes, den angiver hvor stor en del af designvolumenet der må fyldes op med materiale. Med designvolumenet hentydes der til det volumen hvori der må fordeles materiale.

Materialevolumenet, $V(\rho_e)$, er det volumen der beregnes ud fra ρ_e værdierne i elementerne, det måler altså hvor meget materiale der anvendes i den nuværende iteration.

$$V(\rho_e) = \sum_{e=1}^N A_e \cdot t_e \cdot \rho_e \quad (3-42)$$

Materialevolumenet skal altid være mindre en designvolumenet.

$$V(\rho_e) \leq V^* \quad (3-43)$$

$$V(\rho_e) - V^* \leq 0 \quad (3-44)$$

$$\frac{V(\rho_e)}{V^*} - 1 \leq 0 \quad (3-45)$$

De fulde udtryk for $V(\rho_e)$ og V^* indsættes i ligningen og eftersom alle elementerne har det samme areal og den samme tykkelse, kan A_e og t_e forkortes ud af ligningen,

$$g(\rho_e) = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e}{nelx \cdot nely \cdot f} - 1 \leq 0 \quad (3-46)$$

Udover at kende udtrykket for constrainten har den anvendte optimeringsmetode også brug for dennes følsomhed, som har følgende udtryk.

$$\frac{\partial g(\rho_e)}{\partial \rho_e} = \frac{1}{nelx \cdot nely \cdot f} \leq 0 \quad (3-47)$$

Løsning af optimeringsproblemet

Efter at optimeringsproblemet er stillet op, kan det løses på forskellige måder, der kan anvendes optimalitetskriterier, en sekventiel lineær programmering (SLP), MMA⁴ metoden, eller andre optimeringsmetoder.

I dette program anvendes MMA metoden, som er udviklet af Krister Svanberg. De anvendte noter er (KRS01), (KRS02) og (KRS03).

Det optimeringsproblem der skal løses har følgende form.

$$\begin{aligned} \text{minimer: } & f_0(\rho_e) \\ \text{begrænset til: } & f_i(\rho_e) \leq \bar{f}_i, \quad i=1,2,\dots,m \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq \rho_{\max}, \quad e=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (3-48)$$

Her er m antallet af constraints, n er antallet af designvariable (det svarer til antallet af elementer), $f_0(\rho_e)$ er objektfunktionen som skal minimeres (i dette tilfælde compliancen), \bar{f}_i er constraintens øvre grænse, $f_i(\rho_e)$ er værdien af constrainten evalueret i ρ_e , og ρ_{\min} og ρ_{\max} er de nedre og øvre grænser for designvariablene.

I hver iteration approksimeres funktionerne, $f_0(\rho_e)$ bliver til $\tilde{f}_0^{(k)}(\rho_e)$ og $f_i(\rho_e)$ bliver til $\tilde{f}_i^{(k)}(\rho_e)$ hvor k er iterationsnummeret. Valget af disse approksimeringsfunktioner er baseret på de beregnede funktionsværdier og gradienter. Det betyder at optimeringsproblemet med de approksimerede funktioner kan skrives på følgende måde.

$$\begin{aligned} \text{minimer: } & \tilde{f}_0^{(k)}(\rho_e) \\ \text{begrænset til: } & \tilde{f}_i^{(k)}(\rho_e) \leq \bar{f}_i, \quad i=1,2,\dots,m \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq \rho_{\max}, \quad e=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (3-49)$$

⁴Method of Moving Asymptotes

I MMA metoden bliver de approksimerede funktioner konstrueret ved at funktionerne $f_i(\rho_e)$ lineariseres med variable som har formen $1/(U_j - \rho_j)$ eller $1/(\rho_j - L_j)$ afhængigt af hvilket fortegn gradienterne har når de bliver evalueret i $\rho^{(k)}$. Parametrene U_j og L_j skal opfylde de følgende krav om at $L_j^{(k)} < \rho_j^{(k)} < U_j^{(k)}$, deres værdier ændres fra iteration til iteration og betegnes som "moving asymptotes". Approksimationsfunktionen ser således ud,

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\rho) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_{ij}}{U_j - \rho} + \frac{q_{ij}}{\rho - L_j} \right) + r_i \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} \text{hvis } \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} > 0 \text{ så er: } p_{ij} &= (U_j - \rho_j^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \text{ og } q_{ij} = 0 \\ \text{hvis } \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} < 0 \text{ så er: } q_{ij} &= -(\rho_j^{(k)} - L_j)^2 \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \text{ og } p_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (3-51)$$

Og r_i vælges sådan at $\tilde{f}_i^{(k)}(\rho_e^{(k)}) = f_i^{(k)}(\rho_e^{(k)})$, i den følgende figur vises hvordan MMA metoden virker for et problem med 1 designvariabel.

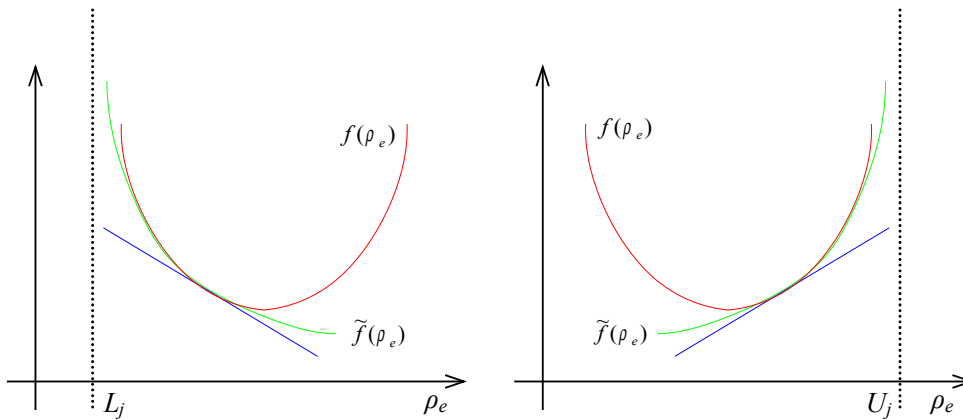


Fig. 3-3: Oversigt af MMA metodens virkemåde.

De asymptotiske punkter L_j og U_j har altid værdier der er forskellige fra 0. Efterhånden som designet nærmer sig det optimale design, kommer asymptoterne tættere på hinanden. Det kan vises at hvis L_j går mod minus uendelig og U_j går mod uendelig, så nærmer MMA approksimationen sig den lineære approksimation som anvendes i SLP metoden.

Anvendelse af MMA metoden

Efterfølgende vil det blive gennemgået hvordan den MATLAB m.fil, der indeholder selve optimeringskoden, virker samt anbefalinger for at opnå bedre resultater.

Matlab udgaven af MMA metoden løser et optimeringsproblem der er opstillet på følgende måde.

$$\begin{aligned} \text{minimer } & f_0(\mathbf{x}) + a_0 \cdot z + \sum_{i=1}^m \left(c_i \cdot y_i + \frac{1}{2} \cdot d_i \cdot y_i^2 \right) \\ \text{begrænset til } & f_i(\mathbf{x}) - a_i \cdot z - y_i \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & z \geq 0 \end{aligned} \quad (3-52)$$

Her er x_j de virkelige designvariable mens y_i og z er såkaldte kunstige designvariable, baggrunden for de kunstige designvariable fremgår når de forskellige optimeringsproblemer som programmet kan løse bliver gennemgået i detaljer. I denne rapport analyseres kun det optimeringsproblem som anvendes til at løse det aktuelle problem, nemlig at minimere compliancen. For yderligere detaljer henvises til (KRS02) og (KRS03).

Det problem der skal løses i denne rapport er følgende.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimer } f_0(\mathbf{x}) \\
 & \text{begrænset til } f_i(\mathbf{x}) \quad i=1,2,\dots,m \\
 & \quad \quad \quad x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j=1,2,\dots,n
 \end{aligned} \tag{3-53}$$

For at reducere (3-52) til (3-53) anbefales følgende: For det første skal $a_0=1$ og $a_i=0$ for alle i , det vil medføre at $z = 0$ for alle optimale løsninger. Alle $d_i = 0$ og c_i skal være store tal, det vil medføre at y_i variableerne bliver meget kostbare og derfor lig med 0 i en optimal løsning, så vil x_j ende op med at blive den optimale løsning.

Praktiske anbefalinger og overvejelser.

Det anbefales at skalere de variable der indgår i constraintfunktionen så de ligger mellem 1 og 100 eller i så tæt på som muligt og ikke har ekstreme værdier som for eksempel 10^{10} . Objektfunktionen skal også skaleres så den ligger mellem 1 og 100. Og for designvariablene anbefales det at de ligger mellem 0.1 og 100. Disse anbefalinger er for at undgå numeriske problemer når Matlab skal løse opgaven.

Angående de store tal for c_i så anbefales det at undgå ekstremt store tal (som 10^{10}), det er bedre at starte med for eksempel $c_i = 1000$ og så verificere om $y_i = 0$ i den optimale løsning. Hvis det ikke er tilfældet så øges c_i værdien og der køres en ny optimering og y_i kontrolleres igen.

3.3 Optimeringsprogrammet

I fig. (3-4) er der et flowchart der i hovedtræk viser hvordan optimeringsprogrammet virker. Selve løsningen af optimeringen kører inde i løkken, de beregninger der udføres før løkken begynder, er baseret på initialdesignet, og er nødvendige fordi MMA metoden skal bruge nogle initialværdier til at starte med.

Ud fra initialværdierne beregner MMA metoden den første iteration (optimeret design), hvorefter compliancen, følsomheden og volumenconstrainten beregnes for dette nye design. Disse værdier er de nye input til MMA metoden som ud fra dem beregner en ny iteration (et nyt design), denne sekvens fortsætter indtil programmet er konvergeret mod en løsning og stopkriteriet er opfyldt.

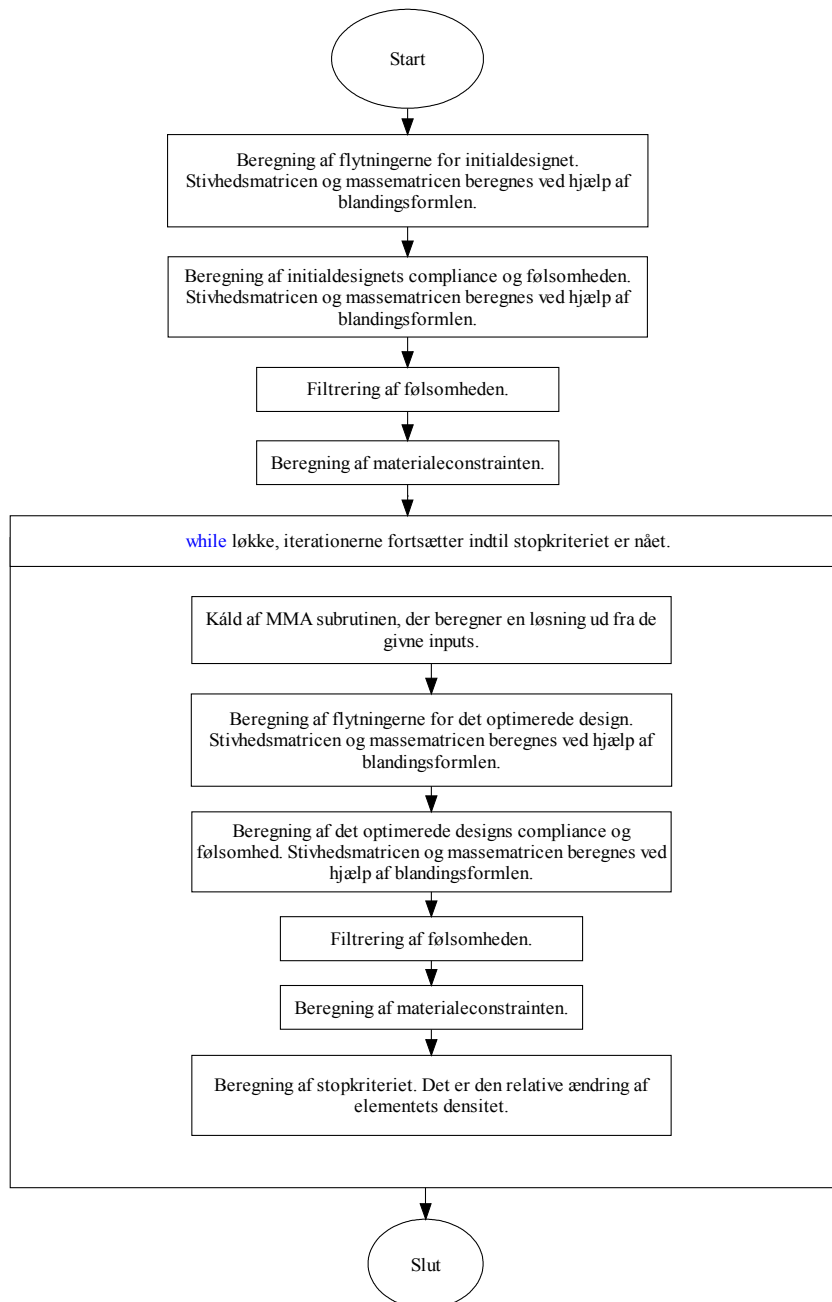


Fig. 3-4: Flowchart over topologioptimeringsprogrammet.

3.3.1 Stopkriterium

Stopkriteriet er den variabel der måler hvornår programmet er konvergeret mod en løsning. I dette program er den defineret som

$$\Delta \epsilon = \max \left| \frac{(\rho_e^k) - (\rho_e^{k-1})}{(\rho_e^k)} \right| \quad (3-54)$$

Hvor (ρ_e^k) er en vektor der indeholder volumendensiteterne for alle elementerne fra den nuværende iteration, og (ρ_e^{k-1}) er en vektor der indeholder volumendensiteterne for alle elementerne fra den forrige iteration. Ligning (3-54) beregner altså den relative ændring i volumendensiteterne i alle elementerne mellem 2 på hinanden følgende iterationer, og udvælger så den største relative ændring. Dette ϵ skal være mindre end en givet værdi for at opfylde stopkriteriet.

$$\boxed{\Delta \epsilon \leq 0.01} \quad (3-55)$$

4 Filtrering

Oversigt: Dette kapitel omhandler de forskellige filtreringsmetoder der anvendes for at løse checkerboard problemet og meshafhængigheden. Oplysninger og metoder der anvendes i dette kapitel er baseret på (SIG01), (SIG04), (GPB01) og (OSP01).

4.1 Checkerboard problemet

En struktur der bliver optimeret som vist i kapitel (3) vil i mange tilfælde ende op med at materialet bliver fordelt i et bestemt mønster kaldet checkerboard⁵. Dette mønster repræsenterer ikke nogen virkelig eller ønskværdig løsning, det viser sig nemlig at når stivheden af et område hvor materialet er fordelt i dette mønster beregnes ved en finite element analyse, så bliver resultatet en stivhed der er større en områdets reelle stivhed.

Denne defekt der opstår under optimeringen skyldes, at Q4 elementet er dårligt til at modellere stivheden netop i områder hvor materialet er fordelt i et checkerboard mønster. For det anvendte element vil stivheden af en gruppe elementer blive modelleret som om det var middelværdien af elementerne der skiftevis har densiteten 0 eller 1, som vist i fig. (4-1) og ligning (4-1).

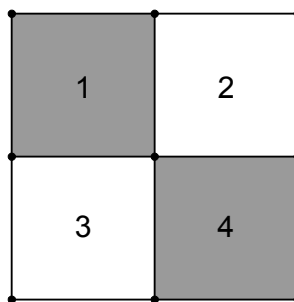


Fig. 4-1: En gruppe af fire Q4 elementer hvor to elementer har densiteten 1 og de to andre, densiteten 0.

Stivheden for den viste gruppe bestående af fire elementer, vil være lig med middelværdien af de forskellige elementers stivhed, side A8 [SIG01]

⁵Checkerboard betyder dambræt på engelsk.

$$E_{gruppe} = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4}$$

$$\begin{array}{l} \text{densiteten } E_1 = E_4 = 1 \\ \text{densiteten } E_2 = E_3 = 0 \end{array} \quad (4-1)$$

$$E_{gruppe} = \frac{1}{2} \cdot E$$

Denne stivhed som checkerboard mønstret viser er kunstigt høj, meget højere end den reelle stivhed. Denne fiktivt høje stivhed forklarer hvorfor denne type mønster ofte forekommer, når der gennemføres en optimering.

4.2 Løsning af checkerboard problemet

En algoritme til at løse checkerboard problemet skal opfylde følgende række krav (SIG01 side 70).

- Den skal være i stand til at fjerne mønstret totalt.
- Den må ikke øge beregningstiden nævneværdig.
- Den skal være simpel at implementere.
- Den må ikke på nogen måde ændre stabiliteten af optimeringsalgoritmen.
- Den skal kunne anvendes på en hvilket som helst geometri.

I litteraturen (OSP01) findes der flere forskellige løsninger på dette problem.

- Smoothing: Når algoritmen er konvergeret til en optimal løsning med checkerboard mønstre, så filtreres løsningsbilledet med en teknik hentet fra billedbehandling. Denne teknik er dog ikke særligt anbefalelsesværdig da den ikke prøver på at løse det underliggende problem, men kun postprocesserer resultatet.
- Højere ordens elementer: Anvendelsen af højere ordens elementer (8 eller 9 knuders) til at beregne flytningerne ser ud til at kunne forebygge checkerboard mønstre. I tilfælde af at den anvendte materialemodel er SIMP modellen, begrænser det dog penaliseringsfaktorens værdi, hvis det skal virke må penaliseringsfaktoren ikke være særlig stor.
- Filtrering: Baseret på en filtreringsteknik som stammer fra billedbehandling. Er den metode der anvendes i denne rapport og der følger en detaljeret beskrivelse af dens virkemåde.

Som nævnt anvendes filtermetoden i dette projekt. Denne teknik kan være afhængig eller uafhængig af mesh størrelsen. Først analyseres den ikke meshuafhængige formulering for at forklare metoden, og derefter udvides denne til den uafhængige algoritme.

4.2.1 Digital filtrering

Optimeringsområdet består af en række firkanter der alle er ens. Designet opstår ved at densiteten af de små firkanter ændres så de antager forskellige værdier. Et optimalt design er et hvor volumendensiteterne kun har 2 mulige værdier, enten 0^6 eller 1.

⁶I programmet findes værdien 0 ikke, densiteten har derimod en meget lav værdi (0.001) men i dette kapitel omtales denne lave værdi som 0.

Det at overfladen er inddelt i en række små, ens firkanter er meget lig et digitalt fotografi der også består af en masse små pixels. Denne filtrering går derfor ud på at anvende nogle af de tekniker der bruges til billedbehandling, i dette tilfælde er det en metode baseret på konvolution der anvendes.

Teknikken illustreres nemmest ved at vise et eksempel.

Eksempel på filtrering af en matrice

Et billede, eller en overflade der skal optimeres, kan modelleres ved hjælp af en matrice hvor hver enkelt indgang i matricen er densiteten på det element der ville ligge i den givne position, som er defineret ud fra søjle og række numrene i matricen.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Finite element diskretisering. Matrice der modellerer elementerne fra finite element diskretiseringen.

Som det kan ses, svarer indgang a_{11} i matricen til element a, indgang a_{12} i matricen til element b og så videre. Hvert element har sin volumendensitet og sin følsomhed, i dette kapitel er det følsomheden der er interessant, så matricen består af elementernes følsomheder.

Følsomheden filtreres ved hjælp af et konvolutionsfilter (PWK01) som har følgende udtryk.

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{b+2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Ligning (4-2) er den \mathbf{H} matrice der anvendes til at gennemføre konvolutionsfiltreringen af matricen. Proceduren er at 3x3 matricen lægges ned over hver element som en stencil, så elementets værdi ændres som et resultat af dets egen værdi og de omkringliggende 8 værdier. De forskellige celler vægtes ud fra \mathbf{H} matricens værdier.

Det er værd at bemærke at summen af matrices indgange er lig med den *const.* i (4-3) som resultatet bliver divideret med, de værdier der bruges til vægte de forskellige celler kan altså ikke ændre summen af matricen.

$$const. = \left(\frac{1}{b+2} \right)^2 \quad (4-3)$$

$$\sum \mathbf{H} = b^2 + 4 \cdot b + 4 = (b+2)^2 \quad (4-4)$$

I de viste ligninger indgår konstanten b , denne faktor bestemmer hvor hård der filtreres. Hvis værdien for b bliver meget stor er der kun en meget lille ændring i resultatmatricen, for mindre værdier er den med til at bestemme hvor meget de omkringliggende værdier skal vægtes når de indgår i middelsommen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Initialmatrice som bliver filtreret i de følgende eksempler.

Denne matrice bliver filtreret ved hjælp af det omtalte konvolutionsfilter hvor $b = 2$ og resultatet er følgende,

$$\begin{vmatrix} 0,56 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,44 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,44 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,56 \end{vmatrix}$$

Matrice efter filtrering.

Angående resultatet er der et problem at være opmærksom på. I de 4 hjørner er resultatet ikke de forventede 0.5, de afviger lidt fra dette resultat. Dette skyldes, at i hjørnerne og langs med kanterne har stencilen ikke alle de nødvendige værdier at arbejde med. Stencilen er jo opbygget ud fra den betragtning at der er 8 naboceller som skal indgå i ligningen, dette er ikke tilfældet langs kanten og i hjørnerne.

I det følgende udtryk opstilles ligning (4-2) for en celle, svarende til søjle 2 og række 2.

$$(2,2) = \left(\frac{1}{b+2}\right)^2 \cdot (1 \cdot 1 + b \cdot 0 + 1 \cdot 1 + b \cdot 0 + b^2 \cdot 1 + b \cdot 0 + 1 \cdot 1 + b \cdot 0 + 1 \cdot 1) \quad (4-5)$$

$$b=2 \quad (4-6)$$

Resultatet af ligning (4-5), når b sættes lig med 2, bliver 0.5. I det program der er anvendt til at filtrere matricen er der taget højde for, at stencilen ser anderledes ud langs med kanten og i hjørnerne. Konvolutionsmatricen, H , er ændret til følgende.

$$H = \frac{1}{b^2 + 3 \cdot b + 2} \cdot \begin{bmatrix} b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

$$H = \frac{1}{b^2 + 2 \cdot b + 1} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & b \\ b & 1 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

I formel (4-7) vises hvordan beregningerne udføres langs med den øverste kant, og i formel (4-8) vises hvordan beregningerne udføres i hjørnet øverst til venstre (søjle 1 og række 1).

Numeriske eksempler

For at vise resultatet af filtreringen vil nogle eksempler med og uden anvendelse af filtrering blive gennemgået.

Det eksempel der regnes på er en simpel understøttet bjælke, som er belastet midtpå med en koncentreret kraft der virker i nedadgående retning, det er den klassiske MBB bjælke.

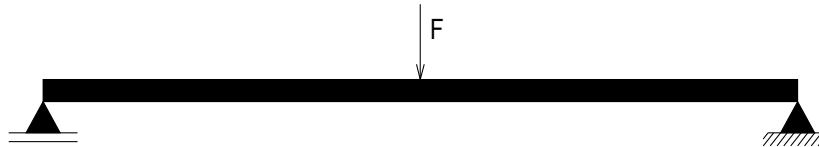


Fig. 4-2: Bjælken og dens belastning

For at formindske den nødvendige regnekraft udnyttes symmetrien i bjælken, så der optimeres kun på halvdelen af bjælken, fig. (4-3).



Fig. 4-3: Opstilling for at udnytte symmetrien i bjælken

I tabel (4-1) vises de konstanter der anvendes til de efterfølgende eksempler.

Konstanter	Værdier	Definition
E	208 GPa	E modul
γ	7850 kg/m ³	Massefylde
lx	60 m	Længde i x-retningen
ly	30 m	Længde i y-retningen
t	0.1 m	Q4 elementets tykkelse
nelx	60	Antal elementer i x-retningen.
nely	30	Antal elementer i y-retningen.

Tabel 4-1: Oversigt over værdier der er anvendt under optimering af de følgende eksempler.

Først optimeres bjælken uden nogen form for filtrering, og resultatet ses i fig. (4-4).



Fig. 4-4: Optimering uden nogen form for filtrering.

Resultatet af optimeringen viser tydeligt checkerboard mønstret. Resultatet kan ikke bruges til nogen form for design, ud fra det opnåede mønster er det ikke muligt at opstille en struktur og stivheden i de områder med checkerboard mønstre vil være misvisende.

I fig. (4-5) vises resultatet fra en optimering, denne gang med filtreringen slået til.

Som det kan ses er resultatet en klart defineret struktur. Ud fra det opnåede mønster er det muligt at komme med et godt bud på, hvordan det optimerede design ser ud.



Fig. 4-5: Optimeret bjælke hvor der er anvendt filtrering og med en b værdi på 2.

Resultatet i fig. (4-5) er opnået med $b=2$ og et af problemerne med dette filter er at resultatet vil variere afhængigt af hvilken værdi b har. De 2 næste figurer viser resultater med andre b værdier.



Fig. 4-6: Optimeret bjælke hvor der er anvendt filtrering og med en b værdi på 5.



Fig. 4-7: Optimeret bjælke hvor der er anvendt filtrering og med en b værdi på 10.

Ud fra de foregående 3 figurer fremgår det klart at resultatet, som nævnt før, er afhængigt af hvilken b værdi der vælges. Det er netop det problem denne filtreringsmetode har, resultatet er betinget af den valgte b værdi og selv om det ikke er vist her så vil resultatet også være afhængig af meshstørrelsen. I næste sektion undersøges en metode der løser de nævnte problemer.

4.2.2 Meshuafhængigt filter eller traditionelt følsomhedsfilter

Ud fra de 3 figurer med resultater for forskellige b værdier, er konklusionen, at med faldende værdier for b bliver det resulterende design mere robust (strukturelementerne bliver tykkere).

Det filter som har været anvendt indtil nu var baseret på at størrelsen på konvolutionsfilteret, \mathbf{H} , var fastholdt til en 3x3 matrice. Det filter kan ændres så det omfatter et område som bliver bestemt af filterradien r_{min} . denne radius indgår ikke explicit i ligning (4-9), men det bestemmer hvor mange elementer der skal indgå i filtreringen. Den definerer også en nedre grænse for hvor små ændringer i strukturen der er tilladt. Dette er det traditionelle følsomhedsfilter som kan ses i følgende ligning.

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \rho_i} \cdot \omega(\mathbf{x}_i) \cdot \rho_i}{\rho_e \cdot \sum_{i=1}^N \omega(\mathbf{x}_i)} \quad (4-9)$$

I denne ligning er F objektfunktionen, N er de elementer der ligger tæt på det analyserede element, ρ_e er volumendensiteten i det element som er ved at blive filtreret, ρ_i er volumendensiteterne i de elementer som ligger indenfor filterradien og $\omega(\mathbf{x}_i)$ er vægtfunktionen.

Vægtfunktionen bestemmer hvor stor indflydelse de forskellige elementer har, alt efter hvor stor afstanden er til det centrale element.

$$\omega(\mathbf{x}_i) = r_{min} - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\| \quad (4-10)$$

Her er $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\|$ afstanden mellem det centrale element og de omkringliggende elementer, så vægtfunktionen har altså forskellige værdier alt efter hvor stor r_{min} er defineret og afstanden mellem de forskellige elementer. Dette er en ny måde at vægte de forskellige indgange i stencilen på. Stencilen er ikke længere lagt fast på en 3x3 matrice, men kan nu variere ud fra den værdi r_{min} har.

Numeriske eksempler

For at se virkningen af dette filter gennemregnes eksemplet fra før med der nye filter, resultatet vises i fig. (4-8). De anvendte parametre er de samme som vist i tabel (4-1), samt $r_{min} = 1.5$.

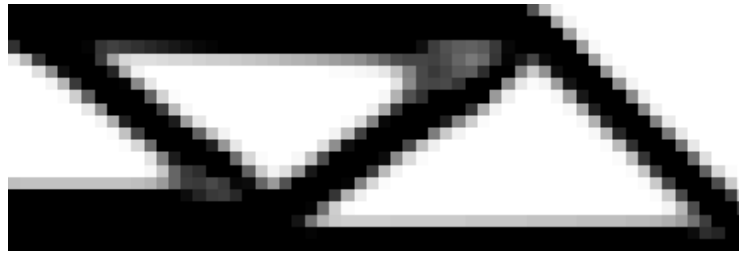


Fig. 4-8: Optimeret bjælke hvor der er anvendt det meshuafhængige filter

Den resulterende geometri er mere ren i snittet end de foregående resultater, dvs. strukturen er mere enkel med færre "stænger" og betydelig nemmere at fremstille, r_{min} bestemmer hvor tynde "stængerne" kan blive.

4.2.3 Mean sensitivity filter

Det er også muligt at se bort fra den vægtning ud fra afstanden til de forskellige elementer, som anvendes i det traditionelle følsomhedsfilter. I dette nye filter ændres følsomheden til en middelværdi som beregnes ud fra de omkringliggende elementer. Dette filter anvendes til optimering af plader.

$$\frac{\overline{\partial F}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \rho_i}}{\sum_{i=1}^N 1} \quad (4-11)$$

Der er i princippet ikke nogen form for filterradius i denne ligning, men i programmet er det sat op på en måde så det er muligt at vælge forskellige filterradier. Denne filterradius bestemmer hvor mange elementer der skal tages med i midlingen. I fig. (4-9) er der vist et eksempel, det element som er ved at blive filtreret er nummer 1. Hvis filterradien er 1, indgår elementerne med tallet 1 og 2 i filtreringen, hvis filterradiusen er 2, indgår elementerne med tallet 1, 2 og 3 i filtreringen. Det er altså muligt, ved at variere filterradien at ændre den længdeskala som bestemmer den nedre grænse for ændringer i strukturen, på samme måde som i det forrige filter.

3	3	3	3	3
3	2	2	2	3
3	2	1	2	3
3	2	2	2	3
3	3	3	3	3

Fig. 4-9: Skematisk fremstilling af elementerne i et mean sensitivity filter

Ved at justere filterradiusen bliver algoritmen meshuafhængig, i hvert fald i en vis grad da radiusen i dette filter varierer stepvis (1, 2, ...), hvilket betyder at det nogle gange kan være nødvendigt at prøve sig lidt frem med forskellige filterradier og små ændringer i antallet af elementer.

Det er mean sensitivity filteret det bruges til pladeoptimeringen. Det er fordi det giver nogle lidt mere diskrete resultater end det er tilfældet når filteret er det traditionelle følsomheds filter.

For bedre at kunne sammenligne de 2 filtre defineres der et mål for hvor diskret (dvs. hvor sort-hvidt) et design er.

$$discret = \frac{\sum_{e=1}^N 4 \cdot \rho_e \cdot (1 - \rho_e)}{N} \cdot 100 \quad (4-12)$$

Her er N antallet af elementer og ρ_e er volumendensiteten. Hvis et design er fuldstændigt diskret, dvs. at der ikke er elementer med mellemliggende densiteter, så er $discret = 0 \%$, og hvis designet er fuldstændig gråt, dvs. alle elementernes densiteter er 0.5, så er $discret = 100 \%$. Det kan altså bruges som et mål for diskret et design er.

Sammenligning af 2 følsomhedsfiltre.

For at finde ud af, hvilket af de 2 filtre der giver det mest diskrete design udføres en optimering på en plade med de 2 forskellige filtre, hvorefter diskretiseringsgraden beregnes og sammenlignes.

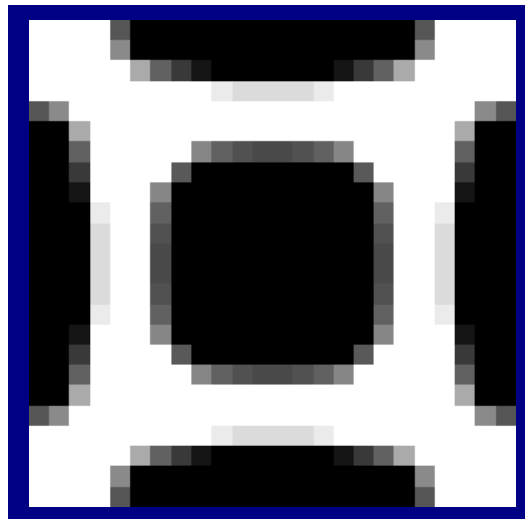


Fig. 4-10: Optimeret design for en plade filtreret med et mean sensitivity filter.

I fig. (4-10) vises et optimeret design for en fast indspændt plade belastet med en jævnt fordelt statisk belastning, den blå kant viser hvor pladen er indspændt. Dette design er filtreret med et mean sensitivity filter.

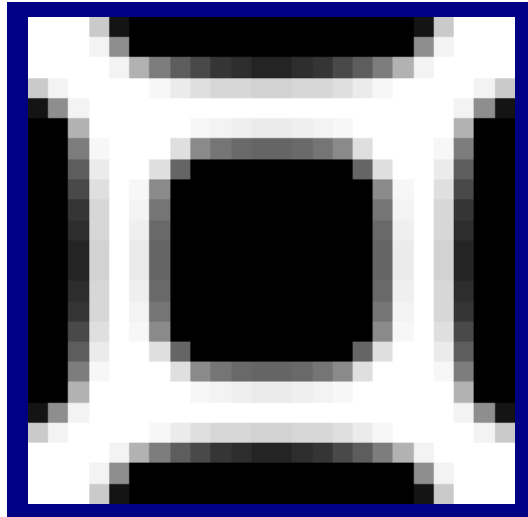


Fig. 4-11: Optimeret design for en plade filtreret med det traditionelle følsomhedsfilter.

I fig. (4-11) vises et optimeret design for en fast indspændt plade belastet med en jævnt fordelt statisk belastning, den blå kant viser hvor pladen er indspændt. Dette design er filtreret med det traditionelle følsomhedsfilter.

	Traditionel følsomhedsfilter	Mean sensitivity filter
Diskretiseringsgrad	22.63 %	14.27 %

Tabel 4-2: Diskretiseringsgrader

Som det kan ses i tabel (4-2), giver mean sensitivity filteret et mere diskret resultat, det passer også med resultaterne fra (SIG04) hvor dette filter også giver mere diskrete resultater. Derfor anvendes mean sensitivity filteret til at optimere pladestrukturer. Det traditionelle følsomhedsfilter bruges dog i forbindelse med optimeringen af et 2D problem fordi programmet på det tidspunkt var under udvikling og det var kun det traditionelle følsomhedsfilter, der var færdig til brug.

5 Dynamisk optimering i 2D

Oversigt: Dette kapitel omfatter topologioptimering af en struktur som er udsat for en dynamisk belastning. Dette kapitel bygger blandt andre på (NOL01), (JOG01) og (SIG02). Det omfatter kun et 2D problem, men teorien er den samme som den der anvendes til pladeproblemet.

5.1 Formulering af problemet

I dette kapitel udvides optimeringen fra statiske problemer til også at omfatte dynamiske problemer. Med dynamisk menes, at en struktur bliver belastet med en harmonisk varierende belastning af typen

$$P_{har} = P \cdot \cos(\omega_p \cdot t) \quad (5-1)$$

hvor ω_p er den påtrykte excitationens frekvens og P er belastningsamplituden. Beregningerne udføres med et finite element program så ligningerne for svingningsproblemet bliver skrevet op på matriceligning form, så de er klar til brug. Differentialligningen for et problem med en harmonisk varierende belastning har følgende form

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \cdot \cos(\omega_p \cdot t) \quad (5-2)$$

I denne ligning er \mathbf{M} massematricen, \mathbf{C} dæmpningsmatricen, \mathbf{K} stivhedsmatricen, \mathbf{u} er en vektor der indeholder flytningsamplituderne og \mathbf{P} er en vektor der indeholder belastningsamplituderne. Hvis det antages at løsningen er $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_r + i \cdot \mathbf{x}_i) \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t}$ og \mathbf{u} er den reelle del af \mathbf{x} , så er udtrykkene for flytning, hastighed og acceleration følgende,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} \\ \dot{\mathbf{u}} &= i \cdot \omega_p \cdot \mathbf{x} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -\omega_p^2 \cdot \mathbf{x} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} \end{aligned} \quad (5-3)$$

Og belastningen kan skrives på følgende måde,

$$\mathbf{P} \cdot \cos(\omega_p \cdot t) = \mathbf{P} e^{i \cdot \omega_p \cdot t} \quad (5-4)$$

Hvis de viste udtryk indsættes ind i ligning (5-2), fås

$$-\omega_p^2 (\mathbf{x}_r + i \cdot \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{M} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} + i \cdot \omega_p (\mathbf{x}_r + i \cdot \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{C} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} + (\mathbf{x}_r + i \cdot \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{K} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} = \mathbf{P} \cdot e^{i \cdot \omega_p \cdot t} \quad (5-5)$$

Hvis $e^{i \cdot \omega_p \cdot t}$ forkortes væk, kan ligningen omskrives til

$$(\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M} + i \cdot \omega_p \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{x}_r + i \cdot \mathbf{x}_i) = \mathbf{P} \quad (5-6)$$

Herefter opdeles udtrykket i den reelle og den imaginære del.

$$(\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{x}_r - \omega_p \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{P} \quad (5-7)$$

$$\omega_p \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_r + (\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{x}_i = 0 \quad (5-8)$$

Det antages at dæmpningen er 0 så den imaginære del, ligning (5-8), falder bort og ligning (5-7) reduceres til

$$(\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (5-9)$$

Ud fra ligning (5-9) kan flytningsamplituderne for det dynamiske tilfælde beregnes. Ligning (5-9) minder meget om standard udtrykket for statiske beregninger med elementmetoden, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P}$. Det er derfor muligt at definere en dynamisk stivhedsmatrice $\mathbf{K}_d = (\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M})$ som bruges når flytningsamplituderne skal beregnes.

Objektfunktionen

Opgaven går ud på at maksimere den dynamiske stivhed dvs. minimere den dynamiske compliance, som er defineret analogt med den statiske compliance til at være lig med det skalære produkt af kræfterne og flytningsamplituderne. I tilfældet med den statiske compliance var objektfunktionen simpelthen compliancen, der var ikke nogen risiko for at objektfunktionen kunne gå hen og blive negativ.

Den dynamiske stivhedsmatrice, \mathbf{K}_d , kan godt blive negativ definit når excitationens frekvens øges. Når den første resonansfrekvens passerer, bliver compliancen negativ.

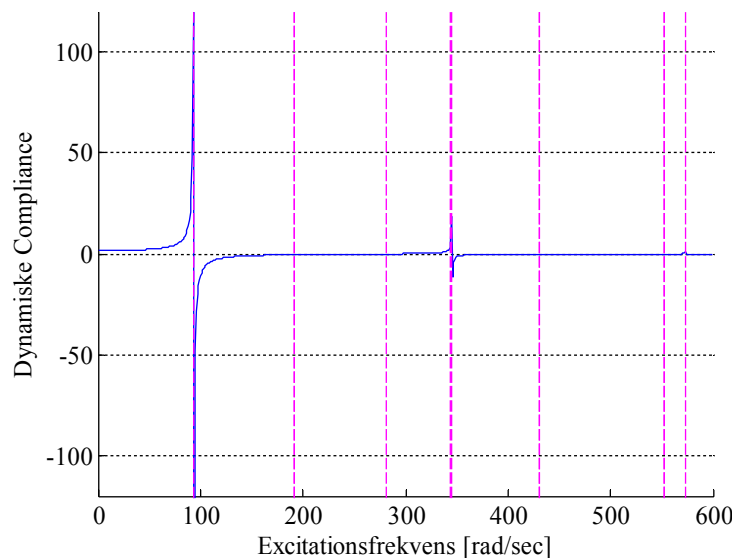


Fig. 5-1: Plot af den dynamiske compliance som funktion af excitationens frekvens

I fig (5-1) er det vist hvordan den dynamiske compliance varierer, når excitationens frekvens ændres. Den blå kurve er den dynamiske compliance og de lodrette røde streger er egenfrekvenserne for den analyserede struktur, det er ikke alle egenfrekvenser der bliver slået an så det er vigtigt at skelne mellem resonansfrekvenser og egenfrekvenser. Ved $\omega_p = 93.5$ rad/sec er der en egenfrekvens der også er en resonansfrekvens og ved $\omega_p = 191.1$ rad/sec er der en egenfrekvens som ikke er en resonansfrekvens.

For at undgå problemet med at objektfunktionen bliver negativ, defineres den ved sin numeriske værdi, og for sikre at den er differentiabel, ophæves den i anden potens.

$$F = (|\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}|)^2 \quad (5-10)$$

I denne ligning er F objektfunktionen, \mathbf{P} er den globale belastningsvektor og \mathbf{U} er den globale flytningsvektor. Det er ikke nødvendigt at bibeholde den numeriske værdi i ligningen eftersom den er ophævet i anden potens og ikke kan blive negativ.

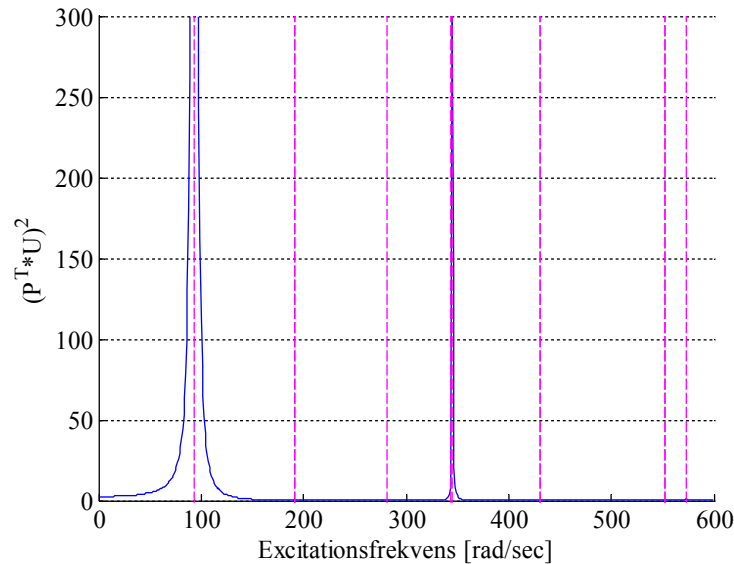


Fig. 5-2: Objektfunktionen som funktion af excitationsfrekvensen

Fig. (5-2) svarer til fig. (5-1) efter at compliancen er ophævet i anden potens. Funktionens minimum svarer nu til de steder, hvor compliancens amplitude også er minimal, den er faktisk 0 de steder hvor compliancen skærer x-aksen i fig. (5-1).

Efter objektfunktionen er kendt, kan optimeringsproblemet opstilles.

$$\begin{aligned} \min : F &= (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U})^2 \\ \text{begrænset til : } &(\mathbf{K} - \omega_p^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \\ &\frac{V(\rho_e)}{V^*} - 1 \leq 0 \\ &0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \end{aligned} \quad (5-11)$$

Her er \mathbf{K} den globale stivhedsmatrice, \mathbf{M} er den globale massematrice, $V(\rho_e)$ er materialevolumenet og V^* er designvolumenet, ρ_e er volumendensiteten som er designvariablen og ρ_{\min} er den nedre grænse for designvariablen.

Der er 3 constraints, men når programmet opstilles er det ikke nødvendigt at constrainten $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_d = \mathbf{P}$ ligger ind i programmet. Denne ligning anvendes når flytningerne beregnes, og er derfor implicit opfyldt.

Den form objektfunktionen har i ligning (5-10) er dog ikke den mest hensigtsmæssige når den skal skrives ind i programmet, derfor omskrives den på følgende måde.

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K} - \omega_p \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U} \quad (5-12)$$

Udtrykket for P indsættes i ligning (5-10),

$$F = (\mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{K} - \omega_p^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U})^2 \quad (5-13)$$

Den dynamiske stivhedsmatrice indsættes,

$$F = (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{U})^2 \quad (5-14)$$

Ligningen ændres til følgende udtryk hvor \mathbf{u}_e er den lokale flytningsvektor, \mathbf{k}_{de} er den lokale dynamiske stivhedsmatrice og N er antallet af elementer.

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_{de} \cdot \mathbf{u}_e \quad (5-15)$$

$$\mathbf{k}_{de} = \mathbf{k}_e - \omega_p^2 \cdot \mathbf{m}_e \quad (5-16)$$

Materialemodellen er den samme SIMP model som kendes fra den statiske optimering.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{m}_e &= \rho_e^q \cdot \mathbf{m}_0 \end{aligned} \quad (5-17)$$

I denne ligning er \mathbf{k}_0 den lokale stivhedsmatrice og \mathbf{m}_0 den lokale massematrice for et element, p er penaliseringsfaktoren for stivhedsmatricen og q er penaliseringsfaktoren for massematricen. For disse penaliseringsfaktorer gælder det altid at $p \geq 1$ og $q \geq 1$. Det fulde udtryk for den dynamiske stivhedsmatrice bliver som følger.

$$\mathbf{k}_{de} = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0 - \omega_p^2 \cdot \rho_e^q \cdot \mathbf{m}_0 \quad (5-18)$$

Det fører frem til objektfunktionens endelige form.

$$F = \left[\sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot (\rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0 - \omega_p^2 \cdot \rho_e^q \cdot \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u}_e \right]^2 \quad (5-19)$$

Ligning (5-19) viser den form, objektfunktionen har i programmet.

5.2 Følsomhedsanalyse

Under optimeringen er det nødvendigt at kende gradienten af objektfunktionen. Det er allerede gennemført for det statiske tilfælde og eftersom objektfunktionen er lidt anderledes, skal den udledes her.

$$F = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U})^2 \quad (5-20)$$

Den afledte af objektfunktionen har følgende udtryk,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \right) \quad (5-21)$$

Som det var tilfældet med den statiske compliance, så er det igen den afledte af flytningerne der er beregningstunge. Dette problem løses ved hjælp af adjoint metoden (TDM01), i denne metode opstilles et adjoint problem hvor den afledte af flytningerne ikke indgår.

Til at starte med opstilles udtrykket for objektfunktionen og ligevægtsligningen.

$$F = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U})^2 \quad \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (5-22)$$

Ved hjælp af Lagrange's multiplikator metode adderes ligevægtsligningen multipliceret med λ^T til objektfunktionen.

$$F = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U})^2 - \lambda^T \cdot (\mathbf{K}_d \cdot \mathbf{U} - \mathbf{P}) \quad (5-23)$$

Det er værd at bemærke at compliancen ikke ændres, da udtrykket i parenteser er 0. Ligningen differentieres partielt,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \right) - \frac{\partial \lambda^T}{\partial \rho_e} \cdot \underbrace{(\mathbf{K}_d \cdot \mathbf{U} - \mathbf{P})}_0 - \lambda^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \right) \quad (5-24)$$

dvs.,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - \lambda^T \cdot \mathbf{K}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (5-25)$$

De led der indeholder den afledte af \mathbf{U} samles,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = (2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}^T - \lambda^T \cdot \mathbf{K}_d) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} + \left(2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{U} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (5-26)$$

Det er nu muligt at identificere adjoint problemet. Ligning (5-26) får følgende udtryk,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (5-27)$$

Og adjoint problemet får formen

$$2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}^T - \lambda^T \cdot \mathbf{K}_d = 0 \quad (5-28)$$

Der ganges \mathbf{U} på fra højre,

$$2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} - \lambda^T \cdot \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5-29)$$

Ligningen omskrives til,

$$2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T - \lambda^T = 0 \quad (5-30)$$

$$\lambda^T = 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T \quad (5-31)$$

Ligning (5-31) indsættes i (5-27).

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (5-32)$$

som ændres til

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \right) \quad (5-33)$$

Og eftersom

$$\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} \quad (5-34)$$

Herefter kan ligning (5-33) skrives som

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \left(2 \cdot \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} - \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} \right) \quad (5-35)$$

der er det fulde udtryk for objektfunktionens følsomhed, når strukturen er udsat for dynamiske belastninger. Eftersom det antages at belastningen er uafhængig af strukturens geometri, kan ligning (5-35) reduceres yderligere, samtidig med at den afledte af \mathbf{K}_d erstattes med sit fulde udtryk.

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = -2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \left(\mathbf{U}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} - \omega_p^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{U} \right) \quad (5-36)$$

Denne ligning kan skrives som

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = -2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \sum_{\dot{e}=1}^N \left(\mathbf{u}_{\dot{e}}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{k}_{\dot{e}}}{\partial \rho_e} - \omega_p^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{\dot{e}}}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{u}_{\dot{e}} \right) \quad (5-37)$$

Her hentyder \dot{e} til at elementet og densiteten hører sammen, dvs. at den afledede i forhold til de elementer der ikke indeholder den relative densitet, der differentieres med hensyn til, alle vil være 0. Summationstegnet kan altså fjernes, fordi elementstivhedsmatricen $\mathbf{k}_{\dot{e}}$ og elementmassematricen $\mathbf{m}_{\dot{e}}$ kun afhænger af den valgte volumendensitet, som F differentieres partielt med hensyn til, for det element \dot{e} , for hvilket $\dot{e} = e$. Ligning (5-37) kan altså skrives.

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = -2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \left(\mathbf{u}_e^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial \rho_e} - \omega_p^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_e}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{u}_e \right) \quad (5-38)$$

I den viste ligning er \mathbf{U} og \mathbf{P} globale vektorer og matricer, \mathbf{k}_e og \mathbf{m}_e er lokale stivheds- og massematricer og \mathbf{u}_e er den lokale flytningsvektor. De lokale stivheds- og massematricer, \mathbf{k}_e og \mathbf{m}_e , er et resultat af SIMP modellen og repræsenterer et fiktivt materiale, derimod er \mathbf{k}_0 og \mathbf{m}_0 , stivheds- og massematricerne for det virkelige materiale, som konstruktionen skal fremstilles af.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0, & \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial \rho_e} &= p \cdot \rho_e^{p-1} \cdot \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{m}_e &= \rho_e^q \cdot \mathbf{m}_0, & \frac{\partial \mathbf{m}_e}{\partial \rho_e} &= q \cdot \rho_e^{q-1} \cdot \mathbf{m}_0 \end{aligned} \quad (5-39)$$

Herefter bliver de endelige udtryk for følsomheden og compliance, C , som de anvendes i programmet, følgende:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = -2 \cdot C \cdot \left[\mathbf{u}_e^T \cdot \left(p \cdot \rho_e^{p-1} \cdot \mathbf{k}_0 - \omega_p^2 \cdot q \cdot \rho_e^{q-1} \cdot \mathbf{m}_0 \right) \cdot \mathbf{u}_e \right]} \quad (5-40)$$

$$C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot \left(\rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0 - \omega_p^2 \cdot \rho_e^q \cdot \mathbf{m}_0 \right) \cdot \mathbf{u}_e \quad (5-41)$$

I (5-40) differentieres partielt mht. ρ_e for hvert enkelt element, så resultatet bliver en vektor med alle følsomhederne.

5.3 Materialemodel

Materialemodellen er den samme SIMP model som fra den statiske optimering. Der anvendes også den samme filtreringsteknik for at undgå, at der opstår checkerboard mønstre.

$$\mathbf{k}_e = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_0 \quad (5-42)$$

$$\mathbf{m}_e = \rho_e^q \cdot \mathbf{m}_0 \quad (5-43)$$

Den eneste forskel er, at der også er en model for interpolation af massen. Den relative densitet er, når den ganges på \mathbf{m}_0 , ophævet i potensen q . Denne potens q sættes i de fleste tilfælde til værdien 1, dette kan dog variere noget, se (5-44).

5.3.1 Lokaliserede vibrationsmodes

Ved at anvende de før nævnte værdier for q og p ($q = 1$ og $p = 3$), kan der opstå visse problemer (NOL01 side 3).

Når opgaven går ud på at topologioptimere en struktur og belastningens excitationer er meget lav, så er der fare for, at der opstår nogle falske lokaliserede vibrationsmodes. De vil opstå i områder hvor materialedensiteten er lav ($\rho_e < 0.1$) og altså forholdet mellem stivheden og massen er meget lille. På grund af penaliseringen bliver stivheden næsten ubetydelig mens massen stadigvæk har en væsentlig indflydelse.

For at undgå dette, øges penaliseringen af massen i områder med lav densitet og ligning (5-43) omskrives til følgende udtryk,

$$\mathbf{m}_e = \begin{cases} \rho_e^{q_1} \cdot \mathbf{m}_0, & (\rho_e > 0.1) \Rightarrow q_1 = 1 \\ \rho_e^{q_2} \cdot \mathbf{m}_0, & (\rho_e \leq 0.1) \Rightarrow q_2 = 6 \end{cases} \quad (5-44)$$

Værdien for q for lave densiteter er sat til 6, som har vist sig at give gode resultater. Det er også den værdi, der er anvendt i programmet.

Ligning (5-44) har dog det problem at den er diskontinuert ved tærskelværdien $\rho_e = 0.1$. Set fra et numerisk synspunkt er det ikke alvorligt, da beregningerne udføres i enkelte punkter.

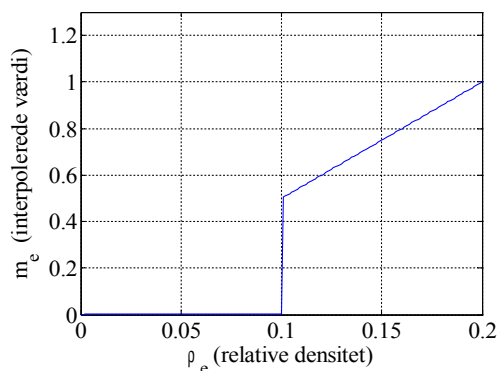


Fig. 5-3: Plot der viser diskontinuiteten i interpolationen med ligning (5-44).

Set fra et teoretisk synspunkt så er det muligt at forbedre ligning (5-44) ved at opstille en interpolationsfunktion der er kontinuert for alle værdier af ρ_e . En model der er C_0 kontinuert vil have følgende udtryk.

$$\mathbf{m}_e = \begin{cases} \rho_e^{q_1} \cdot \mathbf{m}_0, & (\rho_e > 0.1) \Rightarrow q_1 = 1 \\ c_0 \cdot \rho_e^{q_2} \cdot \mathbf{m}_0, & (\rho_e \leq 0.1) \Rightarrow q_2 = 6 \end{cases} \quad (5-45)$$

Hvor $c_0 = 10^5$ sikrer C_0 kontinuitet ved tærskelværdien $\rho_e = 0.1$.

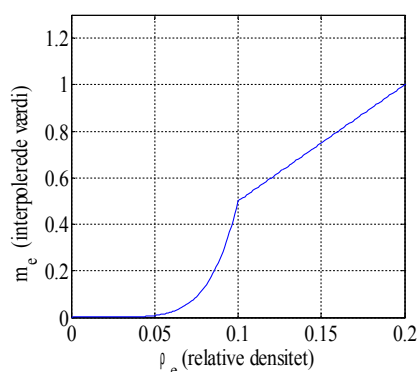


Fig. 5-4: Plot der viser en C_0 kontinuert interpolation.

Hvis der ønskes at interpolationen også skal være C_1 kontinuert kan der opstilles en ny funktion som har følgende udtryk.

$$\mathbf{m}_e = \begin{cases} \rho_e^{q_1} \cdot \mathbf{m}_0, & (\rho_e > 0.1) \Rightarrow q_1 = 1 \\ (c_1 \cdot \rho_e^{q_2} + \beta \cdot \rho_e^7) \cdot \mathbf{m}_0, & (\rho_e \leq 0.1) \Rightarrow q_2 = 6 \end{cases} \quad (5-46)$$

Hvor $c_1 = 6 \times 10^5$ og $\beta = -5 \times 10^6$ for at garantere C_1 kontinuitet ved tærskelværdien $\rho_e = 0.1$.

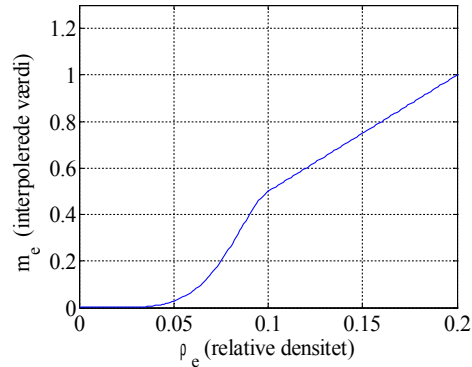


Fig. 5-5: Plot der viser en $C1$ kontinuert interpolationsfunktion.

Testresultater for de 3 forskellige interpolationsmodeller viser, at de optimerede designs ligger meget nær hinanden. Det hænger sammen med, at områder med meget lav densitet har en meget lille indflydelse på den dynamiske compliance. Derudover konvergerer designet mod en 0 - 1 løsning som ikke indeholder mellemliggende værdier for ρ_e . Det har altså en meget begrænset indflydelse om det er den ene eller den anden interpolationsmodel der vælges. I programmet anvendes modellen fra ligning (5-44), som kræver færre beregninger end de andre.

5.4 Optimeringsmetoder

Optimering af en struktur hvor belastningen er dynamisk, er ikke helt så ligetil som det tilsvarende problem med statisk belastning. Under visse betingelser⁷ kan der ske, at den dynamiske compliance bliver minimeret, mens den statiske compliance øges. Hvis der ikke tages forholdsregler for at undgå dette, kan den statiske compliance blive meget stor. Strukturen har altså næsten ingen stivhed når den bliver belastet med en normal statisk last. Det er ikke ønskværdigt, og bør undgås.

Der findes to metoder til at undgå det nævnte problem: kontinuationsmetoden og constraintmetoden.

5.4.1 Kontinuationsmetoden

Denne metode går ud på at optimere strukturen for en frekvens der ligger under initialdesignets laveste resonansfrekvens. Når der er opnået et optimalt design for den givne frekvens, øges excitationens frekvens med et step af en forudbestemt størrelse. Derefter starter optimeringen igen med den nye frekvens og sådan fortsætter processen indtil den ønskede excitationens frekvens er opnået. Processen er vist i fig. (5-6).

På denne måde skubbes den laveste resonansfrekvens opad. Det er ikke alle egenfrekvenser der bliver exciteret så det er vigtigt at skelne mellem resonansfrekvenser og egenfrekvenser. Denne metode har størst indflydelse på resonansfrekvenserne som bliver flyttet, det ændrer selvfølgelig også på egenfrekvenserne, men det er ikke hovedformålet med metoden.

⁷ Det sker når optimeringen startes med en værdi der ligger over de laveste egenfrekvenser.

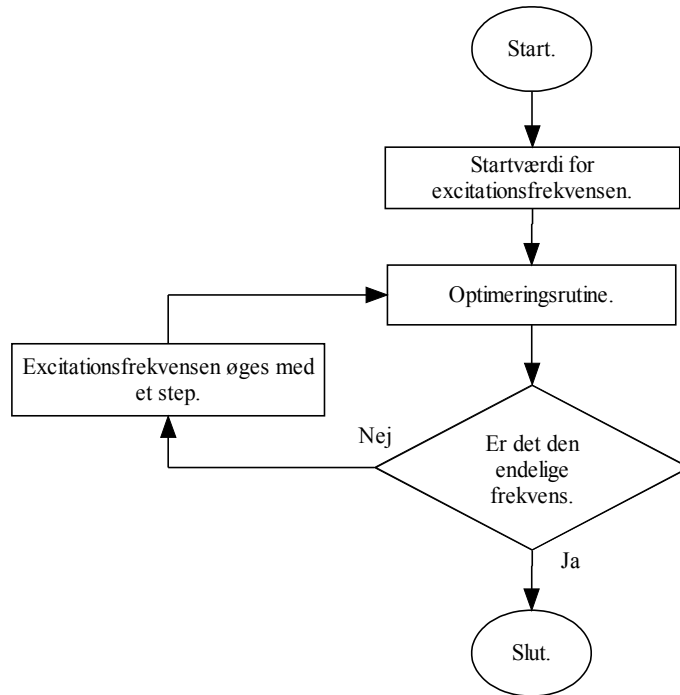


Fig. 5-6: Flowchart der beskriver kontinuationsmetoden.

Resultatet af en optimering er vist i fig. (5-7). Figuren viser variationen af compliancen som funktion af excitationsfrekvensen, den blå kurve er compliancen af initialdesignet og den røde kurve repræsenterer det optimerede design.

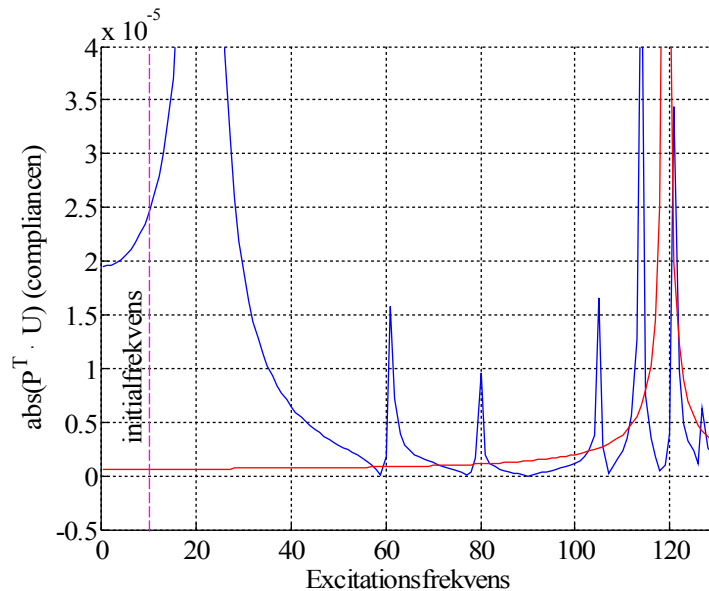


Fig. 5-7: Variationen af den dynamiske compliance under anvendelse af kontinuationsmetoden. Den blå kurve er initialdesignets dynamiske compliance og den røde kurve er et optimeret designs dynamiske compliance.

Når optimeringen starter, har excitationsfrekvensen en værdi der ligger under initialdesignets første resonansfrekvens. Når designet er konvergeret så øges excitationsfrekvensen, og skubber derved den

laveste resonansfrekvens op. Det kan tydeligt ses i grafen at det optimerede design (røde kurve) har en første egenfrekvens der er meget højere end initialdesignets.

Denne metode sørger for, at den statiske compliance ikke bliver for stor. Den statiske compliance for initialdesignet er meget større end den statiske compliance for det optimerede design. Der er ingen fare for, at den statiske compliance kan gå hen og blive meget stor.

Ved at anvende denne metode skubbes som sagt den laveste resonansfrekvens op, dvs. at der ikke skal passeres nogle resonansområder på vej op til arbejdsområdet.

5.4.2 Constraintmetoden

Kontinuationsmetoden fungerer udmærket, men har dog sine begrænsninger. Der er grænser for hvor langt det er muligt at skubbe resonansfrekvenserne op, hvis det frekvensniveau, der skal optimeres for, ligger over denne grænse, er det nødvendigt at anvende en anden metode.

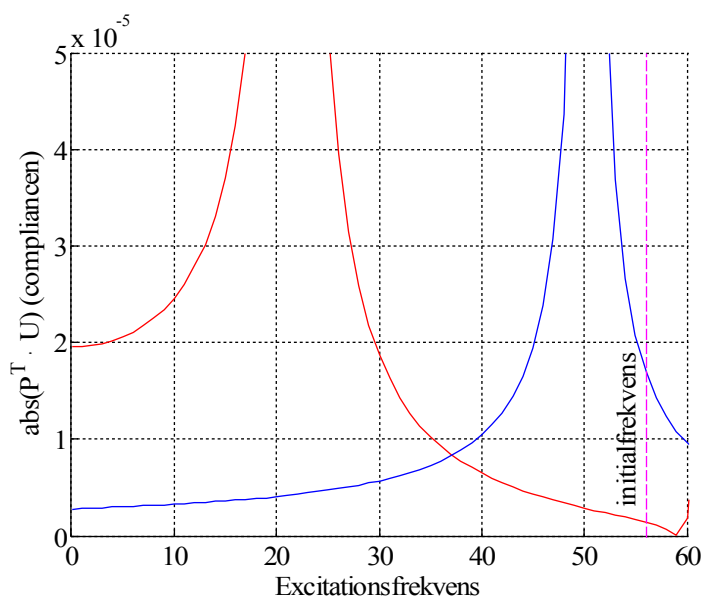


Fig. 5-8: Variationen af den dynamiske compliance når optimeringen startes fra en frekvens der ligger over initialdesignets første resonansfrekvens.

Det er her constraintmetoden træder ind i billedet, med denne metode optimeres der direkte ud fra den givne excitationfrekvens, uden at tage hensyn til, om denne frekvens ligger over eller under initialdesignets resonansfrekvenser. Dette medfører dog et problem.

I fig. (5-8) vises det problem der opstår, når initialfrekvensen ligger over initialdesignets første resonansfrekvens. Den blå kurve viser den dynamiske compliance for initialdesignet. Når optimeringen starter, bliver compliancens amplitude ved initialfrekvensen mindre. For at opnå dette, bliver den blå kurve presset mod venstre til den røde kurve, som viser compliancens amplitude for det optimerede design.

Efterhånden som kurven bevæger sig mod venstre, vokser den statiske compliance (excitationfrekvens = 0), og som det ses i figuren har det optimerede design en højere statisk compliance end initialdesignet. Hvis den første egenfrekvens bliver skubbet meget langt ned (nær nul), vil den statiske compliance vokse meget kraftigt.

For at undgå dette, lægges der en øvre begrænsning (constraint) på den statiske compliance, som sikrer at den ikke bliver for stor. Det er denne constraint der giver metoden sit navn.

$$C_s \leq k_0 \cdot C_{s,max} \quad (5-47)$$

$$C_s - k_0 \cdot C_{s,max} \leq 0 \quad (5-48)$$

$$\frac{C_s}{k_0 \cdot C_{s,max}} - 1 \leq 0 \quad (5-49)$$

Her er $C_{s,max}$ en given værdi som defineres før optimeringen starter, det kan for eksempel være initialdesignets compliance ganget med en faktor. Det angiver så det optimerede designs maksimalt tilladelige compliance. k_0 er en faktor der angiver hvor meget compliancen kan øges, og er også givet på forhånd. C_s er det aktuelle designs compliance. Hver gang optimeringsrutinen gennemfører en iteration, genereres der et nyt design og for dette design beregnes den statiske compliance, C_s , som altså beregnes i hver iteration.

Denne ekstra constraint resulterer i at optimeringen bliver mere beregningskrævende, fordi det er nødvendigt at udregne den statiske compliance for strukturen hver gang der gennemføres en iteration.

6 Optimeringsresultater i 2D

Oversigt: I dette kapitel præsenteres resultater, som er opnået ved hjælp af det program som er udviklet på basis af teorien fra kapitel 5. Beregningerne her er begrænsede til et 2D problem.

6.1 Initialdesign

Initialdesignet er den materialefordeling som er startpunkt for optimeringsrutinen. I de eksempler, som bliver gennemgået, er det altid det samme initialdesign der anvendes. Initialdesignet er vist i fig. (6-1).

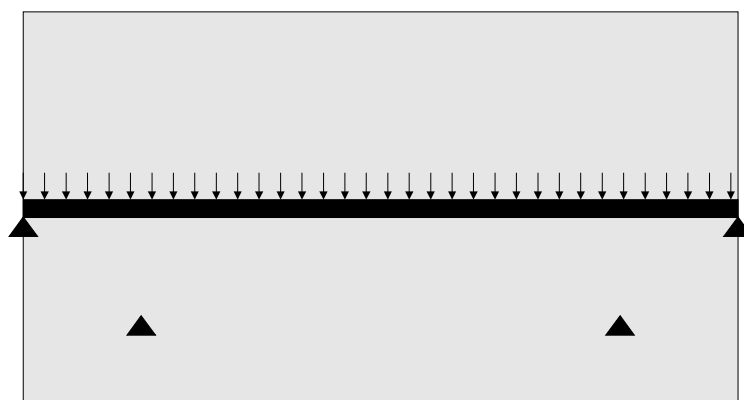


Fig. 6-1: Skitse over det anvendte initialdesign.

Dette initialdesign er meshet med Q4 elementer, antallet af elementer er 60x30 og alle elementer har den samme størrelse og form. Det eneste der varierer er den relative volumendensitet, ρ_e .

Materialet er jævnt fordelt over hele overfladen med en relativ densitet på $\rho_e = 0.2$, med undtagelse af den sorte bjælke, hvor densiteten er fastlagt til 1. Den bro lignende konstruktion har fire understøtninger, hvor forskydningerne er låst i x-retningen og i y-retningen.

Belastningen er jævnt fordelt som det ses i figuren og har følgende udtryk $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} \cdot \cos(\omega_p \cdot t)$.

Konstanter	Værdier	Definition
E	208 GPa	E modul
γ	7850 kg/m ³	Massefylde
lx	60 m	længde i x-retningen
ly	30 m	længde i y-retningen
t	0.1 m	Q4 elementets tykkelse

Tabel 6-1: Værdier anvendt i initialdesignet.

For at være i stand til at sammenligne resultater for de optimerede designs, er egenfrekvenserne udregnet for initialdesignet. De kan ses i tabel (6-4).

En graf der giver meget information om strukturen er et plot der viser, hvordan compliancen varierer som funktion af excitationens frekvens, også kaldet frekvensspektret, dette plot er vist i fig. (6-2). I den givne figur kan det være lidt svært at observere detaljerne, så i appendiks (Fig B-1) er denne figur vist i større målestok. Dette gælder for alle figurer af denne type, de findes alle i større målestok i Appendiks B.

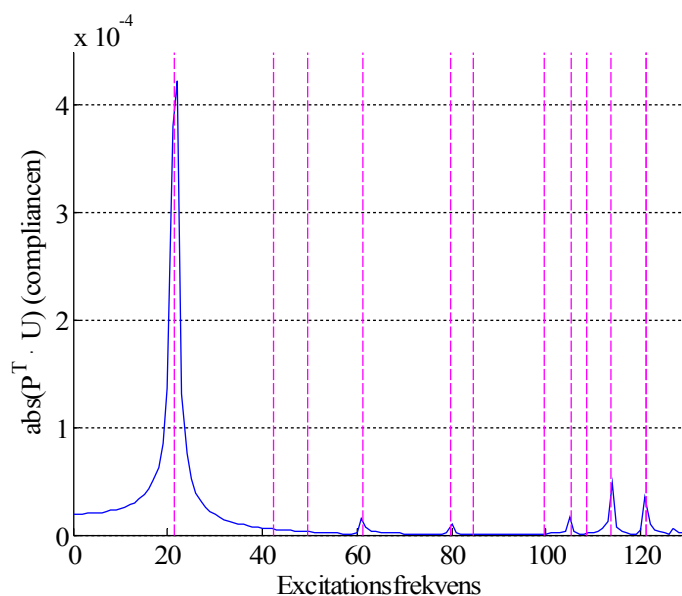


Fig. 6-2: Compliancen som funktion af excitationens frekvens for initialdesignet.

I denne graf er den blå kurve compliancen beregnet ved at påvirke strukturen med en belastning og givne excitationens frekvenser. De lodrette, røde og stiplede linier er de 12 første egenfrekvenser for strukturen, de er beregnet via en elementanalyse af strukturen, både stivhedsmatricen og massematricen er kendte størrelser, så ved hjælp af en egenverdianalyse af den resulterende dynamiske matrice kan egenfrekvenserne beregnes.

Beregningen af egenfrekvenserne er som følger. Egenverdiproblemet for en frit svingende struktur uden dæmpning har følgende udtryk.

$$(\lambda \cdot \mathbf{K} - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (6-1)$$

Hvor \mathbf{K} og \mathbf{M} er stivheds- og massematricer, \mathbf{X} er egenvektorerne og $\lambda = 1 / \omega^2$. Hvis der ganges \mathbf{K}^{-1} på, så ændres ligningen til.

$$(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (6-2)$$

Her er \mathbf{D} defineret som den dynamiske matrice og har følgende udtryk.

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{M} \quad (6-3)$$

Egenværdiproblemet som er vist i ligning (6-2) er kendt som et standard egenværdiproblem. For at finde den ikke trivielle løsning, skal den karakteristiske ligning som opstilles ud fra determinanten Δ være lig med 0.

$$\Delta = |\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{D}| = 0 \quad (6-4)$$

Efter at have beregnet egenfrekvenserne og compliancen så disponeres der over to forskellige set værdier som plottes i den samme figur, det resulterer i en graf der viser compliancen og egenfrekvenserne. Ud fra det resulterende plot er det klart at ikke alle egenfrekvenserne er resonansfrekvenser, dvs. det er ikke alle egenfrekvenserne der bliver slået an ved en given belastning. Hvorvidt en egenfrekvens bliver til en resonansfrekvens eller ikke, afhænger af belastningens form og formen på frekvensens tilhørende egenmode.

6.1.1 Egenmodes

I figur (6-3) vises de første 4 svingningsformer for bjælkedelen for initialdesignet, disse bestemmes ud fra initialdesignets egenmodes. Svingningsformerne viser, hvordan strukturen udbøjer når den er udsat for frie svingninger, og figuren viser udbøjningen af den linie hvor belastningen lægges på ved tvungne svingninger. Denne belastningen er en jævnt fordelt dynamisk belastning.

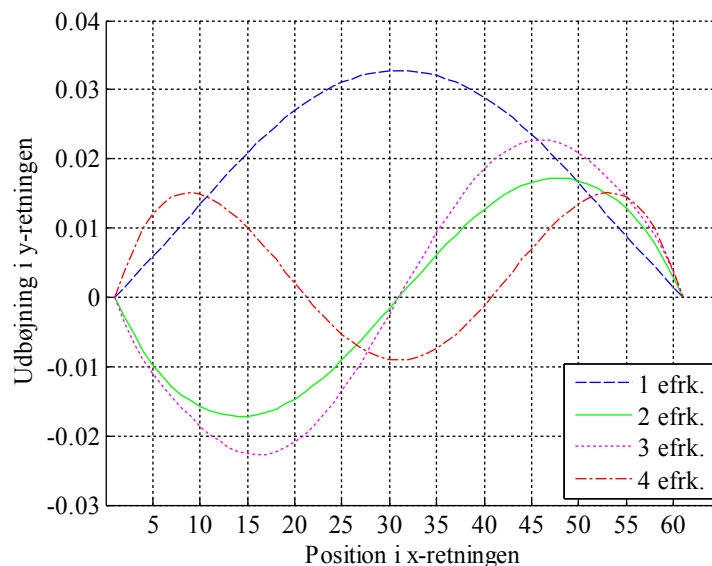


Fig. 6-3: Formen af de første 4 svingningsformer for bjælkedelen for initialdesignet, efrk. er en forkortelse af egenfrekvens.

Den første egenmode bliver slået an (fig. 6-2). Som det ses i figuren er den blå kurve formen på den første egenmode, der har samme fortegn overalt. En jævnt fordelt dynamisk belastning som den foreliggende vil excitere denne mode.

Den anden egenmode bliver derimod ikke slået an (fig. 6-2), hvilket kan forklares ud fra formen af den anden egenmode. Som det ses i fig.(6-3), har arealet under kurven lige store negative og positive værdier. En jævnt fordelt dynamisk belastning på kurven i hele dens længde vil ikke skabe nogen form for excitation, fordi belastningen på den positive og den negative del af kurven er lige store, og vil afbalancere hinanden. På en mere matematisk måde så betyder det, at det skalære produkt mellem udbøjningsamplituderne for frie svingninger og den pålagte kraft er nul.

Den tredje egenmode er ligesom den anden egenmode lige store positive og negative arealer og bliver derfor ikke exciteret. Den fjerde egenmode har positive og negative arealer under udbøjningskurven, men den positive del af kurven er større end den negative del, så den bliver exciteret.

Mod forventning så ligner den anden og den tredje egenmode hinanden, det skyldes muligvis at initialdesignet ikke kun er en bjælke, men også har materiale med lav densitet fordelt ud over hele området og to ekstra understøtninger.

6.2 Optimeret design for statisk belastning

Under udviklingen af programmet har det nogle gange været nødvendigt at foretage visse beregninger for at kontrollere, om det regnede rigtigt. At optimere strukturen for en statisk belastning er et af de tilfælde. Ved at sætte excitationsfrekvensen til nul og køre optimeringsprogrammet, er resultatet et design, der er optimeret for en statisk belastning. Dette resultat sammenlignes med resultater fra et paper (NOL01), om et lignende problem skrevet af Niels Olhoff og Jianbin Du, og resultaterne var ens. Derved var det muligt at verificere at denne del af programmet regner rigtigt. De efterfølgende dynamiske optimeringer i dette kapitel er også blevet sammenlignet med dette paper for at verificere programmet.

Det viste resultat er beregnet med det dynamiske optimeringsprogram hvor excitationsfrekvensen er sat til 0. Optimeringen starter fra initialdesignet og de anvendte parametre er vist i tabel (6-2).

Konstanter	Værdier	Definition
E	208 GPa	E modul
γ	7850 kg/m ³	Massefylde
lx	60 m	Længde i x-retningen
ly	30 m	Længde i y-retningen
t	0.1 m	Q4 elementets tykkelse
r _{min}	1.2	Filtreringsradiusen
p	3	Penaliseringsfaktoren

Tabel 6-2: Værdier anvendt under optimering med en statisk belastning

Resultatet er det optimerede design som kan ses i fig. (6-4).

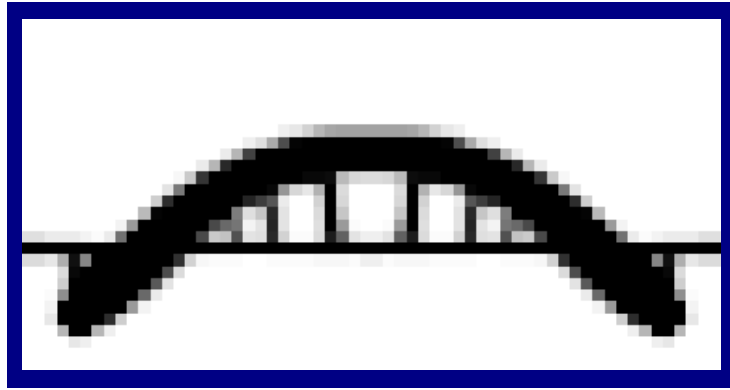


Fig. 6-4: Optimeret design for en statisk belastning.

Efter gennemført optimering er det resulterende design underkastet den samme analyse som initialdesignet. Figur (6-5) viser, hvordan compliancen for det resulterende design varierer med excitationens frekvens.

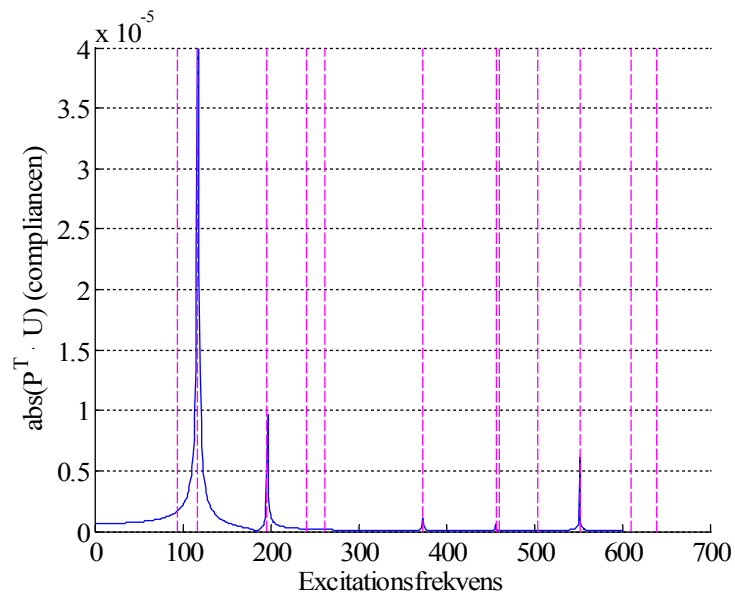


Fig. 6-5: Compliancen som funktion af excitationens frekvens for et design der er optimeret for en statisk belastning.

I den følgende figur vises formen af de første 4 svingningsformer for bjælkedelen i et design der er optimeret for en statisk belastning.

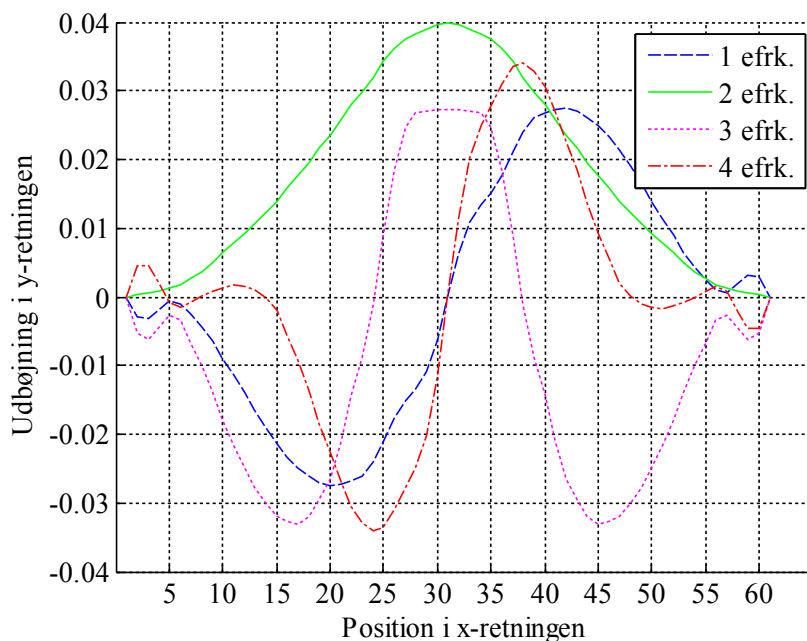


Fig. 6-6: Formen af de første fire svingningsformer for bjælkedelen i et design der er optimeret for en statisk belastning.

Optimeringen med hensyn til en statisk belastning har som resultat at resonansfrekvenserne bliver hævet, hvilket medfører, at den statiske compliance bliver sænket.

6.3 Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=40$ rad/s)

Denne sektion viser resultaterne for et design der optimeret for en dynamisk belastning med en foreskrevet excitationsfrekvens på 40 rad/s. I tabel (6-3) findes de data som er anvendt under optimeringen. Det anvendte filter er i alle tilfælde det traditionelle følsomhedsfilter (side 29).

Konstanter	Værdier	Definition
E	208 GPa	E modul
γ	7850 kg/m ³	Massefylde
lx	60 m	Længde i x-retningen
ly	30 m	Længde i y-retningen
t	0.1 m	Q4 elementets tykkelse
ω_i	5 rad/s	Startværdi for frekvensen.
$\Delta\omega$	1 rad/s	Ændring i frekvensen.
$\Delta\varepsilon$	0.01	Stopkriterie.
r_{min}	1.2	Konstant der definerer filtret.

Tabel 6-3: Værdier som er anvendt under optimeringen for en dynamisk belastning med en frekvens på 40 rad/s.

Den anvendte metode for at udføre optimeringen er kontinuationsmetoden, fordi den ønskede excitation frekvens ligger over initialdesignets første resonansfrekvens. Den startværdi der anvendes er $\omega_i = 5$ rad/s, som ligger et godt stykke under initialdesignets første resonansfrekvens som det ses i figur (6-2). Hver gang excitation frekvensen ændres, fortsættes iterationerne indtil konvergens er opnået, og når det er tilfældet, øges excitation frekvensen og processen gentages, indtil $\omega_p = 40$ rad/s er nået.

Det resulterende design er vist i fig. (6-7).

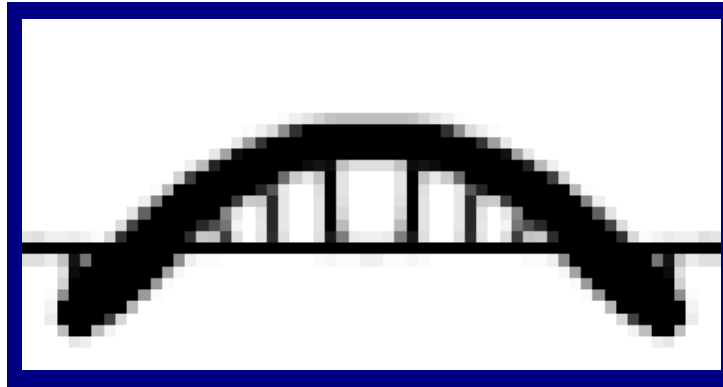


Fig. 6-7: Optimeret design for en dynamisk belastning med en excitation frekvens på 40 rad/s.

Det optimerede design er derefter analyseret og resultaterne vises i de 2 følgende figurer. Først vises frekvensspektret.

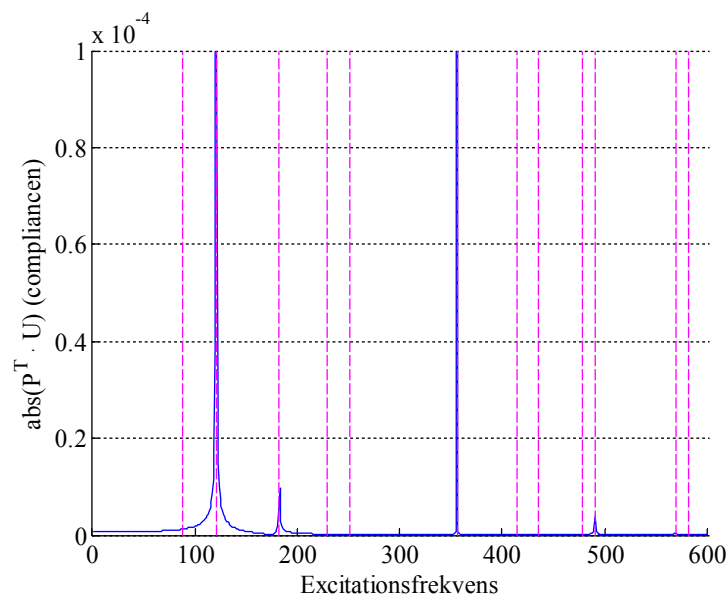


Fig. 6-8: Compliance som funktion af excitation frekvensen for et design der er optimeret for en dynamisk belastning på 40 rad/s.

Og i den følgende figur vises formen af de første 4 svingningsformer for bjælkedelen i et design der er optimeret for en belastning med en excitation frekvens på 40 rad/s.

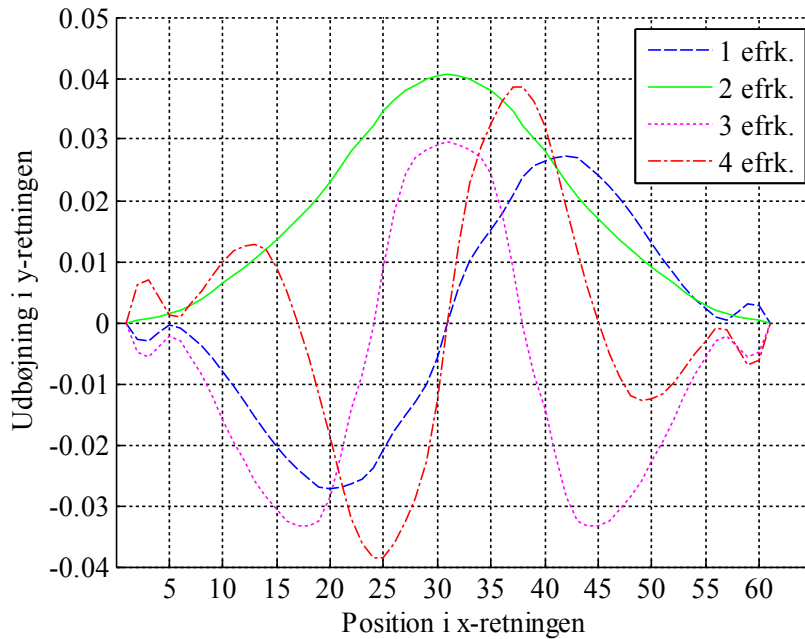


Fig. 6-9: Formen af de første fire 4 svingningsformer for bjælkedelen i et design der er optimeret for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 40 rad/s.

Resultaterne stemmer godt overens med det forventede forløb, når det er kontinuationsmetoden der anvendes. Egenfrekvenserne bliver skubbet så langt væk som muligt fra excitationsfrekvensen. Det er også værd at bemærke, at den første egenfrekvens ikke bliver slået an og derfor ikke har nogen betydning for den dynamiske compliance. I figur (6-9) ses det tydeligt, at de egenmodes der svarer til de egenfrekvenser der ikke bliver slået an, har lige store positive og negative arealer under deres udbøjningskurve.

6.4 Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=60$ rad/s)

I de følgende figurer vises resultaterne for et design der er optimeret for en dynamisk belastning med en foreskrevet excitationsfrekvens på 60 rad/s. De værdier der er anvendt under optimeringen, er de samme som vist i tabel (6-3). Det optimerede design for en dynamisk belastning på 60 rad/s vises i den følgende figur.

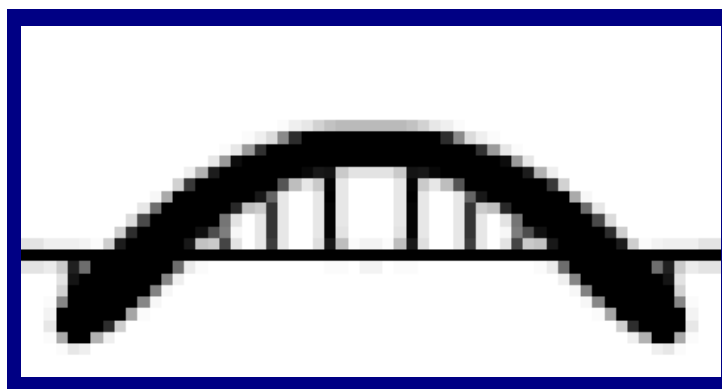


Fig. 6-10: Optimeret design for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 60 rad/s.

Herefter vises frekvensspektret for det optimerede design.

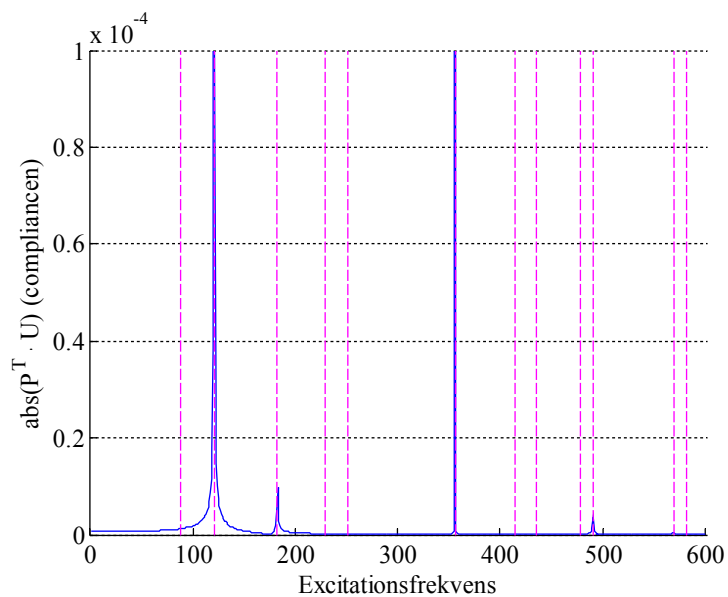


Fig. 6-11: Compliancen som en funktion af excitationsfrekvensen for et design der er optimeret for en dynamisk belastning på 60 rad/s.

Og formen af de 4 første svingningsformer for bjælkedelen af designet i figur (6-10).

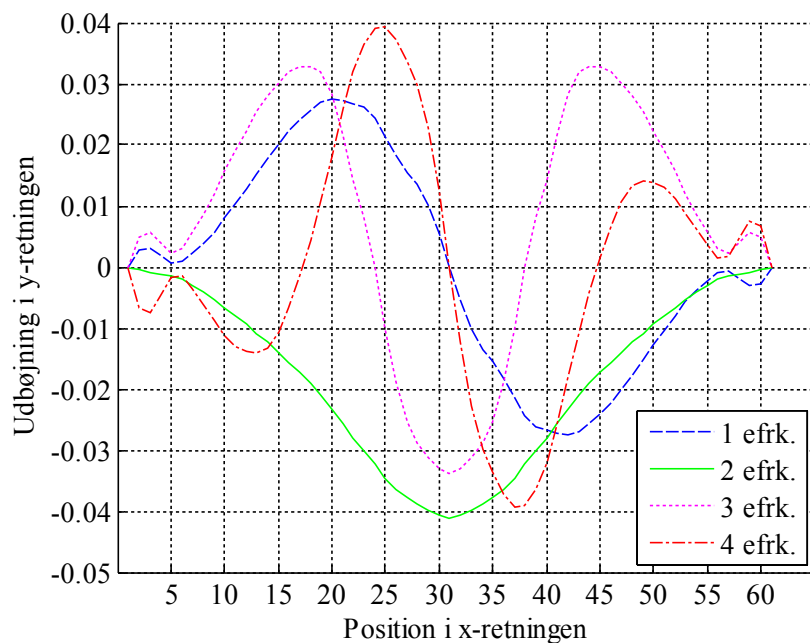


Fig. 6-12: Formen af de første fire svingningsformer for bjælkedelen i et design der er optimeret for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 60 rad/s.

6.5 Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=80$ rad/s)

Det har ikke været muligt at optimere for en excitationsfrekvens, der er højere end 80 rad/s. Alle forsøg på at fortsætte med højere frekvenser har ført til ustabilitet i algoritmen, strukturen begynder at gå i retning af et asymmetrisk resultat med store massekoncentrationer (store sorte pletter i designet) og efter et antal iterationer stopper den, ændringerne i volumendensiteten har hele tiden en stor værdi og den relative fejl som er stopkriteriet bliver derfor aldrig opfyldt.

Konvergensproblemerne kan skyldes at det anvendte Q4 element er et simpelt, lavere ordens element, som ikke modellerer strukturen helt korrekt. Hvis det er tilfældet, vil problemet kunne løses ved for eksempel at anvende et Q8 eller Q9 element. Det kan også skyldes, at resonansfrekvensen ikke kan presses længere op, i så fald skal constraintmetoden anvendes hvis der ønskes at optimere for højere frekvenser. I de følgende figurer vises resultaterne af analysen af det optimerede design. De anvendte værdier er de samme som er vist i tabel (6-3).

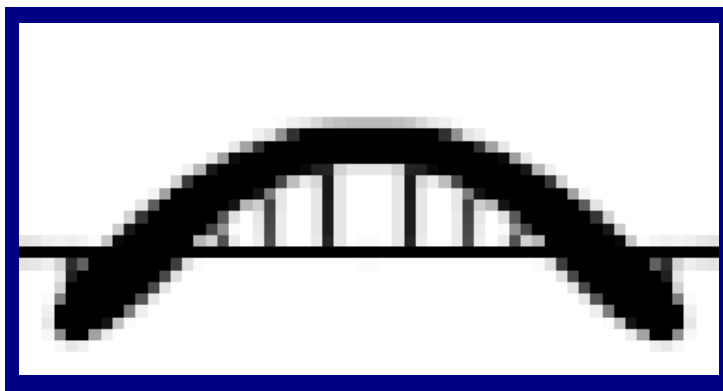


Fig. 6-13: Optimeret design for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 80 rad/s.

I den følgende figur vises frekvensspektret.

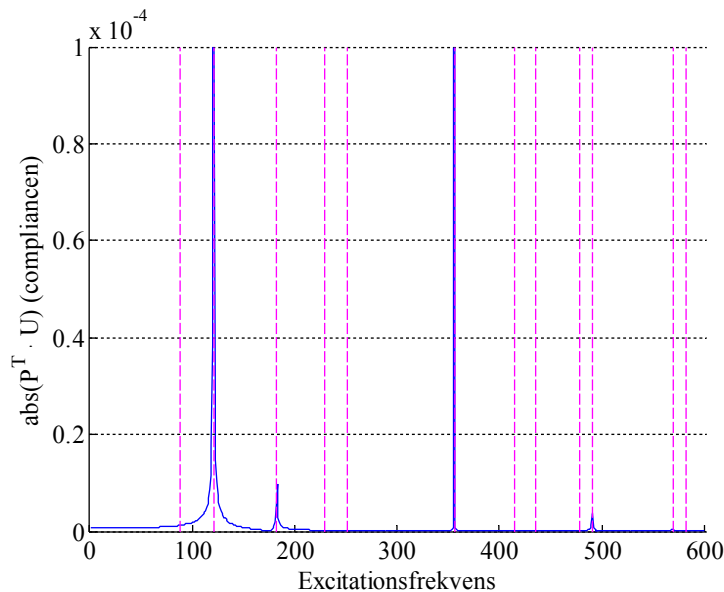


Fig. 6-14: Compliancen som funktion af excitationsfrekvensen for en struktur der er optimeret for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 80 rad/s.

Og de 4 første svingningsformer for bjælkedelen.

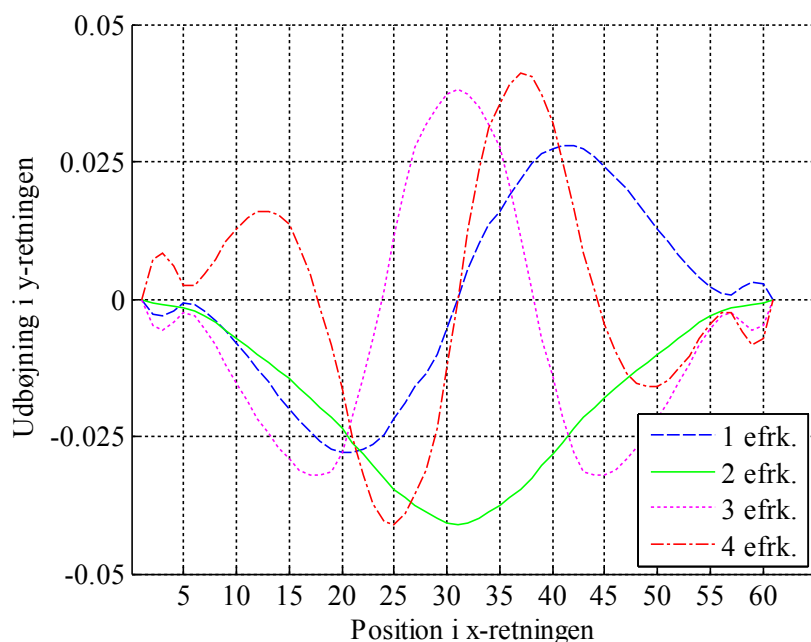


Fig. 6-15: Formen af de første fire svingningsformer for bjælkedelen i et design der er optimeret for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 80 rad/s.

Selv om der her kun er vist data for excitationsfrekvenser der svarer til 40, 60 og 80 rad/s, så er der også udført optimering for en frekvens der svarer til 20 rad/s. I de følgende tabeller er alle værdier samlet for bedre at kunne se hvordan de ændrer sig indbyrdes.

Tabel 1:

Egenfrekvens [rad/sec]	Initialt Design	Statisk Optimeret	Dynamisk ($\omega_p = 20$ rad/s)
1 egenfrekvens	21,5327	94,5006	88,4676
2 egenfrekvens	42,4531	117,4888	119,7227
3 egenfrekvens	49,4370	196,6151	183,3299
4 egenfrekvens	61,2504	241,1700	228,3162
5 egenfrekvens	79,8059	261,4730	250,7436
6 egenfrekvens	84,5311	373,4452	354,2633
7 egenfrekvens	99,6583	456,5793	414,5247
8 egenfrekvens	105,2097	461,0816	436,0637
9 egenfrekvens	108,7140	504,0841	475,3576
10 egenfrekvens	113,7956	551,8432	493,2641
11 egenfrekvens	121,1900	609,8511	567,1931
12 egenfrekvens	121,1971	640,1611	584,1237

Tabel 6-4: Oversigt med alle de beregnede egenfrekvenser for alle designs. Alle dynamiske resultater er beregnede med kontinuationsmetoden og alle værdier er i rad/s.

Tabel 2:

Egenfrekvens [rad/sec]	Dynamisk ($\omega_p = 40$ rad/s)	Dynamisk ($\omega_p = 60$ rad/s)	Dynamisk ($\omega_p = 80$ rad/s)
1 egenfrekvens	87,8496	86,512	85,6778
2 egenfrekvens	120,8469	122,842	125,7093
3 egenfrekvens	182,6232	181,5055	179,8383
4 egenfrekvens	229,053	230,9759	235,0164
5 egenfrekvens	251,5878	252,7958	254,4773
6 egenfrekvens	355,9982	358,3195	360,4803
7 egenfrekvens	414,9077	419,3331	425,2763
8 egenfrekvens	435,4853	437,0702	435,2747
9 egenfrekvens	477,8384	485,0175	489,1804
10 egenfrekvens	490,7364	492,1124	492,6365
11 egenfrekvens	569,6457	570,1631	568,2955
12 egenfrekvens	582,061	579,1908	571,9108

Tabel 6-5: Oversigt med alle de beregnede egenfrekvenser for alle designs. Alle dynamiske resultater er beregnede med kontinuationsmetoden og alle værdier er i rad/s.

7 Optimering af en plade

Oversigt: Dette kapitel omhandler topologioptimering af en plade, der er belastet med en harmonisk varierende kraftfordeling. Metoden der anvendes er baseret på en bi-materialemodel, der er modificeret til at anvende samme materiale med to forskellige tykkelser, som vil blive kaldt bi-tykkelsesmodellen.

Dette kapitel er baseret på følgende litteratur (NOL01), (BOS01) og (MAB01). En stor del af det teoretiske grundlag er det samme som det der allerede er gennemgået i kapitel 5.

7.1 Bi-tykkelsesmodellen

Bi-tykkelsesmodellen anvendes til optimering af en plade der er diskretiseret med et mesh af firkantede elementer, præcis som i de foregående optimeringer. Elementerne kan have 2 forskellige tykkelser, dvs. optimeringen går ud på at finde ud af, hvilket områder der skal have stor stivhed og lav stivhed, idet stivheden ændres ved at ændre elementernes tykkelse.

I fig.(7-1) vises et snit af en bi-tykkelsesmodel, de to elementer består af det samme materiale, men har hver sin tykkelse.

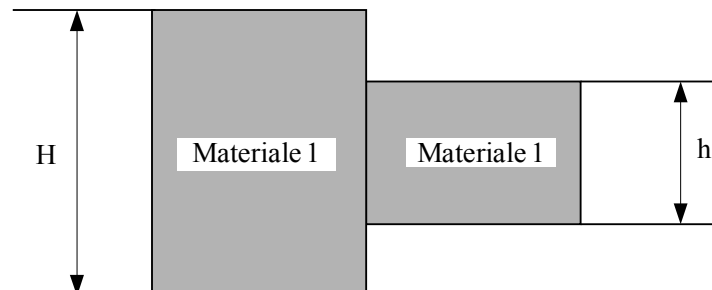


Fig. 7-1: Bi tykkelsesmodel

7.1.1 Bestemmelse af materialekonstanter for bi-tykkelsesmodellen.

Før SIMP modellen for den anvendte bi-tykkelsesmodel analyseres, vil det være hensigtsmæssigt at betragte elementmodellen og de resulterende materiale- og pladekonstanter.

For at regne på pladeproblemet anvendes en FE model, hvor det anvendte element er et 9 knuders pladeelement som bygger på Mindlin's pladeteori, således at der kan regnes på tykke plader. Interpolationspolynomiet er et fuldt andengrads polynomium, så der bør ikke være problemer med shear locking, hvis der skulle regnes på tynde plader.

Stivhedsmatricen og massematricen for Mindlin pladeelement

Den følgende måde at opstille stivhedsmatricen på er hovedsageligt baseret på (MAB01). Der følger en meget kort gennemgang af stivhedsmatricen og massematricen. I et Mindlin pladeelement består stivhedsmatricen af to dele, én som tager højde for bidraget fra bøjning og en som tager højde for bidraget fra tværkraften. Elementproblemet kan skrives på følgende måde.

$$\left(\kappa \cdot G \cdot h \iint_A \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{B}_s^T dA + D \iint_A \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_b^T dA \right) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (7-1)$$

Som det ses kan det skrives så den totale stivhedsmatrice bliver summen af to stivhedsmatricer, en for bøjning og en for tværkraften. I det viste udtryk er \mathbf{d} en vektor der indeholder flytningerne, og \mathbf{P} er en vektor der indeholder belastningerne. Denne model har 3 frihedsgrader, 1 flytning ud af planet og 2 in-plane rotationer, hvor planet er sammenfaldende med pladens middelflade. Det betyder, at \mathbf{d} indeholder både flytninger og rotationer.

$$\text{Tværkraft stivhedsmatrice, } \mathbf{k}_s = \kappa \cdot G \cdot h \iint_A \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{B}_s^T dA \quad (7-2)$$

$$\text{Bøjnings stivhedsmatrice, } \mathbf{k}_b = D \iint_A \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_b^T dA \quad (7-3)$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \kappa = \frac{5}{6} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \quad (7-4)$$

Disse udtryk anvendes efterfølgende til at opstille materialekonstanterne m.v. for pladen.

Nomenklatur forklaring:

κ : tværkraftskorrektionsfaktor.

ν : tværkontraktionstal.

E : Young's modul eller elasticitetsmodul.

G : tværmodul.

h : pladetykkelse (er her et generisk udtryk for elementets tykkelse, ikke at forveksle med h i fig.(7-1)).

\mathbf{B}_b : tøjnings-forskydningsmatricen for bøjningsbidraget til stivhedsmatricen.

\mathbf{B}_s : tøjnings-forskydningsmatricen for tværkraftsbidraget til stivhedsmatricen.

Massematricen får formen.

$$\mathbf{M} = \iint_A \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{C}_m \cdot \mathbf{N} dA \quad (7-5)$$

Hvor \mathbf{N} en matrice der indeholder interpolationsfunktionerne, og \mathbf{C}_m har følgende udtryk,

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \gamma \cdot h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma \cdot h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma \cdot h^3}{12} \end{pmatrix} \quad (7-6)$$

I de to foregående ligninger er γ materialets massefylde med enheden kg/m^3 .

Materiale- og pladekonstanter

Efter at have opstillet bøjnings og tværkraftstivhederne samt massematricen, angives i følgende tabel materiale- og pladekonstanterne for bi-tykkelsesmodellen, dels for et element med tykkelsen H og dels for et med tykkelsen h .

	Tykkelse H	Tykkelse h
Elasticitetsmodul	E	E
Tværkontraktionstal	ν	ν
Bøjningsstivhed	$D_H = \frac{E \cdot H^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$	$D_h = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$
Tværkraftstivhed	$S_H = \frac{E \cdot H \cdot \kappa}{2 \cdot (1 + \nu)}$	$S_h = \frac{E \cdot h \cdot \kappa}{2 \cdot (1 + \nu)}$
Masse per fladeenhed	$\gamma \cdot H$	$\gamma \cdot h$
Tykkelse	H	h

Tabel 7-1: Oversigt over materiale- og pladekonstanterne for bi-tykkelsesmodellen.

Vha. fra disse konstanter opstilles de lokale stivheds- og massematricer \mathbf{k}_H og \mathbf{m}_H for et element med tykkelsen H , og \mathbf{k}_h og \mathbf{m}_h som de lokale stivheds- og massematricer for et element med tykkelsen h . Vi forudsætter i det følgende, at $H \geq h$.

7.2 SIMP modellen for bi-tykkelsesstrukturer

SIMP modellen kan opstilles ved at bruge interpolationsformlen på en måde, der er analog til den der bruges i bi-materiale modellen (NOL01). Ved at anvende interpolationsformlen opnås et udtryk for en ækvivalent elementstivhedsmatrice \mathbf{k} , som er et resultat af to forskellige \mathbf{k} matricer som svarer til hver sin pladetykkelse.

$$\mathbf{k} = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{k}_h \quad (7-7)$$

Interpolationsformlen for stivhedsmatricen er udtrykt i ligning (7-7), hvor $p \geq 1$. I denne ligning repræsenterer $\rho_e = 1$ at materialet i dette område har den største pladetykkelse H , og $\rho_e = 0$ repræsenterer den mindste pladetykkelse h , mens konstanten p er penaliseringsfaktoren. Det er værd bemærke, at i bi-tykkelsesmodellen er der ingen områder af pladen, hvor der ikke er materiale. Der er således ingen huller i pladen, idet selv om densiteten i nogle områder er lig med nul, så betyder det

kun at pladen i dette område har den mindste tykkelse h . Det betyder, at der ikke er fare for, at der vil kunne opstå lokaliserede vibrationsmodes.

På samme måde kan massematricen for bi-tykkelsesmodellen beregnes ved at bruge interpolationsformlen

$$\mathbf{m} = \rho_e^p \cdot \mathbf{m}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{m}_h \quad (7-8)$$

Når massematricen \mathbf{m}_H skal beregnes, anvendes pladetykkelsen H , og massematricen \mathbf{m}_h beregnes ud fra pladetykkelsen h .

I ligning (7-8) er \mathbf{m}_H og \mathbf{m}_h de lokale massematricer for henholdsvis den maksimale og den minimale pladetykkelse, ρ_e er volumendensiteten og p er penaliseringsfaktoren, der vil blive sat til 3. Massematricen og stivhedsmatricen er således penaliseret med den samme værdi. Når der tales om volumendensiteten, er det vigtigt at pointere, at den ikke har noget at gøre med materialets massefylde. Volumendensiteten symboliseres med ρ_e og det er en dimensionsløs variabel der varierer fra 0 til 1, alt efter hvilken tykkelse elementet har. Materialets massefylde symboliseres med γ , har enheden $[kg/m^3]$, og er bestemt af materialet.

Resultaterne af interpolationsformlerne, \mathbf{k} og \mathbf{m} , repræsenterer en fiktiv pladetykkelse, mens de matricer der indgår i blandingsformlen, \mathbf{k}_H , \mathbf{k}_h , og \mathbf{m}_H , \mathbf{m}_h repræsenterer en reel tykkelse.

Indtil nu er det kun statiske stivheds- og massematricer der er analyseret, men det nuværende problem er et dynamisk problem, og det kunne lige så vel have været de dynamiske stivhedsmatricer, vi havde interpoleret. De bruges dog ikke direkte i programmet, men det kan vises at resultatet for en interpolation bliver det samme, hvad enten det er de statiske stivheds- og massematricer der bruges, eller det er den dynamiske stivhedsmatrice.

Som bekendt har den dynamiske stivhedsmatrice følgende udtryk.

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k} - \omega^2 \cdot \mathbf{m} \quad (7-9)$$

Hvis \mathbf{k} og \mathbf{m} erstattes med deres udtryk fra ligning (7-7) og (7-8), kommer ligning (7-9) til at se således ud:

$$\mathbf{k}_d = \left[\rho_e^p \cdot \mathbf{k}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{k}_h \right] - \omega^2 \cdot \left[\rho_e^p \cdot \mathbf{m}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{m}_h \right] \quad (7-10)$$

Dette kan omskrives til

$$\mathbf{k}_d = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{k}_h - \omega^2 \cdot \rho_e^p \cdot \mathbf{m}_H - \omega^2 \cdot (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{m}_h \quad (7-11)$$

hvorefter ρ_e^p og $(1 - \rho_e^p)$ uddrages som faktor

$$\mathbf{k}_d = \rho_e^p \cdot (\mathbf{k}_H - \omega^2 \cdot \mathbf{m}_H) + (1 - \rho_e^p) \cdot (\mathbf{k}_h - \omega^2 \cdot \mathbf{m}_h) \quad (7-12)$$

Hvis det antages, at

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{dH} &= (\mathbf{k}_H - \omega^2 \cdot \mathbf{m}_H) \\ \mathbf{k}_{dh} &= (\mathbf{k}_h - \omega^2 \cdot \mathbf{m}_h) \end{aligned} \quad (7-13)$$

så kommer interpolationsformlen for den dynamiske stivhedsmatrice til at få følgende udtryk:

$$\mathbf{k}_d = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_{dH} + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{k}_{dh} \quad (7-14)$$

I denne formel er \mathbf{k}_{dH} og \mathbf{k}_{dh} de dynamiske stivhedsmatricer på elementniveau for henholdsvis den store og den lille pladetykkelse.

7.3 Objektfunktionen

Den nuværende opgave går ud på at minimere den dynamiske compliance i en struktur der er udsat for en harmonisk varierende belastning med en given excitationsfrekvens ω_p . Det antages foreløbig at der ikke er nogen dæmpning. Optimeringsproblemet kan formuleres på følgende måde.

$$\begin{aligned} \min: & \left\{ F = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U})^2 \right\} \\ \text{begrænset til:} & (\mathbf{K} - \omega_p^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \\ & \frac{V(\rho_e)}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 \leq \rho_e \leq 1 \end{aligned} \quad (7-15)$$

Her er \mathbf{P} en vektor der indeholder amplituderne for den eksterne harmonisk varierende belastning med frekvensen ω_p . \mathbf{U} er en vektor der indeholder amplituderne for udbøjningerne og rotationsfrihedsgraderne, både \mathbf{P} og \mathbf{U} er globale vektorer. \mathbf{K} er den globale stivhedsmatrice og \mathbf{M} er den globale massematrix. V^* er designvolumenet som er til rådighed for pladen og $V(\rho_e)$ er det totale pladevolumen.

Ligning (7-15) er den generelle form for optimeringsproblemet, inde i programmet opstilles det på en mere detaljeret måde. Følgende vises udtrykket for objektfunktionen som den anvendes i programmet, den er opstillet på samme måde som vist i sektion (5.1) på side 35.

$$F = \left[\sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot (\mathbf{k} - \omega_p^2 \cdot \mathbf{m}) \cdot \mathbf{u}_e \right]^2 \quad (7-16)$$

$$\mathbf{k} = \rho_e^p \cdot \mathbf{k}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{k}_h \quad (7-17)$$

$$\mathbf{m} = \rho_e^p \cdot \mathbf{m}_H + (1 - \rho_e^p) \cdot \mathbf{m}_h \quad (7-18)$$

I de viste ligninger er \mathbf{u}_e flytningsamplituderne på elementniveau, \mathbf{k} er stivhedsmatricen på elementniveau som beregnes ved at bruge interpolationsformlen, ligning (7-7), så stivheden kommer til at være afhængig af elementets densitet, \mathbf{k}_H er stivhedsmatricen for et element med højden H og \mathbf{k}_h er stivhedsmatricen for et element med højden h . På samme måde er \mathbf{m} massematrixen på elementniveau som også beregnes ved hjælp af blandingsformlen, ligning (7-8), \mathbf{m}_H er massematrixen for et element med højden H , \mathbf{m}_h er massematrixen for et element med højden h , p er penaliseringsfaktoren, ω_p er den påtrykte frekvens og ρ_e er elementets volumendensitet. Som det kan ses bliver compliancen beregnet for hvert enkelt element, og den totale compliance er summen af elementernes compliance.

For at finde minimumsværdien af objektfunktionen er det nødvendigt at kende gradienten. Udtrykket for objektfunktionens følsomhed er følgende, som udledt ved hjælp af adjoint metoden i sektion (5.2) side 36.

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \left(2 \cdot \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_e} - \mathbf{U}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} - \omega_p^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{U} \right) \quad (7-19)$$

I alle de problemstillinger der analyseres i denne rapport, antages det, at belastningen er uafhængig af designet, så ligning (7-19) kan reduceres til følgende udtryk,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = -2 \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} - \omega_p^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{U} \quad (7-20)$$

Dette er det generelle udtryk for gradienten, i programkoden er det skrevet som

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \rho_e} = -2 \cdot C \cdot \mathbf{u}_e^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_e} - \omega_p^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \rho_e} \right) \cdot \mathbf{u}_e} \quad (7-21)$$

hvor C er den totale compliance, beregnet som

$$C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \cdot (\mathbf{k} - \omega_p^2 \cdot \mathbf{m}) \cdot \mathbf{u}_e \quad (7-22)$$

De afledte af stivheds- og massematricerne har følgende udtryk,

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_e} = p \cdot \rho_e^{p-1} \cdot (k_H - k_h) \quad (7-23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \rho_e} = p \cdot \rho_e^{p-1} \cdot (m_H - m_h) \quad (7-24)$$

Ligning (7-21) er det detaljerede udtryk for følsomheden som den anvendes i programmet. Her repræsenterer \mathbf{u}_e , \mathbf{m} , \mathbf{k} , ω_p , ρ_e og p det samme som i ligning (7-16).

7.3.1 Normalisering af objektfunktionen og følsomheden

For at MMA metoden kan fungere optimalt anbefales det at værdien af objektfunktionen evalueret i det nuværende punkt, skal ligge mellem 1 og 100. For at sikre at dette bliver overholdt, ganges der en faktor på objektfunktionen og dens følsomhed. Denne faktor beregnes inden optimeringen starter, ud fra initialdesignets compliance. Værdien af denne faktor er bestemt således at når den bliver ganget på objektfunktionen så vil den starte med en værdi på 100.

$$\boxed{f0val = k10 \cdot F} \quad (7-25)$$

I ligning (7-25) er $k10$ den nævnte faktor, F er objektfunktionen og $f0val$ er funktionsværdien som er input til MMA metoden. For at sikre den rette gradient, ganges den samme faktor også på gradienten.

7.4 Filtrering af følsomheden

For at sikre at designet bliver meshuafhængigt er det nødvendigt at filtrere følsomheden. I bitykkelsesmodellen er det følsomheden der filtreres, og det anvendte filter er et "mean sensitivity filter", som er vist i kapitel 4.

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial \rho_e}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial F}{\partial \rho_i}}{\sum_{i=1}^{N_e} 1} \quad (7-26)$$

Dette er et meget simpelt filter der midler følsomheden i et element ud fra de omkringliggende elementer. En filterradius definerer hvor mange elementer der skal med i beregningen, og ved at variere denne filterradius er det muligt at sørge for at resultatet bliver meshuafhængigt.

Selv om dette filter er meget enkelt i sin udførelse giver det et meget diskret resultat, med meget få gråzoner.

7.5 Volumenconstraint

I dette optimeringsproblem er der kun én constraint, nemlig volumenconstrainten. I denne opgave ligger volumenconstrainten en begrænsning på, hvor stort et område af pladen kan antage den maksimale pladetykkelse.

For at beregne elementernes volumen er det nødvendigt at kende sammenhængen mellem volumendensiteten og pladens tykkelse.

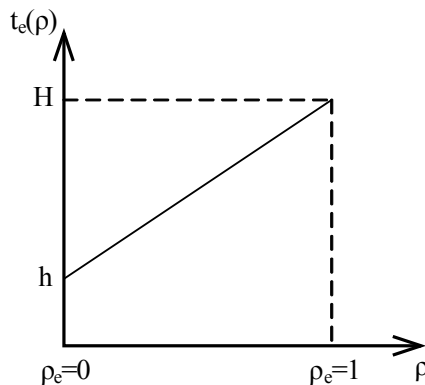


Fig. 7-2: Variation af pladetykkelsen som funktion af ρ_e .

Fig. (7-2) viser, hvordan pladetykkelsen varierer som funktion af ρ_e . Dette kan udtrykkes matematisk i følgende ligning, hvor t_e er pladetykkelsen.

$$t_e = \rho_e \cdot H + (1 - \rho_e) \cdot h \quad (7-27)$$

Designvolumenet V^* er det volumen, der er til rådighed for pladen, og er givet ved volumenfraktionen f som

$$V^* = f \cdot V_0 \quad (7-28)$$

hvor V_0 er volumenet af det totalt tilladte designområde

$$V_0 = nelx \cdot nely \cdot A_e \cdot H \quad (7-29)$$

Her er $nelx$ og $nely$ antallet af elementer i henholdsvis x- og y-retningen, og A_e er elementets areal som takket være den anvendte diskretisering er den samme for alle elementer. Vi har altså:

$$V^* = f \cdot nelx \cdot nely \cdot A_e \cdot H \quad (7-30)$$

Ligning (7-30) angiver størrelsen af designvolumenet for pladen, når f er givet. Bemærk, at V^* skal være mindre end V_0 (som svarer til en jævntyk plade med tykkelsen H) og større end volumenet af en jævntyk plade med tykkelsen h , dvs. f skal vælges, så

$$\frac{h}{H} \leq f \leq 1 \quad (7-31)$$

Det totale pladevolumen, $V(\rho_e)$, er det volumen der beregnes ud fra ρ_e værdierne i elementerne, og dette volumen beregnes i alle iterationer.

$$V(\rho_e) = \sum_{e=1}^N A_e \cdot t_e \quad (7-32)$$

Det totale pladevolumen, $V(\rho_e)$, må ikke overstige designvolumenet, V^* .

$$V(\rho_e) \leq V^* \quad (7-33)$$

$$\frac{V(\rho_e)}{V^*} - 1 \leq 0 \quad (7-34)$$

De fulde udtryk for $V(\rho_e)$ og V^* indsættes i ligningen.

$$\frac{\sum_{e=1}^N A_e \cdot t_e}{f \cdot nelx \cdot nely \cdot A_e \cdot H} - 1 \leq 0 \quad (7-35)$$

Eftersom alle elementerne har det samme areal, kan A_e forkortes ud af ligningen. Derudover kan t_e erstattes med det fulde udtryk.

$$g(\rho_e) = \frac{\sum_{e=1}^N (\rho_e \cdot H + (1 - \rho_e) \cdot h)}{f \cdot nelx \cdot nely \cdot H} - 1 \leq 0 \quad (7-36)$$

Ligning (7-36) viser udtrykket for volumenconstrainten som den anvendes i programmet. Det er også nødvendigt at kende følsomheden, som bliver.

$$\frac{\partial g(\rho_e)}{\partial \rho_e} = \frac{H - h}{f \cdot nelx \cdot nely \cdot H} \quad (7-37)$$

8 Optimeringsresultater for en plade

Oversigt: I dette kapitel præsenteres resultater opnået ved hjælp af metoden præsenteret i kapitel 7. Der optimeres på en plade der er fast indspændt langs randene, og belastet med en harmonisk varierende jævnt fordelt fladebelastning. Først præsenteres initialdesignet og dets frekvensspektrum, for at vise hvor excitationfrekvenserne ligger i forhold til resonansfrekvenserne.

For de analyserede opgaver vises det optimerede design, frekvensspektret, udbøjningsformen i et 3D plot og et snit gennem 3D plottet for at vise de indbyrdes størrelsesforhold i udbøjningen, mellem initialdesignet, når det bliver exciteret med den givne frekvens, og det optimerede design. Udbøjningen beregnes med et lille program der anvender modalanalyse, og det er amplituderne der vises.

8.1 Initialdesign

Initialdesignet er den materialefordeling som er startpunktet for optimeringsrutinen. Overalt i dette kapitel er initialdesignet det samme og volumen densiteten, ρ_e , er 0.5 over hele pladen. Det svarer til en volumenfraktion på 0.67. Pladen har et forhold mellem den maksimale tykkelse, H , og den minimale tykkelse, h , som er lig med 3.

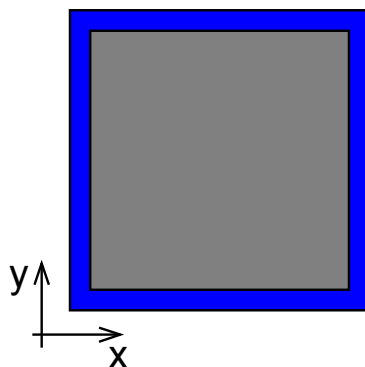


Fig. 8-1: Skitse over det fast indspændte, kvadratiske initialdesign.

Initialdesignet er vist i fig. (8-1). Den blå firkant symboliserer at pladen er fast indspændt.

Pladen er meshet med Q9 Mindlin pladeelementer og ændres ikke under optimeringen. Alle elementerne er firkantede og lige store og deres sider er parallelle med x og y akserne.

I den følgende tabel vises initialdesignets parametre.

Parametre	Værdier	Definition
E	208 GPa	E modul
γ	7850 kg/m ³	Massefylde
lx	1 m	Pladens længde i x-retningen
ly	1 m	Pladens længde i y-retningen
h	0.01 m	Pladens mindste tykkelse
H	0.03 m	Pladens maksimale tykkelse
nelx	40	Elementer i x-retningen
nely	40	Elementer i y-retningen

Tabel 8-1: Initialdesignets parametre.

Som nævnt analyseres initialdesignet, først vises frekvensspektret.

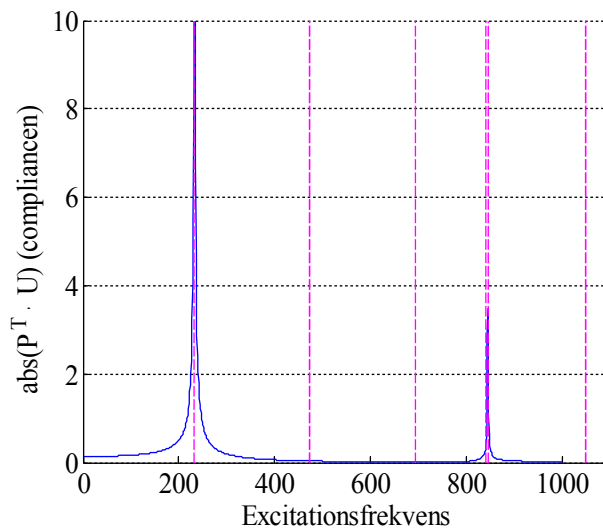


Fig. 8-2: Compliancen som funktion af excitationens frekvens for initialdesignet.

I fig. (8-2) er den blå kurve compliancen og de røde lodrette linier er egenfrekvenserne, nogle af dem er dobbelte egenfrekvenser. Den blå kurve er konstrueret ved at beregne compliancen for alle frekvenserne og så plote dem. Egenfrekvenserne er beregnet ved hjælp af MATLAB indbyggede egenfrekvensløser.

Egenfrekvenserne beregnes på samme måde som vist i sektion 6.1 på side 46. En tabel med egenfrekvenser for initialdesignet og de optimerede designs findes sidst i kapitlet på side (77).

Udbøjningsformen når pladen belastes afhænger af belastningens frekvens og type, i denne rapport antages belastningen at være jævnt fordelt. Den er således afhængig af pladens geometri, som ændrer sig ved optimeringen.

For at have et sammenligningsgrundlag for, hvordan udbøjningsformen ændrer sig, når pladens geometri bliver optimeret, vises det hvordan initialdesignet bøjer ud, når det bliver exciteret med de frekvenser som danner grundlaget for optimeringseksemplerne.

Først vises udbøjningsformen for en ren statisk belastning, $\omega_p = 0$ rad/s.

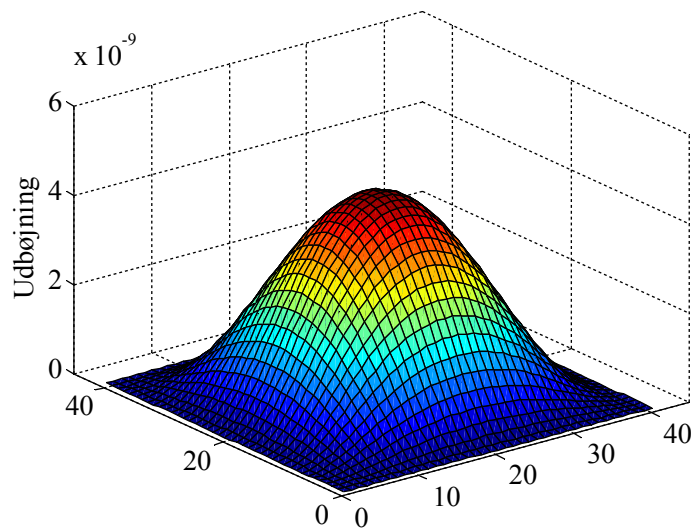


Fig. 8-3: Udbøjningsformen for initialdesignet udsat for en statisk belastning.

I den følgende figur vises udbøjningsformen for initialdesignet når den bliver exciteret med en frekvens på 100 rad/s.

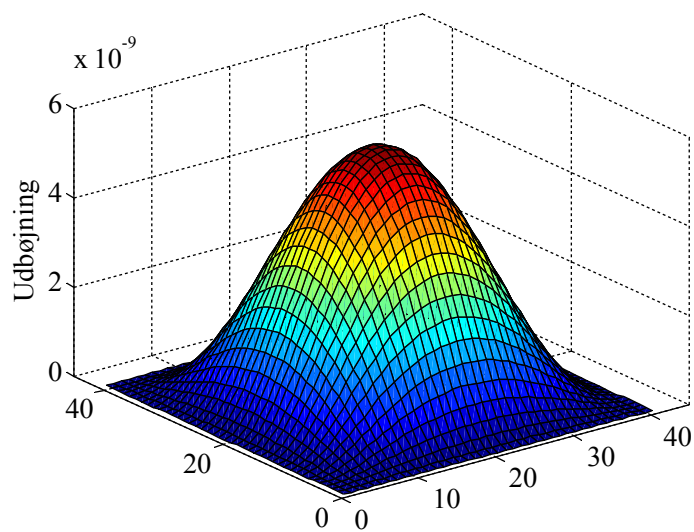


Fig. 8-4: Udbøjningsformen for initialdesignet når excitationens frekvens er på 100 rad/s.

I den følgende figur vises udbøjningsformen for initialdesignet når det bliver exciteret med en frekvens på 240 rad/s.

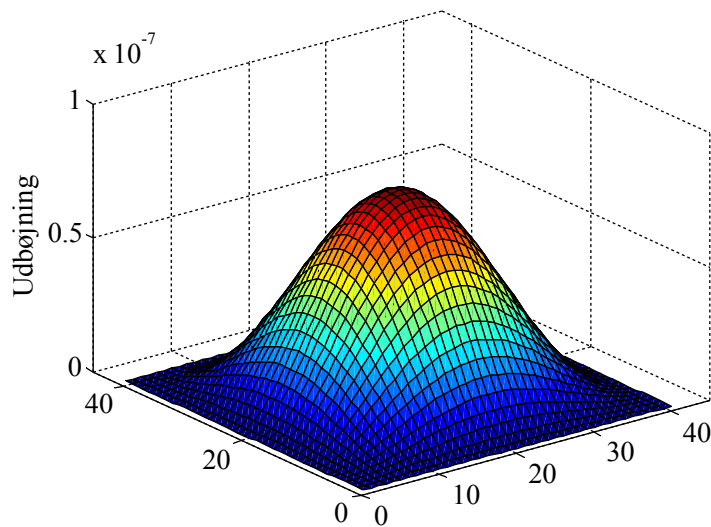


Fig. 8-5: Udbøjningsformen for initialdesignet når excitationsfrekvensen er på 240 rad/s.

I den følgende figur vises udbøjningsformen for initialdesignet, når det bliver exciteret med en frekvens på 850 rad/s.

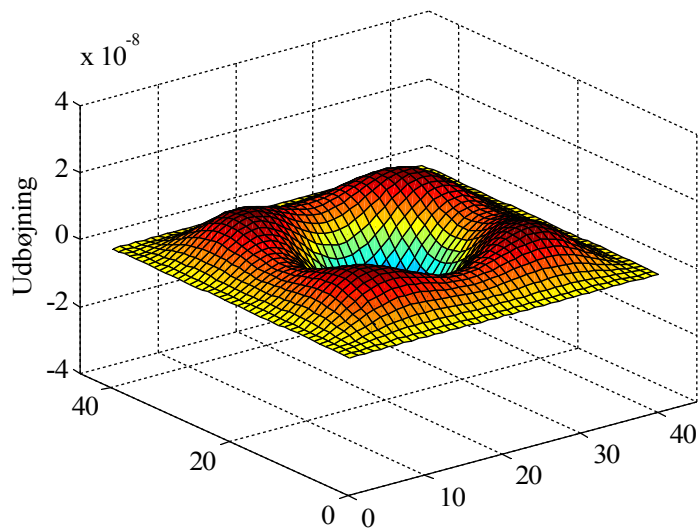


Fig. 8-6: Udbøjningsformen for initialdesignet når excitationsfrekvensen er på 850 rad/s.

Efterfølgende bliver der vist 4 eksempler hvor pladen optimeres.

8.2 Optimeret design for en statisk belastning

Denne rapport fokuserer på at optimere for en dynamisk belastning, men det er også interessant at se hvordan det optimerede design ser ud for en statisk belastning, $\omega_p = 0$. Resultatet for denne belastning er kendt så det giver grundlag for at sikre at algoritmen konvergerer mod det rigtige resultat for dette tilfælde.

Parametre	Værdier	Definition
E	208 GPa	E modul
γ	7850 kg/m ³	Massefylde
lx	1 m	Pladens længde i x-retningen
ly	1 m	Pladens længde i y-retningen
h	0.01 m	Pladens mindste tykkelse
H	0.03 m	Pladens maksimale tykkelse
nelx	40	Elementer i x-retningen
nely	40	Elementer i y-retningen
r_{\min}	2	Filtreringsradius
$\Delta\epsilon$	0.01	Stopkriterie

Tabel 8-2: Parametre anvendt under optimering med en statisk belastning.

Det optimerede design for den statiske belastning ses i følgende figur.

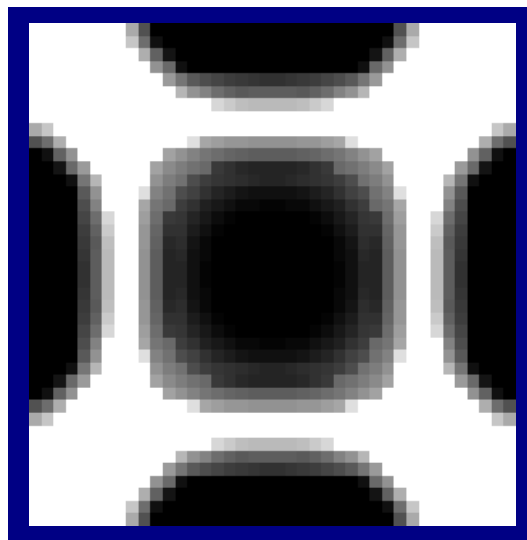


Fig. 8-7: Optimeret design for en statisk belastning.

Den blå kant i fig. (8-7) er kun med for at afgrænse pladen og vise hvor den er indspændt. I tabel (8-3) vises hvor meget compliancen er reduceret og designets diskretiseringsgrad, denne beregnes som vist i ligning (4-12) på side 31.

Initialdesignets compliance	0.1417
Det optimerede designs compliance	0.1041
Discretiseringsgrad	35.65 %

Tabel 8-3: Variation af compliancen som resultat af optimeringen og det optimerede designs discretiseringsgrad.

Analysen af det resulterende design fortsætter med frekvensspektret.

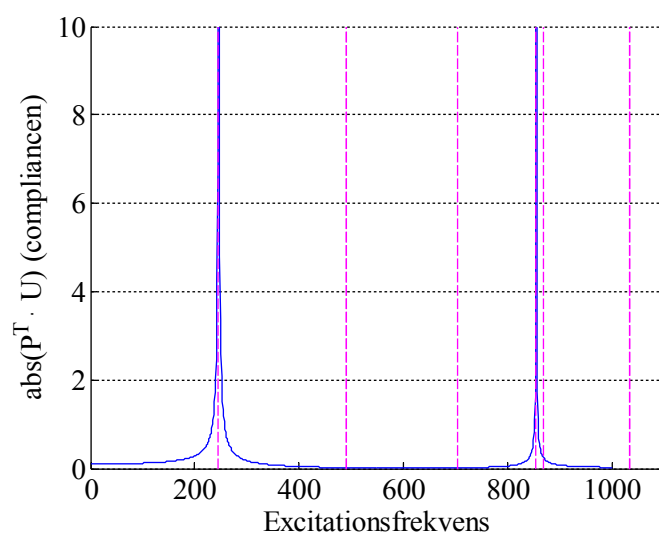


Fig. 8-8: Compliancen som funktion af excitationsfrekvensen.

Den første resonansfrekvens er lidt større for det optimerede design end for initialdesignet, de første 12 egenfrekvenser vises i tabel (8-7) på side 77. I den følgende figur vises udbøjningsformen for den optimerede plade.

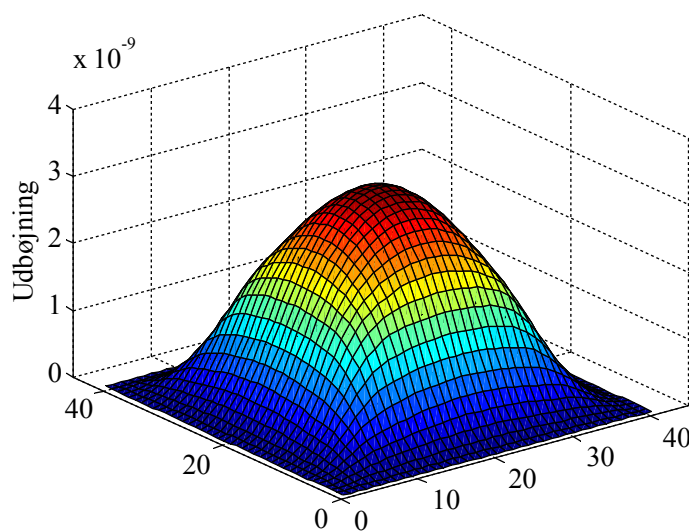


Fig. 8-9: Udbøjningsformen for det optimerede design, når det bliver exciteret med en statisk belastning.

For at illustrere hvordan udbøjningen ændrer sig med optimeringen vises der i fig. (8-10) et symmetrisnit gennem udbøjningskurven, både for det optimerede design og for initialdesignet. Det giver en bedre fornemmelse af udbøjningernes størrelsesorden end 3D plottene.

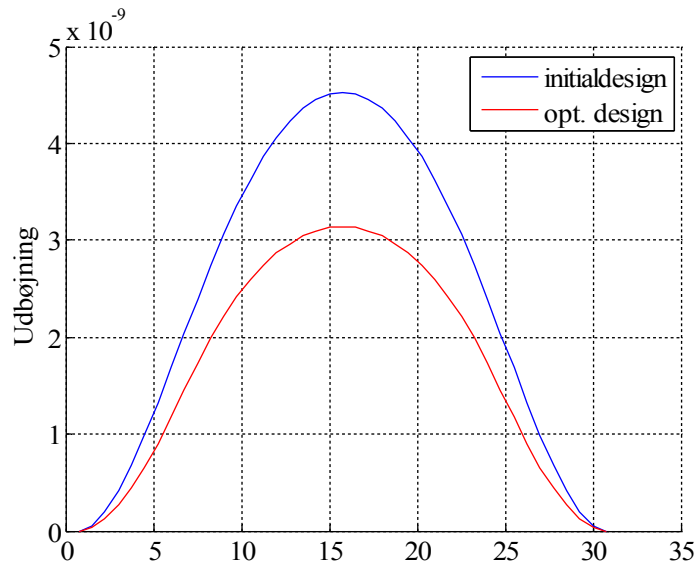


Fig. 8-10: Symmetrisnit gennem udbøjningskurven for initialdesignet og for det optimerede design. Udbøjningen har den samme form, men amplituden er reduceret.

8.3 Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=100$ rad/s)

Dette design er optimeret for en belastning med en excitationsfrekvens på 100 rad/s. Som det fremgår af fig. (8-2), som viser initialdesignets frekvensspektrum, ligger excitationsfrekvensen under initialdesignets første resonansfrekvens. Det optimerede design for denne belastning er vist i den følgende figur.

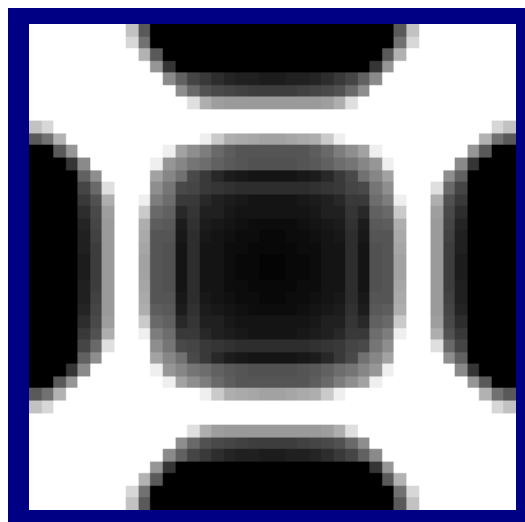


Fig 8-11: Optimeret design for en excitationsfrekvens svarende til 100 rad/s.

I tabel (8-4) vises hvor meget compliancen er reduceret samt designets diskretiseringsgrad.

Initialdesignets compliance	0.1729
Det optimerede designs compliance	0.1232
Diskretiseringsgrad	36.62 %

Tabel 8-4: Variation af compliancen som resultat af optimeringen og det optimerede design diskretiseringsgrad.

I den næste figur vises frekvensspektret for det optimerede design.

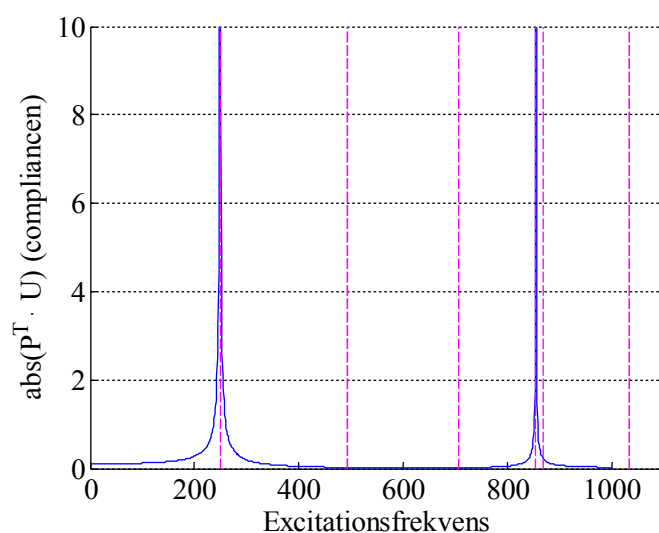


Fig. 8-12: Frekvensspektrum, variationen af compliancen som funktion af excitationsfrekvenserne for et design optimeret for 100 rad/s.

Efterfølgende vises udbøjningsformen for det optimerede design når det bliver exciteret med en frekvens på 100 rad/s.

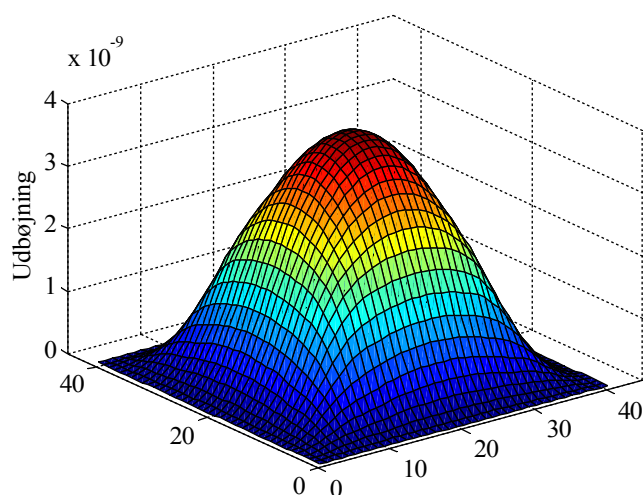


Fig. 8-13: Udbøjningsformen for et optimeret design svarende til $\omega_p = 100$ rad/s, der exciteres med denne frekvens.

For at illustrere hvordan udbøjningen ændrer sig med optimeringen, vises i figur (8-14) et snit gennem udbøjningskurven for det optimerede design og for initialdesignet.

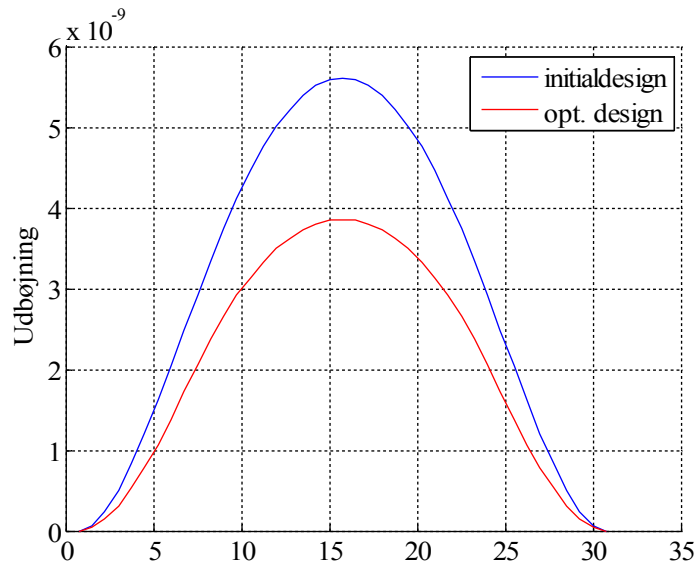


Fig. 8-14: Symmetrisnit gennem udbøjningsformen for initialdesignet og for det optimerede design exciteret med $\omega_p = 100$ rad/s.

Som tilfældet var med den statiske belastning, så er formen af udbøjningen den samme, men amplituden for det optimerede design er mindre.

8.4 Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=240$ rad/s)

Denne frekvens ligger lige over initialdesignets første resonansfrekvens, så løsningen vil ligge mellem den første og den anden resonansfrekvens. I den følgende figur vises det optimerede resultat.

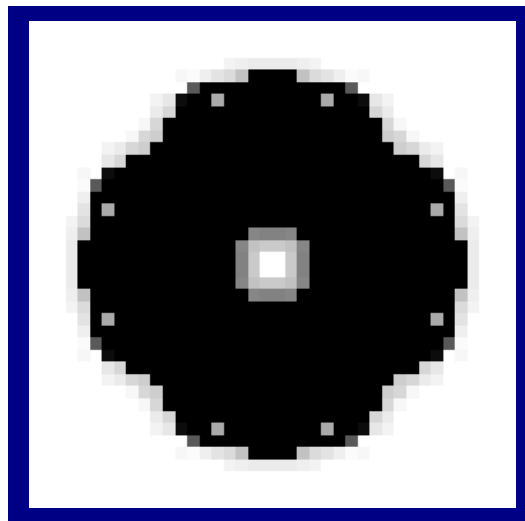


Fig. 8-15: Optimeret design for en belastning med en excitationsfrekvens på 240 rad/s.

I tabel (8-5) vises hvor meget compliancen er reduceret samt designets diskretiseringsgrad.

Initialdesignets compliance	-2.1157
Det optimerede designs compliance	-0.1819
Diskretiseringsgrad	15.6 %

Tabel 8-5: Variation af compliancen som resultat af optimeringen og det optimerede design diskretiseringsgrad.

I næste figur vises frekvensspektret for det optimerede design.

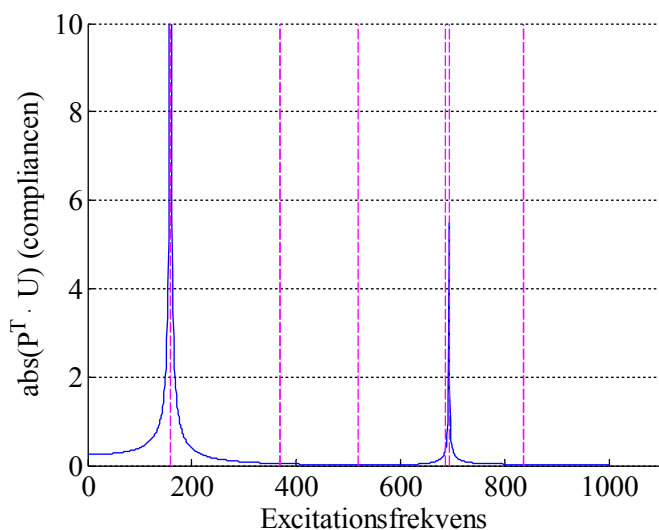


Fig. 8-16: Frekvensspektret for et design der er optimeret for en frekvens på 240 rad/s.

Excitationsfrekvensen ligger lige over resonansfrekvensen som derfor bliver skubbet ned, som det ses i fig. (8-16), og den første resonansfrekvens for det optimerede design er meget lavere end den tilsvarende for initialdesignet, se tabel (8-7) på side 77.

Efterfølgende vises udbøjningsformen for det optimerede design når det bliver exciteret med en frekvens på 240 rad/s.

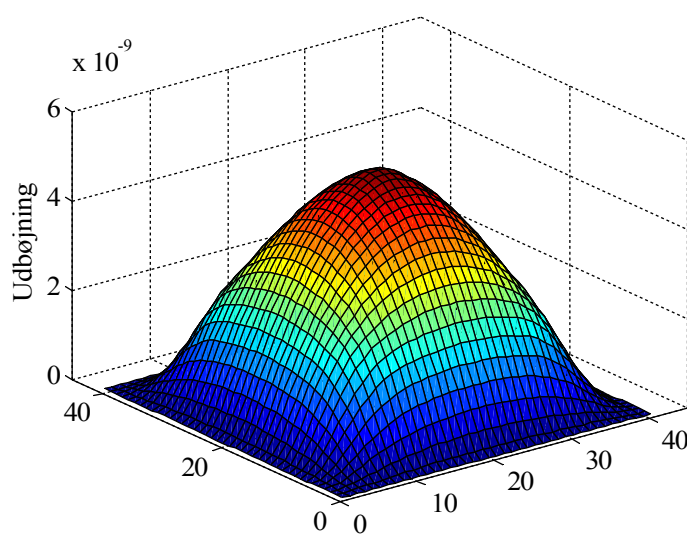


Fig. 8-17: Udbøjningsformen for et optimeret design svarende til $\omega_p = 240$ rad/s, der exciteres med denne frekvens.

For at illustrere hvordan udbøjningerne ændrer sig med optimeringen så vises der et symmetrisnit gennem udbøjningskurven for det optimerede design og for initialdesignet.

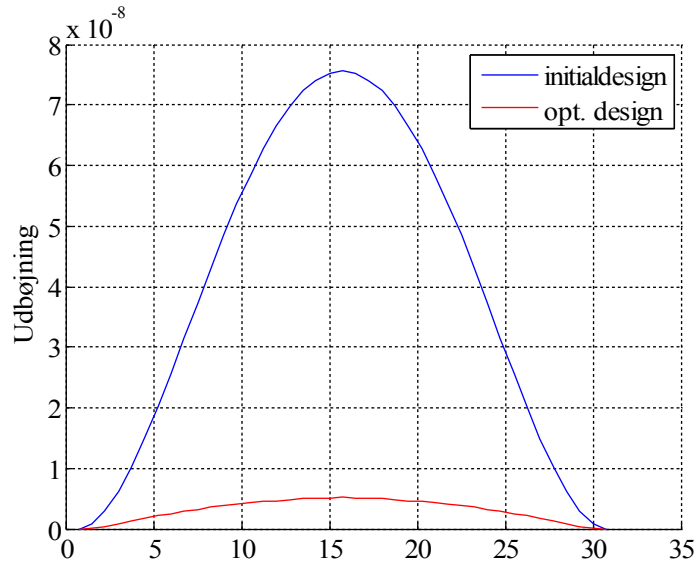


Fig. 8-18: Symmetrisnit gennem udbøjningsformen for initialdesignet og for det optimerede design når dette bliver exciteret med en frekvens på 240 rad/s.

Udbøjningsformen er den samme for det optimerede design og for initialdesignet, men reduktionen af amplituden er meget stor. Det hænger sammen med, at excitationsfrekvensen ligger meget tæt på initialdesignets resonansfrekvens, og betyder at ændringer i resonansfrekvenserne har meget stor indflydelse på udbøjningen og compliancen.

8.5 Optimeret design for dynamisk belastning ($\omega_p=850$ rad/s)

Dette design er optimeret for en excitationsfrekvens på 850 rad/s, der ligger lige over den anden resonansfrekvens, løsningen ligger altså mellem den anden og tredje resonansfrekvens. Det optimerede design vises i den følgende figur.

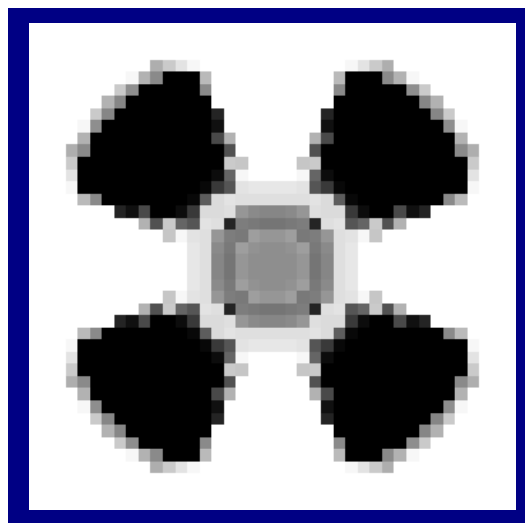


Fig. 8-19: Optimeret design for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 850 rad/s.

I tabel (8-5) vises hvor meget compliancen er reduceret samt designets diskretiseringsgrad.

Initialdesignets compliance	-0.2216
Det optimerede designs compliance	-0.0168
Diskretiseringsgraden	27.4 %

Tabel 8-6: Variation af compliancen som resultat af optimeringen og det optimerede design diskretiseringsgrad.

I følgende figur vises frekvensspektret for det optimerede design:

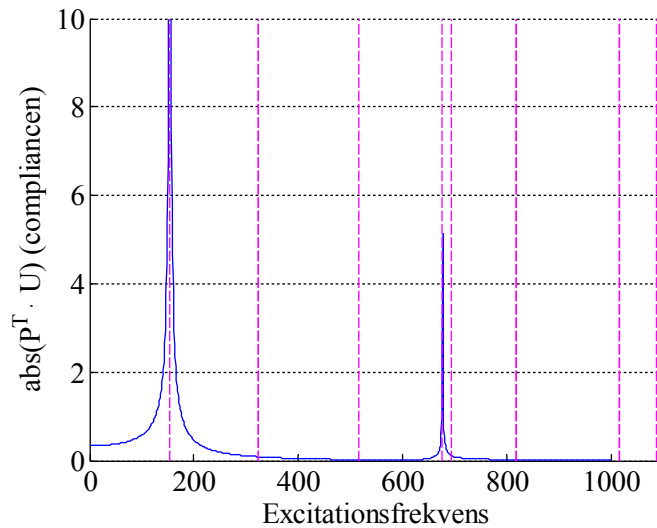


Fig. 8-20: Frekvensspektret for et design der er optimeret for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 850 rad/s.

Efterfølgende vises udbøjningsformen for det optimerede design når det exciteres med en frekvens på 850 rad/s.

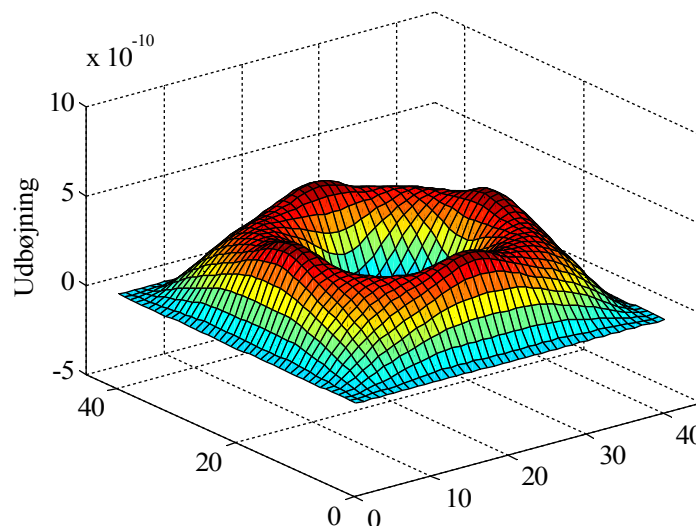


Fig. 8-21: Udbøjningsformen for et design der er optimeret svarende til $\omega_p = 850$ rad/s, når det exciteres med denne frekvens.

For at illustrere hvordan udbøjningen ændrer sig med optimeringen vises et snit gennem udbøjningskurven for det optimerede design og for initialdesignet.

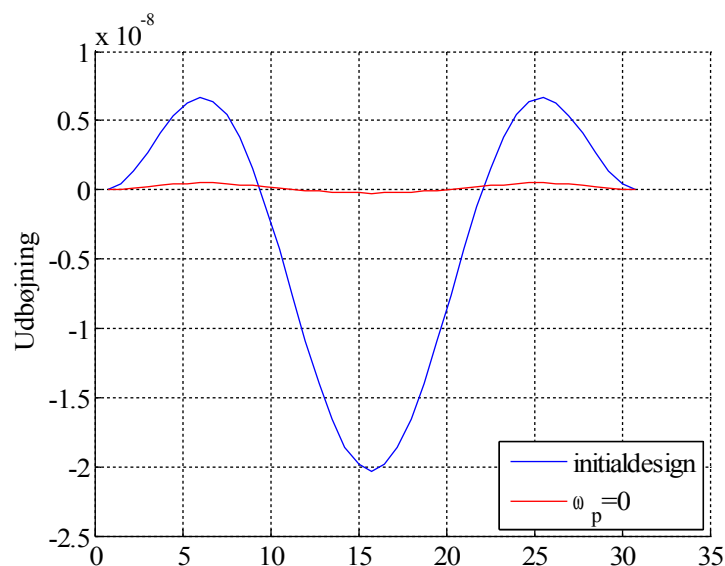


Fig. 8-22: Symmetrisnit gennem udbøjningsformen for initialdesignet og for det optimerede design når dette exciteres med en frekvens på 850 rad/s.

Udbøjningsformen er nogenlunde den samme for initialdesignet og for det optimerede design. Ved at se på 3D plottet i figur (8-21) er det dog tydeligt, at det er nogle ændringer; de 4 hjørner er blevet fladet ud og i snittet gennem udbøjningsformen ses det at reduktionen af amplituden er meget stor. Resonansfrekvenserne bliver også skubbet meget langt væk fra excitationens frekvens.

Efterfølgende vises en tabel med egenfrekvenserne for de forskellige design.

Egenfrekvens [rad/sec]	Initial Design	Statisk Optimeret	Dynamisk 100	Dynamisk 240	Dynamisk 850
1 egenfrekvens	232,8	245,7	248,6	158,7	153,7
2 egenfrekvens	472,2	490,3	493,2	369,1	323,9
3 egenfrekvens	472,2	490,3	493,2	369,1	323,9
4 egenfrekvens	692,1	702,3	705,7	517,4	516,9
5 egenfrekvens	840,2	854	853,8	684,6	676,7
6 egenfrekvens	844,5	868,8	867,9	692,6	692,6
7 egenfrekvens	1047,5	1032,8	1033,9	835,7	818,5
8 egenfrekvens	1047,5	1032,8	1033,9	835,7	818,5
9 egenfrekvens	1332,4	1311,3	1312	1133,6	1015
10 egenfrekvens	1332,4	1322,5	1321,9	1133,6	1015
11 egenfrekvens	1386	1322,5	1321,9	1138,7	1086,4
12 egenfrekvens	1523,1	1335,9	1343,2	1232,4	1117,8

Tabel 8-7: Tabel over de 12 første egenfrekvenser for alle designs.

8.6 Problemer

Der har vist sig at være nogle problemer med programmet. Der er præsenteret resultater for 4 forskellige frekvenser fra 0 og op til den anden resonansfrekvens for det initiale design, som ligger ved 844.5 rad/s. Ved forsøg på at optimere lige over den tredje resonansfrekvens for initialdesignet, som ligger ved 1386 rad/s, har der været nogle stabilitetsproblemer, og det har ikke været muligt at få optimeringen til at konvergere.

Det kan skyldes den måde som optimeringen foregår på. I de optimeringer der er vist eksempler på, fastsættes excitationens frekvens fra begyndelsen, og ændres ikke under optimeringen. Der anvendes ikke nogen form for kontinuationsmetode som den der bruges i kapitel 5 og 6, og det kan give anledning til problemer.

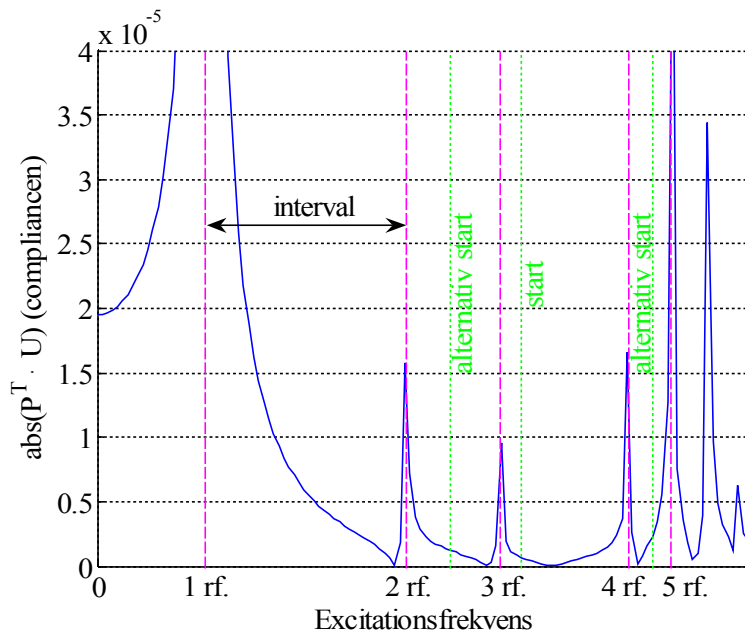


Fig. 8-23: Skema over resonansfrekvenserne, med rf. menes resonansfrekvens.

I det foreliggende tilfælde opstår problemet, når der optimeres for en foreskrevet excitationens frekvens, der ligger lige over den 3. resonansfrekvens for det initiale design, men ved at starte optimeringen fra den givne excitationens frekvens, er løsningen tvunget til også at ligge mellem den 3. og 4. resonansfrekvens for det optimerede design. En gradientbaseret løser, kan nemlig ikke passere forbi resonansfrekvenserne, men vil gå i retning af det minimum, der ligger mellem den 3. og 4. resonansfrekvens.

Hvis løsningen ikke ligger mellem de to resonansfrekvenser som er valgt fra start, vil fremgangsmåden således ikke være i stand til at finde løsningen. Det er vigtigt at huske på, at det frekvensspektrum, der startes ud fra, er for initialdesignet, og efterhånden som optimeringen skrider frem, kan der opstå store ændringer i dette diagram, og derfor kan det være at løsningen ligger i et andet frekvensinterval for det optimerede design.

For at løse dette problem kan kontinuationsmetoden anvendes, dvs. startfrekvensen for optimeringen kan vælges at ligge i et andet interval end det, hvor den foreskrevne frekvens ligger. De alternative startværdier kan vælges at ligge i et interval som enten er over eller under den frekvens, der optimeres for. Ved at starte i et andet interval, kan dette skubbes opad eller nedad indtil det indeholder den foreskrevne frekvens, og en løsning kan bestemmes.

9 Konklusion

I dette projekt er udført topologioptimering forskellige strukturer, en bjælkelignende struktur og en plade. Der optimeres for at minimere den dynamiske compliance svarende til en belastning der har en given excitationsfrekvens, amplitude og belastningstype⁸. Det har vist sig at belastningens amplitude stort set ikke har nogen indflydelse på det resulterende design. Excitationsfrekvensen derimod har en afgørende betydning for, hvordan det resulterende design kommer til at se ud.

Der har ikke været tid til at gennemføre forsøg med forskellige randbetingelser eller med andre belastningstyper, men ud fra litteraturen og erfaringer med programmet er det klart, at de også har en stor indflydelse på resultatet.

I kapitel 6 hvor der optimeres på en bro-lignende konstruktion for forskellige excitationsfrekvenser er det interessant at lægge mærke til, at selv om designet stort set ikke har nogle synlige ændringer, så er egenfrekvenserne for de resulterende designs forskellige. Det er ganske vist ikke store ændringer, men det viser sig dog, at selv meget små designændringer har stor betydning. Det fører til et af de problemer som de udviklede programmer har, nemlig at det er svært at få resultaterne ud. Resultatet er et billede, men der er ingen mål, og det er ikke en konstruktionstegning som kan anvendes direkte. En god ide til at forbedre programmet kunne være at indbygge en subrutine, som eksporterer resultaterne til et CAD program. Det vil gøre det muligt at udnytte fordelene ved et optimeret design fuld ud.

I dette projekt har en af antagelserne været, at der ikke er nogen materialedæmpning, det ville forbedre programmet hvis det blev udvidet til også at tage en sådan med i beregningerne. En anden forbedring ville være, hvis det blev muligt at have flere belastninger med hver sin frekvens med i beregningerne.

Når programmet er ved at konvergere, er der en del iterationer hvor designændringerne er meget små, fordi objektfunktionen er meget flad omkring minimum. Det er meget vigtigt, at iterationerne fortsættes indtil programmet er helt konvergeret, da disse små ændringer har stor indflydelse på, hvor optimalt designet ender med at blive. Det anvendte stopkriterium $\epsilon \leq 0.01$ har vist sig at sikre en god konvergens, der har ikke været nogen gevinst ved at bruge et endnu skarpere konvergenskriterium, for eksempel 0.001, fordi når først 0.01 er passeret, skal der kun få extra iterationer til, for at komme ned på det skarpere konvergenskriterium.

Når der optimeres ud fra en dynamisk belastning med en given excitationsfrekvens, bliver de nærmeste resonansfrekvenser skubbet langt væk fra excitationsfrekvensen. Det er vigtigt at skelne mellem egenfrekvenser og resonansfrekvenser; dem der bliver skubbet væk er resonansfrekvenserne. De egenfrekvenser, som ikke bliver exciteret, har ikke den store betydning, når compliancen bliver minimeret, hvilket betyder at der ikke er nemt at forudsige, hvor disse egenfrekvenser bliver skubbet hen.

⁸ Med belastningstype hentydes der til om der er tale om en jævnt fordelt belastning, en kraft i et eller flere punkter, et eller flere momenter.

En optimering, der bygger på at minimere compliancen, har den fordel, at det ikke er nødvendigt at flytte alle egenfrekvenserne i arbejdsområdet, det er kun de egenfrekvenser der bliver exciteret (resonansfrekvenser) som bliver flyttet. For at udnytte dette fuldt ud er det afgørende at kende belastningens form og frekvens meget nøjagtigt. En struktur der er optimeret for én type belastning, kan have en egenfrekvens der ikke bliver exciteret som ligger meget tæt på excitationfrekvensen, men med bare en lille ændring i belastningens form, kan den blive exciteret med meget store vibrationer som konsekvens.

Takket være den anvendte materiale model så er det muligt at beregne stivhedsmatricen for et standard element en gang og bruge den for alle elementerne. Det analytiske udtryk for stivhedsmatricen beregnes i Maple og indsættes derefter i Matlab koden, det er ikke nødvendig at beregne integralet, fordi løsningen allerede er kendt, det betyder at der spares mange beregninger.

Nomenklaturliste

Kapitel 2 : Elementmetoden i et 2D problem.

a	: Elementets koordinat i x-retningen. [m]
A	: Koefficientmatricen.
b	: Elementets koordinat i y-retningen. [m]
B	: Tøjnings-forskydnings matricen.
d	: Lokale koordinater.
D	: Globale koordinater.
E	: Elasticitetsmodulet. [GPa]
E	: Konstitutive matrice.
k	: Elementets stivhedsmatrice.

K_r	: Reduceret stivhedsmatrice.
N_i	: Formfunktioner.
N	: Interpolationsfunktionerne.
R	: Belastninger.
u	: Flytninger i x-retningen.
v	: Flytninger i y-retningen.
X	: Interpolationspolynomiet koefficienter.
ε	: Tøjninger.
γ_{xy}	: Tværtøjninger.

Kapitel 3 : Minimering af compliancen.

A_e	: Elementets areal. [m ²]
B	: Tøjnings-forskydnings matricen.
C	: Compliancen.
D	: Flytninger.
E	: Elasticitetsmodulet. [N/mm ²]
E	: Konstitutive matrice.
E_e	: Elementets stivhed.
E_0	: Materialets stivhed.
f	: Volumenfraktion.
F	: Volumenkræfterne. [N]
k	: Iterationsnummer.
k_0	: Stivhedsmatrice for standard elementet.
k_e	: Lokale stivhedsmatrice.
K	: Stivhedsmatrice.
$nelx$: Antal elementer i x-retningen.
$nely$: Antal elementer i y-retningen.
N	: Antallet af elementer.
p	: penaliseringsfaktoren.

P	: Overfladekræfter. [N/m ²]
R	: Belastninger.
t_e	: Elementets tykkelse. [m]
U_e	: Elastiske energi. [J]
u_e	: Flytninger på elementniveau. [m]
U	: Flytninger. [m]
v_{0e}	: Materialets volumen. [m ³]
v_e	: Elementets volumen. [m ³]
$V(\rho_e)$: Totale pladevolumen. [m ³]
V^*	: Designvolumenet. [m ³]
V_0	: Volumen af det totale designområde. [m ³]
W	: Ydre kræfters arbejde. [J]
ρ_e	: Volumendensiteten.
λ	: Lagrange multiplikator.
$\Delta\varepsilon$: Stopkriterie.
ε	: Tøjninger.
Π	: Totale potentiale energi. [J]

Kapitel 4 : Filtrering

b	: Filtreringsfaktor.
E	: Elasticitetsmodulet. [GPa]
F	: Objektfunktionen.
H	: Konvolutionsfilter.
lx	: Længde i x-retningen. [m]
ly	: Længde i y-retningen. [m]
N	: Antal elementer.

$nelx$: Antal elementer i x-retningen.
$nely$: Antal elementer i y-retningen.
r_{min}	: Filtterradius.
t	: Elementets tykkelse. [m]
$\omega(x_i)$: Vægtfunktionen.
ρ	: Volumendensiteten.
γ	: Massefylde. [kg/m ³]

Kapitel 5 : Dynamisk optimering i 2D

C	: Compliancen.
C_s	: Designets statiske compliance.
$C_{s,min}$: Designets minimale statiske compliance.
C	: Dæmpningsmatricen.
F	: Objektfunktionen.
k_e	: Elementstivhedsmatrice.
k_{de}	: Lokale dynamiske stivhedsmatrice.
k_0	: Lokale stivhedsmatrice.
K	: Stivhedsmatricen.

p	: Penaliseringsfaktoren for stivhedsmatricen.
P	: Belastningsamplituden. [N]
P_{har}	: Harmonisk varierende belastning.
P	: Belastningsamplituderne.
q	: Penaliseringsfaktoren for massematricen.
V_0	: Volumen af totalt tilladelige designområde. [m ³]
V^*	: Designvolumenet. [m ³]
$V(\rho_e)$: Totale pladevolumen. [m ³]
u	: Flytningsamplituderne. [m]
u_e	: Lokale flytningsvektor. [m]

K_d : Dynamisk stivhedsmatrice.
 m_0 : Lokale massematrice.
 m_e : Elementmassematrice.
 M : Massematricen.
 N : Antallet af elementer.

u_e : Lokale flytningsvektor. [m]
 x : Flytninger.
 ρ_e : Volumendensiteten.
 ω_p : Påtrykte excitationsfrekvens. [rad/s]

Kapitel 6 : Optimeringsresultater i 2D

D : Dynamiske matrice.
 E : Elasticitetsmodul. [GPa]
 F : Belastning. [N]
 K : Stivhedsmatricen.
 l_x : Længde i x-retningen. [m]
 l_y : Længde i y-retningen. [m]
 M : Massematricen.
 $nelx$: Antal elementer i x-retningen.
 $nely$: Antal elementer i y-retningen.

N : Antal elementer.
 p : Penaliseringsfaktoren.
 r_{min} : Filtradius.
 t : Elementets tykkelse. [m]
 X : Egenvektorerne.
 ρ : Volumendensiteten.
 γ : Massefylde. [kg/m³]
 λ : Egenværdier.
 $\Delta \epsilon$: Stopkriterie.

Kapitel 7 : Optimering af en plade

A_e : Elementets areal. [m²]
 B_b : Tøjnings-forskydningsmatricen for bøjning.
 B_s : Tøjnings-forskydningsmatricen for tværkraften.
 C : Compliance.
 E : Young's modul eller elasticitetsmodul. [GPa]
 f : Volumenfractionen.
 F : Objektfunktionen.
 G : Tværmodul. [GPa]
 h : Minimal pladetykkelse. [m]
 H : Maksimal pladetykkelse. [m]
 k : Lokal stivhedsmatrice.
 K : Stivhedsmatricen.
 k_b : Bøjning stivhedsmatrice.
 K_d : Dynamisk stivhedsmatrice.
 k_d : Lokale dynamiske stivhedsmatrice.
 k_{dh} : Lokal dynamisk stivhedsmatrice, tykkelse h .
 k_h : Lokal stivhedsmatrice med tykkelsen h .
 k_H : Lokal stivhedsmatrice med tykkelsen H .
 k_{dH} : Lokal dynamisk stivhedsmatrice, tykkelse H .
 k_s : Tværkraft stivhedsmatrice.

m : Lokal massematrice.
 m_H : Lokal massematrice med tykkelsen H .
 m_h : Lokal massematrice med tykkelsen h .
 M : Massematricen.
 $nelx$: Antal elementer i x-retningen.
 $nely$: Antal elementer i y-retningen.
 N : Interpolationsfunktionerne.
 p : Penaliseringsfaktoren.
 P : Belastningsamplituderne. [N]
 t_e : Elementets tykkelse. [m]
 U : Flytningsamplituderne.
 V^* : Designvolumenet. [m³]
 V_0 : Volumen af totalt tilladelige designområde. [m³]
 $V(\rho_e)$: Totale pladevolumen. [m³]
 ω_p : Påtrykte excitationsfrekvens. [rad/s]
 ρ_e : Volumendensiteten.
 v : Tværkontraktionstal.
 γ : Massefylde. [kg/m³]
 κ : Tværkraftskorrektionsfaktor.

Kapitel 8 : Optimeringsresultater for en plade

E : Elasticitetsmodul. [GPa]
 l_x : Længde i x-retningen. [m]
 l_y : Længde i y-retningen. [m]
 $nelx$: Antal elementer i x-retningen.
 $nely$: Antal elementer i y-retningen.
 N : Antal elementer.

r_{min} : Filtradius.
 t : Elementets tykkelse. [m]
 γ : Massefylde. [kg/m³]
 ρ_e : Volumendensiteten.
 $\Delta \epsilon$: Stopkriteriet.

Litteraturliste.

[BOS01] M. P. Bendsøe; O. Sigmund. *Material interpolation schemes in topology optimization*. Archive of Applied Mechanics (1999) **69**, 635-654

[CMP00] Cook, Robert D.; Malkus, David S.; Plesha, Michael E.; Witt, Robert J.. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 2002. JOHN WILEY & SONS, INC. ISBN:0-471-35605-0.

[GPB01] J. K. Guest; J. H. Prévost; T. Belytschko. *Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering (2004) **61**, 238-254

[JDN01] Jianbin Du; Niels Olhoff. *Minimization of sound radiation from vibrating bi-material structures using topology optimization*. Struct Multidisc Optim (2007) **33**, 305-321

[JOG01] Jog, C. S.. *Topology Design of Structures subjected to periodic loading*. Journal of Sound and Vibration (2001) **253**, 687-709

[KRS01] Svanberg, Krister. *The method of moving asymptotes A new method for structural optimization*. International Journal for Numerical methods in engineering (1987) **24**, 359-373

[KRS02] Svanberg, Krister. *The method of Moving Asymptotes - Modelling aspects and solutions schemes*.

[KRS03] Svanberg Krister. *Some modelling aspects for the Matlab implementation of MMA*.

[LNO01] Krog, Lars A.; Olhoff, Niels. *Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives*. Computer and Structures (1999) **72**, 535-563

[MAB01] Bhatti, M. Asghar. *Advanced Topics in finite element analysis of structures*. 2006. JOHN WILEY & SONS. ISBN:0471648078.

[NOL01] Olhoff, Niels ; Du, Jianbin. *Topological design for minimum dynamic compliance of continuum structures subjected to forced vibration*. INSTITUTE OF MECHANICAL ENGINEERING, AALBORG UNIVERSITY (2007) , 25

[NOL02] Eschenauer, Hans A.; Olhoff, Niels. *Topology optimization of continuum structures: A review*. Applied Mechanics Review (2001) **4**, 331-390

[NOL03] Olhoff, N; Rønholt, E.; Scheel, J.. *Topology optimization of three-dimensional structures using optimum microstructures*. Structural Optimization (1998) **16**,

[NTR01] Niels Olhoff; Jan Thomsen; John Rasmussen. *Topology optimization of bi-material structures*. Optimal Design with Advanced Materials (1993) , 191-206

[OSI01] Ole Sigmund. *On the design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization*. Mechanics Based Design of Structures and Machines (1997) **25(4)**, 493-524

[OSP01] Sigmund, O.; Petersson, J.. *Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima*. Structural Optimization (1998) **16**, 68-75

[PWK01] Pratt, William K.. *Digital Image Processing*. 1991. JOHN WILEY AND SONS. ISBN:0471857661.

[SIG01] Sigmund, Ole. *Design of Material Structures Using Topology Optimization*. DCAMM Report S 69 December 1994. TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

[SIG02] Sigmund, O. ; Bendsøe, M.P.. *Topology Optimization Theory, Methods, and Applications*. 2003. SPRINGER VERLAG. ISBN:3-540-42992-1.

[SIG04] Ole Sigmund. *Morphology-based black and white filters for topology optimization*. Struct Multidisc Optim (2007) **33**, 401-424

[SIG05] Sigmund, Ole. *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. . STRUCT MULTIDISC OPTIM, 21. 2001. www.topopt.dtu.dk

[TDM01] Tortorelli, Daniel; Micaleris, Panagiotis. *Design Sensitivity Analysis: Overview and Review*. Inverse Problems in Engineering (1994) **1**, 71-103

[WFC00] Carroll, W. F.. *A Primer for Finite Elements in Elastic Structures*. 1999. JOHN WILEY & SONS, INC.. ISBN:0-471-28345-2.

Appendices

A Q4 element

Oversigt. Dette appendiks indeholder en oversigt af B matricen og den komplette stivhedsmatrice for et Q4 element.

A.1 B matrice

$$B := \begin{bmatrix} \frac{-b+y}{4ab} & 0 & \frac{b-y}{4ab} & 0 & \frac{b+y}{4ab} & 0 & \frac{-b-y}{4ab} & 0 \\ 0 & \frac{-a+x}{4ab} & 0 & \frac{-a-x}{4ab} & 0 & \frac{a+x}{4ab} & 0 & \frac{a-x}{4ab} \\ \frac{-a+x}{4ab} & \frac{-b+y}{4ab} & \frac{-a-x}{4ab} & \frac{b-y}{4ab} & \frac{a+x}{4ab} & \frac{b+y}{4ab} & \frac{a-x}{4ab} & \frac{-b-y}{4ab} \end{bmatrix}$$

A.2 Stivhedsmatricen

Af pladshensyn har det været nødvendig at dele stivhedsmatricen op.

$$K = C \cdot K$$

Hvor C defineres som følger

$$C = \frac{1-\nu^2}{E}$$

$$\mathbb{K} := \begin{bmatrix}
\frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} \\
\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & -\frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{6} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} \\
-\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & -\frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & -\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{6} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} \\
\frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & -\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & -\frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} \\
-\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{6} \frac{1-\nu}{6} & -\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} \\
\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{6} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & -\frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{6} \frac{1-\nu}{6} \\
\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} \\
-\frac{3}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{4} \frac{1-\nu}{12} & \frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & -\frac{1}{8} \frac{1-\nu}{8} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6} & \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{6}
\end{bmatrix}$$

Stivhedsmatrice for et Q4 element

B Compliance plots

Indhold: Dette appendiks indeholder en serie grafer hvor der er vist hvordan compliancen varierer som en funktion af excitationens frekvens. De er også vist i rapporten, men her findes de i en større målestok, så det bliver lettere at læse graferne.

På de næste sider findes følgende figurer:

- Compliance plot for initialdesignet.
- Compliance plot for strukturen når den er optimeret til en statisk belastning.
- Compliance plot for strukturen når den er optimeret til en dynamisk belastning med en excitationens frekvens på 40 rad/s.
- Compliance plot for strukturen når den er optimeret til en dynamisk belastning med en excitationens frekvens på 60 rad/s.
- Compliance plot for strukturen når den er optimeret til en dynamisk belastning med en excitationens frekvens på 80 rad/s.

B.1 Compliance plot for initialdesign

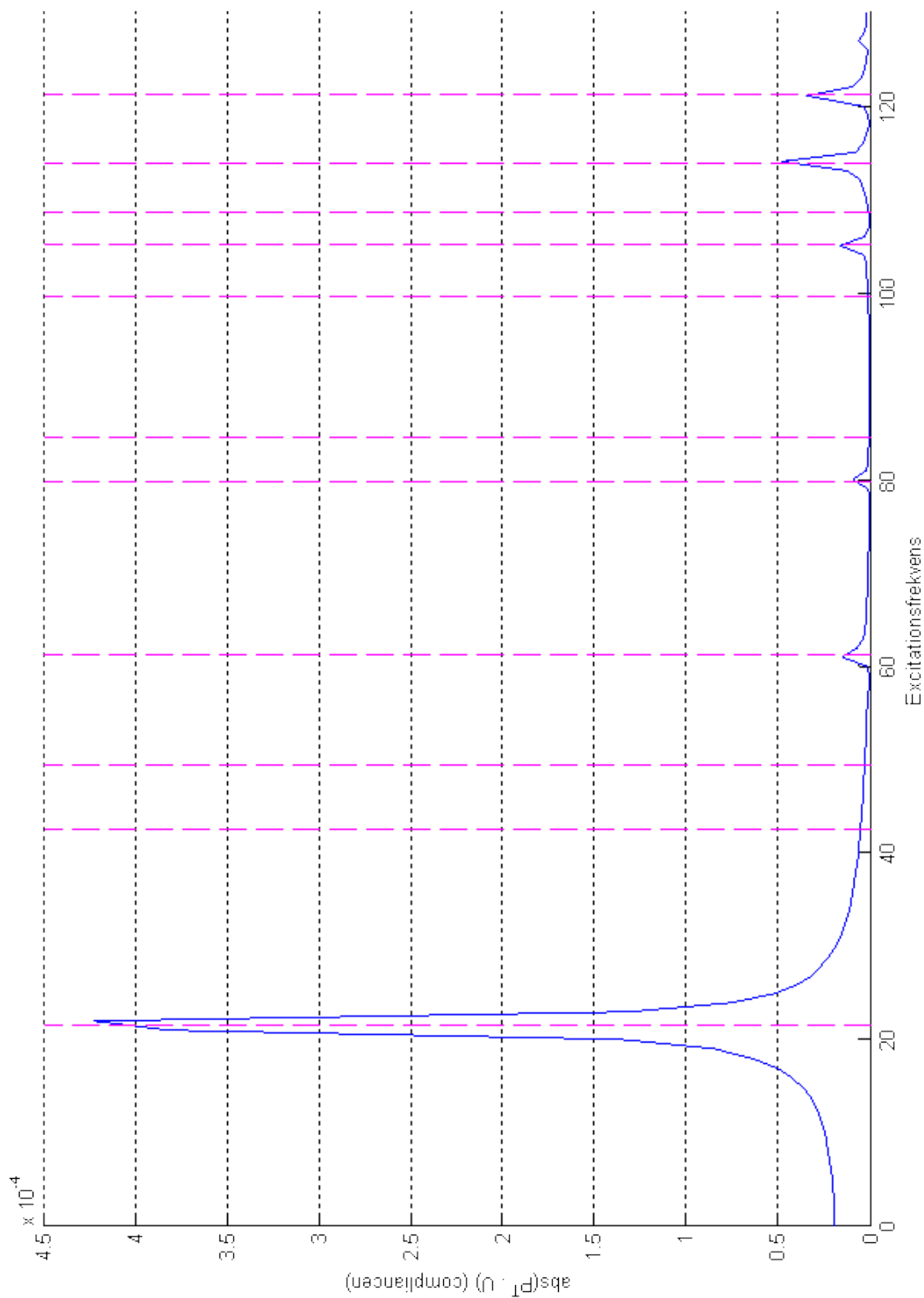


Fig B-1: Compliance som en funktion af excitationsfrekvensen for initialdesignet.

B.2 Compliance plot for statistik optimering

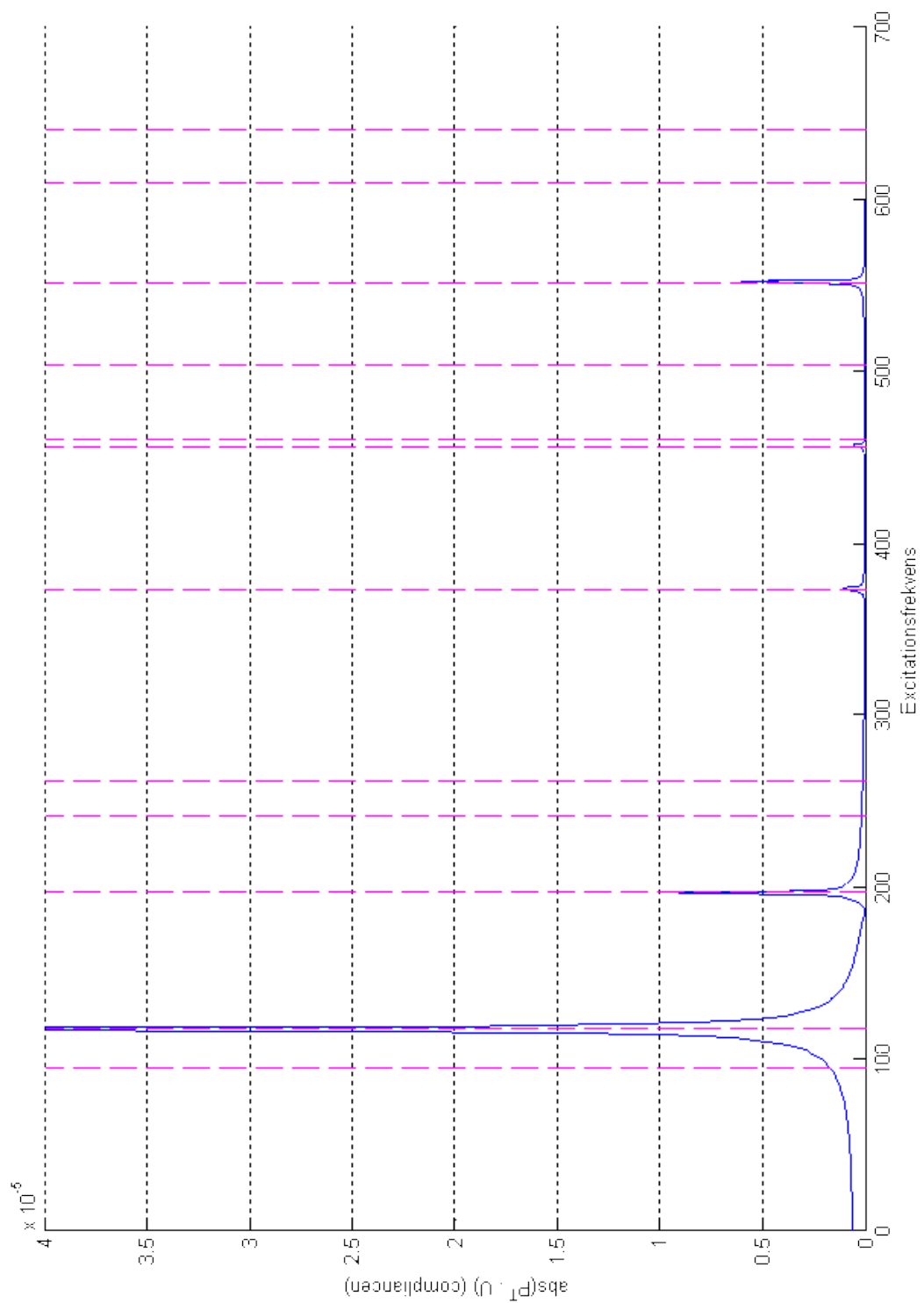


Fig. B-2: Compliance som en funktion af excitationsfrekvensen for en struktur der er optimeret til en statisk belastning.

B.3 Compliance plot for dynamisk belastning ($\omega_p=40$ rad/s)

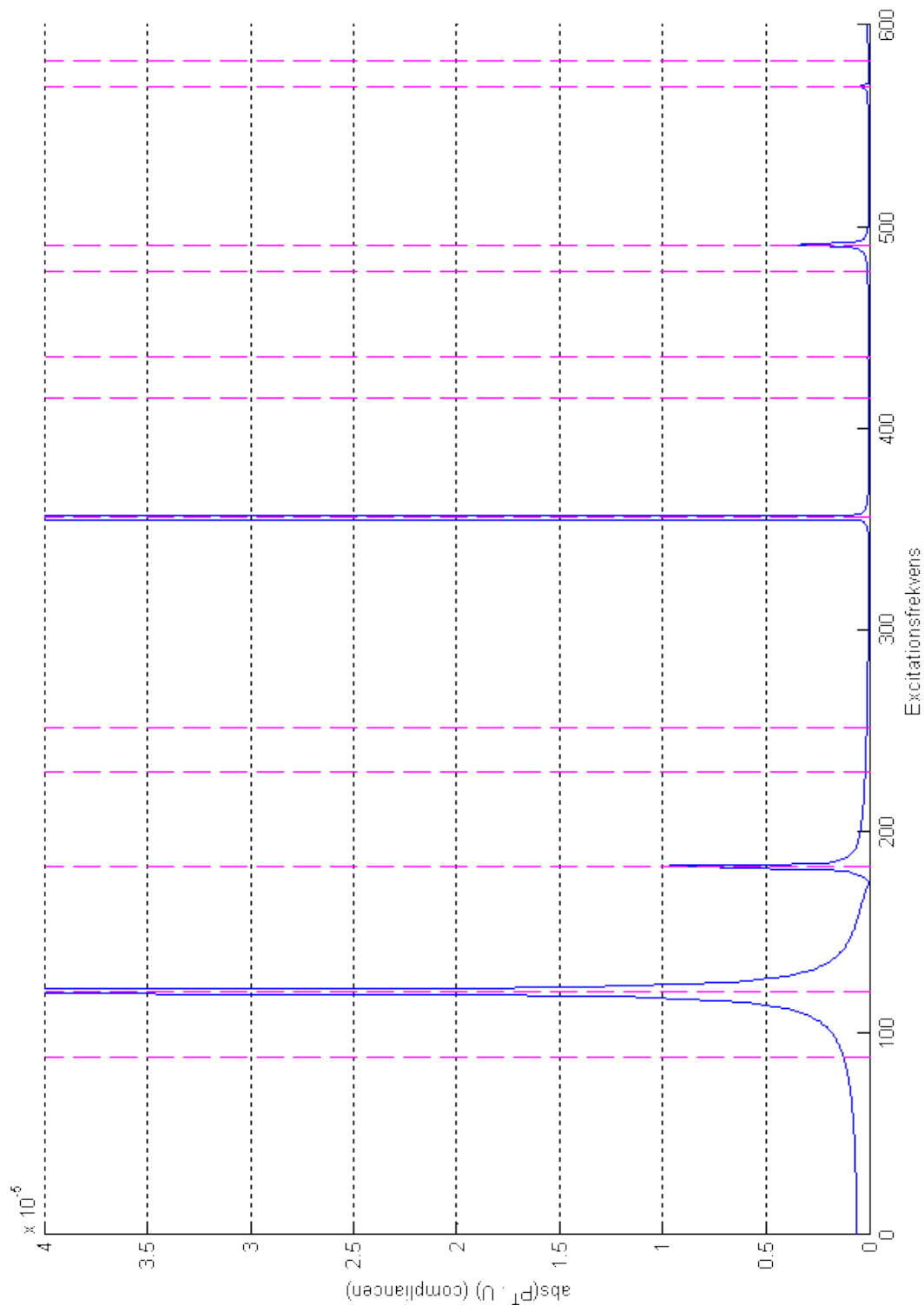


Fig. B-3: Compliance som en funktion af excitationsfrekvensen for en struktur optimeret til en belastning med en excitationsfrekvens på 40 rad/s.

B.4 Compliance plot for dynamisk belastning ($\omega_p=60$ rad/s)

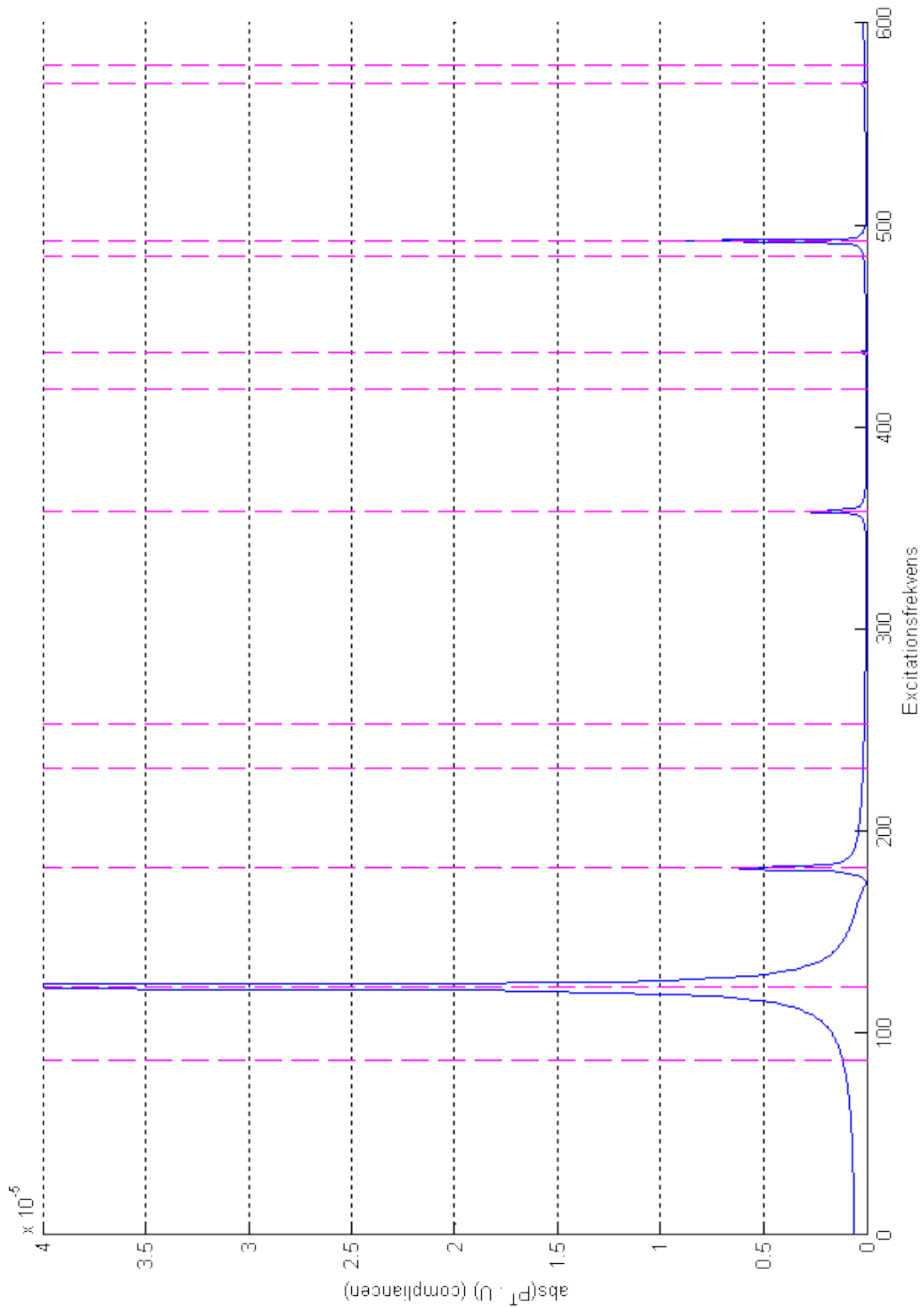


Fig. B-4: Compliance som en funktion af excitationsfrekvensen for en struktur optimeret for en dynamisk belastning med en excitationsfrekvens på 60 rad/s.

B.5 Compliance plot for dynamisk belastning ($\omega_p=80$ rad/s)

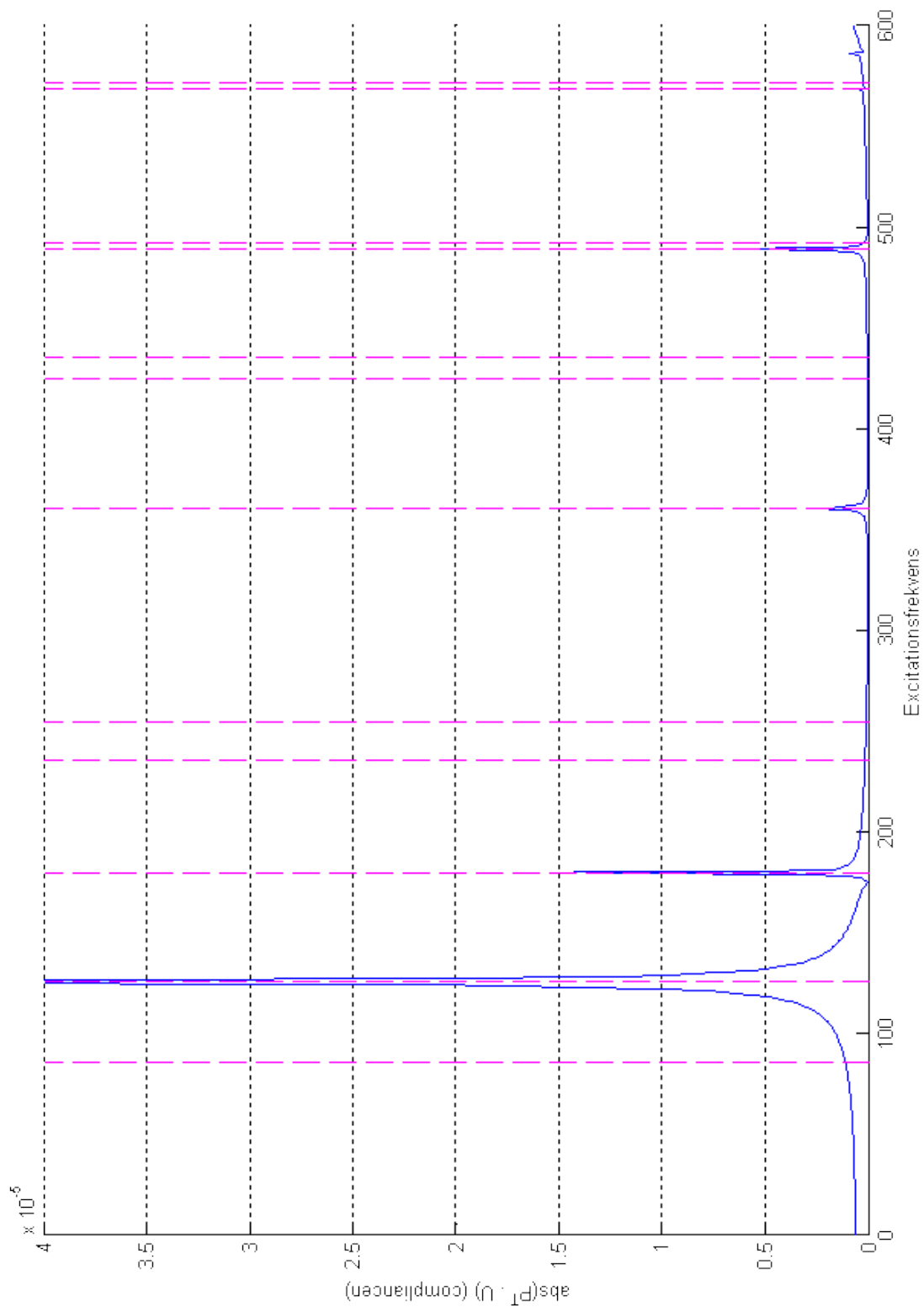


Fig. B-5: Compliance som en funktion af excitationfrekvensen for en struktur der er optimeret til en dynamisk belastning med en excitationfrekvens på 80 rad/s.

C Oversigt over programmerne på CD

Oversigt: De 2 programmer der er udviklet i forbindelse med dette projekt er vedlagt på CD. Det drejer sig om programmet til at udføre dynamisk optimering på en 2D struktur, som er gennemgået i kapitel 5 og 6. Det andet program er det endelige resultat af projektet og handler om dynamisk optimering af en plade som er gennemgået i kapitel 7 og 8.

Optimering af en 2D struktur

Det lægger i mappen ”2D opgave”. Indstillingerne for optimeringen justeres inde i filen ”topinit.m”, og de skal opdateres før programmet køres. For at køre selve optimeringen er der 2 filer der skal køres og det skal være i den givne rækkefølge.

- 1) **start.m** Denne fil initierer alle de nødvendige variabler.
- 2) **topmain.m** Denne fil eksekverer selve optimeringen.

Inde i mappen hvor programmet er, lægger der også en del resultatfiler fra de optimeringer der er præsenteret i rapporten.

Optimering af en plade

Det lægger i mappen ”Plader”. Indstillingerne for optimeringen justeres inde i filen ”topinit.m”, og de skal opdateres før programmet køres. For at køre selve optimeringen er der 2 filer der skal køres og det skal være i den givne rækkefølge.

- 1) **start.m** Denne fil initierer alle de nødvendige variabler.
- 2) **topmain.m** Denne fil eksekverer selve optimeringen.

Inde i mappen hvor programmet er, lægger der også en del resultatfiler fra de optimeringer der er præsenteret i rapporten.

D Oversigt over CD

Oversigt: Oversigt over de programmer og mapper som findes på CD.

Beskrivelse af mappernes indhold

<2D opgave>	Indeholder programmet der bruges til at optimere en 2D struktur og de optimeringsresultater som er præsenteret i rapporten.
<Maple>	Indeholder de Maple programmer der bruges til at beregne de analytiske udtryk for stivheds- og massematricerne som senere indsættes i Matlab.
<Plader>	Indeholder programmet der bruges til at optimere en pladestruktur og de optimeringsresultater som er præsenteret i rapporten.
<Rapport.pdf>	Elektronisk udgave af rapporten.